

## Сведения о журнале

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-19706 от 13 апреля 2005 г. Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода) и 80344 (год).

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, сформированный Минобрнауки России, для публикаций основных научных результатов диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук. Перечень вступил в силу 1 декабря 2015 г.

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АНДРЕЕВ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (МГСУ, Москва),  
БАЖЕНОВ В.А., акад. Национальной Академии педагогических наук Украины, д.т.н., профессор (КНУСА, Киев, Украина),  
БОНДАРЕНКО В.М., акад. РААСН, д.т.н., профессор (НИИСФ РААСН, Москва),  
ВАНИН В.В., д.т.н., профессор (Киевский политехнический университет, Украина),  
ИВАНОВ С.П., д.т.н., профессор (ПГТУ – ВОЛГАТЕХ, Йошкар-Ола),  
КАРПЕНКО Н.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (НИИСФ РААСН, Москва),  
КОЛЧУНОВ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ЮЗГУ, Курск),  
KRASIC SONJA, PhD (University of Nis, Nis, Serbia),  
КРИВОШАПКО С.Н., д.т.н., профессор (РУДН, Москва),  
ЛЯХОВИЧ Л.С., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ТГАСА, Томск),  
ГРУДЕВ И.Д., д.т.н., профессор, почетный член РААСН (ЦНИИПСК, Москва),  
ПОТАПОВ В.Д., д.т.н., профессор (МГУПС РФ (МИИТ), Москва),  
САНЖАРОВСКИЙ Р.С., д.т.н., проф. (Евразийский Нац. У-т им. Гумилева, Казахстан),  
ТРАВУШ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ЭНПИ, Москва),  
ЯКУПОВ Н.М., чл- корр. РИА, д.т.н., профессор (ИММ КазНЦ РАН, Казань)

### РЕДАКЦИЯ:

д.т.н., профессор С.Н. Кривошапка – *главный редактор*,  
д.т.н., профессор В.Н. Иванов – *зам. главного редактора*,  
д.т.н. С.Е. Лисичкин; д.т.н., профессор Е.М. Зверьяев; д.т.н., профессор В.И. Обозов;  
д.т.н., профессор В.П. Агапов; И.А. Мамиева – *исполнительный редактор*;  
доцент В.А. Романова – *редактор русскоязычного Интернет-сайта журнала*,  
Е.А. Гринько – *редактор англоязычного Интернет-сайта журнала*.

Русскоязычный интернет-сайт журнала: <http://stmj.rudn.ru>

Англоязычный интернет-сайт журнала <http://smjournal.narod.ru>

Технический секретарь *Е.М. Тупилова*

Компьютерная верстка *Т.И. Карелина*

**Почтовый адрес журнала:** 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН,  
каф. Прочности материалов и конструкций

Тел.: (495) 955-09-78; (495) 955-08-81; Факс: (495) 955-08-81; (495) 952-08-29

E.mail: [sn\\_krivoshapko@mail.ru](mailto:sn_krivoshapko@mail.ru) или [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Тираж 300 экз.

---

Учредитель: Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН

Типография ИПК РУДН, 117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений», 2016

© В.В. Василяка, фото на 1-ой странице обложки (Северный Кавказ, канатная дорога, 2016)

# Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6 тел.: (495) 955-09-78; FAX: (495)9520829

## Содержание

№ 6, 2016 год

### Геометрические исследования срединных поверхностей

#### тонких оболочек

*Иванов В.Н., Шмелева А.А.* Геометрия и формообразование тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей..... 3

*Салех М.С.* Применение современных методов автоматизированного проектирования для формообразования и расчета сооружений прогрессивной архитектуры..... 8

### Расчет и проектирование строительных конструкций

*Раззаков С.Ж.* Исследование напряженно-деформированного состояния одноэтажной постройки с внутренней перегородкой при статической оттягивающей нагрузке по верхнему поясу строения..... 14

*Микерего Эммануэль, Маркович А.С., Басов Ю.К.* Оценка влияния кирпичных стен из местных материалов заполнения на работу стержневых элементов монолитных каркасных зданий Республики Бурунди..... 19

*Бондаренко В.М.* Метод перемещений оценки потерь энергии при знакопеременном деформировании строительных конструкций..... 26

### Расчеты на устойчивость

*Матье Жиль-улбе, Фархан И.Т., Теколо Д.* Расчет на устойчивость функционально-градиентных эпитрохоидальных оболочек..... 30

### Динамика конструкций и сооружений

*Рзаев Натиг С.* Свободное колебание неоднородного разномодульного стержня, лежащего на двухконстантном основании..... 38

### Прочность летательных аппаратов

*Фирсанов Вал.В.* Напряженное состояние типа «пограничный слой» - краевое кручение прямоугольной пластинки..... 44

### Расчет машиностроительных конструкций

*Фролов А.А., Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А., Орлов М.А., Михайлов М.С.* Моделирование напряженно-деформированного состояния консольного кабеледержателя с использованием метода конечных элементов..... 52

### Экспериментальные исследования

*Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Фролов К.Е.* Результаты экспериментальных исследований железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных углеродными лентами, при действии изгибающего момента... 58

### Механика жидкости

*Bacharou Taofic, Houinou Gossou, Gbaguidi Gérard A., Ahouannou Clément, Kanho Ezéchias, Aza-Gnandji Ruben.* Modeling the hydraulic calculation of the controlling reserves in drinking water supply systems..... 63

## Расчет составных конструкций

<i>Еленицкий Э.Я.</i> Краевая задача для гибких составных конструкций ветвящегося типа.....	73
---	----

---

### *Contents, No 6, 2016*

#### *Geometrical investigations of middle surfaces of thin shells*

<i>Ivanov V.N., Shmeleva A.A.</i> Geometry and formation of the thin-walled space shell structures on the base of normal cyclic surfaces.....	3
---	---

<i>Saleh M.S.</i> Application of modern techniques aided design for forming and calculation of erections of progressive architecture.....	8
---	---

#### *Analysis and design of building structures*

<i>Razzakov S.J.</i> Research of stress-strain state of single-storey buildings with internal partitions under static pulling load of the upper belt of a structure.....	14
--	----

<i>Mikerego Emmanuel, Markovich A.S., Basov U.K.</i> Influence of brick walls from local-materials on the work of linear elements in monolithic frame buildings in Republic of Burundi.....	19
---	----

<i>Bondarenko V.M.</i> A method of displacements for evaluation of energy losses under construction's deformation with alternating signs.....	26
---	----

#### *Buckling analysis*

<i>Gil-oulb� Mathieu, Ismael Taha Farhan, Dau Tyekolo.</i> Buckling analysis of functionally graded epitrochoidal shells structures.....	30
--	----

#### *Dynamics of structures and buildings*

<i>Rzayev Natig S.</i> Oscillation of a homogeneous different modulus bar lying on two constant foundation.....	38
---	----

#### *Strength of flying apparatus*

<i>Firsanov Val.V.</i> Stress state called as "boundary layer" is boundary torsion of the rectangular plate.....	44
--	----

#### *Analysis and design of machine-building structures*

<i>Frolov A.A., Verkhov E.Yu., Morozov Yu.A., Orlov M.A., Mikhaylov M.S.</i> Simulation of stress-strain state of console cable holder by finite elements method.....	52
---	----

#### *Experimental researches*

<i>Rubin O.D., Lisichkin S.E., Frolov K.E.</i> The results of experimental studies of concrete structures of hydraulic erections reinforced with carbon tape under the action of bending moments.....	58
---	----

#### *Mechanics of liquid*

<i>Bacharou Taofic, Houinou Gossou, Gbaguidi Gérard A., Ahouannou Clément, Kanho Ezéchias, Aza-Gnandji Ruben.</i> Modeling the hydraulic calculation of the controlling reserves in drinking water supply systems.....	63
--	----

#### *Analysis of complex structures*

<i>Elenitskiy E.Ya.</i> Boundary value problem for branching type flexible compound structures.....	73
---	----

Геометрические исследования срединных  
поверхностей тонких оболочек

**ГЕОМЕТРИЯ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ  
НОРМАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*  
А.А. ШМЕЛЕВА, *аспирант*  
Российский университет дружбы народов  
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
i.v.ivn@mail.ru

*Современное градостроительство требует создания новых форм конструкций при строительстве общественных зданий, выставочных павильонов, спортивных и промышленных сооружений. В работе рассматривается возможность создания новых форм пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей. Наряду с линейчатými оболочками, оболочки в форме циклических поверхностей на основе окружностей – наиболее удобная форма для возведения на строительной площадке или формовке деталей для последующей сборки. В то же время нормальные циклические поверхности позволяют создавать разнообразные формы пространственных конструкций в комбинации с цилиндрическими и другими классами поверхностей.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** нормальные циклические поверхности, направляющая кривая, нормальная плоскость кривой, криволинейная ортогональная система координат, формообразование циклических поверхностей, комбинированные тонкостенные конструкции.

Нормальные циклические поверхности образуются движением окружности постоянного или переменного радиуса в нормальной плоскости направляющей кривой - линии центров образующих окружностей [1-3].

Векторное уравнение поверхности получим в виде

$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{r}(u) + R(u)\mathbf{e}(u, \omega), \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}(u, v)$  - радиус вектор поверхности;  $\mathbf{r}(u)$  - радиус вектор линии центров образующих окружностей;  $R(u)$  - радиус образующих окружностей;  $\mathbf{e}(u, \omega) = v \cos \omega + \beta \sin \omega$  - уравнение окружности единичного радиуса в нормальной плоскости линии центров;  $v, \beta$  - векторы нормали и бинормали линии центров;  $\omega = v + \theta(u)$ ;  $v$  - полярный угол в плоскости образующей окружности;  $\theta(u)$  определяет положение начала отсчета полярного угла  $v$  образующей окружности относительно нормали направляющей кривой;  $k, \chi$  - кривизна и кручение линии центров;  $s' = |\mathbf{r}'|$ .

Функция  $\theta(u)$  позволяет выбрать наиболее удобную координатную систему, в частности, ортогональную поверхностную систему координат.

Коэффициенты квадратичных форм поверхности определяются по формулам [2-3]:

$$E = R'^2 + s'^2(1 - Rk \cos \omega)^2; \quad G = R^2; \quad F = R(\mathbf{e}'_u \mathbf{e}'_v);$$

$$L = \frac{1}{\sigma} \left\{ R' \left[ s'' - \left( 2ks' \cdot R' + (ks')' R \right) \cos \omega \right] - R'k \chi s'^2 R \sin \omega - s'(1 - Rk \cos \omega) \left[ s'^2(1 - Rk \cos \omega)k \cos \omega + R'' \right] \right\};$$



$$M = \frac{RR'ks'\sin\omega}{\sigma}; \quad N = \frac{Rs'}{\sigma}(1 - Rk\cos\omega);$$

$$\sigma = \sqrt{R'^2 + s'^2(1 - Rk\cos\omega)^2}. \quad (2)$$

Положив коэффициент первой квадратичной формы  $F = 0$ , получаем ортогональную поверхностную систему координат [2-3]:

$$F = 0 \rightarrow \theta(u) = -\int \chi s' du + \theta_0. \quad (3)$$

Таким образом, чтобы при пространственной линии центров образующих окружностей поверхностная система координат была ортогональной, начальный вектор (вектор отсчета полярной координаты  $v$  образующих окружностей) должен поворачиваться относительно вектора нормали линии центров на угол  $\theta(u)$ . Для плоской линии центров  $\theta_0 = \text{const}$ .

При переходе к ортогональной поверхностной системе координат коэффициент второй квадратичной формы  $M \neq 0$ , следовательно, в общем случае, нормальные циклические поверхности не являются каналовыми – образующие окружности не линии главных кривизн. Как показано в работах [2-4], только два подкласса нормальных циклических поверхностей относятся к классу каналовых: поверхности вращения - линия центров прямая линия, трубчатые поверхности - нормальные циклические поверхности с постоянным радиусом образующих окружностей [5]. В статье [6] было рассмотрено формообразование тонкостенных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей с линией центров - окружностью. В работе приведено более 40 рисунков разнообразных форм поверхностей, что показывает широкие возможности создания новых форм пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей. Ниже рассмотрены примеры образования тонкостенных конструкций с использованием различных линий центров образующих окружностей.

На рис. 1 приведены формы нормальных циклических поверхностей с различными плоскими линиями центров образующих окружностей, радиус которых изменяется по линейному закону. Линии центров:

- а) парабола; б) гипербола; в) эллипс; г) эвольвента круга; д) синусоида; е) циклоида; ж) кардиоида; з) спираль Архимеда.

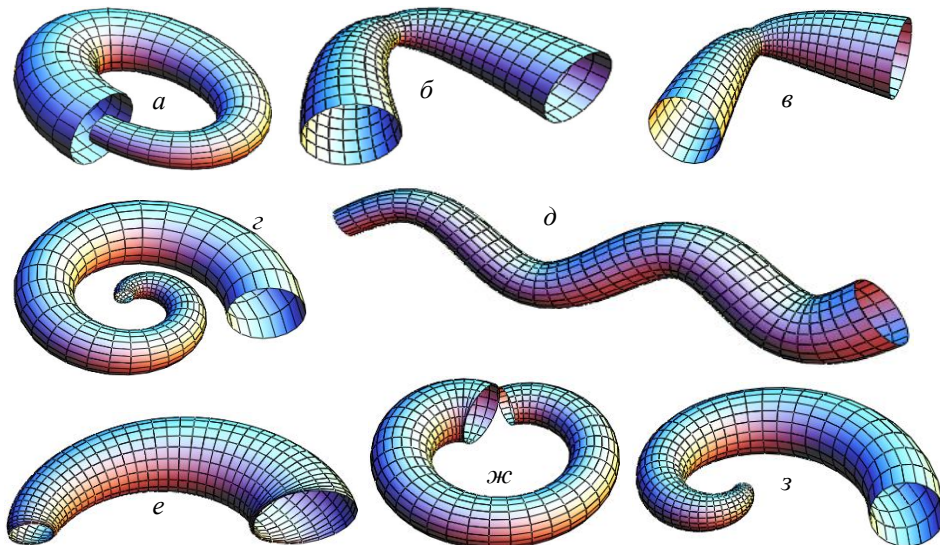


Рис. 1. Нормальные циклические поверхности с линейно изменяющимся радиусом

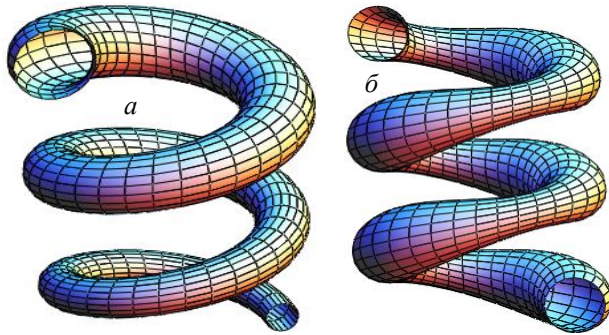


Рис. 2. Нормальные циклические поверхности с винтовой кривой линии центров

щей кривой:  $x = a \cos u$ ;  $y = b \sin u$  и радиусом образующей окружности, меняющимся по косинусоидальному закону -  $R = c + d \cos pu$ , параметр  $p$  определяет число амплитуд косинуса при полном обходе эллипса ( $a = 3$ ;  $b = 2$ ;  $c = 0,75$ ;  $d = 0,25$ ;  $0 \leq v \leq \pi$ ).

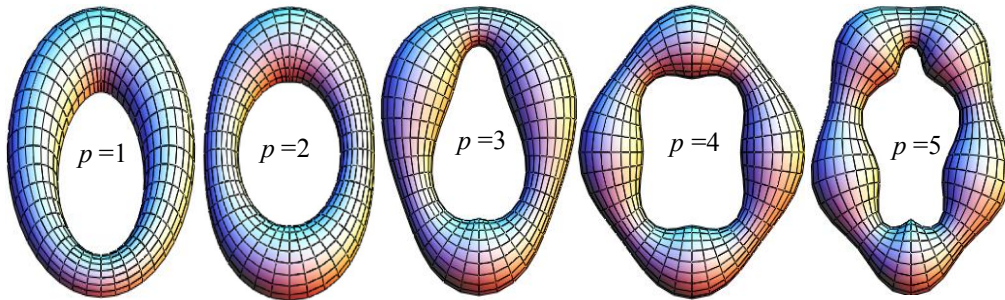


Рис. 3. Формы эллипсо-косинусоидальных нормальных циклических поверхностей

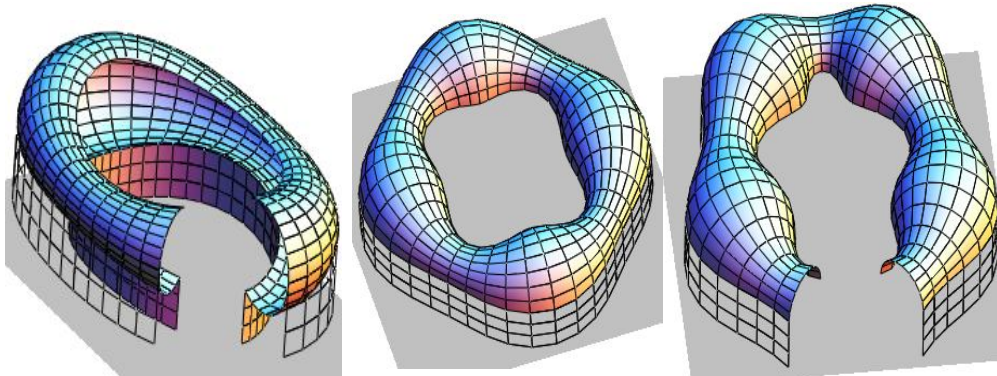


Рис. 4. Комбинированные пространственные конструкции с эллипсо-косинусоидальными поверхностями

На рис.4 и рис. 5 представлены комбинированные конструкции с использованием нормальных эллипсо-косинусоидальных поверхностей с цилиндрическими опорами в форме координатных линий поверхности и конструкции из отсеков эллипсо-косинусоидальных поверхностей.

На рис. 6 представлены нормальные циклические поверхности с линией центров – эвольвентой круга и линейной функцией изменения радиуса образующей окружности:  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ;  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ;  $R = c + du$ . Рис. 6,а – торговый центр; рис. 6,б – лабиринт; рис. 6,в – поверхность «спящий удав».



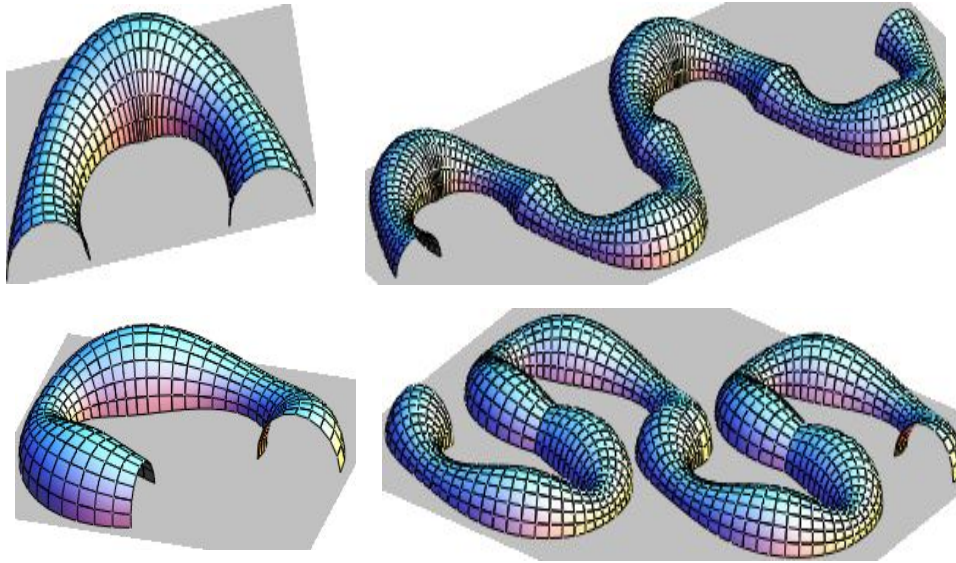


Рис. 5. Комбинированные пространственные конструкции из отсеков эллипсо-косинусоидальных поверхностей

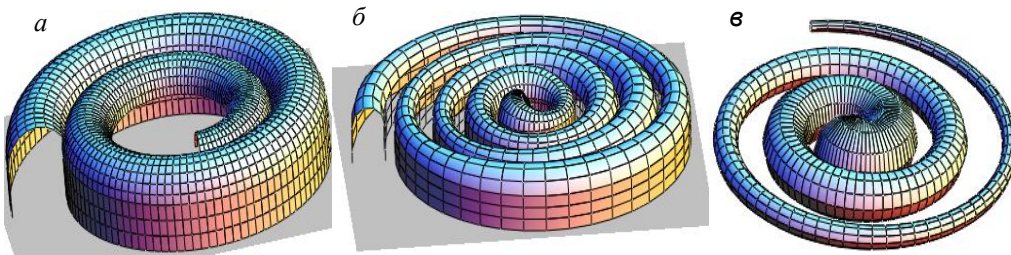


Рис. 6. Эвольвентные нормальные циклические конструкции

На рис. 5 приведены конструкции с направляющей кардиоидой:

$$x = a(2\cos u - \cos 2u); \quad y = a(2\sin u - \sin 2u), \quad 0,3\pi \leq u \leq 1,7\pi.$$

На рис 7, а, б радиус образующей окружности изменяется по линейному закону -  $R = c + du$ . При радиусе образующей окружности, превышающем радиус кривизны направляющей кривой, происходит закручивание внутренней части циклической поверхности и возможно пресечение отсеков поверхности (рис. 7,б). На рис. 7,в функция радиуса образующей окружности косинусоида -  $R = c + d \cos pu$ .

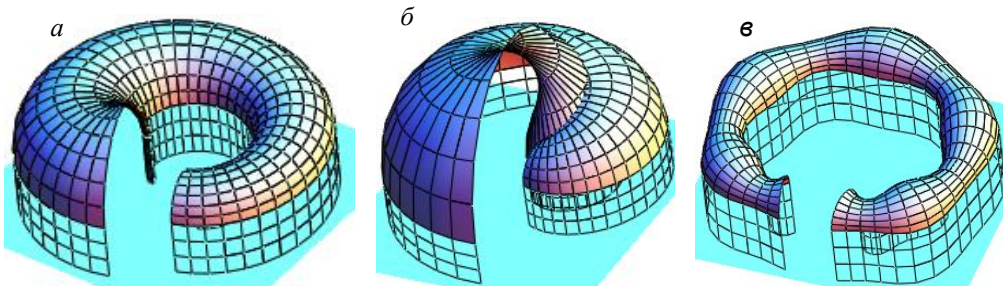


Рис. 7. Кардиоидные нормальные циклические конструкции

На рис. 8 приведены формы тонкостенных пространственных конструкций в форме нормальных циклических поверхностей с направляющей циклоидой:

$$x = a(u - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

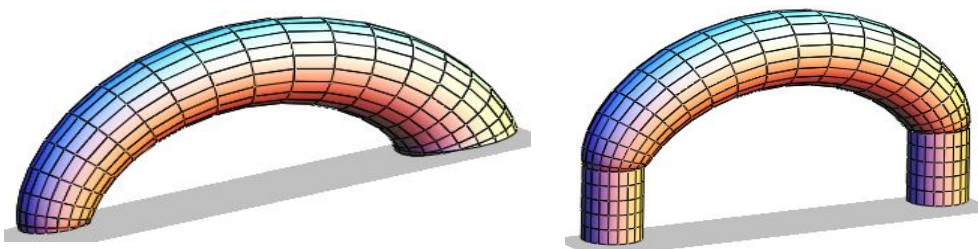


Рис. 8. Конструкции в форме нормальных поверхностей с направляющей циклоидой

На рис. 9 показаны комбинированные конструкции из отсеков нормальной циклической поверхности с линией центров – цепной линией  $y = ach(x/a)$  и с радиусом образующей окружности, изменяющимся по линейному закону:

$$R = c + d|u|; -10 \leq u \leq 10; a = 5.$$

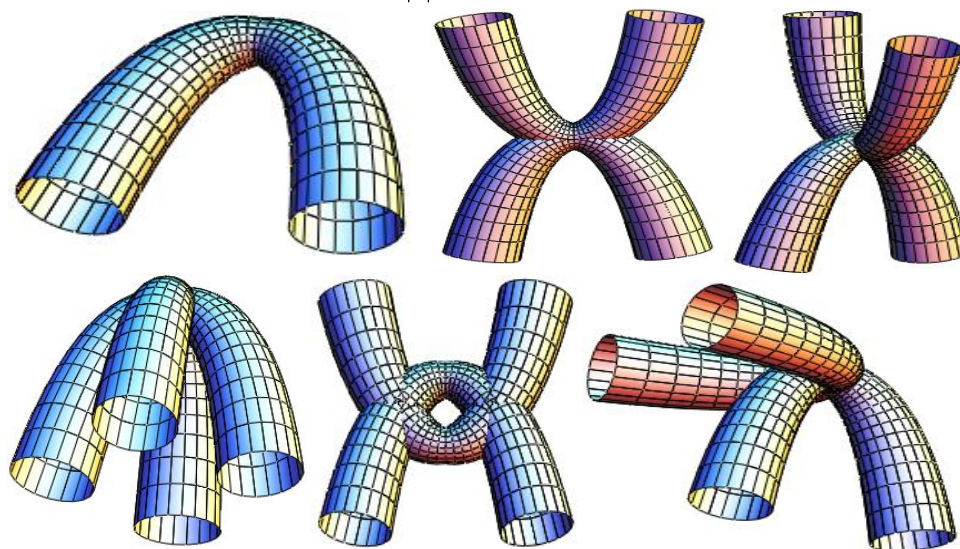


Рис. 9. Комбинированные конструкции из отсеков нормальных циклических поверхностей с линией центров – цепной линией

Приведенные примеры показывают большие возможности создания тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей.

#### Л и т е р а т у р а

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. - 752 p.
2. Иванов В.Н., Романова В.А., Конструкционные формы тонкостенных конструкций: Монография. - М.: Изд-во АСВ, 2016. - 412 с.
3. Krivoshapko S.N., Christian A. Bock Hyeng. Geometrical research of rare types of cyclic surfaces// International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. – 2012. – Vol. 12. – Iss. 3. – P. 346-359.
4. Иванов В.Н. Некоторые вопросы теории поверхностей с семейством плоских координатных линий//Расчет оболочек строительных конструкций. - М.: УДН, 1977. - С. 37-48.
5. Иванов В.Н. Геометрия и конструирование трубчатых оболочек// Вестник Российского университета дружбы народов/ Серия: «Инженерные исследования». – 2005. – № 1 (11). – С. 109-114.
6. Иванов В.Н. Об одном подклассе нормальных циклических поверхностей// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов, вып. 13. - М.: Изд-во АСВ, 2004. - С. 20-27.

References

1. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
2. Ivanov, V.N., Romanova, V.A. (2016). *Construction Forms of the Space Structures*: Monograph, Moscow: Izd-vo ASV, 412 p.
3. Krivoshapko, S.N., Hyeng, Ch. A. Bock (2012). Geometrical research of rare types of cyclic surfaces, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, Vol. 12, Iss. 3, p. 346-359.
4. Ivanov, V.N. (1977). Some questions of the theory of the surfaces with the system of plane coordinate lines, *Analysis of the Building Shell Structures*, Moscow: UDN, p. 47-48.
5. Ivanov, V.N. (2005). Geometry and construction of the tube shells, *Vestnik of the RUDN University*, Ser. "Engineering investigations", № 1 (11), p. 109-11.
6. Ivanov, V.N. (2004). On one class of the normal cyclic surfaces, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*: Mezvusovskiy sbornik nauchnyh trudov, vyp. 13, Moscow: Izd-vo ASV, p. 20-27.

**GEOMETRY AND FORMATION OF THE THIN-WALLED SPACE SHELL STRUCTURES ON THE BASE OF NORMAL CYCLIC SURFACES**

V.N. Ivanov, A.A. Shmeleva  
*RUDN University, Moscow, Russia*

The new forms of building structures are widely used for modern social buildings, exhibition pavilions, sport and industrial erections. The possibility to create new forms of thin space shell structures on the base of normal cyclic surfaces is considering in the paper. The thin-walled shells formed by the system of the circles as well as by the system of right lines are the mostly comfortable for the erection on the building sites or for formation of the details of the structures. The normal cyclic surfaces are allowed to construct many different forms of the space structures. It is possible to create new space structures on the base of cyclic surface with combination of cylindrical or other surfaces.

**Key words:** normal cyclic surfaces, directrix curve, normal plane of the curve, orthogonal coordinate system of the surface, formation of the cyclic surfaces, combined thin space shell structures.



**ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ  
АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ  
ДЛЯ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ И РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ  
ПРОГРЕССИВНОЙ АРХИТЕКТУРЫ**

М.С. САЛЕХ, студентка  
*Российский Университет Дружбы Народов,  
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
[ev\\_marisha33@yahoo.com](mailto:ev_marisha33@yahoo.com)*

*Возрастающая сложность и многоплановость задач, решаемых в практике современного архитектурного проектирования, изменение социально-экономических условий самой работы архитектора требуют дальнейшего совершенствования проектного дела, широкого применения прогрессивных методов, приемов и технических средств в архитектурном творчестве. С каждым годом расширяется объем внедрения вычислительной техники в архитектурно-строительное проектирование.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** автоматизированное проектирование, параметризм, формообразование, бионика, архитектура будущего.

Методы автоматизированного проектирования используются на всех этапах создания объектов архитектуры. В связи с этим все более актуальной становится задача эффективного использования столь мощного инструмента интенсификации творческой деятельности.



Современные методы автоматизированного проектирования оказали неоценимое влияние на формообразование современной архитектуры, более того можно констатировать появление нового архитектурного стиля - параметризма (рис. 1). Свое начало данный стиль берет



Рис. 1. Оперный театр в Марокко, Заха Хадид

в методах анимационного моделирования [1]. Его последующее развитие основывается на продвинутых системах параметрического проектирования и скриптовых методах. Данный стиль получил широкое распространение благодаря



Рис. 2. Проект станции метро Король Абдула в Саудовской Аравии, Zaha Hadid Architects

студии Zaha Hadid Architects [2], а в особенности Патрику Шумахеру, который опубликовал «Манифест параметризма». Параметризм вдохновляет архитекторов на создание архитектуры будущего. Дизайнеры и архитекторы стоят перед новым стилем, а не просто перед набором новых методов. Технические приемы, такие как использование анимации, симуляции, и инструменты формообразования, в равной степени, как и параметрическое моделирование и программирование, сформировали новое общественное движение с радикально новыми целями и ценностями. Отличительной чертой параметризма является чувство бесшовной текучести (рис. 2), созданное при помощи современных систем компьютерного моделирования.

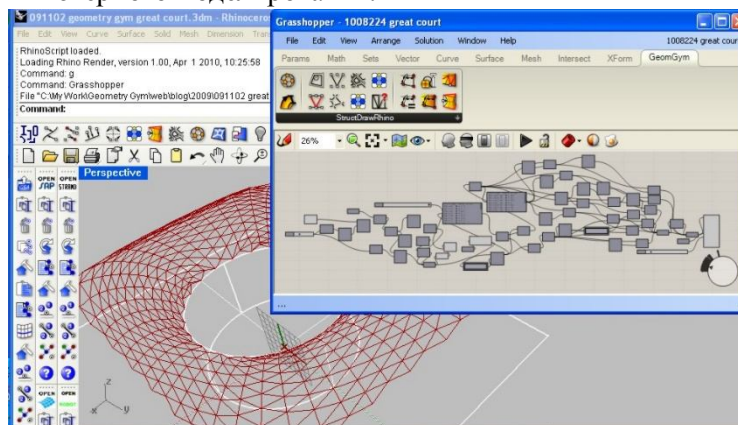


Рис. 3. Интерфейс программы Rhino с плагином Grasshopper

Методы автоматизированного проектирования основываются на применении таких вычислительных и моделирующих программ, как например, 3Ds max, Maya, Rhinoceros (рис. 3) с плагином Grasshopper, Autodesk Revit, Blender [3]. Данные платформы можно сравнить с одной из самых распространенных программ для расчета в России - ПК Лира. Программный комплекс применяется для проектирования и расчета строительных и машиностроительных конструкций. Расчет выполняется методом конечных элементов на статические (силовые и деформационные) и динамические воздействия. Производится подбор или проверка сечений стальных конструкций и армирование сечений железобетонных конструкций. Выдаются эскизы рабочих чертежей, а также чертежи желе-

зобетонных элементов. Множественные специализированные системы, позволяют моделировать работу массивов грунта, рассчитывать мостовые сооружения, моделировать работу сооружения в процессе монтажа, исследовать поведение конструкции под динамическими воздействиями во времени и многое другое. Стоит заметить, что многие пользователи отдают предпочтение плагину Grasshopper, так как он дает возможность к, непосредственному, программированию и созданию собственных дополнений (аддонов), которые нужны для автоматизированного проектирования (рис.5, 6).

Этапы разработки параметрических объектов, в большей степени, сосредоточены на автоматизированном подходе, который включает в себя: поиск формы, расчет конструкции и разработка чертежей.

Одной из самых актуальных проблем в практике архитектора является поиск формы. Существует большое количество известных методов поиска, которые могут зависеть от образа, стиля, функций и назначения здания. Таким образом параметрический стиль подразумевает создание



Рис. 4. Оперный театр, MAD Architects

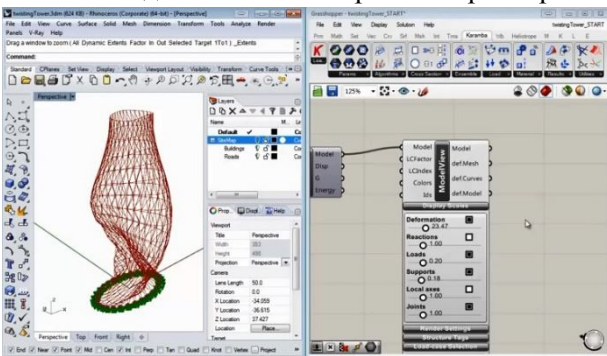


Рис. 5. Анализ конструкции с помощью аддона Kangaroo

нового метода формообразования, основанный на применении такой программы как Rhinoceros с плагином Grasshopper [4]. Данная программа является не единственным инструментом для создания параметрической архитектуры, существует большое количество других, например, Autodesk Revit с плагином Dinamo [5]. Неоспоримым преимуществом всей системы параметрического проектирования является то, что можно редактировать модели, созданный в одной программе, а затем конвертировать и изменять в другой, таким образом возникает большое количество удобных путей и возможностей для проектирования.

Неоспоримым преимуществом всей системы параметрического проектирования является то, что можно редактировать модели, созданный в одной программе, а затем конвертировать и изменять в другой, таким образом возникает большое количество удобных путей и возможностей для проектирования.

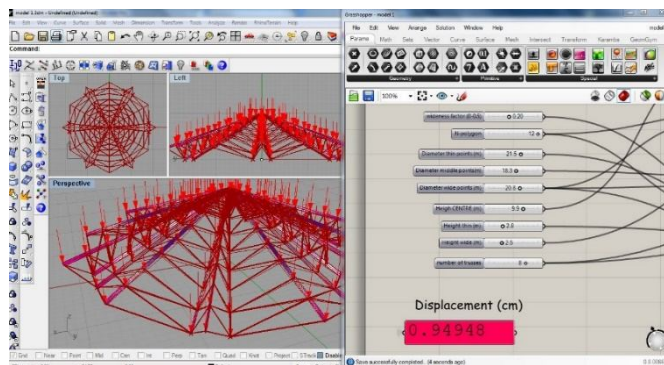


Рис. 6. Симуляция деформации конструкции с помощью аддона Karamba

Плагин Grasshopper дает безграничные возможности формообразования. Процесс моделирования в Grasshopper – это создание алгоритма. У Grasshopper нодовый интерфейс (рис.3), это значит, что мы не пишем текст скрипта, а соединяем ноды (компоненты или «батарейки») и задаем некоторые опции. Алгоритм состоит из исходных данных или параметров (чисел, геометрии Rhino или Grasshopper, сторонних данных) и последовательности действий с ними. В результате генерируются как геометрия, так и сопутствующая информация (объемы, площади, маркировка, размеры и т.д.). Как результат, в любой момент можно поменять исходные данные (например, пути сдвига, количество точек деления, высоту или количество копий) и вся модель перестроится. Отличие генеративного моделирования от традиционного подхода состоит в том, что мы создаем не просто модель, а логику, по которой можно получить модель при любых исходных данных. Создав скрипт один раз, его можно многократно использовать и редактировать дальше. Самым известным методом является создание набора точек, затем линии по существующим точкам, после чего набор линий можно превратить в любую поверхность. К этому можно применить большое количество модификаторов: скручивание, изгиб, выталкивание и т.д. Такой подход автоматизированного формообразования зависит от самой программы и от архитектора, который задает основные параметры, но форма может быть самой непредсказуемой, на этом этапе архитектор принимает решение о целесообразности и эстетических составляющих очертаний будущего здания. При выборе формы архитектор в первую очередь основывается на назначении здания и на техническом задании заказчика. Если говорить о параметрической архитектуре, то такие здания, изначально, представляют собой сложную геометрию. Таким образом зачастую здания гражданского назначения проектируются более экономичными и менее авангардными, а при разработке общественных зданий (театры) (рис.4) у архитектора появляется больше свободы для творчества и можно заметить появление еще более сложной геометрии. Такой прогрессивный подход все время толкает архитектуру к образованию новых направлений и стилей [6].

Когда процесс формообразования завершен, необходимо рассчитать конструкцию на прочность, подобрать узлы и принять решения по технической составляющей проекта, а также протестировать, выбранные (по эстетическим критериям) формы и найти оптимальные (экономичные) варианты. На данном этапе возможно воспользоваться тем же универсальным плагином Grasshopper, к которому в свою очередь нужны дополнения, называемые аддонами. С помощью дополнения galapagos можно оптимизировать модель под конкретные требования, например, найти наилучшее расположение объектов, минимизировать количество материала для производства или найти оптимально освещенную форму [7]. Сначала необходимо указывать какие параметры мы хотим менять и какое число необходимо максимизировать или минимизировать. После запуска компонента, galapagos подбирает случайные исходные значения, просчитывает результат. Далее он скрещивает наиболее удачные комбинации значений подбирая те, при которых будет достигнут наилучший результат [8]. Таким образом симулируется эволюционное развитие модели. С помощью дополнений можно:

- симулировать физические явления, гравитация, и отталкивание, прогиб и др. (с помощью Kangaroo) (рис. 5).
- создавать циклы или петли, то есть повторяющуюся часть скрипта. В частности, с помощью петель можно создавать фрактальную геометрию (Anemone, Hoopsnake)
- рассчитывать конструкции на прочность [9], автоматически подбирая узел с наименьшим количеством материала (Karamba), а также с помощью этого дополнения можно задавать любые деформации конструкции (рис. 6).



- панелизовать поверхности, создавать фермы и пространственные оболочки (LunchBox).



Рис. 7. Проект пешеходного моста в Париже, DVVD Architects

Разработка чертежей и документации является важнейшим процессом в архитектурном проектировании. Обычно используют системы CAD или Revit. На этом этапе также можно использовать плагин Grasshopper с аддоном Tekla. Примером такого инновационного подхода является проект пешеходного моста в Париже [10], разработанного DVVD Architects (рис. 7).



Рис. 8. Многофункциональный комплекс в Москве

Метод автоматизированного проектирования помог автору создать параметрические архитектурные объекты: проект многофункционального жилого комплекса в Москве (рис. 8) и проект участка блокированных домов в Бресте (рис. 9). Модели зданий были выполнены в программе Rhino с дополнением Grasshopper.



Рис. 9. Участок жилого района в Бресте

**Заключение.** Прогрессивная архитектура создала новый стиль и метод проектирования, открывая новые универсальные программы, делающие процесс проектирования многофункциональным и удобным. Что касается математического обеспечения процесса проектирования сложных форм, то здесь можно указать на работу [11], где даны уравнения более 500 аналитических поверхностей и показаны возможности некоторых из них применительно к прогрессив-

ной архитектуре. Архитектурные формы, построенные на основе произвольных поверхностей, не задаваемых аналитически, рассмотрены также в статье [12].

Л и т е р а т у р а

1. Шумахер, П. Параметризм – Новый Глобальный Стил для Архитектуры и Городского Дизайна [Сетевой ресурс]. – URL:[http://www.patrikschumacher.com/Texts/Parametricism\\_Russian%20text.html](http://www.patrikschumacher.com/Texts/Parametricism_Russian%20text.html).
2. Хитека. Копилка знаний и идей по развитию архитектуры и автоматизации проектирования/[Электронный ресурс] <http://www.hiteca.ru/2013/10/manifesto.html>.
3. *Digital Bakery* Высокотехнологичная архитектура// [Электронный ресурс] <http://digitalbakery.ru/archive/architects>.
4. *Точка ветвления* // Электронный ресурс <http://branchpoint.ru>.
5. Кун Т.С. Структура научных революций. – University of Chicago Press, 1962. – P. 10-15.
6. Надыршин Н. М. Параметризм как стиль в архитектурном дизайне// ВЕСТНИК ОГУ. – 2013. - № 1. – С. 53.
7. Лотко А. И. Архитектура: авангард, абсурд, фантастика. – Минск: Беларус, навука, 2012. -206 с.
8. <http://digitalgipsy.org/2016/02/21/footbridge-in-paris/>
9. Иванов В.Н., Рынковская М.И. Применение циклических поверхностей в архитектуре зданий, конструкций и изделий // Вестник РУДН. Серия Инженерные исследования. – 2015. - №3. – С. 111-119
10. *Arturo Tedeschi*. AAD\_Algorithms-Aided Design. - Le Penseur, Italy, 2014. – P. 19-36.
11. *Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
12. *Кривошапка С.Н.* Обзор современного состояния теории оболочек сложной геометрии и оболочек в форме аналитически неопределимых поверхностей// Монтажные и специальные работы в строительстве. – 1998. – №5. – С. 24-28.

References

1. *Schumacher, P.* Parametrizm is New Global Style for Architecture and Urban Design [Network resource]. - URL: [http://www.patrikschumacher.com/Texts/Parametricism\\_Russian%20text.html](http://www.patrikschumacher.com/Texts/Parametricism_Russian%20text.html).
2. *Hiteca*.(2013). *Piggy bank of knowledge and ideas on the development of architecture and design automation*, [Electronic resource] <http://www.hiteca.ru/2013/10/manifesto.html>.
3. *Digital Bakery*. *High-tech architecture*, [El. resource] <http://digitalbakery.ru/archive/architects>.
4. *The branch point*, Electronic resource <http://branchpoint.ru>.
5. *Kuhn, T.S.* (1962). *Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, p. 10-15.
6. *Nadyrshin, N.M.* (2013). Parametrizm as a style in architectural design, Bulletin OGU, 1, p. 53.
7. *Lotko, A.I.*(2012). *Architecture: Avant-Garde, Absurd, Fantastic*, Minsk: Bel. Navuka, 206 p.
8. <http://digitalgipsy.org/2016/02/21/footbridge-in-paris/>
9. *Ivanov, V.N., Rynkovskaya, M.I.* (2015). Application of circular surfaces to the architecture of the buildings, structures and products. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Engineering Researches*, Vol. 3, pp. 111-119.
10. *Arturo Tedeschi* (2014). AAD\_Algorithms-Aided Design, Le Penseur, Italy, p. 19-36.
11. *Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N.* (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
12. *Krivoshapko, S.N.* (1998). A review of modern condition of theory of shells of complex geometry and shells in the form of surfaces given by not analytical equations, *Montazhn. i Spetz. Raboty v Stroit.*, № 5, pp. 24-28.

**APPLICATION OF MODERN TECHNIQUES AIDED DESIGN FOR FORMING AND CALCULATION OF PROGRESSIVE ARCHITECTURE**

M.S. SALEH

*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow*

The increasing complexity and diversity of problems in the practice of contemporary architectural design, changes the socio-economic conditions of the architect work, this requires a further improvement of design process, extensive use of advanced methods, techniques and equipment in the architectural work. Every year, there is an expansion of implementation of computer technology in the architectural and construction design.

**KEYWORDS:** Computer-aided design, parametrisation, morphogenesis, bionics, futuristic architecture.

**Расчет и проектирование строительных конструкций**

УДК 699.841

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ОДНОЭТАЖНОЙ ПОСТРОЙКИ С ВНУТРЕННЕЙ  
ПЕРЕГОРОДКОЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОЙ ОТТЯГИВАЮЩЕЙ НАГРУЗКЕ  
ПО ВЕРХНЕМУ ПОЯСУ СТРОЕНИЯ**

С.Ж. РАЗЗАКОВ, к.т.н., доцент

Наманганский инженерно-педагогический институт, Узбекистан

160103, Узбекистан, г. Наманган, проспект Дустлик, № 12.

E-mail: [sobirjonrsj@gmail.com](mailto:sobirjonrsj@gmail.com)

*Исследуется напряженно-деформированное состояние одноэтажного кирпичного строения с внутренней перегородкой при статической оттягивающей нагрузке в уровне перекрытия, а также влияние на прочность наличия деревянного каркаса в несущих стенах конструкции.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** деревянный каркас, упругость, напряжение, деформирование, оттягивающая статическая нагрузка.

Нормативная литература по сейсмостойкому строительству исключает возможность применения глины и необожженного кирпича при возведении зданий и сооружений в сейсмически опасных районах. Однако, доступность, дешевизна и экологичность глины делают ее незаменимой в индивидуальном строительстве. Поэтому теоретическое обоснование возможности применения местных глиноматериалов при строительстве небольших, простых по форме индивидуальных домов, с усилением несущих стен каркасом или включением в них отходов текстильного производства представляется актуальным.

С этой целью автор исследует напряженное состояние глинобитных домов, используя в расчете физико-механические параметры материала кладки, полученные на основе натуральных экспериментов. Строения представляются коробчатыми моделями, в плоско напряженных несущих стенах которых имеются оконные и дверные проемы. Исследовано два варианта строения: с деревянным каркасом в несущих стенах и без него. Каркас представлен вертикальными стойками, расположенными по бокам проемов, и с регулярным шагом по периметру стен. Основание коробки заземлено. Изгиб пластин и элементов каркаса из плоскости стен не рассматривается. Возможность такого подхода обоснована в теоретических исследованиях статики и динамики [1, 2] коробчатой структуры, образуемой вертикальными панелями, а также экспериментальной работой [3], где также показана незначительная доля изгибных напряжений.

Расчет коробчатого строения производится численно с применением плоских прямоугольных (для участков стен) и стержневых (для каркаса) конечных элементов [4]. Именно такое разбиение удобно для прямоугольных панелей, составляющих модель сооружения. Прямоугольный элемент имеет по две степени свободы в каждом узле, а функции перемещений внутри элемента линейны:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом случае совместность деформаций между элементами соблюдается полностью.

Если стены усилены каркасом, то на сетку из образующих ее прямо-

угольных конечных элементов накладывается сетка, состоящая из балочных элементов с соответствующей площадью поперечного сечения, работающих на растяжение-сжатие. Функция перемещений для такого элемента – линейна:

$$u = \beta_1 + \beta_2 x \quad (2)$$

и совместность деформаций между элементами также полностью соблюдается.

В результате применения процедуры МКЭ статическая задача о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемой модели сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{x\} = \{P\}, \quad (3)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости всей системы;  $\{P\}$  – приведенная к узлам горизонтальная нагрузка на высоте перекрытия. Система алгебраических уравнений (3) относительно неизвестных узловых перемещений  $\{x\}$  решается методом Гаусса. По полученным перемещениям определяются деформации (с использованием уравнений Коши), после чего (по закону Гука) – напряжения в каждом элементе. Полученные напряжения в каждом элементе сравниваются с расчетными, на основании чего делается вывод о прочности конструкции.

Рассматриваемое одноэтажное строение с внутренней перегородкой, состоит из двух комнат. Стены выполнены из кирпича с модулем упругости кладки  $E = 300 \text{ МПа}$ . Вес покрытия составляет 52 кН. Расчетная модель строения – пространственная коробка с перегородкой (рис.1). Для расчета используется метод конечных элементов (МКЭ). Цель исследования – определить влияние каркаса на напряженно-деформированное состояние здания при распределенной статической нагрузке (рис.1а). На рис.1, а показана модель строения без каркаса, а на рис.1б – с каркасом. Каркас установлен с шагом 1 м по всему периметру внешних стен и во внутренней перегородке. Для каркаса используются круглые бревна диаметром  $\varnothing 12 \text{ см}$ .

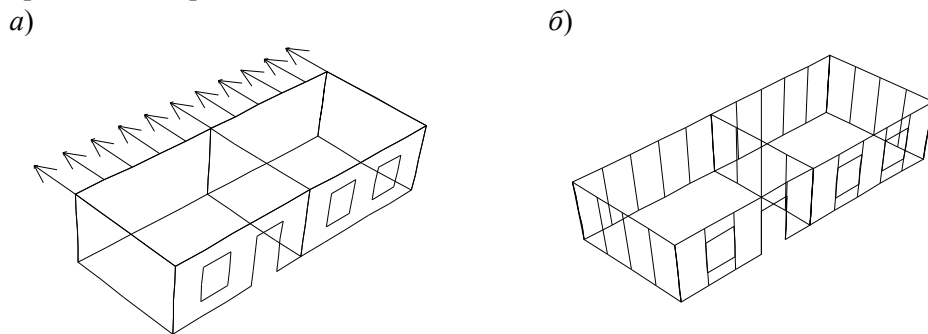


Рис. 1. Модели одноэтажного строения с внутренней перегородкой: без каркаса (а) и с каркасом (б)

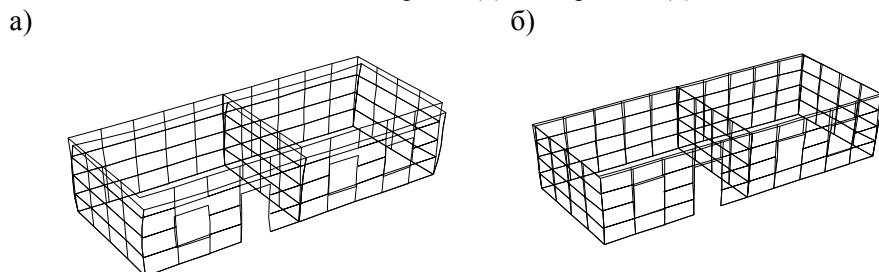


Рис. 2. Деформированное состояние одноэтажной постройки: без каркаса (а) и с каркасом (б) при оттягивающей статической нагрузке



Полученная в результате расчета деформация постройки с несущими стенами без каркаса и с каркасом при заданной оттягивающей нагрузке в одинаковом масштабе (1:1000) показана на рис.2.

Применение одинакового масштаба позволяет наглядно оценить влияние каркаса на деформацию постройки при статической горизонтальной нагрузке в поперечном направлении. Наличие каркаса значительно уменьшает деформацию исследуемого здания. Кроме того, изменяется и характер перемещений стен. Полученные эпюры горизонтальных перемещений стен без каркаса и с деревянным каркасом приведены на рис. 3.

*a*)  $u_{\max} = 2,2 \cdot 10^{-4}$  м

*б*)  $u_{\max} = 1,27 \cdot 10^{-4}$  м

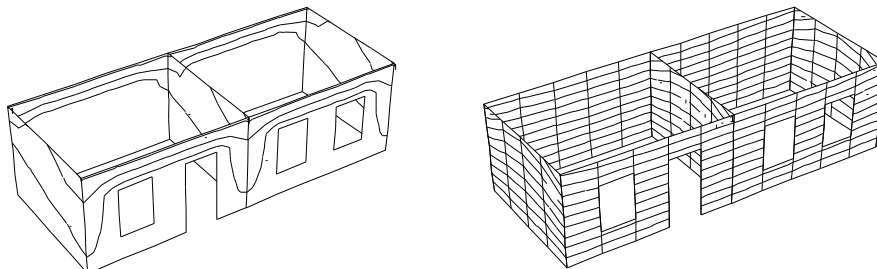


Рис. 3. Эпюры поперечных (горизонтальных) перемещений строения без каркаса (*a*) и с деревянным каркасом (*б*) при горизонтальной нагрузке

Распределение эпюр поперечных перемещений в строении с каркасом (*б*) - равномерно по высоте стен. Это подтверждает тот факт, что каркас связывает все элементы здания в единую систему, в отличие от здания без каркаса (*a*), где перемещаются в основном верхние части стен, находящиеся в непосредственной близости от приложенной нагрузки.

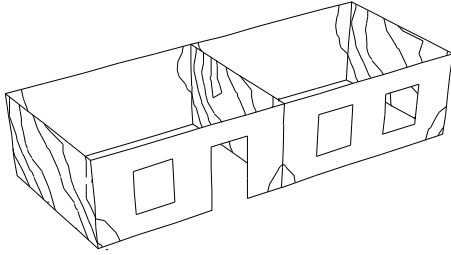
При заданной нагрузке максимальные смещения здания с несущими кирпичными стенами в направлении приложенной нагрузки составляют 0,22мм, а перемещения стен здания с каркасом - 0,13 мм. Вертикальные перемещения стен без каркаса при той же нагрузке составляют 0,38 мм и равны вертикальным перемещениям, которые были получены при расчете здания под действием собственного веса, а для здания с каркасом - 0,02 мм. Т.е. установка каркаса почти в 2 раза уменьшает горизонтальные перемещения в направлении приложенной нагрузки и более чем на порядок - вертикальные перемещения, обусловленные весом здания.

Поскольку расчет проводится в упругой постановке, то увеличение или уменьшение нагрузки приводит к пропорциональному увеличению или, соответственно, уменьшению перемещений и напряжений, не меняя характер их распределения по периметру здания.

Компоненты напряженного состояния здания с несущими кирпичными стенами и со стенами, усиленными деревянным каркасом, под действием указанной нагрузки, представлены на следующей серии рисунков.

На рис. 4 показаны касательные напряжения ( $\tau_{yz}$ ) в кирпичных стенах поперечного направления без каркаса (*a*) и в стенах с каркасом (*б*). В первом случае (без каркаса) максимальные касательные напряжения распределяются вдоль диагонали поперечных стен и достигают величины 0,0064 МПа. В стенах же, усиленных каркасом, максимальные касательные напряжения достигаются в центральном вертикальном сечении поперечных стен и равны 0,0043 МПа, что на 30% меньше, чем в первом случае. Кроме того, вертикальное расположение касательных напряжений свидетельствует о малом перекосе стен с каркасом по сравнению с несущими стенами без каркаса.

*a)*  $\tau_{yz \max} = 6,5e^{-3} \text{ МПа}$



*б)*  $\tau_{yz \max} = 4,3e^{-3} \text{ МПа}$

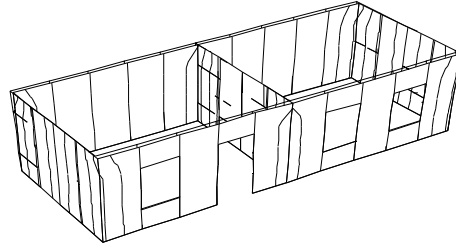
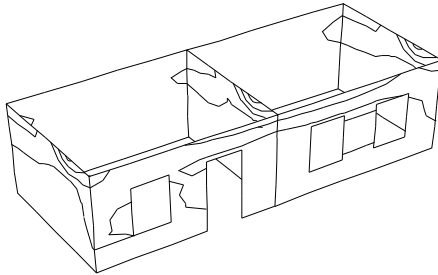


Рис. 4. Эпюры касательных напряжений в стенах без каркаса (*a*) и с каркасом (*б*) при горизонтальной нагрузке

Влияние конструктивных мероприятий на растягивающие напряжения в здании представлено на рис. 5 в стенах без каркаса их максимальная величина достигает  $0,0144 \text{ МПа}$  - (*a*), а в стенах с каркасом - вдвое меньше и составляет  $0,00713 \text{ МПа}$ . В обоих случаях максимумы достигаются в верхней части поперечных стен вблизи покрытия.

*a)*  $\sigma_{1\max} = 1.44e^{-2} \text{ МПа}$



*б)*  $\sigma_{1\max} = 7.13e^{-3} \text{ МПа}$

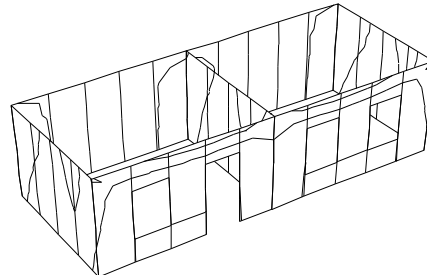
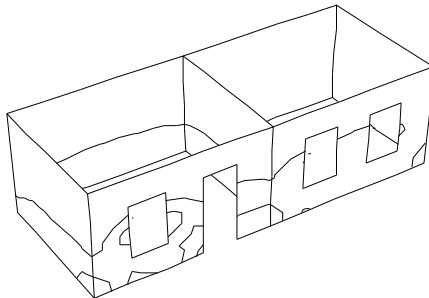


Рис.4. Эпюры растягивающих напряжений в стенах без каркаса (*a*) и с каркасом (*б*) при оттягивающей нагрузке

Особенно ощутимо влияние каркаса сказывается в фасадной стене здания, ослабленной проемами (рис.5). В отсутствие каркаса в этой стене, особенно в ее нижней части вблизи проемов, максимальные сжимающие напряжения достигают величины  $0,066 \text{ МПа}$ , тогда как при наличии каркаса их величина на порядок меньше.

*a)*  $\sigma_{2\max} = -6.6e^{-2} \text{ МПа}$



*б)*  $\sigma_{2\max} = -7.4e^{-3} \text{ МПа}$

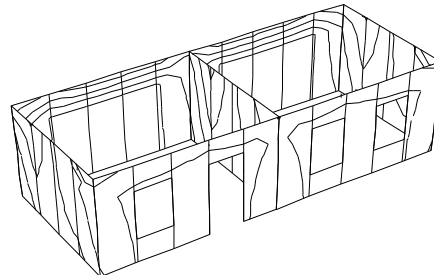


Рис. 5. Эпюры сжимающих напряжений в стенах без каркаса (*a*) и с каркасом (*б*) при оттягивающей нагрузке

Таким образом, установка каркаса в стенах одноэтажного здания с внутренней перегородкой позволяет снизить величину наиболее опасных для кладки растягивающих напряжений в два раза, а максимальных сжимающих напряжений в нижних углах ослабленной проемами фасадной стенке здания практически до нуля.

В целом на основании проведенного анализа напряженно-деформированного состояния одноэтажного здания с внутренней перегородкой при статической нагрузке, приложенной на уровне покрытия в поперечном направлении, можно сделать следующие выводы:

1. Наличие каркаса объединяет продольные, поперечные стены и перекрытие здания в единую пространственную систему, обладающую повышенной сопротивляемостью прикладываемой статической нагрузке, в результате чего перемещения и уровень возникающих в стенах напряжений значительно снижаются, по сравнению с теми же характеристиками в стенах, не подкрепленных каркасом.

2. Значительные растягивающие напряжения в здании без каркаса при поперечной горизонтальной нагрузке в уровне перекрытия возникают в верхних уровнях боковых стен. Величина растягивающих напряжений здесь достигает максимума, поэтому все выводы, касающиеся возможных разрушений в зависимости от величины нагрузки, качества кладки, кирпича и раствора, необходимо делать на основе анализа напряженного состояния этих опасных зон. Установка же каркаса снижает уровень максимальных растягивающих напряжений в верхних уровнях боковых стен здания, что уменьшает вероятность разрыва кладки.

3. Сжимающие напряжения в стенах без каркаса, в значительной степени зависящие от веса здания, увеличиваются к основанию здания. Наличие каркаса позволяет снизить их более чем на порядок.

4. Наибольшие касательные напряжения возникают в боковых стенах постройки, их максимальные значения для здания без каркаса (рис.2а) распределяются по диагонали этих стен. Установка каркаса (рис.2б) уменьшает степень деформирования здания в целом и, соответственно, деформирование боковых стен, в результате касательные напряжения в них уменьшаются в 1,5 раза.

Таким образом, анализ напряженно-деформированного состояния одноэтажного здания с внутренней перегородкой с несущими кирпичными стенами и кирпичными стенами с деревянным каркасом по периметру стен, позволил выявить связующую роль каркаса, которая заключается в объединении элементов конструкции в единую пространственную систему. При этом нагрузки, воспринимаемые жесткими элементами каркаса, вызывают в них незначительную деформацию. Эта деформация передается на простенки здания между элементами каркаса, что приводит к равномерному распределению напряжений в простенках и к снижению уровня напряжений в простенках по сравнению с теми же напряжениями в стенах без каркаса.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Handa K.H.* Inplane vibration of box-type structures / K.H. Handa // *Journal of Sound and Vibration*. – 1972. - № 21 (2). - P.107-114.
2. *Zienkiewicz O.C.* Three-dimensional analysis of buildings composed of floor and wall panels / O.C. Zienkiewicz // *Proc. Inst. of Civil Engineers*. - 1971, vol. 49. - P. 319-332.
3. *Макеев В.В.* Статический расчет зданий из объемных блоков методом конечных элементов : автореф. дис. ... канд. техн. наук / В.В.Макеев. - Москва, 1975. – 30 с.
4. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* МКЭ в расчетах судовых конструкций/ В.А. Постнов , И.Я. Хархурим – Л.: Судостроение, 1974. - 342 с.

#### References

1. *Handa, K.H.* (1972). Inplane vibration of box-type structures, *Journal of Sound and Vibration*, №21 (2), p.107-114.
2. *Zienkiewicz, O.C.* (1971). Three-dimensional analysis of buildings composed of floor and wall panels, *Proc. Inst. of Civil Engineers*, vol. 49, p. 319-332.

3. Makeev, V. V. (1975). Static calculation building blocks of the volume finite element method: Author's. Abstract of PhD, Moscow, 30 p. (in Russian).

4. Postnov, V.A., Harhur, I.J. (1974). *FEM Calculations of Ship Structures*, L.: Sudostroenie, 342 p.

### RESEARCH OF STRESS-STRAIN STATE OF SINGLE-STOREY BUILDINGS WITH INTERNAL PARTITIONS UNDER STATIC PULLING LOAD OF THE UPPER BELT OF A STRUCTURE

RAZZAKOV Sobirjon Juraevich

*Namangan Engineering-Pedagogical Institute, Uzbekistan.*

The author researches the stress-strain state of a single-storey brick building with an internal partition under static pulling load in the overlap level, and the impact on the strength of having a wooden frame construction in the supporting walls.

**Keywords:** wood frame, elasticity, stress, deformation, pulls static load.



### ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КИРПИЧНЫХ СТЕН ИЗ МЕСТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ЗАПОЛНЕНИЯ НА РАБОТУ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МОНОЛИТНЫХ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ РЕСПУБЛИКИ БУРУНДИ

МИКЕРЕГО Эммануэль, аспирант,

А.С.МАРКОВИЧ, канд. тех. наук., доцент

Ю.К. БАСОВ, канд. тех. наук., доцент

*Российский университет дружбы народов,*

*Ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419*

*mikeregoemmanuel@hotmail.com; markovich.rudn@gmail.com;*

*В статье изложены результаты численных исследований работы колонны и ригеля монолитного каркасного здания, где в качестве межколонного заполнения использовалась кирпичная кладка. Проведено сравнение продольных усилий, возникающих при совместном действии вертикальных и ветровых нагрузок, а также исследовано распределение усилий в каркасе при выходе из строя кирпичных стен заполнения нижнего этажа. Помимо этого, проведена количественная оценка продольных внутренних усилий, передаваемых на систему фундамента кирпичными стенами заполнения.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** каркасные здания, кирпичные стены, колонны, ригели, продольные внутренние усилия.

**Введение.** В республике Бурунди кирпич является относительно недорогим строительным материалом, поэтому кирпичная кладка активно применяется в межколонном заполнении монолитных каркасных зданий. В инженерных расчетах влияние стенового заполнения на пространственную работу каркаса не учитывается. Тем временем, согласно исследованиям [1, 4], кирпичные стены в каркасных зданиях приводят к перераспределению внутренних усилий в элементах каркаса. Установлено, что в системе «колонны – кладка – ригели» первичную роль играют колонны [3], последние отвечают за совместную работу монолитного каркаса с кирпичными стенами заполнения. Колонны в таком случае работают на сжатие со случайным эксцентриситетом [2].

Обзор литературных источников свидетельствует о недостаточности исследований распределения внутренних усилий в колоннах и ригелях при учете стенового заполнения в пространственной работе каркаса. В связи с этим актуальность данной статьи заключается в общей количественной оценке внутренних усилий, возникающих в монолитном каркасном здании с кирпичными стенами заполнения.



**Объект исследования.** В качестве исследуемого объекта рассматривается пространственная модель девятиэтажного каркасного здания с кирпичными стенами из местных материалов заполнения республики Бурунди. В основании здания располагается скальный грунт. Физико-механические характеристики кладки были определены экспериментально-теоретическими методами. Принималось, что железобетонные элементы каркаса изготовлены из бетона класса В25. Толщина кирпичных стен составляла полтора кирпича (380 мм). По архитектурным соображениям ширина поперечного сечения колонн и ригелей была принята равной толщине кирпичных стен (рис. 1).

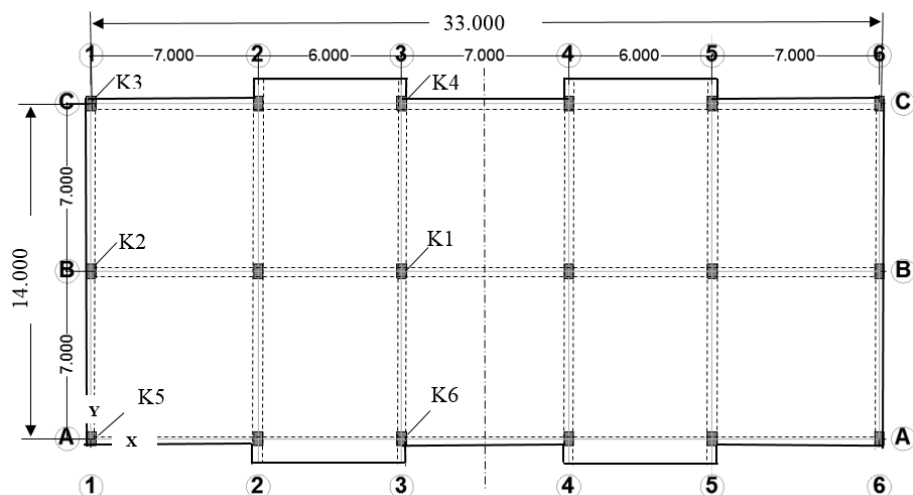


Рис. 1. Схема с указанием исследуемых колонн с учетом их расположения в плане

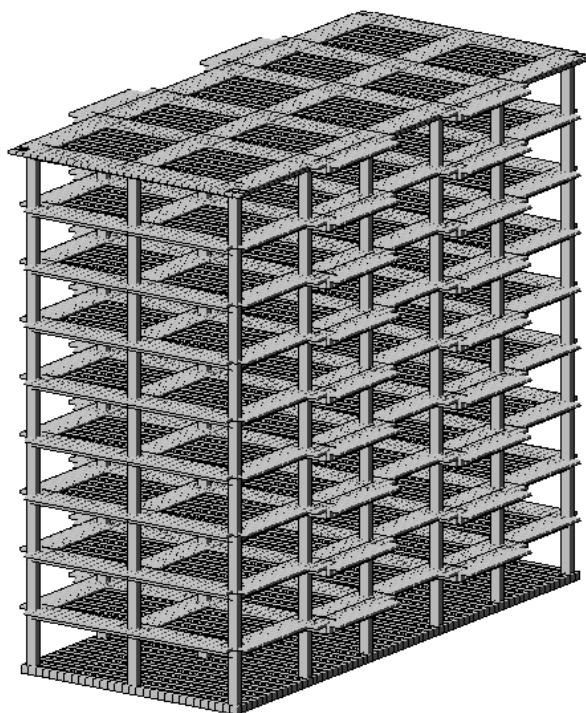


Рис. 2. КЭ модель «1» монолитного каркасного здания без учета влияния стенового заполнения

Железобетонные колонны и ригели таврового сечения моделировались пространственными стержневыми конечными элементами (КЭ). Плиты меж-

этажных перекрытий и кирпичные стены заполнения моделировались плоскими оболочечными КЭ и КЭ типа «балка-стенка» соответственно [6,7].

По контуру кирпичной стены заполнения принималась шарнирная связь с железобетонными элементами каркаса. Деформационные характеристики железобетонных элементов были приняты согласно рекомендациям [5], учитывающим нелинейную работу железобетона и возможность образования трещин.

Для проведения численных исследований были разработаны 3 дискретные пространственные конечно-элементные модели монолитного каркасного здания. КЭ модель «1» монолитного каркасного здания состоит из 21326 узлов, 24368 элементов и 99760 неизвестных узловых перемещений (рис. 2). В этой модели не учитывалось влияние стен заполнения на пространственную работу каркаса. Нагрузка от собственного веса заполнения рассматривалась как линейная равномерно распределенная, приложенная на ригели каркаса.

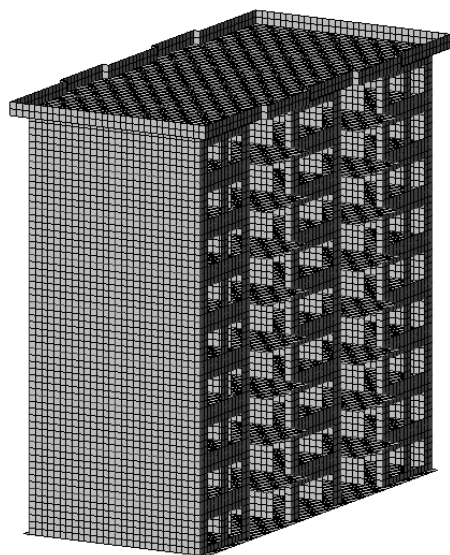


Рис. 3. КЭ модель монолитного каркасного здания с учетом влияния стенового заполнения

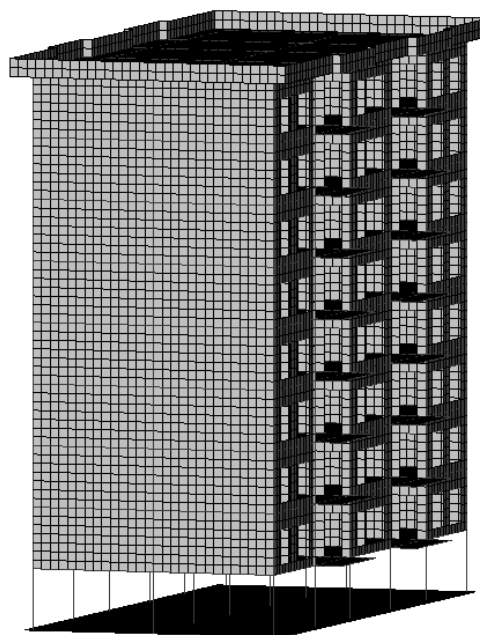


Рис. 4. 3D конечноэлементная модель монолитного каркасного здания с кирпичными стенами заполнения

В отличие от модели «1» КЭ модель «2» учитывает влияние кирпичного заполнения на напряженно-деформированное состояние каркаса и состоит из 37024 узлов, 43370 элементов и 166830 неизвестных узловых перемещений (рис. 4). Для предотвращения возможного прогрессирующего обрушения при выходе из строя стенового заполнения нижнего этажа была разработана специальная КЭ модель, которая состояла из 35436 узлов, 41416 элементов и 160272 неизвестных узловых перемещений.

**Методика проведения исследования.** В ходе проведения численного исследования каркаса здания рассматривалось 3 варианта сочетания нагрузок. В первом варианте проведен анализ работы железобетонных колонн и ригелей при постоянных и эксплуатационных воздействиях без учета ветровой нагрузки, данный вариант обозначался (1-БВН). Во втором варианте рассматривался случай, когда на здание кроме эксплуатационных нагрузок, воздействует ветровой напор со средней скоростью 25м/с перпендикулярно продольной стороны здания, этот вариант обозначался (2-СВН). И наконец, в третьем варианте (3-

ВСС) рассматривался случай выхода из строя стенового заполнения нижнего этажа при постоянных и эксплуатационных нагрузках.

Для исследования влияния деформативности кладки на усилия в элементах монолитного каркаса отдельно рассматривались 3 различных модуля упругости кладки стен заполнения:  $E_1 = 1000 \text{ МПа}$ ;  $E_2 = 2000 \text{ МПа}$ ;  $E_3 = 3000 \text{ МПа}$ . Полученные при этом согласно моделям «2» и «3» значения продольных усилий в колоннах и ригелях, сравнивались со значениями, вычисленными по модели «1», в которой не учитывалась деформативность стенового заполнения ( $E_0 = 0$ ). В последнем варианте нагрузка от собственного веса стенового заполнения учитывалась как дополнительная линейная нагрузка на ригели каркаса.

Таким образом, для принятого  $j$ -ого этажа, уменьшения ( $\eta_j$ ) продольных внутренних усилий определялись по выражению (1), как отношение продольных усилий  $N_{j(E_0)}$  в монолитном каркасе без учета влияния стенового заполнения (КЭ модель «1») к продольным усилиям  $N_{j(E_i)}$ , определяемым с учетом влияния стенового заполнения на пространственную работу каркаса (КЭ модели «2», «3»):

$$\eta_{j(E_i)} = N_{j(E_0)} / N_{j(E_i)} \quad (1)$$

**Результаты исследования.** Анализ результатов расчета дискретных компьютерных моделей исследуемого здания позволил определить продольные усилия в колоннах и ригелях. Возникновение продольных усилий в ригелях обусловлено влиянием эксцентриситета, деформативностью нижележащей кладки, препятствующей изгибу ригеля, а также пространственной работой монолитного каркасного здания в целом. Результаты показали, что выход из строя кирпичных стен заполнения нижнего этажа приводит к увеличению продольных (растягивающих) усилий в ригелях первого этажа (рис. 5).

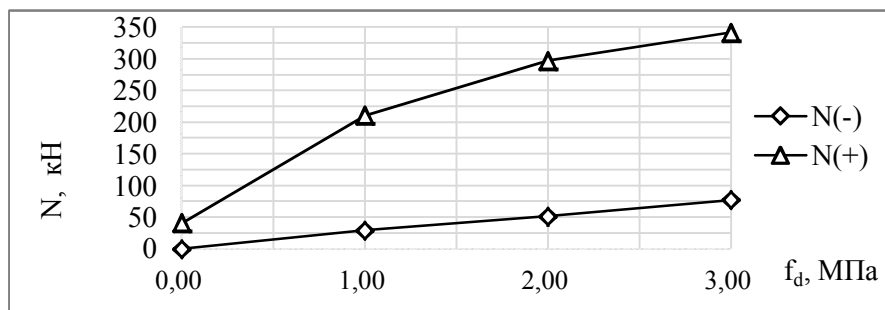


Рис. 5. Зависимость максимальных значений продольных усилий в ригелях нижнего этажа от расчетной прочности ( $f_d$ ) кладки заполнения на сжатие

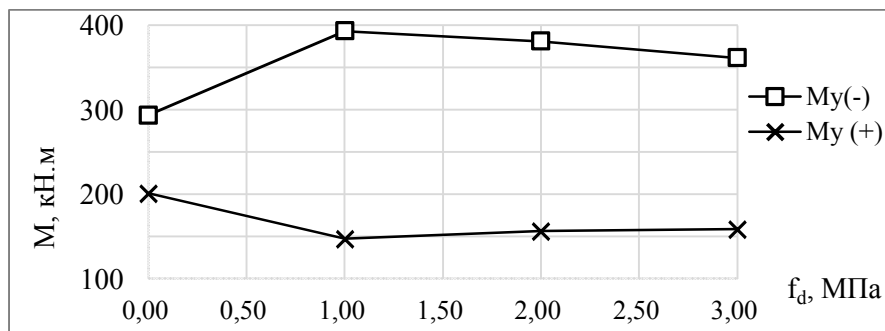


Рис. 6. Зависимость максимальных значений изгибающих моментов в ригелях первого этажа от расчетной прочности ( $f_d$ ) кладки заполнения на сжатие

Чем выше оказывается несущая способность кладки заполнения, тем больше наблюдается увеличение продольных растягивающих усилий в ригелях первого этажа. Выход из строя стен заполнения нижнего этажа приводит к существенному увеличению изгибающих моментов в ригелях (рис. 6), которые превышают изгибающие моменты, получаемые согласно КЭ модели «1».

Анализ результатов расчета показал, что учет в пространственной работе каркаса кирпичных стен заполнения приводят к уменьшению продольных усилий (рис. 7; рис. 8; рис. 9). Максимальное и минимальное уменьшение продольных сил наблюдается на нижних и верхних этажах соответственно.

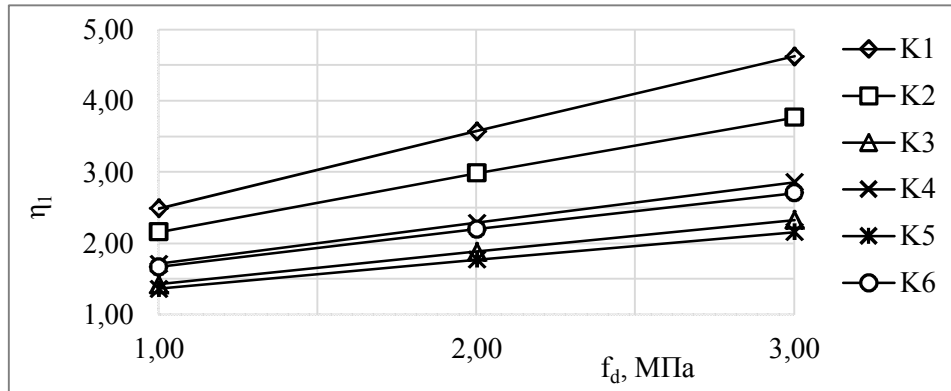


Рис. 7. Зависимость уменьшений продольных сил в колоннах первого этажа от несущей способности кладки по варианту «1-БВ»

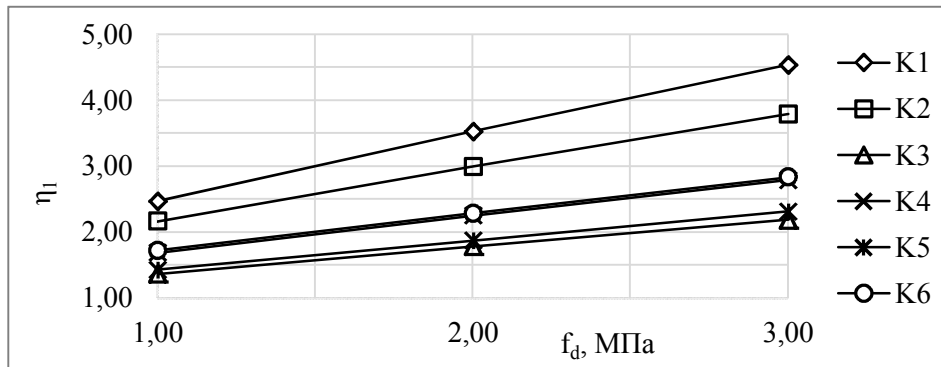


Рис. 8 - Зависимость уменьшений продольных сжимающих усилий в колоннах первого этажа при варианте с учетом ветровой нагрузки.

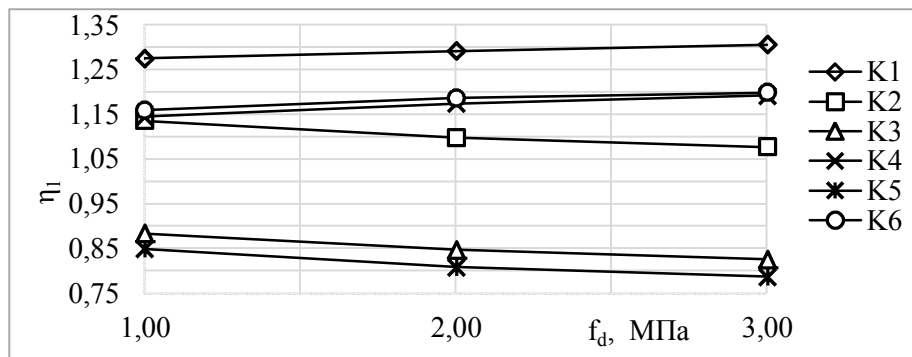


Рис. 9. Зависимость уменьшений продольных сжимающих усилий в колоннах первого этажа при выходе из строя стен первого этажа от расчетной прочности ( $f_d$ ) кладки заполнения

Результаты проведенных исследований показывают, что при выходе из строя стен заполнения нижнего этажа, в угловых колоннах продольные усилия превышают значения, получаемые при исследовании каркаса без учета влияния стенового заполнения на его пространственную работу. В угловых колоннах, внутренние продольные усилия увеличиваются на 27,07%. Во внутренних и наружных не угловых колоннах, продольные усилия снижаются на 23,45% (рис. 10).

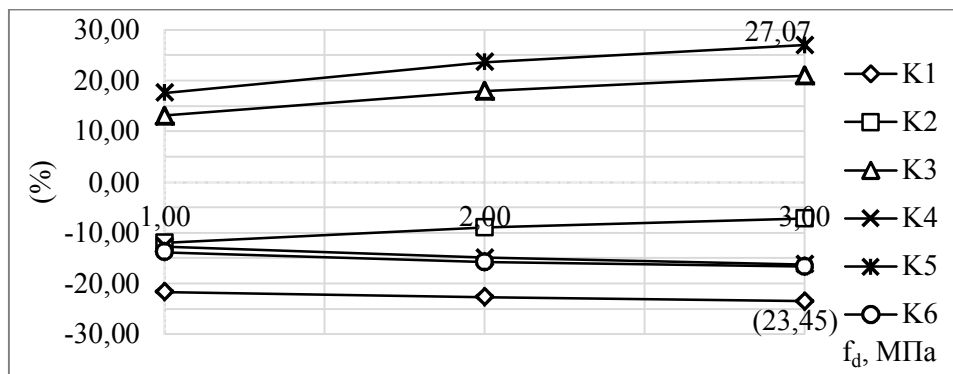


Рис. 10. Диаграмма уменьшений и увеличений (в процентах) продольных внутренних усилий в колоннах при выходе из строя стен нижнего этажа

Также результаты исследований показывают, что в монолитных каркасных зданиях кирпичные стены заполнения передают на фундамент значительную долю продольных вертикальных усилий (рис. 11).

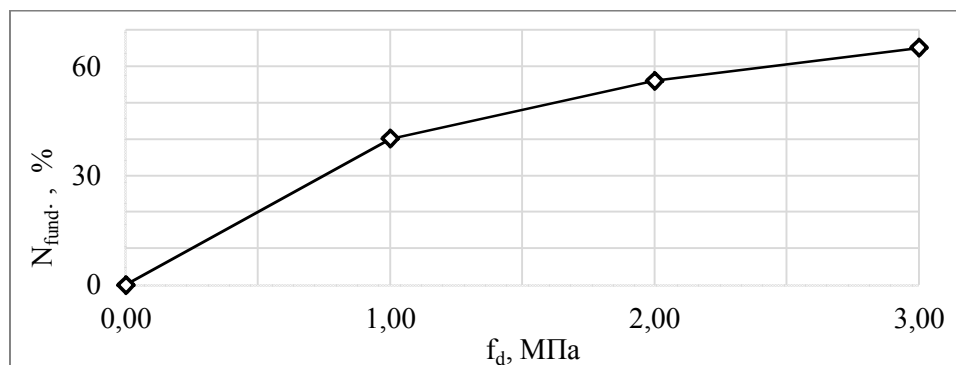


Рис. 11. Зависимость передаваемых на фундамент стенами заполнения продольных усилий от расчетной прочности кладки заполнения на сжатие

**Выводы.** По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- кирпичные стены заполнения влияют на пространственную работу монолитных каркасных зданий независимо от величины горизонтальных воздействий;
- кирпичные стены перераспределяют внутренние усилия в колоннах и ригелях;
- выход из строя стен заполнения нижнего этажа приводит к перегрузке угловых колонн и разгрузке остальных (не угловых) колонн, увеличению внутренних растягивающих усилий и изгибающих моментов в ригелях первого этажа;
- уменьшение продольных усилий в колоннах зависит от прочности кирпичной кладки и места расположения колонны в плане и по высоте здания;

■ кирпичные стены заполнения передают на фундамент существенную долю вертикальных усилий.

#### Заключение

При проектировании и расчете монолитных каркасных зданий с кирпичными стенами заполнения следует учитывать особенность работы железобетонных стержневых элементов для армирования сечений железобетонных колонн и ригелей.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Авада Х.М.Х.* Железобетонные каркасные здания с включением заполнений (эксперимент, расчет, проектирование): Дис. ... д-ра наук, Москва. – 1996. – 488с.
2. *Борцов В.О.* Особенности работы железобетонных колонн в зданиях со скрытым каркасом: Автореф. дис. ... канд. тех. наук, Самара. – 1999. – 21с.
3. *Васильев М.В.* Численное моделирование каркасно-каменных панелей// Строительство и техногенная безопасность. – Симферополь. – 2010. – Вып. 33–34. – С. 57–64.
4. *Деркач В.Н., Орлович Р.Б.* Несущая способность каменного заполнения каркасных зданий // Строительство и реконструкция. – 2011. – №3 (35). – С. 3–8.
5. *СП 52-103-2007.* Монолитные железобетонные конструкции зданий. Москва – 2007. – 22с.
6. *Агапов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Ассоциация строительных вузов, 2004. – 248 с.
7. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.

#### References

1. *Avada, H.M.H.* (1996). Reinforced concrete frame buildings with wall' fillings (experiment, calculation, design). Thesis for the degree of doctorate of science, Moscow, 488 p.
2. *Bortsov, V.O.* (1999). Features of the concrete columns in buildings with hidden frame. Synopsis of thesis for scientific degree of candidate of technical sciences, Samara, 21p.
3. *Vasilief, M.V.* (2010). Numerical modeling of skeleton stone panels, *Construction and Technogenic Safety*, Simferopol, Iss. 33– 34, p. 57– 64.
4. *Derkach, V.N.* (2011). The bearing capacity of the stone filling frame buildings, *Construction and Reconstruction*, №3(35), p. 3–8.
5. *SP 52-103-2007. Monolithic Reinforced Concrete Structures Buildings*, Moscow, 2007, 22 p.
6. *Agapov, V.P.* (2004). *The Finite Element Method in Statics, Dynamics and Stability of Structures*, 2nd ed. and ext., Moscow: Izd-vo ASV, 248 p.
7. *Perelmuter, A.V., Slivker, V.I.* (2007). *Computational Models of Structures and the Possibility of their Analysis*, Moscow: DMK Press, 600 p.

#### INFLUENCE OF BRICK WALLS FROM LOCAL-MATERIALS ON THE WORK OF LINEAR ELEMENTS IN MONOLITHIC FRAME BUILDINGS IN REPUBLIC OF BURUNDI

Mikerego Emmanuel, A.S. Markovich, Yu.K. Basov  
*Peoples' Friendship University of Russia.*  
*Ordzhonikidze str.3, Moscow, Russia, 115419*

The article presents the results of numerical research on the work of columns and beams in monolithic frame building where the fillings are the brick walls from local-materials in Republic of Burundi. A comparison of the longitudinal forces arising in linear elements from the combined action of vertical and wind loads is fulfilled. The distribution of forces in the frame in case of failure of brick walls in the ground floor is studied. In addition, the quantitative assessment of the internal longitudinal forces transmitted to the foundation by the brick walls is given.

KEY WORDS: frame building, brick' walls, columns, beams, longitudinal internal forces.



**МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОЦЕНКИ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ  
ПРИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ  
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

В.М. БОНДАРЕНКО, *д-р тех. наук, профессор*  
НИИСФ РААСН,  
127238, Москва, Локомотивный пр-д, д.21

*В теорию прогноза внутренних энергетических потерь, неизбежно сопровождающих силовое знакопеременное нагружение конструктивных строительных материалов, вводится альтернативный метод «перемещений». Этот метод, в отличие от ранее предложенных автором приемов оценки таких энергопотерь по уровню напряженного состояния разыскивает разницу работ сил нагружения и разгрузки по перемещениям конструкций.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** гистерезисные энергопотери, работа деформирования материалов.

Изучение знакопеременного деформирования железобетонных конструкций позволило автору сформулировать и решить задачу энергетической оптимизации строительно-конструктивных решений для промышленных зданий и сооружений [1,2,4]. В частности были предложены способы управления такими энергопотерями и метод оптимизации суммарных расходов на возведение и технологическое энергопотребление предприятий [5]. Сущность этих предложений состоит в суммировании по координатам конструкции гистерезисных энергопотерь в элементарных объемах деформируемого твердого тела, однозначно определяемых диаграммой напряжения – относительные деформации материала. Вместе с тем, возможен другой, альтернативный метод количественной оценки таких энергопотерь, использующий общеизвестный объективный факт того, что деформации твердых тел при нагружении всегда больше деформации восстановления при разгрузке, т.е. после разгрузки имеют место, так называемые, остаточные (не компенсируемые) деформации.

Поскольку разгрузка представляет собою приложение к тому же телу равных по величине, но противоположных по направлению сил, постольку искомая величина энергопотерь равна разности работ нагружения и разгрузки:

$$\Delta W = \vec{W} - \overleftarrow{W}, \quad (1)$$

где  $\vec{W}$  – энергия (работа) нагружения,  $\overleftarrow{W}$  – энергия (работа) разгрузки.

Бетонная колонна при осевом нагружении показана на рис. 1. Здесь

$$\vec{W} = P \cdot \overrightarrow{\Delta h}; \quad \overrightarrow{\Delta h} = \bar{\epsilon} h, \quad (2)$$

$$\overleftarrow{W} = P \cdot \overleftarrow{\Delta h}; \quad \overleftarrow{\Delta h} = \bar{\epsilon} h, \quad (3)$$

$P = A\sigma$ , где  $\sigma$  – нормальные напряжения.

Далее, вводится квазилинейная запись уравнения силового сопротивления с учетом нелинейности деформирования по П.И. Васильеву:

при нагружении:

$$\bar{\epsilon}(t, t_0) = \frac{\sigma(t)(1 + \sqrt[m]{\frac{\sigma(t)}{R(t)}})}{E_{врл}(t, t_0)} = \frac{\sigma(t)}{E_{врл}(t, t_0)} + \sqrt[m]{\frac{[\sigma(t)]^{(1+m)}}{E_{врл}(t, t_0) R^m}}; \quad (4)$$

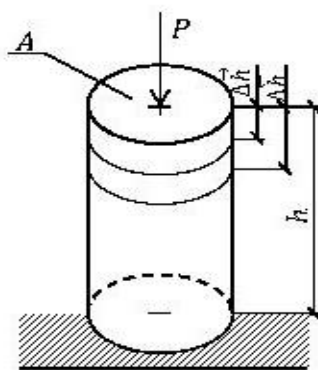


Рис. 1. Эскиз нагружения колонны ( $P$  – внешняя сила,  $A$  – площадь поперечного сечения колонны,  $h$  – высота колонны,  $\overrightarrow{\Delta h}$  – перемещение торца колонны при нагружении,  $\overleftarrow{\Delta h}$  – перемещение торца колонны при разгрузке)

при разгрузении (соответственно признаку Энгессера-Ясинского):

$$\bar{\varepsilon}(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E_{врл}(t, t_0)},$$

где  $E_{врл} = \frac{E_{мгн}}{1+\varphi(t, t_0)}$ ;  $\varphi(t, t_0) = E_{мгн}(t)C(t, t_0)$ . (5)

Отсюда коэффициент обратимости деформации:

$$K_{об} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{1+\bar{V}\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{\bar{m}}} \quad (6)$$

Коэффициент необратимости деформации:

$$K_{ноб} = \frac{\bar{\varepsilon}-\varepsilon}{\varepsilon} = 1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} = 1 - K_{об}. \quad (7)$$

Значения параметров нелинейности  $\bar{V}$  и  $\bar{m}$  вычисляются с помощью традиционного нелинейного уравнения силового сопротивления бетона при нагружении [3]:

$$\bar{\varepsilon}(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E_{мгн}(t)} \langle 1 + V_{мгн} \left[ \frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]^{m_{мгн}} \rangle + \sigma(t) \langle 1 + V_{пол} \left[ \frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]^{m_{пол}} \rangle C(t, t_0) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \langle 1 + V_{пол} \left[ \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \right]^{m_{пол}} \rangle \frac{dC(\tau, t_0)}{d\tau} d\tau, \quad (8)$$

Здесь  $\varepsilon$  – полные относительные деформации,  $\sigma(\tau)$  - напряжения,  $E_{мгн}(t)$ - модуль упругомгновенных деформаций,  $C(t_0, t)$ - мера простой ползучести,  $E_{врл}(t, t_0)$ - временный линейный модуль деформации;  $t, \tau, t_0$ - время начала нагружения, текущее время, время окончания наблюдений;  $R$ - расчетная прочность бетона;  $V_{мгн}, m_{мгн}$  - параметры нелинейности мгновенных деформаций при нагружении,  $V_{пол}, m_{пол}$  - параметры нелинейности ползучести при нагружении (табл. 1 или табл. 2).

Для этого в двух характерных точках диаграммы  $\sigma = \gamma R$  и  $\sigma = R$  приравняются величины полных относительных деформаций (4) и (6) откуда:

$$\bar{V} = \frac{E_{врл}}{R} \bar{\varepsilon}_{нл}(R) - 1, \bar{m} = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)} \ln \left\langle \frac{1}{\gamma \bar{V}} \left[ (1 + \bar{V}) \frac{\bar{\varepsilon}_{нл}(\gamma R)}{\bar{\varepsilon}_{нл}(R)} - 1 \right] \right\rangle^{-1}, \quad (9)$$

при этом заметим, что удобно принимать

$$0,7 \leq \gamma \leq 0,9, \quad (10)$$

отсюда для тяжелых бетонов получаем результаты, приведенные в табл. 1 и 2.

Таблица 1

№	Параметры при сжатии	Единицы измерения	Класс бетона				
			15	20	30	40	50
1	$R(\infty)$	МПа	15,6	20,1	28,6	36,7	44,5
2	$E_{мгн}(\infty)$ -	$10^{-3}$ МПа	23,0	27,0	32,5	36,0	39,0
3	$C(\infty, 28)$	$10^6$ МПа $^{-6}$	128	102	74	59	50
4	$E_{врл}(\infty, 28)$	$10^{-3}$ МПа	5,6	6,84	9,0	11,4	13,3
5	$\varphi = E_{врл}(\infty)C(\infty, 28)$		3,10	2,95	2,48	2,17	1,93
6	$V_{мгн}$		2,6	2,0	1,3	1,0	0,8
7	$m_{мгн}$		5,0	4,7	4,3	3,8	3,4
8	$V_{пол}$		3,11	2,35	1,6	1,22	1,22
9	$m_{пол}$		4,0				



Таблица 2

№	По [3]	Мгновенные деформации		Деформации ползучести	
	Знак нагружения	$V_{\text{мгн}}$	$m_{\text{мгн}}$	$V_{\text{пол}}$	$m_{\text{пол}}$
1.	Сжатия	$37,5/R$	$5,0 - 0,05R$	$45,0/R$	$5,0 - 0,007R$
2.	Растяжения	$0,8 + 0,37R$	$0,8 + 0,32R$	1,5	1,0

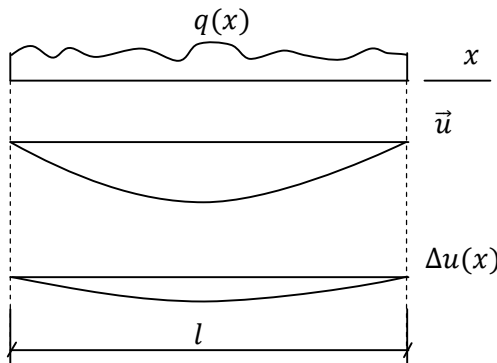
$R$  – призмная прочность бетона на сжатие

В итоге по (9) и (10) получим значения  $\bar{V}$  и  $\bar{m}$  (табл. 3).

Таблица 3

Параметры при сжатии	Класс тяжелого бетона				
	15	20	30	40	50
$\bar{V}$	2,9	2,2	1,51	1,34	1,08
$\bar{m}$	4,22	4,12	3,95	3,80	3,65

Из (3) следует, что  $\Delta W = P(\Delta \vec{h} - \Delta \vec{h})$ ,



$$\Delta W = Ph(\vec{\epsilon} - \hat{\epsilon}), \quad (11)$$

или после подстановки (1-4)

$$\Delta W = \frac{Ah\bar{V}\sigma^{2+m}}{E_{\text{врл}}R^m} \quad (12)$$

Схема изгибаемого бруса приведена на рис. 2.

Аналогично (2) и (3) записываются:

$$\vec{W} = \int_0^l q(x) \cdot \vec{u}(x) dx, \quad (13)$$

$$\bar{W} = \int_0^l q(x) \cdot \hat{u}(x) dx, \quad (14)$$

Рис. 2. Схема перемещений изгибаемого бруса где  $q(x)$ – внешняя нагрузка,  $\vec{u}(x)$ - функция прогиба под нагрузкой,  $\hat{u}(x)$ -функция прогиба при разгрузке,  $\Delta u(x)$  - функция остаточного прогиба.

Потери энергии при однократном знакопеременном нагружении

$$\Delta W = \vec{W} - \bar{W} = \int_0^l q(x) \Delta u(x) dx, \quad (15)$$

где

$$\Delta u(x) = \vec{u}(x) - \hat{u}(x) \quad (16)$$

при  $n$ -кратном знакопеременном нагружении с ростом  $n$  величина  $\Delta$  постепенно уменьшается, стремясь к некоторому стабильному значению.

Для (15), (16) прогибы  $u(x)$  находятся с помощью уравнения кривизны бруса:

$$\frac{1}{P} = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{D(x)} = M(x)B(x)$$

при

$$B(x) = \frac{1}{D(x)},$$

$$u(x) = \int M(x)B(x) dx + C_1 x + C_2,$$

где  $u$  - прогибы (перемещение);  $M$  - изгибающие моменты,  $D$  - жесткости сечений,  $B$  - податливость сечений,  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные, определяемые с учетом граничных условий.

Функции податливости  $\vec{B}(x)$  и  $\vec{B}(x)$  находятся аппроксимизацией частных значений  $B_i$ , с учетом влияния значений  $M_i(x)$  для нескольких сечений в пролете  $x$ . Частные величины  $B_i(x)$  определяются по [4], а также могут вычисляться с помощью действующих регламентных документов ((4) и (5)).

Очевидно, что снижение энергетических потерь может быть осуществлено уменьшением действующих моментов и снижением податливости, которые поддаются проектной оптимизации с помощью рационализации технологических, композиционных и конструктивных решений.

Простейшей иллюстрацией этому служит пример увеличения сечения колонны (задача 1) на 20% и обусловленное этим уменьшение в 2,5 раза величин энергетических потерь.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Бондаренко В.М.* О назначении оптимальных поперечных сечений колеблющихся конструкций// Вестник академии строительства и архитектуры. – Киев.,1959. – № 4. - С. 33-40.
2. *Бондаренко В.М.* Вопросы управления гистерезисными энергопотерями строительных конструкций// Бетон и железобетон. – 1995. - № 2. – С. 22-25.
3. *Бондаренко В.М., Римшин В.И.* Диссипативная теория силового сопротивления железобетона. – Москва: Изд-во «Студент», 2015. – 111 с.
4. *Бондаренко В.М.* Вопросы энергетической оптимизации при динамическом нагружении// Строительная механика инженерных конструкций и сооружения. – 2015. - №5. – С. 34-38.
5. *Бондаренко В.М., Ягунов Б.А.* О связи между уровнем силового нагружения и энергетическими потерями при деформировании железобетонных конструкций// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. - № 3. – С. 44-50.
6. Рекомендации по учету ползучести и усадки бетона при расчете бетонных и железобетонных конструкций. НИИЖБ, Стройиздат, Москва. 1988.- 121 с.

#### References

1. *Bondarenko, V.M.* (1959). O naznachenii optimal'nyh poperechnyh sechenij kolebljushihhsja konstrukcij, *Vestnik Akademii Stroitel'stva i Arhitektury*, Kiev, № 4, p. 33-40.
2. *Bondarenko, V.M.* (1995). Voprosy upravlenija gistereznymi jenergopoterjami stroitel'nyh konstrukcij, *Beton i Zhelezobeton*. № 2, p. 22-25.
3. *Bondarenko, V.M., Rimshin, V.I.* (2015). *Dissipativnaja Teorija Silovogo Soprotivlenija Zhelezobetona*, Moscow: Izd-vo «Student», 111 p.
4. *Bondarenko, V.M.* (2015). Voprosy jenergeticheskoj optimizacii pri dinamicheskom nagruzenii, *Stroitel'naja Mehanika Inzheneryh Konstrukcij i Sooruzhenij*, № 5, p. 34-38.
5. *Bondarenko, V.M., Jagupov, B.A.* (2016). O svjazi mezhdju urovnem silovogo nagruzenija i jenergeticheskimi poterjami pri deformirovanii zhelezobetonnyh konstrukcij, *Stroitel'naja Mehanika Inzheneryh Konstrukcij i Sooruzhenij*, № 3, p. 44-50.
6. *Rekomendacii po uchetu polzuchesti i usadki betona pri raschete betonnyh i zhelezobetonnyh konstrukcij*, NIIZhB, Strojizdat, Moskva. 1988, 121 p.

### A METHOD OF DISPLACEMENTS FOR EVALUATION OF ENERGY LOSSES UNDER CONSTRUCTION'S DEFORMATION WITH ALTERNATING SIGNS

Bondarenko V.M.  
NIISF, Moscow, Russia

An alternative method of displacements is introduced into the theory of so-called forecast internal energy losses. This theory is inevitably accompanied by the alternating sign of force loading for structural building materials. Previously, the author proposed the methods of evaluation for such energy losses basing on the level of the stress state. In contrast to these methods new method is looking for a difference of work of loading and unloading forces for displacement designs.

KEYWORDS: hysteretic energy loss, the work of materials' deformation.

Buckling analysis

**BUCKLING ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED EPITROCHOIDAL SHELLS STRUCTURES**

GIL-OULBÉ MATHIEU, *associate professor*,  
 ISMAEL TAHA FARHAN, *second year of master student*,  
 DAU TYEKOLO, *lecturer*,  
 Peoples' Friendship University of Russia  
 115419, Moscow, Ordjonikidze, 3

*In the present article, stability of functionally graded epitrochoidal shells under pressure and thermal environment is examined. Material properties are taken as temperature dependent. Finite element solutions are obtained through commercially available tool ANSYS. The linear eigenvalue buckling problem is solved using Block Lanczos method. The effect of different geometry and material parameters on the critical buckling temperature of functionally graded Epitrochoidal Shells under pressure and thermal environment is demonstrated. Finally, the change of the stresses, displacements, rotations and strains were investigated and presented.*

**KEY WORDS:** Functionally Graded Materials, Cyclic Shells, Epitrochoidal Shells, mechanical and thermal material properties, conservative, nonconservative, Stability, Instability, buckling analysis.

**Concepts of Stability and Instability:**

Instability is a universal phenomenon, which may occur in various material bodies. The fundamental concepts of stability and instability are clarified through the following definitions:

*The state of a system is the collection of values of the system parameters at any instant of time.* For example, the positions of material points in a structure and the temperature field at various points constitute the state of that system. The state of a system depends on system parameters and environmental conditions. For example, in a shell structure, the system parameters are geometrical and material properties. And the environmental conditions are the applied forces and thermal conditions.

**Stability** - The state of a system, at any instant of time, is called stable if the relatively small changes in system parameter and / or environmental conditions would bring about relatively small changes in the existing state of the system.

**Instability** - The state of a system at any instant of time is called unstable if relatively small. Changes in system parameter and / or environmental conditions would cause major changes in the existing state.

**Stability and Instability of Equilibrium** - The equilibrium state of a system is called *stable* if small perturbations in that state, caused by load changes or other effects would be confined to a vicinity of the existing equilibrium state. The equilibrium state of a system is called *unstable* if slight changes in conditions related to that state would force the system away from that equilibrium state; an unstable system would find other equilibrium state(s); the new equilibrium state(s) may be in the vicinity of the initial state or may be far away from the initial equilibrium configuration. The concepts of stable and unstable equilibrium are illustrated in Fig. 1 [1]. This figure

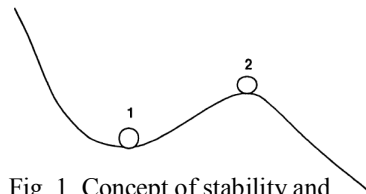


Fig. 1. Concept of stability and instability of equilibrium

shows a small ball lying on a smooth surface. According to the forgoing definitions, the equilibrium state 1 is stable while state 2 is unstable [2]. The relativity of the foregoing definitions is clearly demonstrated in this figure; the state 1 may be stable in a certain limited region, but may be unstable in a larger domain.

**Buckling** is a special mode of instability of equilibrium which may occur in deformable bodies subjected mostly to compressive loadings. So far as the structural problems are concerned, an existing state of equilibrium or trend of behavior of the structure subjected to applied loadings and / or temperature variations could be altered and the structure could acquire a new equilibrium state or a new trend of behavior. This phenomenon is termed the *buckling* of that particular structure. A well-known example of elastic buckling instability is the flexural buckling of an axially compressed slender elastic column subjected to a concentric compressive force. The type of applied loading affects the modes of elastic instability. Loading systems are classified as **conservative** or **nonconservative**. Dead loadings, such as the weight of structures, are conservative forces; time dependent loadings, and the forces which depend on the state of the system are generally nonconservative. Conservative loadings are derivable from a potential function whereas nonconservative forces have no generating potential. From this viewpoint, frictional forces are nonconservative. Elastic bodies subjected to conservative forces may lose their current equilibrium state and find other equilibrated configurations; this mode of elastic instability is normally of the *buckling* type. The equilibrium of the same elastic bodies subjected to nonconservative forces may become *dynamically* unstable; the system could undergo oscillations with increasing amplitude. This mode of elastic instability is called *flutter*. Thin panels or shells in contact with flowing fluids could develop a flutter mode of elastic instability.

#### **An Overview of Shell Buckling:**

The equilibrium of thin elastic shells subjected to certain force fields may become unstable and the shell may undergo *prebuckling*, *buckling*, and *postbuckling* deformation. The occurrence of buckling in thin shells is quite probable due to the fact that the thickness to span ratio of shells is usually much lower than other structural elements. The response of thin shells to compressive forces is essentially very different from the behavior of other structural elements such as struts, columns, and plates; some types of thin shells are extremely sensitive to geometrical and loading imperfections. Geometrical imperfections include all deviations in the shape of the structural member from an ideally assumed geometrical configuration. Thus, a slightly crooked column, in comparison with a perfectly straight bar is considered imperfect. In the case of shells, the geometrical imperfection is marked by deviation of middle surface geometry from a conceived ideal shape.

Loading imperfections are probable deviations of magnitudes and / or directions of applied forces from assumed values and / or directions. As an example, an eccentrically applied axial force to a straight column can be considered an imperfect loading. Loading imperfections, may be quantified by the so-called "imperfection parameters"; in the column problem, the axial force eccentricity could be chosen as an imperfections parameter.

Experiments performed on column and plates, under in-plane compressive conservative forces, have shown that such elements are relatively insensitive to slight geometric and loading imperfections. This is not the case in shell problems.

Buckling experiments carried out on shells have shown that some shells are very sensitive to geometrical and loading imperfections. Thus the buckling load of laboratory shell samples is normally smaller than the critical loads that a perfect system could sustain. This is, on one hand due the fact that the actual shells are, by production, never geometri-

cally perfect and also that an ideally perfect conceived loading can never be produced and, on the other hand due to imperfection sensitivity of real shells.

The imperfection sensitivity of shells has important analysis and design implications; to obtain a realistic estimate of buckling strength of shells, geometrical and loading imperfections must be taken into account.

**Finite element modelling**

An epitrochoidal shell structure [3] with fixed supports is depicted in Fig 2. It has been analyzed under pressure and thermal loading. Thickness of the shell ( $h=1.0\text{ cm}$ ) including two layers ( , shown in Fig.3. The mechanical and thermal material properties used in the present study have been listed in the Table 1.

Table 1. The mechanical and thermal material properties:

Material	Ceramic (	Metallic (Steel)
Thermal expansion coefficient		
Poisons' ratio (	0.25	0.25
Young's' modulus,	390	210
Density ( $kg/m^3$ )	3890	7850
Conductivity(	25	40

In this study, finite element modelling of functionally graded cyclic shell (Epitrochoidal shells) structures with uniform thickness  $h$  is considered as shown in Figure 2. Here, FG epitrochoidal shell is modeled and analyzed in ANSYS through ANSYS parametric design language (APDL) code. A shell element (SHELL181), defined in the ANSYS library, is utilized to discretize the FG Epitrochoidal shell. This shell element has total six degrees of freedom per node i.e., translations and rotations in the  $x, y$  and  $z$  directions.

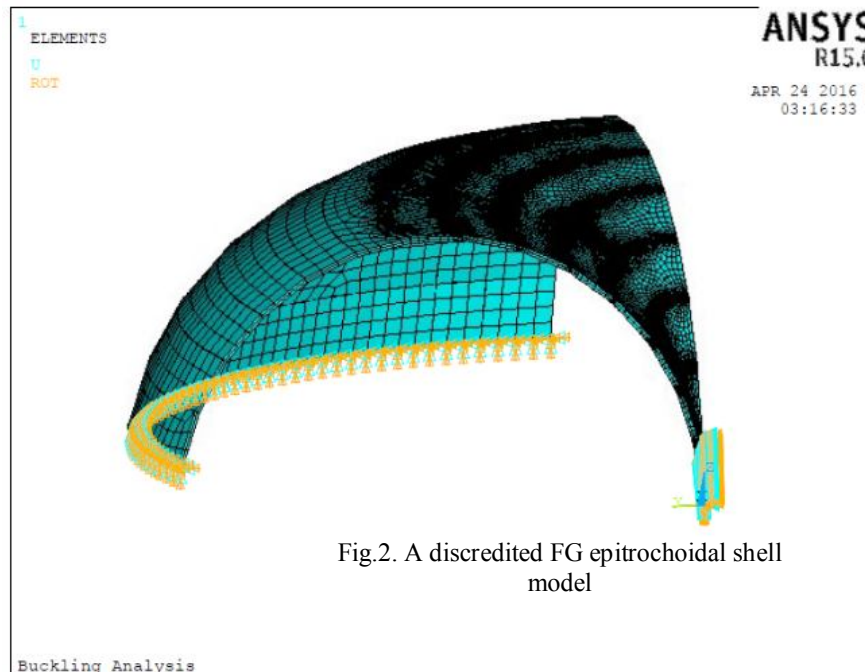


Fig.2. A discretized FG epitrochoidal shell model

**4. Results and Discussions**

In this section, the stability behavior of FG epitrochoidal shell is performed under pressure and uniform temperature field ( $T=700^{\circ}K$ ). The FG epitrochoidal shell is discretized

and solved using finite element steps in ANSYS APDL platform [4]. Block Lanczos method is used to obtain the eigenvalue buckling responses.

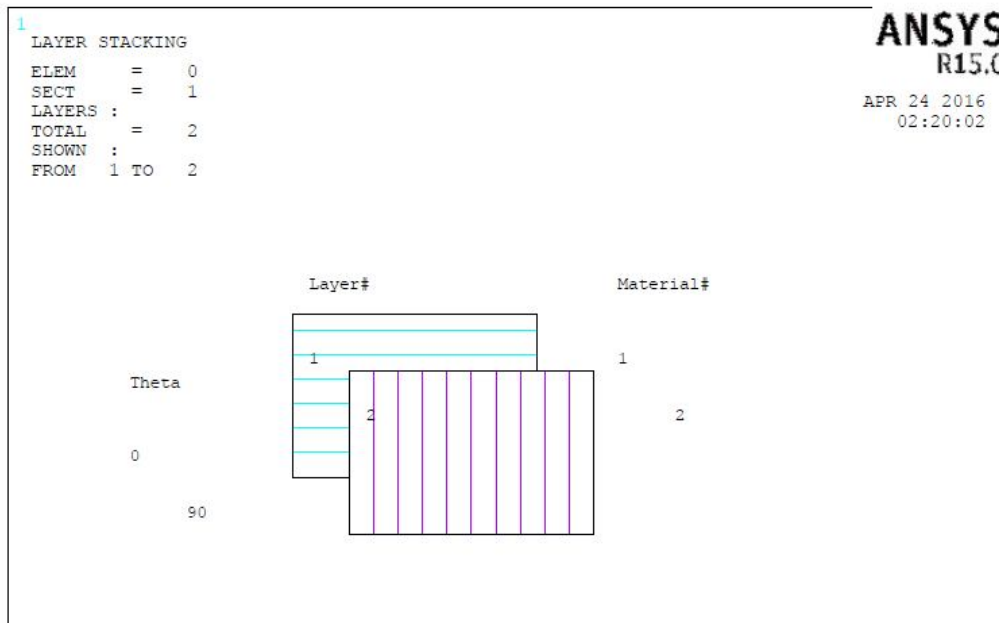


Fig. 3. A discretized layers of the epitrochoidal shell model

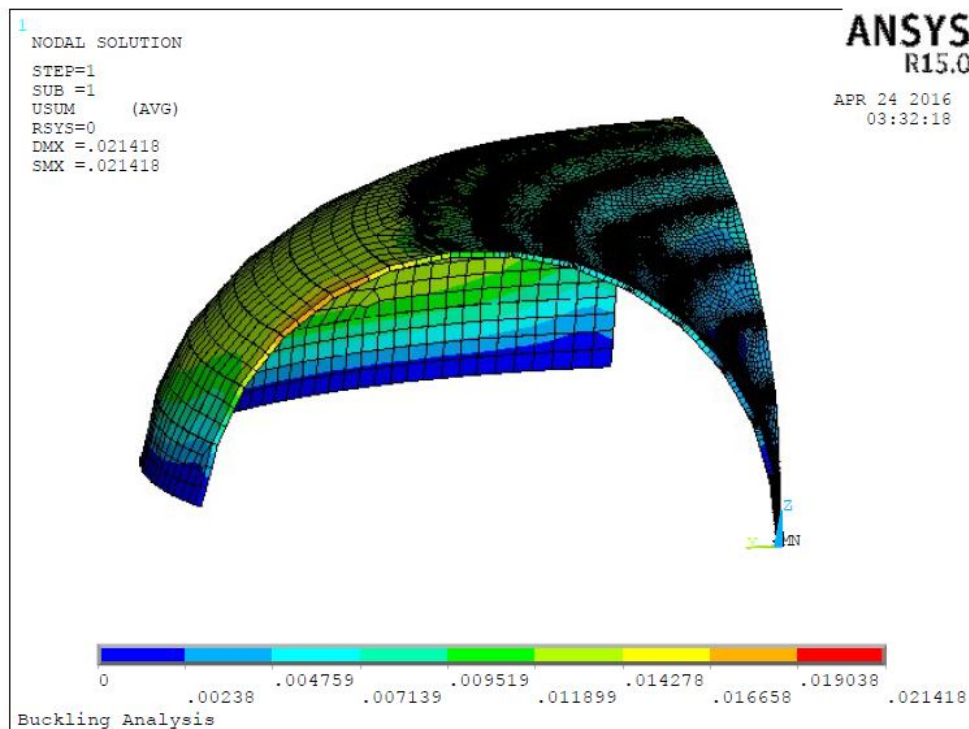


Fig.4. Displacement variation for FG epitrochoidal shell



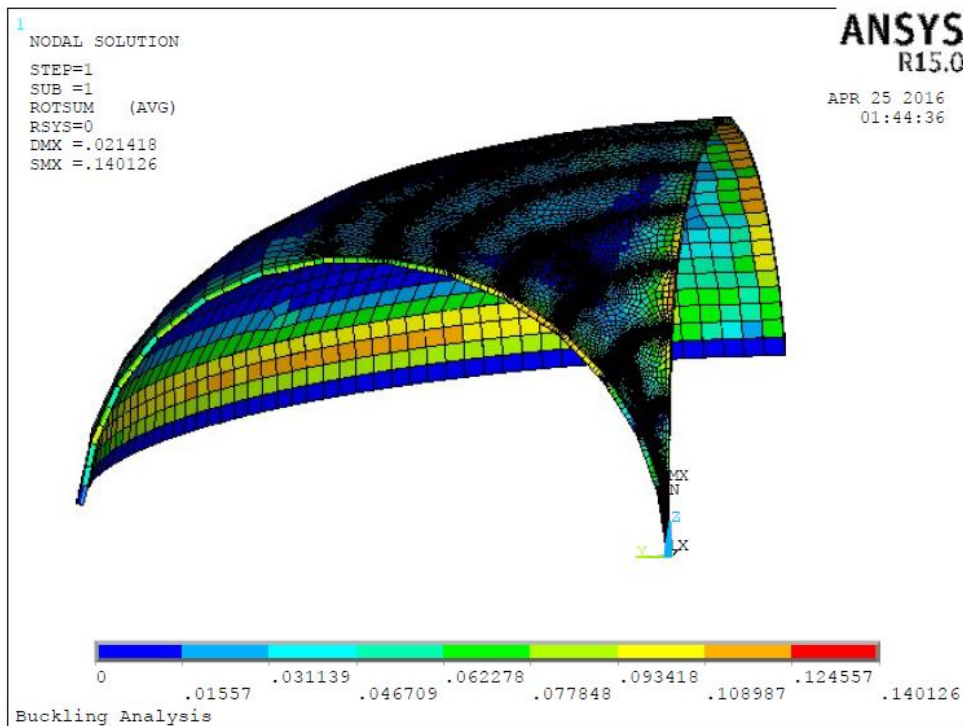


Fig.5. Rotation variation for FG epitrochoidal shell

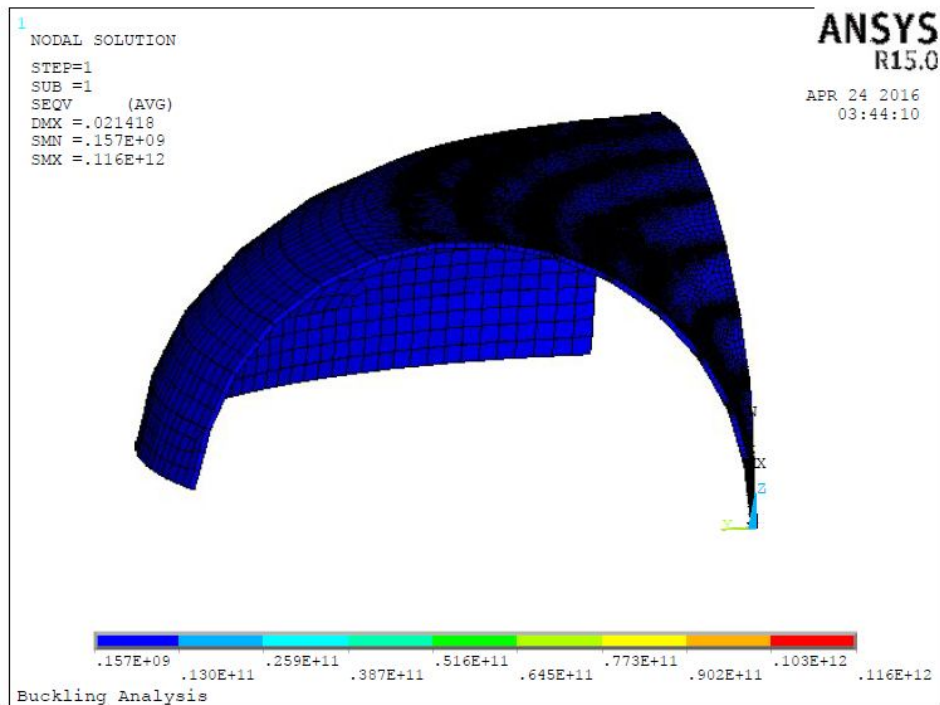


Fig. 6. Von Mises Stress variation for FG epitrochoidal shell

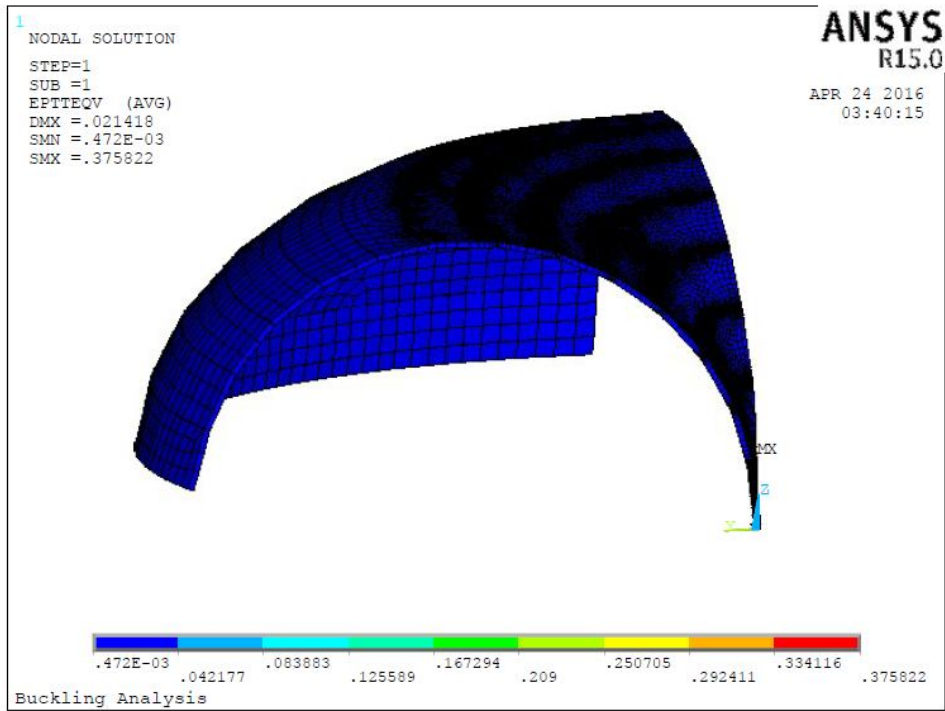


Fig.7. Von Mises of total mechanical and thermal strain variation for FG epitrochoidal shell

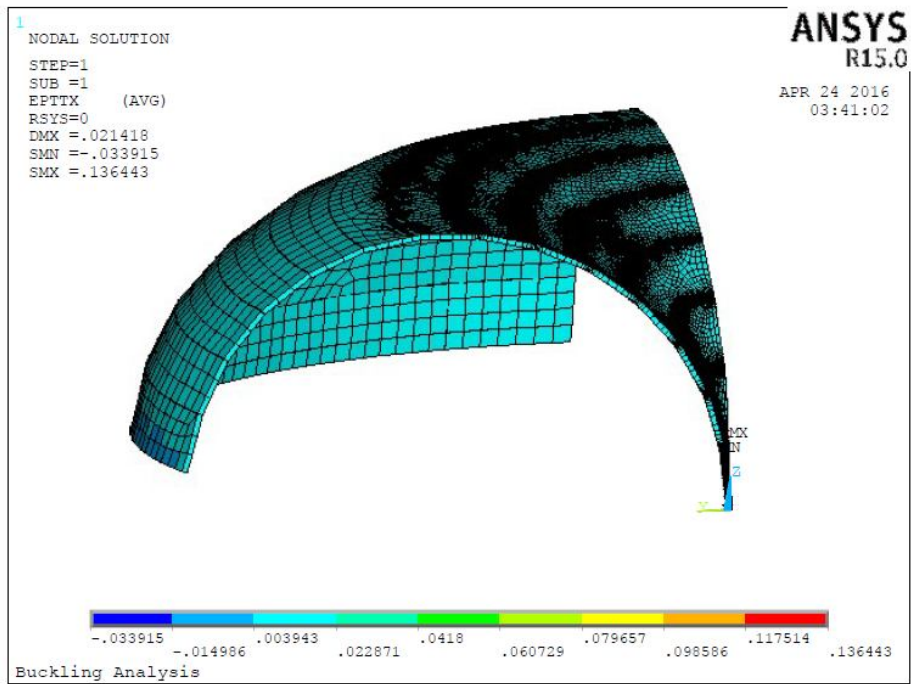


Fig. 8. X-component total mechanical and thermal strain variation for FG epitrochoidal shell



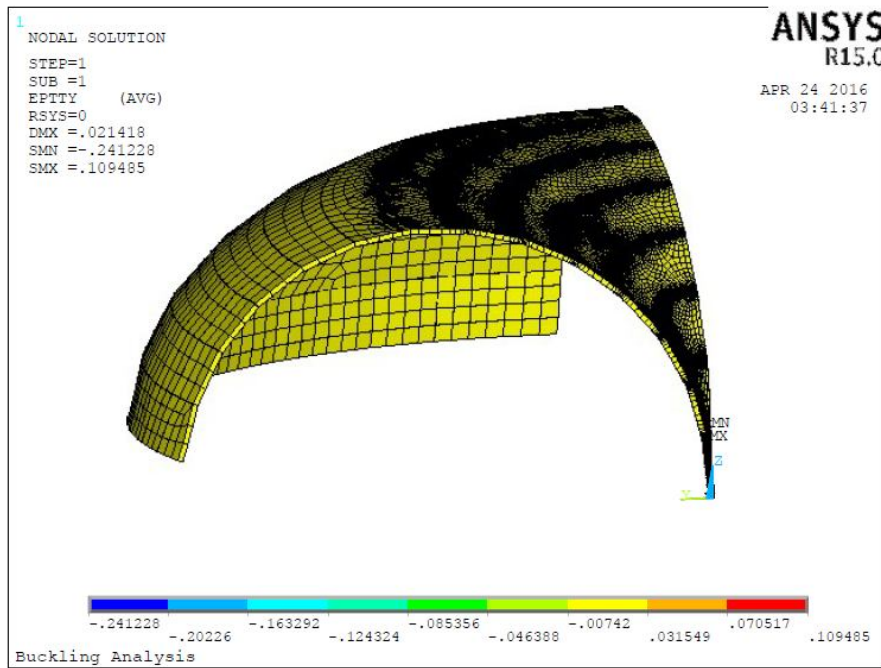


Fig. 9. Y-component total mechanical and thermal strain variation for FG epitrochoidal shell

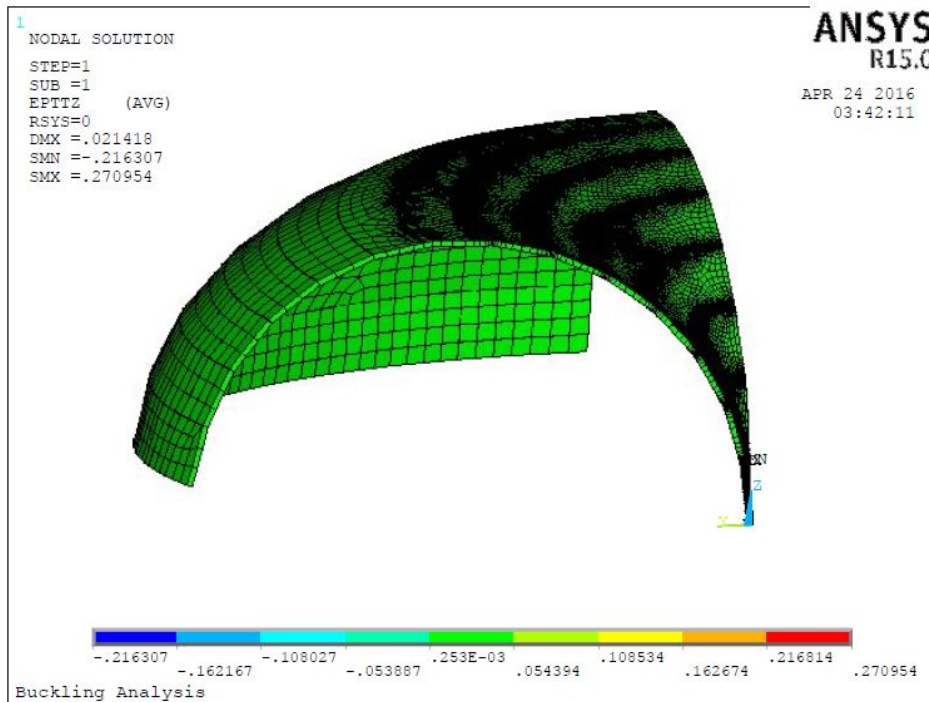


Fig.10. Z-component total mechanical and thermal strain variation for FG epitrochoidal shell

Fig. 4 shows Displacement variation for FG epitrochoidal shell under pressure and thermal loading. The overall displacement varies from 0.00 m to 0.021418 m.

Fig. 5 shows Rotation variation for FG epitrochoidal shell under pressure and thermal loading. The overall Rotation varies from  $0.00 \text{ rad}$  to  $0.140126 \text{ rad}$ .

Fig. 6 shows the Von Mises Stress variation for FG epitrochoidal shell under pressure and thermal loading. The stress varies from  $0.157 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  to  $0.116 \cdot 10^{12} \text{ Pa}$ .

Fig. 7 shows Von Mises of total mechanical and thermal Strain variation for FG epitrochoidal shell under pressure and thermal loading. The strain varies from  $-0.472 \cdot 10^{-3}$  to  $0.375822$ .

Fig. 8 shows X- component of total mechanical and thermal variation for FG epitrochoidal shell under pressure and thermal loading. The strain varies from  $-0.033915$  to  $0.136443$ .

Fig. 9 shows Y- component of total mechanical and thermal Strain variation for FG epitrochoidal shell under pressure and thermal loading. The strain varies from  $-0.241228$  to  $0.109485$ .

Fig. 10 shows Z- component of total mechanical and thermal variation for FG epitrochoidal shell under pressure and thermal loading. The strain varies from  $-0.216307$  to  $0.270954$ .

## 5. Conclusions

In this study, the thermal bucking behavior of FG epitrochoidal shell under pressure and uniform temperature field are investigated. In addition, temperature dependent material properties of FGM constituents are considered. Finite element solution for the buckling behavior of present FG model is proposed using Block Lanczos method. The influences of different material and geometrical parameters on the thermal buckling of FG epitrochoidal shell are illustrated. Finally, the change of the stresses, displacements, rotations and stains were investigated and presented.

## References

1. *M. Farshad Empa. Design and Analysis of Shell Structures*, Switzerland. Springer Netherlands, 423p.
2. *Hui-Shen Shen (2009). Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, LAP Lambert Academic Publishing, 200p.
3. *Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
4. *Mathieu, Gil-oulbé (1997). The Stress-Strain Analysis of Epitrochoidal Shells: PhD Thesis*, Moscow: RUDN, 16 p.

## РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЭПИТРОХОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Матье Жиль-улбе, И.Т. Фархан, Д. Теколо

В настоящей статье рассматривается устойчивость функционально-градиентных эпिटрохоидальных оболочек под давлением и тепловой среды. Свойства материала принимаются как зависящие от температуры. Конечно-элементные решения получены с помощью программного комплекса ANSYS. Линейные задачи на собственные значения устойчивости решаются с помощью блочного метода Ланцоша. Влияние различной геометрии и параметров материала на критическую температур функционально-градиентных эпिटрохоидальных оболочек под давлением и тепловой средой наглядно показано. В конце, изменение напряжений, перемещений, вращений и деформаций изучены и представлены.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** функционально-градиентные материалы, циклические оболочки, эпिटрохоидальные оболочки, механические и термические свойства материала, консервативный, неконсервативный, стабильность, нестабильность, анализ потери устойчивости.

**Динамика конструкций и сооружений**

**СВОБОДНОЕ КОЛЕБАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, ЛЕЖАЩЕГО НА ДВУХКОНСТАНТНОМ ОСНОВАНИИ**

НАТИГ С. РЗАЕВ

*Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,  
ул. Б Вагабзаде 9, Баку, AZ 1141, Азербайджан,  
natiq.rzayev.1984@list.ru*

*В работе рассматривается задача о собственном колебании стержня из неоднородного по толщине и длине разномодульного материала и лежащего на двухконстантном основании типа Пастернака П.Л.*

*Уравнение движения является сложным дифференциальным уравнением с частными производными четвертого порядка. Решение задачи строится с помощью метода разделения переменных и метода ортогонализации Бубнова–Галеркина. При конкретных значениях характерных параметров проведен расчет, и результаты представлены в виде таблиц и графиками зависимости между круговой частотой и параметрами неоднородности. Результаты расчетов показывают, что учет неоднородности модуля упругости и плотности существенным образом влияет на величины круговых частот.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** растяжение, сжатие, изгиб, кручение, эластичность, круговая частота, колебание.

В работе исследуется задача свободного поперечного колебания стержня прямоугольного поперечного сечения, изготовленного из разномодульного неоднородного материала, лежащего на двухконстантном основании Пастернака [1]. Решение задачи осуществляется путем применения метода разделения переменных Бубнова-Галеркина. В первом приближении найдена формула для определения значения круговой частоты. При конкретных значениях характерных параметров проведен численный анализ, и результаты представлены в виде таблиц и графиков.

Как известно, в строительстве современных инженерных сооружений, в машиностроении и во многих других отраслях широко используются конструкции из неоднородного разномодульного материала. Сюда можно отнести, в основном, композитные неоднородные материалы, наполненные полимерами [1,6]. Предполагается, что модуль упругости соответственно при растяжении и сжатии и плотность являются непрерывными функциями координат длины  $x$  и высоты  $z$ :

$$E^+ = E_0^+ f_1(x) f_2(z); \quad E^- = E_0^- f_1(x) f_2(z); \quad \rho = \rho_0 \psi_1(x) \psi_2(z). \quad (1)$$

Здесь  $E_0^+$ ,  $E_0^-$ ,  $\rho_0$  – соответствуют однородному изотропному материалу,  $f_1(x)$  со своими производными до второго порядка и  $\psi_1(x)$  – являются непрерывными функциями. Отметим, что специфическим фактором в данном случае является то, что граница растянутых и сжатых областей существенным образом зависит от функции  $f_2(z)$ .

Распределение напряжений по сечению определяется с использованием следующих соотношений:

$$\sigma = E^+ f_1(x) f_2(z) (l - \varphi z); \quad \sigma > 0; \quad \sigma = E^- f_1(x) f_2(z) (l - \varphi z); \quad \sigma < 0. \quad (2)$$

Предполагается, что уравнение нейтральной линии определяется следующим соотношением:

$$l - z_0 \varphi = 0, \quad (3)$$

где  $l$  и  $\wp$  – значения деформации и кривизны центральной линии,  $z_0$  – граница нейтральной линии.

Сюда необходимо добавить условие отсутствия и уравнение момента:

$$\int_{-h}^{+h} \sigma dz = \int_{h_1}^{+h} \sigma^+ dz + \int_{h_2} \sigma^- dz = 0, \quad (4)$$

$$M = \int_{-h}^{+h} z \sigma dz = \int_{h_1}^{+h} z \sigma^+ dz + \int_{h_2} z \sigma^- dz = 0. \quad (5)$$

Здесь  $h_1$  и  $h_2$  – размеры растянутых и сжатых зон.

Учитывая формулы (1) и (4), получим

$$\int_{-h}^{+h} \sigma dz = \int_{h_1}^{+h} f_2(z)(l - z \wp) dz + \alpha \int_{h_2} f_2(z)(l - z \wp) dz = 0, \quad \left( \alpha = \frac{E^-}{E^+} \right);$$

отсюда находим:

$$l = \wp \cdot \frac{\int_{h_1}^{+h} f_2(z) z dz + \alpha \int_{h_2} z f_2(z) dz}{\left[ \int_{h_1}^{+h} f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} f_2(z) dz \right]^2}. \quad (6)$$

Теперь определим изгибающий момент:

$$\frac{M}{b} = f_1(x) \left[ \int_{h_1}^{+h} E^+ f_2(z)(l + z \wp) z dz + \int_{h_2} E^- f_2(z)(l + z \wp) z dz \right], \quad (7)$$

или же

$$\frac{M}{b E^+ f_1(x)} = l \left[ \int_{h_1} \bar{z} f_2(\bar{z}) d\bar{z} + \alpha \int_{h_2} \bar{z} f_2(\bar{z}) d\bar{z} \right] + \wp \left[ \int_{h_1} \bar{z}^2 f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} \bar{z}^2 f_2(z) dz \right].$$

Подставляя сюда выражение (6), получим:

$$\frac{M}{b E^+ f_1(x)} = \wp \left[ \frac{\left( \int_{h_1} z f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} z f_2(z) dz \right)^2}{\int_{h_1} f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} f_2(z) dz} + \int_{h_1} z^2 f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} z^2 f_2(z) dz \right],$$

где, как уже указывалось ранее,  $h_1$  и  $h_2$  – размеры по высоте растянутых и сжатых зон.

С учетом (7) и сопротивления двухконстантного основания уравнение движения записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f(x) \frac{\partial W}{\partial x^2} \right] + \bar{K}_1 W - \bar{K}_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \bar{\rho} \psi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

Здесь  $K_1$  и  $K_2$  – характеристики основания, определяемые с помощью экспериментов. Приняты следующие обозначения:

$$\bar{K}_1 = K_1 (\bar{M}_0 \bar{K})^{-1}; \quad \bar{K}_2 = (\bar{M}_0 \bar{K})^{-1}; \quad \bar{\rho}_0 = \frac{1}{2h} \int_h \psi_2(z) dz; \quad \bar{\rho} = \rho_0 (\bar{M}_0 \bar{K})^{-1}.$$

Уравнение (8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2f_1'(x) \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (f_1'' - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ & + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) W + \bar{\rho} \psi_2(x) f_1^{-1}(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Как видно, уравнение (9) является сложным и поэтому при решении следует применить приближенные аналитические методы. В данном случае будут использованы методы, которые являются эффективными и апробированными, а именно, метод разделения переменных и метод Бубнова - Галеркина.

В первом случае решение будем искать в следующем виде:

$$W(x) = V(x) \sin \omega t, \quad (10)$$

где  $V(x)$  должно удовлетворять краевым условиям,  $\omega$  – круговая частота. Подставляя (10) в (9), получим:

$$\frac{d^4 V}{dx^4} + 2f_1'(x) \cdot \frac{d^3 V}{dx^3} + (f_1'' - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 V}{dx^2} + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) V - \bar{\rho} \omega^2 \psi_2(x) f_1^{-1}(x) = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) будем искать с помощью метода Бубнова- Галеркина, а функцию  $V(x)$  примем в следующем виде:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n a_i \theta_i(x). \quad (12)$$

Здесь  $a_i$  – неизвестные постоянные и каждый член ряда  $\theta_i(x)$  должен удовлетворять соответствующим краевым условиям.

Функция ошибки в данном случае записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_i}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_i}{dx^3} + (f_1''(x) - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 \theta_i}{dx^2} + \right. \\ \left. + \bar{K}_1 f_1^{-1}(x) \theta_i - (\bar{\rho} \psi_2(x) f_1^{-1}(x)) \omega^2 \right] \neq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Условие ортогонализации в данном случае имеет вид:

$$\int_0^l \eta(x) \theta_k dx = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

В произвольном приближении  $\omega^2$  определяется из системы уравнений (14). Эта система относительно  $\omega^2$  является линейно однородным уравнением. Для существования нетривиального решения главный определитель данной системы должен обращаться в нуль:

$$\|\omega^2\| = 0. \quad (15)$$

При раскрытии (15) получается алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени относительно  $\omega^2$ . Хотя при помощи современной компьютерной техники определение  $\omega^2$  при любом приближении не вызывает особого труда, будем определять основной тон частоты. Это соответствует первому приближению:

$$\int_0^l \eta(x) \theta_1 dx = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + (f_1''(x) - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} + \right. \\ \left. + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) \theta_1 - \omega^2 \bar{\rho} \psi_2(x) f_1^{-1}(x) \theta_1 \right] dx = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда находим:



$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + (f_1''(x) - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) \theta_1 \right] \theta_1 dx}{\bar{\rho} \int_0^l \psi(x) \cdot f^{-1}(x) \theta_1^2 dx} \quad (18)$$

В случае если стержень является неоднородным только по модулю упругости  $\psi(x)=1$  и формула (18) принимает следующий вид:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + (f_1''(x) - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) \theta_1 \right] \theta_1 dx}{\bar{\rho} \int_0^l f^{-1}(x) \theta_1^2 dx} \quad (19)$$

Из выражений (18) и (19) получим следующие соотношения:

$$\omega_1^2 = \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = \frac{\int_0^l f_1^{-1}(x) \theta_1^2(x) dx}{\int_0^l f_1^{-1}(x) \psi(x) \theta_1^2(x) dx} \quad (20)$$

Для анализа рассмотрим случай:

$$\theta_1(x) = \sin \pi \bar{x}; \quad f_1(x) = 1 + \varepsilon \bar{x}; \quad \psi_1(x) = 1 + \mu \bar{x}; \quad f_2(x) = 1 + \varepsilon \bar{z}; \quad \psi_2(z) = 1 + \mu \bar{z} \quad (21)$$

Здесь  $\bar{x} = x \cdot l^{-1}$ ;  $\bar{z} = z \cdot h^{-1}$ ;  $\varepsilon \in [0,1]$ ;  $\mu \in [0,1]$ .

С учетом (21) формула (20) принимает следующий вид:

$$\bar{\omega}^2 = \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = \frac{\int_0^1 \frac{1}{1 + \varepsilon \bar{x}} \sin^2 \pi \bar{x} d\bar{x}}{\int_0^1 \frac{1 + \mu \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} \sin^2 \pi \bar{x} d\bar{x}} \quad (22)$$

Для простоты анализа примем следующие обозначения:

$$b_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} d\bar{x}; \quad b_2 = \int_0^1 \frac{\bar{x} \sin^2 \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} d\bar{x};$$

тогда формула (22) записывается в следующем виде:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{b_1}{b_1 + \mu b_2} = \frac{1}{1 + \mu \frac{b_2}{b_1}} > 0.$$

Отсюда получим:  $1 + \mu \frac{b_2}{b_1} > 0$  т.е.  $\mu \frac{b_2}{b_1} > -1$ ;  $\frac{b_2}{b_1} > -\frac{1}{\mu}$ .

Продолжая анализ результата, примем что сопротивление внешней среды отсутствует. Тогда формула (18) принимает следующий вид:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + f_1''(x) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right] \theta_1 dx}{\bar{\rho} \int_0^l \psi(x) \cdot f^{-1}(x) \theta_1^2 dx} \quad (23)$$

Из формул (18) и (23) можно получить следующее соотношение:

$$\bar{\omega}_1^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{\int_0^l \left[ \bar{K}_1 f_1^{-1}(x) \theta_1 - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right] \theta_1 dx}{\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2 f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + f_1'' \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right] \theta_1 dx}. \quad (24)$$

Учитывая (21), получим:

$$\bar{\omega}_1^2 = 1 + \frac{\int_0^1 \left[ \bar{K}_1 \frac{\sin \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} + \bar{K}_2 \frac{1}{1 + \varepsilon \bar{x}} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right] \sin \pi x dx}{\int_0^1 \left[ (1 + \varepsilon x) \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - 2 \varepsilon \left(\frac{\pi}{l}\right)^3 \cos \pi x \right] \sin \pi x dx} = 1 + \frac{\left( \bar{K}_1 + \bar{K}_2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right) \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi x}{1 + \varepsilon \bar{x}} dx}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{1}{2}},$$

$$\bar{\omega}_1^2 = 1 + 2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left( \bar{K}_1 + \bar{K}_2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right) b_1. \quad (25)$$

Расчет можно провести и для случаев:

$$f_1(\rho) = 1 + \varepsilon e^\rho; \quad \psi_1(\rho) = 1 + \mu e^\rho; \\ f_2(\rho) = 1 - \varepsilon \cos 2\pi\rho; \quad \psi_2(\rho) = 1 - \mu \cos 2\pi\rho. \quad (26)$$

Результаты проведенных численных расчетов, представлены в виде таблиц и графика:

$$b_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi\rho}{1 + \varepsilon\rho} d\rho; \quad b_2 = \int_0^1 \frac{\rho \sin^2 \pi\rho}{1 + \varepsilon\rho} d\rho.$$

Таблица 1

$\varepsilon$	$b_1$	$b_2$
0	0,5	0,25
0,25	0,445	0,219
0,50	0,402	0,196
0,75	0,367	0,177

Таблица 2

$\varepsilon$	$\bar{\omega}^2; \mu = 0,5$
0	0,8
0,25	0,802
0,50	0,804
0,75	0,805

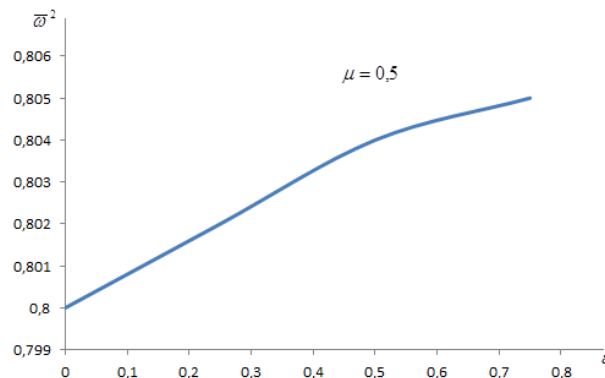


Рис. 1. График зависимости безразмерной частоты от параметра неоднородности

#### Л и т е р а т у р а

1. Толоконников Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах// Инж. журнал. МГТ. – 1968. – № 6. – С. 108-110.
2. Панферов В.М. Теория упругости и деформационная теория пластичности твердых тел с разными свойствами на сжатие и кручение. – ДАН. СССР. – 1968. – Т. 180. – № 1. – С. 41-44.
3. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. – М., 1972. – 320 с.

4. Быков Д.Л. Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды// Инж. журнал. МТТ. – 1966. – №4. – С. 58-64.
5. Шапиро Г.С. О деформациях тел, обладающими различным сопротивлением растяжению и сжатию// Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1966. – № 2. – С. 123-125.
6. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела// Известия АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 29-34.
7. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Стройиздат. – 1954. – 89 с.
8. Gadjiev V.D., Rzayev N.S. Solitons of nonhomogenous viscoelastic foundation// Translation of NAS of Azerbaijan, 2013. – Vol. XXXII, № 4. – Pp-133-138.
9. Новацкий В. Динамика сооружений. – М, 1963. – 376 с.
10. Маркин А.А., Соколова М. Ю., Христинич Д.В. Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела// Материалы Международного научного симпозиума, Тула: Тул. ГУ. – С. 97-98.

References

1. Tolokonnikov, L.A. (1968). O svyazi mezhdu napryazheniyami i deformatsiyami v raznomodul'nyh izotropnyh telah, *Inzhenerniy Zhurnal. Mehanika Tverdogo Tela*, №6, pp.108-110.
2. Panferov, V.M. (1968). Teoriya uprugosti i deformatsionnaya teoriya plastichnosti tvorydyh tel s raznymi svojstvami na szhatie i kruchenie, *DAN SSSR*, Vol. 180, №1, .41-44.
3. Moskvitin, V.V. (1972). *Soprotivlenie Vyazkouprugih Materialov*, Moscow, 320 p.
4. Bykov, D.L. (1966). Osnovnie uravneniya i teoremi dlya odnoj modeli fisicheski nelineynoy sredi, *Inzhenerniy Zhurnal. Mehanika Tverdogo Tela*, №4, pp. 58-64.
5. Shapiro, G.S. (1966). On deformation of bodies possessing different resistance to tensile and compression, *Inzhenerniy Zhurnal. Mehanika Tverdogo Tela*, № 2, pp. 123-125.
6. Lomakin, E.V., Rabotnov, Yu.N. (1978). Sootnosheniya teorii uprugosti dlya izotropnogo rasnomodul'nogo tela, *Izv. AN SSSR. Mehanika Tverdogo Tela*, № 6, pp. 29-34.
7. Pasternak, P.L. (1954). *Osnovi Novogo Metoda Rascheta Fundamentov na Uprugom Osnovanii pri Pomoschi Dvuh Koeffitziyentov Posteli*, Moscow, Strojizdat, 89 p.
8. Gadjiev, V.D., Rzayev, N.S. (2013). Solitons of nonhomogenous viscoelastic foundation, *Translation of NAS of Azerbaijan*, Vol. XXXII, № 4, pp. 133-138.
9. Novatzkiy, V. (1963). *Dinamika Sooruzheniy*, Moscow, 376 p.
10. Markin, A.A., Sokolova, M.Yu., Hristich, D.V. Problemi prochnosti, plastichnosti, i ustojchivosti v mehanike deformiruemogo tverdogo tela, *Materialy Mezhdunarodnogo yauchnogo simposiuma, Tula, TulGU*, pp. 97-98.

**OSCILLATION OF A HOMOGENEOUS DIFFERENT MODULUS BAR LYING ON TWO CONSTANT FOUNDATION**

Natig S. Rzayev

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan,  
AZ1141, 9, B. Vahabzade str., Baku, Azerbaijan*

In the paper, a problem of natural vibration of a bar inhomogeneous in thickness and length made of different modulus material and lying on two Pasternak –type foundation is considered.

The equation of motion is the fourth order complex partial differential equation. The solution of the problem is constructed by means of method of operation of variables and of the Bubnov - Galerkin orthogonalization method. At specific values of characteristic parameters, the calculation is conducted and the results are represented in the form of tables and graphs of dependence between annular frequency and inhomogeneity parameters. The results of calculations show that account of inhomogeneity of elasticity modulus density and also mediums resistance essentially influences on the value of annular frequency.

**Key words:** tension, compression, bending, torsion, elastic, frequently, vibration.

## Прочность летательных аппаратов

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТИПА «ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ» - КРАЕВОЕ КРУЧЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Вал.В. ФИРСАНОВ, д-р техн. наук, профессор

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» «МАИ»

125993 Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4; [k906@mai.ru](mailto:k906@mai.ru)

*Сформулирована краевая задача для определения НДС типа «погранслой», идентичного деформации кручения края, и дано ее решение способом приведения к задаче Дирихле. В результате расчетов показан существенный вклад НДС краевого кручения в общее НДС пластинки, что очень важно при оценке прочности различных соединений тонкостенных элементов авиационных конструкций.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** прямоугольная пластинка, трехмерные уравнения теории упругости, метод прямого асимптотического интегрирования, краевые задачи, основное напряженно-деформированное состояние, напряженное состояние «пограничный слой», быстро затухающее напряженное состояние кручения закрепленного края пластинки, задача Дирихле.

#### **Введение**

Как известно [1, 2], для создания приближенных методов расчета пластин и оболочек, учитывающих трехмерность напряженного состояния, последнее часто представляют в виде суммы внутреннего напряженного состояния и пограничного слоя. Под первым слагаемым подразумевается напряженное состояние, которое с известной степенью приближенности можно строить при помощи классической теории. В результате какого-либо уточнения последней появляется пограничный слой – самоуравновешенное напряженное состояние, затухающее, на основании принципа Сен-Венана, при удалении от края на расстояние, соизмеримое с толщиной пластинки или оболочки.

Одним из возможных путей построения математически обоснованной теории пластинок и оболочек, т. е. теории, позволяющей сколь угодно точно аппроксимировать решение трехмерной задачи теории упругости, является применение асимптотических методов, приводящих, в конечном итоге, к представлению решения в виде рядов, расположенных по степеням малого параметра  $h$ -относительной полутолщины пластинки и оболочки.

Применяя метод прямого асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной задачи теории упругости, А.Л. Гольденвейзер [3] свел задачу определения напряженного состояния изгибаемой изотропной прямоугольной пластинки постоянной толщины к построению трех итерационных процессов. Первый из них – основной итерационный процесс, начальное приближение эквивалентно классической теории, определяет медленно затухающее или внутреннее напряженное состояние пластинки. Два других вспомогательных итерационных процесса определяют быстро затухающие при удалении от края напряженные состояния, эквивалентные напряженным состояниям краевого скручивания и краевой плоской деформации, определяемым решениями краевых задач, описываемыми гармоническим и бигармоническим уравнениями со специфическими граничными условиями. Решение этих краевых задач связано с математическими трудностями, не позволяющими применить эти результаты в практике инженерных расчетов.

В связи с этим, в работах [1, 2, 4] с помощью вариационно-асимптотического метода построена приближенная теория расчета НДС прямоугольных пластинок из композиционных материалов, круглых пластинок и круговой цилиндрической оболочки из изотропного материала постоянной и переменной толщины. На основании расчетов тонких пластинок и оболочек установлено, что вблизи жестко защемленного края дополнительные напряжения краевой плоской деформации одного порядка с максимальными значениями наибольших напряжений. Кроме того, существенное значение приобретают поперечные нормальные и касательные напряжения, что очень важно при оценке прочности авиационных конструкций из слоистых композиционных материалов.

С помощью этой теории разработан расчетный аппарат оценки прочности переходных зон конструкций, разностенных стыков, а также непрерывных соединений [5,6] (фланцевых, сварных) при наличии в них дефектов в виде начальных трещин. Однако в этой приближенной теории не учитывается напряженное состояние краевого кручения типа «пограничный слой».

В связи с этим, в данной работе ставится задача о дополнении приближенной трехмерной теории расчета НДС прямоугольных пластинок самоуравновешенным быстро затухающим НДС – кручением жестко защемленного края. Дана окончательная формулировка краевой задачи для расчета НДС типа «погранслой», идентичного деформации краевого кручения, и дано ее решение способом приведения к задаче Дирихле.

#### **Постановка задачи**

Пусть прямоугольная пластинка из изотропного материала нагружена поперечной распределенной нагрузкой  $q(x,y)$ . Введем ортогональную систему координат  $xuz$  (рис. 1) таким образом, чтобы оси  $x$  и  $y$ , лежащие в срединной плоскости пластинки, совпадали с главными направлениями упругости.

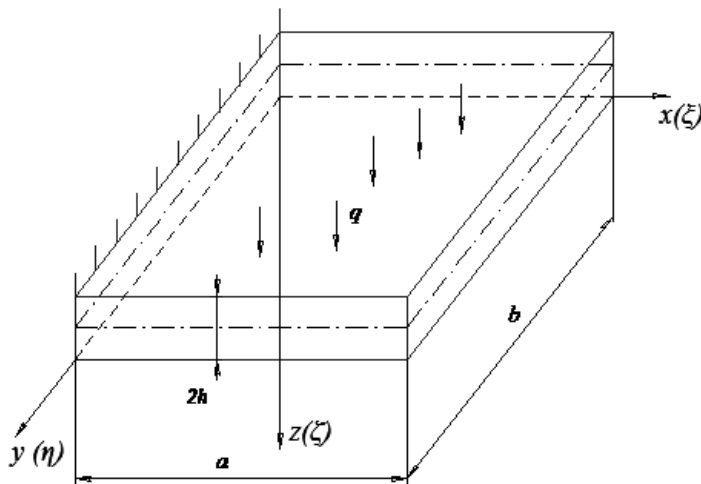


Рис.1. Прямоугольная пластинка

Обозначив через  $a$ ,  $b$ ,  $2h$  длину, ширину и толщину пластинки соответственно, отнесем ее к безразмерной системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  связанной с системой  $(x,y,z)$  равенствами:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{h}. \quad (1)$$

В продольном направлении наряду с координатой  $\xi$  будем применять, где это надо, координату

$$\xi_1 = x / h, \quad (2)$$



которая, очевидно, связана с координатой  $\xi$  зависимостью

$$\xi_1 = \lambda \xi, \quad (3)$$

где

$$\lambda = a/h.$$

Для определенности будем полагать, что край пластинки  $\xi = 0$  жестко заземленный, а остальные края могут быть любыми и нагруженными краевыми внешними нагрузками типа распределенных перерезывающих сил или изгибающих моментов

Будем интегрировать систему дифференциальных уравнений трехмерной задачи теории упругости

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, (xy) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z), (xy) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, (xy). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем символ  $(xy)$  означает, что имеет место второе соотношение, которое получается из приведенного заменой  $x, u, 1$  на  $y, v, 2$  и наоборот.

На плоскостях пластинки  $z = \pm h$  должны выполняться граничные условия:

$$\sigma_z = \pm \frac{1}{2}q(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (5)$$

Кроме граничных условий (5) будем использовать соотношение:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \pm h, \quad (6)$$

которое вытекает из (5) и третьего уравнения (4).

Пусть  $\theta$  есть любое из напряжений или перемещений, которое будем задавать в виде:

$$\theta = h^{-p}\theta_s, \quad (7)$$

где  $p$  – целое число, различное для разных напряжений и перемещений и  $s = k, n, c$ . Следует отметить, что этими индексами обозначаются компоненты НДС, относящиеся к классической теории, краевых плоской деформации и скручивания соответственно. Кроме того, при окончательном определении указанных компонентов необходимо учитывать асимптотику каждого НДС, определяемого множителем  $h^p$ .

Если выбрать  $p$  в разложении (7) следующим образом:

$$\begin{aligned} p = 2 & \quad \text{для } \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v; \\ p = 1 & \quad \text{для } \tau_{xz}, \tau_{yz}; \quad p = 0 \quad \text{для } \sigma_z; \quad p = 3 \quad \text{для } w, \end{aligned} \quad (8)$$

то можно показать [1], что соответствующее решение эквивалентно классической теории изгиба пластинок не только в смысле тождества дифференциальных уравнений, но и в смысле тождества граничных условий на боковых краях

пластинки. Далее полагаем, что основное НДС пластинки, соответствующее классической теории, определено.

Обратимся к построению краевых задач, при помощи которых можно находить дополнительные по отношению к классической теории НДС, сколько угодно быстро затухающие при удалении от края  $\xi = 0$ .

Рассмотрим два типа граничных условий на краю  $\xi = 0$

$$u = 0, v = 0, w = 0 \quad (9)$$

$$u = 0, \tau_{xy} = 0, w = 0, \quad (10)$$

которые моделируют жестко защемленный край пластинки.

В работе [1] для граничных условий (9) доказано, что с точностью до величин порядка  $h^*$  можно пренебречь краевым кручением, а для граничных условий (10) – краевой плоской деформацией. Тогда задача определения краевого напряженного состояния трактуется как задача суперпозиции трех состояний, одно из которых соответствует решению классической теории, другие – дополнительные, отвечают решению плоской деформации для граничных условий (9) и краевого кручения для граничных условий (10).

Применяя прием растяжения масштаба по толщине пластинки, а также в продольном направлении по формуле (2), принимаем в дальнейшем, что скорость изменения искомых величин по переменным  $(\xi_1, y, \zeta)$  не слишком велика. Следует отметить, что в дальнейшем учитывается тот факт, что перемещения дополнительных НДС малы [1] в сравнении с перемещениями, отвечающими классической теории.

Пусть число  $p$  в разложении (7) принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z \rightarrow p = 2; \quad \tau_{xy}, \tau_{yz} \rightarrow p = 1 \\ u, w \rightarrow p = 1; \quad v \rightarrow p = 0. \end{aligned}$$

Тогда для определения величин  $\theta_n$  получим систему уравнений, соответствующую краевой плоской деформации. В работе [1] приведены основные соотношения и граничные условия для этой краевой задачи в прямоугольной пластинке из композиционного материала, а также пример расчета.

### **Краевое кручение.**

Пусть число  $p$  в разложении (7) принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} (\tau_{xy}, \tau_{yz}) \rightarrow p = 2, \quad (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z) \rightarrow p = 1, \\ (u, w) \rightarrow p = 0, \quad v \rightarrow p = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда в соответствии с асимптотическим методом для определения величин  $\theta_c$  в (7) имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \zeta} = 0, \quad E = \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 2(1 + \mu)\tau_{yz}, \quad E = \frac{\partial v}{\partial \xi_1} = 2(1 + \mu)\tau_{xy}, \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} = 0, \\ E \frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z), \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x), \\ E \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y), \quad E \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) = 2(1 + \mu)\tau_{xz}. \end{aligned} \quad (12)$$

В системе уравнений(12) основной является система уравнений, из которой определяются  $(\tau_{xy}, \tau_{yz}, v_c)$ . Она представляет собой систему дифференциаль-

ных уравнений задачи о кручении призматических стержней (с осью, проходящей вдоль оси  $y$ ).

Построение этого решения сводится к интегрированию гармонического уравнения. Действительно, первые три уравнения системы (26) можно выполнить, положив

$$\tau_{xyc} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2}, \quad \tau_{yzc} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \zeta}, \quad E\nu_c = 2(1 + \mu) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1}, \quad (13)$$

где  $\Psi$  - гармоническая функция переменных  $\xi_1, \zeta$ , т.е. имеет место уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (14)$$

Остальные уравнения из системы (12) будут также выполняться, если положить

$$\begin{aligned} \sigma_{xc} &= -2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial y}, & \tau_{xzc} &= -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial \zeta}, \\ \sigma_{zc} &= 0, & \sigma_{yc} &= 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial y}, \\ Eu_c &= -2(1 + \mu) \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & Ew_c &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (12) определяет компоненты НДС краевого кручения, имеющие порядок на единицу меньше, чем компоненты НДС в формуле (13). По этой причине ими в суммарном НДС пластинки будем пренебрегать.

Очевидно, что величины, определяемые выражениями (13), должны удовлетворять однородным граничным условиям (5), если потребовать,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1. \quad (16)$$

Можно показать, что уравнение (14) имеет единственное решение, которое удовлетворяет условию (16), а также обладает свойством затухания:

$$\Psi = 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad (17)$$

и на жестко защемленном краю удовлетворяет второму из граничных условий (10), которое приводится к виду

$$\tau_{xyk} + \tau_{xyc} = 0 \quad \text{при } \xi = 0. \quad (18)$$

Преобразуем граничное условие (18), учитывая выражение для  $\tau_{xyk}$ , соответствующее классической теории, и первую из формул (13), принимая во внимание асимптотику (8), (11). Находим:

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi_1=0} = \frac{Eh^2}{(1 + \mu)b} \zeta \left. \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \right|_{\xi_1=0}, \quad (19)$$

Представим искомую функцию  $\Psi$  в виде:

$$\Psi = m(\eta_1) \psi, \quad (20)$$

и подставляя ее в условие (19), окончательно находим:

$$m(\eta_1) \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi_1=0} = \frac{Eh^2}{(1 + \mu)b} \zeta \left. \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \right|_{\xi_1=0},$$

откуда следует

$$m(\eta_1) = \frac{Eh^2}{(1 + \mu)b} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \Big|_{\xi_1=0}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_1=0} = \zeta. \quad (22)$$

Рассматриваемую краевую задачу приведем к решению задачи Дирихле для прямоугольника. Согласно [7] введем новые переменные

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \zeta + 1, \\ \zeta' &= \xi_1 - a/2h. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда граничные условия (16), (17) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \partial \psi / \partial \xi_1' &= 0 \text{ при } \xi_1' = 2; \xi_1' = 0 \\ \psi &= 0 \text{ при } \zeta' = a/2h; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta'^2} &= \xi_1' - 1 \text{ при } \zeta' = -a/2h. \end{aligned}$$

Далее, применяя известную схему решения задачи, находим:

$$\psi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{32}{\pi^4 n^4} \exp\left(-\frac{\pi n}{2}\left(\zeta' + \frac{a}{2h}\right)\right) \cos \frac{\pi n}{2} \xi_1',$$

или при переходе к старым переменным по формулам (21), имеем:

$$\psi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{32}{\pi^4 n^4} \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \xi_1\right) \cos \frac{\pi n}{2} (\zeta + 1).$$

Подставляя эту функцию в аппроксимацию (20) и учитывая равенство (21), окончательно находим:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_1, \eta_1, \zeta) &= -\frac{Eh^2}{(1 + \mu)b} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \Big|_{\xi_1=0} \times \\ &\times \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{32}{\pi^4 n^4} \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \xi_1\right) \cos \frac{\pi n}{2} (\zeta + 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Определим дополнительные касательные напряжения краевого кручения, используя для этого соотношение (13) и выражение (24). Находим:

$$\begin{aligned} \tau_{xyc} &= -\frac{E}{(1 + \mu)b} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \Big|_{\xi_1=0} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \xi_1\right) \cos \frac{\pi n}{2} (\zeta + 1), \\ \tau_{yzc} &= -\frac{E}{(1 + \mu)b} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \Big|_{\xi_1=0} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} \exp\left(-\frac{\pi n}{2} \xi_1\right) \sin \frac{\pi n}{2} (\zeta + 1). \end{aligned} \quad (25)$$

Касательное напряжение  $\tau_{xyk}$  основного напряженного состояния при изгибе пластинки равно

$$\tau_{xyk} = -\frac{E}{(1 + \mu)b} \zeta \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi_1 \partial \eta_1},$$

а его максимальное значение в заделке составляет:

$$\tau_{xyk}^m = \frac{E}{(1 + \mu)b} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \Big|_{\xi_1=0}$$

Графики изменения искомых напряжений(25) по толщине пластинки на жестко защемленном краю  $\xi_1 = 0$  в произвольном сечении  $\eta_1 = const$  показаны на рис. 2, где индекс «1» соответствует выражению  $\tau_{xyc} / \tau_{xyk}^m$ , индекс «2» -  $\tau_{yzc} / \tau_{xyk}^m$ , индекс «3» -  $\tau_{xyk} / \tau_{xyk}^m$ .

При построении графиков в рядах выражений (25) удерживались только первые два слагаемых.

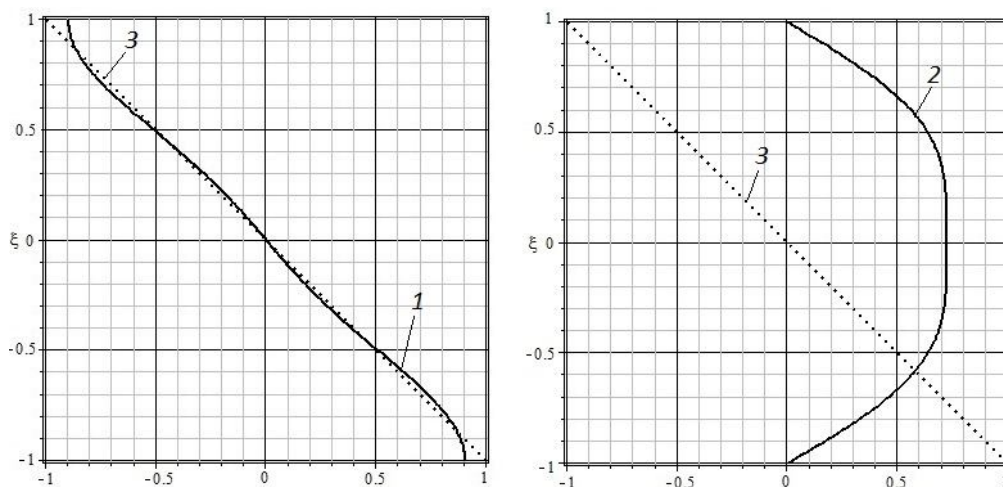


Рис.2. Графики изменения касательных напряжений по толщине пластинки

Иллюстрации на рис. 2 показывают, что дополнительные касательные напряжения краевого кручения практически совпадают с основными касательными напряжениями пластинки при изгибе, соответствующими классической теории. Можно отметить, что дополнительные напряжения типа «погранслои», определяемые в цилиндрической оболочке другими методами [8,9] решения задач трехмерной теории упругости, по величине и характеру затухания практически совпадают с результатами данной работы.

### Выводы

Расчеты НДС изгибаемой прямоугольной пластинки позволили установить, что дополнительные НДС краевого кручения вносят существенный вклад в общее НДС пластинки.

Например, максимальные касательные напряжения на жестко защемленном краю практически равны одноименным напряжениям кручения, соответствующим классической теории при изгибе пластинки.

Очевидно, такой высокий уровень напряжений необходимо учитывать в расчетах на прочность пластинок, особенно из слоистых композиционных материалов, например, при определении концентрации наномодификаторов в зонах повышенных напряжений, в том числе их различных соединений.

### Л и т е р а т у р а

1.Фурсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов// Механика композиционных материалов и конструкций. ИПРИМ РАН, т. 8, №1, 2002. С. 28-64.



2. Фирсанов В.В. Уточненная методика расчета круглых пластинок на изгиб и растяжение// Прочность конструкций: Межвуз. науч. сб./ Под ред. Р.Р. Мавлютова – Уфа: Уфим. авиац. ин-т, 1978, №3. С. 26 – 34.
3. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
4. Фирсанов В.В. Погранслои и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины// Вестник МАИ, 2010. – Т.17, №5. – С.212-218.
5. Фирсанов В.В., Серпичева Е.В. Прочность и трещиностойкость непрерывных соединений авиационных конструкций на основе неклассической теории оболочек// Известия ТулГУ. Технические науки, 2014. – Вып.11, часть 1. – С.267-279.
6. Фирсанов В.В. Математические модели уточненного расчета непрерывных авиационных соединений на прочность с учетом их податливости// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №3. – С.58-68
7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз., 1962. – 708 с.
8. Firsanov V.V., Doan T.N. Energy consistent theory of cylindrical shells// Journal of Machinery, Manufacture and Reliability, 2011. Vol.40, Issue 6. – Pp 543-548(Scopus).
9. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory//Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal/ Begell House, INC, 2015. – Vol. 6, Issue 2. – Pp 135-166 (Scopus).

#### References

1. Firsanov, V.V. (2002). Ob utochnenii klassicheskoy teorii pryamougolnykh plastinok iz kompozitsionnykh materialov, *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstrukcij*, Izd. IPRIM RAN, Vol. 8, №1, p. 28-64.
2. Firsanov, V.V. (1978) Utochnennaya metodica rascheta kruglykh plastinok na izgib i rastiagieniye, *Prochnost Konstrukcij*: Megvuz. Nauch.Sb., pod red. R.R. Mavlutova, Ufa.: Ufim.aviatz.in-t, №3, p. 26-34.
3. Goldenveizer, A.L. (1976). *Teoriya Uprugih Tonkih Obolochek*, M.: Nauka, 512p.
4. Firsanov, V.V. (2010). Boundary layer and its influence on strength of cylindrical shell with a variable thickness, *Vestnik MAI*, Vol.17, №5, p. 212-218.
5. Firsanov, V.V., Serpicheva, E.V. (2014). Unbroken joints strength and crack growth resistance in airframes analysis based on non-classical theory of shells, *Izvestiya Tul'skogo Gosudarstvennogo universiteta*, Vyp. 11, Ch.1, p. 267-278.
6. Firsanov, V.V. (2015). Mathematical Models of the Improved Calculation on Durability of Continuous Aviation Units with the Account of their Compliance, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, №3, pp.58-68.
7. Kantorovich, L.V. Krylov, V.T. (1962). *Priblizhennyye Metody Vyshego Analiza*. Moscow: Izd. Fizmatgiz, 708 p.
8. Firsanov, V.V. and Doan, T.N. (2011) Energy-Consistent theory of cylindrical shells, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Vol.40, No.6, pp.543-548.
9. Firsanov, V.V., Doan T.N. (2015). Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory, *Composites: Mechanics, Computations, Applications*: International Journal, Begell House, INC, Vol. 6, Issue 2, p 135-166.

### STRESS STATE CALLED AS "BOUNDARY LAYER" IS BOUNDARY TORSION OF THE RECTANGULAR PLATE

Val.V. Firsanov

*Moskovskiy Aviazionniy Institute, Moscow, Russia*

Boundary value problem formulated for determining stress state of type "boundary layer" is identically to torsion deformation of edges, and its solution in a way bring to the Dirichlet's problem is given. As a result of calculations, the essential contribution of the boundary torsion stress-strain state to the general stress-strain state of a plate is shown, that is very important for the estimation of strength for various units in thin-walled elements of aircraft structures.

KEYWORDS: rectangular plate, three-dimensional equations of theory of elasticity, method of direct asymptotic integration, boundary value problems, the main stress-strain state, a stress state called "boundary layer", the Dirichlet's problem.

## Расчет машиностроительных конструкций

### МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСОЛЬНОГО КАБЕЛЕДЕРЖАТЕЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.А. ФРОЛОВ\*, канд. техн. наук, доц.,  
Е.Ю. ВЕРХОВ\*, канд. техн. наук, доц.,  
Ю.А. МОРОЗОВ\*, канд. техн. наук, доц.,  
М.А. ОРЛОВ\*\*, руководитель лаборатории преформинга, аспирант МАМИ,  
М.С. МИХАЙЛОВ\*\*, студент

\*Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)  
111250, Москва, Б. Семеновская, 38, т. 8(916)877-66-96; [akafest@mail.ru](mailto:akafest@mail.ru)

\*\*Межотраслевой инжиниринговый центр композиционных материалов  
МГТУ им. Баумана

С использованием комплекса программ «Ansys» рассматриваются результаты расчетов напряженно-деформированного состояния чугунных кабеледержателей (консолей) типа ККЧ, применяемых при прокладке кабелей в проходящих колодцах. Теоретически подтверждена возможность уменьшения ряда характерных размеров (толщина ложа, толщина и форма ребра жесткости) при сохранении стандартных прочностных характеристик детали, что позволяет существенно уменьшить массу изделия, а, следовательно, и себестоимость их изготовления.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: кабеледержатель; метод конечных элементов; конечно-элементная сетка; программный комплекс МКЭ; оптимизация размеров.

В работе [1], посвященной экспериментальному исследованию нагруженности кабеледержателей (консолей) типа ККЧ, используемых в качестве опор при прокладке кабелей в проходящих колодцах, было получено, что применяемые в настоящее время чугунные консоли имеют чрезмерно большие размеры (толщину ребра и ложа, а также форму ребра жесткости). Все это приводит к излишним затратам материала и, как следствие, завышенной стоимости изделий. Было отмечено, что с использованием теоретических методов расчета нагружения консоли имеется возможность подобрать указанные выше размеры сечений, позволяющие существенно уменьшить их массу при сохранении прочностных параметров, оговоренных в нормативных документах. Для пояснения сути проблемы коротко напомним схему нагружения и условия эксплуатации рассматриваемых деталей.



Рис. 1. Общий вид одно-, двух- и трехрубчевых консолей

При прокладке кабелей в типовых проходящих колодцах их внутренние стенки оснащаются кронштейнами. К кронштейнам при помощи специальных консольных болтов крепятся чугунные (СЧ-20) кабеледержатели, имеющие в

зависимости от необходимости от 1-го до 6-ти ручьев – лож (на рис. 1 показан общий вид одно-, двух- и трехручьевого консолей, а на рис. 2 – крепление консоли к кронштейну с помощью специального консольного болта). Консоли с одной стороны имеют ребро жесткости, позволяющее существенно снизить риск разрушения при приложении вертикальных нагрузок [2-5].

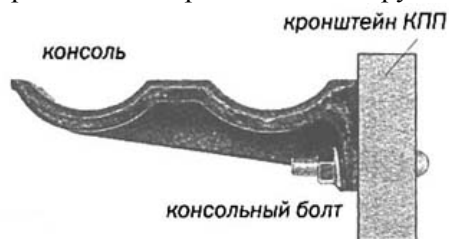


Рис. 2. Крепление консоли к кронштейну:

1 – консоль; 2 – консольный болт; 3 – кронштейн КПП

При приемных испытаниях, закрепленная на кронштейне консоль, согласно действующим нормативам, должна выдерживать нагрузку в 1570 Н (160 кг), приложенную к крайнему ручью. Эксперименты показали, что даже самые нагруженные шестиручьевые консоли (они имеют наибольшие напряжения в опасных сечениях), не разрушаются и имеют большой запас по прикладываемой нагрузке. Таким образом, имеется возможность уменьшить основные параметры, влияющие на прочность детали, а именно: толщину ребра жесткости и ложа, а также изменить форму ребра жесткости.

Решение этой задачи было проведено с использованием программного комплекса по методу конечных элементов [6].

В качестве базовой детали использовалась двухручьева консоль, как наиболее применяемая. Ее конфигурация была смоделирована с помощью программы Siemens NX9 Unigraphics. Прежде всего, была упрощена геометрическая форма консоли за счет устранения некоторых элементов конструкции, которые, с нашей точки зрения, не влияют на полученные далее результаты, а именно, из модели были исключены все технологические фаски, скругления, литейные уклоны и т.д. Данная аппроксимация позволила построить качественную конечно-элементную (КЭ) сетку, а также упростить и минимизировать время расчета в дальнейшем [7, 8].

Для генерации сетки были использованы методы протяжки и Body Sizing [9-11]. С помощью метода протяжки на одной из граней была сформирована 2D сетка, протянутая затем вдоль тела с помощью шага, тем самым формируя 3D сетку. Body Sizing формирует сетку, калибруя рассматриваемое тело консоли. Благодаря этим методам построения была сгенерирована упорядоченная структурированная КЭ сетка с регулярным расположением элементов, с минимальным количеством диспропорциональных включений и размером элемента 5 мм, что позволило провести в дальнейшем достаточно точный расчет (рис. 3).

Расчеты напряженно-деформированного состояния детали под действием приложенной изгибающей нагрузки проводились с применением конечно-элементного пакета ANSYS 16.1. При этом были заданы граничные условия и ограничения (жесткая заделка на торцевой крепежной поверхности и сосредоточенная на первом ручье нагрузка 1570 Н (160 кг)). В качестве материала задавались свойства серого чугуна марки СЧ-20 (предел прочности 200 МПа согласно ГОСТ 1412-85).

На следующем этапе были проведены расчеты напряженно- деформированного состояния консоли, при этом варьировались значения двух параметров

(толщины ребра жесткости и толщины ложа) в соответствии с приведенными в табл.1 данными, форма ребра жесткости сохранялась неизменной и соответствующей исходному состоянию.

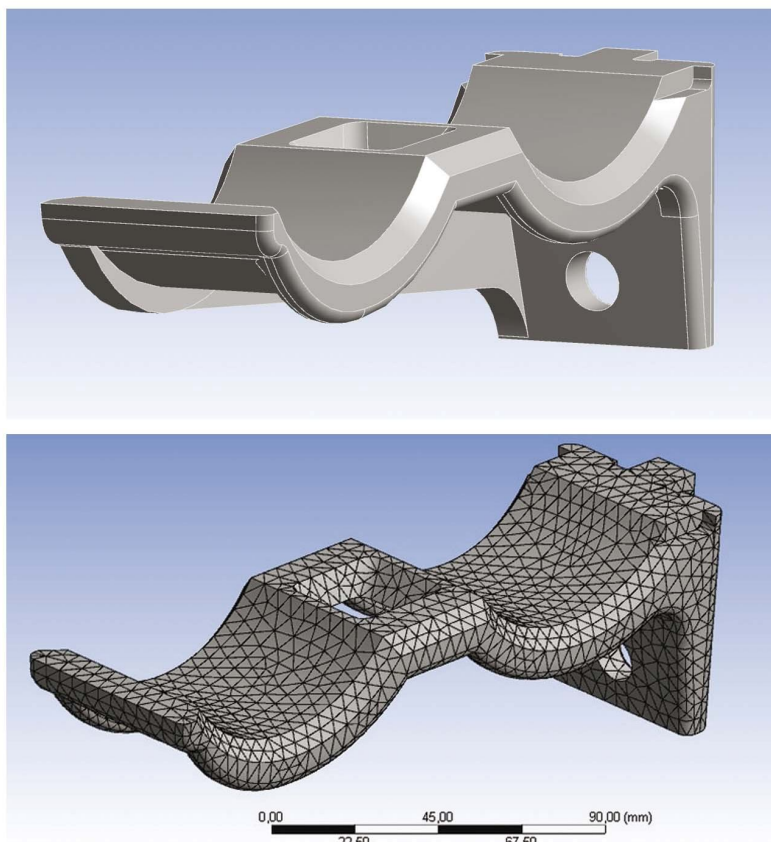


Рис. 3. Вид консоли и сгенерированная на ней конечно-элементная сетка

Таблица 1. Значения параметров для проведения расчетов напряженно-деформированного состояния консоли

№ расчета	Материал консоли	Нагрузка, Н	Толщина	
			ребро, мм	ложе, мм
1	СЧ-20	1570	8,0	8,0
2	СЧ-20	1570	6,0	8,0
3	СЧ-20	1570	4,0	8,0
4	СЧ-20	1570	6,0	6,0
5	СЧ-20	1570	6,0	4,0
6	СЧ-20	1570	4,0	6,0
7	СЧ-20	1570	4,0	4,0

На рис. 4; 5 приведены картины напряженного и деформированного состояния для двух резко различающихся вариантов расчетов.

Проведенные расчеты показали следующие основные тенденции.

1. Минимальные значения деформаций находятся в зоне у заделки, затем они постепенно возрастают и максимальных значений достигают в зоне крайнего ручья со стороны, противоположной ребру жесткости.

2. Напряжения имеют минимальные значения в крайнем ручье, затем постепенно возрастают и достигают максимальных значений в центральной зоне

внутреннего ручья, а затем по мере приближения к заделке они снова уменьшаются.

3. Численные значения деформаций малы и как ограничивающий фактор в дальнейшем могут не рассматриваться.

4. С точки зрения прочности, а это – основной параметр по которому определяется пригодность консоли, наиболее опасными являются центральные сечения ручья, расположенного у заделки.

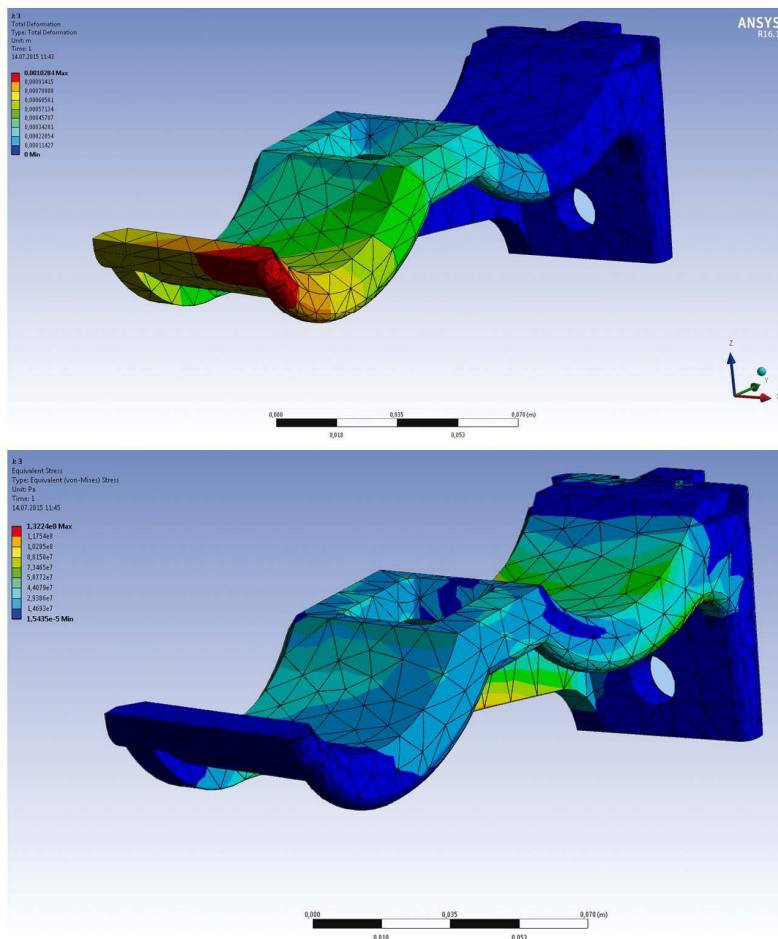


Рис. 4. Напряженно-деформированное состояние двухручьевой консоли ( $P = 1570 \text{ Н}$ ,  $\delta = 8 \text{ мм}$ ,  $\lambda = 8 \text{ мм}$ )

В табл. 2 приведены основные результаты проведенных расчетов, по которым можно сделать следующие выводы.

1. Для двухручьевой консоли найдены минимально возможные значения толщин ребра жесткости и ложа ( $\delta = 4 \text{ мм}$ ,  $\lambda = 4 \text{ мм}$ ), при которых напряжения в опасном сечении консоли достигают предела прочности для чугуна марки СЧ-20, равного 200 МПа.

2. Очевидно, что дальнейшее уменьшение толщин ребра жесткости и ложа нежелательно, так как это может привести к превышению действующих напряжений над прочностными свойствами чугуна СЧ-20.

3. Уменьшение массы двухручьевой консоли в лучшем из просчитанных вариантов составляет 0,3 кг или 23,4%.

4. По нашей оценке уменьшение массы для трех-, четырех- и шестиручьевых консолей будет еще более значительным, что однако требует проведения дополнительных расчетов [12].



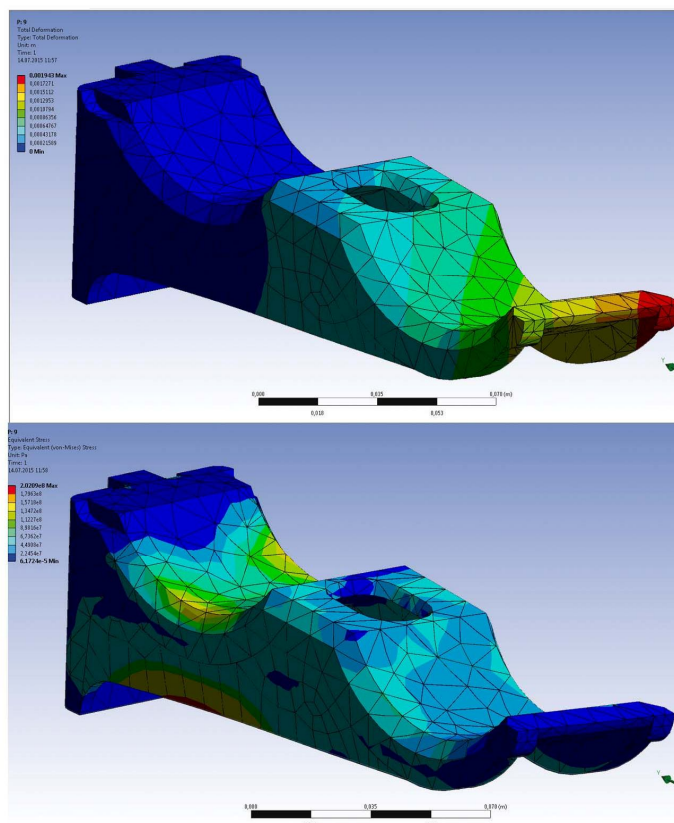


Рис. 5. Напряженно-деформированное состояние двухручьевой консоли ( $P = 1570 \text{ Н}$ ,  $\delta = 4 \text{ мм}$ ,  $\lambda = 4 \text{ мм}$ )

Таблица 2. Результаты расчетов двухместной консоли (чугун марки СЧ-20, нагрузка 1570 Н)

№ расч.	Нагрузка, Н	Особенность конструкции		$\epsilon_{\max}$ , мм	$\sigma_{\max}$ , МПа	m, кг	$\Delta m$ , кг
		ребро, мм	ложе, мм				
1	1570	8,0	8,0	0,91	132	1,3075	0
2	1570	6,0	8,0	1,17	148	1,2689	0,0386
3	1570	4,0	8,0	1,37	179	1,2324	0,0751
4	1570	6,0	6,0	1,37	152	1,1558	0,1517
5	1570	6,0	4,0	1,66	171	1,0378	0,2697
6	1570	4,0	6,0	1,61	186	1,1194	0,1881
7	1570	4,0	4,0	1,94	202	1,0013	0,3062

В заключении укажем, что основные направления дальнейших исследований по данной тематике с нашей точки зрения должны заключаться в следующем.

1. Проведение аналогичных расчетов с целью определения возможностей уменьшения массы для трех-, четырех- и шестиручьевых консолей.

2. Проведение подтверждающих экспериментальных исследований, аналогичных опубликованным в работе [1] для консолей с измененными геометрическими параметрами.

3. Учитывая, что применяемые в настоящее время кабели имеют значительно меньшую массу, чем ранее – внесение обоснованных изменений в технические условия на консоли в сторону уменьшения предельных нагрузок при их приемке.

4. На основе полученных результатов переход при изготовлении консолей к новым материалам (пластикам, композитам) с целью повышения их эксплуатационных свойств, существенного снижения массы и уменьшении стоимости.

#### Л и т е р а т у р а

1. Фролов А.А., Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А. Экспериментальное исследование напряженного состояния конструкции консольного кабеледержателя // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – Вып. 4. – С. 71-75.

2. Консоли [электронный ресурс] / ЗАО «Связьстройдеталь». Каталог. – Электрон. дан. (1 файл). – М.: ЗАО «Связьстройдеталь», 2014. – Режим доступа: <http://www.ssd.ru/catalog/tile.php?ID=4172>, свободный. – Загл. с экрана.

3. Хруничева Т.В. Детали машин. Типовые расчеты на прочность. – М.: Инфра-М, 2009. – 224 с.

4. Буланов Э.А., Шинкин В.Н. Механика. Вводный курс. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 172 с.

5. Шинкин В.Н. Механика сплошных сред для металлургов. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2014. – 628 с.

6. Tamarozzi T., Heirman G.H.K., Desmet W. An on-line time dependent parametric model order reduction scheme with focus on dynamic stress recovery// Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1 January 2014. – Vol. 268. – P. 336-358.

7. Коробко А.В., Прокуров М.Ю., Чернышев А.А. Развитие технической теории расчета пластинчатых конструкций на основе методов геометрического моделирования их формы // Строительство и реконструкция. – 2015. – № 1. – С. 17-21.

8. Packo P., Bielak T., Spencer A.B., Uhl T., Staszewski W.J., Worden K., Barszcz T., Russek P., Wiatr K. Numerical simulations of elastic wave propagation using graphical processing units-Comparative study of high-performance computing capabilities// Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 15 June 2015. – Vol. 290. – P. 98-126.

9. Бруйка В.А., Фокин В.Г., Солдусова Е.А. и др. Инженерный анализ в ANSYS Workbench: учебное пособие. – Самара: Самар. Гос. Техн. ун-т, 2010. – 271 с.

10. Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю. Компьютерное моделирование: учебное пособие. – М.: МГОУ, 2011. – 81 с.

11. Мусаев В.К., Дикова Е.В., Акатьев С.В., Стародубцев В.В., Самойлов С.Н. Оценка точности результатов численного моделирования при решении задач о распространении импульсного воздействия в виде треугольника в упругой полуплоскости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №6. – С. 8-12.

12. Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю., Шульгин А.В. Моделирование процессов и объектов в металлургии: учебное пособие. – М.: МГОУ, 2010. – 121 с.

#### R e f e r e n c e s

1.Frolov, A.A., Verkhov, E.Yu., Morozov, Yu.A. (2015). Experimental study of a stress state of the structure of the console cable holder, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, No. 4, pp. 71-75.

2.Konsoli [elektronnyy resurs], ЗАО «Svyaz'stroydetal'», Katalog, Elektron. dan. (1 fayl), Moscow: ЗАО «Svyaz'stroydetal'», 2014, Rezhim dostupa: <http://www.ssd.ru/catalog/tile.php?ID=4172>, svobodniy (Zagl. s ekrana).

3.Khrunichева T.V. *Detali mashin. Tipovye raschety na prochnost'* [Machine parts. Typical strength calculations]. Moscow: Infra-M, 2009. 224 p.

4.Bulanov, E.A., Shinkin, V.N. (2013). *Mekhanika. Vvodnyy kurs* [Mechanics. Introductory course]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy, 172 p.

5.Shinkin, V.N. (2014). *Mekhanika Sploshnykh Sred dlya Metallurgov* [Continuum Mechanics for metallurgists], Moscow: Izd. Dom MISiS, 628 p.

6.Tamarozzi, T., Heirman, G.H.K., Desmet, W. (2014). An on-line time dependent parametric model order reduction scheme with focus on dynamic stress recovery, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 268, 1 January 2014, pp. 336-358.

7.Korobko, A.V., Prokurov, M.Yu., Chernyaev, A.A. (2015). Development of the technical theory of calculation of plate structures based on the methods of geometrical modeling of their shape, *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*, Orel, No. 1, pp. 17-21.

8.Packo, P., Bielak, T., Spencer, A.B., Uhl, T., Staszewski, W.J., Worden, K., Barszcz, T., Russek, P., Wiatr, K. (2015). Numerical simulations of elastic wave propagation using graphical processing units-Comparative study of high-performance computing capabilities, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 290, 15 June 2015, pp. 98-126.

9. Bruyaka, V.A., Fokin, V.G., Soldusova, E.A. et al. (2010). *Inzhenernyy Analiz v ANSYS Workbench: Uchebnoe posobie* [Engineering analysis in ANSYS Workbench], Samara: Samar. Gos. Tekhn. Un-t, 271 p.

10. Morozov, Yu.A., Verkhov, E.Yu. (2011). *Komp'yuternoe Modelirovanie: uchebnoe posobie* [Computer simulation], Moscow: MGOU, 81 p.

11. Musaev, V.K., Dikova, E.V., Akat'ev, S.V., Starodubtsev, V.V., Samoylov, S.N. (2015). Evaluation of the accuracy of the results of numerical modeling in solving the problem of impulse excitation in the form of a triangle in an elastic half-plane, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 6, pp. 8-12.

12. Morozov, Yu.A., Verkhov, E.Yu., Shul'gin, A.V. (2010). *Modelirovanie Protseessov i Ob'ektov v Metallurgii* [Modelling of Processes and Facilities in Industry]. Moscow: MGOU, 121 p.

#### **SIMULATION OF STRESS-STRAIN STATE OF CONSOLE CABLE HOLDER BY FINITE ELEMENTS METHOD**

A.A. Frolov, E.Yu. Verkhov, Yu.A. Morozov, M.A. Orlov, M.S. Mikhaylov  
*Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow*

The results of calculations of the stress-strain state of iron Cable holder (console) type of CCHI used in the cabling to pass wells with the use of a complex of programs «Ansys». Theoretically, the possibility of reducing the number of characteristic size (thickness of the bed, the thickness and shape of ribs) while retaining the strength characteristics of standard parts, which can significantly reduce the weight of the product, and therefore the cost of manufacture is confirmed.

KEY WORDS: Cable holder; finite element method; finite element mesh; FEM software package; optimization sizes.



#### **Экспериментальные исследования**

#### **РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ, УСИЛЕННЫХ УГЛЕРОДНЫМИ ЛЕНТАМИ, ПРИ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА**

О.Д. РУБИН\*, доктор технических наук,

С.Е. ЛИСИЧКИН\*\*, доктор технических наук,

К.Е. ФРОЛОВ\*\*\*, инженер,

\*АО «Научно-исследовательский институт энергетических сооружений» (АО «НИИЭС»), 125362, г. Москва, Строительный проезд, д. 7А, info@niies.ru

\*\*ООО «Инженерный центр сооружений, конструкций и технологий в энергетике» (ООО «ИЦСКТЭ»), 125362, г. Москва, ул. Свободы, д. 35, cskte@mail.ru

\*\*\*ПАО «РусГидро», 127006, г. Москва, ул. Малая Дмитровка, д. 7,

FrolovKE@rushydro.ru

Предлагается выполнять усиление железобетонных конструкций гидротехнических сооружений углеродными лентами в качестве системы внешнего армирования. Представлены результаты экспериментальных исследований прочности железобетонных конструкций гидротехнических сооружений без усиления и усиленных углеродными лентами при действии изгибающего момента. Определено повышение прочности за счет усиления углеродными лентами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: железобетонные конструкции; гидротехнические сооружения; усиление; углеродные ленты; экспериментальные исследования.

Анализ отечественного и зарубежного опыта [1-3] показал, что наиболее эффективным способом усиления железобетонных конструкций (и в первую очередь длительно эксплуатируемых) является усиление углеродными лентами в качестве системы внешнего армирования.

В этой связи были проведены экспериментальные исследования прочности железобетонных конструкций гидротехнических сооружений (ГТС), усиленных углеродными лентами, при действии изгибающего момента (на специальных испытательных стендах).

Для проведения экспериментальных исследований на действие изгибающего момента были изготовлены железобетонные модели балочного типа длиной 215 см, высотой 30 см и шириной 15 см (рис.1). При этом было изготовлено две серии моделей, отличающиеся армированием и классом бетона, присущих конструкциям гидротехнических сооружений.

Одна серия балок имела армирование 2 диаметра 10 мм класса А500С (процент армирования 0,39%) и изготавливалась из бетона класса В15 (рис. 1).

Другая серия балок имела армирование 3 диаметра 12 мм класса А500С (процент армирования 0,83%) и изготавливалась из бетона класса В25 (рис. 1).

В опорных четвертях пролета моделей устанавливались поперечные хомуты диаметром 8 мм с шагом 50 мм. Толщина защитного слоя бетона принималась равной 25 мм (рис. 1).

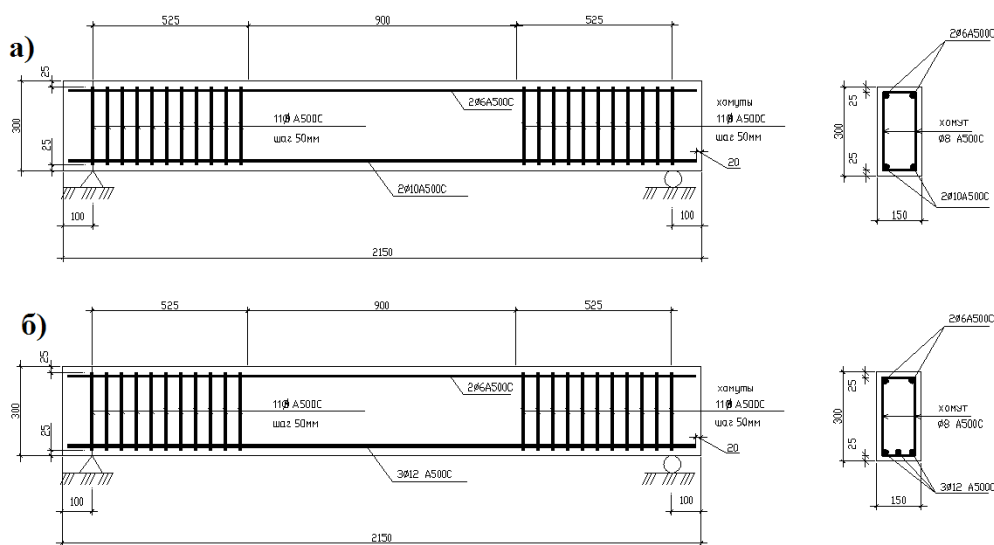


Рис.1. Конструкция железобетонных моделей

В каждую серию входило по две балки-близнеца без усиления и по две балки-близнеца, усиленных углеродными лентами. Таким образом, было изготовлено 8 моделей. Для усиления железобетонных моделей использовалась углеродная лента типа FibArm Tape 230/300. Ширина ленты принималась равной ширине моделей 150 мм. Ленты наклеивались на нижней растянутой грани моделей в два слоя. На опорных участках продольные углеродные ленты закреплялись также замкнутыми хомутами из углеродной ленты FibArm Tape 230/300 шириной 300 мм (рис. 2).

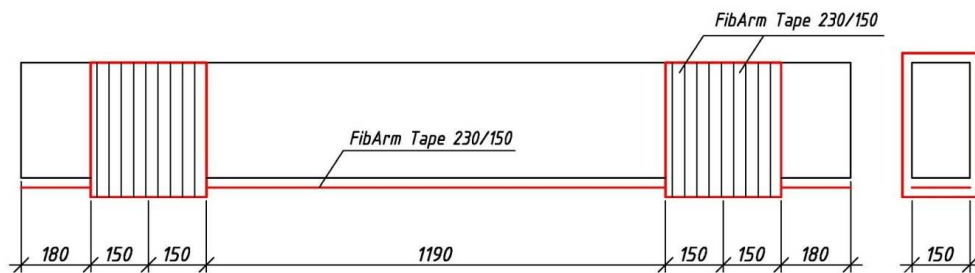


Рис. 2. Схема оклейки железобетонных моделей углеродными лентами

Предварительно бетонная поверхность моделей выравнивалась путем шлифования, в процессе которого удалялась цементная пленка; а также ремонтировалась (при наличии дефектов и каверн) путем нанесения эпоксидной шпаклевки типа MapeWrap 12. Далее поверхность грунтовалась эпоксидной грунтовкой типа MapeWrap Primer 1. Непосредственно углеродные ленты наклеивались на подготовленную поверхность эпоксидным двухкомпонентным связующим (клеем) FibArm Resin 230+.

В целях определения фактической прочности бетона моделей на сжатие и растяжение, а также модуля деформации одновременно с моделями бетонировались стандартные контрольные образцы: кубики размером  $100 \times 100 \times 100$  мм; призмы размером  $100 \times 100 \times 400$  мм и цилиндры диаметром 150 мм и высотой 150 мм.

Для контроля напряженно-деформированного состояния моделей в процессе испытаний устанавливалась контрольно-измерительная аппаратура.

Величины прогибов моделей регистрировались прогибомерами в виде индикаторов часового типа ИЧ-10 (точность измерений составляла 0,01 мм, диапазон измерений - 10 мм), которые устанавливались на каждой из боковых граней. При этом по 2 индикатора устанавливалось в центре пролета и по 2 индикатора - на каждой из опор моделей. Компоненты напряженно-деформированного состояния элементов моделей фиксировались тензорезисторами с базой измерений 30 мм и 50 мм (точность измерений 0,00001), которые наклеивались на бетонные поверхности моделей и на углеродные ленты (рис. 3).

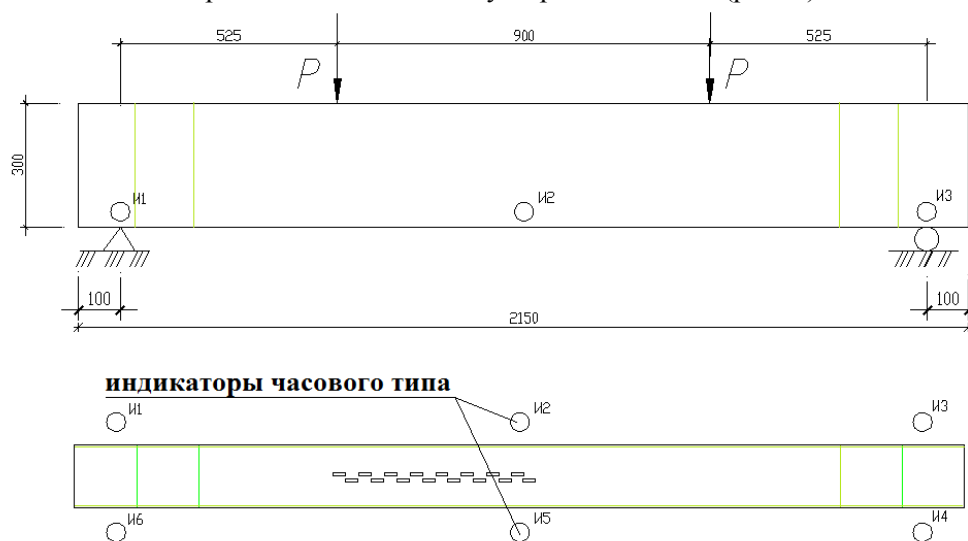


Рис. 3. Схемы испытаний и оснащения железобетонных моделей контрольно-измерительной аппаратурой

Для проведения испытаний на действие изгибающего момента железобетонные модели длиной 2,15 м устанавливались на специальном стенде в горизонтальном положении на двух опорах, расположенных на расстоянии 1,95 м друг от друга. Одна из опор – неподвижная, другая – катковая.

Для приложения вертикальной нагрузки применялся гидродомкрат, расположенный в центре пролета. Нагрузка передавалась на конструкцию через распределительную traversу симметрично в двух точках на расстояниях 45 см от центра пролета и 52,5 см - от опор (рис. 3).

В ходе испытаний железобетонных моделей опытная нагрузка прикладывалась ступенями, составляющими 10 % от разрушающей нагрузки. При дости-



жени 80% от нагрузки разрушения нагрузка прикладывалась более мелкими ступенями (по 5% от нагрузки разрушения). После приложения соответствующей нагрузки на каждом этапе производилась выдержка, составляющая 15 мин, после этого регистрировались показания приборов.

Образование и развитие трещин в железобетонных моделях наблюдалось с использованием микроскопа отсчетного МПБ-2.

Вид испытания железобетонной модели представлен на рис. 4.

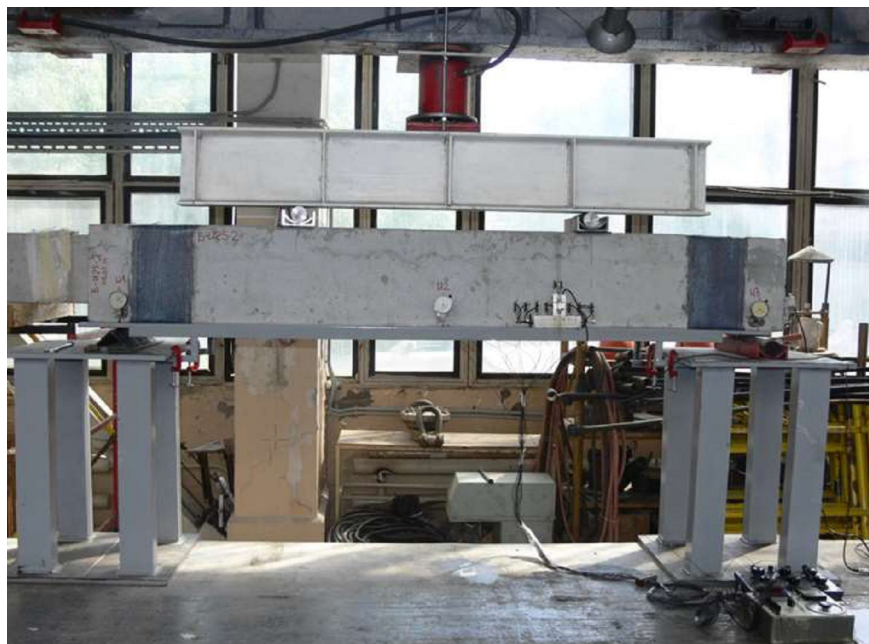


Рис. 4. Испытание железобетонной модели

В результате проведенных испытаний железобетонных моделей, в том числе усиленных углеродными лентами, на действие изгибающего момента были получены следующие результаты.

Железобетонные модели-близнецы, изготовленные из бетона В15 с армированием 0,39%, не имеющие усиления, разрушались при величине нагрузки 83,0 и 88,0 кН. Железобетонные модели-близнецы, изготовленные из бетона В15 с армированием 0,39%, усиленные углеродными лентами, разрушались при нагрузках 159,2 и 191,0 кН.

Железобетонные модели-близнецы, изготовленные из бетона В25 с армированием 0,83%, не имеющие усиления, разрушались при величине нагрузки 165,8 кН. Железобетонные модели-близнецы, изготовленные из бетона В25 с армированием 0,83%, усиленные углеродными лентами, разрушались при нагрузках 232,0 и 257,0 кН.

Результаты проведенных экспериментальных исследований приведены в таблице 1.

Таким образом, за счет усиления углеродными лентами, прочность железобетонных конструкций из бетона В15 с армированием 0,39% повысилась в среднем в 2,06 раза; прочность железобетонных конструкций из бетона В25 с армированием 0,83% повысилась в среднем в 1,5 раза.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Jian-he Xie , Ruo-lin Hu*. Experimental study on rehabilitation of corrosion-damaged reinforced concrete beams with carbon fiber reinforced polymer // *Construction and Building Materials*. 38 (2012). Pp.708–716.

2. *Ehab Hamed*  $\hat{H}$ , *Mark A. Bradford*. Flexural time-dependent cracking and post-cracking behaviour of FRP strengthened concrete beams // *International Journal of Solids and Structures*. 49 (2012). Pp.1595–1607.

Таблица 1. Технические характеристики и результаты экспериментальных исследований железобетонных балок-моделей, усиленных системой внешнего армирования (СВА), при действии изгибающего момента  $M$  (растяжения при изгибе)

№ п/п	Наименование модели	Установка элементов усиления	Прочность бетона на сжатие, МПа	Разрушающая нагрузка, кН	$\frac{P_{\text{эксп.}}}{P_{\text{расч.}}}$
<i>Бетон В15, армирование 2Ø10А500С</i>					
1	Б-И15-1	Без усиления	25,80	88,00	1,14
2	Б-И15-2		15,90	83,00	1,09
3	Б-И15-3	Усиление углеродной лентой	24,40	191,00	2,50
4	Б-И15-4		24,40	159,20	2,10
<i>Бетон В25, армирование 3Ø12А500С</i>					
5	Б-И25-1	Без усиления	29,50	165,80	1,03
6	Б-И25-6		36,50	165,80*	1,03
7	Б-И25-4	Усиление углеродной лентой	39,70	257,00	1,57
8	Б-И25-5		24,30	232,00	1,42

3. *Yinzi Zhou, Mingkang Gou, Fengyu Zhang, Shoujun Zhang, Dan Wang*. Reinforced concrete beams strengthened with carbon fiber reinforced polymer by friction hybrid bond technique: Experimental investigation // *Materials and Design*. 50 (2013). Pp 130–139.

4. *Сердюк А.И., Чернявский В.Л.* Опыт усиления строительных конструкций композиционными материалами при реконструкции Баксанской ГЭС // *Гидротехника*. 3 (32). 2013. С. 115-117.

5. *Козырев Д.В., Симохин А.С., Чернявский В.Л., Осмак П.П.* Ремонт участков напорного коллектора композитными материалами // *Монтажные и специальные работы в строительстве*. №9. 2009. С. 2-5.

6. *Александров А.В., Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Балагуров В.Б.* Расчетное обоснование и технические решения по усилению железобетонных конструкций ГЭС (ГАЭС), имеющих трещины различного направления, при действии комплекса нагрузок // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, № 6, 2014, с. 50-54.

7. *Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Балагуров В.Б., Александров А.В.* Новая технология ремонта ГЭС посредством армирования композитными материалами // *Изв. ВНИИГ*. т. 280. 2016. С. 3-10.

#### References

1. *Jian-he Xie, Ruo-lin Hu* (2012). Experimental study on rehabilitation of corrosion-damaged reinforced concrete beams with carbon fiber reinforced polymer, *Construction and Building Materials*, 38, p.708–716.

2. *Ehab Hamed*  $\hat{H}$ , *Mark A. Bradford* (2012). Flexural time-dependent cracking and post-cracking behaviour of FRP strengthened concrete beams, *International Journal of Solids and Structures*, 49, .1595–1607.

3. *Yinzi Zhou, Mingkang Gou, Fengyu Zhang, Shoujun Zhang, Dan Wang* (2013). Reinforced concrete beams strengthened with carbon fiber reinforced polymer by friction hybrid bond technique: Experimental investigation, *Materials and Design*, 50, p 130–139.

4. *Serdyuk, A.I., Chernyavskij, V.L.* (2013). Opyt usileniya stroitel'nykh konstruksij kompozitsionnymi materialami pri rekonstruktsii Baksanskoj GES, *Gidrotekhnika*, 3 (32), p. 115-117.

5. *Kozyrev, D.V., Simokhin, A.S., Chernyavskij, V.L., Os'mak P.P.* (2009). Remont uchastkov napornogo kolektora kompozitnymi materialami, *Montazhnye i spetsial'nye raboty v stroitel'stve*, №9, p. 2-5.

6. *Aleksandrov, A.V., Rubin, O.D., Lisichkin, S.E., Balagurov, V.B.* (2014). Raschetnoe obosnovanie i tekhnicheskie resheniya po usileniyu zhelezobetonnykh konstruksij GES (GAES), imeyushhikh treshhiny razlichnogo napravleniya, pri dejstvii kompleksa nagruzok, *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruksij i Sooruzhenij*, № 6, p. 50-54.

7. Rubin, O.D., Lisichkin, S.E., Balagurov, V.B, Aleksandrov, A.V. (2016). Novaya tekhnologiya remonta GTS posredstvom armirovaniya kompozitnymi materialami, *Izv. VNIIG*, Vol. 280, p. 3-10.

## THE RESULTS OF EXPERIMENTAL STUDIES OF CONCRETE STRUCTURES OF HYDRAULIC ERECTIONS REINFORCED WITH CARBON TAPE UNDER THE ACTION OF BENDING MOMENTS

O.D. Rubin\*, S.E. Lisichkin\*\*, K.E. Frolov\*\*\*

\*\* *Scientific Research Institute of Energy Structures (Open Joint-stock Company), Moscow*

\*\*\* *Engineering Center of Structures, Constructions and Technologies in Energy (Limited Liability Company), Moscow*

The reinforcement of concrete structures of hydraulic erections with carbon ribbons as external reinforcement system is proposed to carry out. The results of experimental studies of the strength of concrete structures of hydraulic erections without reinforcement and reinforced with carbon ribbons with bending moment are presented. The strength improvement by increasing with carbon ribbons is defined.

**Key words:** reinforced structures, hydraulic erections, external reinforcement, carbon ribbons, experimental researches.



## Механика жидкости

### MODELING THE HYDRAULIC CALCULATION OF THE CONTROLLING RESERVES IN DRINKING WATER SUPPLY SYSTEMS

Taofic BACHAROU\*, Gossou HOUINOU, Gérard A. GBAGUIDI, Clément AHOUANNOU, Ezéchias KANHO, Ruben AZA-GNANDJI  
*Polytechnic School of Abomey-Calavi, University of Abomey-Calavi,  
Laboratory of Energetics and Applied Mechanics  
01 BP 2016 Cotonou, Benin*

\* *Correspondence, e-mail : btaofic@yahoo.fr*

*This study is part of the development of a model of hydraulic calculation of controlling reserves control in drinking water supply systems. To that end, the general expressions of the cumulative curves of gravity water supply and pumped water supply as well as the ones of the distribution over time were formulated. It appears from this study that for a peak coefficient  $K_p$  between 1.2 and 1.4, the cumulative consumption evolves linearly and for  $K_p$  ranging from 1.45 to 2.5 the cumulative consumption follows a polynomial curve of degree 3. Then, there is a relationship between the respective totals of gravity water supply and pumped water supply and the total of the cumulative consumption, which superimposed have enabled the establishment of the mathematical model for determining the volume of the controlling reserves.*

**Keywords:** Drinking water supply - Modeling - Water supply - Consumption - Reservoir - Volume – Program.

#### 1. INTRODUCTION

In drinking water supply systems, drinking water reservoirs are needed in cities where spontaneous urban settlements with middle class standing are important. The satisfaction of the population with respect to the water demand is ensured by the continuous service offered by the structures and equipment of the water supply system throughout the day. This performance is largely ensured by water supply reserves (such as cistern, water towers etc.) that serve as a buffer between the production which is fairly constant and the distribution which remains highly variable with time. Poor design of these reservoirs in water networks causes severe problems on the performance and even on the cost of the entire water supply network [4]. The various reserve components (regulation, fire, emergency and maintenance)

of the reservoir volume show that the storage capacity varies depending on the controlling reserves since the others are estimated with specific standards or guidelines for each region. Controlling reserves for a given day represent about 20% of the daily consumption, the maximum volume of control being calculated from the hourly consumption of the day of the highest consumption [5]. However, studies have shown that according to guidelines, the reservoir capacity can range from less than 25% to 100% of the daily consumption peak taken for the project horizon [2.9]. Indeed, the present study focuses on the development of a rational approach for the hydraulic calculation of the controlling reserves to reduce differences on the basis of the analysis of design approaches currently used by field engineers.

**1. METHODOLOGY**

**1.1 Materials**

The cumulative water supply has been modelled using the Laplace transform which is a widely used tool for mathematical modelling of physical phenomena (inflow, consumption pattern, etc.). The Maple 13 software enabled the adjustments of curves of the cumulative consumption for each peak coefficient. MATLAB software is used for the treatment of matrix components of the pumped water flow rate and the pumping time.

**1.2 Methods**

The most used method to estimate the controlling volume allows viewing offs between the periods of low consumption and those of high consumption in order to adjust the pumping periods to minimize the risk of rupture of supply during hours of high consumption [5]. In fact, we fix the time for daily pumping, the pumping periods and the pumping rate and we successively represent per day the water supply and the consumption, simplified in hourly slot, the curves of the accumulated previous flow rates and the superposition of the curves of accumulated flow rates. A parallel translation of the supply curve for covering the distribution curve allows the visualization of both maximum fluctuations. The sum of these two fluctuations indicates the volume of the controlling reserves. These methods have been generally replaced by extended period simulation models which can be more flexible than the graphical methods.

Reservoirs operation Analysis showed that the capacity of the reservation distribution is function of the supply flow rate and the fluctuations in the distribution flow rate [8]. Let  $r_1(t)$  the hourly flow rate of water supply,  $r_2(t)$  the hourly flow rate of distribution and  $x(t)$  the flow rate of controlling reserves, then:

$$x(t) = r_1(t) - r_2(t). \tag{1}$$

**1.2.1 Modelling of the water supply**

***Pumped water supply***

The function  $r_1(t)$  reflects the pumped flow rate at time t, defines as [10]:

$$r_1(t) = \begin{cases} Q_1 & \text{if } t \in [a_0, a_1[ \\ Q_2 & \text{if } t \in [a_1, a_2[ \\ Q_3 & \text{if } t \in [a_2, a_3[ \\ Q_4 & \text{if } t \in [a_3, a_4[ \\ Q_5 & \text{if } t \in [a_4, a_5[ \\ \vdots & \vdots \\ Q_n & \text{if } t \in [a_{n-1}, a_n[ \end{cases} ,$$

where:  $t$  is the pumping time,  $a_n - a_0 = 24 h$ ,  $Q_n$  is the pumped flow rate in the  $n^{\text{th}}$  time interval,  $n$  is the number of intervals ( $n, \dots, \geq 1$ ).

To obtain the Laplace transform [7] of the function  $r_1(t)$  which allows for the accumulation of supply, it is necessary to express it in the form of linear combination of unit step functions:

$$r_1(t) = Q_1 + (Q_2 - Q_1)ua_1(t) + (Q_3 - Q_2)ua_2(t) + (Q_4 - Q_3)ua_3(t) + (Q_5 - Q_4)ua_4(t) + \dots + (Q_n - Q_{n-1})ua_{n-1}(t),$$

hence :

$$r_1(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (Q_n - Q_{n-1})ua_{n-1}(t), \tag{2}$$

With  $ua_{n-1}(t)$ - the Heaviside function defines as:

$$ua_{n-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a_{n-1} \\ 1 & \text{if } t \geq a_{n-1} \end{cases}$$

Let  $R_1(t)$  be the cumulative flow rates of supply,  $R_1(t) = \sum r_1(t) dt$ .

Using the theorem of the Laplace derivations [7], it is established that:

$$\mathcal{L}[r_1(t)] = s\mathcal{L}[R_1(t)] - R_1(0). \quad (3)$$

Whereas  $R_1(0) = 0$ , since there is no pumping at time  $t = 0$

$$\mathcal{L}[r_1(t)] = s\mathcal{L}[R_1(t)] \implies \mathcal{L}[R_1(t)] = \frac{\mathcal{L}[r_1(t)]}{s}. \quad (4)$$

From equation (2), we have:

$$\mathcal{L}[r_1(t)] = \sum_{n=1}^{+\infty} (Q_n - Q_{n-1}) \mathcal{L}[ua_{n-1}(t)] \text{ avec } (Q_n - Q_{n-1}) = \text{constante}.$$

Whereas the Laplace transform of the Heaviside function gives:

$$\mathcal{L}[ua_{n-1}(t)] = \frac{e^{-a_{n-1}s}}{s} \text{ with } s > 0. \quad (5)$$

From equations (4) and (5), we obtain the Laplace transform of  $R_1(t)$ :

$$\mathcal{L}[R_1(t)] = \sum_{n=1}^{+\infty} (Q_n - Q_{n-1}) \frac{e^{-a_{n-1}s}}{s^2} \text{ with } s > 0. \quad (6)$$

The inverse Laplace transform can enable to express  $R_1(t)$  as

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[R_1(t)]] = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (Q_n - Q_{n-1}) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-a_{n-1}s}}{s^2}\right] \text{ with } s > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Whereas } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-a_{n-1}s}}{s^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \cdot e^{-a_{n-1}s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1!}{s^{1+1}} \cdot e^{-a_{n-1}s}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot e^{-a_{n-1}s}]. \end{aligned} \quad (8)$$

With  $F(s) = \mathcal{L}[f]$ , where  $f(t) = t^\alpha$ , here the exponent  $\alpha$  is equal to 1 according to the equation (8) then  $f(t) = t$ , and then:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-a_{n-1}s}}{s^2}\right] = f(t - a_{n-1}) ua_{n-1}(t) = (t - a_{n-1}) ua_{n-1}(t) \quad (9)$$

From equations (7) and (9), we obtain the accumulation of supply as follows:

$$R_1(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (Q_n - Q_{n-1})(t - a_{n-1}) ua_{n-1}(t) \quad \text{with } Q_0 = 0 \quad (10)$$

The expression (10) is the model of accumulation of pumped water supply over time.

### **Gravity water supply**

The function  $r_1(t)$  reflects the flow rate of gravity water supply at time  $t$ , defines as:

$$r_1(t) = \begin{cases} Q_p = \frac{Q_{jmax}}{24} & \text{if } t \in [0; 24] \end{cases}$$

We have:  $n = 1$  ( $n$  being the number of intervals)

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \sum_{n=1}^1 (Q_p - 0)(t - a_0) ua_0(t), \quad a_0 = 0; a_1 = 24; \\ ua_0(t) &= \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases}, \quad R_1(t) = \frac{Q_{jmax}}{24}(t - 0) \cdot 1, \end{aligned}$$

$$R_1(t) = \frac{Q_{jmax}}{24} t. \quad (11)$$

The expression (11) shows that the accumulation of water supply is linear with respect to time.

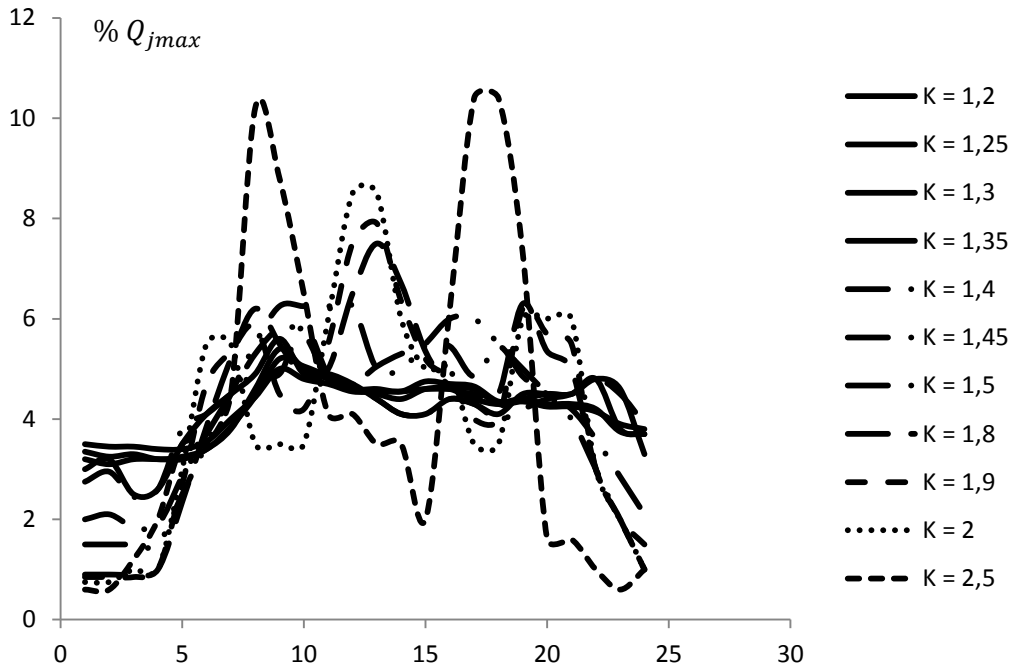
## **2 Modelling consumption**

Modelling the consumption pattern is based on the hourly distribution of the maximum daily consumption according to the hourly peak coefficient  $K_p$  ranging from 1.2 to 2.5 [2] (Fig. 1).

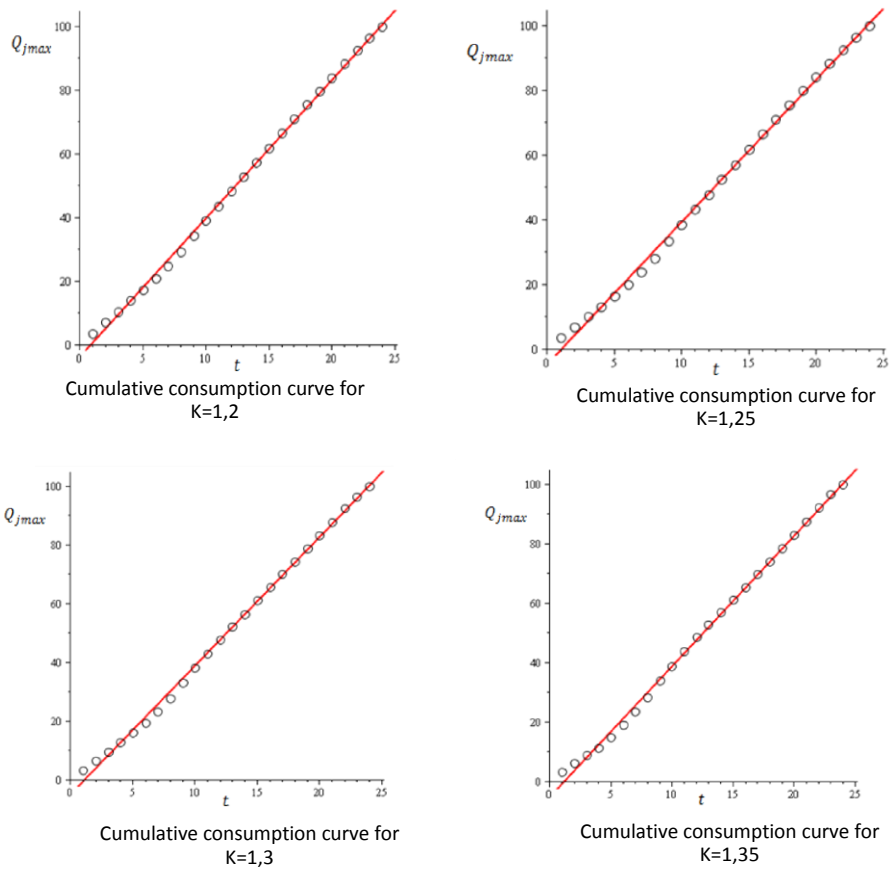
The consumption curves (Figure 2) were used to calculate the cumulative consumption based on the hourly peak coefficients  $K_p$ . It is observed that the cumulative consumption var-

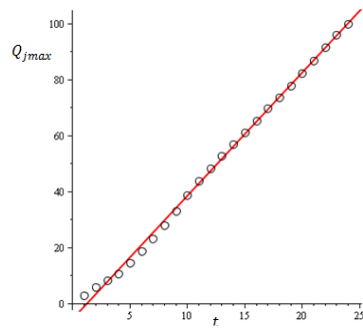


ies linearly for  $K_p$  between 1.2 and 1.4, and varies in the form of polynomial curve of degree 3 for  $K_p$  ranging from 1.45 to 2.5.

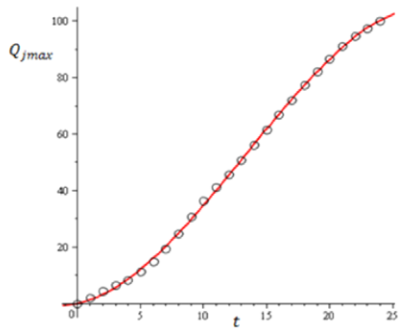


**Figure 1:** Consumption Curves over 24 hours (in % of the maximum daily consumption)

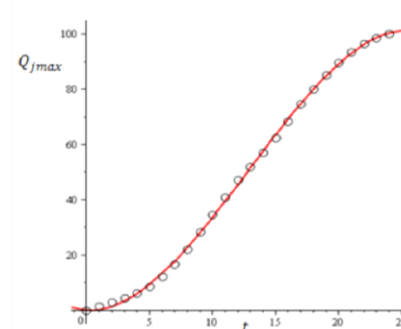




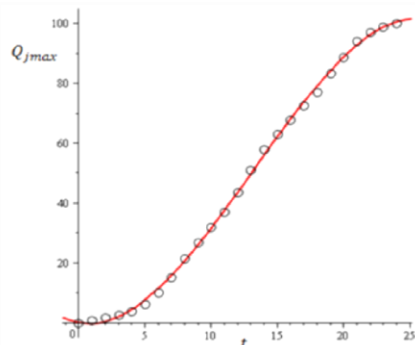
Cumulative consumption curve for K=1,4



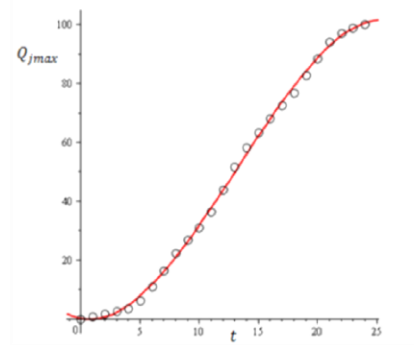
Cumulative consumption curve for K=1,45



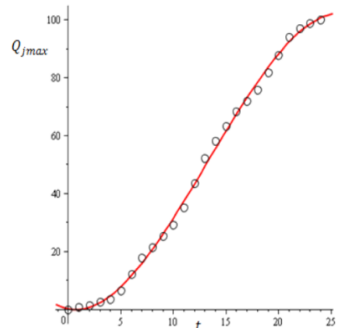
Cumulative consumption curve for K=1,5



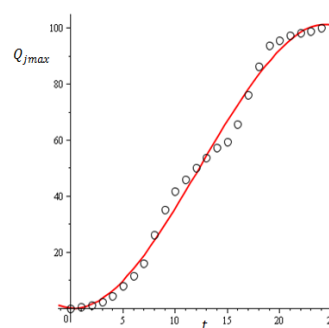
Cumulative consumption curve for K=1,8



Cumulative consumption curve for K=1,9



Cumulative consumption curve for K=2



Cumulative consumption curve for K=2,5

**Figure 2:** Evolution of the cumulative consumption for different hourly peak coefficients according to the time

The expression of the accumulated consumption becomes then:

$$- \text{ for } 1,2 \leq K_p \leq 1,4, \quad R_2(t) = (At + B) \cdot \frac{Q_{jmax}}{100}. \quad (12)$$

where  $R_2(t)$  - Cumulative consumption at time  $t$ ,  $m^3$ ;

$Q_{jmax}$  - maximum daily consumption,  $m^3 / \text{day}$ ;

A and B - linear adjustment coefficients recorded in Table 1,

$$\text{For } 1.45 \leq K_p \leq 2.5, \quad R_2(t) = (A't^3 + B't^2 + C't) \cdot \frac{Q_{jmax}}{100}, \quad (13)$$

where A', B', C' - polynomial fit coefficients of degree 3, recorded in Table 2.

**Table 1:** Values of adjustment coefficients A and B based on the hourly peak coefficient

hourly peak coefficient	Values of adjustment coefficients	
	A	B
1,2	4,35	- 3,7
1,25	4,39	- 4,58
1,3	4,38	- 4,91
1,35	4,39	- 5,06
1,4	4,4	- 5,39

**Table 2:** Values of adjustment coefficients A', B' and this based on the hourly peak coefficient

hourly peak coefficient	Values of adjustment coefficients		
	A'	B'	C'
1,45	- 0,00863	0,3425	0,931
1,5	- 0,0127	0,491	- 0,265
1,8	- 0,0135	0,533	- 0,816
1,9	- 0,0133	0,524	- 0,722
2	- 0,0128	0,512	- 0,671
2,5	- 0,0144	0,536	- 0,337

### 3 Determining the controlling reserves

Based on equations (10) and (11), it is observed that the cumulative water supply almost follow a straight trend line for a given time period. The cumulative consumption varies greatly during the day and depends on the variation of the hourly peak coefficient as indicated by equations (12) and (13). The controlling reserves which is a buffer between the cumulative supply during the day and the daily distribution, by the accumulation of excess water during periods of low consumption and its restitution during hours of high consumption. Its expression is therefore as follows:

$$X(t) = R_1(t) - R_2(t). \quad (14)$$

- **Expression of X(t) in the case of a gravity water supply**

From equations (11), (12) and (14), we have:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{Q_{jmax}}{24} t - (At + B) \cdot \frac{Q_{jmax}}{100} \\ &= \left( \frac{Q_{jmax}}{24} - 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \right) t - 0,01 \cdot B \cdot Q_{jmax}. \end{aligned} \quad (15)$$

From equations (11), (13) and (14), we have:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{Q_{jmax}}{24} t - (A't^3 + B't^2 + C't) \cdot \frac{Q_{jmax}}{100} \\ &= Q_{jmax} \left[ -0,01A't^3 - 0,01B't^2 + \left( \frac{1}{24} - 0,01C' \right) t \right] \end{aligned} \quad (16)$$

- **Expression of X(t) in the case of pumped water supply**

Form equations (10), (12) and (14), we have:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (Q_n - Q_{n-1})(t - a_{n-1}) u_{a_{n-1}}(t) - (At + B) \cdot \frac{Q_{jmax}}{100}. \quad (17)$$

Form equations (10), (13) and (14), we have:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (Q_n - Q_{n-1})(t - a_{n-1}) u_{a_{n-1}}(t) - (A't^3 + B't^2 + C't) \cdot \frac{Q_{jmax}}{100}. \quad (18)$$

The controlling reserves are obtained from the superposition of the curves of flow rates of cumulative water supply and the ones of the distribution. A parallel translation of the supply curve for covering the distribution curve allows the visualization of both maximum fluctuations. The sum of these two fluctuations indicates the minimum volume of the controlling reserves.

#### 4 RESULTS AND DISCUSSIONS

The minimum volume of the controlling reserves, on the basis of equations (14) and (15), is the sum, in absolute values, of the largest value and smallest (negative) value of  $X(t)$ .

##### 4.1 Gravity water supply

From equation (15) and table 1, we have:

$$\bullet \quad X(t) < 0 \Rightarrow \left( \frac{Q_{jmax}}{24} - 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \right) t < 0,01 \cdot B \cdot Q_{jmax},$$

whereas  $\left( \frac{Q_{jmax}}{24} - 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \right) < 0$ , for all values of  $A$ ,

$$\text{hence} \quad t > \frac{0,01 \cdot B \cdot Q_{jmax}}{\left( \frac{Q_{jmax}}{24} - 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \right)} = t_{\alpha}.$$

With  $t_{\alpha}$  - the limit time between filling up and the supplying of water to the network linked to the reservoir.  $X(t) < 0$  for  $t > t_{\alpha}$  ( $t_{\alpha} \leq t \leq 24$ ), then  $R_2(t)$  is greater  $R_1(t)$  and it occurs the double supply of water to the network by the reservoir and source. By framing  $X(t)$  on this interval, we obtain its smallest negative value which is as follows:

$$V_2 = 24 \left( \frac{Q_{jmax}}{24} - 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \right) - 0,01 B \cdot Q_{jmax}, \quad (19)$$

$X(t) > 0$  for  $0 < t < t_{\alpha}$ , at that time of the day occurs the filling up of the reservoir. Similarly, framing  $X(t)$  on this interval enables the finding of its maximum positive value which is as follows:

$$V_1 = -0,01 \cdot B \cdot Q_{jmax}. \quad (20)$$

The minimum volume of controlling reserves becomes:

$$V_R = V_1 + |V_2| + \mu. \quad (21)$$

Equations (19) and (20) give:

$$V_R = Q_{jmax} (0,24 \cdot A - 1) + \mu, \quad (22)$$

$$\text{with} \quad \mu = \frac{Q_{jmax}}{100} \cdot \beta, \quad (23)$$

where  $\mu$  - the volume correction factor which corrects the adjustment differences,  $\beta$  - the correction coefficient obtained by simulation with a MATLAB programme which adjusts the volume of the controlling reserves. It is based on the hourly peak coefficient in Figure 3.

In the conditions related to (16),  $X(t)$  being a third degree polynomial, its maximum and minimum values are determined from the properties of its first and second derivatives. So:

$$X'(t) = Q_{jmax} \left[ -0,03A't^2 - 0,02B't + \left( \frac{1}{24} - 0,01C' \right) \right], \quad (24)$$

$$X'(t) = 0 \Rightarrow \Delta = 0,0004B'^2 + 0,005A' - 0,0012A'C'.$$

Based on table 2,  $\Delta > 0$  so there are two distinct solutions  $t_1$  and  $t_2$  of  $X'(t) = 0$ :

$$t_1 = \frac{-0,02B' - \sqrt{\Delta}}{0,06A'} \quad \text{and} \quad t_2 = \frac{-0,02B' + \sqrt{\Delta}}{0,06A'}.$$

Seeking the maximum and minimum of  $X(t)$ , let us integrate  $t_1$  and  $t_2$  in the second derivative of  $X(t)$ , we have:

$$X''(t_1) = Q_{jmax} \sqrt{\Delta} > 0,$$

then  $X(t)$  has a minimum  $V_2$  at point  $t_1$  which represents the smallest negative value,

$$X''(t_2) = -Q_{jmax} \sqrt{\Delta} < 0,$$

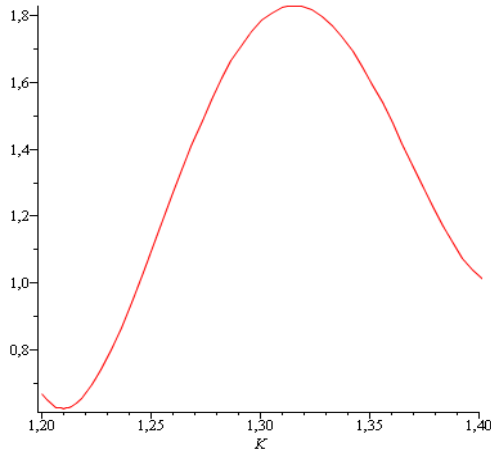
then  $X(t)$  has a maximum  $V_2$  at point  $t_1$ , which represents the largest positive value.

From equation (21), the volume of the controlling reserves becomes:

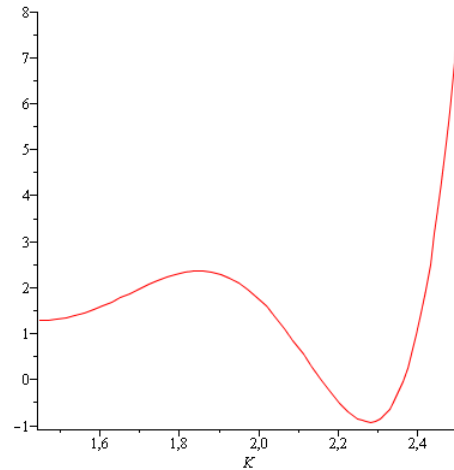
$$V_R = X(t_2) + |X(t_1)| + \mu, \text{ then}$$

$$V_R = Q_{jmax} \left[ 0,01A'(t_1^3 - t_2^3) + 0,01B'(t_1^2 - t_2^2) - \left( \frac{1}{24} - 0,01C' \right) (t_1 - t_2) \right] + \mu. \quad (25)$$

Figure 3.a shows that the coefficient  $\beta$  is equal to 0 for  $K_p = 1.2$  and reaches its maximum value equal to 1.8 at  $K_p = 1.32$  and then decreases to 1 for  $K_p = 1.4$ . However, the volume of controlling reserves calculated with equation (21) is suitable for water supply conditions in cities with medium standing for  $\mu_{max}$  equal to  $0,018Q_{jmax}$ .



**Figure 3.a:** Variation curve of  $\beta$  according to the hourly peak coefficient  $K_p = 1,2-1,4$



**Figure 3.b:** Variation curve of  $\beta$  according to the hourly peak coefficient  $K_p = 1,45-2,5$

Figure 3.b shows that the  $\beta$  coefficient increases from 1 for  $K_p = 1.45$  to 2.4 for  $K_p = 1.9$  by following a gradually varied progression where it reaches its maximum value at 2.4. It tends to infinity for  $K_p$  between 2.3 and 2.4, and vanishes at  $K_p = 2.16$  ( $\mu = 0$ ) then decreases down to -0.9. However, the sum of the differences expressed above decreases for cities with low population whose urbanization is spontaneous and for which  $K_p$  varies from 2.16 to 2.3. In fact, the expression (25) of the volume of controlling reserves is suitable for  $K_p$  between 1.45 to 2.3 with a maximum volume correction  $\mu_{max}$  equal  $0,024Q_{jmax}$ .

#### 4.1 Pumped water supply

In this case, two aspects are considered: the supplied flow rate is spread over 24 hours of the day and so it is constant and equal to  $Q_{hmoy}$  or the supplied flow rate is variable and in fact enables to reduce the required volume of reservoir (which is important especially in the case of an elevated reservoir). The maximum hourly flow rate provided by the pump station thus depends on the selected operating mode; it is generally between  $Q_{hmoy}$  (for uniform pumping) and  $2.4Q_{hmoy}$ . Therefore, the correction volume  $\mu$  is set equal to 0.

The development of equation (10) by iterative method provides its simplified form:

$$R_1(t) = Q_r(t - a_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \cdot L_i, \quad \text{for } t \in [a_{n-1}, a_n[ \quad (26)$$

where  $L_i$  - difference between the upper bound and the lower bound of the  $i^{\text{th}}$  interval.

By incorporating equation (26) into equation (10), we proceed to the framing of  $R_1(t)$  for  $t \in [a_{n-1}, a_n[$ , and we have:

$$\sum_{i=1}^{n-1} Q_i \cdot L_i \leq R_1(t) \leq \sum_{i=1}^n Q_i \cdot L_i. \quad (27)$$

Here, the fact that the pumping rate is variable from one interval to another, equation (17) becomes then:

$$R_2(t) = [A(t - a_0) + B] \cdot \frac{Q_{jmax}}{100}. \quad (28)$$

From equation (28), we proceed to the framing of  $R_2(t)$  for  $t \in [a_{n-1}, a_n[$ , and we have:

$$\begin{aligned} & 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \cdot (a_{n-1} - a_0) + 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot B \leq R_2(t) \\ & \leq 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \cdot (a_n - a_0) + 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot B. \end{aligned} \quad (29)$$

From equations (14) (27) (29) and  $1,2 \leq K_p \leq 1,4$ , we proceed to the framing of  $X(t)$  on  $[a_{n-1}, a_n[$ . This yields to:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \cdot L_i + 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \cdot a_0 - 0,01 \cdot Q_{jmax} (A \cdot a_{n-1} + B) \leq X(t) \\ & \leq \sum_{i=1}^n Q_i \cdot L_i + 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \cdot a_0 - 0,01 \cdot Q_{jmax} (A \cdot a_n + B). \end{aligned} \quad (30)$$



$$\text{So : } I = \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \cdot L_i + 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \cdot a_0 - 0,01 \cdot Q_{jmax} (A \cdot a_{n-1} + B), \quad (31)$$

$$J = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot L_i + 0,01 \cdot Q_{jmax} \cdot A \cdot a_0 - 0,01 \cdot Q_{jmax} (A \cdot a_n + B), \quad (32)$$

The values of I and J are respectively the maxima on each time interval considered.

Similarly to the considerations leading to the expression (28), equation (18) is for  $t \in [a_{n-1}, a_n[$  and  $1,45 \leq Kp \leq 2,5$ :

$$R_2(t) = [A'(t - a_0)^3 + B'(t - a_0)^2 + C'(t - a_0)] \cdot \frac{Q_{jmax}}{100}, \quad (33)$$

$$X(t) = -0,01 \cdot A' \cdot Q_{jmax} (t - a_0)^3 - 0,01 \cdot B' \cdot Q_{jmax} (t - a_0)^2 + (Q_n - 0,01 \cdot C' \cdot Q_{jmax})t + 0,01 \cdot C' \cdot Q_{jmax} \cdot a_0 - Q_n a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \cdot L_i. \quad (34)$$

So :  $I = X(a_{n-1})$ , and  $J = X(a_n)$ .

By setting:  $u_n = a_{n-1} - a_0$  and  $v_n = a_n - a_0$ , we have :

$$I = -0,01 \cdot A' \cdot Q_{jmax} u_n^3 - 0,01 \cdot B' \cdot Q_{jmax} u_n^2 + (Q_n - 0,01 \cdot C' \cdot Q_{jmax})(u_n + a_0) + 0,01 \cdot C' \cdot Q_{jmax} \cdot a_0 - Q_n a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \cdot L_i, \quad (35)$$

$$J = -0,01 \cdot A' \cdot Q_{jmax} v_n^3 - 0,01 \cdot B' \cdot Q_{jmax} v_n^2 + (Q_n - 0,01 \cdot C' \cdot Q_{jmax})(v_n + a_0) + 0,01 \cdot C' \cdot Q_{jmax} \cdot a_0 - Q_n a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \cdot L_i. \quad (36)$$

If  $I > 0$  and  $J > 0$  then  $X(t)$  admits only a positive maximum on  $[a_{n-1}, a_n[$ ,

$$V_{1n} = \text{Max}(I, J) \text{ and } V_{2n} = 0, \quad (37)$$

where  $V_{1n}$  - the largest positive difference between the totals of supply and consumption on the  $n^{\text{th}}$  interval,  $V_{2n}$  - the smallest gap on the  $n^{\text{th}}$  interval.

In this case, there is filling of the reservoir during this time slot.

If  $I < 0$  and  $J < 0$  then  $X(t)$  admits a negative maximum on  $[a_{n-1}, a_n[$ ,

$$V_{1n} = 0 \text{ and } V_{2n} = |\text{Max}(I, J)|, \quad (38)$$

If  $I < 0$  and  $J > 0$  then  $X(t)$  has a positive maximum and a negative maximum on  $[a_{n-1}, a_n[$ ,

$$V_{1n} = J, \text{ and } V_{2n} = |I|. \quad (39)$$

If  $I > 0$  and  $J < 0$  then  $X(t)$  has a positive maximum and a negative maximum on  $[a_{n-1}, a_n[$ .

$$V_{1n} = I \text{ and } V_{2n} = |J|. \quad (40)$$

The minimum volume of the controlling reserves in the reservoir becomes the sum of the maxima of differences  $V_{1n}$  and  $V_{2n}$  related to the conditions (37) (40) on the intervals  $[a_{n-1}, a_n[$  spread over 24 hours of the day, and then the expression of  $V_R$  becomes:

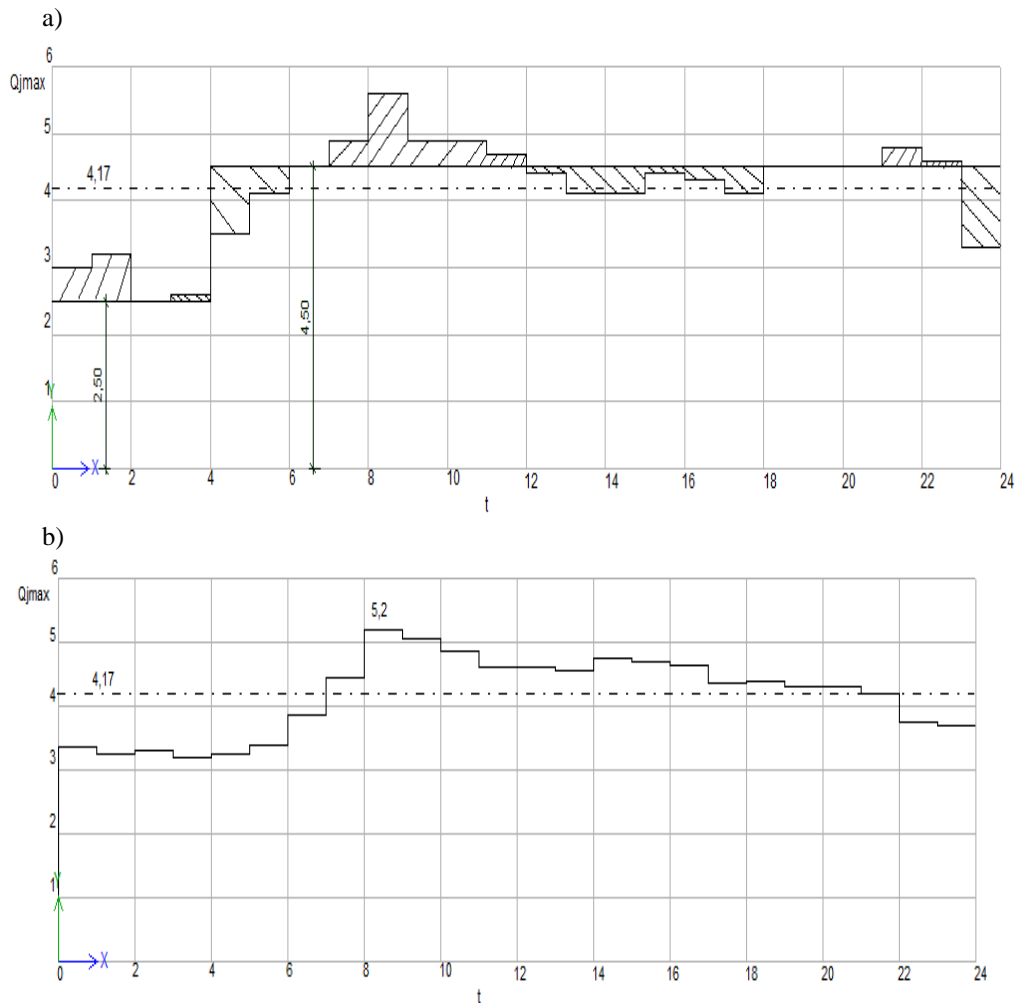
$$V_R = \text{Max}(V_{1n}) + \text{Max}(V_{2n}). \quad (41)$$

This approach shows that the capacity of the controlling reserves is defined using the integral curves whose ordinates give the quantity of the cumulative water consumed since the beginning of the day until the end of each specified time.

Applying this calculation model on drinking water systems in cities with spontaneous urbanization and medium standing in Benin (Figure 5) shows that the capacity of the controlling reserves in the reservoirs is 2.5 to 6 % of the daily peak consumption for a pumping system in steps and 15 to 30% when the pumping system is uniform throughout the day, which is close to the rate proposed by other researchers [2, 6, 9].

## 5 CONCLUSION

The general expressions of curves of the cumulative gravity water supply and pumped water supply as well as the distribution over time formulated using the Laplace transform, have enabled the determination of the volume of the controlling reserves from the daily peak consumption, the pumping system and the hourly peak coefficient. The cumulative consumption scales linearly for a peak coefficient  $Kp$  between 1.2 and 1.4, and follows a polynomial curve of degree 3 for  $Kp$  ranging from 1.45 to 2.5. It is established the relationship between the totals respectively gravity supply systems and delivery and the cumulative consumption, which superimposed have enabled the finding of the mathematical model for determining the control volume ranging from 3 to 30% of the daily peak consumption.



**Figure 4:** Hourly consumption of the peak day for hourly peak coefficients

a)  $K_p = 1.35$  and b)  $K_p = 1.25$

#### References

1. Abdelbaki Chérifa (2014), *Modélisation d'un réseau d'AEP et contribution à sa gestion à l'aide d'un SIG*, Thèse de Doctorat, p-2.
2. Afshar, M. H., Akbari, M., & Marino, M. A. (2005), Simultaneous layout and size optimization of water distribution networks: engineering approach, p 221-230.
3. Basile N. (2008), "Optimization of the design, location and management of water tank in water distribution systems", Ecole Polytechnique de Montréal.
4. Batchbani Essoyeke (2014), *Nouvelle approche pour le dimensionnement et l'optimisation de la gestion des réservoirs et de la qualité de l'eau potable dans les réseaux de distribution*, Université de Montréal, Ecole Polytechnique de Montréal, Thèse de doctorat, p 185
5. Batchbani E., Fuamba, M. (2014b), Optimal Tank Design in Water Distribution Networks: Review of Literature and Perspectives. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 140(2), 136-145.
6. Briere, F. (2007), *Drinking-Water Distribution, Sewage, and Rainfall Collection*. Montréal, Québec: Presses inter Polytechnique. 395p.
7. Diacu Florin (2000). *An Introduction to Differential Equations : Order and chaos*, Ed Freeman and company, 399 p
8. Marchi, A., Dandy, G., Wilkins, A., Rohrlach, H. (2014), A Methodology for Comparing Evolutionary Algorithms for the Optimization of Water Distribution Systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 140(1), 22-31.
9. *Méthodologie de calcul des réseaux d'alimentation en eau potable* (1981), Institut d'ingénieur de construction de l'inigram, 47p
10. Prasad, T. D. (2010), Design of Pumped Water Distribution Networks with Storage. *Journal of Water Resources Planning and Management-Asce*, 136(1), 129-132.

## Расчет составных конструкций

### КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИБКИХ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ТИПА

Э.Я. ЕЛЕНИЦКИЙ, к.т.н., доцент

ООО «Глобалтэксинжиниринг»

443010, г. Самара, ул. Галактионовская, д.139, кв.4, elenit@list.ru

*Предлагается эффективный алгоритм расчета стержневых систем и составных соосных оболочек вращения, для каждого участка которых используются точные аналитические решения соответствующих дифференциальных уравнений равновесия. Сопряжение частей конструкции ветвящегося типа производится автоматически с помощью математического аппарата теории графов. Неизвестными разрешающей системы алгебраических уравнений являются произвольные постоянные общего решения. Использование метода угловых смещений обеспечивает учет геометрической нелинейности задачи. Представлен численный пример расчета сильфонного компенсатора.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** составная оболочка, матрица инцидентий, матрица выделения связей, угловое смещение, линеаризация, сильфонный компенсатор

Существующее многообразие замкнутых решений для стержней, пластин и оболочек канонической формы оказывается мало востребованным при исследовании сложных составных конструкций, поскольку их моделирование осуществляется, как правило, на основе дискретных расчетных схем. В настоящей работе предложено аналитическое решение краевой задачи, допускающее применение процедур формирования граничных условий не только для систем последовательно соединенных элементов [1], но и для составных конструкций ветвящегося типа. Сопряжение частей конструкции производится с помощью теории графов, что позволяет автоматизировать процедуры формирования разрешающей системы алгебраических уравнений. При этом в отличие от работ автора [2,3,4], учитываются конструктивные особенности присоединения отдельных элементов к узлам сооружения. Полученная форма аналитического решения позволяет значительно снизить порядок разрешающей системы уравнений, одновременно сохраняя высокую точность результатов. Последнее обстоятельство особенно важно при тестировании приближенных инженерных методик [5]. В отличие от большинства исследований, применяющих для гибких систем нелинейные дифференциальные уравнения [6], в настоящей статье при учете больших перемещений используются линейные дифференциальные зависимости, соответствующие малым относительным деформациям конструкции [7].

Рассмотрим механическую систему указанного типа. Для ее тел будем использовать термин «элемент», а узловые линии и точечные узлы сокращенно называть «узлами» многосвязной конструкции. Выполним произвольную нумерацию элементов и узлов (рис.1а) и свяжем со срединной поверхностью каждого элемента ортогональную систему координат таким образом, чтобы сопряжение соседних элементов происходило по линиям  $s=const$ . Сформулируем последовательно краевую задачу для отдельного элемента и для составной конструкции.

Для элемента  $e$  с номерами узлов начального и конечного сечений  $j_{e0}, j_{e1}$  ( $j_{e0} < j_{e1}$ ) в линейной постановке при действии нагрузки  $\vec{p}_e$  справедливы соотношения:

$$L[\vec{D}_e(s)] = \vec{p}_e(s), \quad (1)$$

$$c_{je}[h_{e\xi}\vec{f}_e(s_\xi) - \vec{f}_j^*] = 0, \quad c'_{je}[h_{e\xi}\vec{d}_e(s_\xi) - \vec{d}_j^*] = 0, \quad (j = j_{e0}; j_{e1}), \quad (2)$$

первое из которых представляет дифференциальные уравнения равновесия, второе и третье – статические и кинематические условия на границах  $s=s_\xi$ , где  $\xi$  принимает значения 0 и 1 для начального и конечного сечений элемента.

В равенствах (1), (2) обозначено:  $L$  – дифференциальный матричный оператор элемента конкретного типа;  $\vec{D}_e$  – вектор-функция независимых перемещений;  $\vec{d}_e, \vec{f}_e$  – вектор-функции перемещений и усилий в сечениях  $s=s_\xi$ ;  $\vec{f}_j^*, \vec{d}_j^*$  – векторы заданных внешних статических и кинематических воздействий в узле  $j$ ;  $c_{je}, c'_{je}$  – матрицы, формирующие статические и кинематические краевые условия;  $h_{e\xi}$  – матрицы преобразования векторов из локального в глобальный базис.

Приведенные в условиях (2) матрицы имеют следующую структуру:

$$\vec{d}_e = [u_{e1} \quad u_{e2} \quad \dots \quad u_{ek}]^T, \quad \vec{f}_e = [N_{e1} \quad N_{e2} \quad \dots \quad N_{ek}]^T, \quad (3)$$

$$\vec{d}_j^* = [u_{j1}^* \quad u_{j2}^* \quad \dots \quad u_{jk}^*]^T, \quad \vec{f}_j^* = [N_{j1}^* \quad N_{j2}^* \quad \dots \quad N_{jk}^*]^T, \quad (4)$$

$$c_{je} = \begin{bmatrix} g_{je1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{je2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_{jek} \end{bmatrix}, \quad c'_{je} = \begin{bmatrix} g'_{je1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g'_{je2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g'_{jek} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $u_{ev}, N_{ev}$  – компоненты векторов соответственно перемещений и внутренних усилий для степени свободы  $v$  ( $v = 1, 2, \dots, k$ ) в локальной системе отсчета;  $u_{jv}^*, N_{jv}^*$  – аналогичные компоненты кинематических и статических воздействий в узле  $j$  в глобальном базисе;  $k$  – число степеней свободы в сечении  $s=const$ .

Различные комбинации граничных условий обеспечиваются диагональными матрицами (5), элементы которых формируются по следующим правилам:

$$g_{jev} = \begin{cases} 1, & \text{если } N_{jv}^* = \oplus, \\ 0, & \text{если } N_{jv}^* = \otimes, \end{cases} \quad g'_{jev} = \begin{cases} 1, & \text{если } u_{jv}^* = \oplus, \\ 0, & \text{если } u_{jv}^* = \otimes. \end{cases} \quad (6)$$

Знак  $\otimes$  в равенствах (6) указывает, что для степени свободы  $v$  условие на границе  $s=s_\xi$  не задано. Знак  $\oplus$  означает любое действительное число, включая 0.

Для корректного выполнения условий (2) необходимо соблюдать требования:

$$c_{je} + c'_{je} = E, \quad c_{je}c'_{je} = 0, \quad (7)$$

означающие, что для каждой степени свободы может быть задано одно и только одно граничное условие (здесь и далее  $E$  – единичная матрица соответствующей размерности). Таким образом, матрицы  $c_{je}, c'_{je}$  осуществляют выделение граничных условий в зависимости от имеющихся связей по концам элемента.

Для замкнутого решения необходимо, чтобы количество нетривиальных краевых условий (2) с учетом требований (7) равнялось  $2k$ . При этом число степеней свободы в сечениях  $s=s_\xi$  для пространственно нагруженных стержней составляет  $k=6$ , для плоско деформируемых стержней и для осесимметричных оболочек вращения  $k=3$ . Условия (2) записаны в глобальной системе координат, однако они могут быть представлены в локальном базисе, если принять  $h_{e\xi} = E$ .

Далее рассмотрим систему из  $n$  элементов и  $m$  узлов. Крепление элемента к узлу выполняется с помощью внутренних связей. Внешние связи ограничивают перемещения узлов в пространстве. Узел без внешних связей называется свободным, а имеющий закрепления – несвободным. Узел, в котором сходится два элемента, называется простым, а соединяющий три и более элемента – сложным.

Если в узле  $j$  соединяются между собой несколько элементов, полагаем, что один из них (с меньшим номером  $\alpha$ ) является главным, а остальные – присоединенными. Закрепление несвободного в общем случае узла  $j$  допускает наличие

внешних воздействий, которые формально рассматриваются, как воздействия на главный элемент в примыкающем к узлу  $j$  сечении. Тогда, по аналогии с (2), имеем:

$$\sum_{e=1}^n h_{je\xi} \bar{f}_e(s_\xi) = c_{j\alpha} \bar{f}_j^*, \quad \sum_{e=1}^n h'_{je\xi} \bar{d}_e(s_\xi) = c'_{j\alpha} \bar{d}_j^*, \quad j=1,2,\dots,m, \quad (8)$$

$$h_{je\xi} = b_{je} c_{j\alpha} h_{e\xi}, \quad h'_{je\xi} = |b'_{je}| c'_{j\alpha} h_{e\xi}, \quad (9)$$

где матрицы  $h_{je\xi}$ ,  $h'_{je\xi}$  преобразовывают усилия и перемещения из локального в глобальный базис и одновременно осуществляют необходимую компоновку элементов и внешних связей в узле  $j$ .

Первое равенство (8) представляет уравнения равновесия в каждом узле сооружения, поскольку содержащиеся в этом выражении коэффициенты  $b_{je}$  обеспечивают суммирование усилий только тех элементов, которые примыкают к узлу  $j$ . Второе равенство (8) реализуют выполнение заданных кинематических условий с помощью ненулевых коэффициентов  $b'_{je}$ , позволяющих зафиксировать тот главный элемент  $\alpha$ , к которому эти кинематические связи отнесены по условиям задачи. При этом коэффициенты  $b_{je}$ ,  $b'_{je}$  назначаются по следующим правилам:

$$b_{je} = \begin{cases} 1, & \text{если } j_{e\xi} = j \cup \xi = 1, \\ -1, & \text{если } j_{e\xi} = j \cup \xi = 0, \\ 0, & \text{если } j_{e\xi} \neq j, \end{cases} \quad b'_{je} = \begin{cases} b_{ej}, & \text{если } e = \alpha, \\ 0, & \text{если } e \neq \alpha, \end{cases} \quad (10)$$

где знаки плюс и минус учитывают то, что вектора усилий концевых сечений элемента направлены противоположно;  $j_{e\xi}$  – как и ранее, номера узлов элемента  $e$ .

Матрицы  $c_{j\alpha}$ ,  $c'_{j\alpha}$  в (8), (9) представляют матрицы выделения внешних связей, которые следует формировать по формулам (5), (6), (7).

Назначение коэффициентов  $b_{je}$  для любой конструкции легко реализуется с помощью матрицы инцидентий ориентированного графа  $B$ , число строк и число столбцов которой равно соответственно  $m$ ,  $n$ . Любая  $j$ -ая строка при этом соответствует узлу  $j$ , а  $e$ -ый столбец – элементу  $e$ . Если  $e$ -ый элемент примыкает к узлам  $j_{e0}$ ,  $j_{e1}$  ( $j_{e0} < j_{e1}$ ), то в столбце  $e$  записываются только два ненулевых элемента:  $-1$  располагается в строке  $j_{e0}$  и  $1$  – в строке  $j_{e1}$ .

Матрица  $B' = [b'_{je}]$  формируется автоматически. Для этого в каждой строке матрицы  $B$  следует сохранить только первый слева ненулевой элемент, назначив остальным нулевые значения. Например, для конструкции на рис. 1а имеем:

$$B = [b_{je}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B' = [b'_{je}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Замечаем, что число  $\alpha$  в соотношениях (8), (9) определяется автоматически, как номер единственного ненулевого элемента в строке  $j$  матрицы  $B'$ .

Помимо выполнения рассмотренных выше условий, относящихся к узлам сооружения, необходимо обеспечить совместность деформаций примыкающих к узлам элементов. С этой целью предварительно рассмотрим простой узел  $j$ , в котором сходятся два элемента – главный с номером  $\alpha$  и присоединенный с номером  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Без ограничения общности полагаем, что главный элемент прикреп-



ляется к узлу жестко, а присоединенный имеет возможность смещения по одной или нескольким степеням свободы. В этом случае справедливы равенства:

$$c''_{j\beta} h_{\beta\xi} \bar{f}_{\beta}(s_{\xi}) = 0, \quad c'''_{j\beta} [h_{\alpha\xi} \bar{d}_{\alpha}(s_{\xi}) - h_{\beta\xi} \bar{d}_{\beta}(s_{\xi})] = 0, \quad (12)$$

где  $c''_{j\beta}$ ,  $c'''_{j\beta}$  - матрицы выделения внутренних связей сооружения, реализующие выполнение заданных статических и кинематических условий прикрепления элементов к узлам конструкции.

Первая зависимость (12) устанавливает, по каким степеням свободы возможна податливость присоединенного элемента, а вторая обеспечивает совместность перемещений элементов простого узла в глобальных осях. Предпочтительным является задание связей, прикрепляющих элемент к узлу в системе отсчета, связанной с самим элементом. В локальном базисе элемента  $\beta$  равенства (12) принимают вид:

$$c''_{j\beta} \bar{f}_{\beta}(s_{\xi}) = 0, \quad c'''_{j\beta} [h_{\beta\xi} \bar{d}_{\beta}(s_{\xi}) - \bar{d}_{\beta}(s_{\xi})] = 0. \quad (13)$$

В этом случае матрицы  $c''_{j\beta}$ ,  $c'''_{j\beta}$  осуществляют выделение краевых условий в системе координат элемента  $\beta$ . Эти матрицы имеют структуру, аналогичную (5) и содержат на главной диагонали числовые значения  $g''_{jev}$ ,  $g'''_{jev}$ , которые для произвольной строки  $v$  ( $v=1, 2, \dots, k$ ) формируются по правилам:

$$g''_{jev} = \begin{cases} 1, & \text{если } N_{ev}(s_{\xi}) = 0, \\ 0, & \text{если } N_{ev}(s_{\xi}) = \otimes, \end{cases} \quad g'''_{jev} = \begin{cases} 1, & \text{если } u_{ev}(s_{\xi}) = 0, \\ 0, & \text{если } u_{ev}(s_{\xi}) = \otimes, \end{cases} \quad (14)$$

причем, для  $c''_{j\beta}$ ,  $c'''_{j\beta}$  должны выполняться требования, аналогичные (7).

Формулы (13) получены для простого узла системы. Сложный узел кинематически можно представить, как набор простых узлов, если образовать пары из первого и второго, первого и третьего и так далее элементов. Совместность перемещений в таких парах автоматически обеспечивает совместность перемещений в узле конструкции. При этом в качестве первого (главного) элемента сложного узла принимается элемент с меньшим номером. Процедура замены сложных узлов на наборы простых узлов реализуется с помощью матрицы  $B$ . Вершины соответствующего этой матрице орграфа могут иметь различные степени (степенью вершины называется число элементов, примыкающих к данной вершине). Образует на базе исходного орграфа новый орграф, степень любой из вершин которого равна двум. Этому графу будет соответствовать матрица инцидентий  $B'''$ , полученная по следующему правилу: строки матрицы  $B$ , содержащие по одному ненулевому элементу должны быть удалены, а содержащие более двух ненулевых элементов разложены на строки, содержащие пары ненулевых элементов. Например, для первой матрицы (11), преобразование третьей строки имеет вид:

$$[1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

С целью идентификации присоединенных элементов для каждого простого узла системы введем вспомогательную матрицу  $B''$ , в процессе формирования которой в каждой строке матрицы  $B'''$  следует сохранить только первый справа ненулевой элемент, назначив остальным элементам строки нулевые значения.

Ниже приведены примеры получения матриц  $B''$ ,  $B'''$  из первой матрицы (11):

$$B''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Наличие матриц  $B'' = [b''_{je}]$ ,  $B''' = [b'''_{je}]$  позволяет унифицировать запись соотношений (13) и представить их в следующем виде:

$$\sum_{e=1}^n h''_{je\xi} \bar{f}_e(s_\xi) = 0, \quad \sum_{e=1}^n h'''_{je\xi} \bar{d}_e(s_\xi) = 0, \quad j=1, 2, \dots, m_1, \quad (17)$$

$$h''_{je\xi} = b''_{je} c''_{j\beta}, \quad h'''_{je\xi} = \pm |b'''_{je}| c'''_{j\beta} h_{\beta\xi}^{-1} h_{e\xi}. \quad (18)$$

Здесь матрицы (18) обеспечивают компоновку элементов и внутренних связей в узле  $j$ . Число  $\beta$  определяется автоматически, как номер столбца единственного ненулевого элемента в строке  $j$  матрицы  $B''$ , а знаки плюс и минус во втором выражении (18) соответствуют первому и второму ненулевому слагаемому.

Максимальное значение индекса  $j$  в формулах (17), (18), представляющее общее число простых узлов, определяется по формулам:

$$m_1 = \sum_{j=1}^m (z_j - 1) = Z - m = 2n - m, \quad Z = \sum_{j=1}^m z_j, \quad (19)$$

где  $z_j$  – количество соединяемых в узле  $j$  элементов;  $Z$  – общее число таких примыканий, составляющее  $Z=2n$ , поскольку каждый элемент присоединяется одновременно к двум узлам.

Соотношения (8), (17) автоматически формируют систему граничных условий для составной конструкции. Если обозначить:  $K_1$  – суммарное количество условий (8),  $K_2$  – суммарное количество условий (17), то  $K_1=km$ ,  $K_2=km_1$ . Тогда общее количество краевых условий с учетом первой формулы (19) составляет  $K_s=K_1+K_2=2kn$ , то есть равно суммарному порядку высших производных уравнений (1). Следовательно, получаемая краевая задача является замкнутой.

Полагаем, что линейное решение уравнений (1) известно [8]. В геометрически нелинейной постановке воспользуемся методом углового смещения [7] и представим интегралы дифференциальных уравнений в виде:

$$\bar{d}_{ei}(s) = a_{dei}(s) \bar{C}_{ei} + \bar{d}_{pei}(s) + \bar{\Delta}_{ei}(s), \quad \bar{f}_{ei}(s) = a_{fei}(s) \bar{C}_{ei} + \bar{f}_{pei}(s). \quad (20)$$

Здесь для  $i$ -ой итерации в элементе  $e$ :  $a_{dei}$ ,  $a_{fei}$  – матрицы фундаментальных решений для перемещений и усилий;  $\bar{d}_{pei}$ ,  $\bar{f}_{pei}$  – частные интегралы, соответствующие нагрузкам  $\bar{p}_e$ ;  $\bar{C}_{ei}$  – вектор-столбцы произвольных постоянных общего решения;  $\bar{\Delta}_{ei}$  – матрицы, имеющие следующую структуру:

$$\bar{\Delta}_{ei}(s) = [(s - s_{e0})(1 - \cos \varphi_{ei}) \quad 0 \quad (\varphi_{ei} - \sin \varphi_{ei})]^T, \quad (21)$$

где  $s_{e0}$  – координата начального сечения для оболочек и пластин с центральным отверстием;  $\varphi_{ei}$  – угловые смещения прямолинейной образующей элемента. В случае линейного расчета  $\varphi_{ei}=0$  и необходимость применения итераций отпадает.

Подстановка выражений (20) в граничные условия (8), (17) формирует замкнутую неоднородную систему алгебраических уравнений с неизвестными  $\bar{C}_{ei}$  ( $e=1, 2, \dots, n$ ). Линеаризация решения проводится методом Ньютона-Рафсона и производится до тех пор, пока изменения  $\varphi_{ei}$  не станут меньше заданной точности  $\varepsilon$  [7].

В качестве иллюстрации ниже приведены результаты расчета сильфонного компенсатора приемо-раздаточного устройства стальных резервуаров с двойной стенкой [9]. Эта конструкция образована из отдельных элементов-оболочек и предназначена для слива-налива жидких продуктов в условиях значительных взаимных перемещений внутренней  $A$  и внешней  $B$  стенок резервуара, возникающих вследствие действия давления  $p_0$  (рис. 1, б, в). В расчетах использовались модуль упругости 206000 МПа и коэффициент Пуассона 0,3.

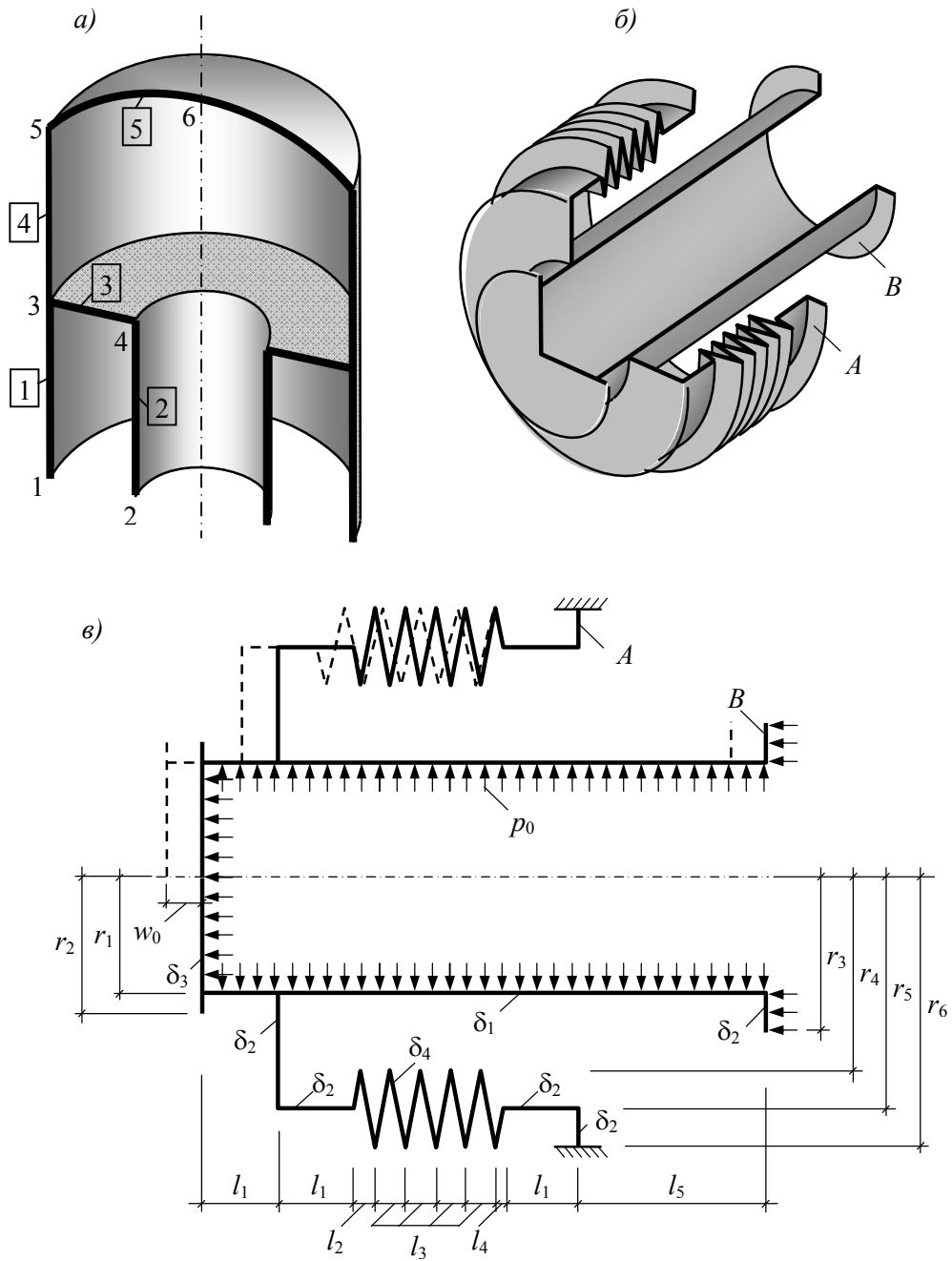


Рис. 1. Расчетные схемы составных оболочек

Расчетная схема конструкции характеризуется длинами участков  $l_\mu$ , радиусами вращения  $r_\mu$  и толщинами элементов  $\delta_\mu$ , приведенными на рис. 1, в, и в табл. 1.

Таблица 1

$\mu$	$l_\mu, \text{м}$	$r_\mu, \text{м}$	$\delta_\mu, \text{мм}$
1	0,20	0,30	20
2	0,06	0,35	12
3	0,08	0,40	30
4	0,02	0,50	3
5	0,50	0,60	–
6	–	0,70	–

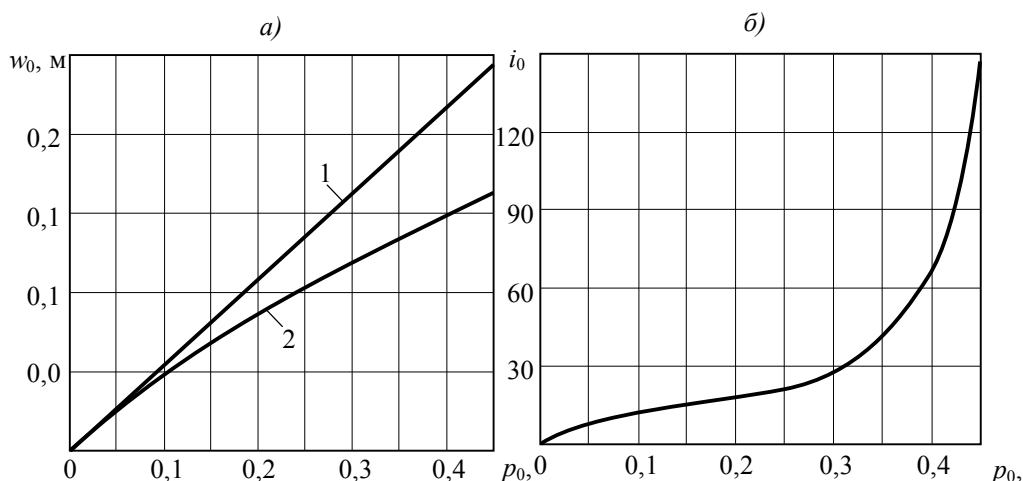


Рис.2. Результаты расчета сильфонного компенсатора

Разбивка расчетной схемы производилась на четыре элемента для конических оболочек и на один-два элемента для остальных участков. Использовалась модель Кирхгофа-Лява. Расчеты выполнены по представленным выше соотношениям с применением программы Mathcad и методом конечных элементов по программе ANSYS (Customer Number 449171).

На рис. 2, а приведены полученные по методике автора графики зависимости перемещений патрубка  $w_0$  от давления  $p_0$ . Установлено, что разница в результатах расчета по линейной теории (кривая 1) и по геометрически изменяемой схеме (кривая 2) составляет 14,1%, 31,3%, 50,4% при действии давления  $p_0$ , соответственно равного 0,1 МПа, 0,25 МПа, 0,45 МПа. Расчет по деформированной схеме произведен для критерия сходимости итерационного процесса  $\varepsilon = 0,001\%$ . Количество итераций  $i_0$ , обеспечивающих заданную точность, представлено на рис. 2,б. Форма графика указывает на существенный рост  $i_0$  при  $p_0 > 0,3$  МПа.

Результаты решения рассматриваемой задачи с помощью программы ANSYS содержится в таблице 2, где приведено сравнение перемещений  $w_0$  (кривая 2, рис.2,а), полученных различными методами.

Таблица 2

$p_0$ , МПа	Перемещение $w_0$ , мм		Погрешность расчета, %
	по программе автора	по программе ANSYS	
0,05	25,319	25,364	0,177
0,15	67,865	67,925	0,088
0,25	103,56	103,57	0,007
0,35	134,77	134,68	0,061
0,45	162,76	162,53	0,136

### Заключение

Матричная структура полученных соотношений позволяет автоматизировать процесс формирования и решения краевых задач для составных конструкций и разрабатывать высокоэффективные программы расчета стержневых систем и составных оболочек вращения сложной конфигурации.

### Л и т е р а т у р а

1. Годунов С.К. Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962. Том 2. – №6. – С. 972-982.
2. Еленицкий Э.Я. Расчет свободных колебаний призматических систем с распределенными параметрами // Известия вузов. Строительство. – 1996. – №7. – С. 26-31.

3. Еленицкий Э.Я., Клюев А.Д. Расчет составных круговых оболочек вращения на вибрационные воздействия с учетом внутреннего трения // Известия вузов. Строительство. – 1999. – №1. – С. 19-26.

4. Еленицкий Э.Я. Динамический расчет составных оболочек вращения с распределенными параметрами // Актуальные проблемы исследования по теории сооружений. Сборник научных статей в двух частях ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Часть 2. – М.: ОАО «ЦПП». – 2009. – С. 54-59.

5. Еленицкий Э.Я. Расчет прочности стенки вертикальных цилиндрических стальных резервуаров большого объема // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. – №2. – С. 12-19.

6. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.

7. Еленицкий Э.Я. Краевая задача для гибких осесимметрично нагруженных составных оболочек вращения и стержневых систем // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2012. – №4. – С. 122-130.

8. Сеницкий Ю.Э., Еленицкий Э.Я. О физически непротиворечивой модели уточненной теории пластин и оболочек // Доклады АН. Т. 331. – 1993. – №5. – с.580-582.

9. B. Long, B. Garner. Guide to storage tanks and equipment. – London: Wiley, 2004. – 588 p.

#### References

1. Godunov, S.K. (1962). Metod ortogonalnoj progonki dlja reshenija sistem raznostnyh uravnenij, *J. vychisl. mathem. i mathem. phis.*, Vol. 2, № 6, p. 972-982.

2. Elenitskiy, E.Ya. (1996). Raschet svobodnyh kolebanij prizmaticheskikh sistem s raspredelemnymi parametrami, *Izvestija vusov. Stroitelstvo*, № 7, p. 26-31.

3. Elenitskiy, E.Ya., Kluev, A.D. (1999). Raschet sostavnyh krugovyh obolochek vrashhenija na vibracionnye vozdejstviya s uchetoм vnutrennego trenija, *Izvestija vusov. Stroitelstvo*, №1, p. 19-26.

4. Elenitskiy, E.Ya. (2009). Dinamicheskij raschet sostavnyh obolochek vrashhenija s raspredelemnymi parametrami, *Aktualnye problemy issledovanija po teorii sooruzhenij: Sbornik nauchnyh statej v dvuh chastjah CNIISK im. V.A. Kucherenko, Chast 2*, Moscow: ОАО «СРР», p. 54-59.

5. Elenitskiy, E.Ya. (2016). Raschet prochnosti stenki vertikalnyh cilindricheskikh stalnyh rezervuarov bolshogo obhema, *Stroitelnaja mehanika i raschet sooruzhenij*, № 2, p. 12-19.

6. Karmishin, A.V., Ljaskovec, V.A., Mjachekov, V.I., Frolov, A.N. (1975). *Statika i Dinamika Tonkostennyh Obolochechnyh Konstrukcij*, Moscow: Mashinostroenie, 376 p.

7. Elenitskiy, E.Ya. (2012). Kraevaja zadacha dlja gibkikh osesimmetrichno nagruzhennyh sostavnyh obolochek vrashhenija i sterzhnevnyh system, *Vestn. Samarsk. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. Nauki*, № 4, p. 122-63.

8. Senickij, Ju.E., Elenitsij, E.Ya. (1993). O fizicheski neprotivorechivoj modeli utochnennoj teorii plastin i obolochek, *Doklady AN*, Vol. 331, №5, p.580-582.

9. Long, B., Garner, B. (2004). Guide to storage tanks and equipment, London: Wiley, 588 p.

### BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR BRANCHING TYPE FLEXIBLE COMPOUND STRUCTURES

E.Ya. Elenitskiy  
LTD «Globaltanksengineering»

There is an efficient algorithm offered to calculate framing and compound coaxial shells of revolution, for each part of which accurate analytical solutions of corresponding differential equations of equilibrium are used. Conjunction of parts of branching type structure is performed automatically with the help of the graph theory mathematical tool. The unknowns of the resolving system of algebraic equations are the general solution arbitrary constants. Use of angular deflection method provides geometrical nonlinearity of the problem. The numerical example of calculation of the expansion bellows is presented.

KEY WORDS: compound shell, incidence matrix, matrix of extraction bracer, angular deflection, linearization, expansion bellows.



## **Требования к оформлению статей в журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений»**

Текст статьи подготавливается в виде компьютерной, готовой к изготовлению печатной матрицы, распечатки и варианта на электронном носителе. Текст распечатки должен быть четким. Формат текста с размером по вертикали 23 см и по горизонтали 13,5 см. Текст размещается в середине листа формата А4.

Поля рукописи должны быть следующие:

верхние и нижнее по 3,4 см; справа и слева по 3, 8 см.

Отступ первой строки абзаца – 0,75 см.

Текст подготавливается в системе *Word*, размер шрифта 11 пунктов. Шрифт *Times New Roman*, межстрочный интервал *одинарный*. Текст оформляется по аналогии с представленными в сборнике статьями. Обязательно использовать *автоматический перенос*.

Заголовок **СТРОЧНЫМИ** буквами, жирным шрифтом, центрируется (в заголовке не должно быть переносов).

После пропуска одной строки следует И.О. ФАМИЛИЯ, *ученая степень, ученое звание* (или *инженер, аспирант, студент*) (курсивом) автора. Соавтор аналогично.

С новой строки: *Организация* (место работы, курсивом). Если соавторы из разных организаций против каждого автора из одной организации ставится одна звездочка \*, против авторов (соавторов) из другой организации – две звездочки \*\* (и т.д.). После последовательного перечисления всех авторов статьи (каждого с новой строки) следуют наименования организаций, предваренные \* или \*\* (и т.д.) звездочками. Затем с новой строки следует полный почтовый и электронный адрес автора.

После пропуска одной строки следует *краткая аннотация статьи* (курсив, 10 пт) объемом не более 6-8 строк, затем после пропуска одной строки идут ключевые слова, и, наконец, после пропуска одной строки идет основной текст.

После основного текста следует: Л и т е р а т у р а (центрируется)

Далее идет пронумерованный список цитируемой литературы (Full –10). Авторы выделяются курсивом. Затем с новой строки следует: R e f e r e n c e s (центрируется) и повторяется цитируемая литература на английском языке или на родном языке, но латинскими буквами (Full – 9).

В заключительной части статьи приводятся **НАЗВАНИЕ** статьи (строчными жирными буквами), ф.и.о. авторов (централизуются) и перевод аннотации статьи на иностранный, предпочтительнее, английский язык. Затем с новой строки идут ключевые слова (KEY WORDS: ...) на английском языке.

Рисунки оформляются в тексте статьи предпочтительно средствами *Word* или других графических средств. Рисунки, оформленные отдельно от текста, должны полностью занимать страницу в пределах формата текста, на листе А4. Рисунки, выполненные чертежными средствами (тушью или черными чернилами), должны быть аккуратными с четкими надписями. Рисунки и надписи на них должны быть единым целым (сгруппированы) и не распадаться при их перемещении. Рисунки отделяются от текста на 6 пт.

Формулы в тексте статьи готовятся с помощью редактора формул *Microsoft equation* с установленными параметрами:

Full –11, Subscript/Suhtscript – 9, Sub- Subscript/Suhtscript – 7,

Symbol – 14, Subsymbol – 10.

Математика (функции) – латинские символы курсивом, греческие символы – прямым шрифтом. Между формулами и сверху, снизу от текста интервал 3 *pt*.

Номера страниц проставляются карандашом в левом нижнем углу страницы. Последняя страница предоставляется в двух экземплярах, второй экземпляр подписывается авторами статьи.

Аспирантам и соискателям желательно приложить к статье отзыв научного руководителя или специалиста по тематике статьи из организации, где выполняется работа.

Редакция имеет право снимать с публикации статьи, не отвечающие указанным требованиям, или, если на статью поступят два отрицательных отзыва рецензентов, или членов редакционного совета, или членов редколлегии журнала.