

## Сведения о журнале

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-19706 от 13 апреля 2005 г. Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода) и 80344 (год).

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, сформированный Минобрнауки России, для публикаций основных научных результатов диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук. Перечень вступил в силу 1 декабря 2015 г.

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АНДРЕЕВ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (МГСУ, Москва),  
БАЖЕНОВ В.А., акад. Национальной Академии педагогических наук Украины, д.т.н., профессор (КНУСА, Киев, Украина),  
БОНДАРЕНКО В.М., акад. РААСН, д.т.н., профессор (НИИСФ РААСН, Москва),  
ВАНИН В.В., д.т.н., профессор (Киевский политехнический университет, Украина),  
ГОЛИК В.И., д. член РАЕН, д.т.н., профессор (Северо-Кавказский ГТУ, Владикавказ),  
ИВАНОВ С.П., д.т.н., профессор (ПГТУ – ВОЛГАТЕХ, Йошкар-Ола),  
КАРПЕНКО Н.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (НИИСФ РААСН, Москва),  
КОЛЧУНОВ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ЮЗГУ, Курск),  
KRASIC SONJA, PhD (University of Nis, Nis, Serbia),  
КРИВОШАПКО С.Н., д.т.н., профессор (РУДН, Москва),  
ЛЯХОВИЧ Л.С., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ТГАСА, Томск),  
ГРУДЕВ И.Д., д.т.н., профессор, почетный член РААСН (ЦНИИПСК, Москва),  
ПОТАПОВ В.Д., д.т.н., профессор (МГУПС РФ (МИИТ), Москва),  
САНЖАРОВСКИЙ Р.С., д.т.н., проф. (Евразийский Нац. У-т им. Гумилева, Казахстан),  
ТРАВУШ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ЭНПИ, Москва),  
ЯКУПОВ Н.М., чл- корр. РИА, д.т.н., профессор (ИММ КазНЦ РАН, Казань)

### РЕДАКЦИЯ:

д.т.н., профессор С.Н. Кривошапко – *главный редактор*,  
д.т.н., профессор В.Н. Иванов – *зам. главного редактора*,  
д.т.н. С.Е. Лисичкин; д.т.н., профессор Е.М. Зверяев; д.т.н., профессор В.И. Обозов;  
д.т.н., профессор В.П. Агапов; И.А. Мамиева – *исполнительный редактор*;  
Е.А. Гринько – *редактор англоязычного Интернет-сайта журнала*.

Интернет-сайты журнала:  
<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>,  
<http://stmj.rudn.ru>

Технический секретарь *Е.М. Тупилова*  
Компьютерная верстка *Т.И. Карелина*

**Почтовый адрес журнала:** 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН,  
Инженерная академия, Департамент Архитектуры и строительства  
Тел.: (495) 955-09-87; (495) 955-07-49; Факс: (495) 955-07-49  
E.mail: [sn\\_krivoshapko@mail.ru](mailto:sn_krivoshapko@mail.ru) или [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)  
Тираж 300 экз.

---

Учредитель: Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН

---

Типография ИПК РУДН, 117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3  
© Журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений», 2017  
© В.В. Василяка, фото на 1-ой странице обложки (Дворец Шенбрунн, Вена, Австрия)

# Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6 тел.: (495) 955-09-87; FAX: (495) 952-07-49

## С о д е р ж а н и е

№ 3, 2017 год

### Геометрические исследования срединных поверхностей тонких оболочек

*Иванов В.Н.* Формообразование поверхностей на заданных криволинейных планах..... 3

### Расчет тонких упругих оболочек

*Владимир Жан Поль.* Об исследованиях линейчатых геликоидальных оболочек в 2000-2017 годах..... 9

### Расчет и проектирование строительных конструкций

*Югов А.М., Бондарев А.Б.* Монтажное напряжённо-деформированное состояние шарнирно-стержневого покрытия склада шаров и реагентов..... 12

*Кирсанов М.Н.* К выбору решетки балочной фермы..... 23

*Еленицкий Э.Я.* Аналитическое решение для стержневой системы с учетом упругопластических свойств материала..... 27

### Расчеты на устойчивость

*Жиль-улбе Матье, Шамбина С.Л., Дау Тьеколо.* К расчету на устойчивость в геометрически нелинейной постановке оболочек в виде синусоидального велароида..... 35

### Численные методы расчета конструкций

*Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселева Т.А., Андреев А.С.* Математическая модель дискретизации сочлененных осесимметричных оболочек с различными значениями физико-механических характеристик материалов.. 41

*Дмитриев Д.С.* Особенности использования конечных элементов с возможностью учета поверхностных гравитационных волн при динамическом расчете связанных систем «гидротехническое сооружение-жидкость». 50

### Задачи термоупругости

*Мустафаев А.Б.* Торможение роста криволинейной когезионной трещины в изгибаемой полосе (балке) с помощью наведенного теплового поля напряжений..... 59

### Прочность летательных аппаратов

*Фирсанов Вал. В.* Анализ напряженного состояния «пограничный слой» в рамках неклассической теории цилиндрических оболочек..... 71

### Расчет машиностроительных конструкций

*Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю., Крутина Е.В.* Влияние формы заготовки на качество штампованных изделий..... 76

---

*Contents,  
No 3, 2017*

<u><i>Geometrical investigations of middle surfaces of thin shells</i></u>	
<i>Ivanov V.N.</i> The forming of the surfaces on the curved counter planes.....	3
<u><i>Analysis of thin elastic shells</i></u>	
<i>Vladimir Jean PAUL.</i> On the investigations of ruled helical shells in 2000-2017..	9
<u><i>Analysis and design of building structures</i></u>	
<i>Yugov A.M., Bondarev A.B.</i> Mounting stress-strain state of joint-rod coverings of department of balls and reagents.....	12
<i>Kirsanov M.N.</i> On the choice of the lattice girder.....	23
<i>Elenitskiy E.Ya.</i> Analytical solution for beam structure with elasto-plastic properties of material.....	27
<u><i>Buckling analysis</i></u>	
<i>Gil-oulbé Mathieu, Shambina S.L., Dau Tyekolo.</i> Theoretical approach for the geometrically nonlinear buckling analysis of sinusoidal velaroidal shells.....	35
<u><i>Numerical methods of structures' analysis</i></u>	
<i>Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A., Andreev A.S.</i> A mathematical model of discretization of articulated axisymmetric shells with different values of physical-mechanical characteristics.....	41
<i>Dmitriev D.S.</i> Features of the use of finite elements with possible reflection of surface gravity waves in the process of dynamic calculating coupled systems «hydraulic structures-fluid».....	50
<u><i>Problems of thermoelasticity</i></u>	
<i>Mustafayev A.B.</i> Inhibition of curvilinear cohesive crack growth in a bending strip (beam) by induced heat stress field.....	59
<u><i>Strength of flying apparatus</i></u>	
<i>Firsanov Val.V.</i> Analysis of the “boundary layer “ stress-strain state in frames of the nonclassical cylindrical shell theory.....	71
<u><i>Analysis and design of machine-building structures</i></u>	
<i>Morozov Yu.A., Verkhov E.Yu., Krutina E.V.</i> Effect of the form of blank on quality of indicator presswork.....	76

Геометрические исследования срединных поверхностей тонких оболочек

**ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
НА ЗАДАННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛАНАХ**

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*  
Российский университет дружбы народов,  
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; E-mail: i.v.ivn@mail.ru

*Современное градостроительство требует создания новых форм конструкций при строительстве общественных зданий, выставочных павильонов, спортивных и промышленных сооружений. В статье рассматриваются возможности построения поверхностей на криволинейных планах, в том числе 4-х, 3-х и 2-х угольных планах с криволинейным контуром. Также рассматривается возможность конструирования поверхностей на аналитических замкнутых контурных кривых с заданием опорных точек.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** формообразование поверхностей, криволинейная система координат, контурные кривые, поверхности на криволинейных планах.

В строительстве, машиностроении и других областях техники широко используются поверхности на криволинейных планах. В большинстве это канонические формы поверхностей [1] – поверхности вращения, цилиндрические и конические поверхности, поверхности зонтичного типа, эллипсоидальные поверхности, поверхности в форме гиперболического гиперболоида. Современные формы архитектурных конструкций все более широко используются в современном градостроительстве [2]. В тоже время формы корпусов автомобилей, самолетов и вертолетов невозможно описать одним общим уравнением. Такие конструкции обычно разбиваются на отдельные криволинейные отсеки, путем вырезания их плоскими сечениями из общей конструкции. В 1960 году Американский ученый Стивен А. Кунс предложил способ задания поверхности двойной кривизны с помощью граничных кривых на четырехугольных планах, получившей его имя (лоскут Кунса - Coons patch, поверхности Кунса). Опубликованный им в 1967 г. препринт “Surfaces for Computer-Aided Design in Space Form” [3] получил широкую известность как «Малая красная книга». Предложенный им аппарат граничных кривых и функций сопряжения дал основу для всех дальнейших исследований в этой области.

Поверхности Кунса используются при создании сложных конструктивных форм, которые не возможно описать единым уравнением: корпуса аэропланов, кораблей, автомобилей и т.п. Разбивая плоскими сечениями сложные поверхностные формы на отсеки, каждый отсек аппроксимируется поверхностью Кунса. В большинстве работ посвященных поверхностям Кунса, рассматриваются вопросы компьютерного моделирования сложных конструктивных форм, обеспечению непрерывности сопряжения отсеков на граница отсеков [4].

Однако, подход к построению поверхностей на опорных кривых четырех и трех угольных планах позволяет создавать новые формы пространственных строительных конструкций, в том числе на криволинейных планах. Эти вопросы были рассмотрены в работах [5-7].

В статье [6] рассматривались вопросы образования модифицированных поверхностей Кунса на наклонных плоских опорных кривых. Некоторые их опорных кривых могут лежать в горизонтальной плоскости. Если все опорные кривые модифицированной поверхности Кунса расположены в горизонтальной плоскости, то поверхность вырождается в плоскость. При этом, в области ограниченной опорными кривыми образуется плоская криволинейная система координат, включающая контурные кривые криволинейного плана. Если задаться

некоторой функцией вертикальной координаты в полученной координатной системе, это дает возможность создавать новые формы поверхностей на криволинейных планах.

Рассмотрим трапециевидный план в плоскости  $xу$  с угловыми точками  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ , соединенными плоскими кривыми  $\rho_1(t_1) \div \rho_4(t_4)$  в той же плоскости (рис. 1). Получим координатную систему, включающую контурные кривые.

Противоположные линии контура параметризуем через общие параметры

$u, v \in (0,1)$  по формулам

$$u_i = t_i(u) = t_{iH}(1-u) + t_{iK}u, \quad i = 1, 3;$$

$$v_j = t_j(v) = t_{jH}(1-v) + t_{jK}v, \quad j = 2, 4. \quad (1)$$

Векторное уравнение трапециевидного криволинейного плана, получим в виде:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + \mathbf{r}_2(u, v), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{r}_1(u, v) = \rho_1(t_1(u))(1-v) + \rho_3(t_3(u))v;$$

$$\mathbf{r}_2(u, v) = \rho_2(t_2(v))(1-u) + \rho_4(t_4(v))u.$$

Очевидно:  $\mathbf{r}(u, 0) = \rho_1(u)$ ;  $\mathbf{r}(u, 1) = \rho_3(u)$ ;  $\mathbf{r}(0, v) = \rho_4(v)$ ;  $\mathbf{r}(1, v) = \rho_2(v)$ .

На рис. 2 приведены координатные системы 4-х угольных планов, включающие заданные контурные кривые:

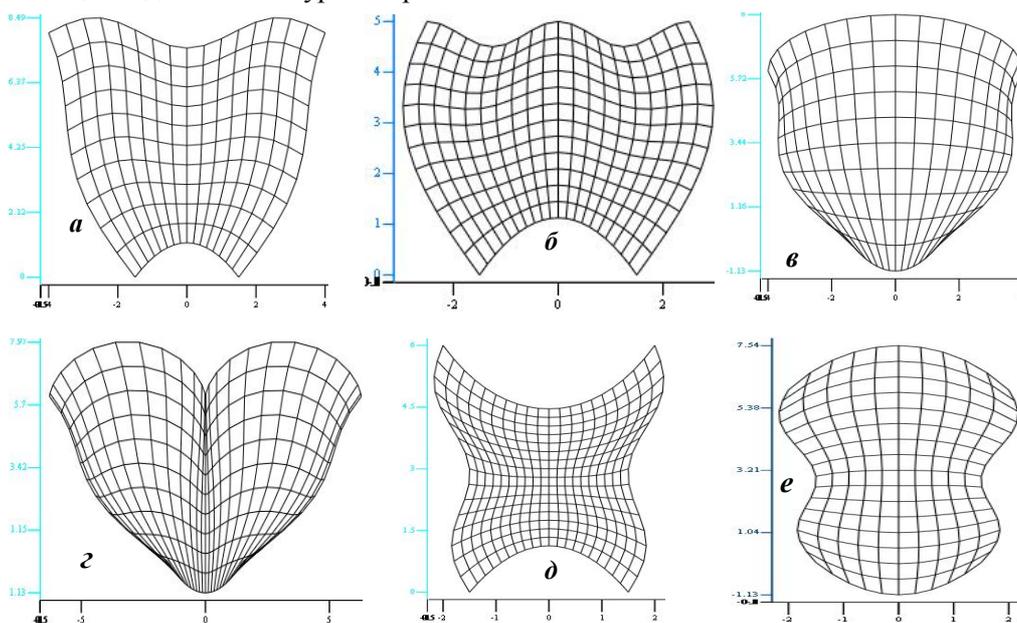


Рис. 2. Координатные системы на криволинейных симметричных трапециевидных планах

а) опорные кривые: 1 - парабола с вершиной внутрь плана; 2, 4 - синусоиды на две полуволны; 3 - синусоида на три полуволны;

б) опорные кривые: 1 - парабола с вершиной внутрь плана; 2, 4 - синусоиды на одну полуволну; 3 - косинусоида на четыре полуволны;

в) опорные кривые: 1 - парабола с вершиной из плана; 2, 4 - синусоиды на две полуволны; 3 - полуэллипс;

г) опорные кривые: 1 - парабола с вершиной из плана; 2, 4 - синусоиды на две полуволны; 3 - двойная циклоида;

д) опорные кривые: 1, 3 - параболы с вершинами внутрь плана; 2, 4 - синусоиды на три полуволны;

е) опорные кривые: 1, 3 - параболы с вершинами из плана; 2, 4 - синусоиды на три полуволны

Задавая функцию  $z(u, v)$  получаем уравнение поверхности на заданном криволинейном плане:

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + z(u, v)\mathbf{k} . \quad (3)$$

Функцию  $z(u, v)$  можно задавать, в частности, независимыми функциями координат  $u, v$  -  $\varphi(u)$  и  $\psi(v)$ , и их комбинациями:  $z(u, v) = \varphi(u)$ ,  $z(u, v) = \psi(v)$ ,  $z(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$ ,  $z(u, v) = \varphi(u)\psi(v)$  и др.

На рис. 3 построены поверхности на трапецевидном плане, соответствующем рис. 2, б, с функциями  $\varphi(u) = a \sin(\pi u)$ ;  $\psi(v) = b(0,5 - v)^2$ , варианты:

а)  $z(u, v) = \varphi(u)$ ,  $a = 1$ ;    б)  $z(u, v) = \psi(v)$ ;  $b = -4$ ;

в)  $z(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$ ,  $a = 1$ ;  $b = -2$ ;    г)  $z(u, v) = \varphi(u)\psi(v)$ ;  $a = 1$ ;  $b = -2$ ;

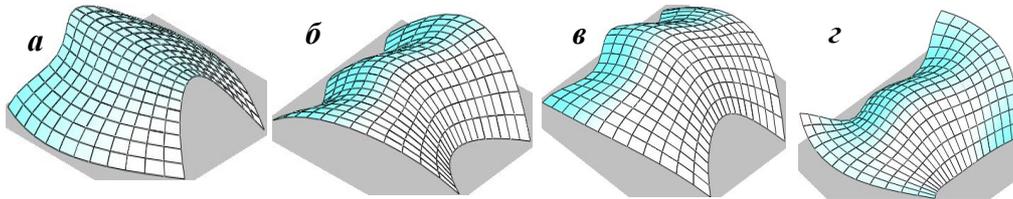


Рис. 3. Варианты поверхностей на криволинейном плане  $\varphi(u) = a \sin(\pi u)$ ;  $\psi(v) = b(0,5 - v)^2$

Так как система координат в плоскости криволинейная, координатные линии на поверхности - пространственные кривые, в том числе, в общем случае и контурные кривые. В случае, когда функция координаты  $z$  является функцией одного аргумента (варианты а, б), то две опорные кривые являются плоскими кривыми и лежат в плоскости криволинейного плана.

Пространственные контурные кривые можно сделать плоскими (в горизонтальной плоскости), если функцию  $z(u, v)$  домножить на множители:  $u$  - 4-я контурная кривая будет плоской;  $(1-u)$  - 2-я контурная кривая плоская;  $v$  - 1-я контурная кривая плоская;  $(1-v)$  - 3-я контурная кривая плоская.

На рис. 4 поверхности на аналогичном плане и функцией  $\varphi(u) = a \sin(\pi u)$ :

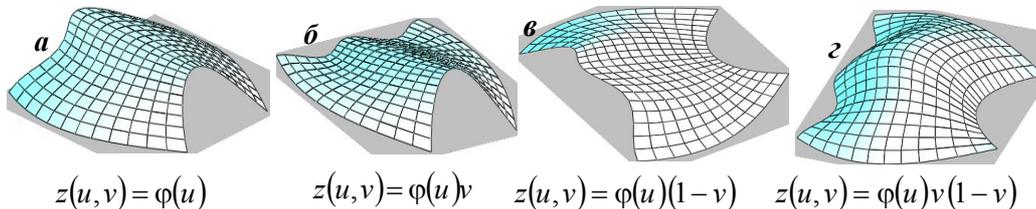


Рис. 4. Варианты поверхностей на криволинейном плане  $\varphi(u) = a \sin(\pi u)$

Если функцию вертикальной координаты задать в виде суммы функций от координат  $u$  и  $v$ , то, варьируя горизонтальные и пространственные контурные кривые, можно получить 15 вариантов поверхности.

В предыдущих примерах поверхности строились на симметричном трапецевидном плане. Как и в случае поверхностей Кунса опорные точки плана

можно смещать [5, 6], получая план в виде произвольного четырехугольник, параллелограмма, а совмещая опорные точки получаем поверхность на треугольном или двухугольном (опорные точки на одной прямой) криволинейных планах.

На рис. 5 поверхности на аналогичном плане и функцией  $\psi(v) = a \sin(\pi v)$ .

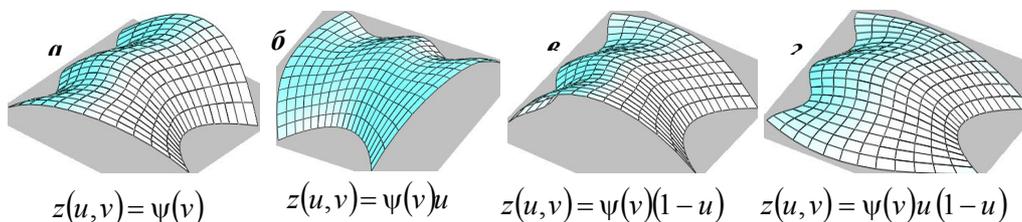


Рис. 5. Варианты поверхностей на криволинейном плане  $\psi(v) = a \sin(\pi v)$

На рис. 6 поверхности с синусоидальными функциями вертикальной координаты на пять полуволн:  $\varphi(u) = a \sin(5\pi u)$ ,  $\psi(v) = b \sin(5\pi v)$ ;

$$\omega(u, v) = \varphi(u) + \psi(v); z(u, v) = \omega(u, v)u(1 - u)v(1 - \alpha v).$$

Рис. 6, а-в  $\alpha=0$  - 3-я опорная кривая пространственная линия; рис. 6, г-з  $\alpha=1$  - все опорные кривые - плоские, в горизонтальной плоскости. Планы опорных точек: а) прямоугольный; б) параллелограммовидный; в) 4-х угольный с одним прямым углом; г-е) треугольные планы; ж-з) опорные точки на одной прямой.

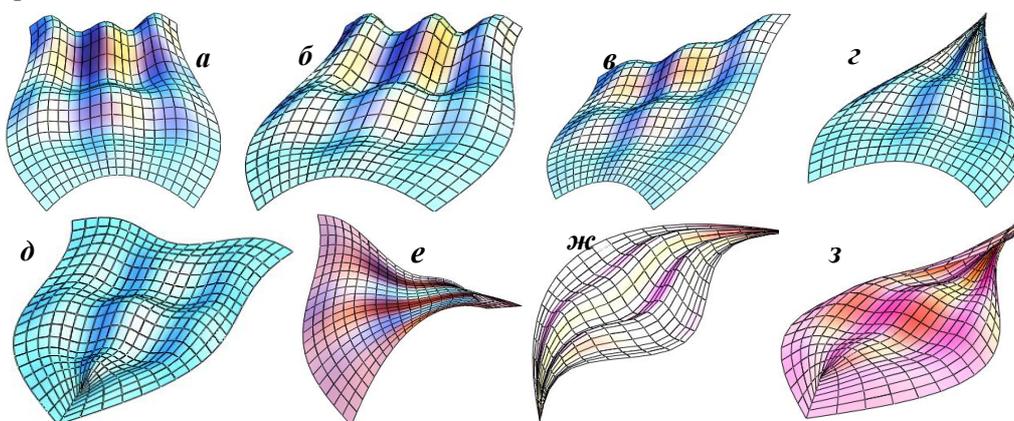


Рис. 6. Поверхности с вариантами планов опорных точек

На рис. 6, г 3-я и 4-я опорные точки совмещены на оси симметрии прямоугольного плана; рис. 6, д 1-я и 2-я опорные точки совмещены на оси симметрии прямоугольного плана; рис. 6, е 2-я и 3-я опорные точки совмещены на оси симметрии прямоугольного плана. Рис. 6, ж - 4-я и 3-я опорные точки совмещены с 1-й и 2-й точками соответственно на одной прямой.. Рис. 6, з - 2-я и 4-я опорные точки совмещены со 1-й и 3-й точками соответственно на одной прямой на диагонали прямоугольного плана.

На рис. 7 показана возможность построения поверхностей на круговом плане. На окружности устанавливаются опорные точки. Контурными кривыми являются отрезки окружности между опорными точками. На рис. 7, а, б опорные точки образуют прямоугольный план. На рис. 7, в опорные точки попарно совмещены.

Функция вертикальной координаты  $z(u, v) = \omega(u, v)u(1-u)v(1-v)$  - контурные кривые в горизонтальной плоскости,  $\omega(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$ ,  $z(u, v) = \omega(u, v)u(1-u)v(1-v)$ .

Положение опорных точек определяется радиусом с направляющим углом  $\theta$  от оси симметрии прямоугольного плана (ось  $x$ ):

- а)  $\theta = 0,25\pi$ , опорные точки на квадратном плане;
- б)  $\theta = 0,15\pi$  - прямоугольный план;
- в)  $\theta = 0,15\pi$  - две опорных точки, контурные кривые две полуокружности.

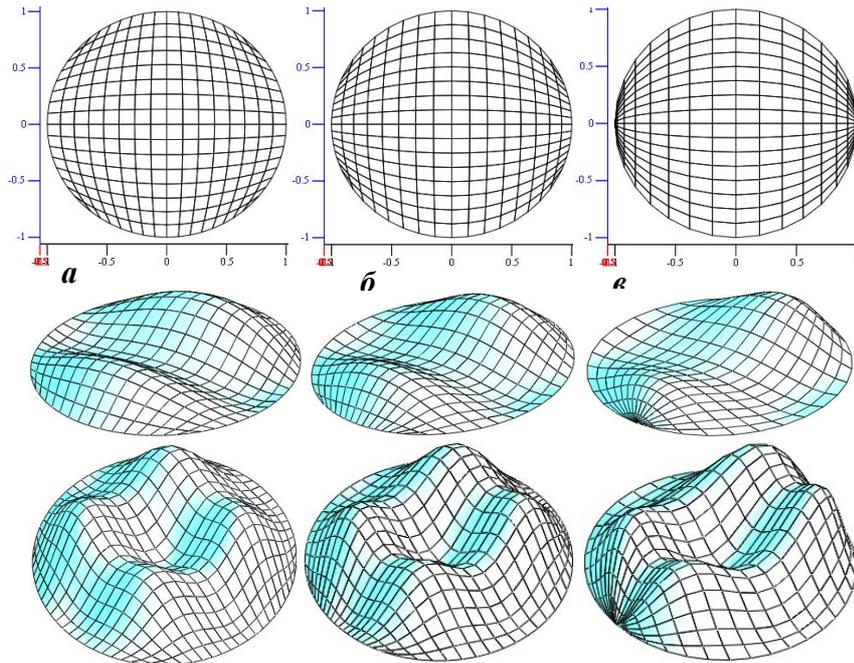


Рис. 7. Поверхности на круговом плане

На рис. 7 в верхнем ряду приведены координатные системы на круговых планах, в нижних рядах общий вид поверхностей. В среднем ряду функции:  $\varphi(u) = a \sin(3\pi u)$  - синусоида на три полуволны,  $\psi(v) = b(0,5 - v)^2$  - парабола.

В нижнем ряду поверхности с функциями вертикальной координаты:  $\varphi(u) = a(1 - \cos 2\pi u)$ ;  $\psi(v) = a(1 - \cos 2\pi v)$ .

Аналогично можно формировать поверхности на других замкнутых кривых, используя опорные точки.

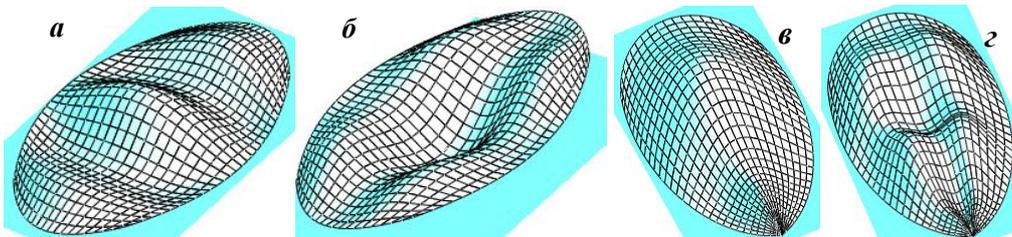


Рис. 8. Поверхности на эллипсоидальном плане

На рис. 8 представлены поверхности на эллипсоидальном плане: а, б - с четырьмя симметричными опорными точками (прямоугольный план

опорных точек);  $v, z$  – с тремя опорными точками (равнобедренный треугольный план опорных точек). На рис. 8,а,б – синусоидальные функции вертикальной координаты:  $\varphi = \sin p\pi u$ ;  $\psi = \sin t\pi v$ ; а -  $p=5, t=1$ ; б -  $p=3, t=3$ . На рис. 8,в,г – косинусоидальные функции:  $\varphi(u) = a(1 - \cos p\pi u)$ ;  $\psi(v) = a(1 - \cos t\pi v)$ ; в -  $p=3, t=2$ ; г -  $p=5, t=4$ .

Отметим, что координатная система на замкнутых кривых, отличается от полярной координатной системы круга или параметрической системы координат эллипсоидального плана.

#### Л и т е р а т у р а

1. S.N. Krivoshapko, V.N. Ivanov. Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
2. Иванов В.Н., Тхома Анамария. Новые формы пространственных конструкций// О строительных конструкциях типа оболочек / Материалы международной студенческой конференции, Москва, 23 ноября 2012 г.: пленарный доклад. М.: Изд-во МГАКХиС, 2013. – С. 101—106.
3. Steven A. Coons. Surfaces for Computer-Aided Design in Space Form. - Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA, 1967.
4. G. Farin. Curves and surfaces for CAGD. 5th ed. – Academic Press, 2002.
5. Иванов В.Н. Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – № 4. – С. 5-10.
6. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование модифицированных поверхностей Кунса// Вестник Российского университета дружбы народов. – Сер.: Инженерные исследования. – 2011. – № 2. – С. 85—90.
7. Иванов В.Н, Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций (Визуализация поверхностей в системах MathCad и AutoCad): Монография. – М.: Изд-во АСВ, 2016. – 412 с.

#### References

1. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
2. Ivanov, V.N., Тхома Анамария (2013). New forms of the space structures, *On Building Structures of the Shell Type: Materials of the International student conference*, Moscow, November 23, 2012, М.: Izd-vo MGAKHIS, 101—106.
3. Steven A. Coons (1967). *Surfaces for Computer-Aided Design in Space Form*. Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA.
4. G. Farin (2002). *Curves and surfaces for CAGD*. 5th ed. Academic Press.
5. Ivanov, V.N. (2007). Architectural compositions on the base of Coons surfaces, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, 5—10.
6. Ivanov, V.N. (2011). Geometry and forming of the Coons surfaces, *Vestnik RUDN; Ser.: Ingenierie Issledovaniya*, № 2, 85—90.
7. Ivanov, V.N., Romanova, V.A. (2016). *Design of the Forms of Space Structures (Visualizations of the surfaces at MathCad and AutoCad)*: Monograph, Moscow: Izd-vo ASV, 412 p.

#### THE FORMING OF THE SURFACES ON THE CURVED COUNTER PLANES

V.N. Ivanov

RUDN University, Moscow, Russia

The article concerns the questions of the forming of the space thin walled structures on curvilinear planes. They may be used for constructions of the social buildings, exhibition, on sport structures. This method may be used for forming surfaces at 4, 3 and 2-angle plans with curvilinear supporting contour lines and on the planes of closed curves as circle or ellipse as well.

KEY WORDS: supporting curves, supporting points, curved counter planes, forming of the surfaces on the curved planes.

***Analysis of thin elastic shells*****ON THE INVESTIGATIONS OF RULED HELICAL SHELLS IN 2000-2017**

Vladimir Jean PAUL, BSc

*RUDN University, Russian Federation**117198, Moscow, Miklukho-Maklaya street, 6;**E-mail: jeanpaulvladimir@yahoo.fr*

*Currently, much attention is paid to development of infrastructure, which is associated with an increase in construction volumes and reducing the area of development, as well as introducing new architectural forms in the typical structures of socio economic purpose. The peak of publication on analytical methods of linear analysis of helicoidal shells was in the 1950s. In this work, detailed review of the literature on the topic of the geometry, the static analysis, and the use of ruled helicoidal shells in the 2000-2017 years is presented.*

**KEY WORDS:** ruled helical surfaces, methods of strength analysis, helicoid, pretwisted beam, shell.

In the second half of the twentieth century, a lot of papers on geometry, the static analysis and the application of helicoidal shells including ruled helical shells were published. The most complete review is given in the review manuscript of S.N. Krivoschapko [1] with 181 references. Five types of ruled helical surfaces (Fig. 1) are described in a work [2].

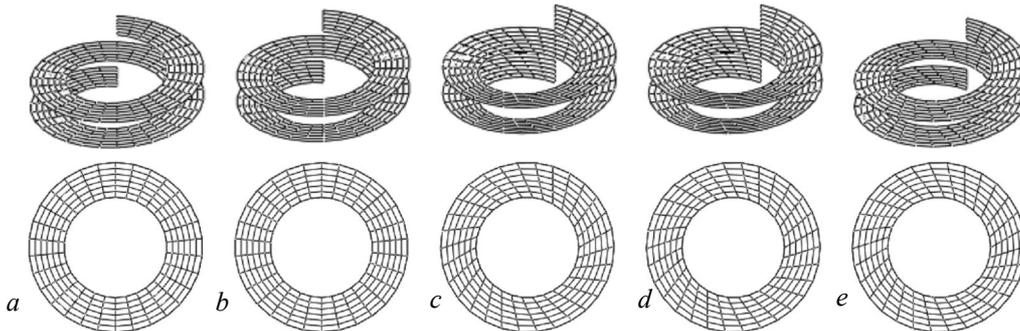


Fig. 1 [2] (*a* – right helicoid; *b* – oblique helicoid; *c* – developable helicoid; *d*– pseudo-developable helicoid of general type offered by S.F. Pilipaka; *e* – pseudo-developable helicoid).

After 2000, only several scientists-mechanics continued to deal with the ruled helicoidal shells, basically they developed analytical and semi-analytical methods of static analysis.

For example, stress-strain state of developable helicoids (Fig. 1, *c*) under the action of uniformly distributed static load was studied in [3]. Thin open developable helicoidal shells are used in mechanical engineering and in civil engineering. The numerical analysis of shell stress-strain state was fulfilled with the help of the Runge-Kutta method. The analytical asymptotic method of analysis is presented for thin elastic open helicoidal shallow shells given in curvilinear non-orthogonal conjugate coordinates.

Right helicoids (Fig.1, *a*) were investigated by M.I. Rynkovskaya [4]. She found some inaccuracies in the method of calculation proposed by V.G. Rekach [5].

Apparently, it is necessary to introduce a subspecies of right helicoids – pre-twisted beams or plates which from a point of view of the geometry are right helicoids with straight generatrix that intersects the helix axis, that is, a straight generatrix exists on either side of the axis. Unlike from right helicoids, pre-twisted beam is still at the center of attention of scientists in mechanics, and the problems of determination

of forms and the frequencies of natural oscillations are investigated in a dozen of works [6].

E.M. Tupikova [7] is actively working on finding analytical and numerical methods for the calculation of oblique helicoids (Fig. 1, *b*). She solved only one-dimensional problems for this type of helicoids.

Only one researcher was looking for methods of calculation of the stress-strain state of long pseudo-developable helicoids (Fig. 1, *e*). He published only two scientific papers on this subject [8]. The straight generatrices of this surface on plane coincide with the tangents to the helical guideline as well as in the case of the developable helicoid.

For the pseudo-developable helicoids of general type offered by S.F. Pilipaka (Fig. 1, *d*) [9], the author didn't find data on determination of their stress-strain state by either analytical or numerical method.

Although the number of publications devoted to geometry, static calculation and application of ruled helicoidal shells decreased significantly, but their application has not declined, and it is obviously from the scientific paper of A. Bogolyubov [10].

### Conclusion

After reviewing of the available scientific and technical literature, the author decided to choose the theme for his master's thesis: "Numerical experiments on the selection of a thin ruled helicoidal shell as applied to civil structures" and I hope that the results obtained in the process of the preparation of the thesis will be useful to my homeland, Haiti. Especially because it's popular, attractive and it conserves space; it's a new technology which big countries use for their cities to give them good-looking, pretty and it gives many space for people to move along that's why we say that it's economic. It's the best technology for my country because my homeland doesn't have a big superficies. Below there are some examples in pictures of this technology (Fig. 2, *a,b,c*).



Figure 2. Examples for ruled helicoidal shells

a) shopping center, Miami  
(USA)

b) business center,  
New Jersey(USA),

c) Nap Architects,  
Japan

### References

1. Krivoshapko S.N. (May 1999) Geometry and strength of general helicoidal shells, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 52, No 5, 161—175.
2. Krivoshapko S. N. and Rynkovskaya Marina. Five types of ruled helical surfaces for helical conveyers, support anchors and screws, *MATEC Web Conf.*, 2017, Vol. 95 (2016 the 3<sup>rd</sup> International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016)), 5 p. (DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/mateconf/20179506002>).
3. Krivoshapko S.N., Gbaguidi Aissè Gerard. (2012) Two methods of analysis of thin elastic open helicoidal shells, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, Vol. 12, Iss. 3, 382—390.
4. Rynkovskaya M.I. (2009) On application and analysis of right helicoidal shells. *RUDN Journal of Engineering Researches*, № 3, 113—116. (In Russ).

5. Rynkovskaya M.I. (2008) Rekach's method of calculation as applied to right helicoid, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 3, 23—29. (In Russ).
6. Sinan Filiz, Bekir Bediz, L.A. Romero, O. Burak Ozdoganlar . (12 May 2014) Three dimensional dynamics of pretwisted beams: A spectral-Tchebychev solution, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, Iss. 10, 2823—2839.
7. Tupikova E.M. (2015) The determination of displacements and internal forces in reinforced concrete ramps in the form of oblique helicoid, *Stroit. Mech. i Raschet Soor.*, № 4, 24—28. (In Russ).
8. Halabi S.M. (2001) Moment theory of thin helicoidal pseudo-developable shells, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, Iss. 10, 61—67. (In Russ).
9. Pylypaka, S.F. (2002). Control of bending of ruled surfaces on an example of a screw conoid, *Prikladna Geom. ta Inzhenerna Grafika*, Kiev: KNUBA, Vyp. 70, 180—186.
10. Bogolyubov A.V. (2012) On impossibility of theoretically exact working of ruled helical surfaces by a round cylindrical tool, *Vestnik MGTU "STANKIN"*, 2(20), 79—74. (In Russ).

#### Л и т е р а т у р а

1. Krivoshapko S.N. Geometry and strength of general helicoidal shells// *Applied Mechanics Reviews*. – Vol. 52. – No 5. – May 1999. – P. 161—175.
2. Krivoshapko S. N. and Rynkovskaya Marina. Five types of ruled helical surfaces for helical conveyers, support anchors and screws// *MATEC Web Conf.* – 2017. – Vol. 95 (2016 the 3<sup>rd</sup> International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016)).- 5 p. (DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/mateconf/20179506002> ).
3. Krivoshapko S.N., Gbaguidi Aissè Gerard. Two methods of analysis of thin elastic open helicoidal shells// *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. – 2012. – Vol. 12. – Iss. 3. – P. 382—390.
4. Рынковская М.И. Расчет и применение геликоидальных оболочек // *Вестник РУДН. Серия Инженерные исследования*, №3, 2009.- М.: Изд-во РУДН. – С. 113-116.
5. Рынковская М.И. Применение метода В.Г. Рекача к расчету прямых геликоидальных оболочек // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2008. – №3. – С. 23—29.
6. Sinan Filiz, Bekir Bediz, L.A. Romero, O. Burak Ozdoganlar . Three dimensional dynamics of pretwisted beams: A spectral-Tchebychev solution//*Journal of Sound and Vibration*. – 12 May 2014. – Vol. 333. - Iss. 10. - Pages 2823—2839.
7. Тупи́кова Е.М. Вычисление перемещений и усилий в железобетонных пандусах в форме косо́го геликои́да// *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2015. – № 4. – С. 24—28.
8. Халаби С.М. Моментная теория тонких винтовых псевдо-торсовых оболочек// *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – М.: Изд-во АСВ, 2001. – Вып. 10. – С. 61—67.
9. Pylypaka S.F. Control of bending of ruled surfaces on an example of a screw conoid// *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. – К.: КНУБА, 2002. – Вып. 70. – С. 180—186.
10. Боголюбов А.В. О невозможности теоретически точной обработки линейчатых винтовых поверхностей круглым цилиндрическим инструментом// *Вестник МГТУ «Станкин»*. – 2012. - № 2 (20). – С. 70—74.

#### ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК В 2000-2017 ГОДАХ

ВЛАДИМИР ЖАН ПОЛЬ, *бакалавр,*  
*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

В настоящее время большое внимание уделяется вопросам развития инфраструктуры, что связано с увеличением строительных объёмов при уменьшении площади застройки, а также привнесения новых архитектурных форм в типовые строения общественно-хозяйственного назначения. В работе был произведен детальный аналитический обзор литературы на тему, посвященную геометрии, статическому расчету и применению линейчатых винтовых оболочек, опубликованной в 2000-2017 годах.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: линейчатые винтовые поверхности, методы прочностного расчета, геликоид, предварительно закрученный стержень, оболочка.

## Расчет и проектирование строительных конструкций

### **МОНТАЖНОЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОГО ПОКРЫТИЯ СКЛАДА ШАРОВ И РЕАГЕНТОВ**

А.М. ЮГОВ, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технология и организация строительства ГОУ ВПО «ДонНАСА»  
286123, г. Макеевка, ул. Державина, 2,  
E-mail: amyrus@mail.ru

А.Б. БОНДАРЕВ, инженер по металлоконструкциям строительной дирекции АО «Рудник имени Матросова», 685000, Магадан, ул. Пролетарская, д. 12  
E-mail: bondarev\_a\_b\_rus@mail.ru, BondarevAB@polyus.com

*В данной статье выполнен обзор ранее проведённых работ по части расчёта точности, определения монтажных нагрузок в металлических конструкциях. Даны результаты исследования монтажного напряжённно-деформированного состояния, возникающего в металлоконструкциях большепролетного шарнирно-стержневого покрытия склада шаров и реагентов. Численное исследование монтажного напряжённно-деформированного состояния выполнено методом конечных элементов, который реализован в вычислительном комплексе SCAD. Также приведена оценка влияния величин монтажных усилий на несущую способность отдельных стержней оболочки покрытия. Представление усилий выполнено в виде гистограмм. Полученные величины усилий указывают, что необходимо разработка мероприятий, направленных на снижение величин начальных усилий, возникающих при сборке покрытия, и соответственно геометрических отклонений в покрытии при его проектировании.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** монтажное напряжённно-деформированное состояние, геометрические отклонения большепролетные металлические пространственные покрытия, монтажные воздействия, математическое моделирование

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Известно, что действительная форма и положение узлов шарнирно- стержневой оболочки, а также реальное монтажное напряжённно- деформированного состояния (МНДС) отличаются от состояния, заданного проектом. Следовательно, вопросы, связанные с учётом отклонений в конструкциях при их проектировании и определении МНДС актуальны. Известно, что наличие отклонений, как правило приводит к большому количеству непредвиденных трудовых и финансовых затрат, как правило, не учтённых в стоимости строительного объекта. Накопление отклонений может привести к аварии покрытия, например, как так было с купольным сооружением ВНИЦ ВЭИ им. В.И. Ленина в г. Истра, Московская область, Российская Федерация.

Определение МНДС большепролетных шарнирно-стержневых металлических покрытий с учётом точности изготовления, и последовательности сборки при расчёте конструкций является важной научно-технической задачей. Сетчатые шарнирно-стержневые конструкции подобны по своему устройству кристаллической решётки металла [29]. Учёт отклонений, как правило, выполняется методом статистических испытаний. Для определения и учёта отклонений на этапе проектирования разработка методики расчёта точности большепролетных шарнирно-стержневых металлических покрытий. С целью борьбы с отклонениями разработаны соответствующие конструктивные решения оболочек. Такой комплексный подход к проектированию покрытий позволяет повысить их несущую способность.

В данной статье выполнено определение и анализ МНДС на примере шарнирно-стержневого металлического покрытия склада шаров и реагентов с отклонениями при разных технологических схемах сборки – в продольном направлении (ПДС), и в поперечном направлении (ППС).

#### **ОБЗОР РАНЕЕ ПРОВЕДЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

В работах А.М. Югова и А.Б. Бондарева исследованы величины отклонений и МНДС шарнирно-стержневых металлических оболочек покрытий. В результате проведённых исследований разработана компьютерная программа и методика для расчёта точности, и методика определения МНДС [2-5, 22].

Для расчёта точности большепролётных шарнирно-стержневых металлических конструкций, а по сути в целях разработки методов прогнозирования возможных отклонений большепролётных купольных покрытий впервые В.А. Савельев совместно с Е.В. Лебедем в ЦНИИПСК им. М.П. Мельникова на основе геометрических процедур, которые аналогичных тем, что используются в геодезии разработали методику определения геометрических отклонений пространственных металлических конструкций в вероятностной постановке как численной имитации на компьютере процесса его сборки и монтажа с использованием метода Монте-Карло. Разработанная В.А. Савельевым и Е.В. Лебедем методика была также реализована в разработанных Е.В. Лебедем программах GENES, SBORKA и MONTAG [10-13]. В.А. Савельев и Е.В. Лебедь использовали программу MONTAG при корректировке проекта главного корпуса ВНИЦ ВЭИ им. В.И. Ленина в Российской Федерации, Московская область, г. Истра по варианту «Цилиндр» [14-17]. Геометрические процедуры, которые используются в программах GENES, SBORKA, MONTAG аналогичны тем, что применяются в геодезии при геодезических построениях, например, при разбивке земельных участков и реализованы, в таких известных программных комплексах как Micro Survey, Autodesk Civil 3D, GEOZEM, Objectland, и других.

В настоящее время Е.В. Лебедь совместно со своими учениками занимается исследованием отклонений в металлических купольных покрытиях, вызванных неточностями изготовления и монтажа, а также анализом НДС металлоконструкций купольных покрытий с учётом отклонений [18, 19, 20].

О.И. Ефимов в своих исследованиях [8] проанализировал работу структурных конструкций с узловыми эксцентриситетами и податливыми узлами. В результате исследований О.И. Ефимов разработал методику расчёта структур с такими отклонениями. Использование целенаправленного введения податливости позволило регулировать усилие в стержнях структурной конструкции и снизить металлоёмкость на 28%.

Д.М. Хусаинов под руководством И.Л. Кузнецова [9, 21] провёл анализ несовершенств, влияющих на работу облегчённых арочных конструкций по результатам натурных обследований эксплуатируемых зданий. Дана оценка действительного состояния арочных зданий по результатам натурных обследований, разработана методика определения допусков на изготовление и монтаж облегчённых арочных зданий, даны рекомендации по повышению качества проектирования, изготовления и монтажа арочных зданий. Рассматривались эти задачи без привлечения современных методов компьютерного моделирования, а именно рассматривался верхний пояс арки как отдельный погнутый стержень, опёртый на упругоподатливые опоры. Возведение малоизученных и недостаточно апробированных и рискованных конструктивных форм, например, как на рис. 1, 2 может привести к аварии покрытия (купол в Истре, аквапарк в Ясенево, Бауманский рынок и многие другие).



Рис. 1. Конструктивная форма стадиона ВТБ Арена парк – Центральный стадион «Динамо», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.



Рис. 2. Конструктивная форма стадиона Олимпийский, г. Киев, Украина

Изучая известные аварии большепролетных покрытий с серьезными последствиями, можно заключить, что их причины ничем не отличаются от причин аварий обычных зданий [6]. Краткий перечень аварий, которые произошли за последние три десятилетия со средней периодичностью раз в два-три года приведены ниже на рис. 3, 4 и заимствовано из работы Д.Ю. Дробот [7]:

- 1985 г. Обрушение купольного сооружения ВИС ВЭИ им. В.И. Ленина (г. Истра, РФ);
- 2004 г. Потеря устойчивости одной из колонн привела к обрушению железобетонной оболочки аквапарка (г. Москва, р-н Ясенево);
- 2006 г. Покрытие Бауманского рынка (г. Москва);
- 2009 г. При запроектной величине ветровой нагрузки произошло обрушение каркасно-тентового покрытия стадиона «Probing Cowboys» (Даллас, США);
- 2009 г. Обрушение половины покрытия еще несданного в эксплуатацию стадиона «Gong Badak».

Техническая комиссия по расследованию причин аварии рассматривала разные версии, но явной причины обрушения купола так и не обнаружила. Наиболее правдоподобной была версия о том, что действительная форма купола значительно отличалась от проектной. Монтаж велся навесным способом снизу

вверх и погрешности монтажа, накапливаясь, уменьшали и без того малую кривизну верхней части купола. В результате верхняя часть купола работала не как оболочка, а скорее, как плита. Более того, во время монтажа уже были неприятности. Некоторые сжатые стержни теряли устойчивость. Причину перегрузки устранили, а погиби, видимо, остались [1].



Рис. 3. Купольное сооружение в г. Истра, Российская Федерация - 1985 г.



Рис. 4. Покрытие стадиона Gong Badak, 2009 г.

Известно, что диссертационные исследования, посвящённые отклонениям, допущенным при монтаже конструкций большепролетных шарнирно-стержневых покрытий, как правило, выполнялись без экспериментальной проверки полученных результатов. Исключение может составить, например работа В.И. Буякаса и А.С. Гвамичавы [23], Gaul L. [24], Kartal M.E. [26], Kim H.M. [28], посвящённые исследованию влияния отклонений на отражательную способность радиотелескопов и потому их результаты не могут быть применены для строительных конструкций.

В результате анализа источников зарубежной литературы следует отметить работы Kaouk, Zimmerman [25], Kaveh A. [27], Tsou P. [31], Chars J. Gantes [32], в которых отражены вопросы вибродиагностики дефектов конструкций антенн, радиотелескопов. Многие из них предлагают установку регуляторов формы для радиотелескопов при их эксплуатации. В зарубежной литературе такие

конструкции называются адаптивными, т.е. приспосабливающимися под условия эксплуатации. Для повышения надёжности конструкций в отдельных работах рекомендуется «управлять их поведением» или создавать так называемые «адаптируемые системы» [28, 30].

### ОБЪЕКТ И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

**Цель работы** – оценка МНДС шарнирно-стержневого металлического покрытия склада шаров и реагентов с отклонениями при сборке.

**Объект исследования** – двухпоясное шарнирно-стержневое большепролетное металлическое покрытие склада шаров цилиндрической формы (рис. 5). Покрытие представляет собой двухпоясную оболочку с размерами монтажных блоков в плане 15000×6000 мм, из стали С245, монтажный блок цилиндрического покрытия с маркировкой элементов (рис. 6).

Фасад ангара 1-6

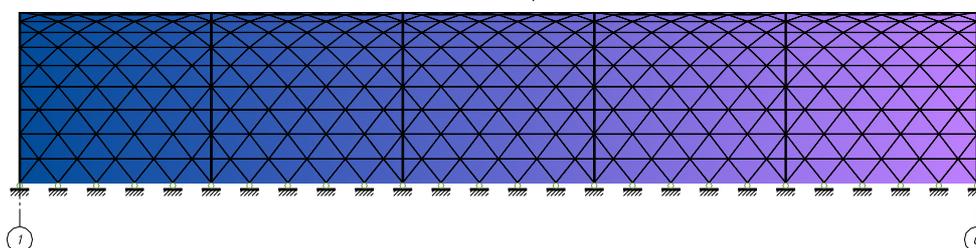


Рис. 5. Фасад двухпоясного шарнирно-стержневого большепролетного металлического покрытия склада шаров и реагентов цилиндрической формы

Жесткостные характеристики элементов определены в предположении, что гибкость  $\lambda = 120$ . Радиус покрытия – 15 м. Распор цилиндрического покрытия гасится жёстким соединением его опорных конструкций с основанием. При разработке проекта принята поэлементная схема сборки монтажных блоков покрытия на подмостях. После собранный монтажный блок покрытия устанавливается стреловым краном на опору.

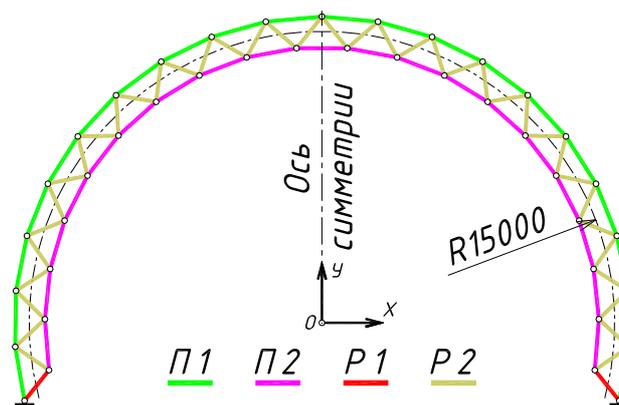


Рис. 6. Поперечная диафрагма двухпоясного шарнирно-стержневого большепролетного металлического покрытия склада шаров и реагентов цилиндрической формы

### МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Монтажное воздействие – нагрузка от сборочных отклонений, которые определены расчётом собираемости. В качестве расчётной схемы покрытия принят фрагмент пространственной шарнирно-стержневой системы (рис. 7). Статический расчёт выполнен методом конечных элементов (МКЭ) с использованием вычислительного комплекса (ВК) SCAD 11.5.

Примыкание пространственного блока цилиндрического покрытия к колонне принято жёстким. Стержни покрытия по типу конечного элемента являются пространственными (элемент пространственной фермы), степени свободы XYZ положение произвольное. Расчётная схема монтажного блока покрытия состоит из 95 узлов и 560 элементов (рис. 8).

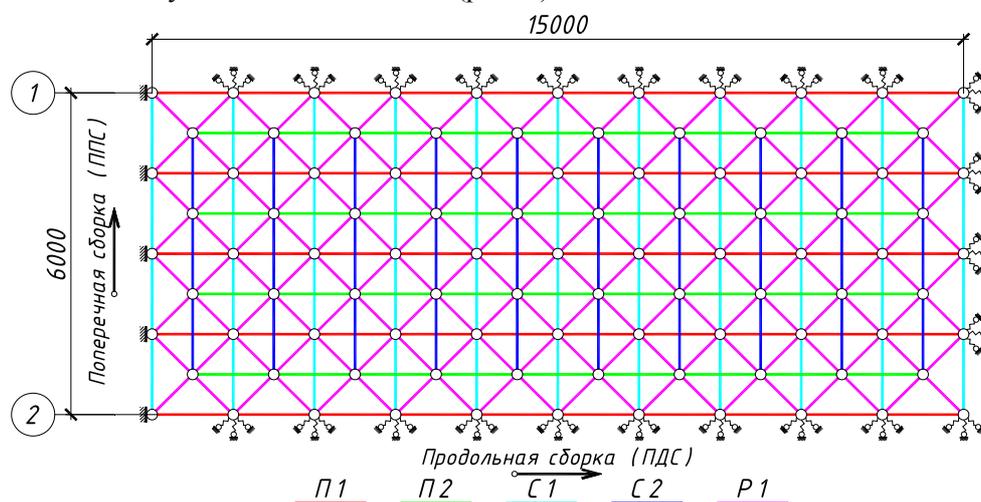


Рис. 7. Схема исследуемого монтажного блока с указанием марок элементов, габаритов и направления сборки

При формировании расчётной схемы учтено, что она будет пространственной, а система координат будет Декартовой (плоскость XOZ, YOZ и XOY). Для определения и анализа МНДС покрытия выполнено моделирование отклонений в стержнях при помощи температурного воздействия, действующего вдоль замыкающих стержней покрытия.

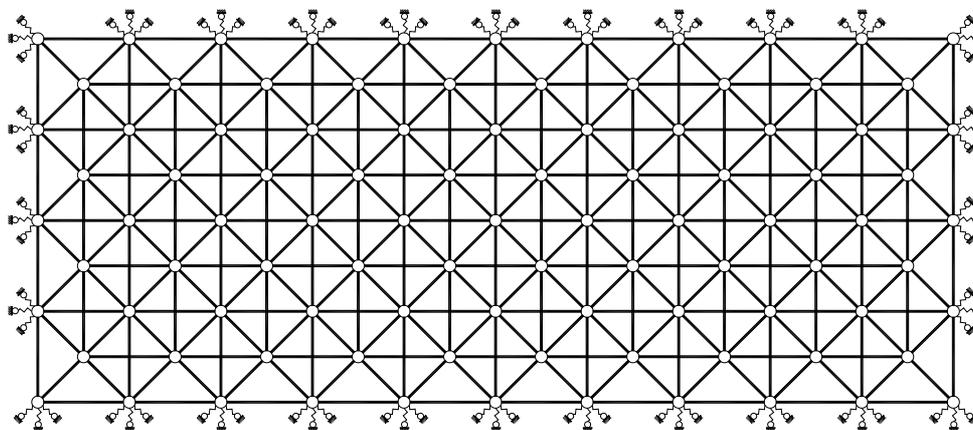


Рис. 8. Расчётная схема исследуемого монтажного блока

При определении монтажных усилий, возникающих от отклонений длин стержней оболочки рассмотрены следующие последовательности сборки – продольная (ПДС) и поперечная (ППС) сборка.

При расчёте, будем принимать что: изменение жёсткости покрытия в процессе сборки происходит за счёт изменения расчётных схем при сборке – реализовано в ВК SCAD 11.5, путём применения модуля «МОНТАЖ»; отклонения будут рассмотрены для идеальной расчётной схемы, т.е. без отклонений узлов оболочки; МНДС проанализировано только в ВК SCAD 11.5; только температурным воздействием, действующим вдоль продольной оси элемента – таким образом, смоделировано отклонение длины элемента. К рассмотрению приняты

только отклонения нормативных допусков на изготовление в соответствии с ГОСТ 23118-99 и монтаж с СП 70.13330.2012; отклонения элементов подчинены нормальному закону распределения и будут рассмотрены статистическим методом. Формирование расчётной схемы и расчёт оболочки в BK SCAD 11.5 сводится к: определению её геометрических размеров; заданию геометрических характеристик сечений элементов; вводу координат узлов расчётной схемы; заданию жёсткостей элементов; заданию узлов её крепления с колонной; нумерации узлов и элементов выполнена путём генератора расчётной схемы в среде BK SCAD; заданию действующих нагрузок и собственно расчёт.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ МОНТАЖНЫХ УСИЛИЙ

Анализ результатов расчёта МНДС покрытия с учётом отклонений выполнен путём сравнения проектных усилий (напряжений) в элементах с дополнительными (монтажными) усилиями (напряжениями), вызванными неточностями изготовления и монтажа.

Для анализа МНДС покрытия с учётом отклонений рассмотрен монтажный блок цилиндрического покрытия. В результате расчёта покрытия с учётом отклонений получены величины сборочных усилий в элементах при продольной и поперечной сборке (рис. 9...10). На гистограммах приведены усилия от основного сочетания нагрузок ( $N_{эл.}$ ), и суммарные ( $N_1...N_4$ ). Поясним обозначения принятые, на гистограммах (рис. 5...6): 1 – усилие в элементе от основного сочетания нагрузок ( $N_{эл.}$ ); 2 – усилие в элементе от отклонений изготовления при поперечной сборке – ППС ( $N_1$ ); 3 – усилие в элементе от отклонений изготовления при продольной сборке – ПДС ( $N_2$ ); 4 – усилие в элементе от отклонений монтажа при поперечной сборке – ППС ( $N_3$ ); 5 – усилие в элементе от отклонений монтажа при продольной сборке – ПДС ( $N_4$ ). Под значением суммарного усилия приведена величина перегрузки сечения в долях от единицы. Несущая способность элемента, показана на гистограмме как  $N_{max}$ .

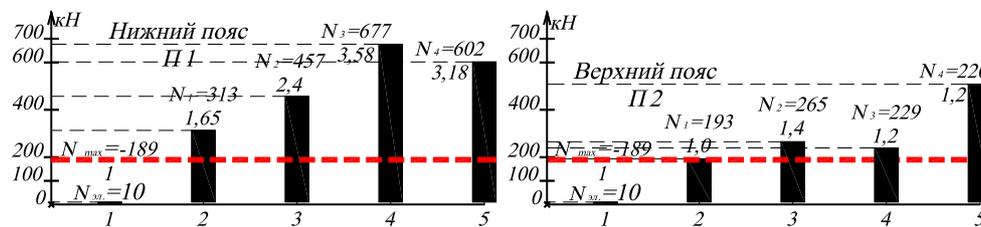


Рис. 9. Величины усилий в элементах П1, П2.

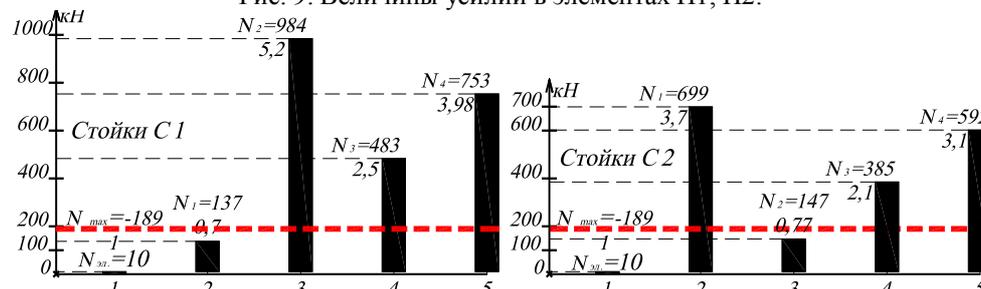


Рис. 10. Величины усилий в элементах С1, С2.

На гистограммах представлено изменение величин сборочных усилий по отношению к несущей способности сечения стержней. Несущая способность стержня на каждой гистограмме принята за 1, а величина сборочного усилия по отношению к несущей способности показана в частях от 1. Например, для элемента П1-П2 величина перегрузки сечения от действия сборочного усилия при поперечной сборке  $N_2 = 1,65$  или 65% (рис. 4). В элементе С1-С2 максимальное

усилие от расчётной нагрузки составляет  $N_{эл.} = 10$  кН. Максимальная величина дополнительного усилия от отклонений при ППС сборке от неточностей монтажа составляет  $N_{ппс} = 303$  кН. Величина суммарного усилия в элементе от отклонений изготовления при поперечной сборке составляет  $N_1 = N_{эл.} + N_{ппс} = 10 + 303 = 313$  кН, где  $N_{ппс}$  – усилие в элементе от отклонений изготовления при поперечной сборке. Величина перегрузки элемента определено по отношению к 1, т.е. Несущая способность  $N_{max} = 189$  кН – 1, а суммарное усилие  $N_1 = 313$  кН. Величина перегрузки равняется отношению  $N_{max}/N_1 = 313/189 = 1,65$ .

Аналогично определены значения усилий во всех остальных элементах оболочки, возникающие в них от отклонений. На остальных гистограммах обозначения будут аналогичные. С целью повышения надёжности большепролетного покрытия авторами рекомендуется разработка конструктивных мероприятий, направленных на «управление отклонениями». Под «управлением отклонениями» в данной статье подразумевается такой способ монтажа, при котором будет выполняться корректировка положения элементов и узлов покрытия, что позволяет устранить отклонения, и снизить величины монтажных (сборочных) усилий до малозначительного уровня.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных результатов можно сделать такие выводы:

1. Выполнен обзор и анализ ранее выполненных исследований как в части расчёта точности, так и учёта отклонений на монтажное напряжённо-деформированное состояние строительных конструкций.

2. Разработана компьютерная программа для расчёта точности шарнирно-стержневых большепролетных пространственных металлических покрытий, а также методика определения МНДС. Разработанные методики определения МНДС и ВК РАСК позволяют учесть длину стержней, форму отверстий (эллиптичность) и связность системы, что делает их более современными в настоящее время при сравнении с другими известными способами и программами расчёта точности и определения НДС конструкций.

3. При выполнении сборки покрытия по схеме ПДС и ППС усилия крайне разнообразны, однако рекомендуется принять сборку покрытия ППС, т.к. при этом влияние сборочных отклонений на МНДС покрытия будет меньшим, чем при сборке ПДС.

### Л и т е р а т у р а

1. *Арошенко М.* Тайны стальных конструкций. [Текст] / М. Арошенко, В. Гордеев, И. Лебедич – К.: Сталь. – 2004. – 304 с.

2. *Бондарев А.Б.* Методика определения монтажного напряжённо-деформированного состояния большепролётных шарнирно-стержневых металлических покрытий [Текст] / А.Б. Бондарев // Металлические конструкции. – 2016. – Том. 22. – №2. – С. 67-82.

3. *Бондарев А.Б.* Методика расчёта точности большепролетных шарнирно-стержневых металлических покрытий [Текст] / А.Б. Бондарев, А.М. Югов // Инженерно-строительный журнал. – 2016. – Том. 61. – №1. – С. 60-73.

4. *Бондарев А.Б.* Оценка монтажных усилий в металлическом покрытии с учётом сборки [Текст] / А.Б. Бондарев, А.М. Югов // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 4 (56). – С. 28-37.

5. *Бондарев А.Б.* Сборочные отклонения в шарнирно-стержневом металлическом покрытии [Текст] / А.Б. Бондарев // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2015. – Том. 30. – № 3. – С. 98-110.

6. *Добромыслов А.Н.* Ошибки проектирования строительных конструкций: Научное издание. [Текст] / А.Н. Добромыслов – М.: АСВ. – 2007. – 184 с.

7. *Дробот Д.Ю.* Живучесть большепролётных металлических покрытий: Диссертация кандидата технических наук / Дмитрий Юрьевич Дробот. – М.: МГСУ. 2010. – 212 с.
8. *Ефимов О.И.* Влияние податливых соединений и узловых эксцентриситетов на работу структурных конструкций [Текст]: диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук / Олег Иванович Ефимов. – Казань: КазГАСА. – 1982. – 152 с.
9. *Кузнецов И.Л.* Облегчённые конструкции арочных зданий (Исследование, разработка, внедрение): Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук / Иван Леонидович Кузнецов. – Казань: КазИСИ. – 1995. – 426 с.
10. *Лебедь Е.В.* Анализ искажений геометрической формы при сборке составных металлических конструкций [Текст] / Е.В. Лебедь, О.В. Шебалина // Промышленное строительство. – 1992. – № 5. – С. 23-24.
11. *Лебедь Е.В.* Анализ начальных усилий секторально-сетчатого купола при полносборной установке в сравнении со звездчатым куполом [Текст] / Е.В. Лебедь, В.А. Етеревский // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. РУДН. – 2012. – № 4. – С. 91-98.
12. *Лебедь Е.В.* Влияние монтажных расчётных схем рёбер двухпоясного металлического купола на начальные усилия при устранении погрешностей [Текст] / Е.В. Лебедь, А.А. Григорян // Вестник МГСУ. – 2015. – № 8. – С. 66-79.
13. *Лебедь Е.В.* Исследование начальных усилий в двухпоясном металлическом куполе при устранении кольцевых погрешностей монтажа [Текст] / Е.В. Лебедь, А.А. Григорян // Вестник МГСУ. – 2016. – № 4. – С. 36-51.
14. *Лебедь Е.В.* К расчёту точности сборки составной конструкции [Текст] / Е.В. Лебедь, О.В. Шебалина // Промышленное и гражданское строительство. – 1993. – № 9. – С. 27-28.
15. *Лебедь Е.В.* Компьютерное моделирование точности возведения двухпоясных металлических куполов [Текст] / Е.В. Лебедь // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – №12. – С. 89-92.
16. *Лебедь Е.В.* Начальные усилия в стержнях односетчатого купола из-за несовершенства его формы при полносборной установке [Текст] / Е.В. Лебедь, В.А. Етеревский // Вестник МГСУ. – 2011. – Том. 2. – № 2. – С. 137-144.
17. *Лебедь Е.В.* Особенности численного моделирования монтажа каркаса односетчатого купола [Текст] / Е.В. Лебедь // ВолгГАСУ. Серия: Строительство и архитектура. – ВолгГАСУ. – 2003. Выпуск 3(9). – С. 81-86.
18. *Лебедь Е.В.* Прогнозирование погрешностей возведения большепролётных металлических куполов на основе геометрического моделирования их монтажа [Текст]: диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук. / Евгений Васильевич Лебедь. – М.: ЦНИИПСК им. Мельникова. – 1988. – 171 с.
19. *Савельев В.А.* Математическое моделирование монтажа пространственных конструкций [Текст] / В.А. Савельев, Е.В. Лебедь, О.В. Шебалина // Промышленное строительство. – 1991. – № 1. – С. 18-20.
20. *Савельев В.А.* Теоретические основы проектирования металлических куполов [Текст]: автореферат диссертации на соискание научной степени доктор технических наук / Виталий Алексеевич Савельев. – М.: ЦНИИСК им. Мельникова. – 1995. – 40 с.
21. *Хусаинов Д.М.* Повышение качества проектирования изготовления и монтажа каркасных облегчённых арочных зданий [Текст]: диссертация на соискание научной степени кандидат технических наук / Дамир Миннигалиевич Хусаинов. – Казань: КГАСА. – 1996. – 252 с.
22. *Bondarev A.B., Yugov A.M.* The Method of Generating Large-Span Rod Systems with the Manufacturer Defect and Assembly Sequence. *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 117. pp. 953-963.
23. *Bujakas V.I., Gvamichava A.S., Rybakowa A.G.* Petal-Type Deployable Space Antennas for Radio Astronomy. *Proceedings of Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*. Hong Kong. 1997. Vol. 2. pp. 380.
24. *Gaul L., Albrecht H., Wirtitzer J.* Semi-active friction damping of large space truss structures. *Shock and Vibration*. 2004. Vol. 11. pp. 173-186.

25. *Kaouk Zimmerman* Structural damage assessment using a generalized minimum rank perturbation theory. Proceedings of the 34th AIAA SDM Conference. La Jolla. California. 1993. pp. 1529-1538.
26. *Kartal M.E., Basaga H.B., Bayraktar A., Muvafik M.* Effects of semi-rigid connection on structural responses. *Electronic Journal of Structural Engineering*. 2010. Vol. 10. pp. 22-35.
27. *Kaveh A., Nouri M.* Weighted graph products for configuration processing of planar and space structures. *International Journal of Space Structures*. Vol. 24. No. 1. 2009. pp. 13-26.
28. *Kim H.M., Doiron H.H.* On-orbit modal identification of large space structures. *Sound and Vibration*. Vol. 26. No. 6. 1992. pp. 24-30.
29. *Makowski Z.S.* Development of jointing systems for modular prefabricated steel space structures. Proc. of the International Symposium. Warsaw: Poland. 2002. pp. 17-41.
30. *Premont, A.* Vibration control of active structures an introduction 2-nd Edition. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. 385 p.
31. *Tsou P., Shen M.-H.* Structural damage detection and identification using neural network. Proc. of the 34th. SDM Conference. La Jolla, California. 1993. pp. 3551-3560.
32. *Yin Yue Huang Xin, Han Qinghua, Bail Linjia* Study on the accuracy of response spectrum method for long span reticulated shells. *International Journal of Space Structures* 2009. Vol. 24. No. 1. pp. 27-35.

#### References

1. *Aroshenko M. Gordeev M., Lebedich I.* Secrets of steel structures. Kiev. 2004. 304 p.
2. *Bondarev A.B.* The Method of Determination of Mounting Stress-Strain State-Span Hinge-Rod Metal Coatings. *Metal Constructions*. 2016. Volume 22. No. 2. pp. 67-82.
3. *Bondarev A.B., Yugov A.M.* The method of calculating the accuracy of large-span metal rod systems. *Magazine of Civil Engineering*, 2016. No. 1(61). pp. 60-73.
4. *Bondarev A.B., Yugov A.M.* Evaluation of installation efforts in metal coatings, allowing for assembly process. *Magazine of Civil Engineering*. 2015. No. 4(56), pp. 28-37.
5. *Bondarev A.B.* Deviations in assembly hinged-rod metal coating. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2015. No. 3(30). pp. 98-110.
6. *Dobromyslov A.N.* The errors of structural design: Scientific publication. Moscow. ASV. 2007. 184 p.
7. *Drobot D.Y.* Vitality-span metal coatings: the thesis submitted for the Scientific Degree on competition of Candidate of Engineering. Moscow. 2010. 212 p.
8. *Efimov O.I.* Impact of compliant connections and nodal eccentricity on the work of the structural units: the thesis submitted for the Scientific Degree on competition of Candidate of Engineering. Kazan. 1982. 152 p.
9. *Kuznetsov I.L.* Stripped out construction arch buildings (Research, development, implementation): The thesis for the degree of Doctor of Technical Sciences. Kazan. 1995. 426 p.
10. *Lebed E.V., Shebalina O.V.* Analysis of distortions of the geometric shape in the assembly of composite. *Metal Structures. Industrial Construction*. 1992. No. 5. pp. 23-24.
11. *Lebed, E.V., Eterevsky V.A.* Analysis of initial stresses in a sectorial-lattice dome during installation as an assembled structure in comparison with a starlattice dome. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Engineering Researches*. 2012. No. 4. pp. 91-98.
12. *Lebed E.V., Grigoryan A.A.* Influence of assembly analytical models of the ribs of a double-layer metal dome on the initial forces in case of elimination of imperfections. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2015. No. 8. pp. 66-79.
13. *Lebed E.V., Grigoryan A.A.* Examination of initial efforts in two-zone metal dome while eliminating mounting errors of annular. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2016. No. 4. pp. 36-51.
14. *Lebed E.V., Shebalina O.V.* Calculation of the Accuracy of Composite Structures Assembling. *Industrial and Civil Engineering*. 1993. No. 9. pp. 27-28.
15. *Lebed E.V.* Computer Modeling of the Accuracy of Erecting Two-Layer Metal Domes. *Industrial and Civil Engineering*. 2013. No. 12. pp. 89-92.
16. *Lebed E.V., Eterevsky V.A.* Initial stresses in the bars of a one-layer lattice dome due to the imperfections of its form during installation as an assembled structure. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2011. Vol. 2. No. 2. pp. 137-144.
17. *Lebed E.V.* Particularities of numerical simulation of carcassing of single-grid dome. *Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture*. 2003. Issue 3(9). pp. 81-86.

18. *Lebed E.V.* Forecasting of errors of large-span metal dome construction based on geometric modeling of their installation: the thesis submitted for the Scientific Degree on competition of Candidate of Engineering. Moscow. 1988. 171 p.
19. *Savelev V.A., Lebed E.V., Shebalina O.V.* Mathematical Modeling of Spatial Structures Installation. *Industrial Construction*. 1991, No. 1. pp. 18-20.
20. *Savelyev V.A.* Theoretical foundations of metal cupolas: Author's abstract the thesis submitted for the Scientific Degree on competition of Doctor of Engineering. Moscow. 1995. 40 p.
21. *Khusainov D.M.* Improving the quality of manufacturing design and installation of lightweight frame arch buildings: the dissertation for the degree of Candidate of Technical Sciences Kazan. 1996. 252 p.
22. *Bondarev A.B., Yugov A.M.* The Method of Generating Large-Span Rod Systems with the Manufacturer Defect and Assembly Sequence. *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 117. pp. 953-963.
23. *Bujakas V.I., Gvamichava A.S., Rybakova A.G.* Petal-Type Deployable Space Antennas for Radio Astronomy. *Proceedings of Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*. Hong Kong. 1997. Vol. 2. pp. 380.
24. *Gaul L., Albrecht H., Wirmitzer J.* Semi-active friction damping of large space truss structures. *Shock and Vibration*. 2004. Vol. 11. pp. 173-186.
25. *Kaouk Zimmerman* Structural damage assessment using a generalized minimum rank perturbation theory. *Proceedings of the 34th AIAA SDM Conference*. La Jolla, California. 1993. pp. 1529-1538.
26. *Kartal M.E., Basaga H.B., Bayraktar A., Muvafik M.* Effects of semi-rigid connection on structural responses. *Electronic Journal of Structural Engineering*. 2010. Vol. 10. pp. 22-35.
27. *Kaveh A., Nouri M.* Weighted graph products for configuration processing of planar and space structures. *International Journal of Space Structures*. Vol. 24. No. 1. 2009. pp. 13-26.
28. *Kim H.M., Doiron H.H.* On-orbit modal identification of large space structures. *Sound and Vibration*. Vol. 26. No. 6. 1992. pp. 24-30.
29. *Makowski Z.S.* Development of jointing systems for modular prefabricated steel space structures. *Proceedings of the international symposium*. Warsaw: Poland. 2002. pp. 17-41.
30. *Preumont, A.* Vibration control of active structures an introduction 2-nd Edition. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. 385 p.
31. *Tsou P., Shen M.-H.* Structural damage detection and identification using neural network. *Proceedings of the 34th. SDM Conference*. La Jolla, California. 1993. pp. 3551-3560.
32. *Yin Yue Huang Xin, Han Qinghua, Bail Linjia* Study on the accuracy of response spectrum method for long span reticulated shells. *International Journal of Space Structures* 2009. Vol. 24. No. 1. pp. 27-35.

#### **MOUNTING STRESS-STRAIN STATE OF JOINT-ROD COVERINGS OF DEPARTMENT OF BALLS AND REAGENTS**

A.M. YUGOV, *DSc (Eng.), professor, Head Department of Technology and building organization*

***Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture***

*286123, Makeyevka, Derzhavin st., 2,*

*E-mail: amyus@mail.ru*

BONDAREV A.B., *engineer, metal structures construction management*

***Joint Stock Company "Matrosov Mine" (JSC «RiM»)***

*12, Proletarskaya Str., Magadan, 685000, Russian Federation*

*E-mail: bondarev\_a\_b\_rus@mail.ru, BondarevAB@polyus.com*

This article gives an overview of previously carried out work on the accuracy of the calculation, determine the mounting loads of metal structures. Given the results of the study of the mounting stress-strain state, which occurs in structures-span hinge-rod cover warehouse balls and reagents. Numerical study of the mounting stress-strain state is made by finite element method, which is implemented in the computing complex SCAD. Also, see impact assessment values installation effort on the carrying capacity of the individual rods coated. Presentation of the efforts made in the form of histograms. The values obtained efforts indicate that the development of measures necessary to reduce the value of the initial forces generated during *assembly cover and respectively the geometrical deviations in the coating in its design*.

**KEY WORDS:** mounting stress-strain state, geometric deviations spatial-span metal coating, installation impact, mathematical modeling

### К ВЫБОРУ РЕШЕТКИ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

М.Н. КИРСАНОВ, д.ф.-м.н., профессор

Национальный исследовательский университет "МЭИ",

111250, Москва, Красноказарменная, 14, c216@ya.ru

Приводятся аналитические решения задачи о прогибе плоской статически определенной фермы с раскосной решеткой. Решение сравнивается с аналогичным для фермы с треугольной решеткой. Преобразования выполнены в системе компьютерной математики Maple, обобщение на произвольное число панелей — методом индукции. Получены асимптотические свойства решений. Выведены формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ферма, решетка фермы, Maple, прогиб

**Постановка задачи.** Проще всего оценить жесткость, прочность и эксплуатационные свойства сооружения, анализируя соответствующие аналитические решения. Альтернативный и наиболее распространенный способ — численный расчет различных вариантов конструкции. При этом полной картины численный анализ не дает, получение же аналитических решений для сооружений с достаточным для полноценного анализа числом параметров в общем случае затруднительно. Современные математические программы (Maple, Mathematica, Maxima) позволяют достаточно легко вывести формулу для прогиба и напряжений в элементах конструкций, например, в фермах, с некоторой определенной конфигурацией, с заданным числом элементов, произвольными размерами, свойствами материала и нагрузками. Вывести же зависимость решения от числа панелей можно лишь обобщая ряд решений задач с различным числом панелей. Это возможно для регулярных периодических схем. Применительно к такой задаче в [1-5] разработан и апробирован на различных конструкциях метод индукции. Этот же метод применяется и в настоящей работе для сравнительного анализа двух ферм с различными типами решеток. В качестве основной рассмотрим симметричную ферму с треугольной решеткой с дополнительными шпренгелями (рис. 1), содержащую  $n$  панелей в половине пролета.

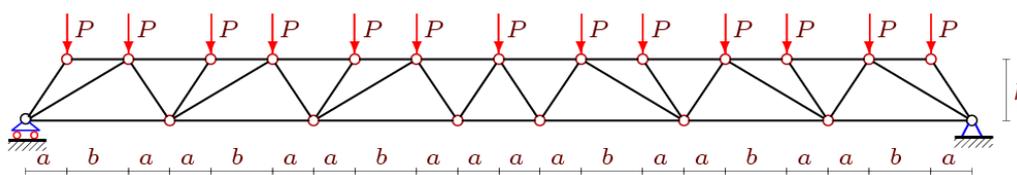


Рис. 1. Ферма 1,  $n=3$

**Вывод формул для прогиба.** Для вывода формулы зависимости прогиба фермы от числа панелей и ее размеров воспользуемся программой [1], рассчитывающей в аналитической форме усилия в стержнях. В программу заложен метод вырезания узлов. Ферма содержит  $6n + 3$  узла и  $m = 12n + 6$  стержней вместе с тремя опорными стержнями. Ввод данных начинается с заданием координат узлов. Нумерация идет слева направо, сначала по нижнему поясу (узлы  $1, \dots, 2n+2$ ), затем по верхнему (узлы  $2n+3, \dots, 6n+3$ ). Имеем следующие координаты нижнего пояса:

$$x_i = c(i-1), y_i = 0, c = 2a + b,$$

$$x_{i+n+1} = c(i+n-1) + 2a, y_{i+n+1} = 0, i = 1, \dots, n+1.$$

Координаты узлов верхнего пояса:

$$\begin{aligned}x_{2i+2n+1} &= a + c(i-1), \quad x_{2i+2n+2} = a + b + c(i-1), \\x_{2i+4n+2} &= c(i+n) + a - b, \quad y_{2i+4n+3} = c(i+n) + a, \quad i = 1, \dots, n, \\y_i &= h, \quad i = 2n+3, \dots, 6n+3.\end{aligned}$$

По аналогии с заданием графа в дискретной математике конфигурация решетки задается специальными векторами, содержащими номера концов стержней. Так, например, нижний пояс задан векторами  $\bar{N}_i = [i, i+1]$ ,  $i = 1, \dots, 2n+1$ , верхний —  $\bar{N}_{i+2n+1} = [i+2n+2, i+2n+3]$ ,  $i = 1, \dots, 4n$ . В программе составляется матрица коэффициентов уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат. Решением системы уравнений получаем в символьной форме усилия в стержнях.

Формула Максвелла-Мора дает выражение для прогиба (вертикальное перемещение среднего узла верхнего пояса) фермы с заданным числом панелей. Последовательный расчет десяти ферм позволяет выявить закономерность образования коэффициентов итоговой формулы. В результате имеем

$$\Delta_1 EF = P \frac{C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 d^3 + C_4 g^3 + C_5 ab^2 + C_6 a^2 b}{2h^2},$$

где  $d = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $g = \sqrt{(a+b)^2 + h^2}$  — длины раскосов,  $EF$  — жесткость стержней, принятая одинаковой для всей фермы. Коэффициенты получены в результате решения рекуррентных уравнений с применением операторов **rgf\_findrecur** и **rsolve** системы Maple:

$$\begin{aligned}C_1 &= (40n^4 + 64n^3 + 44n^2 + 14n + 3) / 3, \\C_2 &= n(5n^3 + 2n^2 + n + 1) / 3, \\C_3 &= 2n^2 - n + 1, \\C_4 &= n(2n + 1), \\C_5 &= n(10n^3 + 8n^2 + 4n + 1), \\C_6 &= n(20n^3 + 24n^2 + 14n + 3).\end{aligned}$$

Первый оператор по данным расчета последовательности ферм возвращает рекуррентное уравнение, второй — его решение. Коэффициенты  $C_1, C_2, C_5, C_6$  удовлетворяют уравнению шестого порядка

$$K_1 = 5K_{n-1} - 10K_{n-2} + 10K_{n-3} - 5K_{n-4} + K_{n-5}$$

с различными начальными условиями, остальные коэффициенты — уравнению

$$K_1 = 3K_{n-1} - 3K_{n-2} + K_{n-3}.$$

Аналогично выводится формула для прогиба фермы сравнения с более простой и распространенной на практике треугольной решеткой (рис. 2). Ферма содержит  $4n + 3$  узлов и  $m = 8n + 6$  стержней вместе с тремя опорными.

Прогиб имеет вид: 
$$\Delta_2 EF = P \frac{C_7 f^3 + C_8 f^3}{16h^2},$$

где  $f = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ ,  $C_7 = (20n^4 + 40n^3 + 34n^2 + 14n + 3) / 3$ ,  $C_8 = 2n^2 + 2n + 1$ .

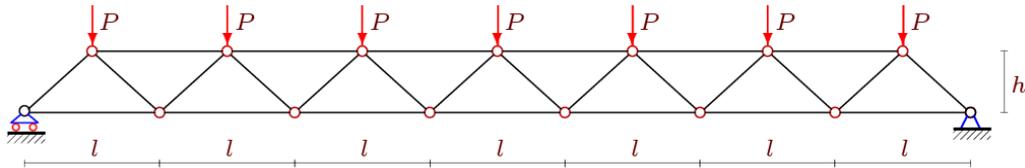


Рис. 2. Ферма 2,  $n=5$

На рисунке 3 приведены кривые прогиба для обеих ферм при длине пролета  $L = (2n + 1)l = (6n + 2)a$ . Для фермы 1 принято  $a = b$ . Графики построены при  $L = 40\text{ м}$ ,  $h = 3\text{ м}$ . Введена относительная величина  $\bar{\Delta} = \Delta EF / P_s$ , где для фермы 1  $P_s = (4n + 1)P$ , а для фермы 2 —  $P_s = (2n + 1)P$ , так, что суммарная нагрузка и длина пролета в обоих случаях одинаковые. Обе кривые обнаруживают минимум приблизительно при одних и тех же значениях чисел панелей  $n$ . Найденная экстремальная точка отвечает вполне реальным для высоты  $h=3\text{ м}$  значениям длин панелей  $l = 3,6\text{ м}$ ,  $a = 1,2\text{ м}$  и может быть использована в практике для оптимизации жесткости сооружения.

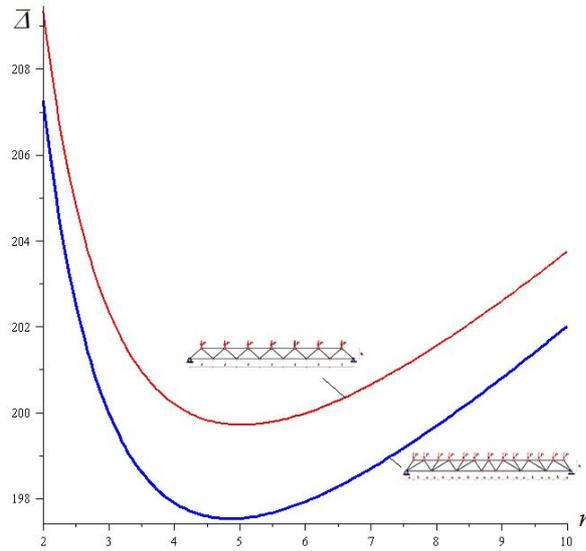


Рис. 3.

**Усилия в критических стержнях и асимптотика.** Одновременно с выводом формулы для прогиба можно получить и аналитические выражения для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях, что необходимо для оценки устойчивости и прочности конструкции. Наиболее растянутый ( $S_1^+$ ) стержень в ферме 1 будет в середине нижнего пояса:

$$S_1^+ = P((4n^2 + 2n + 1)a + n(1 + 2n)b) / (2h),$$

наиболее сжатый — в середине верхнего пояса:

$$S_1^- = -Pn(2n + 1)(2a + b) / (2h).$$

Аналогично получается и в ферме сравнения:

$$S_2^+ = P(2n^2 + 2n + 1)a / (4h), \quad S_2^- = -Pn(n + 1)a / (2h).$$

Аналитическая форма решения позволяет легко получить асимптотику решения для прогибов ферм. Оба решения (как и ранее в ферме 1 принимаем  $a=b$ ) обнаруживают наклонную асимптоту, зависящую только от высоты фермы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Delta} = h / 2 .$$

**Выводы.** Полученные решения для двух ферм выявили, что ферма 1 с дополнительными раскосами имеет несколько большую жесткость по сравнению со стандартной фермой 2 с треугольной решеткой. Экстремальные и асимптотические параметры обеих ферм близки или совпадают. Ранее метод индукции и программа [1] применялись при получении точных решений в задачах о прогибе пространственных [5,6] и плоских [7-11] ферм. Обзоры некоторых аналитических решений для плоских ферм содержатся в [12,13].

#### Л и т е р а т у р а

1. *Кирсанов М. Н.* Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly»//Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
3. *Кирсанов М.Н.* О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы// Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35-44.
4. *Kirsanov M.* An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type// Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. Pp. 14-17.
5. *Кирсанов М.Н.* Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой// Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52-58.
6. *Ершов Л.А.* Формулы для расчета деформаций пирамидального купола// Научный альманах. 2016. N11-2(25). С. 315-318. DOI: 10.17117/na.2016.11.02.315
7. *Ponamareva M.A.* The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load// Science Almanac. 2016. N 4-3(18). Pp. 257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
8. *Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu.* Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12
9. *Voropai R. A.* Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice// Science Almanac. 2016. N 4-3(18). Pp. 238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
10. *Shipaeva A.S.* Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple// Science Almanac. 2016. N 5-3(19). Pp. 236-239.
11. *Bolotina T. D.* The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). Pp.7-8.
12. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
13. *Куйко Л.К.* Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.

#### R e f e r e n c e s

1. *Kirsanov M. N.* Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. 512 p.
2. *Kirsanov M.N.* Analiticheskij raschet balochnoj fermy s reshetkoj tipa «Butterfly». *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2016. № 4 (267). Pp., 2-5.
3. *Kirsanov M.N.* O vliyanii naklona podvizhnoj opory na zhestkost' balochnoj fermy. *Vestnik MGSU*. 2016. № 10. Pp. 35-44.
4. *Kirsanov M.* An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*. 2016. Т. 1. № 3. Pp. 14-17.
5. *Kirsanov M. N.* Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
6. *Ershov L.A.* Formuly dlya rascheta deformacij piramidalnogo kupola. *Nauchnyj Al'manah*. 2016. N11-2(25). S. 315-318. DOI: 10.17117/na.2016.11.02.315

7. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load. *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). Pp. 257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
8. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12
9. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice. *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). Pp. 238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
10. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple. *Science Almanac*. 2016. N 5-3(19). Pp. 236-239.
11. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. № 4-3(8). Pp.7-8.
12. Tinkov D.V. Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennykh konstrukcij. *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2015. №5(57). Pp. 66–73.
13. Kijko L.K. Analiticheskaya ocenka progiba arochnoj fermy pod dejstviem vetrovoj nagruzki. *Nauchnyj vestnik*. 2016. № 1 (7). Pp. 247-254.

### ON THE CHOICE OF THE LATTICE GIRDER

M. N. KIRSANOV, Dr. Sc., Professor

National research University "MPEI", 111250, Moscow, Krasnokazarmennaya, 14, c216@ya.ru

The analytical solution to the problem of deflection of statically determinate flat truss with diagonal bars is obtained. The solution is compared with a similar of the truss with a triangular lattice. Solution is prepared in the system of computer mathematics Maple. The method of induction is used for generalization the solution to an arbitrary number of panels. The asymptotic properties of solutions are found. The formulas for forces in the most compression and tie rods are obtained.

KEY WORDS: truss, lattice, Maple, deflection.



### АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Э.Я. ЕЛЕНИЦКИЙ, к.т.н., доцент

ООО «Глобалтэксинжиниринг»

443010, г. Самара, ул. Галактионовская, д.139, кв.4, elenit@list.ru

Получены дифференциальные уравнения и построено новое точное решение задачи для прямолинейного стержня и плоской статически определимой стержневой системы при действии продольно-поперечных нагрузок. Рассмотрено три характерных участка стержня, отличающихся схемами расположения упругого ядра прямоугольного сечения. Определены все компоненты напряженно-деформированного состояния и границы упруго-пластических зон. Представлен численный анализ результатов в линейной и нелинейной постановке.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: упругопластический материал, упругое ядро сечения, продольно-поперечный изгиб, уравнения равновесия, краевая задача, стержневая система.

При решении физически нелинейных задач строительной механики, точность приближенных методов определяется, как правило, с помощью других приближенных процедур. Например, в монографии [1] результаты расчета стержня итерационными методами упругих решений [2], переменных параметров упругости [3], Ньютона-Канторовича [4] и других [5, 6] оцениваются путем сравнения с аналогичными результатами, полученными методом конечных разностей [7].

Проверка численных расчетов с помощью точных нелинейных аналитических зависимостей в большинстве случаев не представляется возможной, поскольку их набор является весьма ограниченным. С целью расширения набора замкнутых решений и получения в явном виде высокоточных расчетных соотношений в настоящей статье рассмотрена краевая задача для стержня прямоугольного сечения и статически определимой стержневой системы из идеального упругопластического материала. Впервые аналитическое решение такой задачи было получено А.Р. Ржаницыным при условии действия только поперечной силы для простейших случаев нагружения однопролетного стержня [8]. Обобщение этого замкнутого решения выполнено в работе [9] для квадратичного закона распределения изгибающего момента вдоль статически определимой балки на двух опорах. Более простое решение без интегрирования дифференциальных уравнений в условиях чистого изгиба балки представлено в [10]. При этом полученные зависимости эффективно использовались для определения механических характеристик материалов в задачах микро-инженерии. Аналогичным образом аналитически исследовались напряжения прямолинейного стержня для различных моделей пластического течения [11] и криволинейного стержня для различных законов неоднородности по высоте сечения [12]. Случай продольно-поперечного изгиба бруса прямоугольного сечения, являющийся обобщением исследования его чистого изгиба [2, 13], рассмотрен в работе [14]. При этом решение значительно усложняется, поскольку распределение напряжений по высоте сечения становится несимметричным. Однако представленные в монографии [14] результаты являются приближенными, поскольку стержень моделируется набором участков с постоянными по длине жесткостными параметрами, а линеаризация осуществляется итерационной процедурой на основе зависимости между фиктивной нагрузкой и деформациями фиксированных сечений. Аналогичная задача для сжато-изогнутого консольного стержня из упругопластического материала с упрочнением исследовалась методом конечных элементов [15]. Итерационный подход, корректирующий приведенную жесткость каждого участка стержня с помощью секущего модуля упругости, реализован в [16]. Задача определения границ упругопластических зон в продольном сечении стержня точно решена в работах [8, 14, 17, 18]. Замкнутое аналитическое решение для стержневых систем в упругопластической стадии работы материала при действии продольно-поперечных нагрузок в литературе отсутствует.

Ниже приведена постановка и интегрирование физически нелинейной краевой задачи для продольно-поперечного изгиба стержня прямоугольного сечения. На основе полученных интегралов построено замкнутое решение для плоских стержневых систем ветвящегося типа с краевыми условиями, обеспечивающими статическую определимость. При этом точно определены все компоненты напряженно-деформированного состояния и границы упругопластических зон. Изотропный материал характеризуется модулем линейной упругости  $E$ , а его деформирование подчиняется диаграмме Прандтля с предельными значениями деформаций  $\epsilon_p$  и напряжений  $\sigma_p$ . Также как в других аналогичных исследованиях, используется гипотеза плоских несжимаемых поперечных сечений, которая достаточно точно описывает деформирование конструкции независимо от свойств материала [8].

Предварительно рассмотрим консольную схему стержня длиной  $l$ , для которой на свободном конце в плоскости главной жесткости прикладывается сила с составляющими  $P_x$ ,  $P_y$ , вызывающими появление пластических деформаций, области которых выделены штриховкой (рис. 1а). Пролет стержня с неизменной высотой и шириной сечения  $h$ ,  $b$  можно разделить на три характерных зоны, каждой из которых соответствует различная схема расположения упругого

ядра сечения. В зоне I крайние верхние и нижние волокна испытывают пластическое течение, в зоне II пластическое деформирование происходит только с одной стороны сечения, в зоне III весь материал работает упруго. Границы зон определяются размерами  $l_1, l_2$  в системе координат  $xu$ .

Распределение напряжений по высоте сечения и деформации элементарного участка длиной  $dx$  для зоны I представлены на рис. 2а,б. При этом размеры и положение упругого ядра определяются формулой:

$$z_{1,2} = -0,5n \pm \sqrt{0,75(1-m-n^2)}, \quad (1)$$

полученной из уравнений равновесия внешних и внутренних усилий (рис. 2а).

В равенстве (1) используются выражения для безразмерных границ  $z_{1,2}=Z_{1,2}/h$ ; безразмерных усилий  $n, m$ ; усилий  $N_p, M_p$ , обеспечивающих независимо друг от друга переход всего сечения в зону пластического течения [14], а именно:

$$n = N / N_p; \quad m = M / M_p, \quad N_p = bh\sigma_p; \quad M_p = bh^2\sigma_p / 4, \quad (2)$$

$$N = P_x, \quad M = Px + M_0. \quad (3)$$

Формулы (3) содержат выражения продольной силы  $N$  и изгибающего момента  $M$  в расчетном сечении, причем для консольной схемы (рис. 1а):

$$M_0 = 0, \quad P = P_y. \quad (4)$$

Основными расчетными параметрами средней линии сечения в зоне I являются ее деформации  $\varepsilon_0$  и кривизна  $1/\rho$ , определяемые из схемы деформирования (рис. 2б) по формулам:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_p(z_2 + z_1)(z_2 - z_1)^{-1}, \quad 1/\rho = 2\varepsilon_p[(z_1 - z_2)h]^{-1}. \quad (5)$$

Исходя из равенства первой производной от функции продольных перемещений  $u(x)$  продольным деформациям  $\varepsilon_0$  и равенства второй производной от функции прогибов  $w(x)$  кривизне средней линии стержня  $1/\rho$ , с учетом (5) имеем:

$$\begin{aligned} du/dx &= \varepsilon_p(z_2 + z_1)(z_2 - z_1)^{-1}, \\ d^2w/dx^2 &= 2\varepsilon_p[(z_1 - z_2)h]^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

При наличии (1) дифференциальные уравнения (6) принимают вид:

$$\begin{aligned} du/dx &= \lambda nh[3(k_3 - k_1x)]^{-0.5}, \\ d^2w/dx^2 &= 2\lambda[3(k_3 - k_1x)]^{-0.5}, \end{aligned} \quad (7)$$

где с учетом равенств (2) обозначено

$$k_1 = P / M_p, \quad k_2 = M_0 / M_p, \quad k_3 = 1 - n^2 - k_2, \quad \lambda = \sigma_p / Eh. \quad (8)$$

Интегрируя (7), приходим, с точностью до постоянных  $C_{11}, C_{12}, C_{13}$  к следующим выражениям для продольных и нормальных линейных перемещений  $u_1, w_1$ , а также углов поворота  $\psi_1$  в зоне I:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-2\lambda nh}{\sqrt{3} k_1} \sqrt{k_3 - k_1x} + C_{11}, \quad \psi_1 = \frac{-4\lambda}{\sqrt{3} k_1} \sqrt{k_3 - k_1x} + C_{12}, \\ w_1 &= \frac{8\lambda}{3\sqrt{3} k_1^2} (k_3 - k_1x)^{1.5} + C_{12}x + C_{13}. \end{aligned} \quad (9)$$

Параметры границ упругого ядра, полученные из уравнений равновесия усилий в сечении стержня в зоне II (рис.2в) определяются соотношениями:

$$z_1 = 1 - 3m(1-n)^{-1} / 4, \quad \alpha = 4(1-n)^2(1-n-0,5m)^{-1} / 3. \quad (10)$$

Рассматривая продольные и изгибные деформации элементарного участка

стержня для исследуемой зоны (рис.2г), представим их следующим образом:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_p (0,5 - \alpha z_1)(0,5 + z_1)^{-1}, \quad 1/\rho = \varepsilon_p (1 + \alpha)[(0,5 + z_1)h]^{-1}. \quad (11)$$

Уравнение равновесия с учетом зависимостей (10), (11) принимают вид:

$$\frac{du}{dx} = \lambda h \frac{2}{3} \left[ \frac{0,5}{1 - k_4 x - k_5} - \frac{4n - 3 + 3k_4 x + 3k_5}{3(1 - k_4 x - k_5)^2} (1 - 1,5k_4 x - 1,5k_5) \right],$$

$$d^2 w / dx^2 = 8\lambda(1 - n)^2 [0,25m^2(1 - n)^{-1} + 1 - m - n]^{-1} / 9, \quad (12)$$

где обозначено

$$k_4 = 0,5k_1 / (1 - n), \quad k_5 = 0,5k_2 / (1 - n). \quad (13)$$

Интегрируя (12), получим с точностью до постоянных  $C_{21}, C_{22}, C_{23}$  следующие выражения для линейных  $u_2, w_2$  и угловых  $\psi_2$  перемещений стержня в зоне II:

$$u_2(x) = 2\lambda h \frac{1 - n}{k_1} \left[ k_4 x + k_5 + 4 \frac{1 - n}{3} \ln(1 - k_4 x - k_5) - \frac{4}{9} \frac{1 - n}{k_4 x + k_5 - 1} \right] + C_{21},$$

$$\psi_2(x) = -32\lambda(1 - n)^3 \left\{ 9 k_1 [k_1 x + k_2 - 2(1 - n)] \right\}^{-1} + C_{22},$$

$$w_2(x) = -32\lambda k_1^{-2} (1 - n)^3 \ln[2(1 - n) - k_1 x - k_2] / 9 + C_{22} x + C_{23}. \quad (14)$$

Упругий характер деформирования стержня в зоне III позволяет представить его перемещения  $u_3, w_3, \psi_3$  с точностью до постоянных  $C_{31}, C_{32}, C_{33}$ .

Границы между зонами I-II и II-III характеризуются условиями:  $z_2 = -0,5$  для формулы (1) (рис. 2а), и  $z_1 = 0,5$  для первой формулы (10) (рис. 2в). Тогда границы зон могут быть установлены из следующих зависимостей:

$$\text{при } x=l_1: \quad m = 2(1 - 2n^2 + n) / 3; \quad \text{при } x=l_2: \quad m = 2(1 - n) / 3. \quad (15)$$

Равенства (15), дополненные условием предельной несущей способности [10]:

$$m \leq 1 - n^2 \quad (16)$$

и представленные графически на рис.1г, определяют области действия полученных решений для различных схем расположения упругого ядра сечения.

С учетом равенств (2), (3), (8) из (15) следует:

$$l_1 = 2k_1^{-1}(1 - 2n^2 + n) / 3 - k_2 / k_1, \quad l_2 = 2k_1^{-1}(1 - n) / 3 - k_2 / k_1. \quad (17)$$

Девять произвольных постоянных интегрирования дифференциальных уравнений определяются из девяти граничных условий, имеющих вид:

$$\text{при } x=l_1: \quad u_1(l_1) = u_2(l_1), \quad \psi_1(l_1) = \psi_2(l_1), \quad w_1(l_1) = w_2(l_1), \quad (18)$$

$$\text{при } x=l_2: \quad u_1(l_2) = u_2(l_2), \quad \psi_1(l_2) = \psi_2(l_2), \quad w_1(l_2) = w_2(l_2), \quad (19)$$

$$\text{при } x=l: \quad u_1(l) = \psi_1(l) = w_1(l) = 0, \quad (20)$$

где первая группа условий (18), (19) относится к внутренним границам, а вторая (20) обеспечивает консольное закрепление стержня длиной  $l$ .

Переходя к шарнирно опертому стержню замечаем (рис.1б), что полученные расчетные соотношения не изменяются за исключением формул (4), (20), которые с учетом симметрии расчетной схемы следует представить следующим образом:

$$M_0 = P_y l, \quad P = -P_y, \quad (21)$$

$$\text{при } x=0: \quad u_1(0) = \psi_1(0) = 0, \quad \text{при } x=l: \quad w_3(l) = 0. \quad (22)$$

Необходимо отметить, что полученный набор решений для перемещений стержня является наиболее полным, так как включает все варианты распределения упругих и пластических деформаций. При этом возможны частные случаи, когда в пролете стержня отсутствует одна из зон I, II, или когда весь стержень деформируется упруго. Наличие соотношений (15)-(17) позволяет заранее произвести соответствующий анализ и сформировать условия, аналогичные равен-

ствам (18), (19). В этом случае целесообразно обеспечить автоматическое выполнение этих условий и исключить из решения часть произвольных постоянных. Тогда расчетные соотношения для отдельного стержня  $e$  принимают вид:

$$\vec{d}_e(x) = \vec{d}_{pe} + a_e(x)\vec{C}_e, \quad (23)$$

где  $\vec{d}_e$  – матрица искомых перемещений;  $\vec{d}_{pe}$  – матрица известных частных решений для сечений различного типа и различных нагрузок, и при этом обеспечивающая условия совместности перемещений для внутренних границ стержня;  $a_e$  – матрица фундаментальных решений дифференциальных уравнений;  $\vec{C}_e$  – вектор-столбец произвольных постоянных общего решения этих уравнений.

Компоненты векторного равенства (23) имеют следующий вид:

$$\vec{d}_e(x) = \begin{bmatrix} u_e(x) \\ \varphi_e(x) \\ w_e(x) \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_{pe}(x) = \begin{bmatrix} u_{pe}(x) \\ \varphi_{pe}(x) \\ w_{pe}(x) \end{bmatrix}, \quad a(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{C}_e = \begin{bmatrix} C_{e1} \\ C_{e2} \\ C_{e3} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где матрица  $a(x)$  соответствует структуре решения (9), (14).

Наличие соотношений (23), (24) позволяет производить расчеты не только отдельных стержней прямоугольного сечения, но и статически определимых стержневых систем в упруго-пластической стадии работы материала. При этом составная конструкция может быть образована последовательным соединением участков, а также иметь структуру ветвящегося типа. В последнем случае граничные условия задачи формируются автоматически по формулам [19]:

$$\sum_{e=1}^n h'_{je} \vec{d}_e(\xi L_e) = \vec{d}_j^*, \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (25)$$

$$\sum_{e=1}^n h''_{je} \vec{d}_e(\xi L_e) = 0, \quad j=1, 2, \dots, m_1, \quad (26)$$

где  $n$  – число участков-элементов длиной  $L_e$ ;  $m, m_1$  – число узлов и простых узлов стержневой системы;  $h'_{je}, h''_{je}$  – матрицы, преобразующие перемещения из локального в глобальный базис и одновременно осуществляющие необходимую компоновку внешних связей и элементов в узле  $j$ ;  $\vec{d}_j^*$  – вектор-столбец внешних заданных кинематических воздействий в узле  $j$ ;  $\xi$  – параметр, принимающий значения 0 и 1 для начального и конечного сечений элемента.

Как показано в работе [19], общее число условий внешнего опирания конструкции (25) и сопряжения элементов-стержней системы (26) составляет  $3n$ . Следовательно, подстановка зависимостей (23) в граничные условия (25), (26) приводит к замкнутой системе неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных произвольных постоянных  $\vec{C}_e$  ( $e=1, n$ ). Определив эти постоянные, получаем в явном виде искомые функции перемещений (23).

Решение задачи для отдельного стержня проиллюстрируем численно на примере с исходными данными:  $l=3$  м,  $b=0,1$  м,  $h=0,15$  м,  $E=206000$  МПа,  $\sigma_p=240$  МПа,  $P_x=400$  кН,  $P_y=44$  кН. На рис.3а показаны границы области пластических деформаций консольного стержня, полученные по формулам (1), (10) при  $P_x=0$  (пунктирные линии) и  $P_x \neq 0$  (сплошные линии). В первом случае имеем  $l_1=l_2=2,045$  м и высоту упругого ядра сечения, примыкающего к заделке  $\Delta Z=Z_1-Z_2=38,7$  мм. Наличие продольной силы изменяет форму области неупругого деформирования таким образом, что ее размеры характеризуются параметрами  $l_1=2,222$  м,  $l_2=1,818$  м,  $\Delta Z=25,8$  мм. На рис.3б представлены результаты

для прогибов консольного стержня из упругого материала (кривая 1), упруго-пластического материала при  $P_x=0$  (кривая 2), упругопластического материала при  $P_x \neq 0$  (кривая 3). Перемещения на свободном конце стержня для указанных вариантов расчета составили 68,35 мм, 83,34 мм, 89,41 мм. Следовательно, наличие продольной силы привело к увеличению максимальных прогибов на 7,3%. Расчет шарнирно опертого стержня при действии указанной на рис.1б нагрузки показал, что все результаты на половине пролета совпадают с результатами расчета консольного стержня. С помощью представленного точного решения выполнена проверка вычислительного комплекса ANSYS при использовании конечного элемента Beam189. Максимальный прогиб составил 89,07 мм. Разница результатов точного и конечно-элементного расчета не превышает 0,38 %.

Далее рассмотрим результаты точного аналитического решения для стержневой системы, представленной на рис.1в. Геометрические параметры конструкции:  $L_1=2$  м,  $L_2=3$  м,  $L_3=1$  м,  $L_4=2,5$  м,  $\alpha=30^\circ$ , ширина всех сечений  $b=0,1$  м, высота сечения горизонтального участка и наклонного стержня соответственно  $h_1=0,15$  м,  $h_2=0,22$  м. Характеристики материала аналогичны предыдущему примеру. Значения нагрузок:  $P_y=50$  кН,  $P_x=124$  кН,  $M=140$  кН·м,  $q=10$  кН/м. Нумерация узлов и стержней приведена на рис.1в, где также показана глобальная система координат  $XOY$ . Оси  $x$  местной системы отсчета направлены от начала к концу стержня. Условия внешнего опирания (25) в развернутом виде записываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{d}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix} \vec{d}_4(L_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Аналогично для условий сопряжения стержней (26) имеем:

$$h_1 \vec{d}_1(L_1) = h_2 \vec{d}_2(0), \quad h_2 \vec{d}_2(L_2) = h_3 \vec{d}_3(0), \quad h_2 \vec{d}_2(L_2) = h_4 \vec{d}_4(0), \quad (28)$$

где обозначено:

$$h_1 = h_2 = h_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (29)$$

На рис.3в в масштабе 10:1 изображены перемещения стержневой системы в упруго-пластической (сплошные линии) и упругой (пунктирные линии) постановке. В первом и втором случае максимальный прогиб горизонтального участка конструкции  $w_{\max}$  составляет соответственно 119,58 мм и 92,86 мм.

На рис.3г показаны границы зон пластического течения конструкции. При этом  $l_1=1,666$  м,  $l_2=1,559$  м,  $\Delta Z=367$  мм.

Результаты расчета той же задачи по программе ANSYS приведены в таблице 1. Там же производится сравнение результатов точного и конечно-элементного (в скобках) расчетов для различных уровней нагрузки  $P_y$  при прочих неизменных параметрах. Длина конечных элементов Beam189 составляет 0,1 м, количество слоев сетки по высоте сечения равно 30.

Таблица 1

$P_y$ , кН	$w_{\max}$ , мм	$\Delta Z$ , мм	$\varepsilon$ , %
50	119,58 (119,41)	55,1	0,14
55	140,23 (139,63)	45,1	0,43
60	180,77 (178,01)	32,1	1,53
65	375,59 (303,70)	5,72	19,14

Как следует из таблицы 1, точность конечно-элементного расчета существ-

венно зависит от соотношения упругих и пластических деформаций по высоте сечений. Так, в наиболее нагруженном сечении при  $\Delta Z / h_1 \geq 0,3$  погрешность составляет не более 0,43%, а при приближении к предельному состоянию, когда  $\Delta Z / h_1 = 0,03813$ , она достигает 19,14%.

#### Заключение

1. Получено новое точное решение краевой задачи для стержня и плоской статически определимой стержневой системы ветвящегося типа в физически нелинейной постановке.

2. Установлены в явном виде размеры зон с различными схемами расположения упругого ядра прямоугольного сечения. Автоматическое выполнение условий сопряжения указанных зон позволяет снизить количество произвольных постоянных для каждого стержня в общем случае с девяти до трех.

4. Тестирование конечного элемента Beam189 показало существенную зависимость точности вычислений комплекса ANSYS от соотношения упругих и пластических деформаций.

#### Литература

1. *Петров В.В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфа-Инженерия, 2014. – 480 с.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
3. *Биргер И.А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред, №2. – М.: Наука, 1975. – с.51-73.
4. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук, Т. III, №6. – М.: Изд. АН СССР, 1948. – С.89-185.
5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
6. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1975. – 119 с.
7. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
8. *Ржаницын А.Р.* Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. – М.: Гостройиздат, 1954. – 288 с.
9. *Stok B., Halilovic M.* Analytical solutions in elasto-plastic bending of beams with rectangular cross section // Applied Mathematical Modelling. – 2009. Vol. 33, №3. – P. 1749-1760.
10. *Bin J. Wanji C.* A new analytical solution of pure bending beam in couple stress elasto-plasticity: theory and applications // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47, №6. – P. 779-785.
11. *Joudaki J., Sedighi M.* Effect of materials behavior on residual stress distribution in elastic-plastic beam bending: An analytical solution // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications. – 2015. – P.1-12.
12. *Nie G. J., Zhong Z.* Analytical solution for elastic and elastoplastic bending of a curved beam composed of inhomogeneous materials // Key Engineering Materials. - Trans Tech Publications. – 2013. Vol. 535. – P.353-356.
13. *Лукаш П.А.* Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с.
14. *Безухов Н.И., Лужин О.В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
15. *Salazar J. A., Lange D.F., Cruz A.T., Castillo H.I., Rodriguez G.M.* Elastoplastic Analysis of a Cantilever Beam under Combined Compressive and Bending Load // ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. – American Society of Mechanical Engineers, 2013. – P. V009T10A025-V009T10A033.
16. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. – СПб.: Лань, 2008. – 656 с.
17. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.

18. Chica E., Teran J. M. G., Iban A. L. Yield surface for elastoplastic beam 2D element considering damage material // 8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Eccomas 2008). – 2008.

19. Еленитский Э.Я. Краевая задача для гибких составных конструкций ветвящегося типа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. – №6. – С.73-80.

#### References

1. Petrov V.V. (2014). *Nelinejnaya inkrementalnaya stroitel'naya mekhanika*, Moscow: Inf-Inzheneriya, 480 p.
2. Ilyushin A.A. (1948). *Plastichnost*, Moscow: Gostekhizdat, 376 p.
3. Birger I.A. (1975). Obshchie algoritmy resheniya zadach teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti // Uspekhi mekhaniki deformiruemym sred, – №2. M.: Nauka, p.51-73.
4. Kantorovich L.V. (1948). Funktsionalnyj analiz i prikladnaya matematika // Uspekhi matematicheskikh nauk, t. III, №6. M.: Izd. AN SSSR, p.89-185.
5. Zenkevich O. (1975). *Metod konechnykh ehlementov v tekhnike*, Moscow: Mir, 541 p.
6. Petrov V.V. (1975). *Metod posledovatel'nyh nagruzenij v nelinejnoj teorii plastin i obolochek*, Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta, 119 p.
7. Novozhilov V.V. (1948). *Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti*, Moscow: Gostekhizdat, 211 p.
8. Rzhanicyn A.R. (1954). *Raschet sooruzhenij s uchetom plasticheskikh svojstv materiala*, Moscow: Gosstrojizdat, 288 p.
9. Stok B., Halilovic M. (2009). Analytical solutions in elasto-plastic bending of beams with rectangular cross section, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, №3, p.1749-1760.
10. Bin J. Wanji C. (2010). A new analytical solution of pure bending beam in couple stress elastoplasticity: theory and applications, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, №6, p. 779-785.
11. Joudaki J., Sedighi M. (2015). Effect of material's behavior on residual stress distribution in elastic-plastic beam bending: An analytical solution, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications*, p.1-12.
12. Nie G. J., Zhong Z. (2013). Analytical solution for elastic and elastoplastic bending of a curved beam composed of inhomogeneous materials, *Key Engineering Materials. – Trans Tech Publications*, Vol. 535, p.353-356.
13. Lukash P.A. (1978). *Osnovy nelinejnoj stroitel'noj mekhaniki*. Moscow: Strojizdat, 208 p.
14. Bezuhov N.I., Luzhin O.V. (1974). *Prilozhenie metodov teorii uprugosti i plastichnosti k resheniyu inzhenernykh zadach*. Moscow: Vysshaya shkola, 200 p.
15. Salazar J. A., Lange D.F., Cruz A.T., Castillo H.I., Rodriguez G.M. (2013). Elastoplastic Analysis of a Cantilever Beam under Combined Compressive and Bending Load, *ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition.–American Society of Mechanical Engineers*, p. V009T10A025-V009T10A033.
16. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. (2008). *Stroitel'naya mekhanika*, St. Petersburg: Lan, 656 p.
17. Sokolovskij V.V. (1969). *Teoriya plastichnosti*, Moscow: Vysshaya shkola, 608 p.
18. Chica E., Teran J. M. G., Iban A. L. (2008). Yield surface for elastoplastic beam 2D element considering damage material, *8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Eccomas 2008)*.
19. Elenitskiy E.Ya. (2016). Boundary value problem for branching type flexible compound structures, *Structural Mechanics of Engineering Construction and Building*, №6, p.73-80.

### ANALYTICAL SOLUTION FOR BEAM STRUCTURE WITH ELASTO-PLASTIC PROPERTIES OF MATERIAL

E.YA. ELENITSKIY

LTD «Globaltanksengineering», Samara, Russia

The differential equations are received and the new exact solution of a problem for a rectangular cross section and flat statically determination beam structure at action of longitudinal and transvers loadings is constructed. Three characteristic areas of the beam, distinguished by schemes of position of elastic core section were considered. All the components of the stress-strain state, borders of elastic-plastic zones are determined. A numerical analysis of linear and nonlinear formulation was presented.

KEY WORDS: elastic-plastic material, elastic core section, longitudinal and transverse bending, equilibrium equations, boundary value problem, beam structure.

***Buckling analysis*****THEORETICAL APPROACH FOR THE GEOMETRICALLY NONLINEAR BUCKLING ANALYSIS OF SINUSOIDAL VELAROIDAL SHELLS**GIL-OULBÉ MATHIEU, *PhD, Assoc. Prof.*,SHAMBINA S.L., *PhD, Assoc. Prof.*DAU TYEKOLO, *PhD, Assis. Prof.**RUDN University, Russia**117198, Moscow, Miklukho-Maklaya street, 6;**E-mail: gil-oulbem@hotmail.com, shambina\_sl@mail.ru, tiek.d@hotmail.com*

*The main subjects of the article are theoretical strength and buckling analyses of a sinusoidal velaroidal shell subjected to its self-weight and uniformly distributed load in geometric nonlinearity. A short history of finite element applications to shell buckling is given. The finite element method is used in its matrix formulation. The elastic stiffness matrixes in the local coordinate system of the membrane element are defined in their general form. The out-of-plane geometric stiffness matrix for the plate along the same lines is derived.*

**KEY WORDS:** sinusoidal velaroidal surfaces, nonlinear buckling analysis, linear elastic stiffness matrices, normal stiffness, geometric stiffness matrix, chain rule differentiation.

Velaroidal surface is a surface of translation on the flat rectangular plan with a generating curve of variable curvature [1],[2]. Thus, the surface is limited by four mutually orthogonal contour straight lines ( $k_x = k_y = 0$ ) lying in the same plane.

A sinusoidal velaroid generates by two families of half waves of the sinusoids lying in mutually perpendicular planes and facing by convexities into the same side [3]. Each set of sinusoids has the identical period. Sinusoidal velaroid is limited by a flat rectangular contour.

The history of finite element applications to shell buckling is extensive going back to the work of Clough and Johnson (1968). The natural mode contribution of Argyris *et al.* (1977) was a major addition to shell theory. It was recently modified to include elastoplastic effects (Argyris *et al.* 2000). Horrigmoe and Bergan (1978) used the co-rotational method for nonlinear analysis and Bathe and Ho (1980), Hsiao (1987), Mohan and Kapania (1997), Peng and Crisfield (1992) improved element performance along those lines. The 3-D elasticity "degenerate" element of Ahmad *et al.* (1970) was followed by, among others, Bathe and Balourchi (1980), Hughes and Lui (1981), Dvorkin and Bathe (1984), and Buechter and Ramm (1992). In an excellent review, Ibrahimbegovic (1997) addresses the various approaches and the complex issues involved.

Here the derivation of the geometric stiffness matrix is somewhat different but consistent with the approach used throughout this text. The linear equilibrium equations for a flat triangular shell element in its local coordinates system are first perturbed to yield the in-plane geometric stiffness matrix. Then out-of-plane considerations that involve the effect of rigid body rotations on member forces yield an out-of-plane geometric stiffness matrix. The shell element that was chosen for that purpose combines the constant stress triangle (CST) flat triangular membrane element (Zienkeiwicz (1977)) and of the discrete Kirchhoff theory (DKT) flat triangular plate element (Batoz *et al.* (1980)).

Let's consider a sinusoidal velaroidal shell [4],[5] with the inner radius  $r_0 = 0$ , the outer variables radii from  $10m$  to  $20m$  and the number of waves  $n = 8$  (Fig. 1).

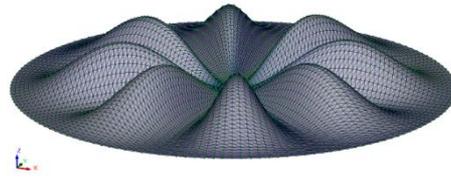


Fig.1. A sinusoidal velaroidal shell

### The Geometric Stiffness Matrix of Triangular Element Shells.

The local geometric stiffness matrix of the shell element is split into three distinct matrices:

$$[K_G^e]_{TOTAL}^{shell} = [K_G^e]_{IP}^{mem} + [K_G^e]_{IP}^{plate} + [K_G^e]_{OP}^{shell}, \quad (1)$$

where the first, second and third terms on the R.H.S. of Eq.1. represent the in-plane geometric stiffness matrix of the membrane, the in-plane geometric stiffness matrix of the plate and the out-of-plane geometric stiffness matrix of the shell element respectively. The total, 'tangential' stiffness matrix for use in nonlinear analysis will include, in addition, the linear elastic stiffness matrices of a plane stress triangular element (membrane) and that of a triangular plate element.

The geometrically nonlinear triangular shell element has eighteen local degrees of freedom (DOF's): 3 displacements and 3 rotations at each node. The membrane element contributes to nine displacement DOF's only. The basic three noded constant stress triangular flat element has only six local displacement DOF's that are shown in Figure 2. The out-of-plane contribution (the normal stiffness) of the membrane element to the basic local shell element is a displacement DOF in the direction normal to the plane of the element.

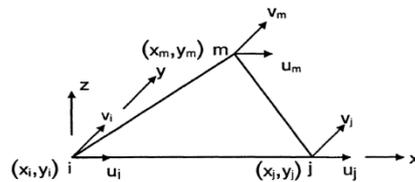


Fig. 2. Triangular membrane element

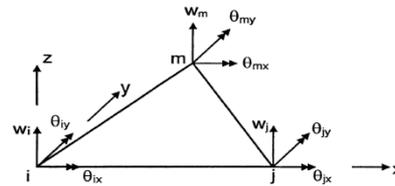


Fig.3. Triangular plate element

The flexural element contributes to eighteen local DOF's. The basic three noded plate triangular flat element has only nine DOF's that are shown in Figure 3. The in-plane contribution to the basic local element adds two displacement DOF's in the plane of the element. The out-of-plane contribution adds a rotation DOF in the direction normal to the plane of the element.

#### In-Plane Contribution of the Triangular Membrane Element.

The elastic stiffness matrix in the local coordinate system of the membrane element has the general form:

$$[K_E^e]^{mem} = \int_A B_{mem}^T D B_{mem} t dx dy. \quad (2)$$

The local in-plane contribution of the membrane element to the geometric stiffness matrix is the gradient of the nodal force vector:

$$[K_G^e]_{IP}^{mem} = \nabla F_{mem}^e. \quad (3)$$

#### In-Plane Contribution of the Triangular Plate Bending Element.

The general form of the elastic stiffness matrix of the DKT triangular plate element may be written as:

$$[K_E^e]^{plate} = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} B_{plate}^T \left( \frac{t^3}{12} D \right) B_{plate} d\xi d\eta, \quad (4)$$

where  $\xi$  and  $\eta$  are the usual area coordinates and  $B_{plate}$ , which appears explicitly in Batoz *et al.* (1980) as a function of  $\eta$  is slightly more complex than the  $B_{mem}$  of the membrane. Here again the local in-plane contribution of the plate element to the geometric stiffness matrix will be derived as the gradient for fixed  $M$ , of the element nodal force vector which is given as:

$$\begin{aligned}
 F_{plate}^e &= \left( 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{t^3}{12} B_{plate}^T D B_{plate} d\xi d\eta \right) q^e = \\
 &= 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} B_{plate}^T \left( \frac{t^3}{12} D B_{plate} q^e \right) d\xi d\eta = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} B_{plate}^T M d\xi d\eta \quad (5)
 \end{aligned}$$

where

$$M = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}^T, \quad (6)$$

$$F_{plate}^e = \{F_i^e, F_j^e, F_m^e\}^T; \quad (7)$$

$$F_r^e = \{F_{rz}, M_{rx}, M_{ry}\}^T \quad r = i, j, m, \quad (8)$$

$$q_e = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}\}.$$

The in-plane geometric stiffness matrix may be written symbolically as:

$$[K_G^e]_{IP}^{plate} = \nabla F_{plate}^e = \begin{bmatrix} (A_{ii})_{IP}^{plate} & (A_{ij})_{IP}^{plate} & (A_{im})_{IP}^{plate} \\ (A_{ji})_{IP}^{plate} & (A_{jj})_{IP}^{plate} & (A_{jm})_{IP}^{plate} \\ (A_{mi})_{IP}^{plate} & (A_{mj})_{IP}^{plate} & (A_{mm})_{IP}^{plate} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\text{where} \quad (A_{rs})_{IP}^{plate} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{rz}}{\partial x_s} & \frac{\partial F_{rz}}{\partial y_s} & 0 \\ \frac{\partial M_{rx}}{\partial x_s} & \frac{\partial M_{rx}}{\partial y_s} & 0 \\ \frac{\partial M_{ry}}{\partial x_s} & \frac{\partial M_{ry}}{\partial y_s} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

The expressions for the individual terms of the geometric stiffness matrix were obtained in closed form using symbolic algebra.

When applied to the plate, chain rule differentiation with respect to the coordinates yields

$$\begin{aligned}
 dF_{plate}^e &= \sum_{r=i,j,m} \left[ \frac{\partial}{\partial x_r} \left( 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (B_{plate}^T)_{fixed} M d\xi d\eta \right) dx_r \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y_r} \left( 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} (B_{plate}^T)_{fixed} M d\xi d\eta \right) dy_r \right] \\
 &+ \sum_{r=i,j,m} \left[ \frac{\partial}{\partial x_r} \left( 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} B_{plate}^T M_{fixed} d\xi d\eta \right) dx_r \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y_r} \left( 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} B_{plate}^T M_{fixed} d\xi d\eta \right) dy_r \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

where  $dx_r = u_r$ ;  $dy_r = v_r$ ;  $r=i,j,m$ .

The first expression on the R.H.S. of Eq. 11 returns the elastic stiffness matrix whereas the second expression becomes the geometric stiffness matrix. It is left to clarify what is meant by  $M_{fixed}$  in Eq. 11. The moment vector  $M$ , of Eq. 6 contains three components that are functions of  $\xi$  and  $\eta$  and defined as:

$$M_{xx}(\xi, \eta) = (M_{xx}^j - M_{xx}^i)\xi + (M_{xx}^m - M_{xx}^i)\eta + M_{xx}^i, \quad (12)$$

$$M_{yy}(\xi, \eta) = (M_{yy}^j - M_{yy}^i)\xi + (M_{yy}^m - M_{yy}^i)\eta + M_{yy}^i, \quad (13)$$

$$M_{xy}(\xi, \eta) = (M_{xy}^j - M_{xy}^i)\xi + (M_{xy}^m - M_{xy}^i)\eta + M_{xy}^i, \text{ where} \quad (14)$$

$$\{M_{xx}^i \quad M_{yy}^i \quad M_{xy}^i\}^T = M(\xi = 0, \eta = 0), \quad (15)$$

$$\{M_{xx}^j \quad M_{yy}^j \quad M_{xy}^j\}^T = M(\xi = 1, \eta = 0), \quad (16)$$

$$\{M_{xx}^m \quad M_{yy}^m \quad M_{xy}^m\}^T = M(\xi = 0, \eta = 1). \quad (17)$$

When the components of  $M$  (Eqs. 12-14) are inserted into Eq. 11 it is the values of these components at the nodes (Eqs. 15-17) that are held fixed.

### Out-of-Plane Contribution to the Shell Geometric Stiffness Matrix.

This section will derive the out-of-plane geometric stiffness matrix for the plate along the same lines and subsequently present a combined out-of-plane contribution. The derivation starts with the change in a vector  $G$ , due to a small rotation that is given by Goldstein (1950) as

$$dG = \omega \times G, \quad (18)$$

where  $\omega$  is the rigid body rotation vector due to changes in the geometry. In terms of joint displacements with respect to the local coordinate system, two components  $\theta$  and  $-\varphi$ , of the rigid body rotation are obtained from Figure 4. The third component is chosen for the plate arbitrarily, as the local  $z$ -rotation of node  $i$ . Recall that for the membrane this component is included in the in-plane contribution:

$$\omega_{x'} = \frac{c-e}{ea}(\delta_i)_{z'} - \frac{c}{ea}(\delta_j)_{z'} + \frac{1}{a}(\delta_m)_{z'}; \quad \omega_{y'} = \frac{a}{ea}(\delta_i)_{z'} + \frac{a}{ea}(\delta_j)_{z'}, \quad \omega_{z'} = \theta_{iz}, \quad (19)$$

where  $(\delta_r)_{z'}$  is the displacement in the local (primed)  $z$ -direction of node  $r$ .

At each node, the forces, moments and rotations may be written as

$$F_r = F_{rz}k'; \quad M_r = M_{rx}i' + M_{ry}j' + M_{rz}k'; \quad \omega = \omega_{x'}i' + \omega_{y'}j' + \omega_{z'}k'$$

for  $r = i, j, m$  and the changes in the force and moment vectors are given in more detail as

$$dF_r = -F_r \times \omega = \begin{bmatrix} 0 & F_{rz} & 0 \\ -F_{rz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

$$dM_r = -M_r \times \omega = \begin{bmatrix} 0 & M_{rz} & -M_{ry} \\ -M_{rz} & 0 & M_{rx} \\ M_{ry} & -M_{rx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

The out-of-plane stiffness contribution of the plate is now obtained as:

$$(dF^e)_{plate} = [K_G]_{OP}^{plate} \cdot \delta^e = -F^e \times \omega = \begin{bmatrix} F^i \\ F^j \\ F^m \end{bmatrix} [A_i \quad A_j \quad A_m] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}, \quad (22)$$

$$\text{where} \quad F^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \\ F_m \\ M_m \end{Bmatrix}; \quad F^r = \begin{bmatrix} 0 & F_{rz} & 0 \\ -F_{rz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{rz} & -M_{ry} \\ -M_{rz} & 0 & M_{rx} \\ M_{ry} & -M_{rx} & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

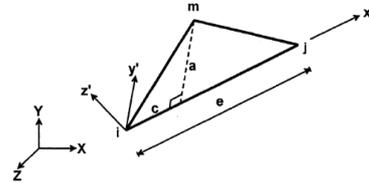


Fig. 4. A triangular finite element in its coordinate system

Now  $\omega$  can be described in terms of the displacement vector as:

$$\omega = A\delta^e = [A_i \quad A_j \quad A_m] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

where

$$(A_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{e-c}{ae} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$(A_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{c}{ae} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$(A_m) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\text{and } \{d_i\} = \begin{Bmatrix} (\delta_i)_{x'} \\ (\delta_i)_{y'} \\ (\delta_i)_{z'} \\ (\theta_i)_{x'} \\ (\theta_i)_{y'} \\ (\theta_i)_{z'} \end{Bmatrix}; \quad \{d_j\} = \begin{Bmatrix} (\delta_j)_{x'} \\ (\delta_j)_{y'} \\ (\delta_j)_{z'} \\ (\theta_j)_{x'} \\ (\theta_j)_{y'} \\ (\theta_j)_{z'} \end{Bmatrix}; \quad \{d_m\} = \begin{Bmatrix} (\delta_m)_{x'} \\ (\delta_m)_{y'} \\ (\delta_m)_{z'} \\ (\theta_m)_{x'} \\ (\theta_m)_{y'} \\ (\theta_m)_{z'} \end{Bmatrix}. \quad (28)$$

Carrying out Eq. 22 for the plate and adding the out-of-plane contribution to the geometric stiffness matrix, in the local coordinate system more explicitly (adjusted to 18 DOF's) for the membrane, results in the following out-of-plane shell geometric stiffness matrix with respect to the local coordinate system:

$$[K_G^e]_{OP}^{shell} = \begin{bmatrix} (A_i)_1 & (A_i)_2 & (A_i)_3 \\ (A_j)_1 & (A_j)_2 & (A_j)_3 \\ (A_m)_1 & (A_m)_2 & (A_m)_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

where

$$(A_r)_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_r & 0 & 0 & -M_{ry} \\ 0 & 0 & d_r & 0 & 0 & M_{rx} \\ 0 & 0 & e_r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30); \quad (A_r)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$(A_r)_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\alpha_r = -(F_r)_{y'} \frac{e-c}{ae} - \frac{(F_r)_{x'}}{e}; \quad \beta_r = -(F_r)_{y'} \frac{c}{ae} - \frac{(F_r)_{x'}}{e}; \quad \lambda_r = \frac{(F_r)_y}{a}; \quad a_r = \frac{F_{rz}}{e};$$

$$b_r = F_{rz} \frac{e-c}{ae}; \quad c_r = \frac{M_{rz}}{e}; \quad d_r = M_{rz} \frac{e-c}{ae}; \quad m_r = \frac{M_{ry}}{a}; \quad e_r = M_{ry} \frac{e-c}{ae} - \frac{M_{rx}}{e};$$

$$f_r = -\frac{F_{rz}}{e}; \quad g_r = F_{rz} \frac{c}{ae}; \quad h_r = -\frac{M_{rz}}{e}; \quad i_r = M_{rz} \frac{c}{ae};$$

$$j_r = -M_{rz} \frac{c}{ae}; \quad k_r = -\frac{F_{rz}}{a}; \quad l_r = -\frac{M_{rz}}{a}.$$

**Conclusions:** The theoretical approach of the buckling and strength analyses of the sinusoidal velaroidal shell is worked out using the finite element method. The in-plane and the out-of-plane shell geometric stiffness matrices with respect to the local coordinate system are obtained. This result gives a possibility of further numerical strength and buckling analyses of the sinusoidal velaroidal shells.

#### References

1. Mihalescu M., Horvath I. (1977). Velaroidal shells for covering universal industrial halls, *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.*, 85 (1-2), pp. 135-145.
2. Krivoschapko S.N., Mamieva I.A. (2012) Outstanding space structures of the last 20 years, *Montazhnye i spetsialnye raboty v stroitelstve*, № 12, pp.8- 14.
3. Krivoschapko S.N., Gil-oulbe Mathieu. (2013). Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids, *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)* ISSN: 2231-2307, Volume-3, Issue-3, July 2013.
4. Krivoschapko S.N., Shambina S.L. (2009). Investigation of surfaces of velaroidal type with two families of sinusoids on annular plan, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, pp. 9-12.
5. Gogoberidze Ya.A.(1950). *Pokrytie "Darbazi"*, Tbilisi: «Tekhnika da Shroma», 278 p.

#### Литература

1. Mihalescu M., Horvath I. (1977). Velaroidal shells for covering universal industrial halls// *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.*, 85 (1-2), pp. 135-145.
2. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Выдающиеся пространственные сооружения последних 20 лет // Монтажные и специальные работы в строительстве. - 2012, № 12. – С. 8-14.
3. Krivoschapko S.N., Gil-oulbe Mathieu. (2013). Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids// *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)* ISSN: 2231-2307, Volume-3, Issue-3, July 2013.
4. Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л. Исследование поверхностей велароидального типа с двумя семействами синусоид на кольцевом плане// *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2009, № 4. - С. 9-12.
5. Гогоберидзе Я.Ф. Перекрытия «Дарбазы». - Тбилиси: Техника да Шрома, 1950. - 278 с.

#### К РАСЧЕТУ НА УСТОЙЧИВОСТЬ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ ОБОЛОЧЕК В ВИДЕ СИНУСОИДАЛЬНОГО ВЕЛАРОИДА

ЖИЛЬ-УЛБЕ МАТЬЕ, С.Л. ШАМБИНА, ДАУ ТЬЕКОЛО

*Российский университет дружбы народов, Москва*

В статье рассматривается расчет на прочность и устойчивость в геометрической нелинейной постановке для синусоидальных велароидальных оболочек под действием собственного веса и равномерно распределенной нагрузки. Приводится краткая история применения метода конечного элемента для изучения потери устойчивости оболочки. Метод конечного элемента используется в матричной формулировке. Эластичная матрица жесткости в локальной системе координат мембранного элемента определяется в общем виде. Получена матрица геометрической жесткости вне плоскости для пластины вдоль тех же линий.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** синусоидальные велароидальные оболочки, расчет на устойчивость в нелинейной постановке, линейная матрица упругой жесткости, нормальная жесткость, геометрическая матрица жесткости.

## Численные методы расчета конструкций

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СОЧЛЕНЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК С РАЗЛИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ<sup>1</sup>

Ю.В. КЛОЧКОВ, доктор техн. наук, профессор  
А.П. НИКОЛАЕВ, доктор техн. наук, профессор  
Т.А. КИСЕЛЕВА, кандидат техн. наук, доцент  
А.С. АНДРЕЕВ, аспирант, ассистент  
Волгоградский государственный аграрный университет  
400002, Волгоград, пр. Университетский, 26, [Klotchkov@bk.ru](mailto:Klotchkov@bk.ru)

*Изложен алгоритм расчета осесимметричных сочлененных оболочек с различными физико-механическими характеристиками материалов на основе МКЭ с использованием скалярной и векторной интерполяции полей перемещений. В качестве элемента дискретизации используется криволинейный фрагмент меридиана оболочки с узлами  $i$  и  $j$ . Выполнен анализ НДС тонкостенной конструкции из разнородных материалов в форме цилиндра, сочлененного со сферой и эллипсоидом.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сочлененные осесимметричные оболочки, скалярная интерполяция, векторная интерполяция, конечный элемент, условия сочленения оболочек.

Конструкции из сочлененных осесимметричных оболочек с различными физико-механическими свойствами материалов, из которых они изготовлены, находят широкое применение в различных отраслях строительства и машиностроения. Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) такого рода конструкций в настоящее время выполняется, в основном, на основе численных методов, в частности метода конечных элементов (МКЭ) [1-8]. Применяемые для этих целей зарубежные вычислительные комплексы типа ANSYS, ABAQUS, NASTRAN и другие используют в криволинейных системах координат неинвариантную интерполяцию отдельных компонент вектора перемещений как скалярных величин, что приводит в ряде случаев [9, 10] к получению некорректных значений расчетных величин. Поэтому актуальной остается задача создания новых вычислительных алгоритмов, основанных на инвариантной интерполяции полей перемещений как векторных величин. В настоящей работе излагается алгоритм конечно-элементного расчета осесимметрично нагруженных сочлененных оболочек с различными значениями физико-механических характеристик материалов на основе инвариантного способа интерполяции полей перемещений как векторных величин.

#### 1. Геометрия оболочки

Срединная поверхность осесимметричной оболочки описывается радиус-вектором:

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x)\vec{k}, \quad (1)$$

где  $r(x)$  - радиус вращения.

Орты локального базиса точки срединной поверхности осесимметричной оболочки определяются по формулам:

$$\vec{e}_1^0 = \vec{R}_{,1}^0 = x_{,1}\vec{i} + r_{,1}\vec{k}; \quad \vec{e}_n^0 = \vec{e}_1^0 \times \vec{j} = -r_{,1}\vec{i} + x_{,1}\vec{k}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-00133 мол\_а).

где нижний индекс 1 после запятой обозначает операцию дифференцирования по дуге меридиана  $s$ .

На основании (2) можно сформировать прямую и обратную матричные зависимости:

$$\{\vec{e}_1^0\} = [d^0] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{i}\} = [d^0]^{-1} \{\vec{e}_1^0\}, \quad (3)$$

где

$$\{\vec{e}^0\}^T = \{\vec{e}_1^0 \vec{e}_n^0\}; \quad \{\vec{i}\} = \{\vec{i} \vec{k}\}$$

Производные ортонормированного базиса (3) по дуге меридиана  $s$  могут быть выражены через этот же локальный базис зависимостями:

$$\vec{e}_{1,s}^0 = k \vec{e}_n^0; \quad \vec{e}_{n,s}^0 = -k \vec{e}_1^0, \quad (4)$$

где

$$k = r_{,xx} \cdot (x_{,1})^3.$$

Положение точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , до и после деформирования определяется радиус-векторами:

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{e}_n^0; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}. \quad (5)$$

Входящий в (5) вектор перемещения точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , с учетом гипотезы прямой нормали определяется выражением:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta (\vec{e}_n - \vec{e}_n^0), \quad (6)$$

где  $\vec{v} = u \vec{e}_1^0 + w \vec{e}_n^0$  - вектор перемещения точки срединной поверхности;  $\vec{e}_n$  - орт нормали к срединной поверхности в деформированном состоянии.

Деформации в точке, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , определяются соотношениями механики сплошной среды [11]:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta = (g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\alpha}^0) / 2, \quad (7)$$

где греческие индексы последовательно принимают значения 1, 2.

Входящие в (7) ковариантные компоненты метрического тензора до и после деформирования определяются скалярными произведениями базисных векторов:

$$g_{\alpha\alpha}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\alpha^0; \quad g_{\alpha\alpha} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_{,\alpha}, \quad (8)$$

где

$$\vec{g}_\alpha^0 = R_{,\alpha}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_\alpha = R_{,\alpha}^\zeta.$$

## 2. Конечный элемент и интерполяция перемещений

В качестве конечного элемента выбирается криволинейный фрагмент меридиана оболочки, выделенный двумя плоскостями перпендикулярными оси  $Ox$ , с узлами  $i$  и  $j$ . Каждый такой фрагмент для удобства численного интегрирования отображается на отрезок в локальной системе координат  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

Столбец узловых варьируемых параметров в локальной  $\eta$  и глобальной  $s$  системах координат выбирается в следующем виде:

$$\left\{ \begin{matrix} U_y^{\mathcal{L}} \\ \end{matrix} \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \begin{matrix} \{u_y^{\mathcal{L}}\}^T \\ \{w_y^{\mathcal{L}}\}^T \end{matrix} \right\}_{1 \times 6}; \quad \left\{ \begin{matrix} U_y^{\mathcal{R}} \\ \end{matrix} \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \begin{matrix} \{u_y^{\mathcal{R}}\}^T \\ \{w_y^{\mathcal{R}}\}^T \end{matrix} \right\}_{1 \times 6}, \quad (9)$$

где

$$\{q_y^{\mathcal{L}}\}^T = \{q^i q^j q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta\eta}^i q_{,\eta\eta}^j\}; \quad \{q_y^{\mathcal{R}}\}^T = \{q^i q^j q_{,s}^i q_{,s}^j q_{,ss}^i q_{,ss}^j\}.$$

Здесь под  $q^m$  ( $m = i, j$ ) понимается меридиональная  $u$  или нормальная  $w$  компонента вектора перемещения.

3. Варианты интерполяционной процедуры

В разработанном алгоритме реализованы два варианта интерполяции перемещений. В первом варианте использована общепринятая интерполяция отдельных компонент вектора перемещения как скалярных величин

$$q = \{\psi\}^T \{q_y^{\Pi}\} = \{\psi\}^T [L] \{q_y^{\Gamma}\} \quad (10)$$

где  $\{\psi\}^T = \{\psi_1 \psi_2 \dots \psi_6\}$  - матрица-строка, представленная полиномами Эрмита пятой степени,  $[L]$  - матрица перехода от столбца  $\{q_y^{\Pi}\}$  к столбцу  $\{q_y^{\Gamma}\}$ .

Во втором варианте интерполяционное выражение записывается непосредственно для вектора перемещения в следующем виде:

$$\vec{V} = \{\psi\}^T \left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Pi} \right\} = \{\psi\}^T [L] \left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}, \quad (11)$$

где  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Pi} \right\} = \left\{ \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \right\}_{1 \times 6}$   $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\} = \left\{ \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \overrightarrow{V}^i \overrightarrow{V}^j \right\}_{1 \times 6}$  - матрицы - строки векторных узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат;  $[L]$  - матрица перехода от столбца  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Pi} \right\}$  к столбцу  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}$ .

Представляя входящие в структуру  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}$  векторы перемещения узлов и их производные компонентами, отнесенными к узловым локальным базисам:

$$\overrightarrow{V}^m = u^m \overrightarrow{e}_1^{0m} + w^m \overrightarrow{e}_n^{0m}; \quad \overrightarrow{V}_{,s}^m = l_1^{1m} \overrightarrow{e}_1^{0m} + l_n^{1m} \overrightarrow{e}_n^{0m}; \quad \overrightarrow{V}_{,ss}^m = l_{11}^{1m} \overrightarrow{e}_1^{0m} + l_{nn}^{1m} \overrightarrow{e}_n^{0m}, \quad (12)$$

столбец  $\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\}$  можно представить матричным произведением

$$\left\{ \overrightarrow{V}_y^{\Gamma} \right\} = [\vec{A}] \{n_y\}, \quad (13)$$

где

$$[\vec{A}]_{6 \times 12} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e}_1^{0i} & \overrightarrow{e}_n^{0i} & & & & & & & & & & \\ & & \overrightarrow{e}_1^{0j} & \overrightarrow{e}_n^{0j} & & & & & & & & \\ & & & & \overrightarrow{e}_1^{0i} & \overrightarrow{e}_n^{0i} & & & & & & \\ & & & & & & \overrightarrow{e}_1^{0j} & \overrightarrow{e}_n^{0j} & & & & \\ & & & & & & & & \overrightarrow{e}_1^{0i} & \overrightarrow{e}_n^{0i} & & \\ & & & & & & & & & & \overrightarrow{e}_1^{0j} & \overrightarrow{e}_n^{0j} \end{bmatrix},$$

$$\{n_y\}_{1 \times 12}^T = \{u^i w^i u^j w^j l_1^{1i} l_n^{1i} l_{11}^{1i} l_{11}^{1j} l_{11}^{1i} l_{11}^{1j} l_{11}^{1j} l_{11}^{1j}\}.$$

Столбец  $\{n_y\}$  может быть выражен через столбец узловых неизвестных в глобальной системе координат  $\{U_y^{\Gamma}\}$  с помощью матричной зависимости

$$\{n_y\} = [T] \{U_y^{\Gamma}\} \quad (14)$$

С учетом (14) интерполяционное выражение (11) может быть представлено в виде:

$$\vec{v} = \{\psi\}^T [\vec{A}] [G] [T] \{U_y^{\Gamma}\}, \quad (15)$$

где матрица  $[G]$  определяется из равенства  $[L]_{6 \times 6} [\vec{A}]_{6 \times 12} = [\vec{A}]_{6 \times 12} [G]_{12 \times 12}$ .

Входящие в  $[A]$  узловые орты базисов с помощью (3) могут быть выражены через орты базиса внутренней точки элемента дискретизации

$$\{\vec{e}^{0m}\} = [d^{0m} [d^0]^{-1} \{\vec{e}^0\}] \quad (16)$$

С учетом (16) матрица  $[\vec{A}]$  может быть представлена матричной суммой:

$$[\vec{A}] = \vec{e}_1^0 [A_1] + \vec{e}_n^0 [A_n]. \quad (17)$$

Принимая во внимание (17) и представляя вектор перемещения внутренней точки элемента дискретизации компонентами, отнесенными к локальному базису этой точки, выражение (15) примет следующий вид:

$$u \vec{e}_1^0 + w \vec{e}_n^0 = \{\psi\}^T (\vec{e}_1^0 [A_1] + \vec{e}_n^0 [A_n]) \{Z_y\}, \quad (18)$$

где

$$\{Z_y\} = [G][T] \{V_y^T\}$$

Сопоставляя левую и правую части (18), можно записать интерполяционные зависимости для компонент векторов перемещения во втором варианте интерполяционной процедуры:

$$u = \{\psi\}^T [A_1] \{Z_y\}; \quad w = \{\psi\}^T [A_n] \{Z_y\}. \quad (19)$$

Сравнивая между собой (10) и (19), можно отметить, что во втором варианте каждая компонента вектора перемещения внутренней точки элемента дискретизации зависит от узловых значений обеих компонент и их производных, в то время как в первом варианте компонента вектора перемещения зависит от узловых значений только этой же компоненты и не зависит от узловых значений другой компоненты. Кроме того, через соотношение (16) в аппроксимирующие выражения входят параметры используемой криволинейной системой координат.

#### 4. Условия на границе сочленения $n$ оболочек

Для корректного определения НДС  $n$  сочлененных осесимметричных оболочек, столбец узловых неизвестных одной из них на границе сочленения принимается за основной. Узловые неизвестные остальных  $(n-1)$  оболочек в узле сочленения должны быть выражены через столбец узловых неизвестных основной оболочки, исходя из кинематических и силовых условий сочленения.

Первым кинематическим условием сочленения является инвариантность векторов перемещений  $n$  оболочек в узле сочленения:

$$\vec{v}^{(1)} = \vec{v}^{(2)} = \dots = \vec{v}^{(i)} = \dots = \vec{v}^{(n)}, \quad (20)$$

где верхний индекс в скобках указывает на номер оболочки.

Для того, чтобы воспользоваться соотношением (20), необходимо векторы локального базиса основной оболочки (например  $i$ -ой) последовательно выразить через орты остальных  $(n-1)$  оболочек

$$\{\vec{e}^{(i)}\}_{2 \times 1} = [d^{(k)}]_{2 \times 2} \{\vec{e}^{(k)}\}_{2 \times 1} \quad (21)$$

где

$$k = 1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, n;$$

$$\{\vec{e}^{(i)}\}^T = \{\vec{e}_1^{0(i)} \vec{e}_n^{0(i)}\}; \quad \{\vec{e}^{(k)}\}^T = \{\vec{e}_1^{0(k)} \vec{e}_n^{0(k)}\}$$

С учетом (21) из (20) могут быть получены выражения

$$u^{(k)} = u^{(i)} d_{11}^{(k)} + w^{(i)} d_{21}^{(k)}; \quad w^{(k)} = u^{(i)} d_{12}^{(k)} + w^{(i)} d_{22}^{(k)}. \quad (22)$$

Вторым кинематическим условием сочленения является предположение о том, что угол между нормальными к срединным поверхностям  $n$  сочленяемых

оболочек в процессе деформирования остается неизменяемым. Вследствие этого предположения будут справедливы равенства:

$$\vec{v}_{,1}^{(i)} \cdot \vec{e}_n = \vec{v}_{,1}^{0(i)} \cdot \vec{e}_n = \vec{v}_{,1}^{(k)} \cdot \vec{e}_n = \vec{v}_{,1}^{0(k)} \cdot \vec{e}_n, \quad (23)$$

где  $\vec{v}_{,1}^{(i)} = \vec{e}_1^{0(i)} (u_{,1}^{(i)} - k^{(i)} \cdot w^{(i)}) + \vec{e}_n^{0(i)} (w_{,1}^{(i)} + k^{(i)} \cdot u^{(i)})$ ;  $k^{(i)} = r_{,xx}^{(i)} \cdot (x_{,s}^{(i)})^3$ .

После выполнения скалярного умножения из (23) можно выразить производную нормальной компоненты вектора перемещения через узловые неизвестные основной ( $i$ -ой) оболочки

$$w_{,1}^{(k)} = w_{,1}^{(i)} + k^{(i)} \cdot u^{(i)} - k^{(k)} \cdot u^{(k)},$$

или с учетом (22):

$$w_{,1}^{(k)} = w_{,1}^{(i)} + k^{(i)} \cdot u^{(i)} - k^{(k)} (u^{(i)} d_{11}^{(k)} + w^{(i)} d_{21}^{(k)}) \quad (24)$$

В качестве силового условия сочленения  $n$  оболочек можно рассмотреть статическое условие равновесия по изгибающим моментам в узле сочленения:

$$M^{(1)} + M^{(2)} + \dots + M^{(i)} + \dots + M^{(k)} + \dots + M^{(n)} = 0. \quad (25)$$

Входящие в (23) изгибающие моменты могут быть определены по формулам [13]

$$M^{(k)} = \frac{E^{(k)} (h^{(k)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(k)} + \nu^{(k)} \kappa_{22}^{(k)}), \quad (26)$$

где  $E^{(k)}$ ,  $h^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$  - модуль упругости, толщина и коэффициент Пуассона  $k$ -ой оболочки;  $\kappa_{11}$ ,  $\kappa_{22}$  - искривления срединной поверхности.

Из равенства (25) с учетом (26) можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \kappa_{11}^{(k)} + \nu^{(k)} \kappa_{22}^{(k)} = & \frac{12}{E^{(k)} (h^{(k)})^3} \left( -\frac{E^{(1)} (h^{(1)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(1)} + \nu^{(1)} \kappa_{22}^{(1)}) - \dots \right. \\ & \dots - \frac{E^{(2)} (h^{(2)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(2)} + \nu^{(2)} \kappa_{22}^{(2)}) - \frac{E^{(i)} (h^{(i)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(i)} + \nu^{(i)} \kappa_{22}^{(i)}) - \dots \\ & \left. \dots - \frac{E^{(n)} (h^{(n)})^3}{12} (\kappa_{11}^{(n)} + \nu^{(n)} \kappa_{22}^{(n)}) \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\kappa_{11}^{(k)} = -w_{,11}^{(k)} - u_{,1}^{(k)} \cdot k^{(k)} - u^{(k)} \cdot k_{,1}^{(k)}$  [13], из соотношения (27) в узле сочленения можно выразить вторую производную нормальной компоненты вектора перемещения  $k$ -ой оболочки через узловые неизвестные  $i$ -ой оболочки и вторые производные нормальной компоненты векторов перемещений остальных  $(n-2)$  оболочек

$$w_{,11}^{(k)} = f(w_{,11}^{(1)}, w_{,11}^{(2)}, \dots, w_{,11}^{(k-1)}, w_{,11}^{(k+1)}, \dots, w_{,11}^{(n)}, u_{,1}^{(i)}, u^{(i)}, w^{(i)}, w_{,1}^{(i)}). \quad (28)$$

Узловые неизвестные  $u_{,1}$  и  $u_{,11}$  всех сочлененных оболочек в узле сопряжения остаются свободно варьируемыми.

С учетом (22), (24) и (28) формируются матрицы преобразований  $[T^{(k)}]$  на которые умножаются матрицы жесткости и столбцы узловых усилий конечных элементов непосредственно примыкающих к узлу сочленения  $(n-1)$  оболочек

$$[T^{(k)}]^T [MG^{(k)}] [T^{(k)}] = [T^{(k)}]^T \{R^{(k)}\}, \quad (29)$$

где  $[MG^{(k)}]$ ,  $\{R^{(k)}\}$  - матрица жесткости и столбец узловых усилий конечного элемента  $k$ -ой оболочки.

### 5. Пример расчета

В качестве примера была рассчитана оболочечная конструкция, состоящая из цилиндра и сочленённых с ним эллипсоида и сферы, радиусы которых описывались уравнениями:  $r_1 = (b/a)\sqrt{a^2 - x_1^2}$  ( $0 \leq x_1 \leq 1,2\text{ м}$ );  $r_2 = \sqrt{R^2 - x_2^2}$  ( $0 \leq x_2 \leq 0,8\text{ м}$ ) (рис. 1).

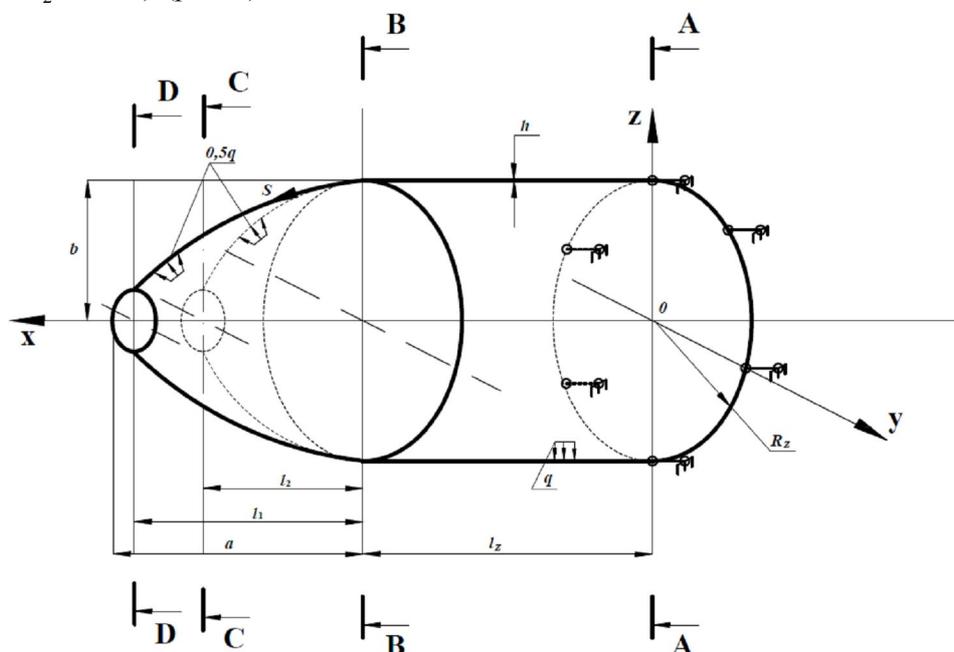


Рис. 1

Были приняты следующие исходные данные: радиус цилиндра  $R_z = 0,9\text{ м}$ ; длина цилиндра  $l_z = 6,0\text{ м}$ ; параметры эллипсоида  $a = 1,3\text{ м}$ ;  $b = 0,9\text{ м}$ ; радиус сферы  $R = 0,9\text{ м}$ ; толщина всех трех оболочек была принята равной  $h = 0,02\text{ м}$ ;  $l_1 = 1,2\text{ м}$ ;  $l_2 = 0,8\text{ м}$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Первоначально модуль упругости всех оболочек имел одинаковые значения равные  $E_u = E_c = E_s = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$ . Цилиндр был загружен внутренним давлением интенсивности  $q = 5,0\text{ МПа}$ ; эллипсоид и сфера – давлением равным  $0,5q = 2,5\text{ МПа}$ . Правый торец цилиндра был шарнирно закреплён. Левые концевые сечения эллипсоида и сферы оставались свободными. Расчеты выполнялись в двух вариантах: в первом варианте при формировании матрицы жесткости была использована общепринятая интерполяция отдельных компонент вектора перемещения как скалярных величин (10); во втором варианте была использована интерполяционная процедура, основанная на соотношениях (11) - (19). Результаты повариантного расчета при одинаковых значениях модуля упругости материала цилиндра и сочлененных с ним оболочек представлены в таблице 1, в которой приведены значения меридиональных  $\sigma_m$  и кольцевых  $\sigma_k$  напряжений на наружной  $\sigma^h$  и внутренней  $\sigma^s$  поверхностях оболочек в опорном сечении (А-А), в узле сочленения (В-В), в концевом сечении сферы (С-С) и в концевом сечении эллипсоида (D-D) при различных значениях  $n_s$  - числа элементов дискретизации каждой из оболочек. В правой крайней колонке приведены значения напряжений на срединной поверхности  $\sigma^{cp}$ , вычисленные исходя из условия равновесия (в опорном сечении) и по формуле Лапласа (в концевых сечениях) [13]:

$$\frac{\sigma_M}{R_M} + \frac{\sigma_K}{R_K} = \frac{q}{h},$$

где  $R_M$  и  $R_K$  – радиусы меридиональной и кольцевой кривизны.

Таблица 1

Вариант интерполяции		I			II			Аналитическое решение $\sigma^{cp}$ (МПа)
Сечение $n_3$		16	20	24	16	20	24	
A-A	$\sigma_M^6$	92,36	92,36	92,365	92,40	92,39	92,38	92,37
	$\sigma_M^H$	92,36	92,36	92,365	92,40	92,39	92,38	
	$\sigma_K^6$	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0
	$\sigma_K^H$	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	
B-B	$\sigma_M^6$	109,8	115,3	117,8	109,8	115,3	117,8	-
	$\sigma_M^H$	76,18	70,09	67,29	76,22	70,12	67,31	
	$\sigma_K^6$	152,4	154,0	154,8	152,4	154,0	154,8	-
	$\sigma_K^H$	142,4	140,5	139,6	142,4	140,5	139,6	
C-C	$\sigma_M^6$	-0,021	-0,013	-0,009	0,004	0,003	0,0027	0,000
	$\sigma_M^H$	-0,009	-0,008	-0,006	0,011	0,007	0,0047	
	$\sigma_K^6$	112,2	112,3	112,3	112,9	112,8	112,7	112,5
	$\sigma_K^H$	112,2	112,3	112,3	112,9	112,8	112,7	
D-D	$\sigma_M^6$	-0,021	-0,006	-0,001	0,027	0,016	0,012	0,000
	$\sigma_M^H$	0,061	0,035	0,022	0,026	0,017	0,013	
	$\sigma_K^6$	84,02	84,23	83,37	85,30	85,14	85,04	83,91
	$\sigma_K^H$	81,81	82,01	82,14	83,04	82,92	82,83	

Анализ табличных данных показывает быструю сходимость вычислительного процесса, практическое совпадение параметров НДС в обоих вариантах расчета и соответствие численных значений напряжений значениям, полученным аналитическим путем.

Если модуль упругости материала цилиндра последовательно уменьшать, то цилиндрическая часть оболочечной конструкции будет становиться все более податливой (модули сочлененных оболочек при этом остаются равными первоначальному значению  $E_c = E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ), а сочлененные оболочки под действием заданной нагрузки получают возможность смещаться как абсолютно твердые тела.

Результаты повариантных расчетов при последовательном уменьшении модуля упругости материала цилиндра представлены в таблице 2, в которой приведены численные значения напряжений в зависимости от отношения модуля упругости материала цилиндра к модулю сферы (эллипсоида)  $E_u / E_c$  ( $E_u / E_s$ ) при  $n_3 = 16$ .

Таблица 2

Вариант интерполяции		I				II			
$E_z / E_s (E_l)$		1,0	0,1	0,01	0,001	1,0	0,1	0,01	0,001
Сечение									
A-A	$\sigma_M^e$	92,4	92,4	92,4	92,3	92,4	92,4	92,4	92,4
	$\sigma_M^H$	92,4	92,4	92,4	92,3	92,4	92,4	92,4	92,4
	$\sigma_K^e$	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0
	$\sigma_K^H$	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0	225,0
B-B	$\sigma_M^e$	115,3	337,7	430,2	442,2	115,3	337,8	430,2	442,2
	$\sigma_M^H$	70,1	-151,2	-243,3	-255,3	70,12	-151,2	-243,2	-255,2
	$\sigma_K^e$	154,0	130,2	132,6	133,0	154,0	130,2	132,6	133,0
	$\sigma_K^H$	140,5	-16,52	-69,5	-76,2	140,5	-16,5	-69,5	-76,2
C-C	$\sigma_M^e$	-0,013	-0,2	-2,1	-21,1	0,003	0,003	0,003	0,003
	$\sigma_M^H$	-0,008	-0,1	-0,8	-8,0	0,007	0,007	0,007	0,007
	$\sigma_K^e$	112,3	108,4	69,0	-324,0	112,8	112,7	112,7	112,7
	$\sigma_K^H$	112,3	108,0	64,9	-365,0	112,9	112,8	112,8	112,8
D-D	$\sigma_M^e$	-0,006	-0,3	-2,9	-29,29	0,016	0,016	0,016	0,016
	$\sigma_M^H$	0,035	0,4	3,6	35,62	0,017	0,017	0,017	0,017
	$\sigma_K^e$	84,2	75,8	-9,8	-863,2	85,1	85,1	85,1	85,1
	$\sigma_K^H$	82,0	73,2	-16,2	-908,0	82,9	82,9	82,9	82,9

Как видно из табл. 2, численные значения контролируемых параметров НДС в концевых сечениях сферы и эллипсоида весьма существенно различаются между собой в зависимости от варианта расчета. Так, в первом варианте кольцевые напряжения уменьшаются, а затем изменяют свой знак, что недопустимо. Меридиональные напряжения, наоборот, увеличиваются, хотя по условию незагруженности концевых сечений в меридиональном направлении, они должны быть равными нулю. Во втором варианте можно наблюдать практически абсолютную стабильность результатов вычислительного процесса при любых отношениях модулей упругости материала. Данный факт можно объяснить тем, что при использовании второго варианта интерполяционной процедуры производится автоматический учет смещений элемента дискретизации как жесткого целого в неявной форме за счет изменения как компонент вектора перемещения, так и изменения ортов локального базиса внутренней точки конечного элемента. Применение общепринятого способа интерполяции отдельных компонент вектора перемещения как скалярных величин в этих случаях приводит к неприемлемой погрешности вычислений.

*Вывод:* при построении КЭ модели дискретизации сочлененных осесимметричных оболочек с различными значениями физико-механических характеристик материала необходимо использовать процедуру, основанную на интерполяции непосредственно вектора перемещения в сочетании с разработанными кинематическими и статическими условиями сочленения.

Л и т е р а т у р а

1. Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Гаврюшин С.С. Моделирование процесса деформирования и оценка несущей способности системы грунт – тонкостенная конструкция // Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 2014. № 6. С. 20-24.
2. Матвиенко Ю.Г., Чернятин А.С., Разумовский И.А. Численный анализ несингулярных составляющих трехмерного поля напряжений в вершине трещины смешанного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2013. № 4. С. 40-48.
3. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический анализ слоистых пластин и полых оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2011. № 1. С. 161-171.
4. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Либроком, 2013. 336 с.
5. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // International Applied Mechanics, 2012. V. 48. № 6. Pp. 613–687.
6. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
7. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М. Физматлит, 2010. 1022 с.
8. Игнат'ев А.В., Игнат'ев В.А., Онищенко О.В. Возможность использования метода конечных элементов в форме классического смешанного метода для геометрически нелинейного анализа шарнирно-стержневых систем // Вестник МГСУ, 2015. № 12. С. 47-58.
9. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселева Т.А., Марченко С.С. Сравнительный анализ результатов конечно-элементных расчетов на примере эллипсоидальной оболочки // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2016. № 4. С. 44–53.
10. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Марченко С.С., Киселева Т.А. Сопоставительный анализ расчета НДС сочлененных оболочек на основе МКЭ с векторной интерполяцией и комплекса ANSYS // Известия Волгоградского государственного технического университета, 2013. Т. 8. №15 (118). С. 81-84.
11. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
12. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962. 432 с.
13. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. М.: Наука, 1976. 608 с.

References

1. Kayumov, R.A., Shakirzyanov, F.R., Gavryushin, S.S. (2014) Modelirovaniye processa deformirovaniya i ocenka nesushhey sposobnosti sistemi grunt – tonkostennaya konstrukciya, *Izvestiya Vishih Uhebnih Zavedeniy. Mashinostroenie*. № 6. S. 20-24.
2. Matvienko, Yu.G., Hemyatin, A.S., Razumovskiy, I.A. (2013). Chislenniy analiz nesingulyarnix sostavlyayushih trexmernogo polya napryazheniy v vershine treshhini smeshannogo tipa, *Problemi Mashinostroeniya i Nadejnosti Mashin*, № 4, p. 40-48.
3. Skopcov, K.A., Sheshenin, S.V. (2011). Asimptoticheskiy analiz sloistih plastin i pologix obolochek, *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela*, № 1, p. 161-171.
4. Bazhenov, V.A., Krivenko, O.P., Solovey, N.A. (2013). Nelineynoe deformirovanie i ustoyhivost' uprugih oboloshkek neodnorodnoy strukturi: modeli, metodi, algoritmi, maloizuhennie i novie zadachi, M.: Librikom, 336 p.
5. Maksimyyuk, V.A., Storozhuk, E.A., Chernyshenko, I.S. (2012). Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review), *International Applied Mechanics*, V. 48, № 6, p. 613–687.
6. Golovanov, A.I., Tyuleneva, O.N., Shigabutdinov, A.F. (2006). *Metod Konechnih Elementov v Statike i Dinamike Tonkostennih Konstrukciy*, M.: Fizmatlit, 392 p.
7. Bate K.-Yu. (2010). *Methodi Konechnix Elementov*, M.: Fizmatlit. 1022 p.
8. Ignat'ev, A.V., Ignat'ev, V.A., Onishhenko, O.V. (2015). Vozmozhnoct' ispol'zovaniya metoda konechnih elementov v forme klassicheskogo smeshannogo method dlya geometricheski nelineynogo analiza sharnirno-sterzhnevix system, *Vestnik MGSU*, № 12, p. 47-58.
9. Klochkov, Yu.V., Nikolaev, A.P., Kiseleva, T.A., Marchenko, S.S. (2016). Comparative analysis of the results of finite element calculations based on an ellipsoidal shell, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. Vol. 45, No. 4, pp. 328-336.

10. Klochkov, Yu.V., Nikolaev, A.P., Marchenko, S.S., Kiseleva, T.A. (2013). Sopotavitel'niy analiz rascheta NDS sochlenennih obolochek na osnove MKE s vektornoy interpolyatsiey i kompleksa ANSYS, *Izvestiya Volgogradskogo Gosudarstvennogo Texnicheskogo Universiteta*, Vol. 8, №15 (118), p. 81-84.
11. Sedov, L.I. (1976). *Mekhanika Sploshnoy Sredi*, M.: Nauka, Vol. 1, 536 p.
12. Novozhilov, V.V. (1962). *Teoriya Tonkih Obolochek*, L.: Sudostroenie, 432 p.
13. Belyaev, N.M. (1976). *Soprotivlenie Materialov*, M.: Nauka, 608 p.

#### **A MATHEMATICAL MODEL OF DISCRETIZATION OF ARTICULATED AXISYMMETRIC SHELLS WITH DIFFERENT VALUES OF PHYSICAL-MECHANICAL CHARACTERISTICS OF MATERIALS**

KLOCHKOV Yu.V., NIKOLAEV A.P., KISELEVA T.A., ANDREEV A.S.  
*Volgograd State Agricultural University, Volgograd, Russia*

It is described an algorithm for calculating axisymmetric articulated shells with different physical and mechanical characteristics of materials based on the FEM using scalar and vector interpolations of displacement fields. As part of the sampling, a curved fragment of the meridian of the shell with nodes  $i$  and  $j$  is used. The analysis of VAT thin-walled structures made of heterogeneous materials in the form of a cylinder, articulated to the sphere and ellipsoid is fulfilled.

KEY WORDS: articulated axisymmetric shell, scalar interpolation, vector interpolation, finite element, the conditions of articulation of the shells.



#### **ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ УЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ «ГИДРОТЕХНИЧЕСКОЕ СООРУЖЕНИЕ-ЖИДКОСТЬ»**

Д.С. ДМИТРИЕВ, *ведущий инженер-расчетчик*  
ЗАО НИЦ СтаДуО,  
125040, Москва, ул. 3-я Ямского Поля, д.18,  
E-mail: [stadyo@stadyo.ru](mailto:stadyo@stadyo.ru)

*В статье подробно описаны и продемонстрированы на тестовом примере некоторые специфические особенности моделирования жидкости конечными элементами с возможностью учета поверхностных гравитационных волн при расчете связанных систем «гидротехническое сооружение-жидкость» в программном комплексе ANSYS Mechanical. Кратко описаны все имеющиеся в ПК ANSYS Mechanical конечные элементы, используемые для моделирования жидкости. Сформулированы выводы о применимости рассматриваемых элементов для задач гидротехнического класса.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, связанная постановка, поверхностные гравитационные волны, акустические элементы, динамический анализ, FLUID80, FLUID30, ANSYS Mechanical.

Особенности расчета гидротехнических сооружений на сейсмостойкость (по сравнению с промышленными и гражданскими сооружениями) связаны с необходимостью учета влияния водной среды. Имеющиеся упрощенные инженерные методы расчета таких задач не позволяют учесть целый ряд значимых факторов, поэтому, одним из основных и, по сути, безальтернативных сегодня подходов для решения связанных систем «гидротехническое сооружение - жидкость» является численное моделирование. В данной статье будет рассматриваться только конечноэлементное моделирование.

Для решения связанных задач системы «сооружение-жидкость» в конечно-элементном моделировании используются 3 основных способа учета жидкости [1]:

1. учет жидкости как присоединенной массы (упрощенный метод, по сути не относящийся к классу связанных задач) [2];
2. моделирование жидкости акустическими элементами (постановка Эйлера);
3. моделирование жидкости конечными элементами с возможностью учета поверхностных гравитационных волн (постановка Лагранжа или смешанная лагранжево-эйлеровая постановка[3]).

В универсальном («тяжелом») программном комплексе ANSYS Mechanical реализованы все перечисленные методы моделирования жидкости, кроме лагранжево-эйлеровой постановки. Для реализованных методов разработаны специализированные конечные элементы:

1. Элемент сосредоточенной массы *MASS21*, для реализации первого способа учета жидкости.

2. Элементы акустического семейства. Плоский (2D) элемент *FLUID29* (3х или 4х узловой) и применяемый с ним элемент *FLUID129*, для моделирования неотражающей границы. Объемные (3D) конечные элементы *FLUID30* (8ми или 6ти узловой), *FLUID130*, являющиеся аналогами плоских элементов. И элементы более высокого порядка *FLUID220*, *FLUID221* с 20ю и 10ю узлами соответственно. У всего семейства акустических элементов в качестве узловых степеней свободы используется давление, для элементов, контактирующих с другой средой, в узловые степени свободы добавляются линейные перемещения.

3. Элементы жидкости с возможностью учета поверхностных гравитационных волн. Плоский (2D) 4х узловой элемент *FLUID79* и его объемный (3D) 8ми узловой аналог *FLUID80*. У элементов этого семейства в качестве узловых степеней свободы используются линейные перемещения, что и позволяет учитывать форму свободной поверхности жидкости.

Использование перечисленных выше конечных элементов имеет свои особенности. Данная статья посвящена рассмотрению особенностей моделирования жидкости элементами *FLUID80* при решении связанных задач и возникающих при этом проблем.

### 1. Описание КЭ *FLUID80*

#### 1.1. Общее описание

*FLUID80* – объемный восьмиузловой конечный элемент, имеющий форму гексаэдра. Форма призмы или тетраэдра у элементов данного класса не предусмотрена (в отличие от объемных КЭ механики деформируемого твердого тела класса *SOLID*), что значительно ограничивает их применимость в задачах со сложными объемами.

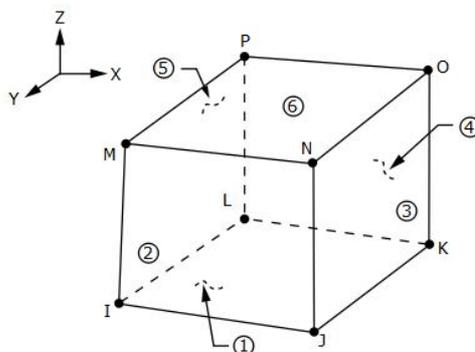


Рис. 1 Геометрия конечного элемента *FLUID80*

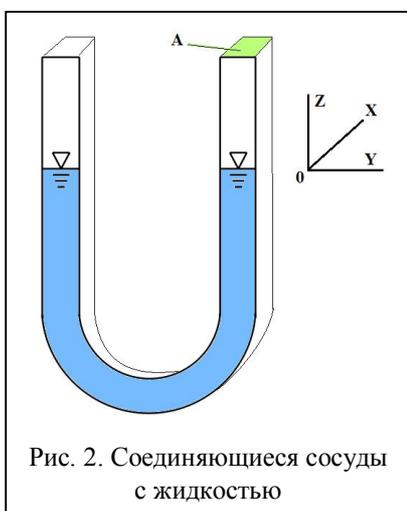
Все узлы элемента имеют по три степени: линейные перемещения в направлении  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в узловой системе координат [4]. Геометрия элемента, расположение узлов и система координат показаны на рис.1.

Для данного элемента применяется изотропный материал со следующими обязательными характеристиками: плотность (DENS), объемный модуль упругости (EX) и динамическая вязкость жидкости (VISC), которая используется для вычисления матрицы демпфирования в динамическом анализе.

Также в элемент *FLUID80* включены специальные поверхностные эффекты (гравитационные волны), которые можно рассматривать как «гравитационные пружины» использующиеся для удержания свободной поверхности жидкости на месте. Более подробно данный эффект описан ниже.

### 1.2. Учет свободной поверхности жидкости

Форма свободной поверхности жидкости вычисляется с использованием специальных элементов – аналогов «пружин». Принцип их работы можно продемонстрировать на примере соединяющихся сосудов с жидкостью (рис.2).



Если из левого сосуда (рис.1) столб жидкости выдавить вниз на глубину  $\Delta h$ , перемещенная масса жидкости будет равна:

$$M_D = \Delta h A \rho, \quad (1)$$

где  $\Delta h$  – величина смещения;  $A$  – площадь сечения соединяющихся сосудов;  $\rho$  – плотность жидкости.

Тогда сила, необходимая для удержания жидкости на месте, будет равна:

$$F_D = M_D g. \quad (2)$$

И, наконец, жесткость условной «пружины» на свободной поверхности жидкости для удержания ее в начальном положении будет равна силе  $F_D$ , деленной на глубину  $\Delta h$ , или

$$K_s = \frac{F_D}{\Delta h} = \rho A g \quad (3)$$

Уравнение (3) можно записать следующим образом:

$$K_s = \rho A_F (g_x C_x + g_y C_y + g_z C_z) \quad (3a)$$

где  $A_F$  – площадь поверхности (свободной) элемента;  $C_{x,y,z}$  – компонента нормали к поверхности жидкости.

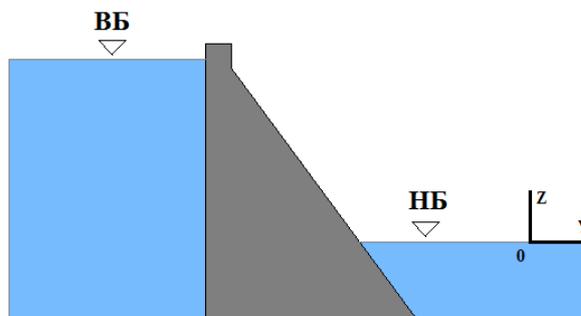


Рис. 3. Пример задачи с двумя свободными поверхностями жидкости на разных отметках

Следует отметить, что при наличии свободной поверхности жидкости в конкретной задаче, необходимо отдельно включать опцию KEYOPT (2) в настройках элемента FLUID80 в положение - 1. Это активирует пружинный эффект на свободной поверхности жидкости. Также очень важным требованием-ограничением является то, что свободная поверхность жидкости должна находиться в плоскости с координатой  $z = 0,0$ . Это, в свою очередь, накладывает определенные ограничения на использование данного элемента в задачах, где имеется два и более массивов жидкости на разных отметках, например, верхний и нижний бьеф гидроузла (рис. 3).

### 1.3. Особенности статического расчета

Наличие пружинного эффекта на свободной поверхности жидкости, как правило, отклоняет значения статических перемещений элементов жидкости от их истинных значений. Динамические перемещения не наследуют этого паразитического численного эффекта.

Из определения объемного модуля перемещения можно представить в виде:

$$u_s = \int_0^H \frac{P}{K} dz, \quad (4)$$

где  $u_s$  – вертикальные перемещения статического столба жидкости;  $H$  – высота столба жидкости;  $P$  – давление в жидкости;  $K$  – объемный модуль упругости;  $z$  – расстояние до свободной поверхности жидкости.

Давление в массиве жидкости, как правило, определяется следующим образом:

$$P = \rho g z. \quad (5)$$

Но значение давления снижается при наличии поверхностных пружин, так что

$$P = \rho g z - K_s u_s = \rho g (z - u_s). \quad (6)$$

Объединив уравнение (4) (6) и проинтегрировав, получим:

$$u_s = \frac{\rho g}{K} \left( \frac{H^2}{2} - u_s H \right) \quad (7)$$

или

$$u_s = \frac{1}{1 + \frac{H \rho g}{K}} \frac{\rho g H^2}{2}. \quad (8)$$

Если бы не было никаких поверхностных пружин, то (8) было записано:

$$u_s = \frac{\rho g H^2}{K} \frac{1}{2}. \quad (8a)$$

Таким образом, ошибкой для статического расчета является отклонение от 1,0 первого члена уравнения (8)  $\left( \frac{1}{1 + \frac{H \rho g}{K}} \right)$ , которое обычно весьма мало. Однако при использовании конечных элементов с трапецидальной формой в сечении (рис. 4б), в массиве жидкости при статическом расчете возникают значительные паразитические перемещения [4], которые следует рассматривать, как неэнергетические вихревые токи. Следует отметить, что наличие данной особенности может запутать пользователя.

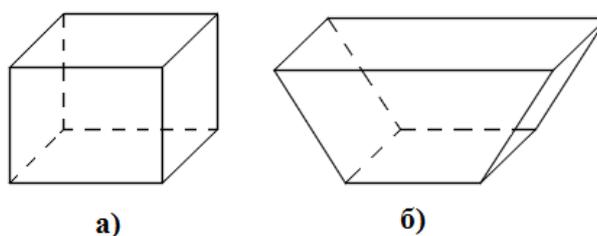


Рис. 4. Форма КЭ FLUID80. а) прямоугольная форма, б) произвольная форма

#### 1.4. Особенности задания контакта

Для задания контакта жидкости и сооружения (основания) они не должны иметь общих узлов, но координаты узлов на контактных поверхностях могут (и это весьма желательно) совпадать. Это необходимо для объединения узловых перемещений в направлении, перпендикулярном плоскости контакта, что обеспечивает возможность перемещения (скольжения) элементов жидкости по контактной поверхности. Объединение нормальных перемещений в узлах производится с помощью команды CPINTF, которая позволяет объединять узловые степени свободы даже у несовпадающих узлов.

Объединять необходимо только перемещения, перпендикулярные плоскости контакта, что требует в ряде случаев разворота узловой системы координат и значительно усложняет процесс моделирования. В случае, если контактная поверхность имеет криволинейную форму, разворот узловых систем координат на данной поверхности нужно проводить крайне тщательно, т.к. результаты могут приобретать неадекватные значения в случае, если объединяемые узловые перемещения не перпендикулярны плоскости контакта.

### 2. Тестовый пример

#### 2.1. Статический расчет

Для демонстрации особенностей, перечисленных в разделе 1 настоящей статьи, выбрана тестовая объемная задача, в которой моделируются два открытых канала с жидкостью прямоугольной (рис.5 а) и трапециевидальной формы (рис.5 б) в безмассовом массиве грунта. Глубина воды в канале в обоих случаях одинакова и равна 20 м.

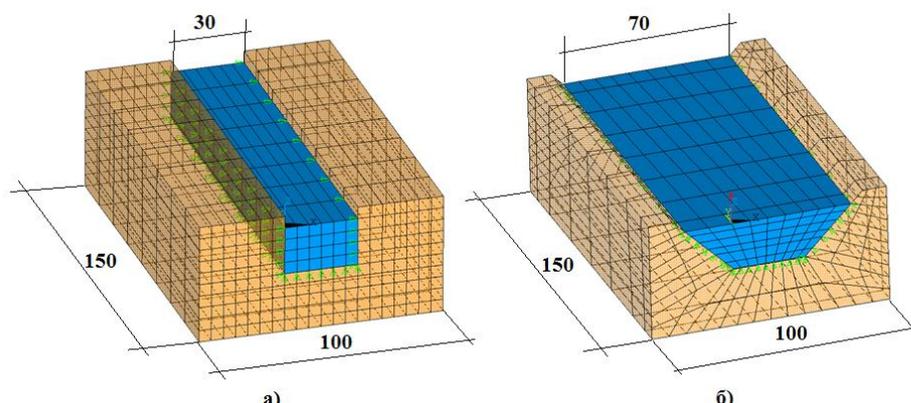


Рис. 5. Геометрические характеристики КЭ моделей, м  
а) Прямоугольный канал, б) Трапециевидальный канал

Массив грунта разбит восьмиузловыми элементами типа SOLID185. Физико-механические свойства материалов и сред представлены в таблице 1. В качестве граничных условий были заданы ограничения узловых перемещений на

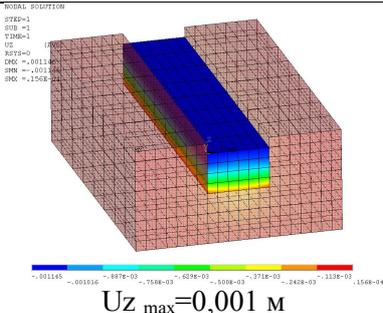
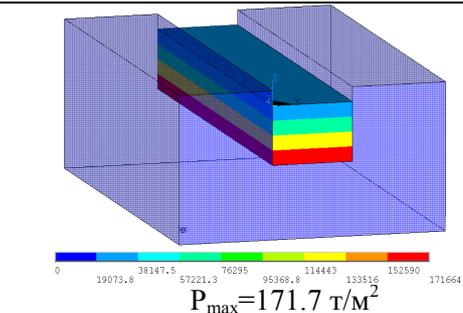
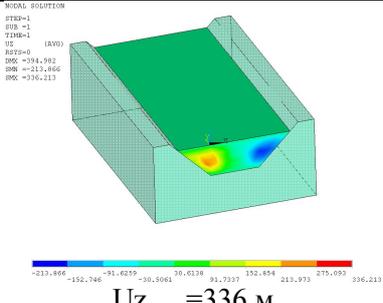
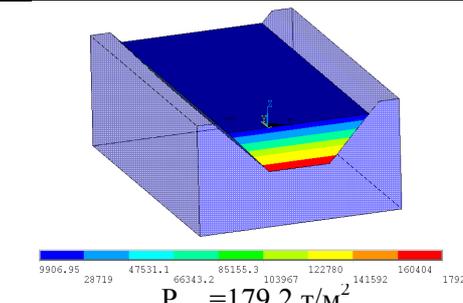
внешних гранях в направлении, перпендикулярном плоскости грани. Ускорение свободного падения принималось равным  $9.81 \text{ м/с}^2$ . Результаты статического расчета представлены в таблице 2.

Таблица 1. Физико-механические свойства материалов и сред

Характеристики	Значение
<i>Жидкость (вода)</i>	
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1000
Объемный модуль упругости $E$ , Па	$2.068 \times 10^{10}$
Динамическая вязкость $\eta$ , Па·с	0.001
Коэффициент Пуассона $\nu$	0.49
<i>Массив грунта</i>	
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	0
Модуль упругости $E$ , Па	$2.55 \times 10^{11}$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0.29

Как видно из полученных результатов, значение статических перемещений жидкости в задаче с трапецидальной формой канала приобретают неадекватный характер, причина возникновения данного паразитического эффекта описана в пункте 1.3. Следует отметить, что несмотря на неестественные перемещения жидкости (вихревые токи), распределение давления в массиве жидкости имеет ожидаемую картину. Данную особенность элементов *FLUID80* необходимо иметь ввиду при проведении статических расчетов задач со свободной поверхностью жидкости.

Таблица 2. Результаты статического расчета

Вертикальные перемещения	Давление в жидкости *Выводится среднее значение в элементе
<b>Прямоугольный канал</b>	
 <p><math>U_{z \max} = 0,001 \text{ м}</math></p>	 <p><math>P_{\max} = 171.7 \text{ т/м}^2</math></p>
<b>Трапецидальный канал</b>	
 <p><math>U_{z \max} = 336 \text{ м}</math></p>	 <p><math>P_{\max} = 179.2 \text{ т/м}^2</math></p>

2.2. Динамический расчет

На следующем этапе исследований оба рассматриваемых канала были посчитаны на динамическое воздействие, заданное акселерограммой. Воздействие прикладывалось вдоль горизонтальной оси X, в плоскости сечения каналов. Длительность акселерограммы составляет 10 с, максимальное и минимальное значение ускорений равно 10.8 и -10.3 м/с<sup>2</sup> (рис. 6). Ускорение прикладывалось в качестве инерционной нагрузки.

Для решения задачи в динамической постановке решение СЛАУ выполнялось прямым разреженным методом (SPARSE).

Интегрирование по времени проводилось методом Ньюмарка, шаг принимался равным 0.01 с. Демпфирование не учитывалось.

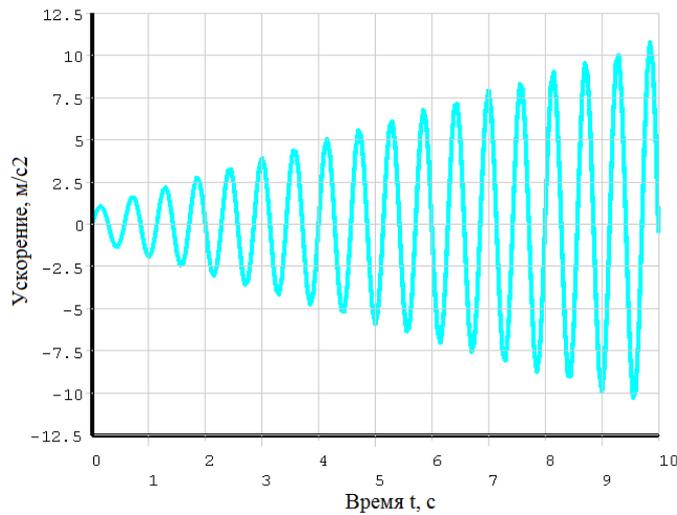


Рис. 6. Однокомпонентная акселерограмма ( $a_{max} \approx 1.1g$ )

Как указывалось в пункте 1.3, паразитические перемещения, связанные с неортогональностью граней конечных элементов, в динамическом расчете не наследуются. Анализ полученных результатов показал ожидаемую картину колебания жидкости в трапециевидном канале. Никаких физически необоснованных всплесков жидкости не обнаружено на всем протяжении динамического воздействия.

Таблица 3. Результаты динамического расчета

Прямоугольный канал	Трапециевидный канал
Суммарные перемещения $u_{sum}$ , м	
$t = 1.02c$	
<p>NODAL SOLUTION STEP=1 SUB =102 TIME=1.02 USUM (AVG) RESID=0 SMX =.11984 SMN =-.11984</p> <p style="text-align: center;"><math>u_{max} = 0.12 м</math></p>	<p>NODAL SOLUTION STEP=1 SUB =102 TIME=1.02 USUM (AVG) RESID=0 SMX =.039949 SMN =-.039949</p> <p style="text-align: center;"><math>u_{max} = 0.04 м</math></p>

Следует отметить, что данный тестовый пример имеет простую геометрию и процесс задания граничных условий на контакте «грунт – жидкость» значительно упрощен наличием всего 3х прямолинейных граней.

Однако при расчете реальных гидротехнических сооружений приходится иметь дело с достаточно сложными, криволинейными формами напорной грани и дна водохранилища [5,6], что в ряде случаев значительно усложняет задание контакта, а порой делает и его невозможным.

Данная особенность также накладывает некоторые ограничения на использование конечных элементов типа *FLUID80*. Становится очевидным, что для задач со сложной геометрией контактной поверхности «жидкость – основание/сооружение», элементы *FLUID80* не применимы и вполне могут быть заменены на акустические элементы типа *FLUID30* [7].

### 3. Выводы

В данной статье продемонстрированы особенности моделирования жидкости конечными элементами *FLUID80*. Можно выделить следующие особенности данного типа элементов, которые усложняют, а в некоторых случаях делают невозможным проведение расчета:

1. Данные конечные элементы могут иметь только форму гексаэдра, что значительно ограничивает их применение в задачах со сложной геометрией.

2. При решении рассматриваемых задач гидроупругости невозможно задавать водные массивы со свободной поверхностью на разных отметках, что исключает целый ряд практических приложений, в том числе расчеты некоторых гидросооружений.

3. При статических расчетах систем со свободной поверхностью жидкости, где используются объемные конечные элементы с не ортогональными гранями, возникают значительные всплески перемещений, которые являются паразитическим численным эффектом. Следует отметить, что это не касается всех остальных результатов (например, давление в жидкости и НДС сооружения).

4. Возникают значительные сложности при задании контакта «жидкость – основание/сооружение» в задачах со сложной геометрией контактной поверхности. И в случае ошибки в развороте элементных систем координат, полученные результаты также будут некорректными.

Продемонстрированные особенности конечных элементов типа *FLUID80* осложняют их использование в ряде задач. Однако для расчета крупных гидротехнических сооружений (высоконапорных плотин), где форма колебания свободной поверхности водохранилища не так важна, как гидродинамическая составляющая давления на напорную грань, жидкость может быть замоделирована объемными акустическими элементами типа *FLUID30*. Элементы акустического семейства не имеют подобных сложностей при моделировании связанных задач «сооружение - жидкость» и показывают вполне адекватные результаты по всем расчетным параметрам [7].

### Л и т е р а т у р а

1. А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Т.Б. Кайтуков, И.Н. Афанасьева, В.В. Вершинин, А.Р. Усманов, С.В. Щербина. О традиционных и современных методах численного моделирования связанных систем «сооружение - жидкость» // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сборник трудов №17. – Москва, 2014. – С. 159-183.

2. H.M. Westergaard. Water pressure on dams during earthquakes// Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., 1931, vol. 57, N 9, p.1303-1318.

3. Donea J., Giuliani S., Halleux J.P. An arbitrary Lagrangian – Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 33, 1982, pp. 689-723.
4. *ANSYS Mechanical* // Release 16.2 Ansys Inc // Basic Analysis Guide // FLUID80.
5. *ICOLD*, International Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams. Theme A–Fluid Structure Interaction Arch Dam – Reservoir at Seismic loading. Graz University of Technology, 2013, с. 15-188.
6. Нгуен Тай Ханг Льюнг. Апробация методики численного моделирования статического и сейсмического напряженно-деформированного состояния на трехмерной системе «основание – плотина – водохранилище» ГЭС Нам Чиен (Вьетнам) // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, – 12(4). – 2016. – С. 127-136.
7. А.М. Белостоцкий, Нгуен Тай Ханг Льюнг, Д.С. Дмитриев, С.В. Щербина. Сравнительный анализ методик численного моделирования динамики трехмерных систем «основание - арочная плотина - водохранилище» при сейсмических воздействиях// *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, – 12(2). – (2016). – С. 65-74.

#### References

1. Alexander M. Belostotsky, Pavel A. Akimov, Taymuraz B. Kaytukov, Irina N. Afanasyeva, Vladislav V. Vershinin, Anton R. Usmanov, Sergey V. Scherbina. About the traditional and modern methods of numerical simulation of coupled systems "structure - liquid", *Problems of Applied Mathematics and Computational mechanics: Proceedings №17*. Moscow, 2014, p. 159-183.
2. H.M. Westergaard. Water pressure on dams during earthquakes. *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.*, 1931, vol. 57, N 9, p.1303-1318.
3. Donea J., Giuliani S., Halleux J.P. An arbitrary Lagrangian – Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33, 1982, pp. 689-723.
4. *ANSYS Mechanical* , Release 16.2 Ansys Inc, Basic Analysis Guide, FLUID80
5. *ICOLD*, International Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams. Theme A–Fluid Structure Interaction Arch Dam – Reservoir at Seismic loading. Graz University of Technology, 2013, pp. 15-188.
6. Nguyen Tai Nang Luong. Approbation method of numerical simulation of strain-stress static and seismic analysis of three-dimensional system «foundation – dam – reservoir» on the example of Nam Chien hydro power plant (Vietnam), *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 12(4), 2016, pp. 127-136.
7. Alexander M. Belostotsky, Nguyen Tai Nang Luong, Dmitry S. Dmitriev, Sergey V. Scherbina. Comparative analysis of numerical simulation methods of dynamic analysis of three-dimensional system «foundation –reservoir – dam» at seismic impacts, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 12(2), 2016, pp. 65-74.

#### FEATURES OF THE USE OF FINITE ELEMENTS WITH POSSIBLE REFLECTION OF SURFACE GRAVITY WAVES IN THE PROCESS OF DYNAMIC CALCULATING COUPLED SYSTEMS «HYDRAULIC STRUCTURES-FLUID»

DMITRIEV D.S.

*StadyO Ltd., Moscow, Russia*

The article described in detail and shown in the test case, some specific features fluid simulation by finite elements with the possibility of taking into account surface gravity waves in the calculation of related systems "hydraulic structure-fluid" in the software package ANSYS Mechanical. Formulate conclusions about the applicability of these elements to hydraulic problems class.

KEY WORDS: Mathematical modeling, numerical methods, finite element method, associated production, surface gravity waves, acoustic elements, dynamic analysis, FLUID80, FLUID30, ANSYS Mechanical.

## Задачи термоупругости

### ТОРМОЖЕНИЕ РОСТА КРИВОЛИНЕЙНОЙ КОГЕЗИОННОЙ ТРЕЩИНЫ В ИЗГИБАЕМОЙ ПОЛОСЕ (БАЛКЕ) С ПОМОЩЬЮ НАВЕДЕННОГО ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

А.Б. МУСТАФАЕВ, к.ф.-м.н.

Институт математики и механики НАН Азербайджана,  
Азербайджан, AZ1141, Б. Вахабзаде, 9, e-mail: azer\_bm@list.ru

*Рассматриваются изменения температуры вблизи конца криволинейной трещины при наличии концевых зон с силами сцепления материала в изгибаемой полосе (балке). Цель локальных изменений температуры состоит в задержке или торможении роста трещины. Краевая задача о равновесии криволинейной трещины при действии внешних изгибающих нагрузок, наведенного термоупругого поля напряжений и усилий в связях, препятствующих ее раскрытию, сводится к системе нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром типа Коши. Условие предельного равновесия трещины формулируется на основе двухпараметрического критерия разрушения.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** изгибаемая полоса (балка), температурное поле, криволинейная трещина, зона предразрушения, силы сцепления

**Введение.** Значительный интерес представляет оценка эффективности применения локальных изменений температуры вблизи конца трещины на замедление роста трещины в элементах конструкций [1-23]. Такие локальные изменения температуры полосы (балки) легко выполнимы технологически. Их задача состоит в задержке или торможении развития сквозной трещины. Поэтому решение задач механики разрушения для полос (балок) с трещиной, вблизи кончика, которой имеются изменения температуры, представляет теоретический и практический интерес.

**Постановка задачи.** Рассматривается однородная изотропная полоса, ослабленная одной сквозной криволинейной трещиной. Обозначим ширину и толщину полосы соответственно через  $2c$  и  $2h$ . Декартовы координаты  $Ox$  в срединной плоскости полосы (балки) являются плоскостью симметрии. Используется модель трещины [24, 25] со связями между берегами в концевых зонах.

Принято, что на полосу (балку) действуют изгибающие нагрузки (такие как изгибающие моменты, равномерно распределенное по длине полосы давление или сосредоточенные силы). При действии на полосу изгибающей силовой нагрузки в концевых зонах криволинейной трещины будут возникать области предразрушения. Области предразрушения моделируем как зоны ослабленных межчастичных связей материала, а взаимодействие их берегов связями между ними. Диаграмма деформирования связей считается заданной, в общем случае закон деформирования связей является нелинейным. Размеры зоны предразрушения зависят от вида материала полосы (балки).

Исследуется самый неблагоприятный случай, когда трещина направлена к боковым граням полосы. Берега криволинейной трещины свободны от внешней изгибающей нагрузки. В реальных конструкционных материалах поверхности берегов трещины имеют неравноности и искривления. Для торможения роста криволинейной трещины на пути ее распространения с обеих концов с помощью нагрева тепловым источником областей  $S_1$  и  $S_2$  до некоторой постоянной температуры  $T = T_0$  создается зона сжимаемых напряжений. Считается, что в начальный момент произвольные области  $S_1$  и  $S_2$  в окрестности концов трещины на пути роста трещины в полосе мгновенно нагреваются до температуры  $T_0 = const$ . Остальная часть полосы в начальный момент  $t = 0$  имеет нулевую температуру.

Под действием внешней изгибающей, а также тепловой нагрузок в связях, соединяющих берега зон предразрушения, появятся нормальные  $q_y(x)$  и касательные  $q_{xy}(x)$  напряжения. Значения этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению. Трещина, имеющаяся в полосе (балке), принята близкой к прямолинейной форме, с лишь малыми отклонениями от прямой  $y = 0$ . Уравнение контура криволинейной трещины с зонами предразрушения принимается в виде:  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Граничные условия рассматриваемой задачи механики разрушения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_n - i\tau_{nt} = 0 \quad \text{при } y=f(x), \quad a_1 \leq x \leq b_1 \quad \text{на свободных берегах трещины;} \quad (1) \\ \sigma_n - i\tau_{nt} = q_y - iq_{xy} \quad \text{при } y=f(x), \quad a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b \\ \text{на берегах концевых зон предразрушения.} \end{aligned}$$

Основные уравнения исследуемой задачи дополняем уравнением, связывающим раскрытие (перемещения) берегов криволинейной трещины в зонах предразрушения и напряжения в связях. Это уравнение представим в виде

$$(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-) = \Pi_y(x, \sigma)q_y(x) - i\Pi_x(x, \sigma)q_{xy}(x). \quad (2)$$

Здесь функции  $\Pi_y(x, \sigma)$ ,  $\Pi_x(x, \sigma)$  представляют собой эффективные податливости связей, зависящие от натяжения;

$$\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2} \quad \text{— модуль вектора напряжений в связях.}$$

**Метод решения задачи.** Для решения поставленной задачи используем приближенный метод [26]. Напряженно-деформированное состояние в окрестности криволинейной трещины находим приближенно в том смысле, что будем удовлетворять граничным условиям задачи на берегах трещины (условия (1)) и также требовать, чтобы на значительном расстоянии от трещины с зонами предразрушения напряженное состояние в полосе совпадало с напряженным состоянием, определяемым комплексными функциями

$$\begin{aligned} \Phi^0(z) = A_0z^3 + A_1z^2 + A_2z + A_0, \quad (3) \\ \Omega^0(z) = B_0z^3 + B_1z^2 + B_2z + B_0. \end{aligned}$$

Эти функции в зависимости от значений коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) определяют напряженное состояние в полосе без трещины и нагретых зон.

Решение задачи для компонент тензора напряжений ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + \sigma_{x_1}, \quad \sigma_y = \sigma_{y_0} + \sigma_{y_1}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_0} + \tau_{xy_1}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_{x_0}$ ,  $\sigma_{y_0}$ ,  $\tau_{xy_0}$  — есть решение задачи термоупругости для полосы без трещины;  $\sigma_{x_1}$ ,  $\sigma_{y_1}$ ,  $\tau_{xy_1}$  — компоненты напряжений для полосы, ослабленной одной сквозной криволинейной трещиной, при этом внешняя нагрузка приложена по поверхности берегов трещины. Эта поверхностная нагрузка определяется в процессе решения задачи.

После решения задач теории теплопроводности и термоупругости для сплошной полосы находим напряжения  $\sigma_{x_0}$ ,  $\sigma_{y_0}$ ,  $\tau_{xy_0}$  (см. [21]).

Граничные условия (1) на берегах криволинейной трещины с зонами предразрушения с учетом соотношений (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} - i\tau_{nt_1} = -(\sigma_{y_0} + i\tau_{xy_0}) \quad \text{при } y = f(x), \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (5) \\ \sigma_{n_1} - i\tau_{nt_1} = q_y - iq_{xy} - (\sigma_{y_0} + i\tau_{xy_0}) \quad \text{при } y = f(x), \quad a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b, \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию искривленной (с малыми отклонениями от прямолинейной формы) поверхности берегов трещины. Так как функции при  $f(x)$  и  $f'(x)$  являются малыми величинами, функцию  $f(x)$

можно представить в виде  $y = \varepsilon H(x)$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр. Для решения граничной задачи (5), используем метод возмущений. Напряжения  $\sigma_{x_1}$ ,  $\sigma_{y_1}$ ,  $\tau_{xy_1}$ , перемещения  $u_1$ ,  $v_1$  и усилия в связях ищем в виде разложений по малому параметру:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \dots; & \sigma_{y_1} &= \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \dots; & \tau_{xy_1} &= \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u_1 &= u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + \dots; & v_1 &= v_i^{(0)} + \varepsilon v_i^{(1)} + \dots, \\ q_y &= q_y^{(0)} + \varepsilon q_y^{(1)} + \dots; & q_{xy} &= q_{xy}^{(0)} + \varepsilon q_{xy}^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Используя процедуру метода возмущений, находим граничные условия задачи по определению напряжений  $\sigma_{x_1}$ ,  $\sigma_{y_1}$ ,  $\tau_{xy_1}$ ,  $q_x$ ,  $q_{xy}$ , и перемещений  $u_1$ ,  $v_1$  при  $y = 0$   $a \leq x \leq b$

в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= -(\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, a_1 \leq x \leq b_1, & (6) \\ \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} - (\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b; \end{aligned}$$

в первом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} &= N - iT_t & \text{при } y = 0, a_1 \leq x \leq b_1, & (7) \\ \sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} &= q_y^{(1)} - q_{xy}^{(1)} + N - iT_t & \text{при } y = 0, a \leq x \leq a_1 \text{ и } b_1 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Функции  $N$  и  $T_t$  определяются по формулам (10) в [21]. Напряжения  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  и перемещения  $u_1^{(0)}$ ,  $v_1^{(0)}$  выразим через две кусочно-аналитические функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  согласно представлениям Колосова-Мусхелишвили [26]:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= \Phi_0(z) + \Omega_0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)}, & (8) \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_1^{(0)} + iv_1^{(0)}) &= \kappa \Phi_0(z) - \Omega_0(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)}, \end{aligned}$$

где  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\mu$  – модуль сдвига материала.

Если в формулах (8) перейти граничным значениям на контуре трещины с концевыми зонами предразрушения в нулевом приближении, т.е. положить  $y \rightarrow \pm 0$ , и учесть граничные условия (6), то получим задачу линейного сопряжения граничных значений искомых функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$

$$\begin{aligned} [\Phi_0(t) + \Omega_0(t)]^+ + [\Phi_0(t) + \Omega_0(t)]^- &= 2f_0(t), & (9) \\ [\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^+ - [\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^- &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } f_0 = \begin{cases} -(\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, a_1 \leq x \leq b_1 \\ q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} - (\sigma_{y_0} - i\tau_{xy_0}) & \text{при } y = 0, a \leq x < a_1 \text{ и } b_1 < x \leq b. \end{cases}$$

Решая задачу линейного сопряжения (9) и учитывая поведение аналитических функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  на бесконечности, находим

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t)}{t-z} dt + \\ &+ \frac{P_n(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{1}{2} [\Phi^0(z) + \Omega^0(z)], & (10) \end{aligned}$$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t)}{t-z} dt + \frac{P_n(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - \frac{1}{2} [\Phi^0(z) - \Omega^0(z)].$$

Здесь функции  $\Phi^0(z)$  и  $\Omega^0(z)$  находятся соотношениями (3), а многочлен  $P_n(z)$  имеет вид

$$P_n(z) = D_n z^n + D_{n-1} z^{n-1} + \dots + D_0. \quad (11)$$

При  $z \rightarrow \infty$   $\sqrt{(z-a)(z-b)} \rightarrow z + O(1/z)$ . Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей аналитической функции выделяемой условием на верхнем берегу трещины.

Степень полинома (11) и его коэффициенты  $D_0, D_1, \dots, D_n$  находятся из условия поведения аналитических функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  в окрестности точки  $|z| \rightarrow \infty$ . Таким образом, при нахождении коэффициентов  $D_0, D_1, \dots, D_n$  нужно функцию  $\Phi_0(z)$  (10) разложить в ряд по степеням  $z$  в окрестности точки  $|z| \rightarrow \infty$  и сравнить это разложение с выражением

$$\Phi_0(z) = \Phi^0(z) + O(1/z^2), \quad \Omega_0(z) = \Omega^0(z) + O(1/z^2).$$

Проведя необходимые вычисления для определения искоемых коэффициентов  $D_0, D_1, \dots, D_n$ , получим систему уравнений для их определения.

В полученные соотношения (10) входят неизвестные напряжения  $q_y^{(0)}(x)$  и  $q_{xy}^{(0)}(x)$  в концевых зонах предразрушения. Условием, служащим для определения неизвестных напряжений  $q_y^{(0)}(x)$  и  $q_{xy}^{(0)}(x)$  в связях между берегами трещины в зонах предразрушения, является дополнительное уравнение (2). С помощью полученного решения рассматриваемой задачи, найдем раскрытие между противоположными берегами трещины в концевых зонах предразрушения.

$$2\mu i \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_1^{+(0)} - u_1^{-(0)} + i(v_1^{+(0)} - v_1^{-(0)}) \right] = (1 + \kappa) \left[ \Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) - \frac{F_n(x)}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right], \quad (12)$$

где  $F_n(x) = d_3 x^3 + d_2 x^2 + d_1 x + d_0$ .

С помощью формул Сохоцкого-Племеля [26] из полученного решения (10), получим

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t)}{t-x} dt + 2P_n(x) \right\}. \quad (13)$$

Подставляя это выражение (13) в соотношение (12), для определения напряжений  $q_x(x)$  и  $q_{xy}(x)$  в связях в концевых зонах предразрушения трещины в нулевом приближении, получаем нелинейная комплексное сингулярное интегродифференциальное уравнение относительно неизвестных функций  $q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f_0(t)}{t-x} dt + 2 \left[ P_n(x) - \frac{1}{4} F_n(x) \right] \right\} = \quad (14)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Pi_y(x, \sigma^0) q_y^{(0)}(x) - i \Pi_x(x, \sigma^0) q_{xy}^{(0)}(x) \right]$$

$$(a \leq x < a_1 \text{ и } b_1 < x \leq b), \text{ где } \sigma^0 = \sqrt{(q_y^{(0)})^2 + (q_{xy}^{(0)})^2}.$$

Полученное уравнение (14) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа Коши. Это уравнение может быть решено численно.

При чистом изгибе полосы с трещиной с концевыми зонами предразрушения  $F_n(z) = 0$ . При изгибе полосы под действием равномерно распределенной нагрузки  $F_n(z) = 0$ . В случае изгибе консольной полосы с трещиной коэффициенты  $d_0, d_1, d_2, d_3$  определяются формулами:

$$d_0 = -\frac{iQ}{16I} (b+a) [(b-a)^2 - 8c^2],$$

$$d_1 = -\frac{iQ}{8I} [8c^2 + (b-a)^2], \quad d_2 = -\frac{iQ}{2I} (b+a), \quad d_3 = \frac{iQ}{I}.$$

где  $Q$  – поперечная сила, приложенная на ее свободном конце;  $I$  – момент инерции полосы.

Отделяя в комплексном сингулярном интегродифференциальном уравнении (14) реальные и мнимые части, получим систему двух действительных нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнения относительно неизвестных функций  $q_y^{(0)}(x)$  и  $q_{xy}^{(0)}(x)$ :

$$-\frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(x-b)}} \times \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} [q_y^{(0)}(t) + \sigma_{y_0}(t)] dt + f_y(x) \right\} = \quad (15)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Pi_y(x, \sigma^0) q_y^{(0)}(x) \right],$$

$$-\frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(x-b)}} \times \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} [q_{xy}^{(0)}(t) + \tau_{xy_0}(t)] dt + f_{xy}(x) \right\} = \quad (16)$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Pi_x(x, \sigma^0) q_{xy}^{(0)}(x) \right].$$

Здесь  $f_y(x) = \text{Re} \left[ 2P_n(x) - \frac{1}{2} F_n(x) \right], \quad f_{xy}(x) = \text{Im} \left[ 2P_n(x) - \frac{1}{2} F_n(x) \right],$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_y^{(0)}(t)}{t-x} dt = \int_a^{a_1} \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_y^{(0)}(t)}{t-x} dt + \int_{b_1}^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_y^{(0)}(t)}{t-x} dt,$$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_{xy}^{(0)}(t)}{t-x} dt = \int_a^{a_1} \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_{xy}^{(0)}(t)}{t-x} dt + \int_{b_1}^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} q_{xy}^{(0)}(t)}{t-x} dt.$$

**Методика численного решения задачи и анализ.** Уравнения (15) и (16) представляют собой нелинейные интегродифференциальные уравнения с ядром типа Коши. Их можно решить численно, используя коллокационную схему [27-29] с аппроксимацией неизвестных функций.

Для алгебраизации сингулярных интегродифференциальных уравнений (15), (16) приведем сначала все отрезки интегрирования к одному  $[-1, 1]$ . Это достигается с помощью замены переменных

$$t = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\tau, \quad x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\eta.$$

Левая часть интегродифференциального уравнения (15) при такой замене переменных примет вид:

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-\eta^2}} \left[ \int_{-1}^1 \frac{q_y^{(0)}(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\eta} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{\sigma_{y_0}(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\eta} d\tau + f_y(\eta) \right].$$

Соответственно, для левой части уравнения (16) находим:

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-\eta^2}} \left[ \int_{-1}^1 \frac{q_{xy}^{(0)}(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\eta} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{\tau_{xy_0}(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\eta} d\tau + f_{xy}(\eta) \right].$$

Заменяем производную, входящую в правую часть уравнения (15), для произвольного внутреннего узла конечно-разностной аппроксимацией. Аналогично поступаем с правой частью интегродифференциального уравнения (16). Используя квадратурную формулу Гаусса-Чебышева, все интегралы в уравнениях (15) и (16) заменяются конечными суммами, а производные в правых частях этих уравнений заменяются конечноразностными аппроксимациями.

Упомянутые выше формулы позволяют свести каждое интегродифференциальное уравнение к конечной системе алгебраических уравнений относительно приближенных значений неизвестной функции, соответственно, в узловых точках. В результате находим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+M)\sin\theta_m} \left[ \sum_{v=1}^M q_{y,v}^{(0)} \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m + \sum_{v=1}^M \sigma_{y_0,v} \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m + \right. & (17) \\ \left. + f_y(\cos\theta_m) \right] = \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} \left[ \Pi_y(x_{m+1}, \sigma^0(x_{m+1})) q_y^{(0)}(x_{m+1}) - \right. \\ \left. - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma^0(x_{m-1})) q_y^{(0)}(x_{m-1}) \right] \quad (m = 1, 2, \dots, M_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+M)\sin\theta_m} \left[ \sum_{v=1}^M q_{xy,v}^{(0)} \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m + \sum_{v=1}^M \tau_{xy_0,v} \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m + \right. & (18) \\ \left. + f_{xy}(\cos\theta_m) \right] = \frac{\mu M}{(1+\kappa)(b-a)} \left[ \Pi_x(x_{m+1}, \sigma^0(x_{m+1})) q_{xy}^{(0)}(x_{m+1}) - \right. \\ \left. - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma^0(x_{m-1})) q_{xy}^{(0)}(x_{m-1}) \right] \quad (m = 1, 2, \dots, M_1). \end{aligned}$$

Здесь принято, что  $q_{y,v}^{(0)} = q_{y,v}^{(0)}(\tau_v)$ ,  $q_{xy,v}^{(0)} = q_{xy,v}^{(0)}(\tau_v)$ ,

$$\sigma_{y_0,v} = \sigma_{y_0}(\tau_v), \quad \tau_{xy_0,v} = \tau_{xy_0}(\tau_v), \quad x_{m+1} = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\eta_{m+1}.$$

В результате алгебраизации вместо каждого сингулярного интегродифференциального уравнения в нулевом приближении получаем систему из  $M_1$  алгебраических уравнений для нахождения напряжений в связях в узловых точках конечных зон трещины. Здесь  $M_1$  – число узловых точек, содержащихся в конечных зонах трещины. Когда закон деформирования межчастичных связей является нелинейным, для решения полученных систем использовали итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений А.А. Ильюшина [30].

В частном случае линейно упругих связей системы (17) и (18) являются линейными и для их численного решения использовали метод Гаусса с выбором

главного элемента. После решения алгебраических систем (17) и (18) вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений для окрестности каждой вершины трещины в нулевом приближении

для левого конца трещины:

$$K_I^{a,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \left\{ \int_a^b \sigma_y^0(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx + \int_a^b \sigma_{y_0}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx \right\},$$

$$K_I^{a,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^{(0)}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx,$$

$$K_{II}^{a,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \left[ \int_a^b (\tau_{xy}^0(x) + \tau_{xy_0}(x)) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx \right],$$

$$K_{II}^{a,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^{(0)}(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx;$$

для правого конца трещины:

$$K_I^{b,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b (\sigma_y^0(x) + \sigma_{y_0}(x)) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_I^{b,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_y^{(0)}(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_{II}^{b,load} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b (\tau_{xy}^0(x) + \tau_{xy_0}(x)) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx,$$

$$K_{II}^{b,bond} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b q_{xy}^{(0)}(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx.$$

В этих формулах напряжения  $\sigma_y^0(x)$  и  $\tau_{xy}^0(x)$  определяются с помощью функций (3) на берегах трещины с концевыми зонами. После определения компонент тензора напряжений в нулевом приближении  $\sigma_x^{(0)}(x)$ ,  $\sigma_y^{(0)}(x)$  и  $\tau_{xy}^{(0)}(x)$  находим функции  $N$  и  $T_t$ . Последовательность решения граничной задачи (7) в первом приближении аналогична решению задачи в нулевом приближении. Решение граничной задачи (7) об отыскании кусочно-аналитических функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  запишется в виде

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{b q_y^{(1)} - i q_{xy}^{(1)} + N - iT_t}{t-z} \sqrt{(t-a)(t-b)} dt. \quad (19)$$

Для окончательного определения комплексных потенциалов  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  первого приближения необходимо найти неизвестные напряжения  $q_y^{(1)}(x)$  и  $q_{xy}^{(1)}(x)$  в связях между берегами трещины в концевых зонах.

Повторяя аналогично нулевому приближению вывод получения сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $q_y^{(1)}(x)$  и  $q_{xy}^{(1)}(x)$ , находим

$$-\frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} q_y^{(1)}(t) dt + \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} N(t) dt \right] =$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} \left( \Pi_y(x, \sigma^1) q_y^{(1)}(x) \right),$$

$$- \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[ \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} q_{xy}^{(1)}(t) dt + \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} T_t(t) dt \right] =$$

$$= \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} \left( \Pi_x(x, \sigma^1) q_{xy}^{(1)}(x) \right),$$

где  $\sigma^1 = \sqrt{\left(q_y^{(1)}\right)^2 + \left(q_{xy}^{(1)}\right)^2}$ .

Аналогично нулевому приближению, при алгебраизации интегродифференциальных уравнений все интервалы интегрирования были приведены к одному отрезку  $[-1, 1]$ . Далее интегралы в правых частях уравнений были сведены к конечным суммам с помощью квадратурных формул типа Гаусса-Чебышева. В результате алгебраизации были получены следующие алгебраические системы

$$\frac{2}{(1+M) \sin \theta_m} \sum_{v=1}^M \left[ q_{y,v}^{(1)} + N(\tau_v) \right] \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m = \quad (20)$$

$$= \frac{\mu M}{(1+k)(b-a)} \left[ \Pi_y(x_{m+1}, \sigma^1(x_{m+1})) q_y^1(x_{m+1}) - \Pi_y(x_{m-1}, \sigma^1(x_{m-1})) q_y^1(x_{m-1}) \right]$$

$$\frac{2}{(1+M) \sin \theta_m} \sum_{v=1}^M \left[ q_{xy,v}^{(1)} + T_t(\tau_v) \right] \sum_{k=1}^M \sin k\theta_v \cos k\theta_m = \quad (21)$$

$$= \frac{\mu M}{(1+k)(b-a)} \left[ \Pi_x(x_{m+1}, \sigma^1(x_{m+1})) q_{xy}^1(x_{m+1}) - \Pi_x(x_{m-1}, \sigma^1(x_{m-1})) q_{xy}^1(x_{m-1}) \right]$$

где  $q_{y,v}^{(1)} = q_y^{(1)}(\tau_v)$ ;  $q_{xy,v}^{(1)} = q_{xy}^{(1)}(\tau_v)$ ;  $m = 1, 2, \dots, M_1$ .

После решения алгебраических систем (20) и (21) методом упругих решений А.А. Ильюшина вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений в первом приближении  $K_I^{a,load}$ ,  $K_I^{a,bond}$ ,  $K_{II}^{a,load}$ ,  $K_{II}^{a,bond}$  и  $K_I^{b,load}$ ,  $K_I^{b,bond}$ ,  $K_{II}^{b,load}$ ,  $K_{II}^{b,bond}$ . Окончательно для коэффициентов интенсивности напряжений имеем соотношения:

для левого конца трещины

$$K_I^{load} = K_I^{a_0,load} + \varepsilon K_I^{a_1,load}, \quad K_I^{bond} = K_I^{a_0,bond} + \varepsilon K_I^{a_1,bond},$$

$$K_{II}^{load} = K_{II}^{a_0,load} + \varepsilon K_{II}^{a_1,load}, \quad K_{II}^{bond} = K_{II}^{a_0,bond} + \varepsilon K_{II}^{a_1,bond},$$

$$K_I + iK_{II} = \left( K_I^{load} + K_I^{bond} \right) - i \left( K_{II}^{load} + K_{II}^{bond} \right);$$

для правого конца трещины

$$K_I^{bond} = K_I^{b_0,load} + \varepsilon K_I^{b_1,load}, \quad K_I^{load} = K_I^{b_0,bond} + \varepsilon K_I^{b_1,bond},$$

$$K_{II}^{load} = K_{II}^{b_0,load} + \varepsilon K_{II}^{b_1,load}, \quad K_{II}^{bond} = K_{II}^{b_0,bond} + \varepsilon K_{II}^{b_1,bond}.$$

Анализ предельного равновесия изгибаемой полосы с криволинейной трещиной с зонами предразрушения осуществляем с помощью двухпараметрического критерия разрушения.

Первый критерий – это условие продвижения вершины трещины, а второй условие разрыва связей на краю концевой зоны. В качестве первого условия разрушения используем силовой критерий разрушения Ирвина. Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнение условие

$$K = K_c, \quad (22)$$

где  $K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  – модуль коэффициентов интенсивности напряжений при

наличии связей в концевой зоне трещины;  $K_c$  – постоянная материала.

В качестве второго условия разрушения используем критерий критического раскрытия берегов трещины и полагаем, что разрыв связей на краю концевой зоны ( $x_* = a_1$  или  $x_* = b_1$ ) происходит при выполнении условия

$$V(x_*) = \sqrt{(u^+ - u^-)^2 + (v^+ - v^-)^2} = \delta_c, \quad (23)$$

где  $\delta_c$  – предельная длина связи.

Совместное решение полученных уравнений и двухпараметрического критерия разрушения (22) и (23) позволяет (при заданной длине трещины и характеристиках связей) установить предельную внешнюю изгибающую нагрузку и размеры концевых зон для критического состояния, при котором происходит рост трещины в полосе.

Для заданных размеров трещины к концевым зонам, используя предельные значения  $K_c$  и  $\delta_c$  можно выделить режимы равновесия и роста трещины при монотонном нагружении. Если выполняются условия

$$K \geq K_c, \quad V(x_*) < \delta_c,$$

то происходит продвижение вершины трещины с одновременным увеличением длины концевой зоны без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать, как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок. Рост вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны будет происходить при выполнении условий

$$K \geq K_c, \quad V(x_*) \geq \delta_c.$$

При выполнении условий  $K < K_c$ ,  $V(x_*) \geq \delta_c$  происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины и размер концевой зоны межчастичных связей сокращается, стремясь к критическому значению для данного уровня нагрузок. Так, например, при выполнении условий

$$K < K_c, \quad V(x_*) < \delta_c$$

положение вершины трещины и концевой зоны не будут изменяться.

Таким образом, анализ показывает, что внешняя изгибающая нагрузка, введенные термоупругие напряжения и критические параметры  $K_c$ ,  $\delta_c$  определяют характер разрушения:

- 1) рост вершины трещины с продвижением концевой зоны;
- 2) сокращение размера концевой зоны без роста вершины трещины;
- 3) рост вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой зоны.

На рисунке приведены графики распределения нормальных усилий  $q_y$  в связях концевых зон трещины при чистом изгибе для следующих значений свободных параметров:  $\nu = 0,3$ ;  $t_* = 4at/L_0^2 = 10$ ;  $R/L_0 = 0,5$ ;  $b_0/L_0 = 0,2$ ;  $(b-a)/c = 0,05$  (кривая 1);  $(b-a)/c = 0,02$  (кривая 2), где  $L_0$  и  $b_0$  координаты центра нагреваемой области;  $\sigma_0 = M_{изг}/W$ , где  $W$  – момент сопротивления сечения полосы (балки);  $d$  – линейный размер концевой зоны.

Расчеты показывают, что наличие тепловых напряжений уменьшает значения коэффициентов интенсивности напряжений, усилия в связях между берегами и раскрытие трещины. При линейном законе деформирования связей усилия в них всегда имеют максимальные значения на краю концевой зоны. Аналогичная картина имеет место и для величины раскрытия трещин. На краю концевой зоны она максимальна при линейном и нелинейном законах деформирования.

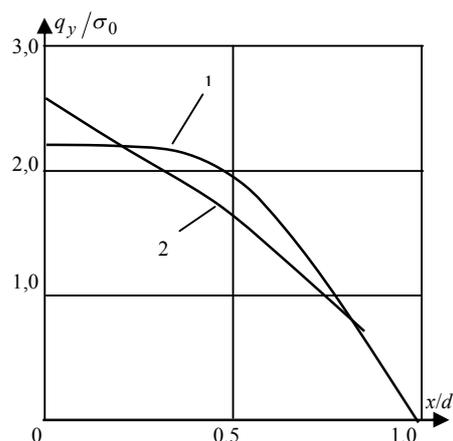


Рис. 1. Распределение нормальных усилий в связях концевых зон трещины

**Выводы.** Решена задача о торможении роста криволинейной когезионной трещины в изгибаемой полосе (балке), когда на пути ее распространения имеется нагретая зона. Получены соотношения для коэффициентов интенсивности напряжений и раскрытия берегов криволинейной трещины на краях концевой зоны межчастичных связей материала в зависимости от приложенной внешней нагрузки, интенсивности источника тепла, длины трещины, геометрических параметров нагретой зоны. Установлена зависимость длины трещины от приложенной изгибающей нагрузки, интенсивности нагретой зоны, а также от физических и геометрических параметров полосы (балки) при монотонном нагружении.

#### Л и т е р а т у р а

1. Финкель В.М. Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977. 360 с.
2. Беленький В.Д. Закрытие центральной трещины в круговом диске под действием температурного поля // Проблемы прочности. 1984. № 6. С. 35–38.
3. Potthast B., Herrmann K.P. Asymptotic analysis for temperature fields induced by dynamic crack growth in pressure-sensitive materials // Int. J. of Fracture. 2000. Vol. 106. P. 57–64.
4. Кадиев Р.И., Мирсалимов В.М. Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестник Даг. гос. ун-та. 2001. № 4. С. 69–73.
5. Fu Y.-M., Bai X.-Z., Qiao G.-Y., Hu Y.-D., Luan J.-Y. Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating // Materials Science and Technology. 2001. Vol. 17. P. 1653–1656.
6. Кадиев Р.И. Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестник ДНЦ РАН. 2003. № 14. С. 15–18.
7. Мирсалимов В.М., Кадиев Р.И. Закрытие трещины в листовом элементе под действием локального теплового поля // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 6. С. 69–75.
8. Kovtunen V.A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. Angew. Math. Mech.. 2005. Bd. 85. Fasz. 4. S. 242–251.
9. Мирсалимов В.М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 1. С. 132–151.
10. Qin Z, Librescu L., Hasanyan D. Joule heating and its implications on crack detection/arrest in electrically conductive circular cylindrical shells // J. of Thermal Stresses. 2007. Vol. 30. P. 623–637.
11. Liu T.J.C. Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2008. Vol. 49. P. 171–184.

12. *Мир-Салим-заде М.В.* Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // ПМТФ. 2010. Т. 51, №2. с. 148–159.
13. *Димаки А.В., Мельников А.Г., Плешанов В.С., Сизова О.В.* Теоретическое и экспериментальное исследование заживления поверхностных трещин индукционным нагревом // Перспективные материалы. 2010. № 3. Р. 77–83.
14. *Liu T.J.C.* Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // Engineering Fracture Mechanics. 2011. Vol. 78. P. 666–684.
15. *Liu T.J.C.* Fracture mechanics of steel plate under Joule heating analyzed by energy density criterion // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2011. Vol. 56. P. 154–161.
16. *Мирсалимов В.М., Рустамов Б.Э.* Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // Прикладная механика и техническая физика. 2013. № 6. С. 181–190.
17. *Liu T.J.C.* Compressive stresses near crack tip Induced by thermo-electric field // Int. J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, 2014. Vol. 8. P. 1799–1802.
18. *Georgantzinos S.K., Anifantis N.K.* Crack closure // Encyclopedia of Thermal Stresses (edit. R.B. Hetnarski). Springer Netherlands. 2014. 774–779.
19. *Мир-Салим-заде М.В.* Трещины со связями в перфорированной стрингерной пластине // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 5. С. 34–43.
20. *Itou S.* Thermal stresses around two upper cracks placed symmetrically about a lower crack in an infinite orthotropic plane under uniform heat flux // J. of theoretical and applied mechanics. 2014. Vol. 52. P. 617–628.
21. *Мустафаев А.Б.* Взаимодействие берегов искривленной трещины в изгибающейся полосе (балке) под действием теплового источника // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 4. с. 29–41.
22. *Мирсалимов В.М., Мустафаев А.Б.* Решение задачи о частичном контактировании берегов щели переменной ширины под действием температурного поля. // Физико-хим. механика материалов. 2015. № 1. С. 86–92.
23. *Mirsalimov V.M., Mustafayev A.B.* A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // Mechanika. 2015. Vol. 21. P. 19–22.
24. *Гаджиев В.Д., Мирсалимов В.М.* Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами // Оптимальное проектирование механических систем. Баку: Элм, 1999. С. 50–63
25. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. 2003. V.70, №14. P. 1741–1987.
26. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
27. *Мирсалимов В.М.* Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
28. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
29. *Ladopoulos E.G.* Singular Integral Equations. Springer-Verlag, Berlin, 2000. 553 p.
30. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат., 1948. 376 с.

#### References

1. *Finkel VM.* (1977) *Physical Basis Of Fracture Retardation*. Moscow: Metallurgiya. 360 p.
2. *Belen'kii VD.* (1984) Closure of a central crack in a circular disk under the influence of a temperature field // Strength of Materials. Vol. 16. p. 806–810.
3. *Potthast B, Herrmann KP.* (2000) Asymptotic analysis for temperature fields induced by dynamic crack growth in pressure-sensitive materials // Int. J. of Fracture. 106. p. 57–64
4. *Kadiev RI, Mirsalimov VM.* (2001) Effect of heat source on the dynamics of crack growth, Vestnik Dagestanskogo universiteta. 2001. №4. p. 69–73.
5. *Fu Y-M, Bai X-Z, Qiao G-Y, Hu Y-D, Luan J-Y.* (2001) Technique for producing crack arrest by electromagnetic heating // Materials Science and Technology. Vol. 17. p. 1653–1656.
6. *Kadiev RI.* (2003) Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестник ДНЦ РАН. № 14. p. 15–18.
7. *Mirsalimov VM, Kadiev RI.* (2004) Closing of a crack in the sheet element under action of local thermal field // J. of Machinery Manufacture and Reliability. Vol. 33, Issue 6. p. 69–75.

8. *Kovtunen VA.* (2005) Nonconvex problem for crack with nonpenetration // *Z. Angew. Math. Mech.*. Bd. 85. Fasz. 4. s. 242–251.
9. *Mirsalimov VM.* (2007) The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair // *J. of Applied mathematics and mechanics*. Vol. 71. p. 120–136.
10. *Qin Z, Librescu L, Hasanyan D.* (2007) Joule heating and its implications on crack detection/arrest in electrically conductive circular cylindrical shells // *J. of Thermal Stresses*. Vol. 30. p. 623–637
11. *Liu TJC.* (2008) Thermo-electro-structural coupled analyses of crack arrest by Joule heating // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. Vol. 49. p. 171–184.
12. *Mir-Salim-zada MV.* (2010) Modeling of partial closure of cracks in a perforated isotropic medium reinforced by a regular system of stringers // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*. Vol. 51. p. 269-279.
13. *Dimaki AV, Mel'nikov AG, Pleshanov VS, Sizova OV.* (2010) Theoretical and experimental study of the healing of surface cracks using induction heating // *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 1, Issue 4. p. 353–358.
14. *Liu TJC.* (2011) Finite element modeling of melting crack tip under thermo-electric Joule heating // *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 78. p. 666–684.
15. *Liu TJC.* (2011) Fracture mechanics of steel plate under Joule heating analyzed by energy density criterion // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. Vol. 56. p. 154–161.
16. *Mirsalimov MV, Rustamov BE.* (2013) Simulation of partial closure of a crack-like cavity with cohesion between the faces in an isotropic medium // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*. Vol. 54, p. 1021–1029.
17. *Liu TJC.* (2014) Compressive stresses near crack tip Induced by thermo-electric field // *Int. J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*. Vol. 8. p. 1799–1802.
18. *Georgantzinos S.K., Anifantis N.K.* (2014) Crack closure // *Encyclopedia of Thermal Stresses* (edit. R.B. Hetnarski). Springer Netherlands. p. 774–779.
19. *Mir-Salim-zade MV.* (2014) Cracks with interfacial bonds in a perforated stringer plate // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. Issue 5. p. 34–43.
20. *Itou S.* (2014) Thermal stresses around two upper cracks placed symmetrically about a lower crack in an infinite orthotropic plane under uniform heat flux // *J. of theoretical and applied mechanics*. Vol. 52. p. 617–628.
21. *Mustafayev AB.* (2014) Interaction of curved crack faces in bending strip (beam) under influence of temperature field // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. Issue 4. p. 29–41.
22. *Mirsalimov VM, Mustafayev AB.* (2015) Solution of the problem of partial contact between the faces of a slot of variable width under the action of temperature fields // *Materials Science*. Vol. 51. p. 96–103.
23. *Mirsalimov VM, Mustafayev AB.* (2015) A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // *Mechanika*. Vol. 21. p. 19–22.
24. *Gadzhiev VD, Mirsalimov VM.* (1999) Limit equilibrium state of the bushing-type component of a contact couple in the presence of cracks with bonds between the faces // *Optimal Design of Mechanical Systems*. Elm, Baku. p. 50–63.
25. The special issue: Cohesive models // *Eng. Fract. Mech.* 2003. V.70, №14. P. 1741-1987.
26. *Panasyuk VV, Savruk MP, Datsyshyn AP.* (1976) The stress distribution around cracks in plates and shells. Kiev: Naukova Dumka. 443 p. (in Russian)
27. *Muskhelishvili NI.* (1977) Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Amsterdam: Kluwer. 732 p.
28. *Mirsalimov VM.* (1987) Non-one-dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka. 256 p.
29. *Ladopoulos EG.* (2000) Singular Integral Equations. Springer-Verlag, Berlin. 553 p.
30. *Ilyushin AA.* (1948) Plasticity. Moscow a
31. nd Leningrad: Gostekhizdat. 376 p. (in Russian)

## INHIBITION OF CURVILINEAR COHESIVE CRACK GROWTH IN A BENDING STRIP (BEAM) BY INDUCED HEAT STRESS FIELD

A.B. MUSTAFAYEV

*Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of Azerbaijan*

We consider a temperature changes near end of curvilinear crack with end zones of material cohesive forces in bending strip (beam). The aim of the local temperature changes is a delay or inhibition of crack growth. Boundary value problem for equilibrium of curvilinear crack under the action of external bending loads, induced thermoelastic stress field and tractions in bonds, preventing its disclosure, is reduced to a system of nonlinear singular integro-differential equations with the kernel of Cauchy type. Condition of crack limit equilibrium is formulated on the basis of a two-parameter fracture criterion.

KEY WORDS: bending strip (beam), temperature field, curvilinear crack, pre-fracture zone, cohesive forces.

## Прочность летательных аппаратов

### АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ «ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ» В РАМКАХ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Вал. В. ФИРСАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» «МАИ»*

*125993 Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4 [k906@mai.ru](mailto:k906@mai.ru)*

*Представлены два варианта уточненной теории расчета напряженно-деформированного состояния в краевой зоне цилиндрических оболочек. В качестве примера рассматривается оболочка, жестко защемленная по двум краям и подверженная действию локальных распределенных и сосредоточенных нагрузок. Проведено сравнение результатов расчета, полученных в данной работе и по классической теории.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** замкнутая цилиндрическая оболочка; два варианта уточненной теории расчета; аппроксимирующие полиномы; вариационный принцип Лагранжа; краевые условия; преобразования Лапласа; напряженно-деформированное состояние «погранслоя»; локальная нагрузка; характеристическое уравнение; поперечные нормальные напряжения.

#### **Введение**

Построение уточненных теорий и методов определения НДС пластинок и оболочек позволит решить проблему расчета на прочность таких авиационных конструкций, как силовые корпуса летательных аппаратов, различные переходные зоны и соединения, а также элементов конструкций в различных отраслях машиностроения и в строительном деле.

Учет трёхмерности НДС в элементах конструкций в сочетании с методами механики разрушения дает возможность оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах, более обоснованно выбрать тип конструкционного материала и рациональным образом распределить его вблизи концентраторов напряжений. Результаты расчета общего, местного НДС пластинок и оболочек могут быть использованы при обосновании режимов лабораторных испытаний на действие статических нагрузок, вибраций и ударов.

Один из возможных путей построения математически обоснованной теории пластинок и оболочек состоит в применении метода прямого асимптотического разложения компонентов НДС в ряды по малому параметру - относительной толщине трехмерного тела и последующем интегрировании уравнений трехмерной теории упругости.

Сформулированные краевые задачи, в силу сложности соответствующих им дифференциальных уравнений и различного типа граничных условий, напрямую решить затруднительно. В связи с этим, в работах [1,4], указанные краевые задачи с помощью вариационного метода Власова-Канторовича решены и доведены до численных результатов для прямоугольных пластинок и цилиндрических оболочек переменной толщины.

Другой подход к построению уточненной теории, называемый энергетически согласованным, заключается в разложении перемещений в полиномиальные ряды по нормальной координате и последующем применении вариационного принципа Лагранжа. Особенность этого подхода при построении уточненной теории оболочек состоит в том, что деформации оболочки находятся с помощью геометрических соотношений, тангенциальные напряжения определяются

из соотношений закона Гука и поперечные напряжения получаются интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Следует отметить, что построенные в рамках энергетически согласованного подхода краевые задачи для цилиндрических оболочек [2] были обобщены на случай произвольных ортотропных оболочек [6], а также оболочек переменной толщины [5].

В данной работе на основе энергетически согласованного подхода представлены два варианта уточненной теории расчета, условно обозначаемые «K=2» и «K=3». Эти варианты отличаются степенью полиномов, аппроксимирующих искомые перемещения по толщине оболочки. Указанные полиномы имеют степень на одну или две выше по сравнению с аналогичными функциями классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Приводится сравнение результатов расчетов по двум вариантам уточненной теории между собой и по классической теории. Оценивается влияние напряженного состояния «пограничный слой» на прочность оболочки.

### Напряженное состояние «пограничный слой»

Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины *h* из изотропного материала, отнесенная к ортогональной системе координат  $\xi, \theta, z$  (рис. 1).

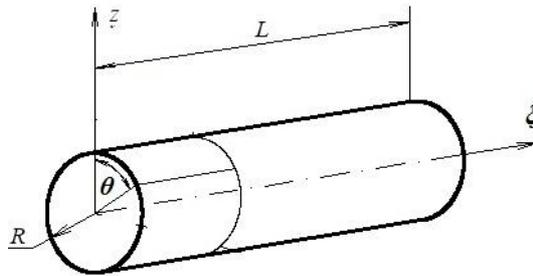


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Здесь  $\xi$  представляет собой относительное (измеренное в долях  $R$ ) расстояние по образующей,  $\theta$  - центральный угол, а ось  $z$  направлена по внешней нормали к срединной поверхности радиуса  $R$ .

Считаем, что на лицевых  $z = \pm h$  поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{33}(\pm h) = q_{33}^{\pm},$$

где  $q_{33}^{\pm}$  обозначают осесимметричные нагрузки, действующие на верхней и нижней поверхностях оболочки в направлении координаты  $z$ .

Будем предполагать в дальнейшем, что искомые упругие перемещения  $U_1, U_2$ , допускают асимптотические представления вида:

$$U_1(\xi, z) = u_0(\xi) + u_1(\xi)z + u_2(\xi)\frac{z^2}{2!} + u_3(\xi)\frac{z^3}{3!}, \quad (1)$$

$$U_2(\xi, z) = w_0(\xi) + w_1(\xi)z + w_2(\xi)\frac{z^2}{2!},$$

где индексы 1,2 соответствуют осям  $\xi$  и  $z$  соответственно.

Аппроксимирующие полиномы (1) соответствуют варианту теории  $K=3$ . Для варианта теории  $K=2$  в формулах (1) отбрасываются последние слагаемые, для классической теории типа Кирхгофа - Лява – по два последних слагаемых.

Используя вариационный принцип Лагранжа, с учетом разложения (1), получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях [6], которая для рассматриваемого случая принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left( Kl_0^{u_0} + Kl_{11}^{u_0} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_0 + \left( Kl_0^{u_1} + Kl_{11}^{u_1} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_1 + \left( Kl_0^{u_2} + Kl_{11}^{u_2} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_2 + \\ & + \left( Kl_0^{u_3} + Kl_{11}^{u_3} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) u_3 + Kl_1^{w_0} \frac{d}{d\xi} w_0 + Kl_1^{w_1} \frac{d}{d\xi} w_1 + Kl_1^{w_2} \frac{d}{d\xi} w_2 = 0, \quad l=1,2,3,4, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & Kj_1^{u_0} \frac{d}{d\xi} u_0 + \left( Kj_0^{w_0} + Kj_{11}^{w_0} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) w_0 + Kj_1^{u_1} \frac{d}{d\xi} u_1 + \left( Kj_0^{w_1} + Kj_{11}^{w_1} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) w_1 + \\ & + Kj_1^{u_2} \frac{d}{d\xi} u_2 + \left( Kj_0^{w_2} + Kj_{11}^{w_2} \frac{d^2}{d\xi^2} \right) w_2 + Kj_1^{u_3} \frac{d}{d\xi} u_3 = Kj_0^{q_{33}^+} q_{33}^+ - Kj_0^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad j = \pm 5, 6, 7. \end{aligned}$$

с граничными условиями на жестко защемленных краях оболочки следующего вида

$$u_i = 0, (i = \overline{1,4}); \quad w_k = 0, (k = \overline{1,3}) \quad \text{при } \xi = 0, \quad \zeta = L/R.$$

В уравнениях (2) коэффициенты  $Kl, Kj$  с буквенными и числовыми индексами представляют собой постоянные величины, зависящие от геометрических параметров и упругих постоянных материала оболочки;  $u_i, w_k$  – коэффициенты разложений искомых перемещений в выражениях (1). Формулы для указанных коэффициентов в более общем случае нагружения приведены в [6].

В матричном виде однородные уравнения, соответствующие (2), записываются как

$$\mathbf{D}[u_0, u_1, u_2, u_3, w_0, w_1, w_2]^T = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{D}$  – квадратная матрица размером  $7 \times 7$  коэффициентов уравнений (3),  $\mathbf{0}$  – нулевой вектор.

Пусть  $F_1(\xi)$  есть решение уравнения (3), т.е.

$$\det(\mathbf{D})F_1(\xi) = 0,$$

где  $\det(\mathbf{D})$  – определитель матрицы  $\mathbf{D}$ .

Тогда  $u_i, w_k$ , определяемые формулами

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{1m} F_1, \quad u_1 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{2m} F_1, \quad u_2 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{3m} F_1, \quad u_3 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{4m} F_1, \\ w_0 &= \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{5m} F_1, \quad w_1 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{6m} F_1, \quad w_2 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{7m} F_1, \end{aligned}$$

дают решение однородного уравнения (3). Здесь  $\det(\mathbf{D})_{sm}$  – минор определителя  $\det(\mathbf{D})$ , соответствующий элементу  $(s,m)$  матрицы  $\mathbf{D}$  ( $s = \overline{1,7}$ ).

Дифференциальному уравнению (3) соответствует характеристическое уравнение, которое можно представить как

$$p^2 \sum_{n=0}^6 H_n^0 p^{2n} = p^2 \Delta_1 = 0, \quad n = 1..6, \quad (4)$$

где  $H_n^0$  – постоянные коэффициенты, зависящие от величины  $\varepsilon_0 = h/R$  и коэффициента Пуассона  $\mu$ .

Кроме нулевых корней, уравнение (4) имеет следующие корни:

$$\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4.$$

Тогда  $\Delta_1$  можно представить в виде

$$\Delta_1 = H_6^0 \left[ (p - p_1)^2 + q_1 \right] \left[ (p + p_1)^2 + q_1 \right] \left[ (p - p_2)^2 + q_2 \right] \times \\ \times \left[ (p + p_2)^2 + q_2 \right] (p^2 - p_3^2)(p^2 - p_4^2).$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) получается в виде

$$u_0 = C_{13} + C_{14}\xi + \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{1m} \bar{F}_1, \quad u_1 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{2m} \bar{F}_1, \quad u_2 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{3m} \bar{F}_1, \\ u_3 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{4m} \bar{F}_1, \quad w_0 = -C_{14}\mu + \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{5m} \bar{F}_1, \\ w_1 = -C_{14} \frac{\mu}{R} + \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{6m} \bar{F}_1, \quad w_2 = \sum_{m=1}^7 \det(\mathbf{D})_{7m} \bar{F}_1,$$

где

$$\bar{F}_1(\xi) = (C_1 \sin q_1 \xi + C_2 \cos q_1 \xi) e^{-P_1 \xi} + (C_3 \sin q_1 \xi + C_4 \cos q_1 \xi) e^{P_1 \xi} + \\ + (C_5 \sin q_2 \xi + C_6 \cos q_2 \xi) e^{-P_2 \xi} + (C_7 \sin q_2 \xi + C_8 \cos q_2 \xi) e^{P_2 \xi} + \\ + C_9 e^{-P_3 \xi} + C_{10} e^{P_3 \xi} + C_{11} e^{-P_4 \xi} + C_{12} e^{P_4 \xi}.$$

Анализ результатов показывает, что при расчете оболочек корни характеристического уравнения разделяются на две группы: асимптотически малые  $\pm p_1 \pm iq_1$  и большие  $\pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4$  корни. Асимптотически малым корням соответствуют основные НДС, которые приближенно определяются по классической теории оболочек. Асимптотически большим корням  $\pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4$  соответствуют напряженные состояния оболочки, которые назовем дополнительными краевыми эффектами типа «погранслои».

Для нахождения частного решения уравнений (2) используется преобразование Лапласа. Частные решения для более общего случая нагружения цилиндрической оболочки приводятся в [3].

### **Результаты расчетов и их сравнение с классической теорией**

На рис. 2- 5 показаны результаты расчета НДС оболочки, имеющей следующие параметры: относительная длина  $\xi_0 = L/R = 4$ , радиус  $R = 0.1M$ , относительная полутолщина  $\varepsilon_0 = h/R = 1/80$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0.3$ . Оболочка жестко закреплена на двух концах. Распределенная по контуру постоянная сосредоточенная сила  $P$  приложена в середине оболочки. На данных рисунках аббревиатура “Gol” соответствует результатам расчета по классической теории.

Анализируя графики на рис. 2-3, можно установить: максимальные нормальные напряжения  $\sigma_{11}$ , соответствующие уточненной теории « $K=3$ », превышают значения этих же напряжений, определяемых по классической теории, на 65%; различие в величинах этих напряжений, полученных по уточненным теориям « $K=2$ » и « $K=3$ », составляет 25%;

Максимальные нормальные напряжения  $\sigma_{22}$ , полученные по уточненной теории « $K=3$ » превышают напряжения, соответствующие классической теории,

на 60%, разница в величинах этих напряжений, определяемых по уточненным теориям « $K=3$ » и « $K=2$ », составляет около 10%;

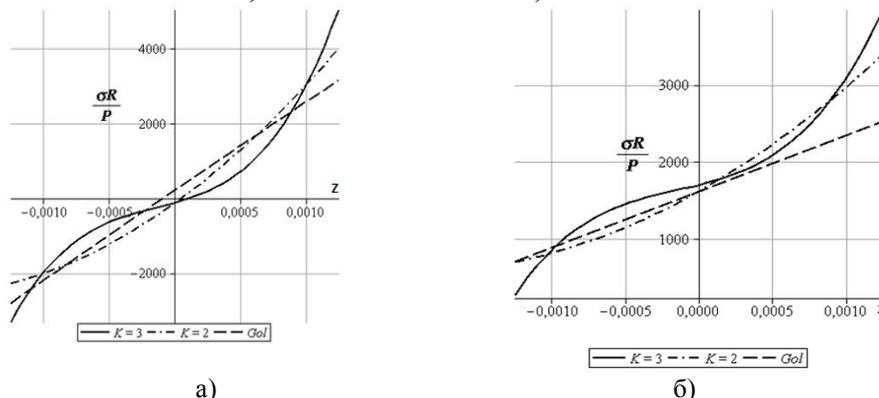


Рис. 2. Изменение тангенциальных нормальных напряжений по толщине оболочки в точке приложения силы: а)  $\sigma_{11}$ ; б)  $\sigma_{22}$

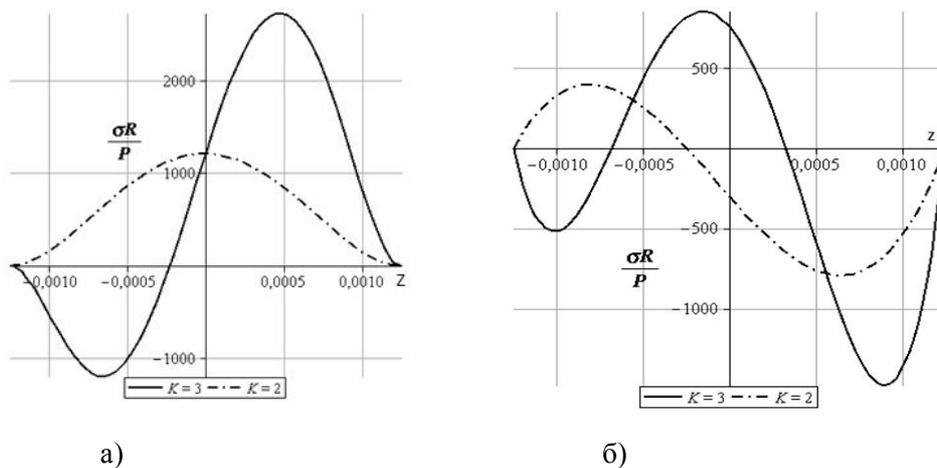


Рис. 3. Изменение поперечных напряжений по толщине оболочки в точке приложения силы: а)  $\sigma_{33}$ , б)  $\sigma_{13}$

Максимальные поперечные нормальные напряжения  $\sigma_{33}$ , величины которых составляют 55% от  $\sigma_{11}$ , по уточненным теориям « $K=3$ » и « $K=2$ » отличаются друг от друга в два раза, а также характером распределения по толщине.

### Выводы

На основании полученных результатов, можно сделать вывод, что, по сравнению с классической теорией, уточненная теория оболочек учитывает дополнительные краевые эффекты типа «погранслоя», которые вносят существенный вклад в общее НДС оболочки вблизи зон искажения напряженного состояния, например, вблизи жестко заземленного края, зоны действия локальной нагрузки, в окрестности скачкообразного изменения жесткостных характеристик и др.

### Литература

1. Фирсанов В.В. Погранслой и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины// Вестник МАИ. 2010.Т.17. №5.С.212-218.
2. V.V. Firсанov and Ch.N. Doan. Energy-Consistent theory of cylindrical shells. //Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2011, Vol.40, No.6, pp.543-548.
3. Firсанov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory// Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal/ Begell House, INC.,2015. Vol.6, Issue 2.Pp 135-166.

4. Фирсанов Вал.В. Напряженное состояние типа «пограничный слой» - краевое кручение прямоугольной пластинки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. №6. С.44-51.

5. Фирсанов Вал.В., Доан Ч.Н., Хиеу Л.Ч. Уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник МАИ. 2013. Т.20. № 4. С.198-211.

6. Фирсанов Вал.В., Доан Ч.Н. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек произвольной геометрии// Вестник МАИ. 2011. Т.18. №1. С.194-207.

#### References

1. Firsanov V.V. (2010). Boundary layer and its influence on strength of cylindrical shell with a variable thickness, *Vestnik MAI*, Vol.17, №5, 212-218.

2. V.V. Firsanov and T.N. Doan (2011). Energy-Consistent theory of cylindrical shells, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Vol. 40, No.6, pp.543-548.

3. Firsanov V.V., Doan T.N. (2015). Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a neoclassical theory, *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal/ Begell House, INC.*, Vol.6, Issue 2, p 135-166.

4. Firsanov V.V. (2016). Stress state called as “boundary layer” is boundary torsion of the rectangular plate, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, №6, pp. 44-51.

5. Firsanov Val.V., Doan T.N., Hieu L.T.(2013). The update theory calculation of the strain stress state of cylindrical shells with variable thickness, *Vestnik MAI*, Vol.20, №4, pp.198-211.

6. Firsanov Val.V., Doan T.N. (2011). Energy concerted the approach to research of elastic arbitrary shells, *Vestnik MAI*, Vol.18, №1, pp. 194-207.

### ANALYSIS OF THE “BOUNDARY LAYER“ STRESS-STRAIN STATE IN FRAMES OF THE NONCLASSICAL CYLINDRICAL SHELL THEORY

Val.V. Firsanov

*Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

Two variants of a refined theory of determining the stress-strain state in the boundary zone of a cylindrical shells are represented. As an example the calculations of a shell with rigidly restrained on two edges and under the influence of local distributed and concentrated loadings is considered. The Comparison of calculation results of the stress-strain state shell obtained in this work and by the classical theory is given.

KEY WORDS: closed cylindrical shell, two variants of refined theory, approximation by polinomials, virtual principle of Lagrange, edge conditions, Laplace transform, local loading, the characteristic equation, “boundary layer”, normal transverse stress.



## Расчет машиностроительных конструкций

### ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЗАГОТОВКИ НА КАЧЕСТВО ШТАМПОВАННЫХ ИЗДЕЛИЙ

Ю.А. МОРОЗОВ канд. техн. наук, доц.\*

Е.Ю. ВЕРХОВ канд. техн. наук, доц.

Е.В. КРУТИНА канд. техн. наук, доц.

*Московский политехнический университет*

111250, Москва, Б. Семеновская, 38, т. 8(916)877-66-96\*; [akafest@mail.ru](mailto:akafest@mail.ru)\*

Исследуется возможность получения штампованных изделий из заготовок прямоугольной формы с обрезанными и необрезанными углами. Приводятся экспериментальные измерения упругих искажений боковых стенок от идеального контура детали. Даются рекомендации по проектированию штамповой оснастки и повышению качества вытягиваемых изделий коробчатых форм.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: листовая вытяжка; координатная сетка; искажение формы; потеря устойчивости.

Главным критерием качественного формообразования является вытяжка без разрушения, т.е., обеспечение такого напряженного состояния, при котором в стенках вытягиваемой заготовки не возникает растягивающих напряжений, приводящих к разрыву металла [1-3].

В справочной литературе имеется большое количество рекомендаций по определению оптимальной формы заготовок, обеспечивающих качественное получение деталей коробчатой формы [4]. Однако, существует технологический дефект как волнистость стенок детали, с которым дело обстоит гораздо сложнее, т.к. порой ни при каких формах и размерах заготовки с ним не удастся справиться.

Исследование подобной задачи производилось на примере детали «Крышка», входящей в комплектацию холодильных установок промышленного типа, вытягиваемой из заготовки стали 08кп размерами  $0,7 \times 475 \times 390$  мм.

Натяжение заготовки при вытяжке осуществляется перетяжными порогами, установленными по одному вдоль длинных сторон полости матрицы. Причем перед вытяжкой в соответствии с общепринятыми рекомендациями в заготовках обрезают углы (рис. 1, а) [5].



Рис. 1. Деталь «Крышка», полученная из заготовки с обрезанными (а) и необрезанными (б) углами

Возникшие при этом на боковых стенках готового изделия упругие волнообразные прогибы – так называемые «хлопуны», испортили его внешний вид и эксплуатационные характеристики.

В эксперименте по исследованию возможности экономии металла для вытяжки той же детали использовали заготовку меньших размеров  $0,7 \times 430 \times 360$  мм, причем перед вытяжкой углы заготовки не обрезали, и получили такую же качественную деталь, но вид стенок был значительно лучше (рис. 1, б).

Для объяснения полученных результатов вытягивали по три детали с обрезанными и необрезанными углами из заготовок одинаковых габаритных размеров  $0,7 \times 475 \times 390$  мм. На одной длинной и одной короткой боковых стенок наносили координатную сетку и, используя вертикальный магнитный стол, замеряли упругие искажения – волнистость.

Полученные результаты указывают на принципиальное различие качественных показателей вытяжки:

- использование заготовок с обрезанными углами приводит к волнообразному отклонению длинных стенок до 1,5 мм от идеального контура детали, что делает заметной искажение формы и портит внешний вид изделий (рис. 2);
- использование заготовок с необрезанными углами увеличивает абсолютное искажение до 2,1 мм, но позволяет получить плавный (без волн) прогиб.

Таким образом, несмотря на то, что меньшая волнообразность наблюдается на заготовках с обрезанными углами, лучший внешний вид изделий обеспечивается заготовками с необрезанными углами.

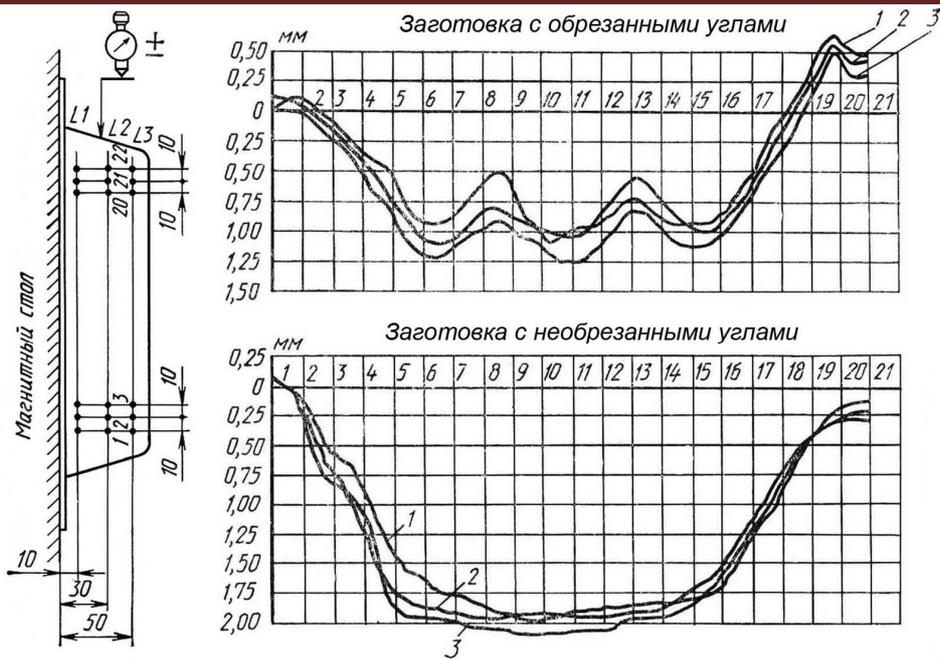


Рис. 2. Величина волнистости вдоль линии L2 на длинной стенке изделия (цифрами 1, 2, 3 отмечены результаты замеров для трех разных изделий)

Дополнительное натяжение заготовки за счет углов фланца практически не влияет на качество поверхности коротких стенок изделия (рис. 3).

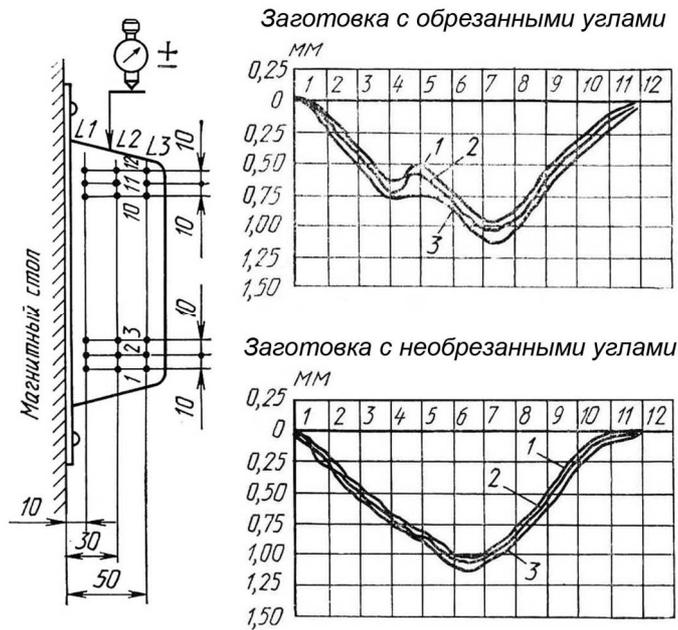


Рис. 3. Величина волнистости вдоль линии L2 на короткой стенке изделия

В результате, отклонение поверхности детали от своей плоскости с образованием волнистости стенок является следствием неэффективно работающего прижима, что необходимо учитывать при вытяжке.

Для повышения качества стенок коробчатых деталей полученных вытяжкой, предлагается новое решение: при обычной технологии вытяжки, листовая прямоугольная в плане заготовка 2 втягивается в матрицу 1 (рис. 4). При этом в

любой точке фланца действуют сжимающие тангенциальные  $\sigma_\theta$  и растягивающие радиальные  $\sigma_r$  напряжения. Перетяжные пороги 3 осуществляют торможение фланца заготовки в направлении его радиального перемещения  $\rho$ , в результате чего величина радиальных растягивающих напряжений увеличивается, тем самым уменьшается вероятность гофрообразования [6-8].

Использование дополнительных тормозных ребер 4 при перемещении фланца в полость матрицы, приведет к появлению сил  $P$ , создающих дифференцированное растяжение металла на отдельных участках заготовки в тангенциальном направлении  $\theta$  [9].

За счет дополнительного растяжения фланца в зонах I величина сжимающих тангенциальных напряжений уменьшается, вследствие чего предотвращаются потери устойчивости и образование гофр в этих зонах.

**Выводы:** Создание дополнительного сопротивления перемещению металла в углах плоской заготовки обеспечит повышение качества вытягиваемых коробчатых деталей, как с фланцем, так и без фланца и экономию металла за счет значительного сокращения массы технологического припуска.

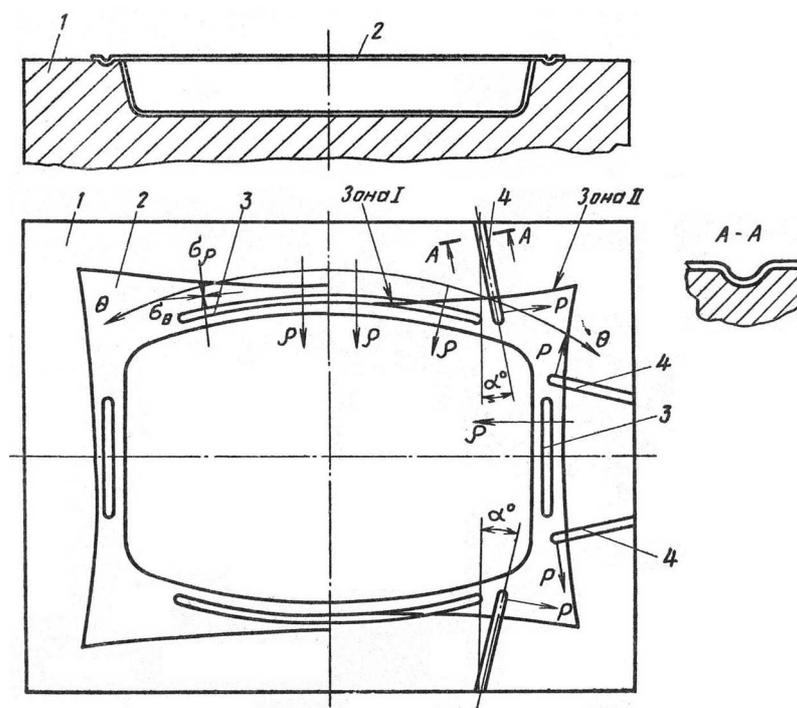


Рис. 4. Матрица для листовой вытяжки

#### Л и т е р а т у р а

1. Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю., Фролов А.А. Напряженное состояние материала в условиях неравномерных деформаций листовой штамповки // Современные автомобильные материалы и технологии (САМИТ-2015): сборник статей VII Международной научно-технической конференции 27 ноября 2015 г. Курск: ЮЗГУ, 2015. С. 133-142.
2. Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А. Анализ и разработка технологии изготовления гнутых толстолистовых деталей // Вестник московского государственного открытого университета. Москва. Техника и Технология. М.: МГОУ. №4 (6), 2011. С. 14-19.
3. I.G. Roberov, L.S. Kokhan, Yu.A. Morozov and A.V. Borisov. Model of wall thinning in shaping relief surfaces. Steel in Translation, 2009, Volume 39, Number 5, Pages 379-381.
4. Романовский В.П. Справочник по холодной штамповке. Л.: Машиностроение, 1979. 520 с.

5. *Верхов Е.Ю., Тетерин Г.П., Россинский Ю.В.* Влияние формы заготовки на качество стенок коробчатых деталей / Кузнечно-штамповочное производство: научно-технический журнал. М.: Машиностроение, 1990. №6. С. 13, 14.

6. *Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю., Крутина Е.В.* Анализ влияния профилей тормозных участков вытяжных штампов на возможность получения качественных изделий сложной формы из листовых металлов // Заготовительные производства в машиностроении. М.: Машиностроение, 2016. №1. С. 19-24.

7. *J.H. Wiebenga, E.H. Atzema, Y.G. An, H. Vegter, A.H. van den Boogaard.* Effect of material scatter on the plastic behavior and stretchability in sheet metal forming. *Journal of Materials Processing Technology*, Volume 214, Issue 2, February 2014, Pages 238-252.

8. *Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А., Фролов А.А.* Прижим вытяжного штампа для качественного получения сложных листовых деталей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2015. - Вып. 2. - С. 11-17.

9. А.с. 1542664 СССР, МПК В 21 D 22/20. Способ изготовления коробчатых деталей [Текст] / *Е.Ю. Верхов, Г.П. Тетерин, Ю.В. Россинский, А.И. Богатырев, Ю.Н. Гомозов, Г.В. Зайцев и С.А. Кириллов.* (СССР) 4368322/25-27; заявлено 28.10.87; опубл. 15.02.90, Бюл. №6.

#### References

1. *Verkhov E.Yu., Morozov Yu.A., Frolov A.A.* (2015). Napryazhennoe sostoyanie materiala v usloviyakh neravnomernykh deformatsiy listovoy shtampovki [The stress state of the material in a non-uniform deformation stamping]. *Sovremennye avtomobil'nye materialy i tekhnologii (SAMIT-2015): sbornik statey VII Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii 27 noyabrya 2015.* Kursk: YuZGU, pp. 133-142.

2. *Verkhov E.Yu., Morozov Yu.A.* (2011). Analiz i razrabotka tekhnologii izgotovleniya gnutykh tolstolistovykh detaley [Analysis and development of manufacturing technology for plate bent parts]. *Vestnik moskovskogo gosudarstvennogo otkrytogo universiteta. Moskva. Tekhnika i Tekhnologiya.* Moscow: MGOU, no. 4 (6), pp. 14-19.

3. *I.G. Roberov, L.S. Kokhan, Yu.A. Morozov and A.V. Borisov* (2009). Model of wall thinning in shaping relief surfaces. *Steel in Translation*, Volume 39, Number 5, Pages 379-381.

4. *Romanovskiy V.P.* (1979). *Spravochnik po kholodnoy shtampovke* [Handbook of cold stamping]. Leningrad: Mashinostroenie. 520 p.

5. *Verkhov E.Yu., Teterin G.P., Rossinskiy Yu.V.* (1990) Vliyanie formy zagotovki na kachestvo stенок korobchatykh detaley [Effect of the workpiece on the quality of the wall box parts]. *Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo: Nauchno-tekhnicheskii zhurnal.* Moscow: Mashinostroenie, no. 6, pp. 13, 14.

6. *Morozov Yu.A., Verkhov E.Yu., Krutina E.V.* (2016). Analiz vliyaniya profiley tormoznykh uchastkov vytyazhnykh shtampov na vozmozhnost' polucheniya kachestvennykh izdeliy slozhnoy formy iz listovykh metallov [Receiving qualitative products at the sheet extract with the clip]. *Zagotovitel'nye proizvodstva v mashinostroyeni.* Moscow: Mashinostroenie, no. 1, pp. 19-24.

7. *J.H. Wiebenga, E.H. Atzema, Y.G. An, H. Vegter, A.H. van den Boogaard* (2014). Effect of material scatter on the plastic behavior and stretchability in sheet metal forming. *Journal of Materials Processing Technology*, Volume 214, Issue 2, Pages 238-252.

8. *Verkhov E.Yu., Morozov Yu.A., Frolov A.A.* (2015). Prizhim vytyazhnogo shtampa dlya kachestvennogo polucheniya slozhnykh listovykh detaley [Clamp drawing die for high-quality produce complex sheet metal parts]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy:* no. 2, pp. 11-17.

9. *Verkhov E.Yu., Teterin G.P., Rossinskiy Yu.V., Bogatyrev A.I., Gomozev Yu.N., Zaytsev G.V. and Kirillov S.A.* (1990). А.с. 1542664 USSR (Patent of the USSR), МПК В 21 D 22/20. Sposob izgotovleniya korobchatykh detaley.

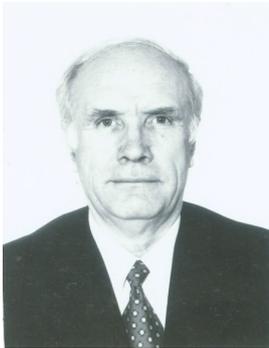
#### EFFECT OF THE FORM OF BLANK ON QUALITY OF INDICATOR PRESSWORK

Yu.A. Morozov, E.Yu. Verkhov, E.V. Krutina  
Moscow Polytechnic University, Moscow

The possibility of obtaining forged products from billets of rectangular shape with cut and uncut edges. Experimental measurements of elastic distortion of the side walls from the ideal contour details. Recommendations for the design of die tooling and improve the quality of extractable product box shapes.

KEY WORDS: sheet extract; coordinate grid; distortion of a form; stability loss.

## ПАМЯТИ УЧЕНОГО



19 марта 2017 года после тяжелой болезни скончался выдающийся ученый в области строительной механики, доктор технических наук, член редакционного совета журнала «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений», профессор **Вадим Дмитриевич Потапов**.

Вадим Дмитриевич родился в поселке Вязники Владимирской области 4 февраля 1940 года в многодетной семье служащего. В 1957 году по окончании школы с серебряной медалью он поступил на факультет «Мосты и тоннели» МИИТа. Получает приглашение от профессора Смирнова А.Ф. на работу на кафедре «Строительная механика». С 1963 года Потапов В.Д. ассистент кафедры «Строительная механика». Ведет полную учебную нагрузку и одновременно много работает в выбранной им научной области. В 1966 г. поступает в аспирантуру и через год защищает кандидатскую диссертацию на тему «Численные методы расчета стержневых систем, деформирующихся во времени». Окончил вечернее отделение Мехмата МГУ.

В 1974 в 34-летнем возрасте, защищает докторскую диссертацию по теме «Стохастические задачи устойчивости элементов конструкций, деформирующихся во времени. Блестящие научные достижения не отвлекали Потапова В.Д. от повседневной педагогической работы. Он читал лекции и проводил занятия по всем дисциплинам кафедры. Его лекции отличаются насыщенностью, глубиной, четкостью изложения и математической строгостью в доказательствах.

В 1998 г. Потапов В.Д. избирается заведующим кафедрой «Строительной механики». За время руководства кафедрой было написано два учебника по строительной механике, разработаны методики и формы преподавания нескольких дисциплин для студентов старших курсов, связанных с механикой твердого деформированного тела.

Он является признанным специалистом практически во всех областях строительной механики: статике и динамике сооружений, теории упругости и пластичности, теории устойчивости, теории ползучести и других. Оригинальная разработка проблемы устойчивости конструкций в условиях ползучести, основанная на общей теории устойчивости динамических систем, явилась существенным и продуктивным вкладом в решение этой проблемы. Особо следует отметить цикл работ, посвященных анализу устойчивости неоднородно стареющих и растущих вязкоупругих тел. Широко известна фундаментальная разработка методов оценки надежности, долговечности и устойчивости вязкоупругих систем, имеющих случайные несовершенства и находящихся под действием случайных нагрузок.

Работа Потапова В.Д. получила международное признание, что подтверждается многочисленными публикациями за рубежом и участием в представительных научных симпозиумах. Он много раз выступал с лекциями, и докладами на различных международных конгрессах, конференциях, симпозиумах по математике и механике в разных странах Европы и США, причем многие лекции и доклады были прочитаны им на английском или немецком языках.

Результаты исследований опубликованы в 274 работах, в том числе в двух монографиях и учебниках по сопротивлению материалов, теории упругости и пластичности и строительной механике. Более 90 научных работ опубликованы на английском языке.

Им подготовлено 3 доктора и 14 кандидатов технических наук.

Научная и педагогическая деятельность профессора Потапова В. Д. отмечена наградами: «Заслуженный работник транспорта Российской Федерации», «Почетному железнодорожнику», «Почетному работнику высшего профессионального образования Российской Федерации», «Почетному транспортному строителю».

Профессорско-преподавательский состав кафедры  
«Строительной механики» МГУПС (МИИТ)