

## Сведения о журнале

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-19706 от 13 апреля 2005 г. Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода) и 80344 (год).

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, сформированный Минобрнауки России, для публикаций основных научных результатов диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук. Перечень вступил в силу 1 декабря 2015 г.

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АНДРЕЕВ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (МГСУ, Москва),  
БАЖЕНОВ В.А., акад. Национальной Академии педагогических наук Украины, д.т.н., профессор (КНУСА, Киев, Украина),  
БОНДАРЕНКО В.М., акад. РААСН, д.т.н., профессор (НИИСФ РААСН, Москва),  
ВАНИН В.В., д.т.н., профессор (Киевский политехнический университет, Украина),  
ИВАНОВ С.П., д.т.н., профессор (ПГТУ – ВОЛГАТЕХ, Йошкар-Ола),  
КАРПЕНКО Н.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (НИИСФ РААСН, Москва),  
КОЛЧУНОВ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ЮЗГУ, Курск),  
KRASIC SONJA, PhD (University of Nis, Nis, Serbia),  
КРИВОШАПКО С.Н., д.т.н., профессор (РУДН, Москва),  
ЛЯХОВИЧ Л.С., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ТГАСА, Томск),  
ГРУДЕВ И.Д., д.т.н., профессор, почетный член РААСН (ЦНИИПСК, Москва),  
ПОТАПОВ В.Д., д.т.н., профессор (МГУПС РФ (МИИТ), Москва),  
САНЖАРОВСКИЙ Р.С., д.т.н., проф. (Евразийский Нац. У-т им. Гумилева, Казахстан),  
ТРАВУШ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ЭНПИ, Москва),  
ЯКУПОВ Н.М., чл-корр. РИА, д.т.н., профессор (ИММ КазНЦ РАН, Казань)

### РЕДАКЦИЯ:

д.т.н., профессор С.Н. Кривошапко – *главный редактор*,  
д.т.н., профессор В.Н. Иванов – *зам. главного редактора*,  
д.т.н. С.Е. Лисичкин; д.т.н., профессор Е.М. Зверяев; д.т.н., профессор В.И. Обозов;  
д.т.н., профессор В.П. Агапов; И.А. Мамиева – *исполнительный редактор*;  
доцент В.А. Романова – *редактор русскоязычного Интернет-сайта журнала*,  
Е.А. Гринько – *редактор англоязычного Интернет-сайта журнала*.

Русскоязычный интернет-сайт журнала: <http://stmj.rudn.ru>

Англоязычный интернет-сайт журнала <http://smjournal.narod.ru>

Технический секретарь *Е.М. Тупикова*

Компьютерная верстка *Т.И. Карелина*

**Почтовый адрес журнала:** 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН,  
каф. Прочности материалов и конструкций  
Тел.: (495) 955-09-78; (495) 955-08-81; Факс: (495) 955-08-81; (495) 952-08-29

E.mail: [sn\\_krivoshapko@mail.ru](mailto:sn_krivoshapko@mail.ru) или [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Тираж 350 экз.

---

Учредитель: Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН

Типография ИПК РУДН, 117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений», 2016

© С.Н. Якупов, фото на 1-ой странице обложки (Казань, панорама Казани, 2016)

# Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6 тел.: (495) 955-09-78; FAX: (495)9520829

## С о д е р ж а н и е

№ 5, 2016 год

### Расчет и проектирование строительных конструкций

- Климов Е.А., Николаев В.Б.* Совершенствование методики расчета  
индустриальных бессварных петлевых стыков арматуры железобетонных  
конструкций ГЭС и АЭС по предельным состояниям..... 3
- Колчунов Вл.И., Рыпаков Д.А.* Моделирование пространственной трещины  
в железобетонных конструкциях при кручении с изгибом..... 11
- Кузьмин Д.А.* Исследование условий обеспечения безопасности главного  
циркуляционного трубопровода на основе концепции ТПР..... 16
- Уткин В.С., Соловьев С.А.* Расчет надежности железобетонной балки по  
критерию длины трещины..... 23

### Теория упругости

- Кудрявцев С.Г., Булдакова Ю.М.* Напряженное и деформированное  
состояние двухслойного анизотропного основания при отсутствии трения  
между слоями..... 33

### Численные методы расчета конструкций

- Гневашев Д.А., Матвеев Е.А., Крутина Е.В.* Математическое  
моделирование процесса осадки алюминиевого образца..... 43
- Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ицанов Т.Р.* Конечно-элементный  
анализ НДС оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига. 48

### Динамика конструкций и сооружений

- Каримбаев Т.Д., Нурымбетов А.У.* Собственные частоты колебаний  
слоистого композиционного стержня..... 57
- Шепитько Е.С.* Колебания стержней с учётом нелокального  
демпфирования..... 64

### Механика жидкости

- Кампос Седеньо А.Ф., Синиченко Е.К., Гришук И.И.* Влияние  
термического режима Тихого океана на осадки в гидрографической  
демаркации Манаби (Эквадор)..... 71
- Рекач Ф.В.* Расчет неустановившегося движения жидкости в круговых  
цилиндрических оболочках для сложной схемы, содержащей несколько  
колец..... 75
- Требования к оформлению статей в журнал..... 80*

---

## *Contents,*

*No 5, 2016*

### *Analysis and design of building structures*

- Klimov E.A., Nikolaev V.B.* Improvement of the method of calculation of industrial loop connections of fittings of reinforced concrete constructions of hydroelectric power station and the NPP at the limit state..... 3
- Kolchunov V.I., Rypakov D.A.* Modeling spatial cracks in concrete structures in torsion bending..... 11
- Kuz'min D.A.* Investigation of the conditions of safety ensure of the main circulating pipeline on the basis of the LBB concept..... 16
- Utkin V.S., Solovyev S.A.* Calculation of reinforced concrete beam reliability on the crack length criterion..... 23

### *Theory of elasticity*

- Kudryavtsev S.G., Buldakova J.M.* Stress and deformed state of two-layered anisotropic foundation in the absence of friction between the layers..... 33

### *Numerical methods of analysis of structures*

- Gnevashev D.A., Matveev E.A., Krutina E.V.* Mathematical modeling of the aluminum sample precipitation..... 43
- Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ischanov T.R.* Finite element analysis of stress-strain state of shells of revolution with taking into account the strain of transversal shearing..... 48

### *Dynamics of structures and buildings*

- Karimbayev T.D., Nurimbetov A.U.* The natural frequency of the composite laminated rod..... 57
- Shepitko E.S.* Rod vibrations considering non-local damping..... 64

### *Mechanics of liquid*

- Campos Cedeno Antonio Fermin, Sinichenko E. K., Gritsuk I. I.* Influence of the thermal mode of the Pacific Ocean on rainfall in hydrographic demarcation of the Manaba (Ecuador)..... 71
- Rekach F.V.* Analysis of unsteady liquid motion in circular cylindrical shells for complex scheme including several rings..... 75

## Расчет и проектирование строительных конструкций

### СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ИНДУСТРИАЛЬНЫХ БЕССВАРНЫХ ПЕТЛЕВЫХ СТЫКОВ АРМАТУРЫ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГЭС И АЭС ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Е.А.КЛИМОВ, аспирант, инженер\*.

В.Б.НИКОЛАЕВ, д.т.н., профессор\*\*.

\*АО «НИИЭС», 125362 г. Москва, Строительный проезд 7А;

e-mail: klimzero@mail.ru;

\*\*АО «Атомэнергoproject», 105005 г. Москва, ул. Бакунинская, д.7 стр. 1;

e-mail: valernik@inbox.ru

В статье представлены результаты исследований петлевых стыков стержневой арматуры массивных железобетонных конструкций ГЭС и АЭС, в том числе разработка методики расчета петлевых стыков по предельным состояниям первой и второй группы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: железобетонные конструкции, арматура, петлевой стык, прочность, предельное состояние, методика расчета.

Петлевой стык арматуры железобетонных конструкций представляет собой соединение двух или более стыкуемых арматурных каркасов, путём пересечения встречных петель стержневой арматуры, между петлями которых образуется бетонное ядро, передающее усилия с одной части элемента на другую или с одного элемента железобетонной конструкции на другой. Петлевой стык, в котором стержневые выпуски переходят из растянутой в сжатую зону элемента, называется петлевым стыком-перепуском (рис. 1).

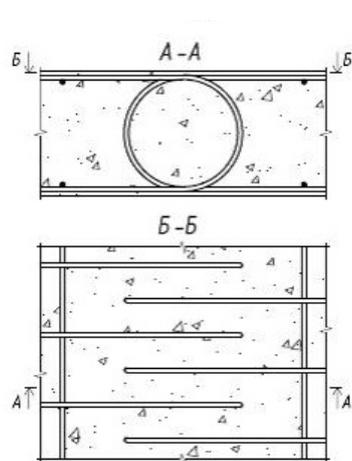


Рис. 1 Линейный петлевой стык-перепуск стержневой арматуры

Петлевые стыки различаются по форме очертания ядра, по количеству стыкуемых элементов, по взаимному расположению арматурных петель в железобетонной конструкции, а так же по наличию армирования ядра. По форме очертания ядра различают стыки с круговым, овальным или прямоугольным (полигональным) очертанием. По количеству стыкуемых элементов, петлевой стык может соединять один, два, три или четыре элемента конструкций. При соединении в пределах одного элемента конструкции, например перекрытия, можно выделить линейный петлевой стык (рис. 2). При соединении двух элементов железобетонной конструкции, например, стены и перекрытия, возникает угловой петлевой стык (рисунок 3).

Многообразие форм и конструкций петлевых стыков обуславливает необходимость создания специальной методики расчета, учитывающей все геометрические и конструктивные особенности петлевых соединений.

Бессварной петлевой стык, рассматриваемый в рамках научно-исследовательских работ, проведенных в АО «НИИЭС», отличается от известного с 40-х годов прошлого века стыка конструкции академика Г. П. Передерия, используемого в основном мостостроении. К основным отличиям можно отнести:

- отсутствие армирования ядра стыка и тем более плотно прилегающих шпилек;
- отсутствие требования плотного прилегания встречных петель друг к другу;
- возможное расположение петель «вразбежку» – посередине между шагом арматуры;
- возможность применения петлевых выпусков различного напряженного состояния по знаку усилия – одна часть петли растянута, другая – сжата.

Также, петлевой стык имеет явные преимущества перед другими видами соединений стержневой арматуры:

- технологичность монтажа арматурных каркасов;
- отсутствие жёстких требований по соосности арматуры;
- высокая усталостная прочность;
- повышенная надёжность анкерующей способности в связи с замкнутостью ветвей растянутой и сжатой арматуры по сравнению с прямыми перепусками;
- отсутствие концентраторов напряжений;
- отсутствие сварочных напряжений;
- полное отсутствие трудоемких ручных работ, а значит технологичность монтажных работ.

Кроме того, петлевой стык может в равной степени использоваться как в пролёте конструкции, так и в угловых соединениях перекрытий со стеновыми конструкциями.

Перечисленные особенности позволяют исключить трудоёмкую стыковку арматуры. Использование подобных технологий оптимизации строительства позволяет сократить использование трудовых ресурсов и повысить скорость строительства. Однако, широкое распространение петлевых стыков в строительстве ограничивалось из-за отсутствия обобщенной методики расчета, учитывающей множество параметров, влияющих на прочность стыка. Ядро петлевого стыка претерпевает сложное пространственное напряженное состояние и зависит от значительного числа переменных параметров: диаметра петлевого выпуска, «эллипсовидности» ядра, диаметра и класса арматуры, шага арматуры, прочности бетона, напряженного состояния петлевых выпусков.

Применение петлевых стыков в конструкциях ряда объектов бывшего СССР (таких как Курская АЭС, насосные станции Каршинского магистрального канала, фундаменты высоковольтной линии электропередач через Каховское водохранилище, каналы технического водоснабжения ТЭЦ) было обосновано эмпирическим путем.

Составление методики расчета петлевых стыков на основе применения статистического подхода являлось крайне затруднительным из-за необходимости испытаний значительного числа физических моделей со многими переменными параметрами. Число подобных моделей при планировании экспериментов составляло бы более 1000 образцов. Подобным методом было проведено исследование в Национальном университете Сингапура [8].

В итоге был принят другой путь исследований, заключающийся в разработке аналитической методики с использованием приемов сопротивления материалов и теории железобетона с последующей апробацией и корректировкой на основе испытаний крупномасштабных моделей.

В ходе исследований железобетонных конструкций с петлевыми стыками была разработана методика расчета петлевых стыков по первой и второй группе предельных состояний. На основе анализа совместной работы арматуры и бе-

тонного ядра петлевого стыка, был получен ряд зависимостей, позволяющих оценить прочность конструкций с петлевыми стыками.

Надежность разработанной конструкции петлевых стыков обосновывается недопущением наступления предельных состояний: первой группы – по несущей способности; второй группы – по ограничению раскрытия магистральных трещин от воздействия расчетных сочетаний нагрузок.

Расчеты петлевых стыков на действие изгибающих моментов, продольных и поперечных сил, крутящих моментов проводятся по предельным состояниям, включающим:

- первую группу предельных состояний, превышение допустимых значений которой ведёт к потере несущей способности и к полной непригодности к эксплуатации конструкций с петлевыми стыками;
- вторую группу предельных состояний, превышение допустимых значений которой нарушает нормальную эксплуатацию конструкций с петлевыми стыками или исчерпывает ресурс их долговечности по сравнению с предусматриваемым сроком службы.

Конструкции с петлевыми стыками рассчитываются на действие поперечных сил как монолитные конструкции (без стыков) в соответствии с требованиями нормативных документов [1-2]

Расчет петлевых стыков по предельным состояниям предусматривает определение прочности бетонного ядра петлевого стыка и ширины раскрытия трещин. Деформации, прогибы железобетонных конструкций с петлевыми стыками определяются как для монолитных железобетонных конструкций.

Расчеты по предельным состояниям первой группы следует производить из условия, по которому усилия в петлевых стыках от различных нагрузок и воздействий с учетом начального напряженного состояния (температурные и другие воздействия) не должны превышать соответствующих предельно допустимых значений, превышение которых ведёт к потере несущей способности конструкций с петлевыми стыками.

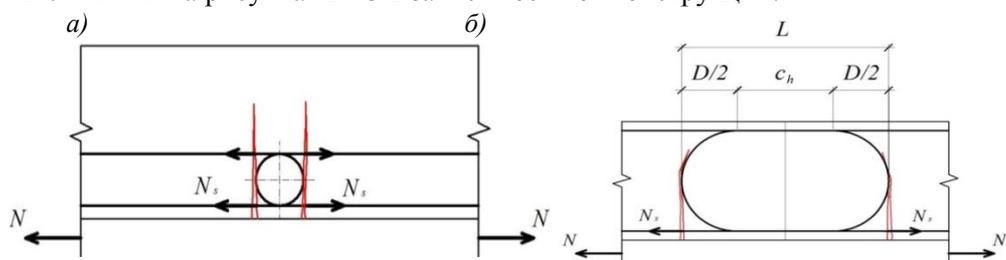
Принято следующее условие прочности по первому предельному состоянию (по несущей способности): напряжения в бетоне ядра не должны превосходить расчетных сопротивлений при сжатии и при растяжении от действия усилий, равных произведению площади сечения арматуры на ее расчетное сопротивление:

$$N_{cl} \geq N_s,$$

где  $N_{cl}$  – несущая способность ядра петлевого стыка;

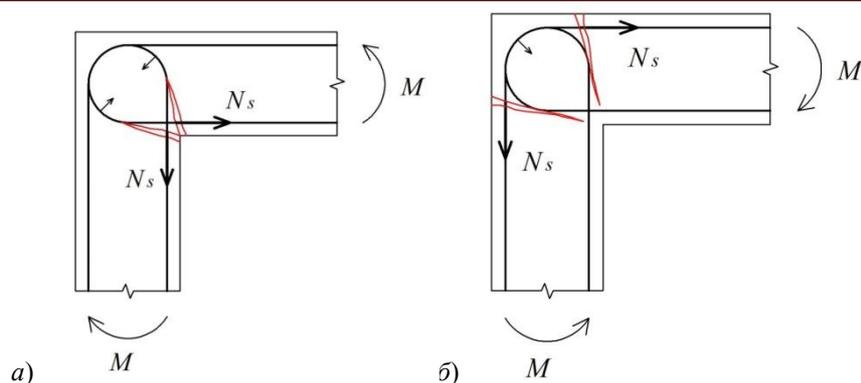
$N_s$  – усилие в одном арматурном стержне.

Направления усилий и схемы магистральных трещин обозначены ломаными линиями на рисунках 2 и 3 в зависимости от конструкции.



а) тип Л-1 - петлевой стык с двумя рядами арматуры у растянутой грани; б) тип Л-2 - петлевой стык-перепуск с одним рядом арматурных сеток у растянутой и сжатой грани

Рис. 2. Схемы передачи усилий и положения магистральных трещин в линейных петлевых стыках



а) тип У-1 – угловой стык с растянутой внутренней гранью;  
 б) тип У-2 – угловой стык со сжатой внутренней гранью.

Рис. 3. Схемы передачи усилий и положения магистральных трещин в угловых петлевых стыках

Ввиду многообразия типов петлевых стыков, их расположения в конструкциях, а также действующих нагрузок, можно выделить четыре возможные формы наступления предельного состояния и разрушения:

А – Раскалывание ядра под петлями;

Б – Срез ядра по наклонным сечениям, соединяющим встречные петли;

В – Сдвиг ядра от кручения;

Г – Потеря анкерующей способности петлевых выпусков с образованием шарнира.

В результате расчетов по указанным формам разрушения, параметры стыка принимаются по наименьшей несущей способности.

А) Предельное состояние при раскалывании – форма разрушения «А».

Методика расчета основывается на численном анализе локального (под петлевыми выпусками) поля напряжений при различных соотношениях шага петель к диаметру ядра. (см. рисунок 4).

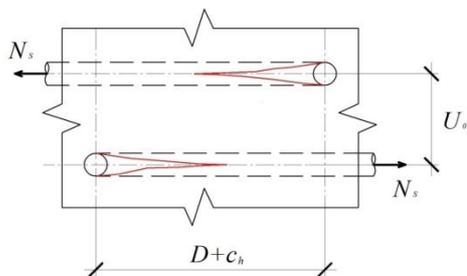


Рис. 4. Схема усилий и характер трещинообразования при раскалывании ядра петлевого стыка под петлями (ломаными линиями обозначены возникающие трещины)

Расчет на раскалывание бетона под петлями производится из условия:

$$N_{cl} \geq N_s.$$

Несущая способность ядра петлевого стыка  $N_{cl}$  определяется по формуле:

$$N_{cl} = \left[ 2.3 \left( \frac{U_0}{D + c_h} \right)^2 + 1.3 \right] \cdot S_{cl} \cdot k_c \cdot R_{bt},$$

где  $U_0$  – расстояние между стержнями арматуры в зоне стыка;

$c_h$  – длина горизонтальной прямой вставки;

$S_{cl}$  – площадь ядра петлевого стыка, определяемая по формуле:

$$S_{cl} = 0.25\pi \cdot D^2 + c_h \cdot (D + c_v) + c_v \cdot D,$$

где  $c_v$  – длина вертикальной прямой вставки;  $k_c$  – коэффициент, учитывающий повышение прочности ядра в зависимости от его армирования:

- в стыке типа Л1:

$$k_c = 1 + 0,125A_c/A_s \leq 1,5,$$

где  $A_s$  – площадь сечения одного стержня рабочей арматуры;

$A_c$  – площадь сечения всех стержней, армирующих ядро;

- в стыке-перепуске типа Л2 и угловых стыках-перепусках типа У1 и У2:

$$k_c = 1 + \frac{4 \cdot A_c}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{E_s}{E_b} \leq 1,5.$$

Б) Предельное состояние от среза ядра по наклонным сечениям, соединяющим встречные петли – форма разрушения «Б».

В основе методики используется теория прочности Мора. Методика апробирована на результатах испытаний методической серии моделей с различным шагом арматуры, выполненных в НИСеГидропроекта. Схема усилий и характер трещинообразования при срезе по наклонным сечениям показан на рис. 5.

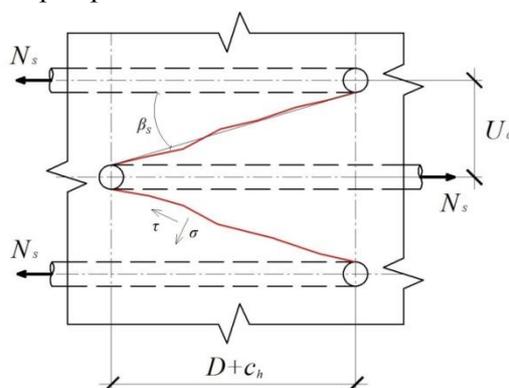


Рис. 5. Схема усилий и характер трещинообразования при срезе по наклонным сечениям (ломаными линиями обозначены возникающие трещины)

Расчет петлевых стыков при срезе по наклонным сечениям производят из условия:

$$N_{cl} \geq N_s,$$

$$N_{cl} = \gamma_l \cdot S_s \cdot k_c \cdot ([\tau] \cdot \cos\beta_s + [\sigma] \cdot \sin\beta_s),$$

где:  $\gamma_l$  – коэффициент, учитывающий особенности распределения напряжений по сечению ядра стыка:

- для стыка типа Л1:  $\gamma_l = 1$
- в стыке-перепуске типа Л2:  $\gamma_l = 0,9$
- в угловых стыках-перепусках типа У1 и У2:  $\gamma_l = 1,1$ ;

$\beta_s$  – угол среза, определяемый по формуле:  $\beta_s = \arctg \frac{U_0 - d}{D + c_h}$ ;

$S_s$  – площадь наклонного сечения, определяемая по формуле:

$$S_s = \frac{S_{cl}}{\cos\beta_s},$$

где  $S_{cl}$  – площадь ядра петлевого стыка, определяемая по формуле;

$[\sigma]$  – средние значения нормальных напряжений в наклонном сечении:

$$[\sigma] = \frac{1,35R_{bt}}{1 - k_R + 2 \cdot \sqrt{k_R} \cdot \text{ctg}\beta};$$

где  $k_R = R_{bt}/R_b$ ;

$[\tau]$  – средние значения касательных напряжений в наклонном сечении:

$$[\tau] = [\sigma] \cdot ctg\beta.$$

В) Предельное состояние от действия кручения – Форма разрушения «В».

Максимальные касательные напряжения в ядре от кручения возникают по его контуру и не суммируются с максимальными касательными напряжениями, возникающими в средней части наклонного сечения при рассмотрении напряженного состояния многопролетной «балки». Структура разработанной формулы учитывает зависимость крутящего момента от упруго-пластичного полярного момента сопротивления и максимальных касательных напряжений по [3] и [4]. Методика распространяется на конструкции, испытывающие динамические воздействия (ударная волна, сейсмическая нагрузка) и претерпевающие попеременное растяжение на противоположных гранях.

Расчет на кручение производят из условия:

$$D_k \geq D_{req},$$

где  $D_k$  – диаметр эквивалентного кругового ядра, определяемый по формуле:

$$D_k = 2\sqrt{S_{cl}/\pi};$$

$D_{req}$  –требуемый диаметр петлевого стыка, определяемый по формуле:

$$D_{req} = k \cdot d \cdot \sqrt{R_s/R_b},$$

где  $k = 2,58$  – для линейного стыка-перепуска;  $k = 1,72$  – для углового стыка-перепуска.

Г) Предельное состояние от потери анкерующей способности петель – форма разрушения «Г»

В основе методики лежит условие равновесия арматурного стержня, состоящего из прямолинейных и криволинейных участков. В методике используется прочность сцепления криволинейного анкера с бетоном, полученная в результате обработки и анализа разрушающих усилий при испытаниях балок с петлевыми круговыми перепусками.

Расчет при потере анкерующей способности производится из условия:

$$D_k \geq D_{req},$$

Требуемый диаметр ядра петлевого стыка определится по формуле:

$$D_{req} = \frac{0.5R_s \cdot d}{\pi \cdot R_{bond3}},$$

где  $R_{bond3}$  – среднее сопротивление сцепления арматуры с бетоном по криволинейному анкеру, определяемое по формуле:

$$R_{bond3} = \eta_3 \cdot R_{bt},$$

где  $\eta_3$  – коэффициент, учитывающий влияние диаметров петли и арматуры и определяемый по формуле:

$$\eta_3 = 5.7 - 0.12D/d.$$

Если  $D_{req} > D_k$ ,требуется определение длины прямой вставки из зависимости:

$$c = \frac{0.25 \cdot R_s \cdot d - 0.5 \cdot \pi \cdot D \cdot R_{bond3}}{\eta_1 \cdot R_{bt}},$$

где  $\eta_1$  –коэффициент, учитывающий влияние вида поверхности арматуры, определяемый по [1, с 115].

В полигональных (прямоугольных) стыках в прямую вставку  $c$  включаются все прямолинейные участки горизонтального и вертикального направления:

$$c = c_h + c_v.$$

Расчеты петлевых стыков по предельным состояниям второй группы включают:

- расчеты по образованию трещин, которые следует производить как для монолитных конструкций по нормативным документам [1с.78, 2с.46] для проверки необходимости учета трещин при расчете по деформациям;

- расчеты по раскрытию трещин, которые необходимо выполнять из условия, по которому ширина раскрытия трещин в стыке от различных нагрузок и воздействий не должна превышать предельно допустимых значений. Максимально допустимые значения раскрытия трещин устанавливаются исходя из требований, предъявляемых к конструкции в зависимости от условий ее эксплуатации, воздействия окружающей среды и характеристик материалов с учетом особенностей коррозионного поведения арматуры и бетона;

- расчеты по деформациям, которые следует выполнять как для монолитных конструкций по нормативным документам [1, с.85; 2, с.51] из условия, по которому перемещения и амплитуды колебаний конструкций от различных нагрузок и воздействий не должны превышать соответствующих предельно допустимых значений, при превышении которых нарушается нормальная эксплуатация конструкций или исчерпывается ресурс их долговечности.

Раскрытие магистральной трещины в сечении по контуру ядра определяется деформацией растянутой арматуры и деформацией бетонного ядра и суммируется из трех составляющих:

- деформации арматуры вне ядра;
- деформации арматуры в зоне прямой вставки;
- деформации ядра.

Для угловых и линейных стыков ширина раскрытия трещины определяется формуле:

$$a_{crc} = \left[ \left( 0.062 \frac{d}{R_{bt,n}} \cdot \sigma_{s,crc} + 0.5 \cdot D \right) \cdot \Psi_s \frac{\sigma_s}{E_s} + 0.25 \cdot \Psi'_s \frac{\sigma'_s}{E_s} \cdot c + 1.56 \cdot \frac{d^2}{U_0} \cdot \frac{\sigma'_s}{E_{b,\tau}} \right],$$

где  $\sigma_{s,crc}$  – напряжение в растянутой арматуре в сечении с трещиной сразу после образования нормальных трещин [1с. 85];

$\Psi_s$  – коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительных деформаций растянутой арматуры между трещинами [1, с. 85];

$\Psi'_s$  – коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительных деформаций растянутой арматуры между трещинами в зоне прямой вставки с двойным армированием [1, с. 85];

$E_{b,\tau}$  – модуль деформаций бетона при длительном действии нагрузки [1, с. 24];

$\sigma'_s$  – напряжение в арматуре в начале криволинейного участка петлевого выпуска, определяемое по формуле:

$$\sigma'_s = \sigma_s \cdot \left( 1 - \frac{0,25c}{l_{0an}} \right),$$

где  $l_{0an}$  – длина анкеровки арматуры, определяемая по [1, с. 115].

В ходе дальнейших исследований были проведены испытания 24-х крупномасштабных железобетонных моделей линейных и угловых петлевых стыков. Испытания проводились на различные виды воздействий: действие изгибающего момента, действие поперечной силы, температурные и динамические воздействия. Проведенные экспериментальные исследования подтвердили корректность разработанной методики и позволили включить в зависимости методики ряд эмпирических коэффициентов. При планировании и проведении экспериментальных исследований был учтен опыт физического моделирования массив-

ных железобетонных конструкций энергетических сооружений, в том числе, имеющих несущие элементы из листовой стали [5-8].

#### Л и т е р а т у р а

1. СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения» Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003, 2012, 54 с.
2. СП 41.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции гидротехнических сооружений», 2012, 38 с.
3. Новые конструкции промышленных стыков в энергетическом строительстве. Обзорная информация / А.П. Кириллов, В.Б. Николаев, О.Д. Рубин, С.В. Селезнёв. Информэнерго, выпуск 6. М. 1987, 52 с.
4. *Минарский А.Е.* Угловые петлевые стыки арматуры в гидротехнических сооружениях. – Дисс. на соискание уч. степени к.т.н. по специальности «Гидротехническое строительство и сооружения», ВНИИ гидротехники имени Б.Е. Веденеева, Ленинград. 1970, 134 с.
5. *Лисичкин С.Е., Рубин О.Д., Ляпин О.Б., Неведов А.В.* Исследования бетонных и железобетонных энергетических сооружений // Гидротехническое строительство, №8/9, 1999, с. 22-28.
6. *Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Ляпин О.Б.* Совершенствование железобетонных конструкций энергетических сооружений // Гидротехническое строительство, №8/9, 1999, с. 71-75.
7. *Лисичкин С.Е., Рубин О.Д., Камнев Н.М.* Экспериментальное обоснование узла распределителя к напорному водоводу здания ГЭС гидроузла Аль Вахда // Гидротехническое строительство, №6, 1998, с. 52-56.
8. *Hao Junbao.* Structural behavior of precast component joints with loop connection. - National University of Singapore, 2004, 34 p.

#### References

1. *SP 63.13330.2012 «Betonye i zhelezobetonnye konstrukcii. Osnovnye polozheniya»* Aktualizirovannaya redakciya SNiP 52-01-2003, 2012, p. 54.
2. *SP 41.13330.2012 «Betonye i zhelezobetonnye konstrukcii gidrotekhnicheskikh sooruzhenij», 2012, p. 38.*
3. *Novye konstrukcii industrial'nyh stykov v ehnergeticheskom stroitel'stve.* Obzornaya informaciya / A.P. Kirillov, V.B. Nikolaev, O.D. Rubin, S.V. Seleznyov, Moscow: Informehnergo, 1987, 52 p.
4. *Minarskij, A.E. (1970). Uglovye petlevye styki armatury v gidrotekhnicheskikh sooruzheniyah.* Diss. na soiskanie uchyonoj stepeni k.t.n. po special'nosti №486 Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo i sooruzheniya, VNIIGidrotekhniki im. B.E. Vedenevaya, Leningrad, 134 p.
5. *Lisichkin, S.E., Rubin, O.D., Lyapin, O.B., Nefedov, A.V. (1999). Issledovaniya betonnyh i zhelezobetonnyh ehnergeticheskikh sooruzhenij, Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo, №8/9, p.22-28.*
6. *Rubin, O.D., Lisichkin, S.E., Lyapin, O.B. (1999). Sovershenstvovanie zhelezobetonnyh konstrukcij ehnergeticheskikh sooruzhenij, Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo, №8/9, p. 71-75.*
7. *Lisichkin, S.E., Rubin, O.D., Kamnev, N.M. (1998). Ekhspierimental'noe obosnovanie uzla raspredelatelya k napornomu vodovodu zdaniya GES gidrouzla Al' Vahda, Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo, №6, p. 52-56.*
8. *HaoJunbao (2004). Structural behavior of precast component joints with loop connection, National University of Singapore, 34 p.*

### **IMPROVEMENT OF THE METHOD OF CALCULATION OF INDUSTRIAL LOOP CONNECTIONS OF FITTINGS OF REINFORCED CONCRETE CONSTRUCTIONS OF HYDROELECTRIC POWER STATION AND THE NPP AT THE LIMIT STATE**

E.A. Klimov, V.B. Nikolaev

Results of researches of loopback connections of reinforcement bar of massive concrete constructions of hydroelectric power station and the NPP, including development of a method of calculation of loopback connections on limit state of the first and second group are presented in the article.

**KEY WORDS:** reinforced concrete constructions, concrete reinforcement, loop connections, ultimate state, a method of calculation.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРЕЩИНЫ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ПРИ КРУЧЕНИИ С ИЗГИБОМ**

Вл.И. КОЛЧУНОВ, *д.т.н., проф.*

Д.А. РЫПАКОВ, *инженер*

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет»

305040, г.Курск, ул. 50 лет Октября, 94

e-mail: ryakov89@mail.ru

*В статье рассматривается вопрос моделирования пространственной трещины железобетонной конструкции, работающей на изгиб с кручением. Рассмотрены варианты моделирования поверхности пространственной трещины прямым геликоидом, бикубической поверхностью Кунса и билинейной поверхностью. Проведен анализ этих поверхностей и сделан выбор наиболее подходящего варианта моделирования.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** железобетон, кручение, трещины, поверхность.

Вопросам моделирования пространственной трещины при сложном сопротивлении на сегодняшний день посвящено сравнительно небольшое количество работ. При кручении с изгибом на первый взгляд наиболее приемлемой моделью является прямой геликоид [1-3] с направлением закручивания вокруг оси Z.

Прямым геликоидом (рис. 1) называется винтовая линейчатая поверхность, описываемая прямой, которая пересекает ось геликоида под прямым углом, вращается с постоянной скоростью вдоль этой же оси. Скорости этих движений пропорциональны. В общем случае всякая точка образующей прямого геликоида описывает винтовую линию.

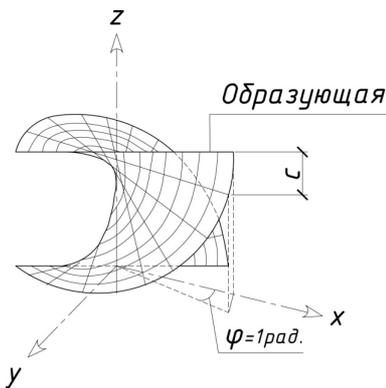


Рис. 1. Прямой геликоид

Задание поверхности прямого геликоида осуществляется формулой:

$$z = c \cdot \text{arctg}(y / x), \quad (1)$$

где  $c$  – смещение образующей прямой при повороте ее на 1 рад (см. рис. 1).

Анализ поверхности прямого геликоида показывает, что такая поверхность приемлема лишь для железобетонных конструкций круглого сечения. Если же мы ставим задачу моделирования поверхности пространственной трещины для железобетонных конструкций, например, прямоугольного сечения, то использование уравнения прямого геликоида здесь явно неудобно.

Попытки использования прямого геликоида при вращении образующей относительно других осей (например, X) не улучшает ситуацию при моделировании пространственной трещины. Более того, для конструкций прямоугольного сечения пересечение прямого геликоида с ее гранями требует введения дополнительных ограничений, что явно усложняет ее математическое описание.

Проведенный анализ экспериментальных исследований железобетонных конструкций при кручении с изгибом показывает, что пространственная трещина также может быть промоделирована бикубической поверхностью Кунса или билинейной поверхностью со смещением угловых точек этих поверхностей вдоль оси железобетонной конструкции.

Бикубическая поверхность Кунса представляет собой гладкую поверхность, построенную по 4-м граничным кривым (рис. 2).

Для всех четырех граничных кривых бикубической поверхности Кунса используются нормализованные кубические сплайны. Уравнение для определения любой точки на бикубической поверхности Кунса записывается в виде:

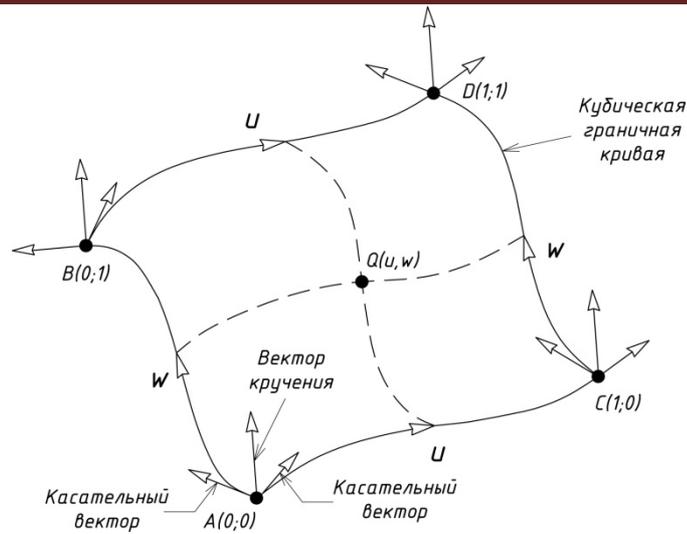


Рис. 2. Бикубическая поверхность Кунса

$$Q(u, w) = [U][N][P][N]^T [W], \quad (2)$$

где  $[U] = [u^3 \ u^2 \ u \ 1]$ ;  $0 \leq u \leq 1$  - параметр, характеризующий отношение, в котором кубический сплайн, содержащий искомую точку на поверхности Кунса и лежащий параллельно сплайнам  $AB$  и  $CD$ , делит сплайны  $AC$  и  $BD$ ;

$$[W] = [w^3 \ w^2 \ w \ 1];$$

$0 \leq w \leq 1$  - параметр, характеризующий отношение, в котором кубический сплайн, содержащий искомую точку на поверхности Кунса и лежащий параллельно сплайнам  $AC$  и  $BD$ , делит сплайны  $AB$  и  $CD$ ;

$$[N] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [P] = \begin{bmatrix} \text{угловые} & \vdots & w\text{-касательные} \\ \text{координатные} & \vdots & \text{векторы} \\ \text{векторы} & \vdots & \\ \vdots & \dots & \vdots \\ i\text{-касательные} & \vdots & \text{векторы} \\ \text{векторы} & \vdots & \text{кручения} \end{bmatrix};$$

$[P]$  - матрица, содержащая всю геометрическую информацию, необходимую для генерации одного бикубического куска поверхности Кунса.

Анализ уравнения бикубической поверхности Кунса показывает, что для однозначного определения данной модели необходимо найти довольно большое количество различных параметров, что неоправданно усложняет моделирование. Билинейная поверхность конструируется из четырех угловых точек в параметрическом пространстве, т.е. из точек  $A[y_A, z_A]$ ,  $B[y_B, z_B]$ ,  $C[y_C, z_C]$ ,  $D[y_D, z_D]$ . Отметим, что в качестве основной принята именно плоскость  $YOZ$  для удобства дальнейшего перехода к объемному элементу реальной пространственной трещины железобетонной конструкции, продольную ось которой удобно обозначить как ось  $X$ . Изображение такой билинейной поверхности на плоскости  $YOZ$  приведено на рис. 3.

Математическое описание билинейной поверхности представлено параметрическим выражением для определения координат любой точки  $K$  на указанной плоской поверхности. Предположим, что точка  $K$  лежит на пересечении 2-х прямых  $HL$  и  $NM$ , параллельных соответственно прямым  $AC(BD)$  и  $AB(CD)$  (см. рис. 2). Прямая  $HL$  делит  $AB(CD)$  в отношении  $w$ :  $(1-w)$ , а  $NM$  делит соответственно прямую  $AC(BD)$  в отношении  $u$ :  $(1-u)$ . В таком случае координаты точки  $K$  находятся из выражения:

$$[y_K, z_K] = [y_A, z_A](1-u_K)(1-w_K) + [y_B, z_B](1-u_K)w_K + [y_C, z_C]u_K(1-w_K) + [y_D, z_D]u_Kw_K. \quad (3)$$

Определенная таким образом точка  $K$  будет перемещаться по всей плоской поверхности при изменении параметров  $u$  и  $w$  от 0 до 1.

Если координатные векторы четырех точек, определяющих билинейную поверхность, заданы в трехмерном объектном пространстве, то будет трехмерной и билинейная поверхность, получаемая в результате отображения параметрического пространства в объектное. При этом угловые точки будут иметь уже три координаты:  $A[x_A, y_A, z_A]$ ,  $B[x_B, y_B, z_B]$ ,  $C[x_C, y_C, z_C]$ ,  $D[x_D, y_D, z_D]$  (рис. 4, а).

В ходе аналитического исследования и анализа свойств билинейной поверхности были выявлены следующие ее закономерности:

1) все свойства билинейной поверхности сохраняются и для трехмерного объектного пространства при любых изменениях координаты  $X$  угловых точек поверхности (при этом указанные изменения ординаты точек независимы друг от друга (см. рис. 4, б, в, г);

2) билинейная поверхность может быть вписана не только в квадратное сечение в плоскости  $YOZ$ , но и в прямоугольное;

3) в отличие от прямого геликоида для железобетонных конструкций прямоугольного сечения пересечение с боковыми поверхностями не требует введения дополнительных ограничений.

Выражение (3) для трехмерного объектного пространства принимает форму:

$$[x_K, y_K, z_K] = [x_A, y_A, z_A](1-u_K)(1-w_K) + [x_B, y_B, z_B](1-u_K)w_K + [x_C, y_C, z_C]u_K(1-w_K) + [x_D, y_D, z_D]u_Kw_K. \quad (4)$$

В случае необходимости учета деформации поверхности в плоскости  $XOZ$  в выбранных точках также за основу принимается билинейная поверхность. При этом каждое слагаемое в правой части уравнения (4) следует умножить на функцию  $f(x, z)$ :

$$f(x, z) = \beta \cdot x \cdot z, \quad (5)$$

где

$$\beta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$a$  и  $b$  – размеры поперечного сечения, равные половине ширины и высоты сечения соответственно.

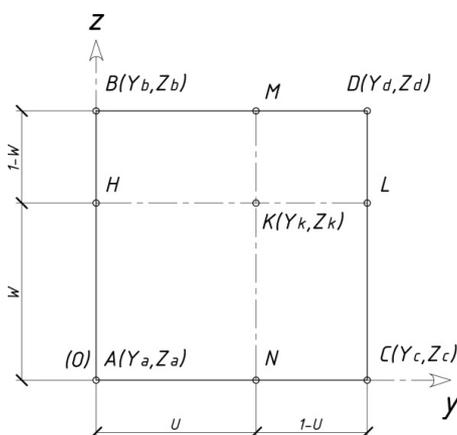


Рис. 3. Плоская билинейная поверхность

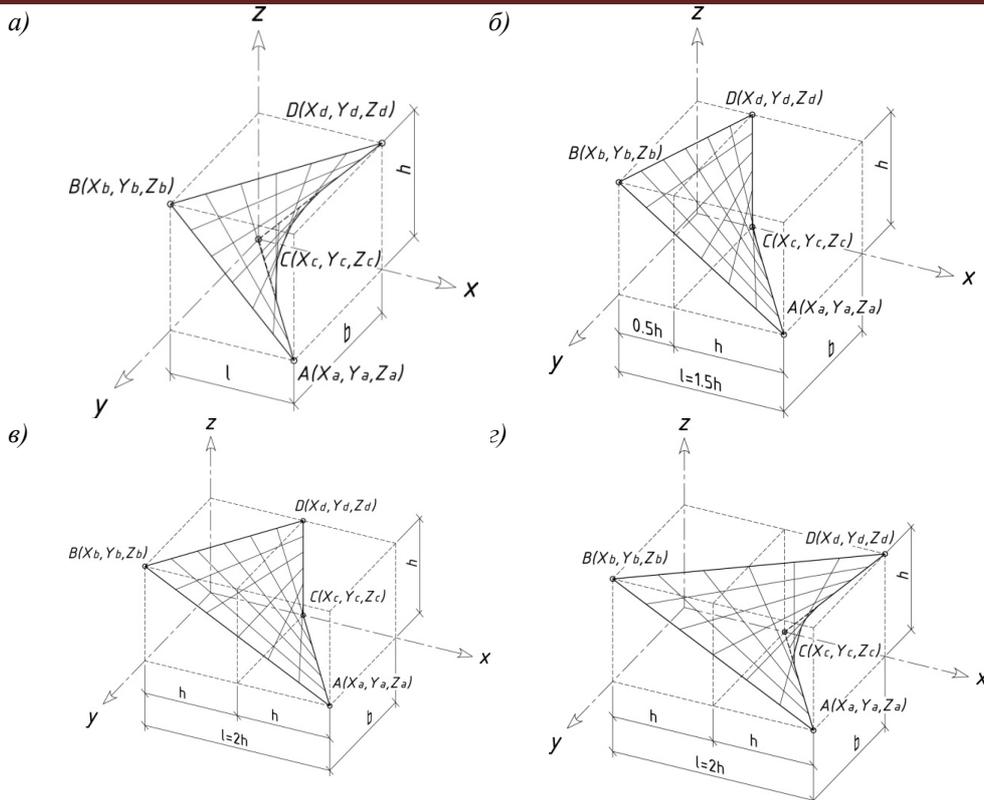


Рис. 4. Общий вид трехмерной билинейной поверхности и примеры ее трансформации при изменении значения координат угловых точек: *a* – произвольная 3-мерная билинейная поверхность; *б* – ее трансформация при смещении т. В на значение  $(-0.5h)$ , а т. D на значение  $(-h)$  вдоль оси X относительно положения (*a*); *в* – то же при смещении т. В и т. D на значение  $(-h)$  вдоль оси X относительно положения (*a*); *г* – то же при смещении т. В на значение  $(-h)$  вдоль оси X относительно положения (*a*)

Выявленные закономерности билинейных поверхностей позволяют использовать их для описания геометрической формы пространственных трещин, возникающих в железобетонной конструкции при кручении с изгибом.

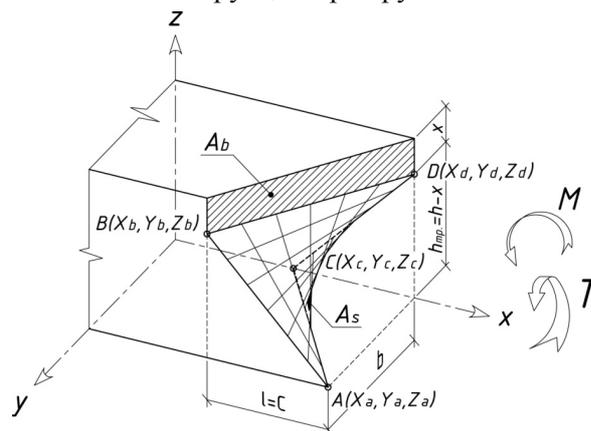


Рис. 5. Общий вид образования трещины по предлагаемой билинейной поверхности в железобетонном элементе, работающем на кручение с изгибом

Анализ проведенных экспериментальных исследований [5-9] показал также, что наиболее вероятным случаем развития пространственной трещины является вариант, при котором длина ее проекции вдоль оси X элемента колеблет-

ся в пределах от  $l = h_{тр.}$  до  $l = 2h_{тр.}$  (см. рис. 4, б, в, г). При этом высота  $h_{тр.}$  определяется как высота растянутой зоны бетона.

Следует отметить, что исследованиями [4] уже была получена методика по определению длины проекции  $C$  на ось  $X$  элемента балки (рис. 5), что в дальнейшем можно использовать для определения координат угловых точек поверхности пространственной трещины.

На основании проведенного в данной работе исследования был сделан вывод о том, что билинейная поверхность является наиболее приемлемым вариантом математического моделирования пространственной трещины в железобетонной конструкции при кручении с изгибом как наиболее простая в описании, но обеспечивающая при этом достаточную точность при выполнении расчетов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces/ S.N. Krivoshapko, V.N. Ivanov. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
2. Кривошапко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей/ С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов. – М.: Либроком, 2010. – 560 с.
3. Кривошапко С.Н. Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий / С.Н. Кривошапко, И.А. Мамиева. – М.: Либроком, 2012. – 328 с.
4. Покусаев А.А. Расчет расстояния между пространственными трещинами и ширины их раскрытия в железобетонных конструкциях при кручении с изгибом (случай 1) / А.А. Покусаев, М.В. Шавыкина, В.И. Колчунов / «Строительная механика и расчет сооружений». – 2016. – №2. – С. 20-29.
5. Сафонов А.Г. Расчет прочности железобетонных конструкций при кручении с изгибом: автореф. дис. ... кандидата технических наук: 05.23.01 / Сафонов Александр Геннадьевич; ГОУ ВПО «Орловский государственный технический университет». – Орел, 2009. – 19 с.
6. Марно И.А.И. Прочность железобетонных элементов прямоугольного сечения при поперечном изгибе с кручением: Автореф. дис. ... кандидата технических наук: 05.23.01 / Исидоро Андраде Ираола Марно – Киев, 1993. – 21 с.
7. Елагин Э.Г. Сопротивление железобетонных стержней совместному действию изгиба с кручением на стадиях работы с трещинами: Автореф. дис. ... доктора технических наук: 05.23.01 / Елагин, Эдуард Гареевич; МГСУ. – Москва, 1994 – 33 с.
8. Бахотский И.В. Прочность фиброжелезобетонных конструкций в условиях кручения с изгибом: Автореферат дис. ... кандидата технических наук: 05.23.01 / Бахотский Игорь Владимирович; Гос. арх.-строит. ун-т. – Санкт-Петербург, 2013. – 22 с.
9. Зубков Е.В. Прочность и деформации преднапряженных элементов плоских плит при кручении с изгибом: Автореферат дис. ... кандидата технических наук: 05.23.01 / Зубков Евгений Владимирович; Научно-исслед. проектно-конструкторский и технол. ин-т бетона и железобетона. – Москва, 1992 – 23 с.

#### References

1. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
2. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2010). *Jenciklopedija Analiticheskikh Poverhnostej*, Moscow: LIBROKOM, 560 p.
3. Krivoshapko, S.N., Mamieva I.A. (2012). *Analiticheskie Poverhnosti v Arhitekture Zdanij, Konstrukcij i Izdelij*, Moscow: LIBROKOM, 328 p.
4. Pokusaev, A.A., Shavykina, M.V., Kolchunov, V.I. (2016). Raschet rasstojanija mezhdu prostranstvennymi treshhinami i shiriny ih raskrytija v zhelezobetonnyh konstrukcijah pri kruchenii s izgibom (sluchaj 1), *Stroitel'naja Mehanika i Raschet Sooruzhenij*, №2, pp. 20-29.
5. Safonov, A.G. (2009). *Raschet prochnosti zhelezobetonnyh konstrukcij pri kruchenii s izgibom: Avtoref. diss. kandidata tehniceskikh nauk*: 05.23.01, GOU VPO «Orlovskij gosudarstvennyj tehniceskij universitet», Orel, 19 p.
6. Marno, I.A.I. (1993). *Prochnost' zhelezobetonnyh jelementov prjamougol'nogo sechenija pri poperechnom izgibe s krucheniem: Avtoref. diss. kandidata tehniceskikh nauk*: 05.23.01, Kiev, 21 p.
7. Elagin, Je.G. (1994). *Soprotivlenie zhelezobetonnyh sterzhnej sovmestnomu dejstviju izgiba s krucheniem na stadijah raboty s treshhinami: Avtoref. diss. doktora tehniceskikh nauk*: 05.23.01, Moskva, 33 p.

8. Bahotskij, I.V. (2013). *Prochnost' fibrozhelezobetonnyh konstrukcij v uslovijah kruchenija s izgibom: Avtoreferat diss. kandidata tehniceskix nauk*: 05.23.01, Gos. arhitektur.-stroit. un-t., Sankt-Peterburg, 2013. – 22 s.

9. Zubkov, E.V. (1992). *Prochnost' i deformacii prednaprjazhennyh jelementov ploskih plit pri kruchenii s izgibom: Avtoreferat dis. kandidata tehniceskix nauk*: 05.23.01, Nauchno-issled. proektno-konstruktorskij i tehnol. in-t betona i zhelezobetona, Moscow, 23 p.

### MODELING SPATIAL CRACKS IN CONCRETE STRUCTURES IN TORSION BENDING

VI.I. Kolchunov, D.A. Rypakov  
*Souht-West State University, Kursk, Russia*

The article discusses modeling of spatial cracked concrete structure, working in bending and torsion. Variants of surfaces modeling spatial crack are right helicoid, bicubic Coons surface, and bilinear surface. The analysis of these surfaces gave a possibility to choose the most suitable simulation.

KEY WORDS: reinforced concrete, torsion, cracks, analytical geometry.



УДК 621.039

### ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ГЛАВНОГО ЦИРКУЛЯЦИОННОГО ТРУБОПРОВОДА НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ТПР

Д.А. КУЗЬМИН, аспирант  
*г.Москва, ул. Ферганская, 25, АО «ВНИИАЭС», 109431,  
Kuzmin\_DA@yahoo.com*

*Исследованы условия обеспечения безопасности на основе концепции ТПР («Течь перед разрушением»). Показаны методы и подходы, используемые для расчетов на основе концепции ТПР. Продемонстрированы результаты работ, выполненных для АЭС типа ВВЭР -440, с использованием нормативных документов США, Словакии, Чехии и России по концепции ТПР.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: концепция «течь перед разрушением», трубопровод, критическая длина трещины, стабильность трещины, истечение и чувствительность систем контроля течей.

#### *Введение*

Концепция ТПР – это совокупность принципов конструирования сосудов и трубопроводов давления, включающая принцип достаточной трещиностойкости материала конструкции, обеспечивающей возможность существования устойчивых сквозных трещин при заданных условиях эксплуатации, и принцип обратной связи, обеспечивающей прекращение эксплуатации конструкции при появлении в ней течи через сквозную устойчивую трещину, практическая реализация которых позволяет исключить полное разрушение сосуда или трубопровода давления и прекратить их эксплуатацию при образовании течи [1].

Успешное применение концепции безопасности «Течь перед разрушением» (ТПР) оказывает положительное влияние на экономику АЭС, а именно:

а) позволяет избежать установки опор-ограничителей биений концов трубопровода в случае его обрыва;

б) отсутствие опор-ограничителей дает существенное сокращение времени эксплуатационного контроля состояния трубопроводов, так как присутствие опор-ограничителей часто усложняет и продлевает работы, связанные с контролем;

в) снижение времени на контроль приводит к снижению дозовых затрат персонала.

Проведено исследование по обеспечению безопасности главного циркуляционного трубопровода (ГЦТ) и дыхательного трубопровода (ДТ) на основе концепции ТПР для АЭС типа ВВЭР-440.

Поставлена задача определить требования к системам контроля течи, дать интегральную оценку безопасности эксплуатации трубопроводов ГЦТ и ДТ ВВЭР-440, а также определить требования к условиям безопасной эксплуатации этих трубопроводов. Для обеспечения безопасности ГЦТ и ДТ ВВЭР-440 на основе концепции ТПР учитывались рекомендации документов США [3], Чехии [4], Словакии [2] и России [5].

*Основные принципы ТПР.*

Последовательность обеспечения безопасности может быть определена следующим образом:

- проверка полноты входных данных на механические свойства и свойства механики разрушения по каждому расчетному элементу;
- проверка полноты входных данных о геометрии трубопроводов, такой как диаметр, толщина или геометрия гетерогенных швов с графическими иллюстрациями для всех расчетных элементов;
- проверка полноты входных данных о различных режимах эксплуатации;
- оценка влияния деградации металла на систему трубопроводов;
- проверка фактической толщины стенок на ослабления связанных с производством трубопроводов;
- оценка возможности возникновения гидроударов в трубопроводных системах;
- оценка возможности влияния косвенных источников разрыва трубопроводов, такие как аварии опор, демпферов, падение объектов и другие;
- оценка предрасположенности трубопроводов хрупкому разрушению;
- расчет напряжений трубопроводов на статические и сейсмические нагрузки;
- анализ проверки применимости концепции безопасности ТПР.

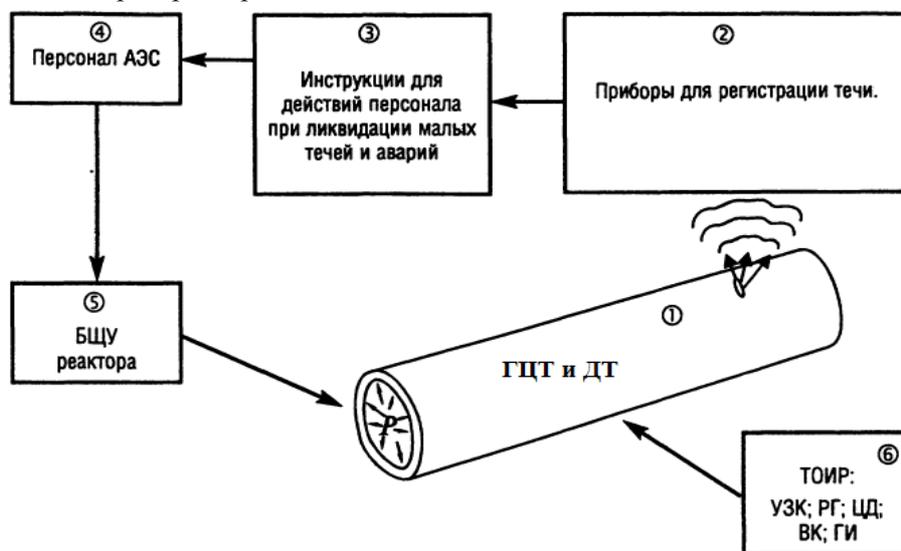


Рис. 1. Блок-схема системы безопасности «течь перед разрушением»

Система безопасности ТПР рассмотрена в конфигурации, указанной на рисунке 1. В соответствии с методологией [2] в случае обнаружения течи через стенку трубопровода время, в течение которого надо принять решение и начать останов энергоблока, составляет 60 минут или меньше.

*Расчет напряжений для различных режимов эксплуатации.*

Напряженно-деформированное состояние анализировалось с учетом возможности возникновения гидроударов и стратификации, а также аварийных режимов, в том числе максимально расчетных землетрясений (МРЗ).

Существует два варианта расчета результирующих сил и моментов [2]:

- вариант №1:

$$F_{sup} = |F_w| + |F_t| + |F_p| + |F_{MDE}|;$$

$$M_{supi} = |M_{iw}| + |M_{it}| + |M_{ip}| + |M_{iMDE}|, i = 1, 2, 3;$$

$$M_{sup} = (M_{sup1}^2 + M_{sup2}^2 + M_{sup3}^2)^{1/2};$$

- вариант №2:

$$F_{sup} = F_w + F_t + F_p + F_{MDE};$$

$$M_{supi} = M_{iw} + M_{it} + M_{ip} + M_{iMDE}, i = 1, 2, 3;$$

$$M_{sup} = (M_{sup1}^2 + M_{sup2}^2 + M_{sup3}^2)^{1/2};$$

где индекс  $w$  обозначает данные полученные за счет собственного веса, индекс  $t$  обозначает данные вызванные температурным расширением, индекс  $p$  показывает данные полученные от действия внутреннего давления и индекс  $MDE$  от сейсмического воздействия (МРЗ).

Полученные результирующие силы и моменты позволяют рассчитать мембранные ( $\sigma_m$ ) и изгибные ( $\sigma_b$ ) напряжения, действующие на расчетные сечения трубопроводных систем.

$$\sigma_m = \frac{F_{sup}}{A}; \quad \sigma_b = \frac{M_{sup}}{W};$$

где  $A$  – площадь сечения трубопровода,  $W$  – момент сопротивления.

*Анализ проверки применимости концепции безопасности «течь перед разрушением».*

Для проверки применимости концепции ТПР необходимо определить опасные участки или сечения трубопроводных систем, где наименее благоприятное сочетание напряжений и свойств материала. В соответствии с международной практикой все сварные швы являются опасными участками, и подлежат проверке по концепции ТПР.

Для каждого опасного участка необходимо провести ряд расчетов:

- расчет максимально возможной длины стабильной сквозной поперечной трещины;
- расчет критической длины трещины;
- расчет стабильности трещины в режиме НУЭ+МРЗ;
- расчет площади раскрытия трещины при НУЭ;
- расчет величины истечения теплоносителя;
- определение минимальной необходимой чувствительности.

В том случае, если все расчеты и оценки будут удовлетворять критериям безопасности ТПР, концепция ТПР является применимой для данных участков трубопровода. Принципиальным вопросом для обеспечения безопасности эксплуатации на основе концепции ТПР является вопрос о возможности существования стабильных сквозных трещин на трубопроводе и вопрос о возможности эти течи своевременно диагностировать.

Используя методы механики разрушения, проводились расчеты для всех сварных соединений. Для расчета выбраны «модифицированный метод нагрузки пластического шарнира» и «метод  $J$ -интеграла».

«Модифицированный метод нагрузки пластического шарнира» [2] основан на следующих соотношениях:

$$ZM(\sigma_m + \sigma_b) - M\sigma_m = \sigma_{blimit}, \quad (1)$$

где  $Z = 1.15[1 + 0.013(OD - 4)]$  - для дуговой сварки,  
 $Z = 1.30[1 + 0.010(OD - 4)]$  - для сварки под флюсом,  
 $Z = 1$  - для основного металла,  $M = 1$ .

Предельные напряжения  $\sigma_{blimit}$  рассчитываются так:

$$\sigma_{blimit} = \left(\frac{2\sigma_f}{\pi}\right) (2\sin\beta - \sin\theta), \beta = \frac{1}{2} \left[ (\pi - \theta) - \pi \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_f}\right) \right], \theta + \beta \leq \pi, \quad (2)$$

$$\sigma_{blimit} = \left(\frac{2\sigma_f}{\pi}\right) 2\sin\beta, \beta = -\pi \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_f}\right), \theta + \beta > \pi, \quad (3)$$

где  $\sigma_b$  – изгибные напряжения;  $\sigma_m$  – мембранные напряжения;

$$\sigma_f = \frac{R_{p0.2} + R_m}{2}.$$

Модифицированный «метод  $J$ -интеграла» [7] основан на методе GE/EPRI в соответствии с документом [6] и изменен таким образом, чтобы учитывать изгибающий момент и силовой фактор. Модифицированный метод подробно описан в методических рекомендациях [7], основные выражения:

$$J = J_e + J_p \quad (4)$$

$$J_e = f_1 \left(\frac{\theta}{\pi}, \frac{R_m}{t}\right) \frac{M^2}{E}, \quad (5)$$

$$J_p = \alpha \sigma_0 \varepsilon_0 R_m \theta \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) h_1 \left(\frac{\theta}{\pi}, \frac{R_m}{t}, n\right) \left(\frac{M}{M_0}\right)^{n+1}. \quad (6)$$

Для использования этого метода необходимо определить экспериментально коэффициенты упрочнения сталей, для которых будет проводиться проверка применимости ТПР, а так же определить критическую величину  $J$ -интеграла.

Для примера взят трубопровод Ду500, изготовленный из стали марки 08X18H10T. Моделировался режим максимально-расчетных землетрясений в сочетании с нормальными условиями эксплуатации (НУЭ+МРЗ), что соответствует механическим нагрузкам  $\sigma_m=41$  МПа,  $\sigma_b=132$  МПа. Проведен расчет с помощью модифицированного метода нагрузки пластического шарнира и метода  $J$ -интеграла см. рис. 2 и 3.

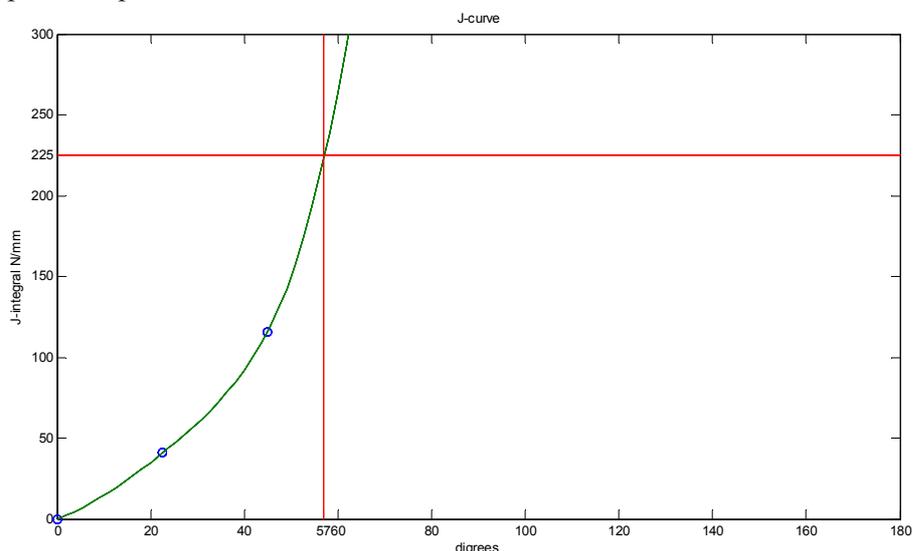


Рис. 2. Критическая длина трещины методом  $J$ -интеграла

На рис. 2, 3 показано, что при методе  $J$ -интеграла половина критической длины трещины равна  $\varphi = 57^\circ$ , а при модифицированном методе НППШ  $\varphi = 44^\circ$ . Модифицированный метод НППШ является более консервативным по отношению к методу  $J$ -интеграла для данного расчета, и, следовательно, является более предпочтительным к использованию.

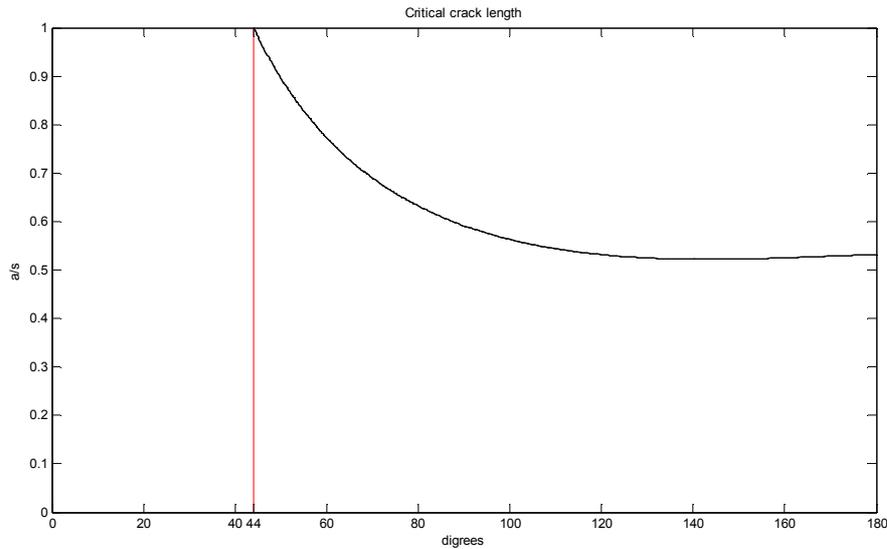


Рис. 3. Критическая длина трещины модифицированным методом НПС

Для всех расчетных сечений были получены критические размеры трещин двумя методами для основного металла и околошовной зоны.

*Определение критической длины трещины.*

Для определения критической длины  $l_c$  трещины необходимо учесть коэффициент безопасности на длину  $n = 2$  [5], если силы и моменты рассчитывались по варианту №1, если по варианту №2, то коэффициент  $n = 1$ :

$$l_c = \frac{l_l}{n}.$$

*Оценка стабильности трещин в режиме НУЭ+МРЗ*

Полученные протяженности трещин необходимо проверять на стабильность в режиме НУЭ+МРЗ, с помощью соотношения [2]:

$$F_m = M_c / M_{sup} \geq 1, \quad (7)$$

где  $M_c$  - критический момент нагрузки для трещины длиной  $c_l$ , который можно определить по методам механики и  $M_{sup}$  – суммарный момент нагрузки, определяемый суммированием всех моментов действующих на расчетное сечение:

$$M_{supi} = |M_{iw}| + |M_{it}| + |M_{ip}| + |M_{iMDE}|, \quad i=1,2,3; \quad (8)$$

$$M_{sup} = (M_{sup1}^2 + M_{sup2}^2 + M_{sup3}^2)^{1/2}; \quad (9)$$

$M_{iw}$  – момент возникший в результате весовых нагрузок,

$M_{it}$  – момент возникший в результате температурных расширений,

$M_{ip}$  – момент возникший в результате действия внутреннего давления,

$M_{iMDE}$  – момент возникший в результате сейсмических нагрузок.

*Расчет площади раскрытия трещины*

Площадь раскрытия трещин рассчитывается исходя из аналитических методик линейной механики разрушения, с учетом дополнительных параметров учитывающих эффекты нелинейной механики разрушения. Данные методики учитывают геометрию конструкции и влияние пластических деформаций. Наплавка в трубопроводах реакторов типа ВВЭР-1000 и РБМК-1000 оказывает большое влияние на площадь раскрытия трещины, так как наплавка и основной металл трубопровода имеют различные коэффициенты линейного расширения.

*Метод истечения теплоносителя*

Динамика жидкости в заданном поле течения определяется нестационарным уравнением сохранения энергии Бернулли, которое для линии тока  $\Gamma$ , со-

единающей открытой конец трубопровода с выходным сечением трещины. Для определения интенсивности истечения теплоносителя использовались соотношения [1]:

$$\Delta P = P - P_{AT} = P_C + P_A = \frac{1}{2}(\alpha + \xi)\rho V^2 + \rho \int_r \frac{\partial U_S}{\partial t} dr, \quad (10)$$

где  $P_C$  - перепад давления, обусловленный конвективными ускорениями и диссипацией энергии на поверхности трещины;  $P_A$  - перепад давления, обусловленный локальными ускорениями;  $\xi$  - коэффициент гидравлического сопротивления;  $\alpha$  - число Кориолиса;  $\rho$  - плотность жидкости;  $V$  - скорость течения в струе;  $U_S$  - тангенциальная компонента скорости течения воды в трубопроводе;  $t$  - время. В дальнейшем полагаем  $P_A \ll P_C$ , т.е. считаем, что поле течения ведет себя как квазистационарное.

Решая уравнение (10) относительно  $V$ , находим

$$V = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi}} \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \quad (11)$$

Коэффициент гидравлического сопротивления определяется суммой:

$$\xi = \xi_m + \xi_{mp}, \quad (12)$$

где  $\xi_m$  - коэффициент местного сопротивления входа жидкости в трещину;  $\xi_{mp}$  - коэффициент сопротивления трению, обусловленный вязкими свойствами жидкости;  $\alpha$  - число Кориолиса. Коэффициенты сопротивления и число Кориолиса уточнялись экспериментально. Критическими областями являются те области, где истечение теплоносителя меньше 38 л/мин [2-5].

*Заключение.*

Вышеописанные методы и подходы были применены в соответствии с требованиями нормативных документов [2-5]. Проанализированы результаты истечения теплоносителя, отметим, что для главного циркуляционного трубопровода (ГЦТ) расход теплоносителя больше 38 л/мин, а именно:  $Q \geq 420$  л/мин. Таким образом, все расчетные соединения ГЦТ проходят с большим запасом по критерию безопасности ТПР.

Результаты истечения теплоносителя по сварным соединениям дыхательного трубопровода (ДТ), так же проходят по критерию безопасности ТПР, но с существенно меньшим запасом, даже очень близким к критическим значениям, т.к. их параметр  $Q$  лежит в пределах  $56 \text{ л/мин} > Q \geq 38 \text{ л/мин}$ .

Методология ТПР [2] показывает, что чувствительность систем контроля течей должна быть не менее 3,8 л/мин с учетом временного интервала 60 минут на реакцию персонала по реагированию на утечку теплоносителя.

Минимальная чувствительность необходимая для обнаружения утечек для всех сварных соединений ГЦТ и ДТ можно определить согласно следующей формуле [2-5]:  $Q_{sk} = Q/n$ , где  $Q$  – максимальный расход теплоносителя через стабильную трещину длиной  $l_t = 2c_t$ ;  $n$  - коэффициент, обеспечивающий 10-и кратный запас,  $n = 10$ ,  $k$  – номер сварного соединения.

Далее (рис. 4) представлена схема трубопровода ГЦТ ВВЭР-440 с указанием номеров сварных соединений и минимальной чувствительности  $Q_{sk}$  необходимой для обнаружения утечек. Например:

02	1	7
		3,9

где 102 – стационарный номер сварного соединения, а 73,9 – минимальная необходимая чувствительность  $Q_{s102}$  (л/мин) для данного сварного соединения:

$$Q_{s102} = 73,9 \text{ л/мин.}$$

Также стоит отметить, что стрелкой показаны сварные соединения с минимальной чувствительностью по отношению к остальным сварным соединениям этой петли.

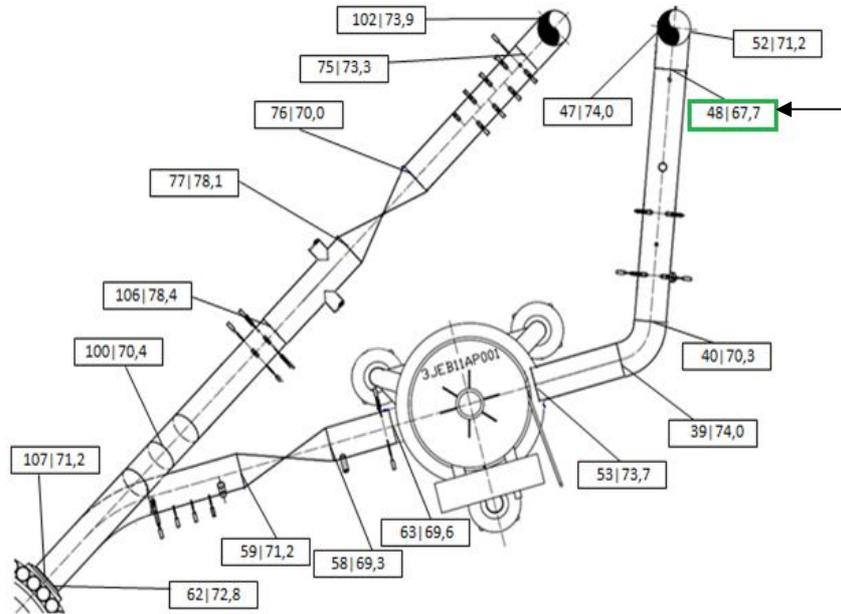


Рис. 4. Схема петли ГЦТ ВВЭР-440

*Выводы.*

Выполнен расчетно-аналитический и экспериментальный комплекс исследований для обеспечения безопасности эксплуатации главных трубопроводов Ду500 (ГЦТ) и Ду200 (ДТ) реакторной установки ВВЭР-440.

Исследования выполнены с учетом фактического состояния трубопроводов, включая оценку состояния трубопроводов, условий предстоящей эксплуатации, режим МРЗ и режим стратификации для дыхательного трубопровода.

Результаты исследования показали:

1. Безопасность эксплуатации главных трубопроводов Ду500 (ГЦТ) и Ду200 (ДТ) реакторной установки ВВЭР-440 обеспечивается в полном объеме, для сварных соединений указанных трубопроводов и для всех режимов эксплуатации, включая НУЭ и НУЭ+МРЗ.

2. Определены минимальные чувствительности для ГЦТ  $Q_s=67,7$  л/мин, необходимые для обнаружения утечек через устойчивые сквозные трещины в трубопроводах, которые существенно больше, чем минимально допустимые чувствительности, принятые в международной практике  $Q_s=3,8$  л/мин [2-5] и для ДТ  $Q_s=10,0$  л/мин.

*Рекомендации.*

1. Установить системы контроля течей:

Для ГЦТ - 60 л/мин; ДТ - 10 л/мин.

2. По российскому нормативному документу [8] допускается использование двух специальных систем контроля течей, поэтому рекомендуется использовать две независимые системы контроля течей в рамках ТПР, а именно:

- по влажности и по радиоактивным аэрозолям;
- по влажности и по шумовой диагностике;
- по радиоактивным аэрозолям и по шумовой диагностике.

*Л и т е р а т у р а*

1. Гетман А.Ф. Концепция безопасности «течь перед разрушением» для сосудов и трубопроводов давления АЭС. – М.: Энергоатомиздат, 1999. – 258 с.  
 2. PNM340880181. Leak Before Break Methodology. Словакия. – 2009.

3. NUREG-1061, Vol. 3, Report of the U.S. Nuclear Regulatory Commission Piping Review Committee, Evaluation of the Potential for Pipe Breaks, November 1984.
4. Requirements for composing and contents of safety reports and their amendments. Procedure for specifying proof of leak before break. Detection systems of leakage from cooling circulation of nuclear reactor. CSKAЕ, 1/1991, UJI, Прага-Збраслав.
5. Руководство по применению концепции безопасности течь перед разрушением к трубопроводам действующих АЭУ. РД ЭО 1.1.2.05.0939, 2013. – 118 с.
6. NUREG-6235 Assessment of short through-wall circumferential cracks in pipes, April 1995.
7. Методические рекомендации. МР 125-02-95. Правила составления расчетных схем и определение параметров нагруженности элементов конструкций с выявленными дефектами. М.: ЦНИИТМАШ, 1995. – 52 с.
8. Правила устройства и безопасной эксплуатации оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (ПН АЭ Г-7-008-89). М.: НТЦ ЯРБ Госатомнадзора России, 1989.

#### References

1. Getman, A.F. (1999). «Leak Before Break» Safety Concept for NPP Pressure Vessels and Piping, Moscow: Energoatomizdat, 258 p.
2. PNM340880181. Leak Before Break Methodology, Slovakia, 2009.
3. NUREG-1061, Vol. 3, Report of the U.S. Nuclear Regulatory Commission Piping Review Committee, Evaluation of the Potentials for Pipe Breaks, November 1984.
4. Requirements for Composing and Contents of Safety Reports and Their Amendments. Procedure for specifying proof of leak before break. Detection systems of leakage from cooling circulation of nuclear reactor, CSKAЕ, 1/1991, UJI, Praha-Zbraslav.
5. Guidance on the application of the safety concept «leak before break» operating pipelines NPP. RD EO 1.1.2.05.0939, 2013.
6. NUREG-6235, Assessment of short through-wall circumferential cracks in pipes, April 1995.
7. MR 125-02-95 «Rules of drawing up structural models and definition of parameters of loads for structure elements with discovered defect», ТzНИИТМАШ, Moscow, 1995.
8. PNAE G-7-008-89 «Rules of arrangement and safe operation of nuclear power unit equipment and pipeline», NRS of Gosatomnadzor of Russia, 1989.

### INVESTIGATION OF THE CONDITIONS OF SAFETY ENSURE OF THE MAIN CIRCULATING PIPELINE ON THE BASIS OF THE LBB CONCEPT

D.A. Kuz'min  
VNIIAES, Moscow, Russia

The conditions of safety ensure based on the LBB concept were investigated. The methods and approaches used for the calculations based on the LBB concept are shown. The results of this work were derived for NPP VVER -440, using the regulations of the USA, Slovakia, the Czech Republic and Russia in the LBB concept.

**Keywords:** the concept of "leak before break", the pipeline, a critical crack length, crack stability, flow and sensitivity control system leakage.



### РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ ПО КРИТЕРИЮ ДЛИНЫ ТРЕЩИНЫ

В.С. УТКИН, д-р техн. наук, профессор,  
С.А. СОЛОВЬЕВ, аспирант  
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»  
160000, г. Вологда, ул. Советский проспект, д. 116., кв. 62., [utkinvogtu@mail.ru](mailto:utkinvogtu@mail.ru)  
161200, Вологодская область, г. Белозерск, ул. Комсомольская, д. 34,  
[ser6sol@yandex.ru](mailto:ser6sol@yandex.ru)

В статье предложены методы расчета надежности железобетонной балки на стадии эксплуатации по критерию длины трещины в бетоне. Предложенные методы различаются количеством и полнотой статистической информации о контролируемых параметрах в расчетных моделях. Приведены численные примеры расчетов надё-

*жности. Проиллюстрировано применение теории свидетельств Демпстера- Шефера для оценки статистического математического ожидания надежности при наличии статистической информации в виде подмножества интервалов.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** надежность, железобетонные балки, длина трещины, механика разрушения, теория свидетельств.

Железобетонные балки являются несущими элементами конструкций многих зданий и сооружений в виде балок покрытия, перекрытия, подкрановых балок и т.д. Безопасная эксплуатация несущих конструкций, в том числе железобетонных балок, должна отвечать требованиям новых стандартов РФ, построенных на основе Закона №384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений», вступившему в силу с 2010 г. Закон предписывает устанавливать количественную оценку механической (конструкционной) безопасности строительных конструкций. Одним из важнейших параметров механической (конструкционной) безопасности является надежность. По Межгосударственному стандарту ГОСТ 27751-2014 «Надежность строительных конструкций и оснований» под термином «надежность» понимается свойство строительного объекта выполнять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации. В качестве меры надежности принята вероятность безотказной работы несущего элемента или системы элементов (в понятиях теории надежности) по тому или иному критерию работоспособности. При расчетах надежности стандартом ГОСТ 27751-2014 рекомендовано применять вероятностно- статистические методы, при наличии достаточного количества данных об изменчивости контролируемых параметров в случае, если количество (длина ряда) данных позволяет производить их статистический анализ. Однако не всегда удается получить достаточное количество статистических данных для выявления функций распределения и их параметров для описания случайных величин, поэтому в теории надежности в последнее время получили развитие новые подходы к расчетам надежности и несущей способности [1, 2, 3, 4 и др.]. Повышенное внимание к разработке нормативных документов и развитию методов расчета надежности строительных конструкций вызвано строительством объектов повышенной ответственности и участвовавшими авариями и разрушениями, вызванными различными причинами. Так в [5] приведена информация о том, что по данным статистической отчетности Минстроя России на 2013 г., в целом по стране средний срок службы существующих строительных конструкций превышает нормативный срок более чем в 2 раза, а также указано на отсутствие методов определения остаточной несущей способности для многих видов несущих конструкций. В.Д. Райзер в работе [6] приводит недостатки существующих методов расчета по предельным состояниям. Пирадов К.А. и Савицкий Н.В. в работе [7], а ранее Зайцев Ю.В. в [8], также указали на ряд недостатков в методах расчетов по предельным состояниям и обоснованный переход к расчетам методами теории механики разрушения строительных конструкций.

Действительно, в железобетонных конструкциях под нагрузкой нередко возникают трещины, которые приводят к снижению несущей способности по всем критериям работоспособности и надежности. Нормативные документы по расчету железобетонных конструкций, в частности СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции», учитывают влияние трещин на работоспособность несущих элементов, ограничивая ширину раскрытия трещин. Однако, даже при небольшой ширине раскрытия трещины, признаком опасного состояния железобетонной конструкции может являться длина трещины [7, 8, 9]. Трещины уменьшают высоту сжатой зоны бетона балки, что приводит к увеличению напряжения в бетоне сжатой зоны балки, к возрастанию усилий в ар-

матуре, к снижению несущей способности в целом, и даже к разрушению балки. В качестве критерия несущей способности, и тем более надежности, ограничения на длину трещины в СП 63.13330.2012 не предусмотрено. В СП 63.13330.2012 отмечено, что «расчет бетонных и железобетонных конструкций можно производить по заданному значению надежности на основе полного вероятностного расчета при наличии достаточных данных об изменчивости основных факторов, входящих в расчетные зависимости».

Оценка надежности железобетонной балки по критерию длины трещины с использованием методов механики разрушения рассмотрена в работе [4], где расчет надежности построен на использовании функций распределения случайных величин, полученных на основе неравенства Чебышева [10], с параметрами функций распределения в виде средних значений и средних квадратических отклонений. Для нахождения этих параметров, а также обоснования выбранного распределения, требуется провести сравнительно большое число испытаний, что связано с определенными затратами времени и денежных средств, а в некоторых случаях невозможно проведения необходимого числа испытаний по техническим причинам и по причине безопасности. Методы определения надежности железобетонных элементов при наличии нормальных и наклонных трещин предложены в работах [11, 12]. Однако в этих работах в качестве контролируемого параметра принята ширина раскрытия трещин.

В данной статье предлагается рассмотреть метод расчета надежности железобетонной балки в зависимости от длины трещины. Надежность железобетонной балки с трещиной или системой трещин в растянутой зоне бетона балки будем определять, используя математическую расчетную модель предельного состояния вида:

$$F_{\text{экс}} \leq F_{np,crc}, \quad (1)$$

где  $F_{\text{экс}}$  - обобщенная эксплуатационная нагрузка на балке, включая собственный вес, в виде эквивалентной по воздействию сосредоточенной силы. Например, для однопролетной балки с шарнирным опиранием и равномерно распределенной нагрузкой  $q_{\text{экс}}$  для середины пролета имеем  $F_{\text{экс}} = q_{\text{экс}} \cdot l/2$ . Предельная нагрузка  $F_{np,crc}$ , определенная по условию ограничения длины трещины, находится через  $F_{np,0}$ , значение которого определяется либо теоретически, либо экспериментально-теоретическими методами по [13] при отсутствии трещин.

В работах [14, 15, 16] приводятся методы определения  $F_{\text{экс}}$  на стадии эксплуатации конструкций. Определение  $F_{np,crc}$  для железобетонных балок с учетом длины трещины на стадии эксплуатации балки представляет определенные методические и практические проблемы. В связи с этим рассмотрим решение этой проблемы, используя наработки в теории механики разрушений. Из механики разрушения [2, 3, 10 и др.] известно, что при длине трещины, равной критической  $l_{crc,ult}$  происходит спонтанное разрушение конструкции, и следовательно при такой длине трещины  $F_{np} = 0$ . По [17] критическая длина трещины в железобетонных балках (при одной или нескольких трещинах) принимается равной  $0,3h_0$ , где  $h_0$  - рабочая высота сечения балки. При такой длине развитие трещины сменяется с поперечного на продольное с выколом части бетона балки, что приводит к резкому снижению несущей способности и разрушению балки. В дальнейшем значение длины трещины, равной  $0,3h_0$ , будем считать критической длиной трещины  $l_{crc,ult} = 0,3h_0$ , а предельную нагрузку, соответст-

вующую этой длине трещины считать равной нулю  $F_{np} = 0$ . При отсутствии трещин в бетоне балки ( $l_{crc} = 0$ ), значение предельной нагрузки  $F_{np}$  по критерию наименьшей прочности бетона или арматуры балки можно определить методами, описанными авторами в работе [13]. Нами установлено, что зависимость между предельной нагрузкой  $F_{np}$  и длиной трещины  $l_{crc}$  графически изображается выпуклой кривой, как показано на рис. 1.

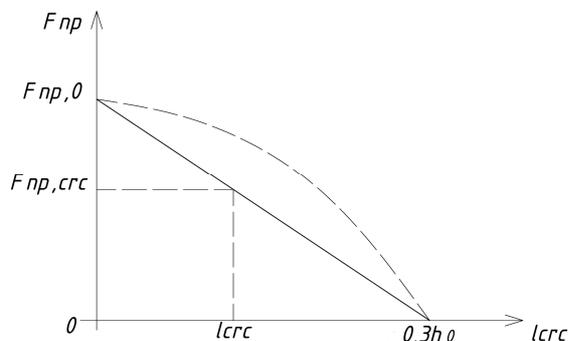


Рис. 1. Зависимость  $F_{np}$  от длины трещины  $l_{crc}$  на стадии эксплуатации

В запас безопасности (надежности) примем зависимость  $F_{np,crc}$  от  $l_{crc}$  прямолинейной, как показано на рис. 1, с уравнением (прямой в отрезках) вида:

$$\frac{l_{crc}}{0,3h_0} + \frac{F_{np,crc}}{F_{np,0}} = 1, \quad (2)$$

где  $F_{np,crc}$  - предельная нагрузка на балку при наличии в ней трещин длиной  $l_{crc}$ ;  $F_{np,0}$  - предельная нагрузка на балку без трещин.

Отсюда предельная нагрузка на балку при наличии трещин с максимальной длиной  $l_{crc} < 0,3h_0$  определяется по формуле:

$$F_{np,crc} = F_{np,0} \left(1 - \frac{l_{crc}}{0,3h_0}\right), \quad (3)$$

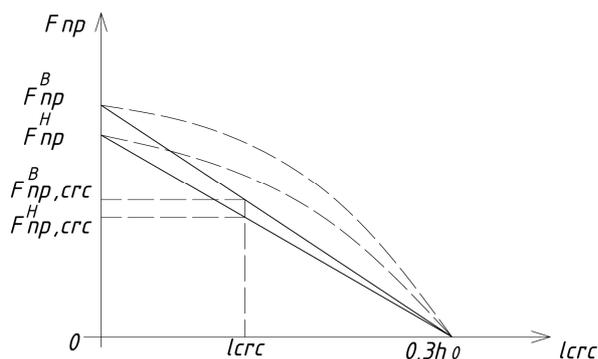


Рис. 2. Зависимость  $F_{np}$  от длины трещины  $l_{crc}$  на стадии эксплуатации

Если значения  $F_{np}$  находят по [13] в виде интервала  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$ , где  $F_{np}^H$ ,  $F_{np}^B$  - нижнее (пессимистическое) и верхнее значения предельной нагрузки, то  $F_{np,crc}$  будет определяться интервалом, как показано на рис. 2. В этом случае имеем два уравнения для  $F_{np,crc}$ :

$$F_{np,crc}^H = F_{np}^H \left(1 - \frac{l_{crc}}{0,3h_0}\right), \quad F_{np,crc}^B = F_{np}^B \left(1 - \frac{l_{crc}}{0,3h_0}\right), \quad (4)$$

Рассмотрим расчет надежности железобетонной балки по первому варианту (рис. 1) с учетом (1) и (3). Математическая модель предельного состояния с учетом изменчивости контролируемых параметров будет иметь вид:

$$\tilde{F}_{экс} \leq F_{np,0} \left(1 - \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0}\right), \quad (5)$$

где  $F_{np,0}$  - детерминированная величина, если  $F_{np,0}$  для балки (без трещин) находится теоретическими методами строительной механики. Если  $F_{np,0}$  определяют испытаниями балки (без трещин), то  $\tilde{F}_{np,i}$  будет случайной величиной (отмечено волнистой линией) в интервале  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$ . Имея по результатам испытаний [13] интервал предельной нагрузки  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$ , рекомендуется при повышенных требованиях к безопасности конструкции принимать нижнее значение предельной нагрузки (пессимистический вариант)  $F_{np}^H = F_{np,0}$ , полученное с обеспеченностью 0,997, и вести расчет надежности по математической модели предельного состояния вида (5).

Рассмотрим вариант, в котором  $F_{np,0}$  - детерминированная величина. Рабочую высоту сечения балки  $h_0$  также примем детерминированной величиной в силу малой изменчивости результатов ее измерений. Длину трещины  $\tilde{l}_{crc}$  на стадии эксплуатации определяем многократными измерениями [16]. Если число измерений достаточно для выявления функции распределения  $\tilde{l}_{crc}$  и определения ее параметров, то принимаем для описания  $\tilde{l}_{crc}$  вероятностные законы распределения. Для  $\tilde{l}_{crc}$  по результатам измерений в одних и тех же условиях и одним методом можно принять [18] нормальное (гауссовское) распределение с плотностью вероятности:

$$f(l_{crc}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S_{l_{crc}}} \cdot e^{-\frac{(l_{crc} - m_{l_{crc}})^2}{2S_{l_{crc}}^2}}, \quad (6)$$

где  $m_{l_{crc}}$  - математическое ожидание длины трещины  $\tilde{l}_{crc}$ ;  $S_{l_{crc}}^2$  - дисперсия  $\tilde{l}_{crc}$ .

Если  $F_{экс}$  определяется сбором нагрузок на балку (с учетом собственного веса), то в этом случае  $F_{экс}$  можно принять детерминированной величиной. Если  $F_{экс}$  определяют испытаниями (взвешиванием), то в этом случае она является случайной величиной. Значение  $F_{экс}$  можно выявить из проектной документации, если не было никаких изменений эксплуатационной нагрузки.

Рассмотрим наиболее простой вариант расчета надежности железобетонной балки, в котором  $F_{экс}$  и  $F_{np}$  - детерминированные величины (см. рис. 1), а  $\tilde{l}_{crc}$  - случайная величина, с большим числом измерений для вероятностно-статистического анализа и применения функции плотности вероятности вида

(6). Представим (5) в виде:  $\tilde{l}_{crc} \leq 0,3h_0 \left(1 - \frac{F_{экс}}{F_{np}}\right)$  или  $\tilde{l}_{crc} \leq l_{np}$ , где

$$l_{np} = 0,3h_0 \left(1 - F_{экс} / F_{np}\right).$$

Тогда вероятность безотказной работы (надежность) найдем по [6, 19] из формулы:

$$P = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\bar{l}_{crc} - l_{np}}{S_{l_{crc}}}\right),$$

где  $\bar{l}_{crc}$  - среднее значение случайной величины  $\tilde{l}_{crc}$ ,  $S_{l_{crc}}$  - среднее квадратическое отклонение  $\tilde{l}_{crc}$ .

Рассмотрим пример. Пусть известны  $l_{np} = 0,2$  м;  $\bar{l}_{crc} = 0,1$  м;  $S_{l_{crc}} = 0,05$  м.

Используя таблицы функций Лапласа найдем

$$P = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{0,1 - 0,2}{0,05}\right) = 0,5 + \Phi(2) = 0,5 + 0,4772 = 0,9772.$$

Надежность (вероятность безотказной работы) равна 0,9772.

Рассмотрим вариант, в котором число измерений длины трещины ограничено и вероятностные методы не применимы. Пусть имеем  $l_{np} = 0,2$  м;  $l_{crc} = \{0,11; 0,14; 0,17; 0,19\}$  м. Для расчета надежности используем метод [1, 2, 3] на основе теории возможностей. Функцию распределения возможностей примем по [1, 2, 3] в виде:

$$\pi_L(l_{crc}) = e^{-\left(\frac{l_{crc} - a_{l_{crc}}}{b_{l_{crc}}}\right)^2}, \quad (7)$$

где  $a_{l_{crc}} = 0,5 \cdot (l_{crc,max} + l_{crc,min}) = 0,5 \cdot (0,11 + 0,19) = 0,15$  м;

$b_{l_{crc}} = 0,5 \cdot (l_{crc,max} - l_{crc,min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$ , где  $\alpha$  - уровень среза (риска), которым задаются [20]. Примем  $\alpha = 0,1$ , тогда  $b_{l_{crc}} = 0,5 \cdot (0,19 - 0,11) / \sqrt{-\ln 0,1} = 0,0296$  м.

Т.к.  $a_{l_{crc}} = 0,1 < l_{crc,ult} = 0,2$  м, то возможность безотказной работы балки  $R=1$ , а

возможность отказа  $Q = e^{-\left(\frac{0,2 - 0,15}{0,0296}\right)^2} = 0,06$ . Необходимость безотказной работы  $N = 1 - Q = 0,94$ . Надежность балки характеризуется интервалом  $[N=0,94; R=1]$  или в вероятностном выражении  $[P = 0,94; \bar{P} = 1]$ .

Рассмотрим вариант, по которому в (5) имеем две нечеткие переменные (в терминах теории возможностей):  $\tilde{F}_{экс}$  и  $\tilde{l}_{crc}$  - нечеткие переменные (малое число измерений). Представим (5) в виде:

$$\tilde{F}_{экс} + F_{np} \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0} \leq F_{np}, \quad (8)$$

Для расчета надежности по (8) нужно сложить две функции распределения возможностей нечетких переменных  $\tilde{F}_{экс}$  и  $F_{np} \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0}$ , или использовать принцип обобщения Л.Заде из теории нечетких множеств [2, 21]. Рассмотрим первый вариант. Введем для сокращения записей обозначения  $\tilde{F}_{экс} = X$ ,  $F_{np} \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0} = Y$ ,  $Z = X + Y$ . На рис. 3 показано сложение функций  $\pi_x(x)$  и  $\pi_y(y)$  при одинаковых уровнях среза  $\alpha$ . В результате имеем  $Z_{min} = X_{min} + Y_{min}$ ,  $Z_{max} = X_{max} + Y_{max}$ ,  $a_z = a_x + a_y$ ,  $b_z = 0,5(Z_{max} - Z_{min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$

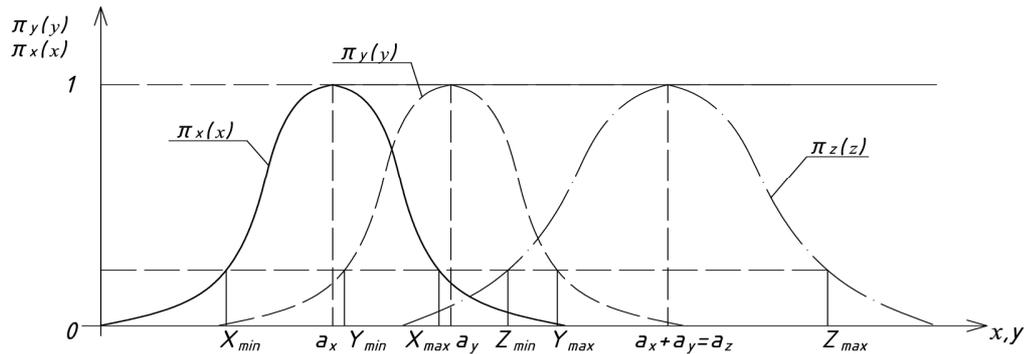


Рис. 3. Иллюстрация суммы нечетких переменных  $X+Y$

В этом случае расчет надежности с использованием функции распределения возможностей  $\pi_z(z) = e^{-\left(\frac{z-a_z}{b_z}\right)^2}$  не отличается от предыдущего расчета с одной нечеткой переменной  $\tilde{l}_{crc}$  и функцией распределения (7). Если по (8) окажется  $(a_x + a_y) \leq F_{np}$ , то  $R = 1$ . Затем вычисляют  $Q = e^{-\left(\frac{z-a_z}{b_z}\right)^2}$ , где  $b_z = 0,5 \cdot (Z_{max} - Z_{min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$  и находят значение  $N = 1 - Q$ . Надежность будет характеризоваться интервалом  $[N; R]$ .

*Пример.* Пусть известны  $X = \{1,2; 1,3; 1,1\}$  кН;  $Y = \{0,9; 1,0; 0,8\}$  кН;  $F_{np} = 2,3$  кН.  $Z_{min} = 1,1 + 0,8 = 1,9$  кН;  $Z_{max} = 1,3 + 1,0 = 2,3$  кН;  $a_z = 1,2 + 0,9 = 2,1$ ;  $b_z = 0,5(2,3 - 1,9) / \sqrt{-\ln 0,1} = 0,13$ , при  $a = 0,1$ . Т.к.  $a_z < F_{np}$ , то  $R = 1$ .

$Q = e^{-\left(\frac{2,3-2,1}{0,13}\right)^2} = 0,094$ , тогда  $N = 1 - 0,094 = 0,906$ . Надежность балки характеризуется интервалом  $[0,906; 1]$ .

Рассмотрим следующий вариант, в котором обозначим  $\tilde{F}_{экс} = X$  и будем рассматривать как нечеткую переменную, а  $F_{np,0} \left(1 - \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0}\right) = Y$  - примем случайной величиной. Пусть  $Y$  изменяется по нормальному закону распределения с функцией (6). На рис. 4 показаны условно графики функций  $f_Y(y)$  и  $\pi_X(x)$ .

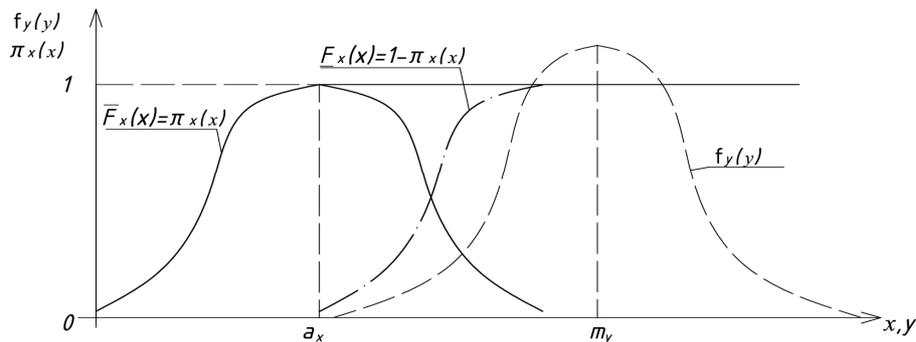


Рис. 4. Графики функций  $f_Y(y)$  и  $\pi_X(x)$  при  $a_x < m_y$

В [1, 2] рассмотрены различные варианты расчетных математических моделей с вероятностными и возможностными случайными величинами и их использования в комбинированных методах расчетов надежности.

Рассмотрим расчетную модель предельного состояния вида  $X \leq Y$ , в которой  $X$  характеризуется функцией распределения возможностей вида

$\pi_X(x) = e^{-\left(\frac{x-a_x}{b_x}\right)^2}$  и  $Y$  изменяется по закону распределения с плотностью вероятности вида (7).

По [2] имеем нижнюю и верхнюю вероятность безотказной работы железобетонной балки по критерию (1) в общем виде:

$$\underline{P} = \int_0^{\infty} f_Y(y) \cdot \bar{F}_X(y) dy, \quad \bar{P} = \int_0^{\infty} f_Y(y) \cdot \underline{F}_X(y) dy, \quad (9)$$

где в функциях  $F_X(x)$  обозначено  $x = y$ , т.к. они общей физической природы [19]. Применительно к описанной выше математической модели предельного состояния будем иметь:

$$\bar{P} = \int_0^{a_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{y-m_y}{2S_y}\right)^2} \cdot e^{-\left(\frac{y-a_x}{b_x}\right)^2} dy + \int_{a_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{y-m_y}{2S_y}\right)^2} \cdot 1 dy$$

$$\underline{P} = \int_{a_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{y-m_y}{2S_y}\right)^2} \cdot e^{-\left(\frac{y-a_x}{b_x}\right)^2} dy$$

Рассмотрим пример. Пусть известны  $a_x = 1,3$  кН;  $b_x = 0,15$  кН;  $m_y = 1,6$  кН;  $S_y = 0,2$  кН. Тогда:

$$\bar{P} = \int_0^{1,3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,2} \cdot e^{-\left(\frac{y-1,6}{2 \cdot 0,2}\right)^2} \cdot e^{-\left(\frac{y-1,3}{0,15}\right)^2} dy + \int_{1,3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,2} \cdot e^{-\left(\frac{y-1,6}{2 \cdot 0,2}\right)^2} \cdot 1 dy = 0,980$$

$$\underline{P} = \int_{1,3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,2} \cdot e^{-\left(\frac{y-1,6}{2 \cdot 0,2}\right)^2} \cdot e^{-\left(\frac{y-1,3}{0,15}\right)^2} dy = 0,852$$

Интервал, характеризующий надежность, запишется как  $[0,852; 0,980]$ . Истинное значение надежности (вероятности безотказной работы) будет находиться внутри этого интервала.

Для железобетонных балок, к которым предъявлен высокий уровень эксплуатационной безопасности, требуется производить несколько испытаний и расчетов надежности, в результате чего будем иметь подмножество интервалов  $[\underline{P}_i; \bar{P}_i]$ . Данное подмножество можно статистически проанализировать с помощью теории свидетельств Демпстера-Шефера [22, 23]. Рассмотрим это на примере: Пусть в результате многократных испытаний балки были получены следующие интервалы надежности –  $[0,998; 0,999]$ ,  $[0,999; 1]$ ,  $[0,997; 0,999]$ ,  $[0,998; 1]$  кН/м. Общее число интервалов  $n=4$ . Статистическое математическое ожидание значения надежности по результатам испытаний по [23, 24] найдем по формулам:

$$\underline{EY} = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \inf(A_i); \quad \bar{EY} = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \sup(A_i), \quad (10)$$

где  $m(A_i) = C_i / N$ , где  $N$  – число интервалов;  $C_i$  – количество наблюдаемых подмножеств  $A_i$ ;  $A_i$  – подмножество множества  $\Omega$  (в нашем случае надежность).

В приведенном примере  $n = 4$ . По формуле (10) имеем:

$$\underline{P} = \underline{EY} = \left(\frac{1}{4}0,998 + \frac{1}{4}0,999 + \frac{1}{4}0,997 + \frac{1}{4}0,998\right) = 0,998;$$

$$\overline{P} = \overline{EY} = \left(\frac{1}{4}1 + \frac{1}{4}1 + \frac{1}{4}0,999 + \frac{1}{4}0,999\right) = 0,999.$$

Надежность характеризуется «средним» интервалом [0,998; 0,999].

*Выводы:*

1. Рассмотрен расчет надежности железобетонной балки по критерию длины трещины;
2. Приведены различные способы расчета в зависимости от неполноты (полноты) информации о контролируемых параметрах в расчетных математических моделях предельного состояния;
3. Приведенные методы расчетов надежности могут быть использованы для расчетов надежности других видов железобетонных конструкций по критерию длины трещины.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Уткин В.С., Уткин Л.В.* Расчет надежности строительных конструкций при различных способах описания неполноты информации. – Вологда: ВоГТУ, 2009. 126 с.
2. *Уткин В.С., Соловьев С.А.* Определение остаточной несущей способности и надежности железобетонных балок по критерию ширины раскрытия трещин // *Бетон и железобетон.* 2016. №1. С. 20-25.
3. *Уткин В.С., Соловьев С.А.* Расчет надежности железобетонной балки на стадии эксплуатации по критерию длины трещины в бетоне // *Вестник МГСУ.* 2016. №1. С. 68-79.
4. *Уткин В.С., Соловьев С.А.* Определение несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации по критерию ширины раскрытия трещин // *Справочник. Инженерный журнал.* 2016. №3. С. 18-22..
5. *Золина Т.В.* Сводный алгоритм расчета промышленного объекта на действующие нагрузки с оценкой остаточного ресурса // *Промышленное и гражданское строительство.* 2014. № 6. С. 12-14.
6. *Райзер В.Д.* Расчет и нормирование надежности строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1978. 344 с.
7. *Пирадов К.А., Савицкий Н.В.* Механика разрушения и теория железобетона // *Бетон и железобетон.* 2014. №4. С. 23-25.
8. *Зайцев Ю.В.* Механика разрушений для строителей. – М.: Высшая школа, 1991. 288 с.
9. *Партон В.З.* Механика разрушения: От теории к практике. М: Наука, 1990. 240 с.
10. *Utkin V.S., Utkin L.V.* Calculating the reliability of machine parts on the basis of the Chebyshev inequality // *Russian Engineering Research Springer (Германия).* т. 32. №1. 2012. Pp. 5-8.
11. *Уткин В.С., Уткин Л.В.* Определение надежности железобетонных элементов при наличии в них наклонных силовых трещин // *Бетон и железобетон.* 1998. №4. С. 16.
12. *Уткин В.С., Уткин Л.В.* Определение надежности железобетонных элементов при наличии в них силовых трещин, нормальных к продольной оси // *Бетон и железобетон.* 1999. №1. С. 15-16.
13. *Уткин В.С.* Определение остаточной несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации по критерию прочности арматуры и бетона // *Инженерно-строительный журнал.* 2015. №1. С. 15-23.
14. *Бедов А.И., Сапрыкин В.Ф.* Обследование и реконструкция железобетонных и каменных конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений. – М.: Изд-во АСВ, 1995. 192 с.
15. *Землянский А.А.* Обследование и испытание зданий и сооружений: Учебное пособие. – М.: Изд-во АСВ, 2004. 240 с.
16. *Козачёк В.Г., Нечаев Н.В., Нотенко С.Н., Римшин В.И., Ройтман А.Г.* Обследование и испытание зданий и сооружений. Учебник для вузов. Под. ред. Римшина В.И., 3-е изд. – М.: Высшая школа, 2007. 655 с.
17. *Пересыткин Е.Н.* Расчет стержневых железобетонных элементов. – М.: Стройиздат, 1998. 168 с.

18. Шишкин И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством. Под ред. акад. Н. С. Соломенко. – М.: Изд-во стандартов, 1990. 342 с.
19. Ржаницын А. П. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. 239 с.
20. Уткин В.С., Соловьев С.А., Каберова А.А. Значение уровня среза (риска) при расчете надежности несущих элементов вероятностным методом // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. №6. С. 63-67.
21. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. № 3. Pp. 338-353.
22. Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение несущей способности и надежности стальной балки на стадии эксплуатации с использованием теории свидетельств Демпстера–Шефера // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 7. С. 10 - 15.
23. Zhang Z., Jiang. C, Han X., Dean Hu., Yu S. A response surface approach for structure reliability analysis using evidence theory // Advanced in Engineering Software. 2014. Pp. 37-45.
24. Уткин Л.В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации. СПб: Наука, 2007. 404 с.
25. Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение надежности и несущей способности элементов конструкций с использованием теории свидетельств Демпстера–Шефера // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. №5. С. 38-45.

#### References

1. Utkin, V.S., Utkin, L.V. (2009). *Raschet Nadezhnosti Stroitel'nykh Konstruktsii pri Razlichnykh Sposobakh Opisanii Nepolnoty Informatsii* [Calculation of reliability of structures at different ways of describing the incompleteness of information], Vologda: VoGTU, 126 p.
2. Utkin, V.S., Solov'ev, S.A. (2016). Opredelenie ostatochnoi nesushchei sposobnosti i nadezhnosti zhelezobetonnykh balok po kriteriyu shiriny raskrytiya treshchin [Evaluation of the residual bearing capacity and reliability of reinforced concrete beams by the crack width criterion], *Beton i Zhelezobeton* [Concrete and Reinforced Concrete], No 1, pp. 20-25.
3. Utkin, V.S., Solov'ev, S.A. (2016). Raschet nadezhnosti zhelezobetonnoi balki na stadii ekspluatatsii po kriteriyu dliny treshchiny v betone [Calculation of reinforced concrete beam reliability on operation stage by crack length criterion]. *Vestnik MGSU* [Bulletin of MGSU], No 1, pp. 68-79.
4. Utkin, V.S., Solov'ev, S.A. (2016). Opredelenie nesushchei sposobnosti zhelezobetonnykh balok na stadii ekspluatatsii po kriteriyu shiriny raskrytiya treshchin [Calculation of bearing capacity of reinforced concrete beams on operation stage by the crack width criterion], *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal* [Engineering journal], No 3, pp. 18-22.
5. Zolina, T.V. (2014). Svodnyi algoritm rascheta promyshlennogo ob'ekta na deistviyushchie nagruzki s otsenoi ostatochnogo resursa [A synthesis algorithm of calculation of an industrial facility for external loads with residual life assessment], *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and civil engineering], No 6, pp. 12-14.
6. Raizer, V.D. (1978). *Raschet i Normirovanie Nadezhnosti Stroitel'nykh Konstruktsii* [Calculation and valuation of reliability of structures], Moscow: Stroizdat, 344 p.
7. Piradov, K.A., Savitskii, N.V. (2014). Mekhanika razrusheniya i teoriya zhelezobetona [Fracture mechanics and theory of reinforced concrete], *Beton i Zhelezobeton*, No 4, pp. 23-25.
8. Zaitsev, Yu.V. (1991). *Mekhanika Razrusheniya dlya Stroitelei* [Fracture mechanics for builders], Moscow: Vysshaya shkola, 288 p.
9. Parton, V.Z. (1990). *Mekhanika Razrusheniya: ot Teorii k Praktike* [Fracture mechanics: from theory to practice], Moscow: Nauka, 240 p.
10. Utkin, V.S., Utkin, L.V. (2012). Calculating the reliability of machine parts on the basis of the Chebyshev inequality, *Russian Engineering Research Springer*, Vol. 32. No 1, pp. 5-8.
11. Utkin, V.S., Utkin, L.V. (1998). Opredelenie nadezhnosti zhelezobetonnykh elementov pri nalichii v nikh naklonnykh silovykh treshchin [Calculation of reliability of RC members with normal cracks]. *Beton i Zhelezobeton* [Concrete and reinforced concrete], No 4, pp. 16.
12. Utkin, V.S., Utkin, L.V. (1999). Opredelenie nadezhnosti zhelezobetonnykh elementov pri nalichii v nikh silovykh treshchin, normal'nykh k prodol'noi osi [Calculation of reliability of RC members with slanted cracks], *Beton i Zhelezobeton* [Concrete and reinforced concrete], No 1, pp. 15-16.
13. Utkin, V.S. (2015). Opredelenie ostatochnoi nesushchei sposobnosti zhelezobetonnykh balok na stadii ekspluatatsii po kriteriyu prochnosti armatury i betona [Calculation of residual bearing capacity of reinforced concrete beams on operation stage by the criterion of concrete and bar strength], *Inzhenerno-Stroitel'nyi Zhurnal* [Journal of Civil Engineering], No 1, pp. 15-23.
14. Bedov, A.I., Saprykin, V.F. (1995). *Obsledovanie i Rekonstruktsiya Zhelezobetonnykh i Kamennykh Konstruktsii Eksploatiruemykh Zdanii i Sooruzhenii* [Inspection and reconstruction of existing RC and stone structures], Moscow: Izd-vo ASV, 192 p.
15. Zemlyanskii, A.A. (2004). *Obsledovanie i Ispytanie Zdanii i Sooruzhenii* [Inspection and test of structures], Moscow: Izd-vo ASV, 240 p.

16. Kozachek, V.G., Nechaev, N.V., Notenko, S.N., Rimshin, V.I., Roitman, A.G. (2007). *Obsledovanie i Ispytanie Zdanii i Sooruzhenii*, Moscow: Vysshaya shkola, 655 p.
17. Peresyypkin, E.N. (1998). *Raschet Sterzhnevnykh Zhelezobetonnykh Elementov* [Calculation of RC rod elements], Moscow: Stroizdat, 168 p.
18. Shishkin, I.F. (1990). *Metrologiya, Standartizatsiya i Upravlenie Kachestvom* [Metrology, standardization and quality management], Moscow: Izd-vo standartov, 342 p.
19. Rzhantsyn, A.R. (1978). *Teoriya Rascheta Stroitel'nykh Konstruktsii na Nadezhnost'* [Theory of structure calculation on reliability], Moscow: Stroizdat, 239 p.
20. Utkin, V.S., Solov'ev, S.A., Kaberova, A.A. (2015). Znachenie urovnya sreza (riska) pri raschete nadezhnosti nesushchikh elementov vozmozhnostnym metodom, *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzhenii* [Structure mechanics and calculation of constructions], No. 6, pp. 63-67.
21. Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, Vol. 8, No 3, pp. 338-353.
22. Utkin, V.S., Solov'ev, S.A. (2015). Opredelenie nesushchei sposobnosti i nadezhnosti stal'noi balki na stadii ekspluatatsii s ispol'zovaniem teorii svidetel'stv Dempstera-Shefera [Calculation of bearing capacity and reliability of steel beam on the operation stage using evidence theory], *Deformatsiya i Razrushenie Materialov* [Deformation and fracture of materials], No 7, pp. 10 - 15.
23. Zhang, Z., Jiang, C., Han, X., Dean, Hu., Yu, S. (2014). A response surface approach for structure reliability analysis using evidence theory, *Advanced in Engineering Software*, pp. 37-45.
24. Utkin, L.V. (2007). *Analiz Riska i Prinyatie Reshenii pri Nepochnoi Informatsii* [Risk analysis and decision making with incomplete information], Saint-Petersburg: Nauka, 404 p.
25. Utkin, V.S., Solov'ev, S.A. (2015). Opredelenie nadezhnosti i nesushchei sposobnosti elementov konstruktsii s ispol'zovaniem teorii svidetel'stv Dempstera-Shefera [Calculation of reliability and bearing capacity of structures using evidence theory]. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzhenii*, No 5, pp. 38-45.

#### CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE BEAM RELIABILITY ON THE CRACK LENGTH CRITERION

V.S. Utkin, S.A. Solovyev  
*Vologda State University, Department of Civil Engineering*

The article describes the methods of calculation of reinforced concrete beams reliability at operation stage by the concrete crack length criterion. The offered methods differ in the fullness of statistical data about controlling parameters in mathematical design model. The numerical examples of reliability calculation are given. The article also illustrates the application of evidence theory for evaluation of mathematical expected value of reliability in the presence of statistical information in the form of a subset of intervals.

**Key words:** reliability, reinforced concrete beams, crack length, fracture mechanics, evidence theory.



#### Теория упругости

#### НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО АНИЗОТРОПНОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ТРЕНИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ

С.Г. КУДРЯВЦЕВ, канд. техн. наук, доцент  
Ю.М. БУЛДАКОВА, зав. лабораторией  
ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет»  
424000, Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, дом 3  
[KudryavcevSG@volgatech.net](mailto:KudryavcevSG@volgatech.net)

Представлена методика определения перемещений и напряжений в двухслойном анизотропном основании при отсутствии трения между слоями под действием нормальной поверхностной нагрузки. Решение проводится на основе уравнений плоской задачи теории упругости. Представлены графики изменения напряжений в зависимости от характеристик материала слоев.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** перемещение, напряжение, полоса, упругая полуплоскость, анизотропия.

При возведении насыпей с последующим уплотнением слоев возникают отклонения в строении грунтовых массивов от модели изотропного тела. Поэтому задача об определении напряжений и перемещений под действием поверхностных нагрузок в двухслойном анизотропном упругом основании, когда верхний слой имеет конечную толщину, а нижний – бесконечно простирается по всем направлениям, представляет практический интерес. Для изотропного материала с разными характеристиками каждого слоя она рассматривалась во многих работах, например [1–3]. Теоретическое решение задачи о взаимодействии слоя и полупространства из трансверсально-изотропных материалов приведено в [4]. Вариант многослойного основания рассмотрен в [5].

Рассмотрим двухслойное основание (рис. 1), которое состоит из полосы постоянной высоты  $h$  и полуплоскости, под действием нормальной поверхностной нагрузки  $q(x)$ . Полагаем, что трение между слоями отсутствует. Материал слоев принимаем ортотропным, но с разными упругими характеристиками. Направления осей анизотропии в частном случае совпадают с координатными осями. Обозначим в полуплоскости перемещения, напряжения, коэффициенты, которые учитывают характеристики материала, чертой сверху.

Введем две системы координат с общим началом отсчета и осью абсцисс. Оси  $x$  и  $\bar{x}$  направим вдоль линии контакта полосы и основания. Ось  $y$  –

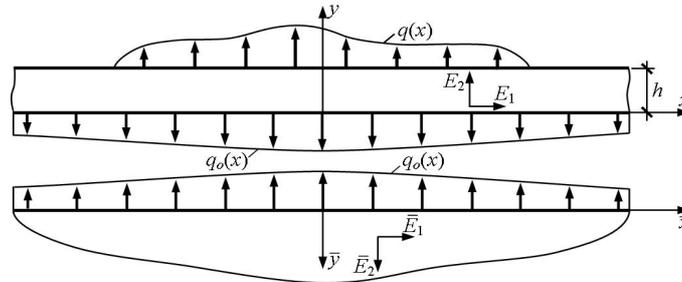


Рис. 1. Схема взаимодействия полосы и упругой полуплоскости

перпендикулярно линии контакта вверх,  $\bar{y}$  – вниз. Координатные оси  $x$  и  $\bar{x}$  совпадают, поэтому далее используем только координату  $x$ .

Для решения задачи выпишем из [6] уравнения для определения в произвольной точке полосы из ортотропного материала перемещений:

$$\begin{aligned} \mu u = & -(\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) \mu_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \nu_o + \\ & + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} q_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1^2 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2^2 \sin s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} \tau_o, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu v = & (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) \mu_o + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) \nu_o - \\ & - (s_1 \mu_2^2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1^2 \sin s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} q_o + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \frac{1}{\partial} \tau_o \end{aligned}$$

и напряжений

$$\begin{aligned} \mu \sigma_x = & (s_1^2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \cos s_2 y \partial) \partial \mu_o - (s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \partial \nu_o - \\ & - (s_1^2 \mu_2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \mu_1 \cos s_2 y \partial) q_o - (s_1 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \tau_o, \\ \mu \sigma_y = & -(\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \partial \mu_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \sin s_1 y \partial - s_1 \sin s_2 y \partial) \partial \nu_o + \\ & + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) q_o + \frac{1}{s_1 s_2} (s_2 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_1 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \tau_o, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu\tau_{xy} = (s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \partial u_o - (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \partial v_o + \\ + (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) q_o - (\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) \tau_o,$$

где  $u_o, v_o, q_o, \tau_o$  – функции перемещений и поверхностных усилий на нижней плоскости полосы, которые зависят от переменной  $x$ . Производная по  $x$  обозначена через  $\partial(\partial/\partial x)$ . В уравнениях (1) и (2) введены обозначения:

$$s_{1,2}^2 = \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}} \pm \sqrt{\left(\frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}}\right)^2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}},$$

$$\mu_1 = \beta_{12} - \beta_{11} s_1^2, \quad \mu_2 = \beta_{12} - \beta_{11} s_2^2, \quad \mu = \mu_2 - \mu_1.$$

Для плоского напряженного состояния  $\beta_{ij} = a_{ij}$ , при плоской деформации  $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3} a_{j3} / a_{33}$ , где  $a_{ij}$  – коэффициенты деформации, связанные с техническими постоянными соотношениями [7].

Из работы [8] запишем уравнения для определения в полуплоскости из ортотропного материала перемещений

$$\bar{s}\bar{v} = \frac{1}{\partial} \left[ \bar{s}_1 \bar{s}_2 (-\bar{\mu}_2 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} + \bar{\mu}_1 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) i q_o + (\bar{s}_1 \bar{\mu}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial} - \bar{s}_2 \bar{\mu}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial}) \tau_o \right], \\ \bar{s}\bar{u} = \frac{1}{\partial} \left[ (\bar{s}_2 \bar{\mu}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} - \bar{s}_1 \bar{\mu}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) q_o + (\bar{\mu}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} - \bar{\mu}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) i \tau_o \right] \quad (3)$$

и напряжений

$$\bar{s}\bar{\sigma}_x = -\left[ \bar{s}_1 \bar{s}_2 (\bar{s}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} - \bar{s}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) q_o + (\bar{s}_1^2 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} - \bar{s}_2^2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) i \tau_o \right], \\ \bar{s}\bar{\sigma}_y = \left[ (\bar{s}_2 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} - \bar{s}_1 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) q_o + (e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} - e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) i \tau_o \right], \\ \bar{s}\bar{\tau}_{xy} = \left[ \bar{s}_1 \bar{s}_2 (e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} - e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) i q_o - (\bar{s}_1 e^{-i\bar{s}_1 \bar{y} \partial} - \bar{s}_2 e^{-i\bar{s}_2 \bar{y} \partial}) \tau_o \right], \quad (4)$$

где  $\bar{s} = \bar{s}_2 - \bar{s}_1$ .

В (3) и (4) обозначения  $\bar{s}_i (i = 1, 2)$ ,  $\bar{\mu}_i (i = 1, 2)$  аналогичны ранее введенным коэффициентам  $s_i, \mu_i$ ;  $q_o, \tau_o$  – функции поверхностных усилий на границе полуплоскости. Уравнения (1)–(4) записаны для варианта  $s_1 \neq s_2$  и  $\bar{s}_1 \neq \bar{s}_2$ .

Обозначим контактное давление между слоями  $q_o = q_o(x)$ . При условии плотного контакта и отсутствии трения между слоями имеем

$$v_o(x, y = 0) = -\bar{v}_o(x, \bar{y} = 0), \quad \tau_{xy}(x, y = 0) = \bar{\tau}_{xy}(x, \bar{y} = 0) = 0. \quad (5)$$

Нижний индекс "ноль" в обозначениях перемещений указывает, что они определены при  $y = \bar{y} = 0$ . На верхней плоскости полосы:

$$\sigma_y(x, y = h) = q(x), \quad \tau_{xy}(x, y = h) = 0. \quad (6)$$

Полагая в (3) значение  $\bar{y} = 0$ , найдем

$$\partial \bar{u}_o = \frac{1}{\bar{s}} \bar{k} q_o, \quad \partial \bar{v}_o = -\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} i q_o = -\partial v_o, \quad (7)$$

где  $\bar{k} = \bar{s}_2 \bar{\mu}_1 - \bar{s}_1 \bar{\mu}_2 = \bar{s}(\bar{\beta}_{12} + \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\beta}_{11})$ .

Подставим  $\partial v_o$  в уравнения (2) и, учитывая условия (6), получим систему двух уравнений относительно неизвестных функций  $q_o, \partial u_o$ , откуда

$$q_o = \frac{2\mu}{D} (s_1 \sin s_1 h \partial - s_2 \sin s_2 h \partial) q(x), \\ \partial u_o = \frac{2\mu}{D} \left[ (s_1 \mu_2 \sin s_1 h \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 h \partial) - i \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (\cos s_1 h \partial - \cos s_2 h \partial) \right] q(x), \quad (8)$$

где 
$$\begin{aligned} \tilde{D} = & \mu[(s_1 - s_2)\sin(s_1 + s_2)h\partial + (s_1 + s_2)\sin(s_1 - s_2)h\partial] + \\ & + i \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{s_1 s_2 \bar{s}} \left[ 4s_1 s_2 - (s_1 + s_2)^2 \cos(s_1 - s_2)h\partial + (s_1 - s_2)^2 \cos(s_1 + s_2)h\partial \right]. \end{aligned}$$

Используя (7) и (8), можно составить выражения  $\partial \bar{u}_o$ ,  $\partial \bar{v}_o$ ,  $\partial v_o$ .

Полагаем, что существует интегральное преобразование Фурье от функции  $q(x)$ . Функцию  $q(x)$  разделим на симметричную  $q_s(x)$  и кососимметричную  $q_a(x)$  составляющие [9]. Тогда

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [q_s(\tilde{\lambda}) + iq_a(\tilde{\lambda})] e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \quad (9)$$

где 
$$q_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_s(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx, \quad q_a(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_a(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx,$$

$\tilde{\lambda}$  – любое положительное вещественное число.

Подставим (9) в выражения  $q_o$ ,  $\partial u_o$  и  $\partial v_o$ , которые внесем в (1) и (2). Учитывая, что перемещения и напряжения – действительные величины, получим уравнения для вычисления перемещений и напряжений в точке полосы.

При определении функций перемещений и напряжений в полуплоскости найдем функции  $q_o$ ,  $\partial \bar{u}_o$ ,  $\partial \bar{v}_o$ , используя (7)–(9), которые подставим в (3) и (4).

Порядок расчета покажем на примере. Пусть в сечении  $x = 0$  перпендикулярно верхней плоскости полосы приложена сила интенсивностью  $(-F)$ . Сила равномерно распределена вдоль оси перпендикулярной плоскости рисунка 1. При симметричной нагрузке  $q_a(x) = 0$ . Трансформанта Фурье

$$q_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(-F) \cos \tilde{\lambda}x dx = -\frac{F}{\sqrt{2\pi}}, \quad (10)$$

$\delta(x)$  – дельта функция Дирака.

Учитывая (7)–(10), найдем:

$$\begin{aligned} \partial u_o = & -\frac{\mu F}{\pi h} \int_0^{\infty} A_1(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \quad \partial v_o = -\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu} \mu F}{\bar{s} \pi h} \int_0^{\infty} A_2(\lambda) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ q_o = & -\frac{\mu F}{\pi h} \int_0^{\infty} A_2(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\lambda = \tilde{\lambda}h$ ,  $\tilde{x} = x/h$ ,  $A_1(\lambda) = (s_1 \mu_2 s h s_1 \lambda - s_2 \mu_1 s h s_2 \lambda) + \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (c h s_1 \lambda - c h s_2 \lambda)$ ,

$$\begin{aligned} A_2(\lambda) = & s_1 s h s_1 \lambda - s_2 s h s_2 \lambda, \quad D = \frac{1}{2} \left\{ \mu [(s_1 - s_2) s h (s_1 + s_2) \lambda + (s_1 + s_2) s h (s_1 - s_2) \lambda] - \right. \\ & \left. - \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{s_1 s_2 \bar{s}} \left[ 4s_1 s_2 - (s_1 + s_2)^2 c h (s_1 - s_2) \lambda + (s_1 - s_2)^2 c h (s_1 + s_2) \lambda \right] \right\}. \end{aligned}$$

Подставим (11) в (1) и (2). После преобразований получим уравнения для определения в произвольной точке полосы перемещений

$$\begin{aligned} \tilde{u} = & \int_0^{\infty} \left\{ (\mu_1 c h s_1 \lambda \tilde{y} - \mu_2 c h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[ \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{s_1 s_2 \bar{s}} (s_2 \mu_1 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_1 \mu_2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_1 \mu_2 (c h s_1 \lambda \tilde{y} - c h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{\mu D} \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v} = & -\int_0^{\infty} \left\{ (s_1 \mu_2 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 \mu_1 s h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[ \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (\mu_2 c h s_1 \lambda \tilde{y} - \mu_1 c h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (s_1 \mu_2^2 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 \mu_1^2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{\mu D} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \text{и напряжений} \\ \tilde{\sigma}_x = & -\int_0^{\infty} \left\{ (s_1^2 c h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2^2 c h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[ \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (s_1 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (s_1^2 \mu_2 c h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2^2 \mu_1 c h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\sigma}_y = & \int_0^{\infty} \left\{ (c h s_1 \lambda \tilde{y} - c h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[ \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{s_1 s_2 \bar{s}} (s_1 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\mu_2 c h s_1 \lambda \tilde{y} - \mu_1 c h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\tau}_{xy} = & -\int_0^{\infty} \left\{ (s_1 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 s h s_2 \lambda \tilde{y}) A_1(\lambda) - \left[ \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} (c h s_1 \lambda \tilde{y} - c h s_2 \lambda \tilde{y}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (s_1 \mu_2 s h s_1 \lambda \tilde{y} - s_2 \mu_1 s h s_2 \lambda \tilde{y}) \right] A_2(\lambda) \right\} \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\tilde{u} = \frac{u\pi}{\mu F}$ ,  $\tilde{v} = \frac{v\pi}{\mu F}$ ,  $\tilde{\sigma}_x = \frac{\sigma_x \pi h}{F}$ ,  $\tilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y \pi h}{F}$ ,  $\tilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} \pi h}{F}$ ,  $\tilde{y} = \frac{y}{h}$ .

Используя (3), (4), (7), (11), запишем функции для определения в полуплоскости перемещений

$$\begin{aligned} \tilde{u} = & -\frac{1}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (\bar{s}_2 \bar{\mu}_1 e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - \bar{s}_1 \bar{\mu}_2 e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \tilde{v} = & -\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (\bar{\mu}_2 e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - \bar{\mu}_1 e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} \frac{d\lambda}{\lambda} \end{aligned} \quad (14)$$

и напряжений

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x = & \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{\mu}}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (\bar{s}_1 e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - \bar{s}_2 e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\sigma}_y = & -\frac{\mu}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (\bar{s}_2 e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - \bar{s}_1 e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \\ \tilde{\tau}_{xy} = & -\frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \mu}{\bar{s}} \int_0^{\infty} (e^{-\bar{s}_1 \lambda \tilde{y}} - e^{-\bar{s}_2 \lambda \tilde{y}}) A_2(\lambda) \frac{\sin \lambda \tilde{x}}{D} d\lambda, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\tilde{u} = \frac{\bar{u}\pi}{\mu F}$ ,  $\tilde{v} = \frac{\bar{v}\pi}{\mu F}$ ,  $\tilde{\sigma}_x = \frac{\bar{\sigma}_x \pi h}{F}$ ,  $\tilde{\sigma}_y = \frac{\bar{\sigma}_y \pi h}{F}$ ,  $\tilde{\tau}_{xy} = \frac{\bar{\tau}_{xy} \pi h}{F}$ ,  $\tilde{y} = \frac{\bar{y}}{h}$ .

Интегралы для параметров перемещений  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  при значениях  $\tilde{y} = \bar{y} = 0$  расходящиеся. При их вычислении используем прием, предложенный в [9].

Варьируя в (12)–(15) значениями коэффициентов  $s_i$ ,  $\bar{s}_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\bar{\mu}_i$ , можно провести анализ напряженного и деформированного состояния двухслойного основания при отсутствии трения между слоями в зависимости от упругих характеристик материалов полосы и полуплоскости.

Полагая в (13)  $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$ , найдем функции напряжений в полосе из ортотропного материала, лежащей без трения на жестком основании. Например,

$$\tilde{\sigma}_y = \int_0^{\infty} [(chs_1\lambda\tilde{y} - chs_2\lambda\tilde{y})B_1(\lambda) - (\mu_2chs_1\lambda\tilde{y} - \mu_1chs_2\lambda\tilde{y})B_2(\lambda)] \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D^*} d\lambda, \quad (16)$$

где  $B_1(\lambda) = s_1\mu_2shs_1\lambda - s_2\mu_1shs_2\lambda$ ,  $B_2(\lambda) = s_1shs_1\lambda - s_2shs_2\lambda$ ,

$$D^* = \frac{\mu}{2} [(s_1 - s_2)sh(s_1 + s_2)\lambda + (s_1 + s_2)sh(s_1 - s_2)\lambda].$$

Функции перемещений в полосе выведем аналогично из уравнений (12).

Переход к варианту, когда материал полосы изотропный, покажем на примере параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$ . Слагаемые, входящие под знак интеграла в (16), раскладываем в ряды. Рассмотрим первое слагаемое. Каждый сомножитель отдельно раскладываем в ряд. Тогда

$$\begin{aligned} chs_1\lambda\tilde{y} - chs_2\lambda\tilde{y} &= \\ &= (s_1^2 - s_2^2) \left[ \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}(s_1^2 + s_2^2)(\lambda\tilde{y})^2 + \frac{1}{6!}(s_1^4 + s_1^2s_2^2 + s_2^4)(\lambda\tilde{y})^4 + \dots \right], \\ B_1(\lambda) &= (s_1^2 - s_2^2) \left\{ \beta_{12}\lambda + \frac{\lambda^3}{3!} [\beta_{12}(s_1^2 + s_2^2) - \beta_{11}s_1^2s_2^2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^5}{5!} [\beta_{12}(s_1^4 + s_1^2s_2^2 + s_2^4) - \beta_{11}s_1^2s_2^2(s_1^2 + s_2^2)] + \dots \right\}, \\ D^* &= \beta_{11}(s_1^2 - s_2^2)^2 \left[ \lambda + \frac{\lambda^3}{3!}(s_1^2 + s_2^2) + \frac{\lambda^5}{5!}(s_1^4 + 6s_1^2s_2^2 + s_2^4) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Сократим числитель и знаменатель на  $(s_1^2 - s_2^2)^2$ . Для плоского напряженного состояния  $\beta_{11} = 1/E$ ,  $\beta_{12} = -\nu/E$ . Подставим значения технических постоянных в (17) и, учитывая, что для изотропного материала  $s_1 = s_2 = 1$ , ряды свернем. Выполнив преобразования со вторым слагаемым, получим

$$\tilde{\sigma}_y = 2 \int_0^{\infty} [\lambda\tilde{y}sh\lambda\tilde{y} - ch\lambda\tilde{y}(sh\lambda + \lambda ch\lambda)] \frac{\cos \lambda \tilde{x}}{D^{**}} d\lambda, \quad (18)$$

где  $D^{**} = 2\lambda + sh2\lambda$ .

Функции перемещений и двух других напряжений несложно записать, используя предложенный подход. Из формулы (18) следует, что в полосе из изотропного материала при плоском напряженном состоянии и отсутствии трения между слоями напряжения не зависят от коэффициента Пуассона.

В таблице 1 для полосы из изотропного материала, лежащей на жестком основании, приведены значения  $\tilde{\sigma}_y$  в сечении  $\tilde{x} = 0$  в зависимости от величины параметра  $\tilde{y}$  и характера взаимодействия полосы и основания. Данные второй строки соответствуют варианту, когда полоса жестко скреплена с основанием [6], данные третьей – вычислены по формуле (18). Наибольшее отличие в значениях наблюдается в области контакта полосы с жестким основанием.

Таблица 1. Значения параметра  $\tilde{\sigma}_y^{\max}$  для изотропной полосы, лежащей на жестком основании, в зависимости от  $\tilde{y}$

$\tilde{y}$	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
жесткое соединение	6,761	5,161	4,233	3,643	3,247	2,967	2,752	2,558
без трения	6,752	5,153	4,229	3,654	3,286	3,056	2,929	2,889

Функции напряжений в полуплоскости из ортотропного материала выведем из уравнений (15). Запишем, например, напряжение  $\bar{\sigma}_x$  через размерные величины и полагаем  $h \rightarrow 0$ . После преобразований, используя [10], найдем

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 F}{\pi \bar{s}} \int_0^\infty (\bar{s}_1 e^{-\bar{s}_1 \tilde{\lambda} \bar{y}} - \bar{s}_2 e^{-\bar{s}_2 \tilde{\lambda} \bar{y}}) \cos \tilde{\lambda} x d\tilde{\lambda} = -\frac{F}{\pi} \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 (\bar{s}_1 + \bar{s}_2) x^2 \bar{y}}{(\bar{s}_1^2 \bar{y}^2 + x^2)(\bar{s}_2^2 \bar{y}^2 + x^2)}. \quad (19)$$

Формула (19) совпадает с приведенной в [7]. Принимая в (19)  $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 1$ , имеем выражение напряжения  $\bar{\sigma}_x$  в полуплоскости из изотропного материала [9]. Формулы для напряжений  $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}$  получим аналогично.

Функции перемещений в полуплоскости из ортотропного материала найдем из уравнений (14), в которых полагаем  $h \rightarrow 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{F}{\pi \bar{s}} \int_0^\infty (\bar{s}_2 \mu_1 e^{-\bar{s}_1 \tilde{\lambda} \bar{y}} - \bar{s}_1 \mu_2 e^{-\bar{s}_2 \tilde{\lambda} \bar{y}}) \sin \tilde{\lambda} x \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}}, \\ \bar{v} &= \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_2 F}{\pi \bar{s}} \int_0^\infty (\mu_2 e^{-\bar{s}_1 \tilde{\lambda} \bar{y}} - \mu_1 e^{-\bar{s}_2 \tilde{\lambda} \bar{y}}) \cos \tilde{\lambda} x \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Интеграл для вычисления  $\bar{v}$  при значении  $\bar{y} = 0$  расходящийся.

После интегрирования уравнений (20), используя [10], получим формулы, которые приведены в [8].

Функции перемещений, напряжений в полосе и основании при других сочетаниях между упругими характеристиками материала слоев: материал полосы изотропный, основания анизотропный; материал полосы анизотропный, основания изотропный; материал каждого слоя изотропный, но с разными упругими характеристиками; найдем, используя уравнения (12)–(15) и зависимости между коэффициентами деформации и техническими постоянными [7].

Численные расчеты проведены для основания, слою которого состоят из разных изотропных материалов, в условиях плоского напряженного состояния. Коэффициент Пуассона материала слоев  $\nu = 0,25$ . Коэффициент  $\alpha = E/\bar{E}$ , где  $E$  – модуль упругости материала полосы,  $\bar{E}$  – полуплоскости.

На рис. 2–4 показаны графики распределения параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y$ ) при отсутствии трения между полосой и основанием в зависимости от коэффициента  $\alpha$ , значений  $\tilde{x}, \tilde{y}$  ( $\bar{y}$ ). В таблицах приведены данные для  $\tilde{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y$ ) в сечении  $\tilde{x} = 0$ . Значение  $\alpha = 0$  соответствует случаю, когда полоса

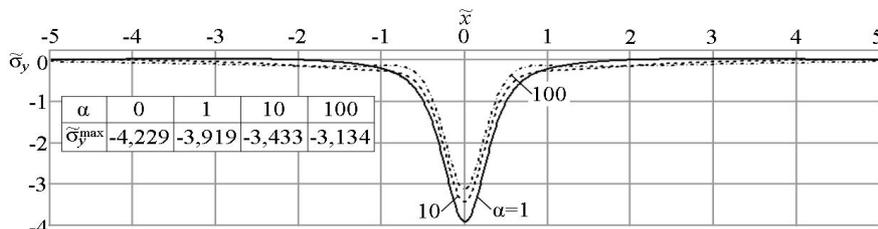


Рис. 2. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  вдоль горизонтальной оси ( $\tilde{y} = 0,5$ )

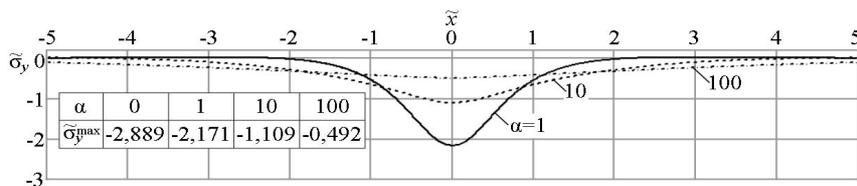


Рис. 3. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  на линии контакта полосы и основания

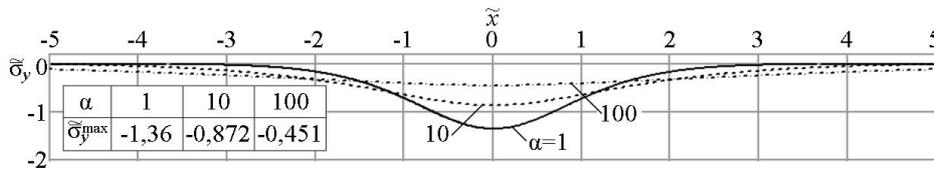


Рис.4. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  вдоль горизонтальной оси ( $\tilde{y} = 1,0$ )

лежит без трения на жестком основании. Из сравнения кривых видно, что с увеличением модуля упругости материала верхнего слоя значения параметра  $\tilde{\sigma}_y$  ( $\tilde{\sigma}_y$ ) уменьшаются, а область его распространения в направлении горизонтальной оси увеличивается. Максимальное отличие в значениях имеет место в области контакта полосы и основания.

На рис. 5 в увеличенном масштабе показаны эпюры изменения  $\tilde{\sigma}_y$  в полосе при  $\tilde{y} = 0,5$  в зависимости от коэффициента  $\alpha$ . Точками обозначены значения  $\tilde{x}$ , в которых происходит смена знака у параметра  $\tilde{\sigma}_y$ .

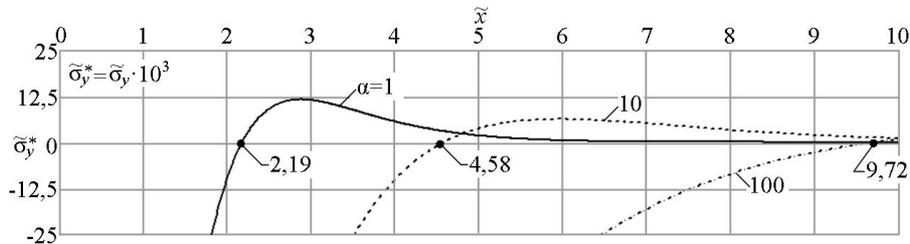


Рис.5. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_y$  вдоль горизонтальной оси ( $\tilde{y} = 0,5$ )

В таблице 2 приведены данные расчета  $\tilde{\sigma}_y$  ( $\tilde{\sigma}_y$ ) в сечении  $\tilde{x} = 0$  для двухслойного основания при разных значениях коэффициента  $\alpha$ , параметров  $\tilde{y}$  ( $\tilde{y}$ ) и характера взаимодействия между слоями. Данные для варианта жесткого соединения между слоями вычислены с использованием уравнений [8].

Таблица 2. Значения параметра  $\tilde{\sigma}_y^{\max}$  ( $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ ) в зависимости от  $\alpha$ ,  $\tilde{y}$  ( $\tilde{y}$ ), характера взаимодействия между слоями

		коэффициент $\alpha$							
		жесткое соединение				без трения			
		0	1	10	100	0	1	10	100
$\tilde{y}$	0,5	4,233	4,000	3,525	3,166	4,229	3,919	3,433	3,134
	0,25	3,096	2,667	1,864	1,276	3,156	2,595	1,741	1,229
	0,0	2,558	2,000	1,144	0,524	2,889	2,171	1,109	0,492
$\tilde{y}$	1,0	–	1,000	0,694	0,411	–	1,36	0,872	0,451
	2,0	–	0,667	0,508	0,343	–	0,875	0,665	0,399

Характер изменения параметра напряжения  $\tilde{\tau}_{xy}$  ( $\tilde{\tau}_{xy}$ ) от значений  $\alpha$ ,  $\tilde{y}$  ( $\tilde{y}$ ) при отсутствии трения между слоями показан на рис.6-7. При анализе графиков на рис.7 необходимо учитывать направление оси  $\tilde{y}$ . В таблицах приведены максимальные значения  $\tilde{\tau}_{xy}$  ( $\tilde{\tau}_{xy}$ ) и положение сечений, параметр  $\tilde{x}$ , в котором они возникают. На рис.6 точками указаны сечения, в которых  $\tilde{\tau}_{xy}$  меняет знак.

Характер изменения параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_x$  в полосе на линии контакта слоев показан на рис.8. Из анализа кривых видно, что значения  $\tilde{\sigma}_x$  в сечении

$\tilde{x} = 0$  возрастают с увеличением коэффициента  $\alpha$ . Точками обозначены сечения, в которых происходит смена знака у параметра  $\tilde{\sigma}_x$ . Известно [11], что при отсутствии касательных усилий на границе полуплоскости нормальные напряжения  $\bar{\sigma}_x$  и  $\bar{\sigma}_y$  на границе равны. Поэтому графики изменения параметра  $\tilde{\sigma}_x$  в основании при  $\tilde{y} = 0$  совпадают с графиками на рис. 3.

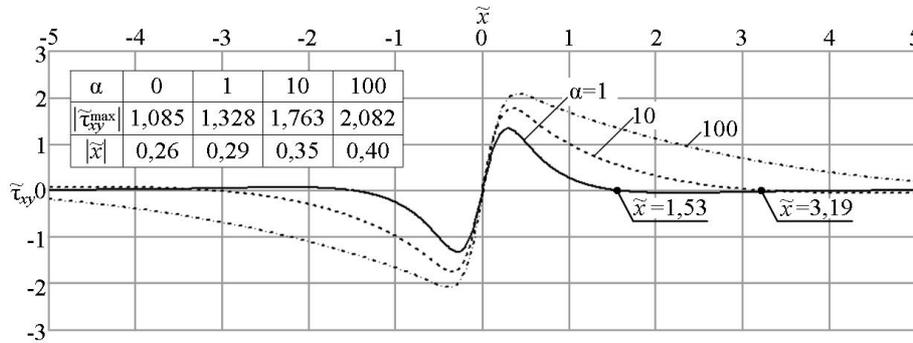


Рис. 6. Изменение параметра  $\tilde{\tau}_{xy}$  вдоль горизонтальной оси ( $\tilde{y} = 0,5$ )

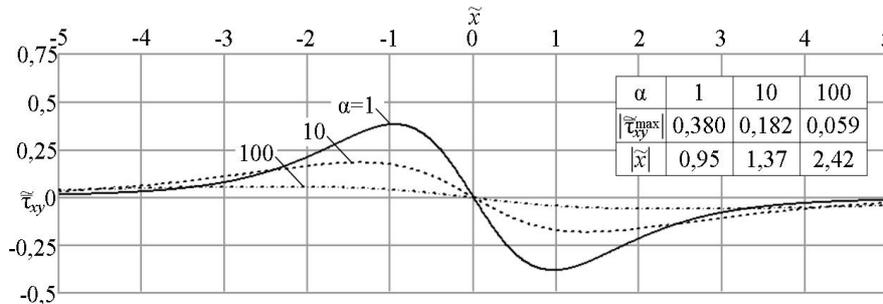


Рис. 7. Изменение параметра  $\tilde{\tau}_{xy}$  вдоль горизонтальной оси ( $\tilde{y} = 1,0$ )

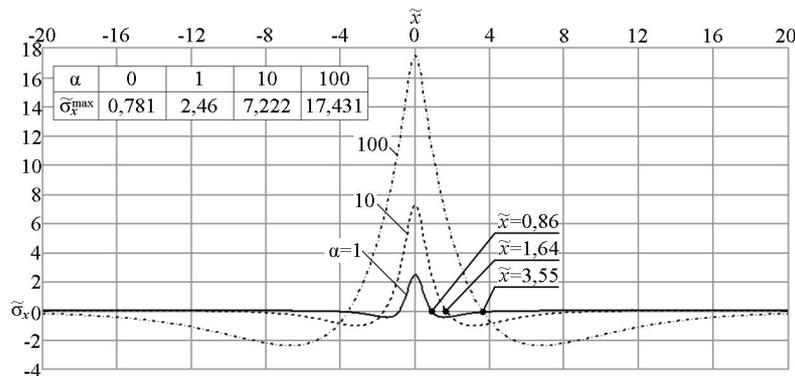


Рис.8. Изменение параметра  $\tilde{\sigma}_x$  в полосе на линии контакта слоев

Формулы (12)–(15) после преобразований можно использовать и для определения перемещений и напряжений в двухслойном основании под действием распределенной поверхностной нормальной нагрузки. Для этого в (12)–(15) полагаем  $F = 1$  и заменяем переменную  $\tilde{x}$  на  $\tilde{x} - \tilde{\xi}$ , где  $\tilde{\xi}$  – безразмерная координата точки приложения силы. В результате получим функции влияния, которые позволят записать перемещения, напряжения в полосе и полуплоскости при нагружении двухслойного основания распределенной нормальной нагрузкой интенсивностью  $q(\tilde{\xi})$  на участке конечной длины.

Л и т е р а т у р а

1. Шехтер, О.Я. Расчет бесконечной фундаментальной плиты, лежащей на упругом основании конечной и бесконечной мощности и нагруженной сосредоточенной силой/ О.Я. Шехтер // Сборник трудов научно-исследовательского сектора треста глубинных работ. – М.: Госстройиздат, 1939. – С.133-139.
2. Раппопорт, Р.М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства/ Р. М. Раппопорт// Труды Ленинградского политехнического института. – Л., 1948, – №5. – С.3-18.
3. Коган, Б.И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б.И. Коган // Труды ХАДИ. – Харьков, 1953, – вып.14. – С.33-46.
4. Fabrikant, V.I. Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation / V.I. Fabrikant // Journal of Engineering Mathematics. – 2011. – vol. 70, issue 4, P.363-388.
5. Fabrikant, V.I Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation / V.I. Fabrikant // Journal of Engineering Mathematics. – 2013 – vol. 81, issue 1, P.93-126.
6. Кудрявцев, С.Г. Взаимодействие анизотропной полосы и жесткого основания / С.Г. Кудрявцев, Ю.М. Булдакова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. – №4. – С.29-35.
7. Лехницкий, С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1957. – 464 с.
8. Кудрявцев, С.Г. Напряженное и деформированное состояние двухслойного анизотропного основания / С.Г. Кудрявцев, Ю.М. Булдакова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №5. – С.9-20.
9. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
10. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука. 1978. – 228 с.
11. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

References

1. Shekhter, O.Ja. (1939). Calculation of infinite foundation slab, lying on the elasticity based on finite and infinite power and loaded with a concentrated force, *Proceedings of the Scientific-Research Sector of the Trust Underlying Work*, M.: Gosstroizdat, p.133-139
2. Rappoport, R.M. (1948). The problem for the Boussinesq layered elastic half-space, *Proceedings of the Leningrad Polytechnic Institute*, L., №5.,p. 3-18.
3. Kogan, B.I. (1953). Stress and deformed multilayer coatings, *Proceedings HADI*, Kharkiv, Iss. 14, p. 33-46.
4. Fabrikant, V.I. (2011). Tangential contact problem for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic foundation, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 70, Iss. 4, p. 363-388.
5. Fabrikant, V.I (2013). Tangential contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic foundation, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol.81, Iss. 1, p. 93-126.
6. Kudryavtsev, S.G., Buldakova, Y.M. (2012). Interaction anisotropic layer and rigid base, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, p.29-35.
7. Lehnitsky, S.G. (1957). *Anisotropic Plate*, M.: The GITTL, 464 p.
8. Kudryavtsev, S.G., Buldakova, Y.M. (2015). Stress and deformed state of the two-layer anisotropic base, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, №5, p. 9-20.
9. Nowacki, V. (1975). *Theory of Elasticity*, M.: Mir, 872 p.
10. Dwight, G.B. (1978). *Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas*, M.: Nauka, 228 p.
11. Lurie, A.I. (1970). *Theory of Elasticity*, M.: Nauka, 940 p.

**STRESS AND DEFORMED STATE OF TWO-LAYERED ANISOTROPIC FOUNDATION IN THE ABSENCE OF FRICTION BETWEEN THE LAYERS**

KUDRYAVTSEV S.G., BULDAKOVA J.M.

The technique of determining displacements and stresses in anisotropic two-layer basis, in the absence of friction between the layers, under the influence of normal surface load is given. The solution is based on the equations of the plane problem of elasticity theory. The diagrams of change of stresses plotted on the characteristics of the material layers are presented.

KEYWORDS: displacement, stress, band, elastic half-plane, anisotropy.

## Численные методы расчета конструкций

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОСАДКИ АЛЮМИНИЕВОГО ОБРАЗЦА

Д.А. ГНЕВАШЕВ канд. техн. наук, доц.\*

Е.А. МАТВЕЕВ канд. физ.-мат. наук, преподаватель.

Е.В. КРУТИНА канд. техн. наук, доц.

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)  
111250, Москва, Б. Семеновская, 38, т. 8(903)546-0442\*; [dengnevashev@mail.ru](mailto:dengnevashev@mail.ru)\*

*Представлены результаты физического и численного экспериментов процесса осадки цилиндрического алюминиевого образца, выполненного методом конечных элементов. Подобраны оптимальные параметры численного моделирования, позволяющие в дальнейшем разработать методику численного моделирования технологических процессов ОМД.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод конечных элементов, осадка, координатная сетка, неявные методы.

Обработка металлов давлением на сегодняшний день является одной из ключевых машиностроительных технологий, она применяется как при создании готовых изделий, так и в заготовительном производстве. Относительная дешевизна получаемых изделий обуславливается массовостью производства, основные производственные затраты относятся на проектирование технологических процессов и изготовление соответствующего инструмента.

При проектировании процессов обработки металлов давлением, требуется тщательная проработка формообразующих переходов, что сопровождается проведением экспериментальных работ, порой дорогих по стоимостным и временным затратам. С целью снижения затрат на проектирование и отладку технологических процессов в последнее время все чаще используются математическое моделирование процессов деформирования, основанное на численных подходах, применяемых в задачах теории упругости и пластичности [1, 2].

Одним из наиболее распространенных методов моделирования задач механики деформируемого твердого тела является метод конечных элементов [1]. Широкое его применение обусловлено, прежде всего, хорошей алгоритмизируемостью. Однако, не смотря на развитие прикладных программных пакетов, реализующих метод конечных элементов и другие численные методы моделирования прикладных технологических задач, не существует единого подхода к моделированию. Нередко результаты численных экспериментов сопоставляются с модельными задачами, имеющими аналитическое решение для простейших моделей, однако объекты реальных производственных (технологических) задач являются более сложными.

Целью настоящей работы является отработка методики моделирования технологических задач ОМД на примере задачи осадки алюминиевой заготовки из сплава АК-4.

Объектом исследования является цилиндрический образец диаметром 40 мм и высотой 60 мм с нанесенной разметочной сеткой размером 6×6 мм (рис. 1), позволяющей на промежуточных этапах процесса осадки отслеживать изменение ее формы и размеров и проводить верификацию данных с результатами численного эксперимента по аналогии с работой [3].

Для оценки распределения поверхностной деформации в радиальном направлении образца рассматривалось изменение длины ячейки сетки на каждом

шаге деформации, отнесенное к первоначальной величине, соответствующей предыдущему шагу нагружения. По аналогии рассматривалась поверхностная деформация образца в осевом направлении, где для оценки учитывалось изменение высоты ячейки нанесенной сетки на каждом шаге.

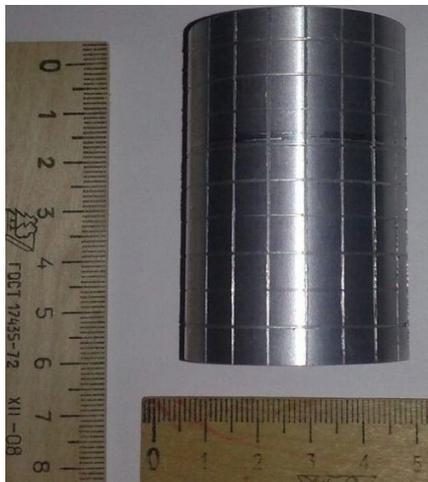


Рис. 1. Алюминиевый образец с нанесенной сеткой 6×6 мм

Решение задачи строилось методом конечных элементов в перемещениях с использованием универсального программного пакета LS-DYNA [4].

Для аппроксимации исследуемого образца применялись объемные конечные восьми узловые гексагональные элементы, имеющие по три степени свободы в каждом узле. Для решения использовалась неявная схема решения. Физическая и конечно-элементные модели эксперимента показаны на рис. 2.

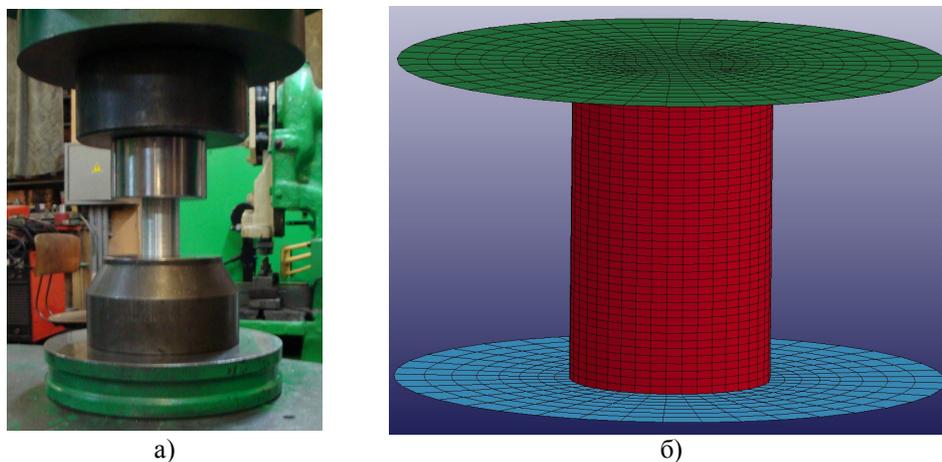


Рис. 2. Физическая (а) и конечно-элементная (б) модель алюминиевого образца

Нижняя плита пресса и подвижный верхний пунсон моделировались как абсолютно жесткие тела. Для материала образца применялась билинейная модель материала, принятая по свойствам материала образца [5].

Зависимость хода ползуна от времени, выдерживаемая при проведении физического эксперимента представлена на рис. 3. При моделировании шаг по нагрузке (перемещению) был задан в соответствии с данными физического эксперимента.

Полученные при проведении эксперимента изменения формы образца в начале проведения процесса формообразования и в середине, соответствующие

20-й и 120-й секундам соответственно, представлены на рис. 4. Здесь же представлены результаты расчетов в виде распределения перемещений и деформаций (по Мизесу).

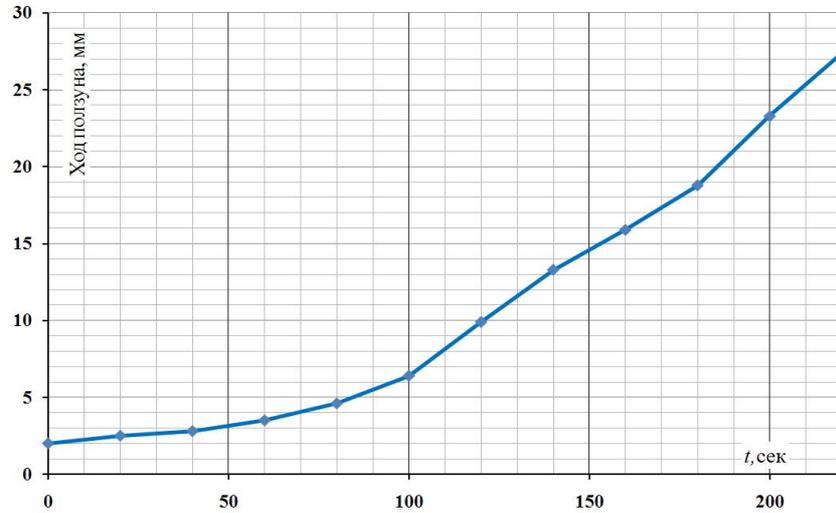


Рис. 3. График зависимости перемещения ползуна прессы от времени

Таким образом, верификация численного эксперимента по деформациям образца с натурным испытанием прошла успешно, при этом отличия не превысили 2...4%. Такое расхождение может отличаться несовершенством образца, идеализированными свойствами материала и другими объективными факторами, которые носят случайный характер. Поскольку рассматриваемая модель является идеализированной, в ней не учитываются факторы, влияющие на неравномерности деформаций [6, 7].

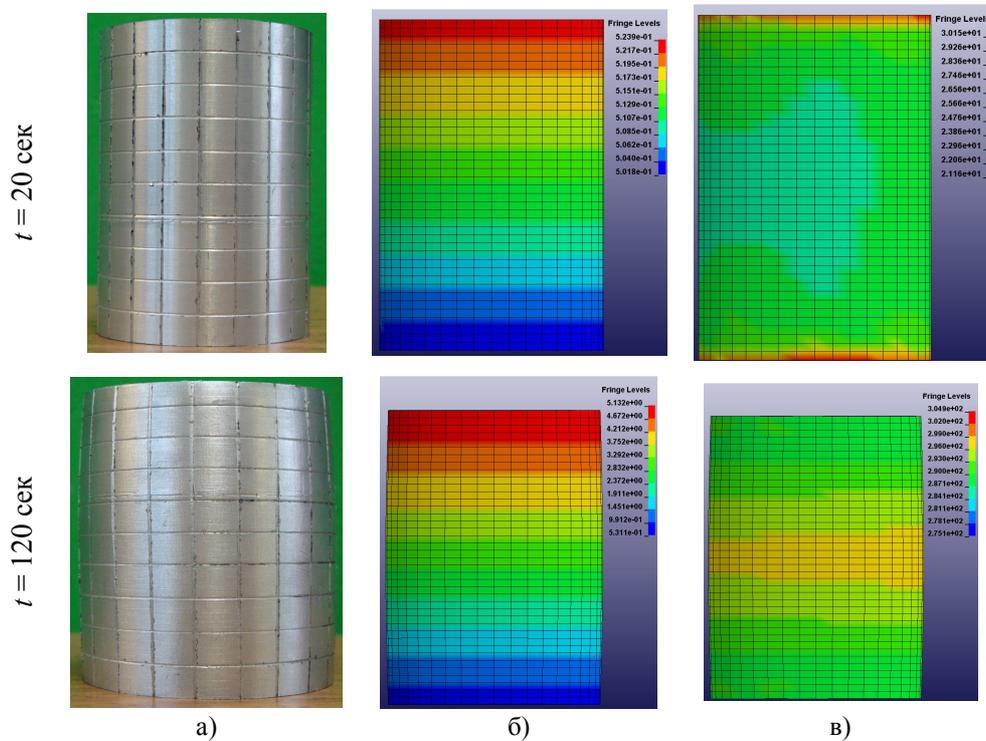


Рис. 4. Изменение формы образца: а – натурный эксперимент; результаты расчета перемещений (б) и деформаций (в)

Результаты моделирования, соответствующие окончанию процесса осадки, в виде распределения эквивалентных напряжений (по Мизесу) и осевых деформаций, показаны на рис. 5-7.

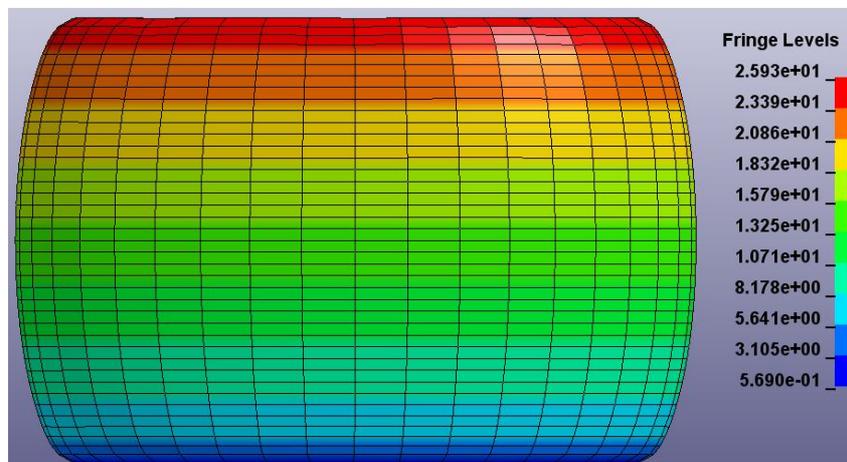


Рис. 5. Результаты моделирования в виде распределения суммарных перемещений

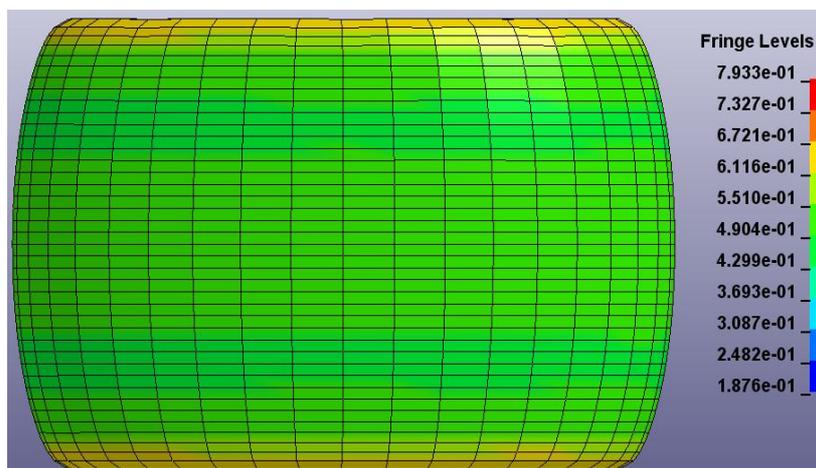


Рис. 6. Результаты моделирования в виде распределения пластических деформаций

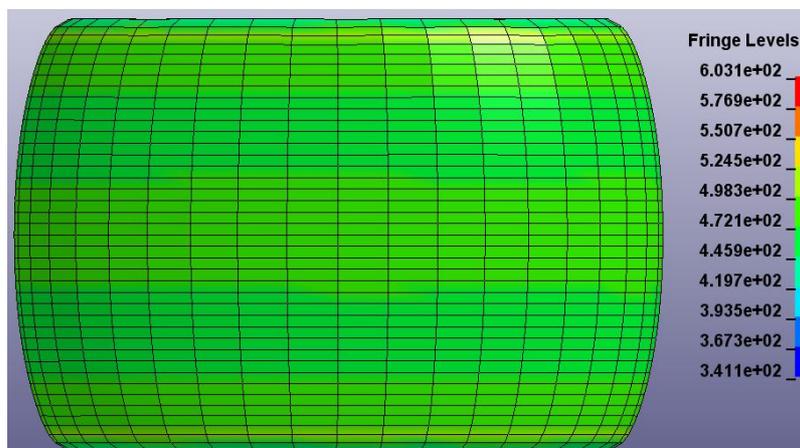


Рис. 7. Результаты моделирования в виде распределения эквивалентных напряжений (по Мизесу)

**Вывод:**

Произведена верификация расчетной модели процесса осадки алюминиевого образца.

Численно были подобраны оптимальный размер конечно-элементной сетки (40 элементов в высоту и по окружности образца), и шаг по нагрузке (10 шагов), позволяющий провести исследование процесса формообразования цилиндрических образцов без ощутимого расхождения с экспериментом с одной стороны, и временных затрат на моделирование с другой.

Эта работа является первым шагом в создании методики, позволяющей инженерам, проектирующим технологии обработки металлов давлением, без специализированной подготовки, используя справочные данные (физические, механические свойства, кривую текучести и т.д.) различных алюминиевых сплавов, создавать новые технологические процессы с минимальными производственными затратами.

Л и т е р а т у р а

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. Перевод с английского. – М.: Мир, 1975. – 543 с.
2. *Малинин И.И.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
3. *Басюк С.Т., Юшко В.Г., Зверев К.П.* Производство полуфабрикатов с использованием осадки в выпукло-вогнутых плитах. – М.: ВИЛС, 1985. – С. 41-49.
4. *LS-Dyna.* Theory Manual. January 01, 2014 (reversion:4336). LS-Dyna Dev. Livermore Software Technology Corporation (LSTC).
5. *Зубченко А.С.* Марочник сталей и сплавов. – М.: Машиностроение, 2003. – 784 с.
6. *Брюханов А.Н., Черняев О.П., Копыский Б.Д.* Технология легких сплавов. – 1964. – № 4. – С.71-75.
7. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.

R e f e r e n c e s

1. *Zenkevich, O.* (1975). *Metod Konechnykh Elementov v Tekhnike* [The finite element method in the art], Perevod s angliyskogo, Moscow: Mir, 543 p.
2. *Malinin, I.I.* (1975). *Prikladnaya Teoriya Plastichnosti i Polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep], Moscow: Mashinostroenie, 400 p.
3. *Basyuk, S.T., Yushko, V.G., Zverev, K.P.* (1985). *Proizvodstvo Polufabrikatov s Ispol'zovaniem Osadki v Vypuklo-Vognutykh Plitakh*, Moscow: VILS, pp. 41-49.
4. *LS-Dyna.* Theory Manual. January 01, 2014 (reversion:4336). LS-Dyna Dev. Livermore Software Technology Corporation (LSTC).
5. *Zubchenko, A.S.* (2003). *Marochnik Staley i Splavov* [Database of steels and alloys], Moscow: Mashinostroenie, 784 p.
6. *Bryukhanov, A.N., Chernyaev, O.P., Kopyyskiy, B.D.* (1964). *Tekhnologiya Legkikh Splavov* [The technology of light alloys], no 4, pp.71-75.
7. *Pobedrya, B.E.* (1995). *Chislennyye Metody v Teorii Uprugosti i Plastichnosti* [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity], Moscow: Izd-vo MGU, 366 p.

**MATHEMATICAL MODELING OF THE ALUMINUM SAMPLE PRECIPITATION**

D.A. Gnevashev, E.A. Matveev, E.V. Krutina

*Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow*

The results of physical and numerical experiments of the process precipitate a cylindrical aluminum sample performed by the finite element method. Optimal numerical modeling of options that allow to further develop a method of numerical simulation of metal forming processes.

KEY WORDS: finite element method, sludge, grid, implicit methods.

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ НДС ОБОЛОЧЕК  
ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА<sup>1</sup>**

Ю.В. КЛОЧКОВ, доктор техн. наук, профессор  
 А.П. НИКОЛАЕВ, доктор техн. наук, профессор  
 Т.Р. ИЩАНОВ, аспирант  
 Волгоградский государственный аграрный университет  
 400002, г. Волгоград, пр. Университетский, 26,  
 e-mail: [ishchanov.volgau@yandex.ru](mailto:ishchanov.volgau@yandex.ru)

*В данной работе на основе четырехугольного элемента дискретизации излагается алгоритм конечно-элементного расчета оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** скалярная аппроксимация, конечный элемент, круговой цилиндр, поперечный сдвиг.

При расчете оболочек вращения наиболее часто используется теория тонких оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа-Лява [1-3]. Однако, в ряде случаев (например, при расчете короткопролетных конструкций), пренебрежение деформациями сдвига не является вполне корректным.

В таких ситуациях, как правило, используются теории оболочек типа Тимошенко [4-7]. Решение систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс деформирования оболочек вращения с учетом деформации поперечного сдвига аналитическими способами весьма затруднительно. Поэтому в настоящее время используются численные методы расчета, как правило, метод конечных элементов (МКЭ) [8-13].

*1. Геометрия оболочки*

Срединная поверхность оболочки вращения может быть задана радиус-вектором:

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r \cdot \sin(t)\vec{j} + r \cdot \cos(t)\vec{k}, \quad (1.1)$$

где  $x$  - осевая координата;  $r = r(x)$  - радиус вращения;  $t$  - угловой параметр, отсчитываемый от оси  $OZ$  против хода часовой стрелки.

Дифференцированием (1.1) по дуге меридиана  $s_1$  и дуге окружности  $s_2 = rdt$  можно получить касательные орты локального базиса:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^0 &= \vec{R}_{,1}^0 = x_{,1}\vec{i} + r_{,1} \cdot \sin(t)\vec{j} + r_{,1} \cdot \cos(t)\vec{k}; \\ \vec{e}_2^0 &= \vec{R}_{,2}^0 = \cos(t)\vec{j} - \sin(t)\vec{k}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где нижние индексы 1, 2 после запятой обозначают операцию дифференцирования по криволинейным координатам  $s_1$  и  $s_2$  соответственно.

Орт нормали к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\vec{n}^0 = \vec{e}_1^0 \times \vec{e}_2^0 = -r_{,1}\vec{i} + x_{,1} \cdot \sin(t)\vec{j} + x_{,1} \cdot \cos(t)\vec{k}, \quad (1.3)$$

где

$$x_{,1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (r_{,x})^2}}.$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-41-02346 p\_поволжье\_a.

Орты локального базиса (1.2) и (1.3) и их производные по координатам  $s_1$  и  $s_2$  могут быть представлены матричным выражением [14]:

$$\{\vec{e}^0\} = [m^0]\{\vec{l}\}; \quad \{\vec{e}_{,\alpha}^0\}^T = [n_\alpha]\{\vec{e}^0\}; \quad (1.4)$$

где

$$\{\vec{e}^0\}^T = \{\vec{e}_1^0 \vec{e}_2^0 \vec{n}^0\}; \quad \{\vec{l}\}^T = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}.$$

Вектор перемещения точки срединной поверхности оболочки вращения и его производные по глобальным координатам  $s_1, s_2$ , при учете (1.4), могут быть представлены компонентами, отнесенными к локальному базису данной точки:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v^1 \vec{e}_1^0 + v^2 \vec{e}_2^0 + v \vec{n}^0; \\ \vec{v}_{,\alpha} &= t_\alpha^1 \vec{e}_1^0 + t_\alpha^2 \vec{e}_2^0 + t_\alpha \vec{n}^0; \\ \vec{v}_{,\alpha\beta} &= t_{\alpha\beta}^1 \vec{e}_1^0 + t_{\alpha\beta}^2 \vec{e}_2^0 + t_{\alpha\beta} \vec{n}^0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\alpha, \beta$  последовательно принимают значения 1, 2;  $v^1, v^2, v$  - тангенциальные и нормальная компоненты вектора перемещения;  $t_\alpha^1, t_\alpha^2, t_\alpha, t_{\alpha\beta}^1, t_{\alpha\beta}^2, t_{\alpha\beta}$  - многочлены, содержащие компоненты вектора перемещения, их первые и вторые (для  $t_{\alpha\beta}^1, t_{\alpha\beta}^2, t_{\alpha\beta}$ ) производные по глобальным координатам  $s_1, s_2$ .

Положение точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$  в исходном и деформированном состояниях, определяется соответствующими радиус-векторами:

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{n}^0; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}. \quad (1.6)$$

Входящий в (1.6) вектор перемещения точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , может быть определен следующим образом:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{n}^0), \quad (1.7)$$

где

$$\vec{\gamma} = -\gamma^2 \vec{e}_1^0 + \gamma^1 \vec{e}_2^0 + \Omega_n \vec{n}^0$$

– вектор углов поворота нормали [7].

Соотношение (1.7) можно рассматривать как вариант, в котором вектор углов поворота нормали отсчитывается от исходного положения нормали. Данный вариант соответствует подходу, описанному в [5,6].

Если поворот нормали отсчитывать от ее деформированного состояния, то формулу (1.7) следует записывать в следующем виде:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{v}^n \times \vec{n}^0) + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{n}^0), \quad (1.8)$$

где  $\vec{v}^n$  - вектор разности нормалей в деформированном и исходном состояниях [7,14]:

$$\vec{v}^n = \vec{n} - \vec{n}^0 = -v^{n2} \vec{e}_1^0 + v^{n1} \vec{e}_2^0 + v^n \vec{n}^0. \quad (1.9)$$

Здесь  $\vec{n}$  - орт нормали в деформированном состоянии

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|, \quad (1.10)$$

где

$$\vec{a}_\alpha = \vec{R}_{,\alpha} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,\alpha}.$$

Ковариантные компоненты тензора деформаций определяются соотношением механики сплошной среды [15]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta &= (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0)/2; \\ \varepsilon_{\alpha 3}^\zeta &= (g_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}^0)/2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $g_{\alpha\beta}, g_{\alpha 3}, g_{\alpha\beta}^0, g_{\alpha 3}^0$  – ковариантные компоненты метрического тензора в деформированном и исходном состояниях, определяемые соответствующими скалярными произведениями

$$g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta; \quad g_{\alpha 3} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_3; \quad g_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\beta^0; \quad g_{\alpha 3}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_3^0. \quad (1.12)$$

Входящие в (1.12) векторы базиса  $\vec{g}_\alpha, \vec{g}_3, \vec{g}_\alpha^0, \vec{g}_3^0$  могут быть найдены дифференцированием соответствующих радиус-векторов

$$\begin{aligned} \vec{g}_\alpha &= \vec{R}_{,\alpha}^\zeta; \quad \vec{g}_3 = \vec{R}_{,\zeta}^\zeta; \\ \vec{g}_\alpha^0 &= \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_3^0 = \vec{R}_{,\zeta}^{0\zeta}; \end{aligned} \quad (1.13)$$

Соотношения (1.11) могут быть представлены в виде суммы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \kappa_{\alpha\beta}; \\ \varepsilon_{\alpha 3}^\zeta &= \varepsilon_{\alpha 3} + \zeta \kappa_{\alpha 3}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\varepsilon_{\alpha\beta}; \kappa_{\alpha\beta}$  – деформации и искривления срединной поверхности оболочки вращения;  $\varepsilon_{\alpha 3}^\zeta, \varepsilon_{\alpha 3}$  – деформация сдвига в точках с радиус-векторами  $\vec{R}$  и  $\vec{R}^\zeta$ ;  $\varepsilon_{33}^\zeta, \varepsilon_{33}$  – линейные деформации вдоль нормали в тех же точках.

## 2. Физические соотношения тонких оболочек

Контравариантные компоненты тензора напряжений в произвольном слое оболочки, отстоящем от срединной поверхности на расстоянии  $\zeta$ , определяются через ковариантные компоненты тензора деформаций соотношениями механики сплошной среды [15]:

$$\sigma^{mn} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{mn} + 2\mu g^{m\gamma} g^{n\rho} \varepsilon_{\gamma\rho}, \quad (2.1)$$

где верхние и нижние индексы  $m, n, \gamma, \rho$  последовательно принимают значения 1, 2, 3;  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ляме;  $g^{mn}$  – контравариантные компоненты метрического тензора;

$$I_1(\varepsilon) = g^{mn} \varepsilon_{mn}^\zeta$$

- первый инвариант тензора деформаций.

Соотношение (2.1) может быть представлено в матричном виде

$$\left\{ \sigma^{mn} \right\}_{6 \times 1} = [C]_{6 \times 6} \left\{ \varepsilon_{mn}^\zeta \right\}_{6 \times 1}, \quad (2.2)$$

где

$$\left\{ \sigma^{mn} \right\}_{1 \times 6}^T = \{ \sigma^{11} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{22} \sigma^{23} \sigma^{33} \}; \quad \left\{ \varepsilon_{mn}^\zeta \right\}_{1 \times 6}^T = \{ \varepsilon_{11}^\zeta 2\varepsilon_{12}^\zeta 2\varepsilon_{13}^\zeta \varepsilon_{22}^\zeta 2\varepsilon_{23}^\zeta \varepsilon_{33}^\zeta \}.$$

Принимая во внимание общепринятую в теории тонких оболочек гипотезу  $\sigma^{33} = 0$  [1-3], из (2.1) можно получить следующую зависимость:

$$\varepsilon_{33}^\zeta = f(\varepsilon_{11}^\zeta, \varepsilon_{12}^\zeta, \varepsilon_{13}^\zeta, \varepsilon_{22}^\zeta, \varepsilon_{23}^\zeta). \quad (2.3)$$

Используя зависимость (2.3), можно уменьшить размерность матричного выражения (2.2):

$$\left\{ \sigma^{\gamma\rho} \right\}_{5 \times 1} = [C]_{5 \times 5} \left\{ \varepsilon_{\gamma\rho}^\zeta \right\}_{5 \times 1}, \quad (2.4)$$

где  $[C]_{5 \times 5}$  – матрица упругости.

## 3. Четырехугольный конечный элемент

В качестве элемента дискретизации выбирается четырехугольный фрагмент срединной поверхности оболочки вращения с узлами  $i, j, k, l$ , отображае-

мый для удобства численного интегрирования на квадрат в локальной системе координат  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ .

Столбец узловых неизвестных конечного элемента в глобальной и локальной системах координат выбирается в виде:

$$\{U_y^r\}_{1 \times 44}^T = \left\{ \{v_y^{1r}\}_{1 \times 12}^T \{v_y^{2r}\}_{1 \times 12}^T \{v_y^r\}_{1 \times 12}^T \{\gamma_y^1\}_{1 \times 4}^T \{\gamma_y^2\}_{1 \times 4}^T \right\}, \quad (3.1)$$

$$\{U_y^l\}_{1 \times 44}^T = \left\{ \{v_y^{1l}\}_{1 \times 12}^T \{v_y^{2l}\}_{1 \times 12}^T \{v_y^l\}_{1 \times 12}^T \{\gamma_y^1\}_{1 \times 4}^T \{\gamma_y^2\}_{1 \times 4}^T \right\}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \{q_y^r\}_{1 \times 12}^T &= \{q^i \dots q^l q_{,1}^i \dots q_{,1}^l q_{,2}^i \dots q_{,2}^l\}; \\ \{q_y^l\}_{1 \times 12}^T &= \{q^i \dots q^l q_{,\xi}^i \dots q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i \dots q_{,\eta}^l\}; \\ \{\gamma_y^\alpha\}_{1 \times 4}^T &= \{\gamma^i \gamma^j \gamma^k \gamma^l\}. \end{aligned}$$

Здесь под  $q^m$  ( $m = i, j, k, l$ ) понимается компонента вектора перемещения  $v^{am}$  или  $v^m$ .

Для вычисления компонент вектора перемещения  $q$  и компонент вектора углов поворота нормали  $\gamma^\alpha$  используются интерполяционные выражения следующего вида:

$$q = \{\varphi\}_{1 \times 12}^T \{q_y^n\}_{12 \times 1}^T; \quad \gamma^\alpha = \{\psi\}_{1 \times 4}^T \{\gamma_y^\alpha\}_{4 \times 1}^T, \quad (3.3)$$

где  $\{\varphi\}_{1 \times 12}^T = \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{12}\}$  - матрица строка, содержащая произведения полиномов Эрмита третьей степени;

$$\{\psi\}_{1 \times 4}^T = \{\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4\} - \text{матрица-строка,}$$

содержащая билинейные функции локальных координат.

Дифференцированием (3.3) можно получить производные компонент вектора перемещения и компонент углов поворота нормали:

$$\begin{aligned} q_{,\alpha} &= \left( \{\varphi_{,\xi}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} + \{\varphi_{,\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \right) \{q_y^n\}_{12 \times 1}^T; \\ \gamma_{,\beta}^\alpha &= \left( \{\psi_{,\xi}\}_{1 \times 4}^T \xi_{,\beta} + \{\psi_{,\eta}\}_{1 \times 4}^T \eta_{,\beta} \right) \{\gamma_y^\alpha\}_{4 \times 1}^T. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для получения матрицы жесткости и столбца узловых усилий четырехугольного конечного элемента можно воспользоваться функционалом Лагранжа:

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{\gamma\rho}^\zeta \right\}^T \{ \sigma^{\gamma\rho} \} dV = \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \left\{ \varepsilon_{\gamma\rho}^\zeta \right\}^T &= \left\{ \varepsilon_{11}^\zeta \ 2\varepsilon_{12}^\zeta \ 2\varepsilon_{13}^\zeta \ \varepsilon_{22}^\zeta \ 2\varepsilon_{23}^\zeta \right\}; \\ \{ \sigma^{\gamma\rho} \}^T &= \{ \sigma^{11} \ \sigma^{12} \ \sigma^{13} \ \sigma^{22} \ \sigma^{23} \}; \\ \{U\}^T &= \{v^1 v^2 v\}, \{P\}^T = \{p_1 p_2 p\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

- столбцы компонент вектора перемещения и внешней нагрузки.

С учетом (1.14), (2.4), (3.3) функционал (3.5) может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \{U_y^\Gamma\}^T [P_R]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV [P_R] \{U_y^\Gamma\} = \\ = \{U_y^\Gamma\}^T [P_R]^T \int_F [A]^T \{P\} dF, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $[\Gamma]$  - матрица перехода от столбца (3.6) к столбцу  $5 \times 10$

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}^T = \{\varepsilon_{11} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{13} \varepsilon_{22} 2\varepsilon_{23} \varepsilon_{33} \chi_{11} 2\chi_{12} 2\chi_{13} \chi_{22} 2\chi_{23}\};$$

$[B]$  - матрица дифференциальных и алгебраических операторов, необходимая для перехода от столбца  $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}$  к столбцу  $\{U_y^\Gamma\}$  - (3.2);  $[P_R]$  - матрица перехода от столбца  $\{U_y^\Gamma\}$  к столбцу  $\{U_y^\Gamma\}$ , определяемая с использованием соотношений

$$q_{,\xi}^m = q_{,\alpha}^m \alpha_{,\xi} + q_{,\beta}^m \beta_{,\xi}. \quad (3.8)$$

Входящая в (3.7) матрица  $[A]$  имеет следующую структуру:

$$[A] = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 4 & 1 \times 4 \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 4 & 1 \times 4 \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 4 & 1 \times 4 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

В результате минимизации (3.7) по  $\{U_y^\Gamma\}^T$  можно получить следующее матричное выражение

$$[K^I] \{U_y^\Gamma\} = [R^I], \quad (3.10)$$

где

$$[K^I] = [P_R]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV [P_R] - \text{матрица жесткости};$$

$$[R^I] = [P_R]^T \int_F [A]^T \{P\} dF$$

- столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента в глобальной системе координат.

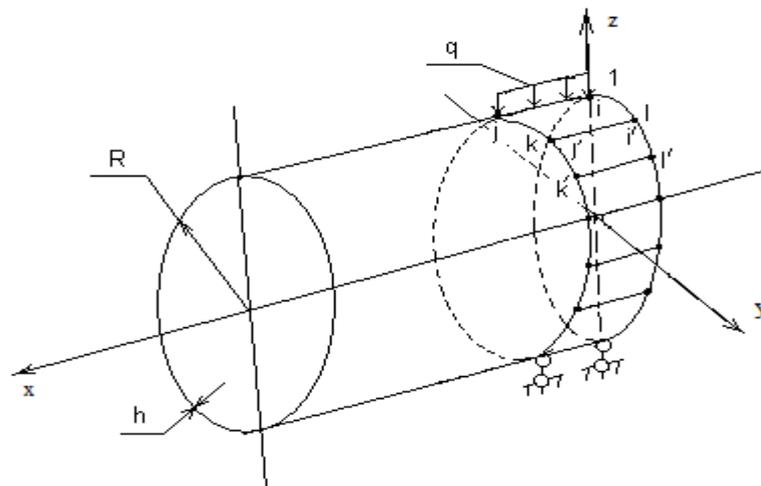


Рис. 1

*Пример расчета 1.* В качестве примера была рассчитана цилиндрическая оболочка, нагруженная вдоль образующей распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  и имеющая на диаметрально противоположной образующей шарнирные опоры, препятствующие вертикальному смещению (рис. 1).

Вследствие наличия плоскостей симметрии оболочка моделировалась одной лентой конечных элементов, ориентированной в кольцевом направлении. Были приняты следующие исходные данные:

Расчеты были выполнены в двух вариантах:

в первом варианте при формировании матрицы жесткости КЭ использовалось соотношение, соответствующее отсчету угла поворота нормали от ее исходного положения (1.7);

во втором варианте отсчет угла поворота нормали осуществлялся от ее деформированного положения – (1.8) .. (1.10).

Результаты повариантного расчета представлены в виде диаграммы (рис. 2), на которой приведены значения физических напряжений в точке приложения нагрузки на внутренней (верхняя часть диаграммы) и внешней (нижняя часть диаграммы) поверхностях цилиндра в зависимости от числа элементов дискретизации.

Как видно из диаграмм, сходимость вычислительного процесса во втором варианте существенно лучше, чем в первом, а численные значения напряжений близки к значению, вычисленному по формуле сопротивления материалов [16] для задачи расчета кольца с двумя сосредоточенными силами.

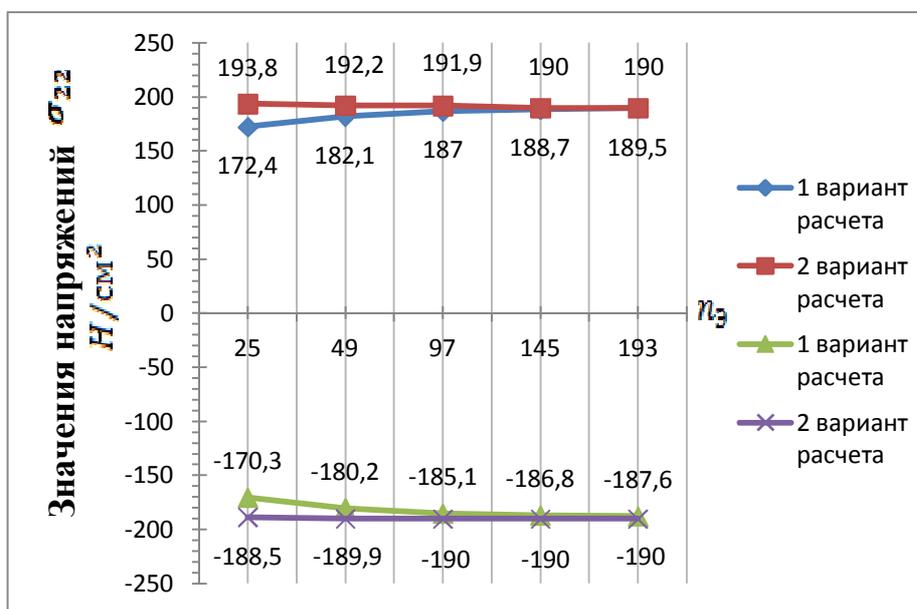


Рис. 2

При сопоставлении результатов повариантного расчета (таблица 1) следует также отметить наличие в первом варианте расчета «скачка» в значениях напряжений в узлах смежных элементов дискретизации (Рис. 1). Величина данного «скачка» уменьшается при увеличении числа элементов дискретизации. Во втором варианте расчета вышеупомянутый «скачок» в значениях практически не наблюдается.

Таблица 1

$n_3$ $\sigma_{22}$ Н/см <sup>2</sup>		25	49	97	145	193
		1 вариант	$\sigma_{22}^l$	172,4 -170,3	182,1 -180,2	187,0 -185,1
	$\sigma_{22}^i$	133,1 -131,9	162,3 -160,8	177,1 -175,4	182,0 -180,3	189,5 -187,6
2 вариант	$\sigma_{22}^l$	153,4 -151,3	172,3 -170,6	182,1 -180,3	185,4 -183,5	187,0 -185,1
	$\sigma_{22}^i$	152,8 -150,7	172,3 -170,6	182,1 -180,3	185,4 -183,5	187,0 -185,1

Пример расчета 2. Был рассчитан жестко защемленный по торцам цилиндр, нагруженный внутренним давлением интенсивности  $q$  (рис. 3). Были приняты следующие исходные данные:

$$R = 1,0 \text{ м}; L = 1,0 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \nu = 0,3; q = 5 \text{ МПа}.$$

Вследствие наличия осевой симметрии оболочка моделировалась одной лентой КЭ, ориентированной вдоль образующей.

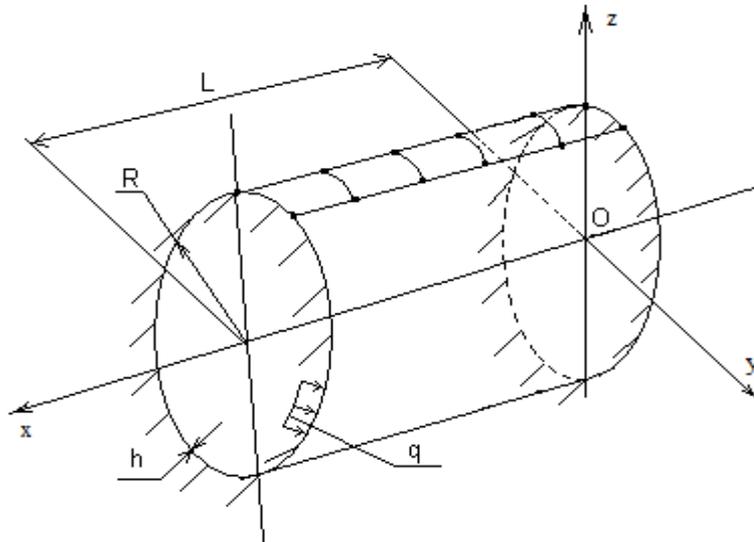


Рис. 3

Расчеты, как и в примере 1, выполнялись в двух вариантах. Результаты по-вариантного расчета представлены в виде диаграммы (рис. 4), на которой показаны значения физических напряжений  $\sigma_{11}$  в жесткой заделке на внутренней (верхняя часть диаграммы) и внешней (нижняя часть диаграммы) поверхностях цилиндра в зависимости от числа элементов дискретизации  $n_3$ .

Анализ диаграммы показывает существенно лучшую сходимость вычислительного процесса во втором варианте расчета по сравнению с первым вариантом.

Для достижения аналогичного уровня точности в первом варианте требуется на порядок большее число элементов дискретизации, чем во втором варианте.

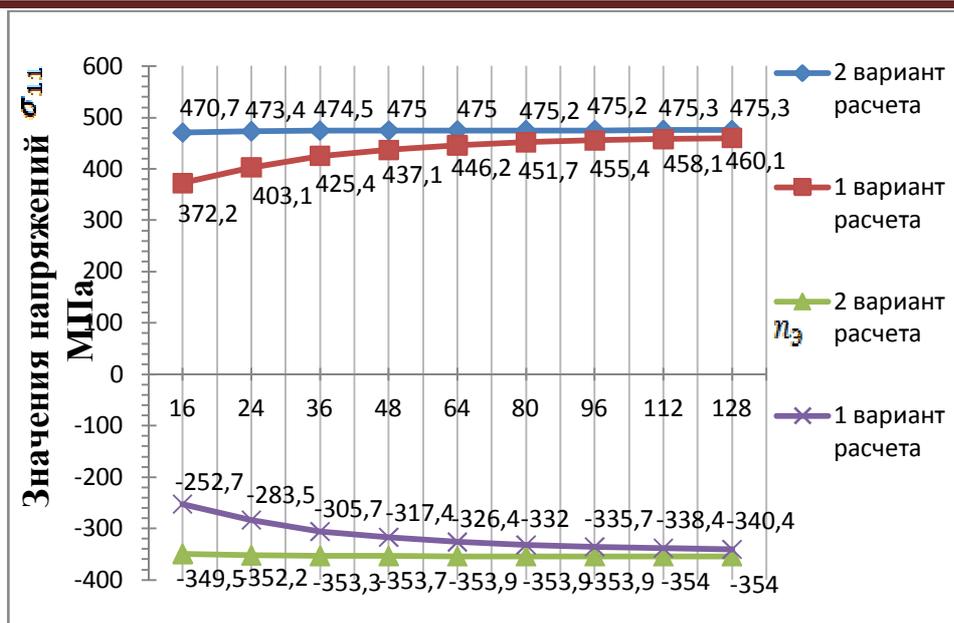


Рис. 4

Анализ результатов вычисленных напряжений, представленных на обеих диаграммах, позволяет сделать вывод о предпочтительности второго варианта расчета, соответствующего отсчету угла поворота нормали от ее деформированного состояния, при котором можно получать удовлетворительные по точности значения напряжений при относительно редкой сетке элементов дискретизации.

В то же время следует отметить, что и первый вариант компоновки матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента, при котором отсчет угла поворота нормали осуществлялся от ее исходного состояния, позволяет получать приемлемые результаты при весьма существенном сгущении сетки дискретизации рассчитываемой оболочки.

#### Л и т е р а т у р а

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. - Л.: Судостроение, 1962. - 431с.
2. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. - М.: Физматлит, 2006. - 391 с.
3. Скопинский В.Н. Напряжения в пересекающихся оболочках. - М.: Физматлит, 2008. - 399 с.
4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.
5. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. - Рига: Зинатне, 1988. - 248 с.
6. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. - 419 с.
7. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. - Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1964. - 394 с.
8. Bathe K.J., Zhang H., Ji S. Finite element analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions // Computers & Structures., 1999. - Т. 72, № 1-3 p. 1-16.
9. Косицын С.Б., Ч.С. Линь. Численный анализ напряженно- деформированных состояний пересекающихся цилиндрических оболочек обделок тоннелей, взаимодействующих с окружающим массивом грунта, с учетом последовательности их возведения // IJCCSE. - 2015. - Т. 11. - № 2. - С. 101 - 106.

10. Dodla S., Bertram A., Kruger M. Finite element simulation of lamellar copper-silver composites // *Comput. Mater. Sci.* – 2015. – Vol. 101. – P. 29 – 38.
11. Mozolevski I., Prudhomme S. Goal-oriented error estimation based on equilibrated-flux reconstruction for finite element approximations of elliptic problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.* – 2015. – Vol. 288. – P. 127 – 145.
12. Kang Z., Bui T.Q., Hirose S., Nguyen D.D., Saitoh T. An extended consecutive-interpolation quadrilateral element (xcq4) applied to linear elastic fracture mechanics // *Acta Mech.* – 2015. – Vol. 226. – № 12. – P. 3991 – 4015.
13. Liu Y., Zhang H., Zheng Y., Zhang S., Chen B. A nonlinear finite element model for the stress analysis of soft solids with a growing mass // *Int. J. Solids and Struct.* – 2014. – Vol. 51. – № 17. – P. 2964 – 2978.
14. Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А. Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек: Монография. – Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. – 264 с.
15. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. – Том.1. – 536 с.
16. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.

#### References

1. Novozhilov, V.V. (1962). *The Theory of Thin Shells*, L.: Sudostroeniye, 431p.
2. Golovanov, A.I., Tuleneva, O.N., Shigabutdinov, A.F. (2006). *The Finite Element Method In Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures*, Moscow: Fizmatlit, 391 p.
3. Skopinsky, V.N. (2008). *Stresses in the Intersecting Shells*, M.: Fizmatlit, 399 p.
4. Timoshenko, S.P., Voynovskiy – Krieger, S. (1966). *Plates and shells*, M.: Nauka, 636 p.
5. Rickards, R.B. (1988). *The Finite Element Method in the Theory of Shells and Plates*, Riga: Zinatne, 248 p.
6. Volmir, A.S. (1956). *Flexible Plates and Shells*, Moscow: GITTL, 419 p.
7. Chernykh, K.F. (1964). *The Linear Theory of Shells*, Part 2: Some Questions of the Theory, Leningrad: Leningrad State University, 394 p.
8. Bathe, K.J., Zhang, H., Ji, S. (1999). Finite element analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions, *Computers & Structures*, Vol. 72, No 1-3, p. 1-16.
9. Kositsyn, S.B., T.X. Lin (2015). Numerical analysis of stress - strain state of intersecting cylindrical shells lining tunnels, interacting with the surrounding array of soil, with taking into account the sequence of their construction, *IJCCSE*, Vol. 11, No 2, p. 101 – 106.
10. Dodla, S., Bertram, A., Kruger, M. (2015). Finite element simulation of lamellar copper-silver composites, *Comput. Mater. Sci.*, Vol. 101, p. 29 – 38.
11. Mozolevski, I., Prudhomme, S. (2015). Goal-oriented error estimation based on equilibrated-flux reconstruction for finite element approximations of elliptic problems, *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 288, p. 127 – 145.
12. Kang, Z., Bui, T.Q., Hirose, S., Nguyen, D.D., Saitoh, T. (2015). An extended consecutive-interpolation quadrilateral element (xcq4) applied to linear elastic fracture mechanics, *Acta Mech.*, Vol. 226, № 12, p. 3991 – 4015.
13. Liu, Y., Zhang, H., Zheng, Y., Zhang, S., Chen, B. (2014). A nonlinear finite element model for the stress analysis of soft solids with a growing mass, *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 51, No 17, p. 2964 – 2978.
14. Nikolaev, A.P., Klotchkov, Y.U., Kiselev, A.P., Gureeva, N.A. (2012). Vector interpolation displacement fields in finite-element calculations of shells: a monograph, Volgograd: Volgograd VPO GAU, 264 p.
15. Sedov, L.I. (1976). *Continuum Mechanics*, Moscow.: Nauka, Vol. 1, 536 p.
16. Belyaev, N.M. (1976). *Strength of materials*, Moscow: Nauka, 608 p.

### FINITE ELEMENT ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF SHELLS OF REVOLUTION WITH TAKING INTO ACCOUNT THE STRAIN OF TRANSVERSAL SHEARING

Yu.V. Klochkov, A.P. Nikolaev, T.R. Ischanov

In this paper, based on the Foursquare element sampling algorithm is presented finite element calculation of shells of revolution considering transverse shear strains in different variants of the reference tilt angle of the normal process of deformation .

KEYWORDS: the scalar approximation, finite element, circular cylinder , transverse shear.

**Динамика конструкций и сооружений**

**СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО СТЕРЖНЯ**

Т.Д. КАРИМБАЕВ\*, д.т.н., профессор

А.У. НУРИМБЕТОВ\*\* к.ф.-м.н., докторант

\* ФГУП «ЦИАМ им. П.И. Баранова», (Москва, Россия)

\*\* МАИ – Московский авиационный институт (НИУ),

\*Москва, Черноморский бульвар, 7, корпус 1, кв.13; E-mail: karimdaevt@ciam.ru

\*\*Москва, 125480, ул. Лациса Виллиса, 14; E-mail : alibek\_55t@mail.ru

*Рассмотрены колебания в многослойных композитных телах. Исследуются свободные колебания армированного многослойного стержня. В целях определения особенностей многослойных стержней, выяснения роли некоторых её параметров рассматривались стержень прямоугольного сечения и наиболее простые формы колебания. Результаты численных расчетов сравниваются с экспериментальными данными.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** многослойный композит, свободные колебания

1. Задача расчета собственных частот и форм колебаний стержней, балок, закрученных рабочих лопаток с точки зрения однородной теории рассматривалась в литературе неоднократно. Основы расчета и методы достаточно подробно описаны в работах Бицено К.Б. и Граммеля Р. [1], Ахенбаха Дж.Д. [2], Хромина Д.В.[3], Воробьева Ю.С., Шорра Б. Ф.[4], Биргера И.А. [5] и многих других исследователей. При этом выделены три основных подхода к данному вопросу: решение на основе классической теории тонких стержней [6,7], рассмотрения деформаций с точки зрения общих уравнений теории упругости [8] и решения на основе теории пластин и оболочек [9]. Различные специальные подходы к изучению вопросов колебания таких тел рассмотрены в работах [6,10,11]. Колебания и волны в слоистых и композитных телах рассмотрены в работах Сана С.Т. [12], Бреховских Л.М. [13], Ахенбаха Дж. [2], и некоторых других; причем здесь использовались соотношения изотропной или анизотропной однородной теорий упругости. Структурный подход к волновым процессам позволяет вписать ряд их интересных особенностей. Например, в работе Каримбаева Т.Д. [14] показана возможность распространения в неограниченной армированной среде четырех типов волн. Ниже на основе этой теории [14] исследуются свободные колебания армированного многослойного стержня прямоугольного сечения. В целях определения особенностей слоистых стержней, выяснения роли некоторых её параметров рассматривались наиболее простые формы колебания.

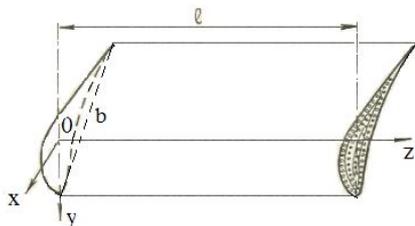


Рис. 1. Армированный слоистый стержень с профилем произвольной формы

Рассматриваются поперечные свободные колебания многослойного стержня произвольного сечения, изготовленного из композиционного материала (рис. 1).

Считая материал тела ортотропным, для изгибных напряжений эти соотношения можно записать в виде [15] (10):

$$\sigma_{zz}^i = (c_{13}^{ii} \mathcal{E}_{11}^i + c_{23}^{ii} \mathcal{E}_{22}^i + c_{33}^{ii} \mathcal{E}_{23}^i + c_{35}^{ii} \mathcal{E}_{13}^i) + (c_{33}^{ii} \varepsilon_{33}^i + c_{13}^{ii} \varepsilon_{13}^i) + c_{35}^{ii} \varepsilon_{13}^i + \beta_{33}^i T^i, \quad (1.1)$$

в которой  $\varepsilon_{k3}^{ci}$  соответствуют значениям максимальной деформации поперечного сечения, обусловленной поперечными силами  $Q_j$  [16]; величины  $\mathcal{E}_{k3}^i$  позво-

ляют оценить влияние перемещений  $u^i, v^i, w^i$  в плоскости поперечного сечения на сдвиговые деформации и  $\mathcal{E}_{kj}^i = 0.5(u_{k,j}^i + u_{j,k}^i)$  деформации элементов поперечного сечения. Кроме этого [15]:  $\varepsilon_{33}^i = \varepsilon^b \approx \varepsilon - \xi\chi_2 + \eta\chi_1 + \tau_0\tau r^2$ ,  $\alpha^2 = (\tau_0 z)^2 \ll 1$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots, \beta \approx \tau_0 r$ . Ограничивая последующее исследование формами колебаний, длины волн в которых заметно превосходят характерные структурные размеры армированного слоистого тела, положим,

$$\varepsilon_{33}^i = -\frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} y, \quad (1.2)$$

где  $v^i(z, t)$  - поперечные смещения точек  $i$ -го слоя стержня. При этих условиях выражение принципа Гамильтона принимает вид:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (w_\ell - K) dt = 0, \quad (1.3),$$

где величина

$$w_\ell = \int_0^\ell \iint \sigma_{33}^i \varepsilon_{33}^i ds dz = \int_0^\ell \iint c_{33}^{i1} \varepsilon_{33}^{i2} ds dz, \quad K = \iiint_V \rho^i (\dot{v}^i)^2 dV, \quad \dot{v}^i = \frac{\partial v^i(z, t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

$\rho^i = (\rho^n + \rho^m)$  - плотность,  $c_{33}^{i1} = (\lambda^n + 2\mu^n)v^n + (\lambda^m + 2\mu^m)v^m$  свойства материала слоя  $i$  и  $v^n, v^m$  - объемное содержание материала наполнителя и матрицы.

После использования (1.1) и (1.2) для  $w_\ell$  можно получить:

$$w_\ell = \frac{1}{2} \int_0^\ell I_1 \left( \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} \right)^2 dz, \quad (1.5)$$

где величина

$$I_1 = \iint_F c_{33}^{i1} y^2 dF, \quad (1.6),$$

является физическим моментом инерции, позволяющим вести расчет при неравномерном распределении физических свойств компонентов армированного слоистого тела в поперечных сечениях произвольной формы.

Полагая, что существуют только периодические колебания с собственной круговой частотой  $\Omega$ , представим  $v^i(z, t)$  в виде:

$$v^i(z, t) = X(z) \sin \Omega t. \quad (1.7)$$

Задачу будем решать методом Ритца [17, 19], полагая

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z), \quad (1.8)$$

где  $X_n(z)$  - допустимые функции,  $A_n$  - неопределенные параметры. В качестве допустимых функций естественно выбрать собственные функции стержня в виде [17]:

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} [ch k_n x - \cos k_n x + \frac{sh k_n - \sin k_n}{ch k_n + \cos k_n} (\sin k_n x - sh k_n x)], \quad (1.9)$$

удовлетворяющие граничным условиям консольного закрепления:

$$X(0) = X'_n(0) = 0; \quad X''_n(1) = X'''_n(1) = 0; \quad (1.10)$$

В (1.9)  $x = z/l$ , а волновое число  $k_n$  удовлетворяет характеристическому уравнению  $1 + ch k_n \cos k_n = 0$  и принимает значения, данные в табл. 1,  $\ell$  - длина стержня.

Таблица 1. Значение волновых чисел

№	1	2	3	$n \rightarrow \infty$
$k_n$	1.875	4.694	7.854	$(2n-1)\pi/2$

Балочные функции, являясь ортонормированными, удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{\ell} X_n X_p dz = \begin{cases} 1, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad \int_0^{\ell} X_n'' X_p'' dz = \begin{cases} \frac{k_n^4}{\ell^4}, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad (1.11)$$

Варьирование интеграла (1.3) сводится к дифференцированию его по неизвестным параметрам  $A_n$ . После подстановки (1.7) в (1.4) и (1.3) с учетом (1.8), (1.10) и (1.11), дифференцирования по  $A_n$  и интегрирования по  $t$  можно получить:

$$\frac{I_1}{\ell^4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n^4 \delta A_n - 2\Omega^2 \rho^i F \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta A_n = 0,$$

где  $F = \iint_F dF$  площадь поперечного сечения. После упрощения предыдущее

выражение преобразуется к виду  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n [I_1 k_n^4 - 2\Omega^2 \rho^i F \ell^4] \delta A_n = 0$ . Так как в

этом уравнении коэффициенты  $A_n$  равны нулю и произвольны, то получим следующие выражения для круговых ( $\Omega$ ) и технических ( $f_n$ ) частот свободных колебаний:

$$\Omega^2 = \frac{I_1}{\rho^i} \frac{k_n^4}{F \ell^4}; \quad (1.12) \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_1}{\rho^i F} \frac{k_n^2}{\ell^2}}, \quad (1.13)$$

где  $I_1$  определяется выражением (1.6). По полученной формуле можно подсчитать низшие собственные частоты армированного стержня с постоянным по длине сечением произвольной формы.

Величина  $I_1$  позволяет учесть неравномерное распределение физических параметров композиции в слоистом сечении. Для авиационных профилей этот интеграл можно просчитать послойно на ЭВМ по формуле (1.1) [16]. Если материал стержня изотропный, то из выражения (1.13) следует формула Рэлея-Ритца.

Каримбаевым Т.Д. были проведены эксперименты по определению собственных частот для стержня прямоугольного сечения, изготовленный из стеклоткани, имеющий следующие физические и геометрические характеристики для наполнителя и матрицы:

$$\lambda^n = 0.119 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \lambda^m = 0.046 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \rho^n = 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho^m = 542 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\mu^n = 0.179 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu^m = 0.0307 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu^n = 0.6, \quad \nu^m = 0.4,$$

$$\ell = 0.12 \text{ м}, \quad h = 0.003 \text{ м}, \quad b = 0.03 \text{ м}.$$

Для сравнения собственных частот стержня с данными экспериментов проведен численный анализ формулы (1.13). Для простоты численного анализа рассматривается стержень прямоугольного сечения с равномерным распределением физических свойств. Тогда после интегрирования (6) выражение для определения собственных частот (1.13) можно представить в виде:

$$f_n = \frac{hk_n^2}{2\pi\ell^2} \sqrt{\frac{c_{33}^i}{12\rho^i}}. \quad (1.14)$$

Таблица 3. Значение расчетных и экспериментальных собственных частот волновых чисел

Частота, гц	1	2	3
Экспериментальная	121	765	2100
По формуле (1.14)	125	786	2201

Как видно из табл. 2, расчетные значения частот превышает экспериментальные на 3-5%. Полученное соотношение (1.14) подтверждает экспериментально наблюдаемый эффект смещения узловой линии [18] к месту закрепления. Таким образом, использование теории слоистых армированных сред, в частности, обобщенного на принципе Гамильтона, при расчете элементов конструкций из композиционного материала позволяет получить удовлетворительное совпадение с опытными данными.

Расчетные соотношения (1.13), (1.14) устанавливают непосредственную зависимость собственных частот от упругих и динамических параметров отдельных компонентов композиции и позволяют путем их выбора управлять вибрационными характеристиками тела.

**2. Влияние взаимодействия компонентов композиции на свободные колебания слоистых армированных тел.** На примере стержня исследуется влияние взаимодействия компонентов композиции на свободные колебания слоистых армированных тел. При сильном взаимодействии компонентов композиционного материала, полученное уравнение частот определяет одну собственную частоту, величина которой мало отличается от частот, найденных на основе теории "эффективных" модулей. При слабом взаимодействии компонентов композиции, что реализуется при больших частотах с малой длиной волны, колебанию слоистого стержня соответствуют две собственные частоты, отличающиеся от частот двух стержней идентичных размеров, но изготовленных отдельно из материала матрицы и отдельно из материала наполнителя.

Вычисленные на основе полученных соотношений значения собственных частот низших (первых трех) форм колебания стержня прямоугольного поперечного сечения из стеклопластика удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Для анализа изгибных колебаний незакрученного армированного стержня, имеющего лопаточный профиль постоянной толщины, используется обобщенный на слоистые среды принцип Гамильтона. Согласно этому принципу минимум накопленных за время  $(t_0, t_1)$  в теле энергии деформации  $w_e$ , кинетической энергии  $K$  соответствует действительному его состоянию, т.е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (w_e - K) dt = 0, \quad (2.1)$$

Для слоистой ортотропной среды связь между продольными напряжениями и деформациями, записывается в виде (1.1). Если для каждого слоя стержня из композиционного материала принять гипотезу плоских сечений, то деформации определяются равенствами:

$$\varepsilon_{33}^i = -\frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} y, \quad (2.2)$$

через перемещения  $v^i(z, t)$ . В соответствии с (2.1), (2.2) можно получить

$$w_e = \frac{1}{2} \iint_V c_{33}^i \left( \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} \right)^2 y^2 dV, \quad K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho^i \dot{v}^2 dV, \quad \dot{v} = \frac{\partial v^i(z, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

и интегрирование осуществляется по объему  $V$  стержня. Возможные смещения

точек при колебаниях стержня описывается как  $v^i(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z) \sin \Omega t$ , в

которых  $A_n$  – амплитудные значения смещений,  $\Omega$  – круговая частота. В качестве допустимых функций  $X_n(z)$  целесообразно выбрать собственные функции стержня в виде (1.9), удовлетворяющие условиям консольного закрепления (1.10) и равенствам (1.11). Минимизация интеграла (2.1) по параметрам  $A_n$  позволяет получить систему  $n$  уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \gamma_n) A_n \delta_m^n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n + \beta_n) A_n \delta_m^n = 0, \quad (2.4)$$

в которых

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots, \alpha_n = a_n - \Omega^2 F \rho^i; \beta_n = -F b^2,$$

$$\gamma_n = -F b^4; \quad a_n = \frac{a^i k_n^4}{\ell^4} + F b^2; \quad a^i = I_1 \cdot I_1 = \int_F c_{33}^i y^2 dF -$$

осевой момент инерции и  $F$  – площадь поперечного сечения,  $b$  – размеры поперечного сечения. Система уравнений (2.4) имеет нетривиальное решение ( $A_n \neq 0$ ), если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных  $A_n$  равен нулю. Это условие записывается в виде произведения

$\prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \beta_n - \gamma_n^2) = 0$ , каждый сомножитель которого представляет собой уравнение собственной частоты колебания по  $n$ -ой гармонике. Последнее уравнение с учетом принятых обозначений удобно записать в форме:

$$(\Delta^2 - \Delta_1^2)^2 - B(\Delta^2 - 1) = 0, \quad (\Delta^2 - 1)(\Delta^2 - B - 1) = 0 \quad (2.5),$$

относительно безразмерного параметра частоты  $\Delta^2 = \frac{\omega^2 \ell^4}{k_n^4 \Delta_0^2}$ . В (2.5) принято:

$$\Delta_0^2 = \frac{a^i}{F \rho^i}; \quad B = b^2 \frac{2}{\rho^i} \frac{\ell^4}{k_n^4 \Delta_0^2}; \quad \Delta_1^2 = \frac{a^i}{F \rho^i \Delta_0^2} = 1. \quad (2.6)$$

Следует иметь в виду, что коэффициент  $B$  для стержня заданной длины и состава композиции является функцией волнового числа  $k_n$  и стремится к нулю с уменьшением длины волны (ростом  $k_n$ ). При малых значениях волнового числа  $k_n$  и "сильном" взаимодействии слоев стержня из композиционного материала уравнение (2.5) определяет один корень  $\Delta^2 = 1$ , которому соответствуют технические частоты:

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi \ell^2} \sqrt{\frac{a^i}{\rho^i F}}. \quad (2.7)$$

Частоты, вычисленные по формуле (2.7), мало отличаются от частот

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi \ell^2} \sqrt{\frac{E_3 I_1^*}{2\rho(1 - \nu_1 \nu_3) F}}, \quad (2.8)$$

полученных на основе «эффективных» модулей композиционного материала, где  $E_3$  – модуль упругости,  $I_1^* = \int_F y^2 dF$ . Если коэффициент  $B$  мал, что реализу-

ется при высоких частотах (порядка нескольких сот кГц) с малой длиной волны, уравнение (2.5) позволяет определить две различные собственные частоты

$$\begin{aligned} 2\Delta_{1*}^2 &= \Delta_1^2(C + D) + BD, \\ 2\Delta_{2*}^2 &= \Delta_1^2(D + C) + BC, \end{aligned} \quad (2.9)$$

в которых  $C = 1 + E$ ,  $D = 1 - E$ ,  $E = \sqrt{1 - 4(1 - \Delta_1^2)/B}$ .

Используя естественное условие  $\Delta_1^2 < 1 < \Delta_2^2$  легко показать, что подкоренное выражение в  $E$  при любых значениях параметра  $B$  положительно. Если волновое число  $k_n$  так велико, то корнями уравнения (2.5) являются величины  $\Delta_{1*}^2$ ,  $\Delta_{2*}^2$ , т.к. в этом случае  $\Omega_1^2 = 1$ ,  $E = 1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 0$ .

Параметры собственных частот  $\Delta_{1*}^2$ ,  $\Delta_{2*}^2$ , а также  $\Delta_1^2$  не совпадают с параметрами  $\Delta^2 = \frac{I_1}{F\Delta_0^2\rho^i}$  собственных частот двух стержней, изготовленных от-

дельно из материала матрицы и материала наполнителя. Тем самым устанавливается, что сплошность армированной среды, являющейся композицией двух твердых тел, обеспечивается указанным параметром. Физическое одновременное сосуществование двух форм колебаний в армированной среде при высоких частотах оправдано тем, что в колебательном движении находится каждый из компонентов композиции. Однако на его свободное колебание накладывается влияние окружающего его другого материала. Этот эффект оценивается выражениями (2.9). Выражения (2.9) позволяют управлять частотами с помощью параметра  $B$ . Из уравнения (2.4) устанавливается также соотношение ( $A_n$ ) амплитуд колебания матрицы и наполнителя.

Из-за ограниченности экспериментальных данных численные сравнения здесь приведены для стеклопластикового стержня прямоугольного сечения со следующими физическими и геометрическими характеристиками:

$$\lambda^n = 0.095 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \lambda^n = 0.0173 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu^n = 0.1775 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$\mu^n = 0.0074 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \rho^n = 2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho^n = 1230 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$v^n = 0.68, \quad v^n = 0.32, \quad \ell = 0.12 \text{ м}, \quad h = 0.003 \text{ м}, \quad b = 0.03 \text{ м}.$$

Результаты расчетов собственных колебаний первых трех изгибных форм колебаний, соответствующих малым значениям  $k_n$  волнового числа (большим  $B$ ), приведены в табл. 3.

Таблица 3. Значение расчетных и экспериментальных собственных частот волновых чисел

Частота, гц	1	2	3
Экспериментальная	122	770	2100
По формуле (2.7)	124	775	2170
По формуле (2.8)	125	795	220

Сравнение их показывает, что стержень данных размеров из материала слоя матрицы имеет наименьшую частоту, а из материала слоя наполнителя - наибольшую. Для высоких форм колебаний будут четче проявляться колебания с частотами  $\Delta_1^2$ ,  $\Delta_2^2$ , заключенные между частотами наполнителя  $\Delta_n^2$  и матрицы

$\Delta_m^2$ . Данный анализ позволяет путем выбора материала компонентов армированной слоистой среды управлять собственными частотами колебаний деталей без изменения их геометрических размеров и формы, что важно в технических приложениях.

Л и т е р а т у р а

1. Биценко К.Б., Граммель Р. Техническая динамика. - ГТТЛ, 1952, т. 2. – 220 с.
2. Ахенбах Дж.Д. Колебания и волны в направленно-армированных композитах// В кн. «Композиционные материалы». М.: Мир, 1978. – С. 354-4000 ил.
3. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1970.
4. Воробьев Ю.С., Шорр Б.Ф. Теория закрученных стержней. – Киев: Наук. Думка, 1983. – 188 с.
5. Биргер И.А. и др. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.
6. Биргер И.А. Строительная механика турбомашин: Диссертация на соиск. уч. степ. д.т.н. (01.02.04). – М., 1954. – 320 с.
7. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания: Т. 1-3. – М.: Машиностроение, 1968.
8. Риз П.М. Деформация стержней, закрученных и слабоизогнутых в ненапряженном состоянии. – Труды ЦАГИ, 1940, вып. 471. – 27 с.
9. Меерович И.И. Распределение напряжений в компрессорных лопатках при колебаниях. – М.: Оборонгиз, 1961.
10. Меерович И.И. Колебания прямоугольной плоской пластинки. – Динамика авиадвигателей. – Оборонгиз, 1961.
11. Гринберг С.М. Вариационный метод расчета частот и форм колебаний шарнирных лопаток//Сборник «Прочность и динамика авиационных двигателей». – М.: Машиностроение, 1965, вып. 2.
12. Sun S.T., Achenbach J.D. Tim-harmonic transverse and longitudinal motions of a laminated plate. Northwestern Univ. Struct. Mech. Lab. T.R. № 63-1. Evenston. Illinois, 1969.
13. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Изд. АН СССР, 1957. – 520 с.
14. Каримбаев Т.Д. Вариант теории армированных сред// Известия вузов. «Машиностроение», 1975. – №8.
15. Нурибетов А.У., Дудченко А.А. Деформация естественно-закрученных многослойных анизотропных лопаток авиационных двигателей // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. Москва: ФГУП «ВИМИ», 2015. – №2. – С. 46-54.
16. Нурибетов А.У. Техническая теория кручения композиционного слоистого стержня произвольного сечения // Известия Самарского научного центра РАН. – 2009. – Т. 11. – №5. – С. 94-101.
17. Меерович И.И. Колебания прямоугольной плоской пластины. – Динамика авиационных двигателей. – М.: Оборонгиз, 1952, вып.8. – С. 149-208.
18. Карташов Г.Г. Влияние различных факторов на вибрационные характеристики лопаток из композитов. – Механика композитных материалов, 1980, №6.
19. Soler A.J. Pretwisted Curved Beams of Thin-Walled Open Sectionon// J. of Applied Mechanics. – 1973. – Nu 3. – P. 779-785.

R e f e r e n c e s

1. Bisenko, K.B., Grammel, R. (1952). *Tehcnisheskay Dinamika*, GTTL, vol. 2, 220 p.
2. Achenbach, J.D. (1978). *Kolebaniya i volny v napravlenno-armirovannyh kompozitah*, V kn. *Kompozitziionnyye Materialy*, Moscow: Mir, pp.354-400.
3. Hronin, D.V. (1970). *Teoriya i Rastchet Kolebani v Dvigatelyah Letatel'nyh Apparatov*, Moscow: Mashinostroenie.
4. Vorobyov, Yu.S, Shorr, B.F. (1983). *Teoriya Zakruchennyh Sterzhnei*, Kiev: Nauk. Dumka, 188 p.
5. Birger, I.A., et al (1993). *Rasshot na Proshnost Detalei Mashin: Spravochnik*, Moscow: Mashinostroenie, 640 p.
6. Birger, I.A. (1954). *Stroitel'naya Mehanika Turbomashin*: Diss. DSc (01.02.04), Moscow, 320 p.
7. Birger, I.A., Panovko, Y.G. (1968). *Prochnost, Ustoichivost, Kolebaniya*, Moscow: Mashinostroenie, vol. 1-3.
8. Riz, P.M. (1940). *Deformaztiya sterzhnei, zakruchennyh i slaboizognutyh v nenapryazhonnom sostoyanii*, *Trudi TzAGI*, vyp. 471, 27 p.
9. Meerovish, I.I. (1961). *Raspredelenie Napryazhenij v Kompresornyh Lopatkah pri Kolebaniyah*, Moscow: Oborongiz.
10. Meerovish, I.I. (1961). *Kolebaniya pryamougol'noi ploskoi plastinki*, *Dinamika Aviadvigatellei*, Moscow: Oborongiz.

11. Grinberg, S.M. (1965). Variatzionniy metod raschota chastot I form kolebaniy sharnirnyh lopatok, Sbornik «Prochnost i Dinamika Aviatzionnyh Dvigateli», Moscow: Mashinostroenie, vyp. 2.
12. Sun, S.T., Achenbach, J.D. (1969). Tim-harmonic transverse and longitudinal motions of a laminated plate, Northwestern Univ. Struct. Mech. Lab. T.R., № 63-1, Evenston, Illinois.
13. Brehovskih, L.M. (1957). Volny v Sloistyh Sredah, Moscow: Izd. AN SSSR, 520 p.
14. Karimbayev, T.D. (1975). Variant teorii armirovannyh sred, Izvestiya vuzov «Mashinostroenie», №8.
15. Nurimbetov, A.U., Dudchenko, A. A. (2015). Deformatziya estestvenno-zakruchennyh mnogosloinyh anizotropnyh lopatok aviatzionnyh dvigatelei, *Oboronniy Kompleks – Naushno-Tehnicheskomu Progressu Rossii*, Moscow: FGUP «VIMI», №2, pp.46-54.
16. Nurimbetov, A.U. (2009). Tehnicheskaya teoriya krucheniya kompozitziionnogo sloistogo sterzhnya proizvol'nogo secheniya, *Izv. Samarskogo Naushnogo Tzentra RAN*, vol. 11, №5, pp. 94-101.
17. Meerovish, I.I. (1952). Kolebanya pryamougol'noy ploskoy plastiny, *Dinamika Aviatzionnyh Dvigateli*, Moscow: Oborongiz, vyp.8, pp.149-208.
18. Kartashov, G.G. (1980). Vliyanie razlichnyh faktorov na vibratziionnie harakteristiki lopatok iz kompozitov, *Mehanika Kompozitnyh Materialov*, №6.
19. Soler, A.J. (1973). Pretwisted Curved Beams of Thin-Walled Open Sections, *J. of Applied Mechanics*, 3, p. 779-785.

## THE NATURAL FREQUENCY OF THE COMPOSITE LAMINATED ROD

Karimbayev\* T.D., Nurimbetov\*\* A.U.

\* «CIAM». of P.I. Baranova ", Moscow, Russia

\*\*MAI (Moscow Aviation Institute (National Research University))

Oscillations in the multi-layer composite bodies are studied. Natural vibrations of a reinforced many-layered rod are researched. For determination of the characteristics of multi-layered rods and for clarify of the role of some of their parameters, a rod of the rectangular cross section and the most simple forms of vibrations were considered. The results of numerical calculations are compared with experimental data.

**KEYWORDS:** multi-layer composite, free vibrations.



## КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С УЧЁТОМ НЕЛОКАЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

Е.С. ШЕПИТЬКО, аспирант

Московский Государственный Университет Путей Сообщения (МИИТ)  
127994, г. Москва, ул. Образцова, д.9, стр. 9, e-mail: shepitko-es@mail.ru

Статья посвящена анализу влияния нелокального демпфирования материала на вынужденные колебания стержней, находящихся под действием периодической детерминированной и стохастической стационарной поперечной нагрузки. Исследуется связь параметров нелокального демпфирования с характеристиками колебательного процесса стержней. Для решения задачи используется метод Бубнова-Галеркина.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** колебания стержней, нелокальное демпфирование, метод Бубнова-Галеркина, детерминированная периодическая нагрузка, стохастическая нагрузка

### 1. Введение

Многие строительные конструкции подвержены динамическим воздействиям, к которым можно отнести нагрузки от движущегося транспорта и пешеходов, ветровые нагрузки, сейсмические воздействия и др. При расчете конструкций на динамические воздействия необходимо учитывать, что энергия колебаний постепенно рассеивается за счет внешнего и внутреннего трения, в результате чего происходит затухание колебаний.

Демпфирование в некоторой точке стержня с координатой  $x_1$ , отсчитываемой вдоль его оси, очевидно, зависит не только от локального значения скорости движения в той же точке  $v(x_1)$ , но и от значения скорости в соседних точках, причем степень их влияния друг на друга считается тем меньше, чем больше расстояние между ними.

Н.Т. Banks and D.J. Inman [1] рассмотрели механизм демпфирования в композитных материалах на примере консольной балки с сосредоточенной массой на свободном конце. В этой работе экспериментально исследуются четыре модели демпфирования: модель вязкого трения, частотно-независимая модель внутреннего трения, временной гистерезис и пространственный гистерезис. Результаты динамических испытаний в сочетании с приближенной моделью используются для формирования и решения поставленной задачи методом наименьших квадратов. Полученные в результате эмпирические значения коэффициентов демпфирования сравниваются с коэффициентами, полученными путем математического моделирования. В 1992 г. D.L. Russell [3] предложил модель нелокального демпфирования для динамического анализа композитной балки. Lei, Friswell и Adhikari в статье [2] рассматривают использование модели нелокального демпфирования с учетом эффекта пространственного и временного гистерезиса для динамического анализа конструкций, состоящих из балок и тонких пластин. В отличие от обычной локальной модели, демпфирующие силы вычисляются как среднее от поля скоростей в пространстве, определяемом ядровой функцией. Результирующее уравнение движения для балок и пластин представляет собой интегрально-дифференциальное уравнение в частных производных, тогда как для локальной модели используется дифференциальное уравнение в частных производных. Приближенные решения задачи о собственных значениях и формах собственных колебаний с учетом нелокального демпфирования получены методом Бубнова-Галеркина. В работе [6] исследуется влияние нелокального демпфирования материала на устойчивость стержня, находящегося под действием продольной силы, детерминированной или меняющейся во времени случайным образом.

В настоящей работе решается задача о вынужденных колебаниях стержней с учетом нелокального демпфирования материала с использованием модели, предложенной в работе [2]. Приводится численное решение и изучается влияние характеристик нелокального демпфирования на динамическое поведение стержня при действии периодической детерминированной и стационарной стохастической поперечной нагрузки.

## 2. Постановка задачи

Часто для описания процесса демпфирования колебаний стержней используется гипотеза Фойгта:

$$\sigma = E\varepsilon + \gamma E \dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  - нормальное напряжение и относительная осевая деформация,  $\dot{\varepsilon}$  - скорость изменения деформации,  $E$  - модуль Юнга,  $\gamma$  - коэффициент демпфирования. Здесь и далее точкой обозначена производная по времени  $t$ .

При учете нелокального демпфирования вместо выражения (1) используется соотношение [2]:

$$\sigma(x, t) = E[\varepsilon(x, t) + \gamma \int_0^1 C_v(|x - \theta|) \dot{\varepsilon}(\theta, t) d\theta]. \quad (2)$$

Здесь  $C_v(|x - \theta|)$  - ядро оператора, характеризующего внутреннее демпфирование. Функция  $C_v(|x - \theta|)$  удовлетворяет условиям нормирования, то есть:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_v(|x - \theta|) d\theta = 1. \quad (3)$$

В работе [2] рассматриваются четыре различных варианта ядра:

в виде экспоненциальной функции:

$$C_v(|x - \theta|) = \frac{\mu}{2} \cdot e^{-\mu|x-\theta|}, \quad (4)$$

в виде функции ошибок:

$$C_v(|x - \theta|) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\mu^2(x-\theta)^2}{2}},$$

в виде прямоугольника:

$$C_v(|x - \theta|) = \begin{cases} \frac{1}{l_0}, & \text{при } |x - \theta| \leq l_0/2 \\ 0, & \text{при других значениях } |x - \theta| \end{cases}$$

в виде треугольника:

$$C_v(|x - \theta|) = \begin{cases} \frac{1}{l_0}, & \text{при } (1 - \frac{|x-\theta|}{l_0}) \leq l_0 \\ 0, & \text{при других значениях } |x - \theta| \end{cases}$$

Здесь  $\mu$  и  $l_0$  – параметры, характеризующие масштаб нелокальности демпфирования материала,  $x$ ,  $\theta$  – координаты, отсчитываемые вдоль оси стержня.

В данной работе в качестве функции  $C_v(|x - \theta|)$  используется экспоненциальное ядро (4).

Уравнение равновесия для элементарного участка стержня имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - q(x,t), \quad (5)$$

причем  $w(x,t)$  – прогиб стержня,  $m$  – погонная масса стержня,  $q(x,t)$  – интенсивность погонной нагрузки.

Используя гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли) получим выражение для изгибающего момента:

$$M(x,t) = EI[\partial^2 w(x,t)/\partial x^2 + \gamma \int_0^1 C_v(|x - \theta|) \partial^3 w(\theta,t)/\partial \theta^2 \partial t d\theta], \quad (6)$$

где  $EI$  – изгибная жесткость стержня.

Подставляя в левую часть соотношения (5) выражение второй производной по  $x$  от момента  $M(x,t)$ , приходим к уравнению относительно функции прогиба  $w(x,t)$ :

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \left[ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^1 C_v(|x - \theta|) \frac{\partial^3 w(\theta,t)}{\partial \theta^2 \partial t} \right] = \frac{q(x,t)}{m}. \quad (7)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям при  $x = 0$  и  $x = l$ . Функцию  $w(x,t)$  будем искать в виде разложения по формам собственных колебаний упругого стержня:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) V_i(x). \quad (8)$$

Здесь  $f_i(t)$  – обобщенные перемещения, а  $V_i(x)$  – базисные функции.

Для определения обобщенных перемещений  $f_i(t)$  воспользуемся методом Бубнова-Галеркина. В результате получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{f}_j(\tau) + k_j^4 \left( \frac{EI}{m} \right) f_j(\tau) + \gamma \frac{EI}{m a_j} \sum_{i=1}^n \dot{f}_i(\tau) \int_0^1 V_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^1 C_v(|x - \theta|) V_i(x) dx d\theta = \frac{1}{m a_j} \sum_0^n V_j(x) q(x,t) dx, \quad (9)$$

где  $k_j^4 = m \omega_j^2 / EI$ ,  $\omega_j$  – частота собственных колебаний стержня [14], а

$$a_j = \int_0^1 V_j^2(x) dx.$$

### 1. Численные примеры

Далее рассмотрим стальной стержень длиной 10 м и жесткостью  $9,82 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{м}^2$  заземленный по концам. Тогда граничные условия на обоих его концах записываются следующим образом:

$$w = \partial w / \partial x = 0. \quad (10)$$

Базисные функции имеют вид [7]:

$$V_i(x) = (\operatorname{sh}k_i l - \operatorname{sink}_i l)(\operatorname{ch}k_i x - \operatorname{cos}k_i x) - (\operatorname{ch}k_i l - \operatorname{cos}k_i l)(\operatorname{sh}k_i x - \operatorname{sink}_i x), \quad (11)$$

$k_i$  вычисляется как  $i$ -ый корень характеристического уравнения

$$\operatorname{ch}(kx)\operatorname{cos}(kx) = 1.$$

Чтобы несколько упростить процесс вычислений, избавимся от второй производной в третьем слагаемом в уравнении (9). Для этого воспользуемся интегрированием по частям. Тогда соотношение (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \ddot{f}_j(\tau) + \left(\frac{k_j}{k_1}\right)^4 f_j(\tau) + \\ & \frac{2\epsilon}{a_j k_1^4 l^4} \sum_{i=1}^m \int_0^1 V_j''(x) \int_0^1 \frac{\mu l}{2} e^{-\mu|z-y|} V_i''(\theta) dy dz \dot{f}_j(\tau) = \\ & \frac{l^4}{k_1^4 a_j} \int_0^1 \frac{q(y, \tau)}{EI} V_j(y) dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $z$  и  $y$  – безразмерные координаты -  $z = x/l$ ,  $y = \theta/l$ ,  $\tau$  – безразмерное время  $\tau = \omega_1 t$ ,  $\omega_1^2 = \frac{Elk_1^4}{m}$ ,  $2\epsilon = \gamma\omega_1$ ,  $\omega_1$  – минимальная частота собственных колебаний стержня.

В результате решения системы дифференциальных уравнений (12) определяются значения функций  $f_i(t)$ , а с использованием выражения (8) и прогиба стержня.

### 3.1. Колебания стержня под действием постоянной нагрузки

Сначала необходимо установить минимальное число слагаемых в разложении прогиба  $w(x,t)$ , которые необходимо учесть для достижения достаточной точности результатов. Для этого рассмотрим балку, нагруженную постоянной равномерно распределенной нагрузкой  $q = 1000$  т.

Из табл. 1 видно, что значения прогибов в середине стержня, которые соответствуют учету соответственно первых пяти и семи форм собственных колебаний полностью совпадают. Поэтому в дальнейших расчетах используются первые 5 форм собственных колебаний стержня.

Таблица 1 – Величины прогибов в середине стержня при учёте разного количества форм собственных колебаний

Количество форм	Величина прогиба в середине стержня, м
1	-0.0268
3	-0,0264
5	-0,0265
7	-0,0265

### 3.2. Колебания стержня под действием периодической нагрузки

Учет нелокального демпфирования в модели осуществляется при помощи масштаба влияния (параметра  $\mu$ ). Чем больше значение  $\mu$ , тем ближе рассматриваемая модель к традиционной фойгтовской модели затухания колебаний. Рассмотрим поведение стержня, нагруженного периодической нагрузкой, изменяющейся по синусоидальному закону:

$$q = A \cdot \sin(\omega t), \quad (13)$$

где  $A$  – амплитуда изменения вынуждающей силы,  $\omega$  – ее частота,  $t$  – время.

Процесс моделируется при различных значениях параметра  $\mu$ . На рис.1 изображен процесс изменения прогиба в середине стержня во времени при  $\mu = 0,2$ .

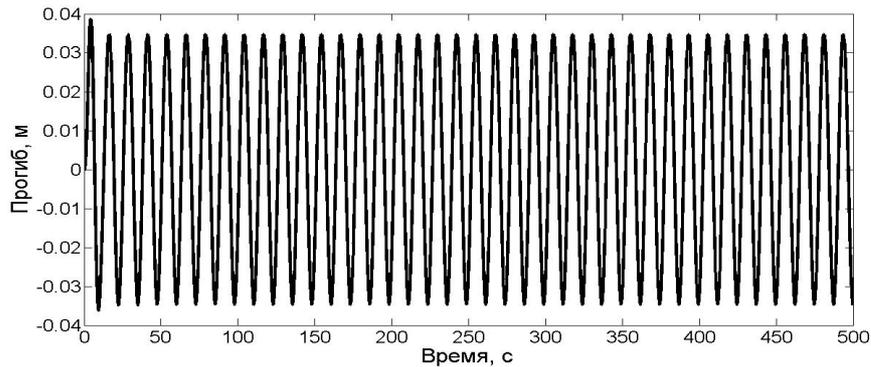


Рис. 1. Изменение прогиба в середине стержня под действием периодической нагрузки во времени при  $\mu = 0,2$  1/м;

Для сравнения результатов, полученных при различных значениях  $\mu$ , амплитуды прогибов в середине стержня приведены в табл. 2.

Таблица 2. Амплитуды прогибов в середине стержня при различных значениях параметра  $\mu$

$\mu$ , 1/м	Амплитуда прогиба в середине стержня, м
0.2	0,0386
0.5	0,0283
1	0,0215

Из табл. 2 видно, что с увеличением параметра  $\mu$  уменьшается амплитуда колебаний. Наименьшая амплитуда наблюдается при использовании классической модели Фойгта.

### 3.3. Колебания стержня под нагрузкой, представляющей собой случайный стационарный процесс.

Рассмотрим, как влияет учет нелокального демпфирования на характеристики колебательного процесса под действием равномерно распределенной нагрузки, представляющей собой случайный стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью:

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2 \cdot \delta(\delta^2 + \theta^2)}{\pi[(\omega^2 - \theta^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega^2]} \quad (14)$$

Здесь  $\sigma^2$  – дисперсия случайного процесса,  $\delta$  и  $\theta$  параметры, характеризующие масштаб корреляции и частоту скрытой периодичности изменения нагрузки.

Для моделирования случайного стационарного процесса воспользуемся методом канонических разложений [4], для чего случайную функцию представим в виде:

$$q(t) = \sum_{k=0}^n (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t). \quad (15)$$

Здесь  $U_k, V_k$  – некоррелированные случайные величины, распределённые по нормальному закону, с математическими ожиданиями равными нулю и дисперсиями одинаковыми для каждой пары случайных величин с одинаковыми индексами  $k$ . Для вычисления этих дисперсий на оси  $\omega$  выделяем участок общей длиной  $2L$ , так что начало координат находится посередине этого участка. При  $|\omega| > L$  спектральную плотность можно считать равной нулю. Весь выбранный отрезок разбиваем на равные участки длиной  $\Delta\omega$ . Тогда дисперсия случайных величин  $U_k, V_k$  вычисляется по формуле:

$$D_k = 2S(\omega_k) \cdot \Delta\omega, \quad (16)$$

Нагрузка, смоделированная как случайный стационарный процесс, является постоянной по всей длине стержня в каждый отдельный момент времени и представляет собой гауссовский процесс. Корреляционная функция для нагрузки, построенная по четырёмстам реализациям случайного процесса, представлена на рис. 2. Сплошной линией изображена корреляционная функция, полученная теоретически, она определяется по формуле:

$$K(\tau_1 - \tau_2) = \sigma^2 e^{-\delta|\tau_1 - \tau_2|} \left[ \cos\theta(\tau_1 - \tau_2) + \frac{\delta}{\theta} \sin\theta(\tau_1 - \tau_2) \right]. \quad (17)$$

Пунктирной линией изображена корреляционная функция, вычисленная из данных, полученных при моделировании случайного процесса.

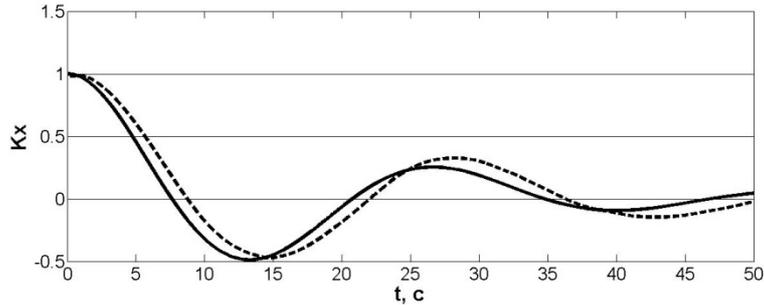


Рис. 2. Корреляционная функция нагрузки, представленной как случайный стационарный процесс

Десять реализаций процесса колебаний стержня под действием нагрузки, смоделированной таким образом, представлены на рис. 3. Жирной линией показано математическое ожидание случайного процесса.

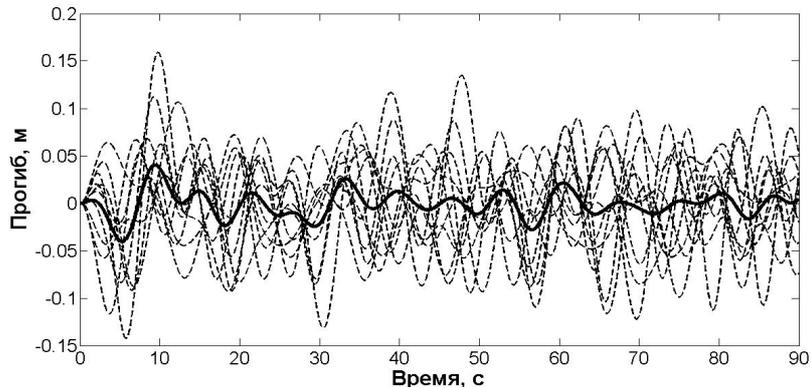


Рис. 3. Реализации случайного стационарного процесса колебаний стержня при характеристиках спектральной плотности:  $\delta l = 0.05$  и  $\theta l = 0.25$ .

Нормированная корреляционная функция для нагрузки представлена на рис. 4.

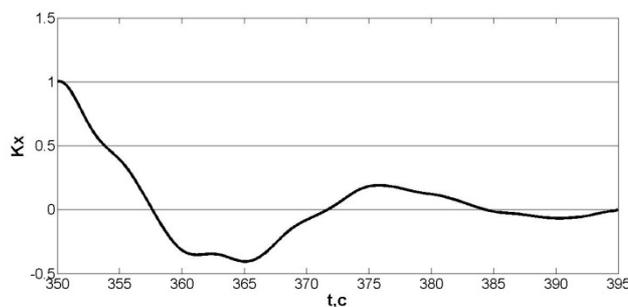


Рис. 4. Нормированная корреляционная функция прогиба

Для наглядности результаты, полученные при моделировании колебательного процесса при различных значениях параметра  $\mu$ , представлены в форме гистограмм и приведены на рисунке 5. Математические ожидания для обеих гистограмм равны нулю, а дисперсии составляют  $0,0021 \text{ м}^2$  для гистограммы, полученной при  $\mu = 0,2$ , и  $0,0008 \text{ м}^2$  – при  $\mu = 1$ .

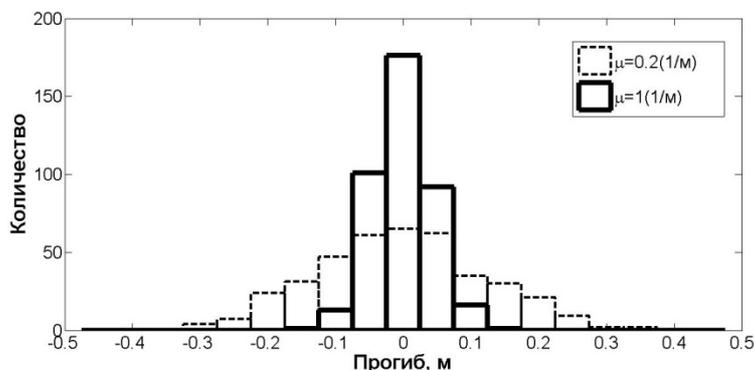


Рис. 5. Гистограммы прогибов стержня

приближению модели демпфирования к классической модели Фойгта, происходит уменьшение размаха колебаний.

#### 4. Заключение

В статье проведен анализ влияния нелокального демпфирования материала стержня, находящегося под действием детерминированной периодической и стохастической стационарной нагрузки, на характеристики колебательного процесса. Разработана компьютерная модель стержня с учетом нелокального демпфирования, определено количество форм собственных колебаний, необходимых для достижения требуемой точности расчета.

#### Л и т е р а т у р а

1. Banks, H.T., Inman, D.J. On damping mechanisms in beams// Journal of Applied Mechanics, 1991, 58 (3), 716–723.
2. Lei Y., Friswell, M. I., Adhikari S. A Galerkin method for distributed systems with non-local damping// Int. Journal of Solids and Structures. 2006, V. 43, pp. 3381 - 3400.
3. Russell, D.L. On mathematical models for the elastic beam with frequency-proportional damping. In: Banks, H.T. (Ed.)// Control and Estimation in Distributed Parameter Systems. SIAM, Philadelphia, PA, 1992, pp. 125–169.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1999.-576 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. – 2-е изд. исправленное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
6. Потапов В.Д. Устойчивость стержней при стохастическом нагружении с учетом нелокального демпфирования// Проблемы машиностроения и теории надежности, 2012, 4, с. 25-31.
7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

#### References

1. Banks, H.T., Inman, D.J. (1991). On damping mechanisms in beams, *Journal of Applied Mechanics*, 58 (3), 716–723.
2. Lei, Y., Friswell, M.I., Adhikari, S.A. (2006). Galerkin method for distributed systems with non-local damping, *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3381 - 3400.
3. Russell, D.L. (1992). On mathematical models for the elastic beam with frequency-proportional damping, In: Banks, H.T. (Ed.), *Control and Estimation in Distributed Parameter Systems*, SIAM, Philadelphia, PA, pp. 125–169.
4. Ventsel, E.S. (1999). *Probability Theory*, Moscow: Vysshaya shkola, 576 p.
5. Kalitkin, N.N. (2011). *Numerical Methods*, 2<sup>nd</sup> edition, corrected, SPb.: BHV-Peterburg, 592 p.

6. Potapov, V.D. (2012). Stability of rods under stochastic loading considering nonlocal damping, *Problems of Machinery and Reliability*, 4, pp. 25-31.
7. Filippov, A.P. (1970). *Dynamics of Deformable Systems*, Moscow: Mashinostroyenie, 734 p.

## ROD VIBRATIONS CONSIDERING NON-LOCAL DAMPING

E.S. Shepitko

In this paper, an impact made by non-local damping on rod vibrations under the periodic and stochastic load is considered. The relationship between the non-local damping characteristics and the dynamic behavior of the rod is analyzed. The solution is obtained using the Galerkin method.

KEY WORDS: rod vibration, non-local damping, a Galerkin method, deterministic periodic load, stochastic load.



## Механика жидкости

### ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОГО РЕЖИМА ТИХОГО ОКЕАНА НА ОСАДКИ В ГИДРОГРАФИЧЕСКОЙ ДЕМАРКАЦИИ МАНАБИ (ЭКВАДОР)

А.Ф. КАМПОС СЕДЕНЬО (Эквадор), аспирант\*

Е.К. СЕНИЧЕНКО, канд. тех. наук, доцент\*

И.И. ГРИЦУК, канд. тех. наук, доцент\*\*

\*Российский университет дружбы народов,  
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

\*\*Институт водных проблем РАН, ул. Губкина, 3, Москва, Россия, 119333

В статье излагаются результаты анализа влияния термического режима Тихого океана на объемы выпадения осадков в гидрографической демаркации Манаби (Эквадор) за 51 годовой период, который показал, что изменение количества осадков не зависит от температуры воздуха на территории демаркации, а зависит от температуры воды Тихого океана.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: объем осадков, термический режим, явление Эль-Ниньо.

Для исследования и анализа использовались следующие данные:

- объем месячных осадков 34-х метеорологических станций гидрографической демаркации Манаби, за период 1963 – 2013гг. [4];
- среднемесячные температуры воздуха 14-х метеорологических станций гидрографической демаркации Манаби, за период 1990 – 2010гг. [3];
- суточные температуры воды Тихого океана, станции Манта (Океанографический институт военно-морского флота Эквадора (ИНОКАР-INOСАР)) [5].

Гидрографическая демаркация Манаби располагающаяся в районе «Коста», характеризуется постоянством осадков, неравномерно распределённых в течение года. Основные дождливые месяцы: декабрь - апрель, а иногда и май, которые в Эквадоре называют «зимой».

Неравномерность распределения осадков происходит из-за влияния океанских течений Гумбольдта в дождливый период и Эль-Ниньо, в засушливый период [1]. Течение Гумбольдта – холодное поверхностное течение в Тихом океане, представляющее собой ветвь Антарктического циркумполярного течения с юга на север, вдоль западных берегов Эквадора, Перу и Чили.

Эль-Ниньо, имеющее также название *Южная осцилляция* – природное явление, связанное с повышением температуры поверхностного слоя воды в эква-

ториальной части Тихого океана и имеющее заметное воздействие на климат из-за увеличения испарения [2].

Анализ годового распределения средних значений месячных осадков показывает, что 89.88% всех осадков концентрируются в дождливый сезон, а оставшиеся 10.12% – в засушливый сезон (таблица 1).

Таблица 1. Распределение осадков демаркации Манаби

Месяц	Средне- многолет- ние осадки, мм	Месячное рас- пределение, %	Распределение по сезонам		
			сезон	Осадки, мм	Распределение, %
Декабрь	50,92	4,99	дожд- ливый	917,39	89,88
Январь	166,51	16,31			
Февраль	223,35	21,88			
Март	229,75	22,51			
Апрель	171,51	16,80			
Май	75,35	7,38	засуш- ливый	103,23	10,12
Июнь	32,96	3,23			
Июль	16,91	1,66			
Август	9,77	0,96			
Сентябрь	13,37	1,31			
Октябрь	13,12	1,29			
Ноябрь	17,10	1,68			
ИТОГ	1 020,62	100,00		1 020,62	100,00

Данная неравномерность зависит не от изменения температуры воздуха над территорией Эквадора, а зависит от термического режима воды Тихого океана. Выпадение осадков происходит, когда температура морской воды превышает 25,7°С (рисунок 1).



Рис. 1. Годовой термический режим Тихого океана

Недостаточно изученное, но катастрофическое природное явление, воздействующее на нормальный климатический режим гидрографической демаркации Манаби и других побережных районов, по объему и периоду выпадения осадков – это явление Эль-Ниньо, возникающее при постоянной повышенной температуре морской воды (выше 25,7°С) в течение года. При этом явлении отсутствует засушливый сезон, а количество осадков в 5 – 6 раз превышает норму.

По историческим данным, с 1790 года до настоящего времени, были 7 случаев такого явления: 1790-1793, 1828, 1876-1878, 1891, 1925-1926, 1982-1983 и 1997-1998гг. Построены 2 гистограммы для анализа распределения осадков, с учетом (рисунок 2) и без учета явления Эль-Ниньо (рисунок 3). При этом наблюдения разделены на 3 временных периода по 17 лет.

#### Заключение

1. В 1983, 1997 и 1998 годах (рисунок 2) наблюдалось увеличение осадков по сравнению с другими годами в связи с возникновением явления Эль-Ниньо. Сравнение рассчитанных аккумулярованных дождевых осадков по периодам 17

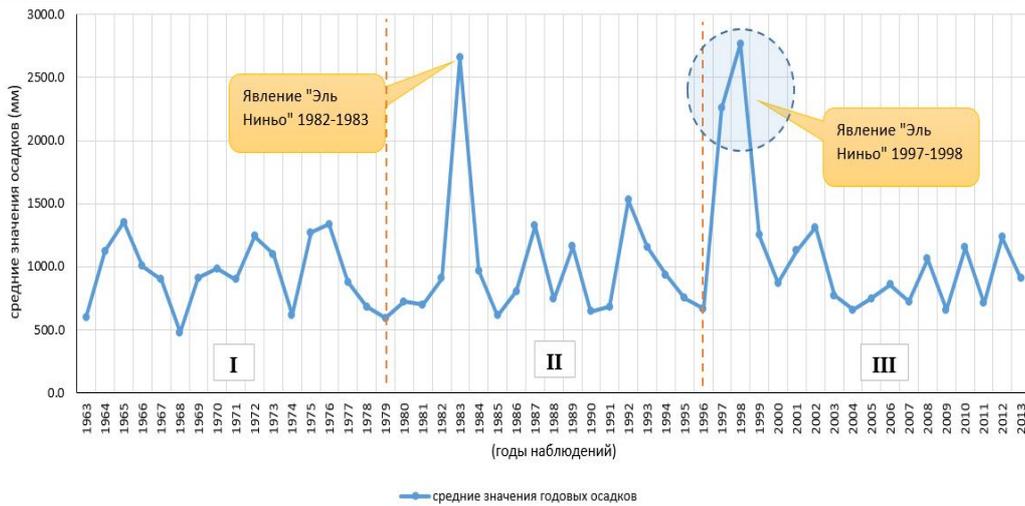


Рис. 2. Гистограмма средних значений годовых осадков гидрографической демаркации Манаби включая явление Эль-Ниньо

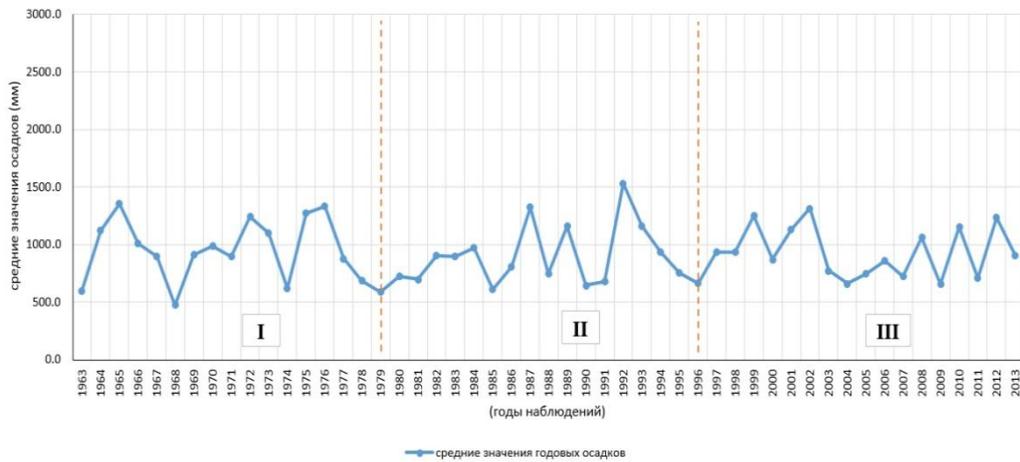


Рис. 3. Гистограмма средних значений осадков гидрографической демаркации Манаби исключая явление Эль-Ниньо



Рис. 4. Гистограмма аккумулярованных осадков, исключая явление Эль-Ниньо

лет показало, что происходит увеличение осадков на 6,9% во II периоде и на 19,4% в III периоде по сравнению с I, за счёт явления Эль-Ниньо, но при этом среднегодовая температура территории практически не изменялась. Разница между максимальным и минимальным значениями составляла 1.6 °С.

2. Сценарий, исключая явление Эль-Ниньо, с заменой действительных данных средними арифметическими значениями оставшихся лет соответствующих периодов, показывает:

- колебания изменения средних значений годовых осадков имеют однородный характер (рисунок 3);
- аккумулярованные осадки периодов II и III по сравнению с периодом I уменьшаются на 0,22 и 0,35% соответственно (рисунок 4);

3. При естественных климатических условиях, в течение рассматриваемого периода (51 год), изменение количества осадков не зависит от температуры воздуха на территории Эквадора, а зависит от температуры воды Тихого океана и просматривается тенденция понижения общего количества дождевых осадков.

#### Литература

1. Кампос Седеньо А. Ф., Синиченко Е. К., Грицук И. И. Особенности водного режима рек провинции Манаби (Эквадор) – ВЕСТНИК № 4 - Российский университет дружбы народов. – 2014. – С. 41-46.
2. Энциклопедия, В.С. Эль-Ниньо [Электронный ресурс] / Энциклопедия, В.-С. – 2016. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Эль-Ниньо>.
3. Instituto Nacional de Hidrología y Meteorología. Anuarios Meteorológicos [Электронный ресурс] / Instituto Nacional de Hidrología y Meteorología. – 2015. – Режим доступа: <http://186.42.174.231/index.php/clima/anuarios-meteorologicos>.
4. Instituto Nacional de Meteorología e Hidrología del Ecuador. Hidrología y meteorología [Электронный ресурс] / Instituto Nacional de Meteorología e Hidrología del Ecuador. – 2015. – Режим доступа: <http://www.serviciometeorologico.gob.ec/>.
5. Instituto Oceanográfico de la Armada (INOCAR). Temperatura superficial del mar [Электронный ресурс] / Instituto Oceanográfico de la Armada (INOCAR). – 2016. – Режим доступа: <http://www.inocar.mil.ec/web/index.php/temperatura-superficial-del-mar>.

#### References

1. Campos Sedeño A. F., Sinichenko, E. K., Gritsuk, I. I. (2014). Features of the water mode of the rivers of the province Manabi (Ecuador), *Vestnik No 4*, the RUDN University, pp. 41-46.
2. *The Encyclopedia, V.-S. of El Niño* [An electronic resource], pedia, 2016, Access mode: <https://ru.wikipedia.org/wiki/El-Niño>.
3. *National Institute of Hydrology and Meteorology. Meteorological yearbooks* [An electronic resource], National Institute of Hydrology and Meteorology, 2015, Access mode: <http://186.42.174.231/index.php/clima/anuarios-meteorologicos>.
4. *National institute of Meteorology and Hydrology of the Ecuador. Hydrology and Meteorology* [An electronic resource], National Institute of Meteorology and Hydrology of the Ecuador, 2015, Access mode: <http://www.serviciometeorologico.gob.ec/>.
5. *Institute Oceanográfico of the Navy (INOCAR). Superficial temperature of the sea* [An electronic resource], Institute Oceanográfico of the Navy (INOCAR), 2016, Access mode: <http://www.inocar.mil.ec/web/index.php/temperatura-superficial-del-mar>.

### INFLUENCE OF THE THERMAL MODE OF THE PACIFIC OCEAN ON RAINFALL IN HYDROGRAPHIC DEMARCATION OF THE MANABA (ECUADOR)

Campos Cedeno Antonio Fermin\*, Sinichenko E. K.\*, Gritsuk I. I. \*\*

\*Peoples' Friendship University of Russia

\*\*Water Problems Institute of Russian Academy of Science

In the article, results of the analysis of influence of the thermal mode of the Pacific Ocean on volumes of loss of rainfall in hydrographic demarcation of Manabi (Ecuador) for 51 annual periods which have shown that change of an amount of precipitation doesn't depend on air temperature in the territory of demarcation are stated, and depends on the water temperature of the Pacific Ocean.

KEY WORDS: volume of rainfall, thermal mode, phenomenon of El Niño.

## РАСЧЕТ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ДЛЯ СЛОЖНОЙ СХЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ НЕСКОЛЬКО КОЛЕЦ

Ф.В. РЕКАЧ, канд. техн. наук, доцент  
 Российский университет дружбы народов,  
 117198, Москва, ГСП – 6, ул. Миклухо-Маклая, 6

В статье проводится расчет параметров неустановившегося движения жидкости для сложной схемы, содержащей несколько круговых колец. Автор статьи поставил задачу провести расчеты протяженной гидравлической схемы с наличием нескольких круговых колец, включенных в геометрию схемы с различными диаметрами трубопроводов, с заданными приблизительными расходами потребителей, со многими точками отвления трубопроводов. Тепловая схема города Нижнего Новгород принята в укрупненном виде.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** стабилизатор давления, неустановившееся движение жидкости, трубопровод, насосная станция, тепловая схема.

На рис. 1 изображена схема городской сети, которая представляет собой две параллельно идущие ветви трубопровода (на рисунке – одна) прямой нагревающей от ТЭЦ и обратно. Гидравлическая система оснащена подающей насосной станцией и подстанцией подкачки, состоящими из нескольких насосных агрегатов каждая. Подающая насосная станция нагнетает нагретую жидкость в коллектор системы и работает в закольцованном режиме, то есть охлажденная вода поступает в ТЭЦ, нагревается и движется к насосной станции без каких – либо дополнительных резервуаров. В центре схемы расположена подстанция подкачки, поднимающая давление в обратной (охлажденной) ветви трубопровода. В качестве потребителей,

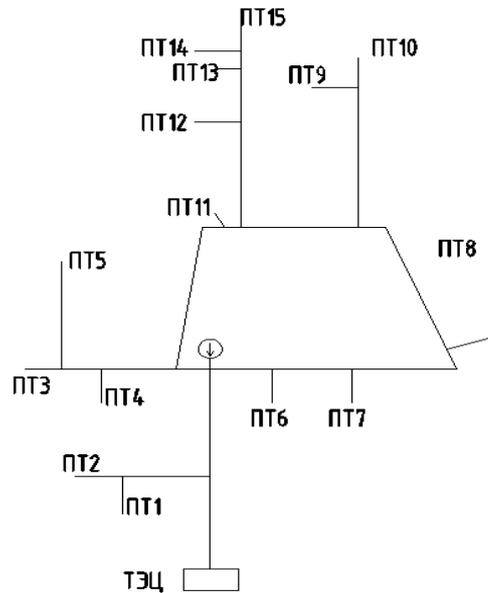


Рис. 1. Нижний Новгород. Схема теплосети

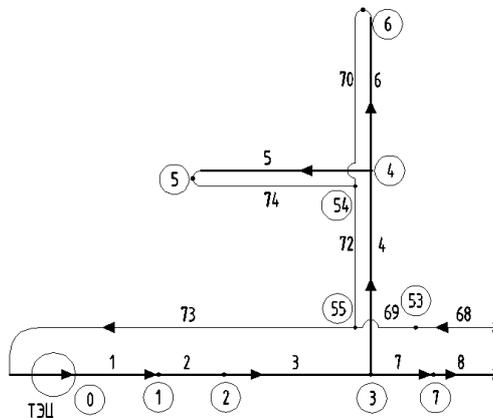


Рис. 2

обозначаемых ПТ1, ПТ2, ПТ3, ... выступают отдельные районы города, группы крупных административных или развлекательных учреждений, а также медицинские и парковые комплексы. На рис. 2 - 4 показаны укрупненные участки гидравлической схемы теплоснабжения города. В кружках указаны номера узлов системы, цифра без кружка означает номер элемента трубопровода, стрелками показано направление дви-

жения жидкости. На схеме 1 указаны геометрические и физические характеристики системы.

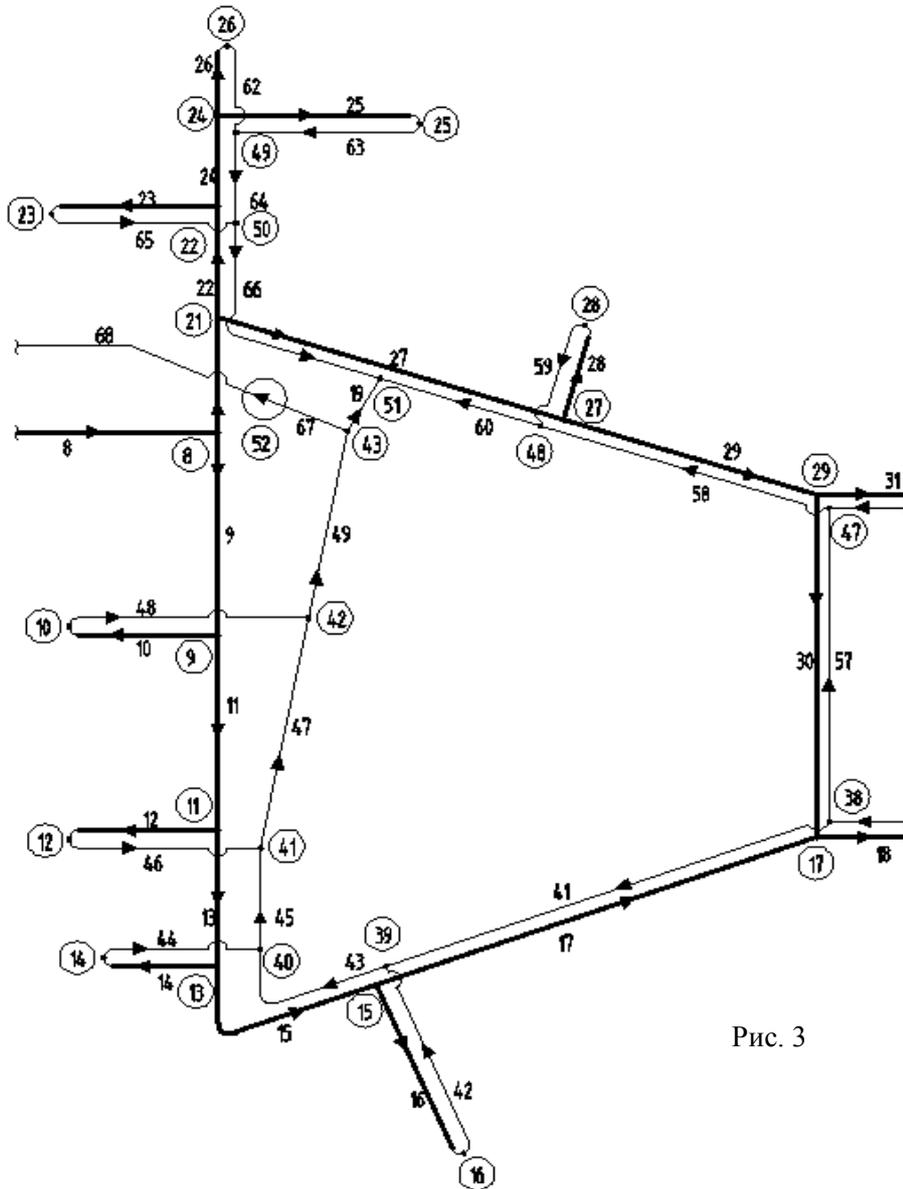


Рис. 3

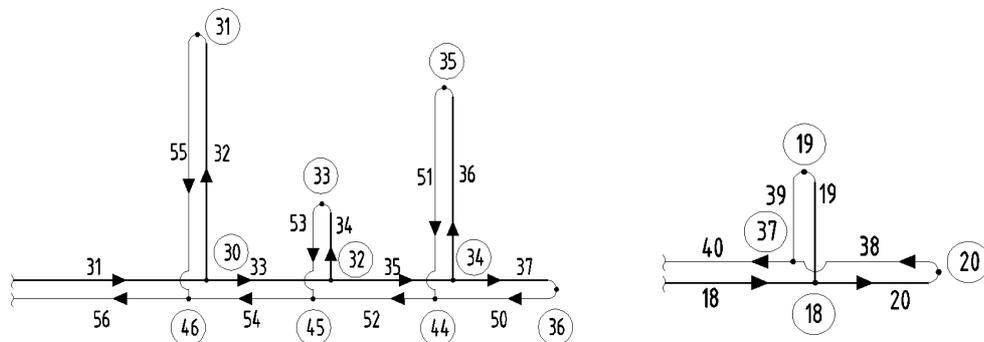


Рис. 4

Гидравлическая система разбита на 73 элемента, имеющего длину, диаметр трубы, гидравлическое сопротивление. Все элементы объединены в 56 узлов.

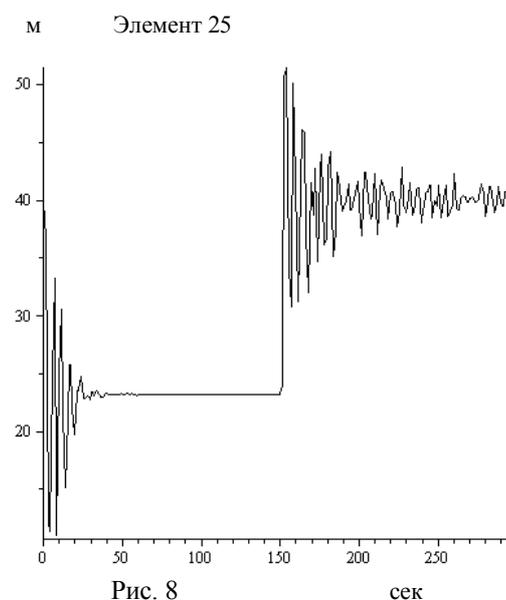
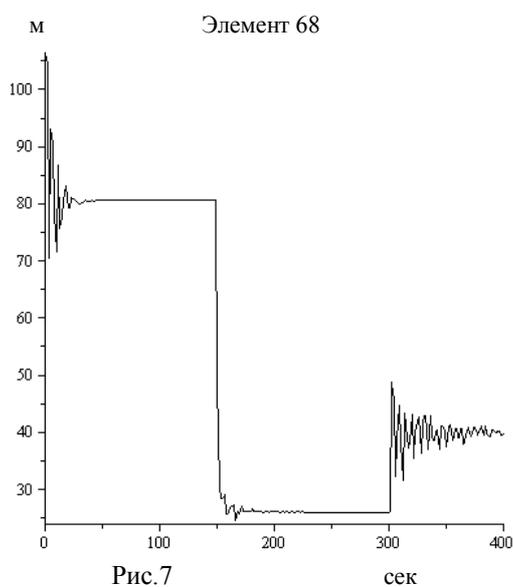
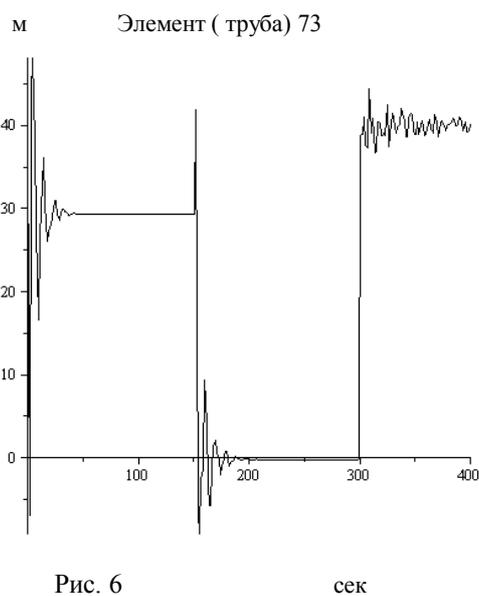
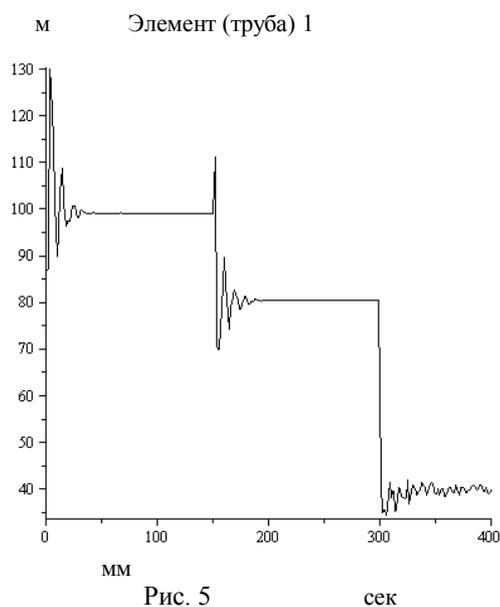
Минимальная длина ( $dX$ ) принята во всех расчетах 10 метров, скорость распространения волн повышенного давления  $c = 1000$  м/с, гидравлическое сопротивление труб в среднем принято 0.12.

Схема 1

№ эл-та	№ начала узла эл-та	№ конца узла эл-та	Длина эл-та, м	Диаметр труб, м	№ эл-та	№ начала узла эл-та	№ конца узла эл-та	Длина эл-та, м	Диаметр труб, м
1	0	1	112	0.7	37	34	36	145	0.2
2	1	2	291	0.7	38	20	37	82	0.4
3	2	3	828	0.7	39	19	37	192	0.2
4	3	4	319	0.3	40	37	38	400	0.4
5	4	5	591	0.3	41	38	39	422	0.4
6	4	6	250	0.3	42	16	39	556	0.4
7	3	7	1165	0.7	43	39	40	117	0.5
8	7	8	10	0.5	44	14	40	25	0.25
9	8	9	613	0.5	45	40	41	289	0.5
10	9	10	107	0.3	46	12	41	161	0.25
11	9	11	422	0.5	47	41	42	422	0.5
12	11	12	161	0.25	48	10	42	107	0.3
13	11	13	289	0.5	49	42	43	613	0.5
14	13	14	25	0.25	50	36	44	145	0.2
15	13	15	117	0.5	51	35	44	285	0.25
16	15	16	556	0.4	52	44	45	37	0.4
17	15	17	422	0.4	53	33	45	11	0.2
18	17	18	400	0.4	54	45	46	200	0.4
19	18	19	192	0.2	55	31	46	259	0.3
20	18	20	82	0.4	56	46	47	348	0.4
21	8	21	100	0.6	57	38	47	185	0.4
22	21	22	240	0.5	58	47	48	67	0.4
23	22	23	240	0.5	59	28	48	86	0.2
24	22	24	143	0.5	60	48	51	1100	0.4
25	24	25	651	0.3	61	51	43	10	0.6
26	24	26	485	0.5	62	26	49	485	0.5
27	21	27	1100	0.4	63	25	49	651	0.3
28	27	28	82	0.2	64	49	50	143	0.5
29	27	29	67	0.4	65	23	50	209	0.25
30	29	17	185	0.4	66	50	51	240	0.5
31	29	30	348	0.4	67	43	52	10	0.7
32	30	31	259	0.3	68	52	53	10	0.5
33	30	32	200	0.4	69	53	55	1165	0.7
34	32	33	11	0.2	70	6	54	250	0.3
35	32	34	37	0.4	71	5	54	591	0.3
36	34	35	285	0.25	72	54	55	319	0.3
					73	55	0	828	0.7

В техническом задании также указывались ориентировочные расходы воды к потребителям. В качестве рабочих характеристик основной (узел 0) и подкачивающей (узел 52) насосных станций приняты следующие напоры:  $H_1 = 96$  м,  $H_2 = 80$  м,  $H_3 = 42$  м и соответствующие им расходы  $Q_1 = 0,02$  м<sup>3</sup>/сек,  $Q_2 = 0,56$  м<sup>3</sup>/сек,  $Q_3 = 1$  м<sup>3</sup>/сек. Общая протяженность тепловой сети приблизительно составляет 20 км.

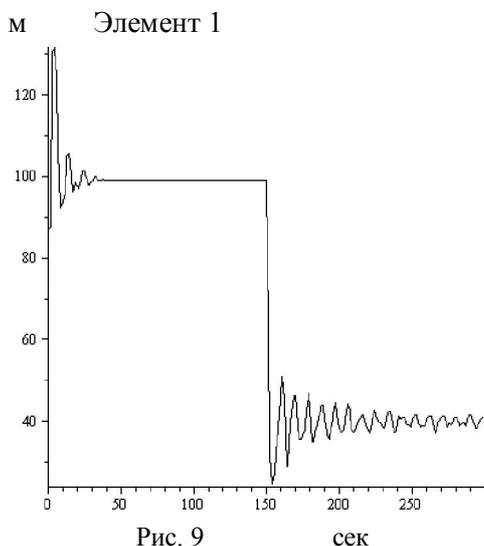
По просьбе заказчика численные эксперименты проводились при аварийном отключении одного или двух насосных станций в разных комбинациях и выявление наиболее «слабых» элементов с точки зрения повышения и перепадов давления (трубы уже значительно выработали свой ресурс). В статье приведены результаты расчетов: 1) при отключении одной насосной станции (рис. 5 - 7) в узле 0 в момент времени  $t = 150$ сек, а затем при отключении второй насосной станции (узел 52) в момент времени  $t = 300$  сек (рис. 5-7); 2) при одновременном отключении двух насосных станций в момент времени  $t = 150$  сек (рис. 8, 9). Методика численного расчета описана в работе [3] и представляет собой метод характеристик, где за основные характеристики потока жидкости приняты расход  $Q$  [м<sup>3</sup>/сек и напор  $H$  [м].



Рассматриваются возможные аварийные ситуации, связанные с отключением электричества на основной нагнетательной станции, последовательном отключении двух станций, а также отключением двух станций вместе.

Основные выводы:

1) При отключении основной насосной станции (в узле 0 – рис. 5,6,7) наблюдается кратковременное незначительное повышение давления, особенно в элементах, близких к станции.



2) При основной станции в некоторых элементах давление может значительно повышаться (даже выше рабочего давления – например, элемент 25). Это особенно опасно в элементах, связанных с потребителями (элемент 25)

3) Как показали численные эксперименты, в элементах, состоящих во внутреннем кольце системы (например, 9, 11,15,17, 41, 43, 45, 47, 49 и т.д.) колебания давления, связанные с отключением насосных станций не так значительны, как в элементах вне кольца.

4) При отключении двух насосных станций возможно резкое повышение давления и возникновение протяженно-

го по времени колебательного процесса (рис.8), что может стать опасным для изношенных труб.

5) В некоторых случаях (например, рис.6) возможно понижение давления ниже атмосферного, что может привести к нарушению сплошности потока и необходимости проведения дополнительных расчетов, учитывающих этот фактор.

Л и т е р а т у р а

1. Чарный И.А. Неустойчивое движение реальной жидкости в трубах. 2 – изд. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
2. Ганиев Р.Ф., Низамов Х.Н., Дербуков Е.И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. – М.: Издательство МГТУ, 1996. – 260 с.
3. Young W.R. and Wolfe C.L. Generation of surface waves by shear-flow instability// J. Fluid Mechanics. – 2014. – Vol. 739. – P. 276 – 307.

Reference

1. Charnie, I.A. (1975). Unsteady motion of real liquid in tubes, Moscow: Nedra, 296 p.
2. Ganiev, RF, Nizamov, HN, Derbukov, EI. (1996). Wave Stabilization and Prevention of Accidents in Pipe-Lines, Moscow: Izd-vo MGTU, 260 p.
3. Young, W.R. and Wolfe, C.L. (2014) Generation of surface waves by shear-flow instability, J. Fluid Mechanic, Vol. 739, p. 276 – 307.

**ANALYSIS OF UNSTEADY LIQUID MOTION IN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS FOR COMPLEX SCHEME INCLUDING SEVERAL RINGS**

F.V. Rekach

*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow*

The analysis of parameters of the unsteady fluid motion for complex circuits containing several circular rings is given in a paper. The author has set the task to carry out the calculations of long hydraulic circuits with the presence of several circular rings included in the geometry of the outline with different diameters of the pipelines with the specified estimated consumer spending with many points of branching pipelines. Thermal circuit of Nizhny Novgorod city is adopted in the enlarged view.

KEYWORDS: stabilizer of pressure, unsteady fluid movement, pipe line, pumping plant, thermal circuit.

## **Требования к оформлению статей в журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений»**

Текст статьи подготавливается в виде компьютерной, готовой к изготовлению печатной матрицы, распечатки и варианта на электронном носителе. Текст распечатки должен быть четким. Формат текста с размером по вертикали 23 см и по горизонтали 13,5 см. Текст размещается в середине листа формата А4.

Поля рукописи должны быть следующие:

верхние и нижние по 3,4 см; справа и слева по 3,8 см.

Отступ первой строки абзаца – 0,75 см.

Текст подготавливается в системе *Word*, размер шрифта 11 пунктов. Шрифт *Times New Roman*, межстрочный интервал *одинарный*. Текст оформляется по аналогии с представленными в сборнике статьями. Обязательно использовать *автоматический перенос*.

Заголовок **СТРОЧНЫМИ** буквами, жирным шрифтом, центрируется (в заголовке не должно быть переносов).

После пропуска одной строки следует И.О. ФАМИЛИЯ, *ученая степень, ученое звание* (или *инженер, аспирант, студент*) (курсивом) автора. Соавтор аналогично.

С новой строки: *Организация* (место работы, курсивом). Если соавторы из разных организаций против каждого автора из одной организации ставится одна звездочка \*, против авторов (соавторов) из другой организации – две звездочки \*\* (и т.д.). После последовательного перечисления всех авторов статьи (каждого с новой строки) следуют наименования организаций, предваренные \* или \*\* (и т.д.) звездочками. Затем с новой строки следует полный почтовый и электронный адрес автора.

После пропуска одной строки следует *краткая аннотация статьи* (курсив, 10 пт) объемом не более 6-8 строк, затем после пропуска одной строки идут ключевые слова, и, наконец, после пропуска одной строки идет основной текст.

После основного текста следует: Л и т е р а т у р а (центрируется)

Далее идет пронумерованный список цитируемой литературы (Full –10). Авторы выделяются курсивом. Затем с новой строки следует: R e f e r e n c e s (центрируется) и повторяется цитируемая литература на английском языке или на родном языке, но латинскими буквами (Full –9).

В заключительной части статьи приводятся **НАЗВАНИЕ** статьи (строчными жирными буквами), ф.и.о. авторов (централизуются) и перевод аннотации статьи на иностранный, предпочтительнее, английский язык. Затем с новой строки идут ключевые слова (KEY WORDS: ...) на английском языке.

Рисунки оформляются в тексте статьи предпочтительно средствами *Word* или других графических средств. Рисунки, оформленные отдельно от текста, должны полностью занимать страницу в пределах формата текста, на листе А4. Рисунки, выполненные чертежными средствами (тушью или черными чернилами), должны быть аккуратными с четкими надписями. Рисунки и надписи на них должны быть единым целым (сгруппированы) и не распадаться при их перемещении. Рисунки отделяются от текста на 6 пт.

Формулы в тексте статьи готовятся с помощью редактора формул *Microsoft equation* с установленными параметрами:

Full –11, Subscript/Suhtscript – 9, Sub- Subscript/Suhtscript – 7,

Symbol – 14, Subsymbol – 10.

Математика (функции) – латинские символы курсивом, греческие символы – прямым шрифтом. Между формулами и сверху, снизу от текста интервал 3 *pt*.

Номера страниц проставляются карандашом в левом нижнем углу страницы. Последняя страница предоставляется в двух экземплярах, второй экземпляр подписывается авторами статьи.

Аспирантам и соискателям желательно приложить к статье отзыв научного руководителя или специалиста по тематике статьи из организации, где выполняется работа.

Редакция имеет право снимать с публикации статьи, не отвечающие указанным требованиям, или, если на статью поступят два отрицательных отзыва рецензентов, или членов редакционного совета, или членов редколлегии журнала.