

## Сведения о журнале

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-19706 от 13 апреля 2005 г. Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (пг) и 80344 (год).

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, сформированный Минобрнауки России, для публикаций основных научных результатов диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук. Перечень вступил в силу 1 декабря 2015 г.

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АНДРЕЕВ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (МГСУ, Москва),  
БАЖЕНОВ В.А., акад. Национальной Академии педагогических наук Украины, д.т.н., профессор (КНУСА, Киев, Украина),  
БОНДАРЕНКО В.М., акад. РААСН, д.т.н., профессор (НИИСФ РААСН, Москва),  
ВАНИН В.В., д.т.н., профессор (Киевский политехнический университет, Украина),  
ИВАНОВ С.П., д.т.н., профессор (ПГТУ – ВОЛГАТЕХ, Йошкар-Ола),  
КАРПЕНКО Н.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (НИИСФ РААСН, Москва),  
КОЛЧУНОВ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (Госуниверситет-УНПК, Орел),  
KRASIC SONJA, PhD (University of Nis, Nis, Serbia),  
КРИВОШАПКО С.Н., д.т.н., профессор (РУДН, Москва),  
ЛЯХОВИЧ Л.С., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ТГАСА, Томск),  
ГРУДЕВ И.Д., д.т.н., профессор, почетный член РААСН (ЦНИИПСК, Москва),  
ПОТАПОВ В.Д., д.т.н., профессор (МГУПС РФ (МИИТ), Москва),  
САНЖАРОВСКИЙ Р.С., д.т.н., проф. (Евразийский Нац. У-т им. Гумилева, Казахстан),  
ТРАВУШ В.И., акад. РААСН, д.т.н., профессор (ЭНПИ, Москва),  
ЯКУПОВ Н.М., чл- корр. РИА, д.т.н., профессор (ИММ КазНЦ РАН, Казань)

### РЕДАКЦИЯ:

д.т.н., профессор С.Н. Кривошاپко – *главный редактор*,  
д.т.н., профессор В.Н. Иванов – *зам. главного редактора*,  
д.т.н. С.Е. Лисичкин; д.т.н., профессор Е.М. Зверьяев; д.т.н., профессор В.И. Обозов;  
д.т.н., профессор В.П. Агапов; И.А. Мамиева – *исполнительный редактор*;  
доцент В.А. Романова – *редактор русскоязычного Интернет-сайта журнала*,  
Е.А. Гринько – *редактор англоязычного Интернет-сайта журнала*.

Русскоязычный интернет-сайт журнала <http://stmj.rudn.ru>

Англоязычный интернет-сайт журнала <http://smjournal.narod.ru>

Технический секретарь *Е.М. Тупилова*

Компьютерная верстка *Т.И. Карелина*

**Почтовый адрес журнала:** 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН,  
каф. Прочности материалов и конструкций

Тел.: (495) 955-09-78; (495) 955-08-81; Факс: (495) 955-08-81; (495) 952-08-29

E.mail: [sn\\_krivoshapko@mail.ru](mailto:sn_krivoshapko@mail.ru) или [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Тираж 350 экз.

---

Учредитель: Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН

Типография ИПК РУДН, 117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений», 2016

© А.В. Белов, фото на 1-ой странице обложки (Царицыно)

# Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6 тел.: (495) 955-09-78; FAX: (495)9520829

## С о д е р ж а н и е

№ 2, 2016 год

### Инженерная педагогика

*Матвеев В.М., Романова В.А., Страинов С.В.* Визуализация обращённого движения при решении задач механики графическими методами..... 3

*Балыхин Г.А., Балыхин М.Г.* Инженерная педагогика и новые пути к ускоренному обучению: теории, методики и практики..... 9

### Геометрия срединных поверхностей оболочек

*Иванов В.Н., Валенсия Родригес Э. Г.* Тонкостенные пространственные конструкции на основе поверхностей Иоахимстала..... 15

### Теория упругости

*Иванов С.П., Глушков А.В.* Расчет оснований и фундаментов с крестообразной формой подошвы..... 21

*Казбеков Б.Б.* Поперечный изгиб перфорированной тонкой пластины, ослабленной прямолинейными трещинами с концевыми зонами пластических деформаций..... 29

### Расчет и проектирование строительных конструкций

*Маркович А.С.* Практическая реализация математической (компьютерной) модели многоребристого перекрытия..... 39

### Расчет и проектирование машиностроительных конструкций

*Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю., Фролов А.А., Крутина Е.В.* Исследование изгибающего момента при формообразовании гнутых профилей методом прокатки на профилегибочном стане..... 45

### Теория пластичности

*Андреев В.И.* Осесимметричная задача теории пластичности толстостенной оболочки с учетом неоднородности бетона при отрицательных температурах..... 51

### Численные методы расчета конструкций

*Агапов В.П.* Моделирование стержней таврового сечения в расчетах строительных конструкций методом конечных элементов..... 55

*Козлов Д.В., Волков В.И., Гольшев А.И., Учеваткин А.А.* Влияние размеров конечных элементов на расчетное напряженно-деформированное состояние арочной плотины..... 59

*Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Шестопалов П.В.* Особенности математического конечно-элементного моделирования систем «строящееся бетонное сооружение – нескальное основание»..... 63

## Экспериментальные исследования

<i>Каюмов А.Д., Худайкулов Р.М.</i> Расчетные характеристики засоленных грунтов.....	68
<i>Новак Н.Ю.</i> Выносливость плиты проезжей части железобетонных автодорожных мостов со сварными арматурными сетками.....	75

---

## *Contents, No 2, 2016*

### Engineering education

<i>Matveev V.M., Romanova V.A., Strashnov S.V.</i> Visualization of the reversed motion when solving problems in mechanics by graphical methods.....	3
<i>Balykhin G.A., Balykhin M.G.</i> Engineering pedagogy and new ways to accelerate learning: theories, methods, and practices.....	9

### Geometry of middle surfaces of shells

<i>Ivanov V.N., Valensya Rodrigues Edward G.</i> Thin-walled shell structures on the base of Joachimsthal's canal surfaces.....	15
---	----

### Theory of elasticity

<i>Ivanov S.P., Glushkov A.V.</i> Soil basement estimations of the cross-shaped isolated foundations.....	21
<i>Kazbekov B.B.</i> Transverse bending of a thin perforated plate weakened by rectangular cracks with end zones of plastic deformation.....	29

### Analysis and design of building structures

<i>Markovich A.S.</i> The practical realization of a mathematical (computerized) model of a concrete ribbed slab.....	39
---	----

### Analysis and design of machine-building structures

<i>Morozov Yu.A., Verkhov E.Yu., Frolov A.A., Krutina E.V.</i> Study of the bending moment in forming curved profile method for rolling mill forming.....	45
---	----

### Theory of plasticity

<i>Andreev V.I.</i> Axisymmetric problem in plasticity theory of thick-walled shell with accounting for inhomogeneity of concrete at subzero temperatures.....	51
--	----

### Numerical methods of analysis of structures

<i>Agapov V.P.</i> Modelling of the T-section rods in the analysis of building structures by finite element method.....	55
<i>Kozlov D.V., Volkov V.I., Golyshev A.I., Uchevatkin A.A.</i> Finite element size influence upon design stress-strain state of arch dam.....	59
<i>Rubin O.D., Lisichkin S.E., Shestopalov P.V.</i> The features of mathematical finite-element modeling of the system "newly built concrete structures – non rock foundation".....	63

### Experimental researches

<i>Kayumov A.D., Hudaykulov R.M.</i> Estimated characteristics of sub grade soils....	68
<i>Novak N.Yu.</i> Fatigue of a roadway slab of highway bridges with welded rod meshes.....	75

## Инженерная педагогика

### **ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОБРАЩЁННОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ГРАФИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

В.М. МАТВЕЕВ, канд. техн. наук, доцент,  
В.А. РОМАНОВА, доцент,  
С.В. СТРАШНОВ, канд. техн. наук  
Российский университет дружбы народов,  
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

*В статье рассматривается возможность визуализации процесса решения задач механики механизмов графическими методами в динамическом режиме путём создания мини-фильма, который может быть использован как преподавателем на лекциях или практических занятиях, так и учащимися при самостоятельном изучении курса «Теория механизмов и машин».*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** поверхность, визуализация, образующая линия, направляющая линия, пользовательская функция.

В связи с увеличением в учебном процессе доли самостоятельной работы студентов и сокращения его аудиторной составляющей, возникает необходимость создания электронных моделей, иллюстрирующих работу различных механизмов и процессов, сопровождающих эту работу. Такие модели могут быть реализованы в виде мини-фильмов, демонстрирующих решение задач механики в динамическом режиме на экране монитора. Мини-фильмы можно создавать в среде AutoCAD с использованием языка программирования AutoLISP [2] с последующим преобразованием векторной графики в растровую. При моделировании работы механизмов часто используют метод обращения движения.

Метод обращения движения применяют при решении ряда задач дисциплины «Теория механизмов и машин»:

- построение профиля кулачка кулачкового механизма;
- построение профиля зубьев зубчатых колес, изготавливаемых методом обката;
- определение передаточного отношения планетарных механизмов;
- построение графиков, годографов и др. [1].

Воспользуемся методом обращения движения для визуализации образования центрального профиля кулачка.

#### Кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем

На рис. 1 представлен кулачковый механизм с поступательно движущимся роликовым толкателем в начальном положении его звеньев. При решении поставленной задачи считаем известными законы движения толкателя на его фазах удаления и сближения, а также геометрию конструктивного профиля кулачка. Обращение движения механизма осуществляется заданием всем его звеньям дополнительного движения: вращения относительно центра  $A$  с угловой скоростью, равной по модулю угловой скорости кулачка, но противоположного направления. В образованном таким образом *обращённом механизме* кулачок предстанет неподвижным, а набор его элементов, включающий толкатель 2, ролик 3, стойку 4 и линию движения центра ролика толкателя  $S$  (в дальнейшем – ось толкателя), будет вращаться относительно центра  $A$  с угловой скоростью  $\omega_{об} = -\omega_1$ . При этом толкатель и его ролик сохраняют своё поступательное движение относительно стойки. Обращённый кулачковый механизм представлен на рис. 2.

Алгоритм программы на языке AutoLISP, моделирующей обращение движения в среде AutoCAD, включает:

1. Создание функции для извлечения значений перемещения центра ролика толкателя из текстового файла данных.
2. Открытие файла данных для чтения.

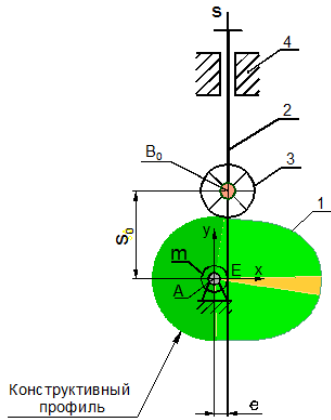


Рис. 1. Начальное положение кулачкового механизма

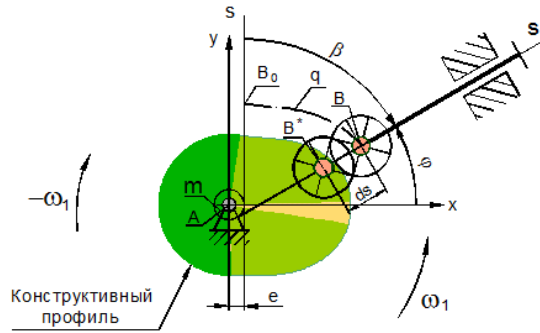


Рис. 2. Обращённый кулачковый механизм

3. Определение величин начальных параметров:  $r_{\min}$ , где  $r_{\min}$  – минимальный радиус центрального профиля кулачка,  $e$  – эксцентриситет толкателя; координаты точки  $A$ ; координаты точки касания оси толкателя с окружностью эксцентриситета  $m$  (точка  $E$  на рис.1):

4. Формирование цикла с параметром  $\Delta\varphi$ , включающего следующие операции:

- вращение толкателя, его ролика, оси толкателя  $S$  и стойки вокруг центра кулачка – точки  $A$ ;
- вращение ролика толкателя вокруг его центра – точки  $E$ ;
- изменение углов  $\alpha$  и  $\beta$  на величину  $\Delta\varphi$ ;
- определение координат центра ролика - точки  $B$  после поворота;
- определение координат центра ролика на оси толкателя – точки  $B^*$ ;
- перемещение толкателя, ролика и стойки из точки  $B$  в точку  $B^*$ ;
- вращение ролика вокруг точки  $B$ ;
- проведение полилинии из точки  $B$  в точку  $B^*$ ;
- при  $\Delta\varphi = 2\pi$  выполняется объединение отдельных отрезков полилиний в единый примитив и включается режим генерации типа линии;
- изменение параметра  $\Delta\varphi$  на единицу;
- конец цикла, закрытие файла данных.

При работе программы на экране монитора постепенно вычерчивается траектория движения ролика толкателя – центральный профиль кулачка.

Ниже приведен фрагмент программы построения центрального профиля кулачка кулачкового механизма с поступательным толкателем. Некоторые из используемых в программе переменных определены вне цитируемого фрагмента.

*Фрагмент программы*

```
(defun pnt20 ()
  ; Функция, извлекающая из файла данных значение перемещения центра ролика толкателя.
  (setq lin (read-line file2))
  (setq y20 (atof(substr lin 51 8))) ; считывание значения перемещения толкателя и присваивание его переменной y20
)
(command "layer" "s" "graf1" "")
```

```
(setq fi (/ pi 2) bet 0.0 dfir (/ pi -90.0) j 1)
(setq file2 (open (strcat adr "/d.txt") "r")); открытие файла данных для чтения
(setq y10 (pnt20))
(setq s0 (sqrt (- (expt rmin 2) (expt extr 2))))
(setq B0 (list extr (+ s0 y10))); начальное положение центра ролика толкателя
(setq E (list extr s0)); точка касания оси толкателя с окружностью эксцентриситета
(repeat m
(command "rotate" rol "" B0 -2)
(command "rotate" l1 l2 l3 st1 rol "" A -2)
(setq fi (+ fi dfir))
(setq bet (+ bet dfir))
(setq E (list (* extr (cos bet)) (* extr (sin bet))))
(setq y20 (pnt20));
(setq y (+ s0 y20))
(setq B* (polar E fi (+ s0 y10))) ; предыдущая точка на оси толкателя
(setq B (polar E fi y)) ; точка на траектории центра ролика
(command "move" l1 l3 rol "" B* B)
(command "rotate" rol "" B -4)
(command "pline"B0 B ""))
(setq elin (entlast))
(command "change" elin "" "p" "lw" 0.3 ""))
(setq B0 B y10 y20)
(command "layer" "lock" "0" ""))
(command "layer" "lock" "contur" ""))
(command "pedit" elin "j" "all" "" "l" "on" ""))
(command "change" elin "" "p" "s" 0.7 ""))
(command "layer" "unlock" "0" ""))
(command "layer" "unlock" "contur" ""))
(setq j (1+ j)))
(close file2)
```

### Кулачковый механизм с качающимся толкателем

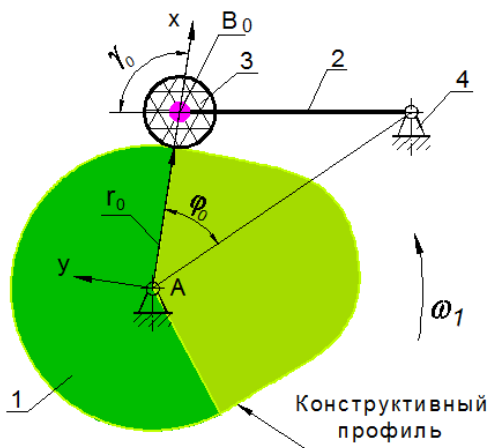


Рис. 3. Начальное положение кулачкового механизма

В обращенном кулачковом механизме с качающимся роликовым толкателем осуществляется вращение набора элементов, включающего толкатель 2 (рис. 3), ролик 3 и стойку 4, относительно центра A с угловой скоростью, равной по модулю угловой скорости кулачка, но противоположного направления (рис. 4). При этом штанга толкателя и ролик сохраняют своё основное движение, вращаясь относительно точки C. Кулачок в обращённом механизме неподвижен.

Алгоритм программы включает цикл с параметром  $k$ , предусматривающий на каждом шаге поворот описанного выше набора звеньев на угол

вокруг точки  $C$ , поворот толкателя 2 с роликом 3 на угол  $\Delta\psi$  вокруг точки  $C$ , а также определение координат текущего положения центра ролика толкателя. Далее между центрами ролика, определенными в предыдущем и текущем шагах цикла, вычерчиваются отрезки полилиний, которые затем объединяются в единый примитив, образуя сплошную пунктирную линию, являющуюся центральным профилем кулачка.

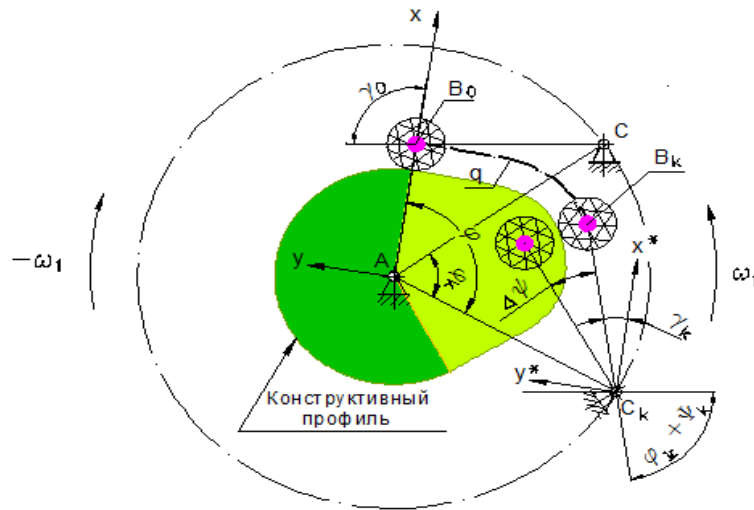


Рис. 4. Обращённый кулачковый механизм

Исходными данными являются результаты расчета угла поворота толкателя  $\psi_k$  в функции угла поворота кулачка  $\varphi_k$ , угол  $\varphi_0$ , определяющий начальное положение линии центров  $AC$ , угол  $\gamma_0$  между осью  $x$  и отрезком  $AC$  в начальном положении, координаты точки  $B_0$ . Величины углов поворота кулачка  $\varphi_k$  и толкателя  $\psi_k$  считываются из файла данных. Текущий угол  $\varphi$  определяется по формуле:  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_k$ . Угол между начальным положением штанги толкателя и текущим определяется как сумма углов  $\varphi_k$  и  $\psi_k$ , а текущий угол  $\gamma_k$  между осью  $x$  и штангой толкателя определяется из выражения:  $\gamma_k = \gamma_0 - (\varphi_k + \psi_k)$  (рис. 4).

Ниже приведен фрагмент программы построения центрального профиля кулачка кулачкового механизма с качающимся толкателем:

```
(setq fig fi0 k 1)
(repeat m
(command "layer" "s" "centr" "")
(setq fl2 (open (strcat adr "/data5.txt") "r"))
(Setup lin (read-line fl2))
(Setup fin (atof (substr lin 9 6)); начальный угол  $\varphi_0$ 
psin (atof (substr lin 68 9)); начальный угол подъема толкателя  $\psi_0$ 
)
(while (Setup lin (read-line fl2)); считывание текущих углов  $\varphi$  и  $\psi$ 
(Setup fik (atof (substr lin 9 6)); считывание значения угла  $\varphi_e$ 
psik (atof (substr lin 67 9)); считывание значения угла  $\psi_e$ 
(setq dfi (- fin fik);  $\Delta\varphi$ 
dpsi (- psin psik));  $\Delta\psi$ 
(command "rotate" e5 e6 e7 "" A dfi); вращение толкателя, ролика и стойки вокруг точки
A
(setq fig (+ fig dfi)); fig- угол между осью  $x$  и линией центров  $AC$ 
(setq fi (/ (* fig pi) 180))
(setq Ct (list (* Lac (cos fi)) (* Lac (sin fi)))); текущее положение точки  $C$ 
(command "rotate" e6 e7 "" Ct dpsi); вращение толкателя вокруг точки  $C$ .
(setq gama (- gam0 psik fik)); угол между осью  $x$  и штангой толкателя.
(setq gamr (/ (* gama pi) 180))
(setq B1 (polar Ct gamr 160)); текущее положение центра ролика
(command "rotate" e7 "" B1 -5); вращение ролика вокруг своей оси
(command "pline" b0 b1 "")); траектория центра ролика
```

```
(setq lr (entlast))
(command "ltscale" 2)
(command "layer" "lock" "contur" "")
(command "pedit" lr "j" "all" "" "l" "on" ""); объединение полилиний
(command "change" lr "" "p" "lw" 0.6 "")
(command "layer" "unlock" "contur" "")
(command "rotate" e7 "" B1 -5); вращение ролика вокруг своей оси
(setq fin fik)
  psin psik)
(setq B0 B1); переименование точки B1 в B0
(setq k (+ k 1))
);end while
(Close fl2)
```

#### Образование профиля зуба эвольвентного зубчатого колеса

Особое место в курсе «Теория механизмов и машин» занимает задача о формировании профиля зуба зубчатого колеса. Известен способ нарезания зубчатых колес инструментальной рейкой, в соответствии с которым заготовке сообщается вращательное движение, а рейке – поступательное движение.

В обратном движении образование профиля зуба аналогично построению эвольвенты при перекачивании производящей прямой по основной окружности нарезаемого зубчатого колеса.

Моделируя обратное движение в станочном зацеплении, инструментальной рейке и заготовке нарезаемого колеса сообщают дополнительное вращательное движение вокруг оси вращения заготовки с угловой скоростью, равной по модулю её угловой скорости  $\omega_3$ , но направленной в противоположную сторону

$$\omega_{об} = -\omega_3.$$

В обратном механизме заготовка зубчатого колеса неподвижна, а инструментальная рейка, продолжая двигаться поступательно, вращается вокруг оси заготовки. Принадлежащая ей станочно-начальная прямая перекачивается по делительной окружности заготовки без скольжения. Режущая кромка, движущаяся вместе со станочно-начальной прямой, формирует профиль зуба зубчатого колеса.

При построении профиля зуба моделируется пошаговое движение рейки. На каждом шаге станочно-начальная прямая и режущая кромка инструмента поворачиваются на угол  $\Delta\varphi$  и перемещаются на расстояние  $\Delta s = r\Delta\varphi$ . После выполнения этих движений изображение режущей кромки фиксируется на чертеже. В результате создается массив, элементами которого являются изображения режущей кромки инструментальной рейки в ряде её последовательных положений при обкате нарезаемого зубчатого колеса. Элементы полученного массива являются, таким образом, фрагментами производящего контура или образующими производящей поверхности. Профиль зуба строится как линия, огибающая элементы этого массива.

Алгоритм построения эвольвентного профиля зуба на модели станочного зацепления включает:

1. Определение геометрических характеристик зубчатого колеса.
2. Вычерчивание режущей кромки инструмента и четырех окружностей нарезаемого зубчатого колеса: основной  $r_b$ , делительной  $r$ , окружности вершин  $r_a$  и окружности впадин  $r_f$ .
3. Создание набора следующих графических элементов: режущей кромки  $n$  инструментальной рейки и отрезка  $KN$  станочно-начальной прямой (рис. 5).

Построение массива режущих кромок выполняется в замедленном режиме пошаговым поворотом созданного набора элементов вокруг центра колеса на



угол  $\Delta\varphi$  и его последующим перемещением в направлении, параллельном текущему положению участка  $KN$  станочно-начальной прямой на величину

$$\Delta s = r\Delta\varphi.$$

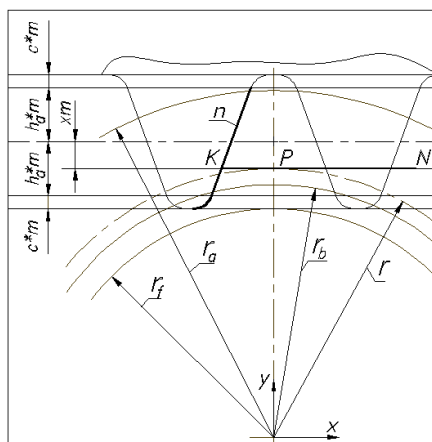


Рис. 5. Начальное положение инструментальной рейки

Каждое положение режущей кромки фиксируется на чертеже. Отрезок  $KN$ , выполняя обкат делительной окружности, во всех положениях проходит по касательной к ней (рис. 6). В результате формируется массив режущих кромок, являющийся совокупностью образующих производящей поверхности в процессе обката ею нарезаемого зуба.

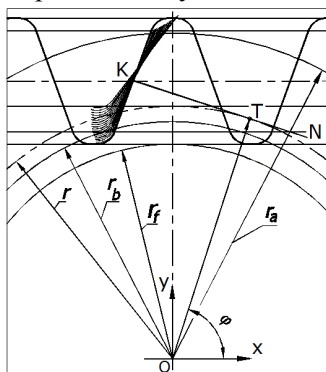


Рис. 6. Формирование образующих производящей поверхности

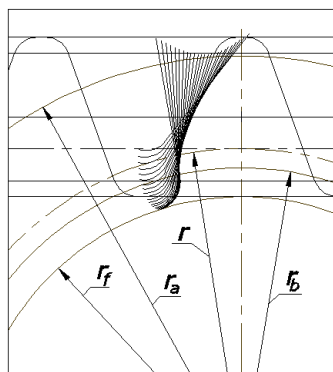


Рис. 7. Массив образующих производящей поверхности

Ниже представлена пользовательская функция  $rza$ , выполняющая в Автокаде построение образующих производящей поверхности при вращении набора элементов сначала по часовой стрелке, а затем – против часовой стрелки. В первом случае моделируется образование профиля головки зуба, во втором – ножки. Обозначения, принятые в программе:

- $e1$  – идентификатор отрезка станочно- начальной прямой,
  - $e2$  – идентификатор режущей кромки,
  - $dist1$  – расстояние РК от оси колеса до пересечения станочно- начальной прямой с режущей кромкой,
  - $pt3, pt4$  – точки на касательной прямой  $KN$ ,
  - $r$  - радиус делительной окружности,
  - $T$  – точка касания прямой  $KN$  и делительной окружности,
  - $fi$  - угол между осью  $x$  и радиус-вектором точки  $T$ .
- (defun  $rza$  ())  
 ; Перекат отрезка станочно- начальной прямой с режущей кромкой по делительной окружности по часовой стрелке

```
(setq j 1 n 18 dfi (/ pi -180))
(setq ds (* r dfi -1.0))
(setq D ' (0 0) fi (/ pi 2))
(repeat n
  (setq fi (+ fi dfi))
  (setq dfig (/ (* dfi 180) pi))
  (setq T (list (* r (cos fi)) (* r (sin fi)) ))
  (setq pt3 (polar T (+ pi (* dfi j)) (+ dist1 (* ds (- j 1))) ))
  (setq pt4 (polar T (+ pi (* dfi j)) (+ dist1 (* ds j))))
  (command "rotate" e1 e2 "" D dfig)
  (command "delay" 500)
  (command "move" e1 e2 "" pt3 pt4)
  (command "copy" e2 "" pt4 pt4)
  (setq j (1+ j))
  (command "delay" 100)))
```

#### Л и т е р а т у р а

1. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. – М.: «Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1990. - С. 590.
2. Романова В.А. Особенности изображения процесса образования поверхностей в системе САПР AutoCAD// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012, №4. – С. 3-5.

#### References

1. Levitzkiy, N.I. (1990). *Teoriya Mehanizmov i Mashin*, Moscow: "Nauka", 590 p.
2. Romanova, V.A. (2012). Features of the image of process of formation of surfaces in AutoCAD system, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, №4, p. 3-5.

#### VISUALIZATION OF THE REVERSED MOTION WHEN SOLVING PROBLEMS IN MECHANICS BY GRAPHICAL METHODS

V.M. Matveev, V.A. Romanova, S.V. Strashnov  
*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow*

The article considers the possibility to visualize the process of solving graphic problems of mechanics of mechanisms in dynamic mode by creating a mini-film, which can be used by a teacher in lectures or in practical classes, and by students for self-studying the course "Theory of mechanisms and machines".

**Key words:** a surface, visualization, a forming line, a directing line, a user function.



#### ИНЖЕНЕРНАЯ ПЕДАГОГИКА И НОВЫЕ ПУТИ К УСКОРЕННОМУ ОБУЧЕНИЮ: ТЕОРИИ, МЕТОДИКИ И ПРАКТИКИ

Г.А. БАЛЫХИН, д-р экон. наук, профессор,  
М.Г. БАЛЫХИН, канд. экон. наук, доцент,  
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет дизайна и технологий», ул. Садовническая, 33, с1, Москва, Россия, 115035  
[9684176@gmail.com](mailto:9684176@gmail.com)

Современные производственные технологии являются «короткоживущими». Они быстро прогрессируют, непрерывно наращивая наукоемкость и интеллектоемкость, требуя от всех инженеров, включенных в технологический процесс, не только соответствующего уровня развития интеллекта, а обязательно опережающего, дающего возможность увидеть и оценить возможные варианты последующих витков технологического, научного и социального развития. Способность прогнозирования процессов технологического и социального развития становится жизненно необходимой для обеспечения конкурентоспособности инженерно-технических специалистов. Она тре-

*бует непрерывной профессиональной и психологической самоподготовки к успешной деятельности в условиях новой предметной среды.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** инженерная педагогика, активное обучение, инженерные кадры, педагогические инженерные инновации, электронные презентации, лабораторно-практические занятия, выпускающие кафедры на производстве, непрерывная производственная практика, учебно-научно-производственные комплексы, новые методики, деятельностный контроль.

Задачи образовательной системы, в том числе в высшем образовании, состоят не только в том, чтобы вооружить людей некой суммой знаний, а именно научить их действовать «со знанием дела», научить применять знания в деятельности: и практической, и теоретической, и познавательной, и профессиональной, в т.ч. физической и умственной - которая нужна обществу, России.

Справедливо, что инженерная педагогика – в качестве составной части профессиональной педагогики – направлена на подготовку специалистов, реализующих инженерную деятельность, характеризуется специфическими целями, принципами, содержанием, формами организации, методами и средствами обучения, то объектом данной профессиональной педагогики является педагогическая система подготовки инженерных кадров, предметом – проектирование и реализация содержания профессионального образования, форм организации, методов и средств обучения. В настоящее время исследуются новые теории и методики проектировочных, конструктивных, гностических, коммуникативных, управленческих и других функций; теории и методики обучения техническим, технологическим знаниям, навыкам и умениям, формирования специфических способов инженерной деятельности.

Ускорение процесса подготовки человека к деятельности, повышение качества этой подготовки при одновременном сокращении затрат на обучение становятся задачами неотложными, т.е. овладеть новой деятельностью, новой специальностью, профессией, получать нужные знания, умения, навыки в минимальные сроки. Ускоренное обучение взаимосвязано с «правильным» обучением, образованием – таким процессом, когда достигаются результаты более высокого качества в более короткие сроки, с меньшими затратами усилий и материально-финансовых средств.

Как это достичь? Путь понимания будущей профессиональной деятельности студента, влияние на процесс и результаты его учебной деятельности стали 1) одним из оснований теоретического обобщения многообразного опыта использования форм и методов активного обучения (это активность мышления, социальная активность, активность на уровне внимания, восприятия, памяти, движения), 2) другим основанием – разработка теории и технологий контекстного обучения, а именно: (а) в отличие от «моноподходов» в контекстном обучении – при должном научно-методическом обосновании их возможностей – в наиболее экономном достижении конкретных образовательных целей свою органичное место могут найти перечисленные выше и любые другие педагогические профессиональные технологии – традиционные и новые; (б) студент с самого начала находится в деятельностной позиции, поскольку учебные предметы представлены в виде предметов деятельности (учебной, квазипрофессиональной, учебно-профессиональной) с определенным сценарием их развертывания; (в) включается весь потенциал активности студента – от уровня восприятия до уровня социальной активности по принятию совместных решений; (г) знания усваиваются студентами в контексте разрешения моделируемых профессиональных ситуаций, что обуславливает развитие познавательной и профессиональной мотивации, личностный смысл процесса учения; (д) в обучении как

«школе деятельности и мышления» в модельной форме отражается сущность процессов, происходящих в науке, на производстве, в обществе; тем самым решается проблема интеграции учебной, научной и профессиональной деятельности студентов; 3) третьим и главным является деятельностная теория учения, развитая в отечественной науке.

Формы и методы активного ускоренного обучения интенсивно разрабатывались с середины 70-х годов. В них включались проблемные лекции и семинары, анализ конкретных производственных ситуаций и решение ситуационных задач, методы имитационного моделирования, деловые и инновационные игры (разыгрывание профессиональных ролей), самостоятельная работа студентов (СРС), позже – новые информационные технологии. Нарбатывался опыт учебно- и научно-исследовательской работы студентов (УИРС, НИРС), реального дипломного проектирования (его результаты часто внедрялись в производство). Делались попытки интеграции учебной, научной и практической деятельности студента посредством организации филиалов выпускающих кафедр на производстве, непрерывной производственной практики, создания учебно-научно-производственных комплексов, опытных производств при вузах, заводо-вузов и т.п. Это было начало продолжающегося (и в настоящее время) этапа развития педагогических профессиональных инноваций в высшей школе, в системе образовании взрослых, свидетельствующее о стремлении перейти от традиционного объяснительно-иллюстративного обучения к исследовательскому, развивающему, к стимуляции и поддержке познавательной активности студентов, от авторитарно-технократическому к гуманистическому, личностно-ориентированному обучению. Во всех этих инновациях существенно *потеснились* лекции академические с канонизированной формой. В конце 80-х гг. решением коллегии Гособразования СССР – их объем был сокращен примерно на четверть.

По поводу основных противоречий профессионального и учебного обучения размышляет А.А.Вербицкий (см.: Новая образовательная парадигма и контекстное обучения. М., 1999): можно ли в принципе стать компетентным специалистом, находясь в позиции студента, делая одно, научиться другому; может ли быть обеспечено овладение профессиональной деятельностью в рамках и средствами качественно иной учебной деятельности? Сравните:

Структурные компоненты деятельности	Учебная деятельность	Профессиональная деятельность
Потребность	в учении	в труде
Мотив	познание нового, получение профессии	реализация интеллектуального потенциала, саморазвитие личности
Цель	общее и профессиональное развитие личности	производство материальных и/или духовных ценностей
Поступки, действия, операции	познавательные, преимущественно интеллектуальные	практические, в том числе теоретико-практические
Средства	личностное отражение действительности	преобразования реальной действительности
Предмет	учебная информация как знаковая система	неизвестное (ученый), суть личности человека (педагог, студент) и т.п.
Результат	деятельные способности человека, система отношений к миру, к другим людям, к самому себе	продукция, новые знания, образованность людей; самореализация личности

Согласно данной таблицы и та, и другая деятельность имеют иное содержательное, качественное наполнение (см. материалы А.А. Вербицкого), то есть деятельность студента ни по содержанию, ни по «искусственным» формам учебной организации *не равна*, как правило, реальной деятельности специалиста. Правильно считает Н.Ф. Талызина, что «в свете деятельностного подхода учение – это процесс усвоения учениками различных видов человеческой деятельности и реализующих их действий. Степень (качество) усвоения знаний определяется многообразием видов деятельности, в которых знания могут функционировать. Знания не могут быть ни усвоены, ни сохранены вне действий обучаемого. Знать – это выполнять конкретную деятельность или действия, связанные с данными знаниями. Передать знания и сформировать умения и навыки их применения – значит сформировать такие виды деятельности, которые с самого начала включают в себя заданную систему знаний и обеспечивают их применение в заранее предусмотренных пределах» (см. о системе учебных проблемных ситуаций и задач, постепенно приближающихся к профессиональным). Социальное же содержание связывается с учебным процессом путем совместной деятельности студентов при учете особенностей, интересов личностей, будущего профессионального коллектива, общества.

Какие учебные модели деятельности будущего профессионала соотнесены с ускоренным обучением? К примеру, семинар может быть организован в форме дискуссии, что позволяет студенту предоставить возможность формулировать собственное мнение на обсуждаемые проблемы, принятия согласованных решений и др. В рамках активной деятельности можно предложить ряд новых форм лекций педагога и студентов: лекция вдвоем, лекция-визуализация, лекция с запланированными ошибками, лекция пресс-конференция и т.д.

Что касается лабораторно-практических занятий, в том числе с помощью электронных презентаций, мастер-классов, «круглых столов», он-лайн консультаций, консультаций по запросам учащихся, открытые занятия в форме работы творческой группы, компьютерных производственных экскурсий, выставок – студенты на собственном опыте овладевают исследовательским интересом как будущие специалисты.

Так приобретается опыт согласования, принятия, усвоения индивидуальных и совместных решений, норм нравственных отношений между молодыми специалистами производства. Способы включения в совместную с преподавателем деятельность, совместный выбор методов и предпочтений, конкретные условия обучения актуальны при достижении приоритетной цели – формировать целостной профессиональной деятельности учащихся. К примеру, деловая (квазипрофессиональная) игра позволяет студентам упорядочить знания, умения, навыки, полученные на предшествующих этапах обучения. Участие в разыгрывании ролей условных менеджеров, возможно – «лидеров производства», направлено на использование студентами опыта социальных отношений в «должностных» позициях.

В современных условиях модернизации образования традиционное обучение, построенное на эмпирической методике, не удовлетворяет практику подготовки, резервы его совершенствования практически исчерпаны. Требуется в новый период разрабатывать методики обучения на основе строгого учета педагогических психологических закономерностей овладения человеком общественно-историческим опытом, воплощенном в предметах материальной, духовной культуры, т.е. орудиях и средствах деятельности, производства, в способах действия с ними, в т.ч. в понятиях и категориях науки, в технологии производства.

Легкость овладения предметом, конкретной деятельностью для обучаемых,

быстрота овладения профессией, соответственно сокращение видов затрат на обучение, повышение качества обучения, достижение успешного выполнения всех основных профессиональных действий при завершении обучения – главные достоинства всех конкретных методик, разработанных при участии педагогов для обучения ряду профессий. Если уточнить понятие легкость обучения, то речь идет о возможности самообучения, взаимообучения, прохождения курса обучения индивидуальными темпами, постоянного поэтапного контроля и самоконтроля формируемых умений и навыков с коррекцией действий в правильном направлении и исключения ошибок при выполнении действий на стадии овладения ими (см. концепцию поэтапного формирования умственных действий, выдвинутая отечественным ученым П.Я. Гальпериным, получившая всемирную известность и распространившаяся в ряде западных стран в качестве теоретической основы практического обучения).

Можно сформулировать актуальные пути в практическом обучении:

1) теоретически и экспериментально доказано, что научить новому делу, новой деятельности можно быстрее и лучше, если правильно учитывать и использовать законы усвоения;

2) эти возможности связаны с экономическими перспективами в процессе науки, культуры, производительного труда, бизнеса;

3) нужно соотносить науку и практическое использование возможностей в массовом обучении: учащиеся, слушатели могут участвовать в различных курсах по переучивания;

4) нужно использовать диалог между преподавателями и практиками о принципах сотрудничества для разработки новых методик, начинающих с конкретной деятельности и завершающихся их экспериментальной проверкой.

Безусловно, методики многократно ускоряют (минимум в два раза) процесс выработки интеллектуальных и практических навыков и умений высокого качества; методики должны использовать индивидуализированный процесс обучения, доводить для каждого обучаемого нужный уровень профессионализма; методики должны быть организованы при обучении учащихся практически безошибочно; методики предоставляют возможность самообучения любому желающему, если он хочет овладеть новой для себя деятельностью; методики исключают необходимость специального заучивания, делают ненужным заблаговременное запоминание знаний до начала их применения; методики не требуют дополнительных дорогостоящих технических средств обучения, которыми обычно пользуются каждодневно; методики дают долговременный экономический эффект, потому что каждая методика служит столько, сколько существует данная специальность, профессиональная деятельность; методики обеспечивают такое качество подготовки по осваиваемой деятельности, что ее выполняют безошибочно от 95 до 100% обучаемых, которые могут работать как профессионалы после завершения обучения.

На протяжении ускоренного обучения должен осуществляться и деятельностный контроль процесса трансформации учебной деятельности при участии преподавателя и студентов по четким, лично значимым критериям: отслеживать уровень усвоения знаний, ход и результаты практических действий студента, уровень сформированности конкретных фрагментов деятельности, к примеру, с помощью аттестационных производственных ситуаций и реализации процесса перехода от учения к труду.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Бальхин Г.А.* Экономика образования. – Кострома: КГУ им. Н.И. Некрасова, 2008. – 356 с.

2. Бальхин Г.А., Егоров В.В., Сперанский О.А. Современные подходы к управлению в интеллектуальной сфере. – М.:МИРЭА (Технический университет), 2008. – 184 с.
3. Бальхин М.Г. Источники финансирования вузовской науки / Научный взгляд на современный этап развития общественных, технических, гуманитарных и естественных наук: актуальные проблемы. Сборник научных статей по итогам научно-практической конференции 2014. – СПб.: Культ Информ Пресс, 2014. – С. 25 – 30.
4. Бальхин М.Г. Механизмы финансирования НИОКР в вузах России. – М., Экономика и управление народным хозяйством. – №3/4 (23/33), 2014. – С.59 – 65.
5. Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход. – М., 1991. – 207 с.
6. Вербицкий А., Сахарова Н. Психологические особенности включения взрослых в образовательную деятельность // Новые знания. – 1999. – №2. – С. 59-65.
7. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М., 1975. – 330 с.
8. Balykhin M.G. Knowledge and crisis, tolerance and competitive ability: what are the cross points? // Life Science Journal, № 11, 2014.
9. Knight J. Internationalization remodeled: Responding to new realities and challenges. – L., 2003. – 355 с.
10. Radcliffe D.F. Global Challenges Facing Engineering Education: Opportunities for Innovation // 35th International IGIP Symposium. Book of Abstracts. – Tallinn, 2006. – С. 15 – 26.

#### References

1. Balyhin, G.A. (2008). *Ekonomika Obrazovaniya*, Kostroma: KGU im. N.I. Nekrasova, 356 p.
2. Balyhin, G.A., Egorov, V.V., Speranskij, O.A. (2008). *Sovremennye Podhody k Upravleniyu v Intellektualnoj Sfere*, Moscow: MIREA, Tekhnicheskij universitet, 184 p.
3. Balyhin, M.G. (2014). Istochniki finansirovaniya vuzovskoj nauki, *Nauchnyj Vzglyad na Sovremennyy Etap Razvitiya Obshchestvennyh Tekhnicheskikh Gumanitarnyh i Estestvennyh Nauk: Aktualnye Problemy*, Sbornik nauchnyh statej po itogam nauchno prakticheskoy konferencii, 2014, SPb.: Kult Inform Press, p. 25 – 30.
4. Balyhin, M.G. (2014). *Mekhanizmy Finansirovaniya NIOKR v Vuzah Rossii*, Moscow: Ekonomika i upravlenie narodnym hozyajstvom, №3/4 (23/33), p. 59 – 65
5. Verbickij, A.A. (1991). *Aktivnoe Obuchenie v Vyshej Shkole: Kontekstnyj Podhod*, M., 207 p.
6. Verbickij, A.A., Saharova, N. (1999). Psihologicheskie osobennosti vklucheniya vzroslyh v obrazovatelnyu deyatelnost, *Novye Znaniya*, №2, p. 59 – 65.
7. Talyzina, N.F. (1975). *Upravlenie Processom Usvoeniya Znaniy*, Moscow, 330 p.
8. Balykhin, M.G. (2014). Knowledge and crisis, tolerance and competitive ability: what are the cross points?, *Life Science Journal*, № 11, p. 59 – 65.
9. Knight, J. (2003). *Internationalization Remodeled: Responding to New Realities and Challenges*, L., 355 p.
10. Radcliffe, D.F. (2006). Global Challenges Facing Engineering Education: Opportunities for Innovation, *35th International IGIP Symposium: Book of Abstracts*, Tallinn, 2006, p. 15 – 26.

#### ENGINEERING PEDAGOGY AND NEW WAYS TO ACCELERATE LEARNING: THEORIES, METHODS AND PRACTICES

Balykhin G.A., Balykhin M.G.

*FGBOU VPO "Moscow State University of Design and Technology", Russia*

Modern production technologies are "short-lived". They quickly progressed continuously increasing knowledge-based, requiring all engineers, included in the process, not only the appropriate level of intellectual development, but scientific and social development, which advance and give an opportunity to see and evaluate the possible options for follow-turns technological. The ability to predict the processes of technological and social development become vital for the competitiveness of engineering and technical professionals. It requires continuous training and psychological self to the success of the subject in the new environment.

**Keywords:** engineering pedagogy, active learning, engineering staff, pedagogical engineering, e-presentations, laboratory practical classes, graduating departments in manufacturing, continuous manufacturing practices, the educational-scientific-production complexes, new techniques, activity-based control.

**Геометрия срединных поверхностей оболочек**

**ТОНКОСТЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ  
НА ОСНОВЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ИОАХИМСТАЛЯ**

В.Н. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*  
 ВАЛЕНСИЯ РОДРИГЕС Э. Г., *бакалавр техники и технологий*  
 Российский университет дружбы народов,  
 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; E-mail: i.v.ivn@mail.ru

В статье рассматриваются вопросы конструирования тонкостенных пространственных конструкций с использованием поверхностей Иоахимсталя. Каналовые поверхности Иоахимсталя образуются системой окружностей, лежащих в плоскостях пучка, что позволяет возводить такие конструкции на строительной площадке без использования сложных видов опалубки. В то же время эти поверхности позволяют формировать самые разнообразные формы пространственных конструкций.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** циклические поверхности, каналовые поверхности, поверхности с образующими кривыми в плоскостях пучка, тонкостенные пространственные конструкции.

Каналовые поверхности Иоахимсталя являются циклическими поверхностями с образующими окружностями переменного радиуса в плоскостях пучка, являющимися семейством линий кривизны поверхности [1-4]. Каналовые поверхности Иоахимсталя являются подвидом каналовых поверхностей [2-5]. Геометрия каналовых поверхностей Иоахимсталя рассматривалась в работах [6-13]. В работе [7] доказано, что имеется три способа образования каналовых поверхностей Иоахимсталя: 1) вращение окружности переменного радиуса вокруг оси так, что расстояние от полюса (точки на оси вращения) до точки касания образующей окружности остается постоянным (рис. 1,а); 2) вращение окружности переменного радиуса вокруг общей хорды (рис. 1,б); 3) вращение окружности переменного радиуса вокруг касательной.

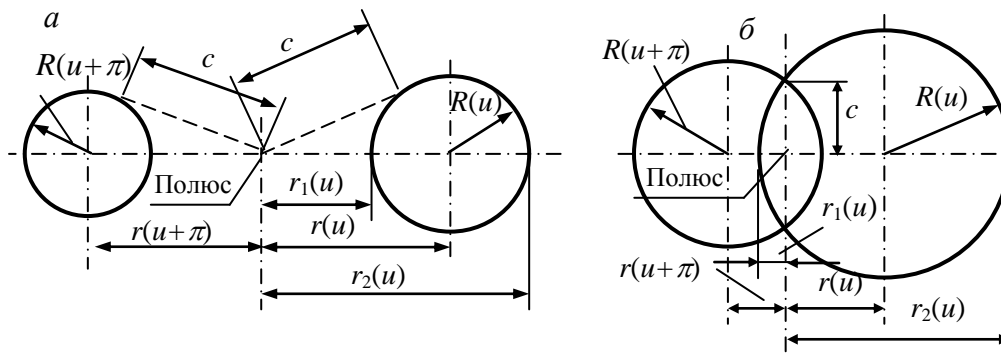


Рис. 1. Схемы образования каналовых поверхностей Иоахимсталя

Третий способ образования каналовой поверхности Иоахимсталя можно считать предельным случаем второго способа образования поверхности и переходным от 1-го ко 2-му способу.

Векторное уравнение каналовой поверхности Иоахимсталя имеет вид:

$$\rho(u, v) = r(u)\mathbf{h}(u) + R(u)\mathbf{e}(u, v), \quad (1)$$

где  $r(u)\mathbf{h}(u)$  - уравнение плоской линии центров образующих окружностей поверхности в полярной системе координат;  $\mathbf{h}(u) = \mathbf{i}(u)\cos u + \mathbf{j}\sin u$  - уравнение окружности единичного радиуса в плоскости линии центров образующих



окружностей;  $r(u)$  - полярный радиус линии центров;  $R(u)$  - радиус образующей окружности;  $e(u, v) = h(u)\cos v + k \sin v$  - уравнение окружности единичного радиуса в плоскостях пучка;  $i, j, k$  - орты прямоугольной системы координат.

Для образования поверхности необходимо задать направляющую кривую и начальный радиус образующей окружности поверхности  $R_0 = R(u_0)$  или параметр  $c$ . Из условий образования каналовой поверхности Иоахимстала определяется параметр  $c = \sqrt{|r(0)^2 - R_0^2|}$ .

Радиус образующей окружности далее определяется по формуле:

$$R(u) = \sqrt{r^2(u) - pc^2}, \quad (2)$$

$p = \text{sign}(r(u_0) - R_0)$  определяет способ образования поверхности. Можно задаваться параметрами  $c$  и  $p = \pm 1$ .

При выполнении условий образования каналовых поверхностей Иоахимстала образующие окружности является линиями кривизны. В то же время, координатные линии  $v = \text{const}$  при использовании уравнения поверхности (1) не является линиями кривизны. В работе [8] получены уравнения поверхности в линиях кривизны. Эти уравнения приводятся также в «Энциклопедии аналитических поверхностей» [3, 4] и монографии [13]. Уравнения поверхностей в линиях кривизны используются при расчете оболочек на прочность. Для построения оболочек могут использоваться любые варианты уравнения поверхности, в частности (1)

В качестве направляющих кривых каналовых поверхностей Иоахимстала могут использоваться кроме линии центров образующих окружностей линии, кривые, очерчиваемые диаметрами образующих окружностей в плоскости линии центров  $r_1(u)$ ,  $r_2(u)$  (рис. 1). Это позволяет определять поверхность по линиям, ограничивающим поверхность в плане, что бывает удобно при проектировании конструкций. В уравнении поверхности (1) при этом достаточно положить  $r(u) = r_1(u) + R(u)$  или  $r(u) = r_2(u) - R(u)$ , соответственно.

При построении каналовых поверхностей Иоахимстала необходимо использовать полярную систему координат. Однако многие кривые (например, синус) не имеют прямой записи уравнений в полярной системе координат. Кроме того полюс поверхности (ось вращения пучка плоскостей) может не совпадать с началом координат полярной кривой. В работе [12] показано как записать уравнение любой направляющей кривой в полярной системе координат при любом расположении полюса поверхности и для любой направляющей кривой поверхности.

Зададимся направляющей кривой в форме круговой косинусоиды

$$f(u) = a[1 + \mu(1 + \cos(ku))] . \quad (3)$$

Кривая  $f(u)$  описывает косинусоиду с амплитудой  $a\mu$  вокруг окружности радиуса  $a$ , касаясь окружности отрицательной амплитудой. Параметр  $k$  определяет число волн косинусоиды при обходе круга.

Если за направляющую кривую принимается кривая, описываемая внутренним диаметром направляющих окружностей  $f(u) = r_1(u)$ , то получаем каналовую поверхность Иоахимстала поверхность 1-го типа при любом значении  $R_0$ . Если за направляющую кривую принимается линия центров образующих окружностей или кривая  $f(u) = r(u)$ , описываемая внутренним диаметром образующих окружностей  $f(u) = r_2(u)$ , то тип поверхности зависит от значения начального радиуса  $R_0$ .

На кафедре прочности материалов и конструкций РУДН аспирантом (в настоящее время кандидатом наук) Насром Аббуши построены макеты каналовых поверхностей Иоахимстала с направляющими круговыми косинусоидами, отражающими три типа построения поверхностей (рис. 2)



Рис. 2.  
Макеты каналовых  
поверхностей Иоахимстала  
с направляющей кривой - круго-  
вой косинусоидой

Ниже приведены рисунки каналовых поверхностей Иоахимстала с направляющей круговой косинусоидой с различным числом амплитуд (рис.3).

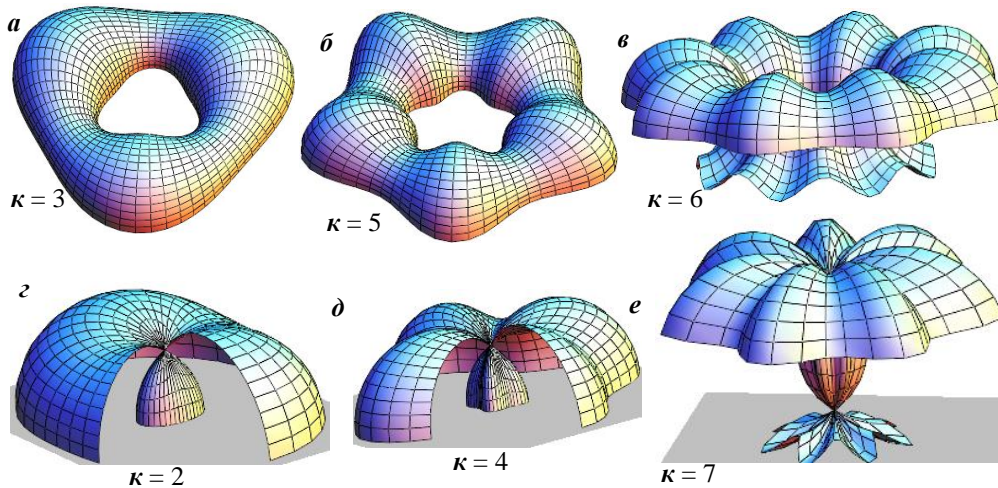


Рис. 3. Каналовые поверхности Иоахимстала с направляющей круговой косинусоидой

В верхнем ряду каналовые поверхности Иоахимстала 1-го типа, в нижнем ряду - поверхности 2-го типа. На рис. 4,а,б,в,е -  $0 \leq u \leq 2\pi$ ; рис. 4,г, -  $0 \leq u \leq 1,5\pi$ ; рис. 4,а,б,г,д  $0 \leq v \leq \pi$ ; рис. 4,и,е  $0 \leq v \leq 1,5\pi$ .

Каждая из приведенных форм может использоваться при строительстве торговых, развлекательных и выставочных центров, спортивных сооружений и т.п. Например конструкция в форме поверхности на рис. 4,к может использоваться для покрытия беседки или торговой точки в зоне отдыха. Эти поверхности могут использоваться для покрытия сооружений повторяющих в плане форму контура поверхности (рис. 4)

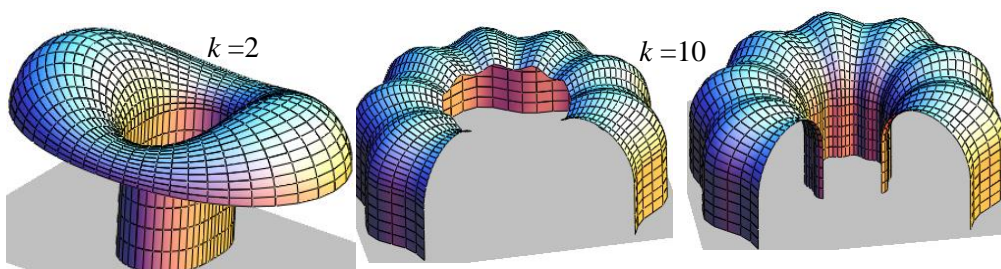


Рис. 4. Покрытия сооружений на волнистых планах

Территория таких сооружений может иметь ограждения, повторяющих в плане форму сооружений (рис. 5).

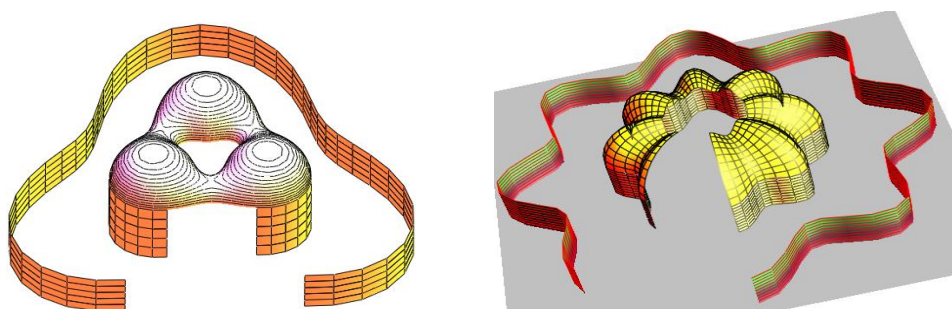


Рис. 5. Ограждение территорий сооружений с волнистыми планами

Из отсеков каналовых поверхностей Иоахимсталя могут создаваться комбинации тонкостенных пространственных конструкций (рис. 6). Рис. 6,а -  $\kappa = 8$ , рис. 6,б -  $\kappa = 2$ .

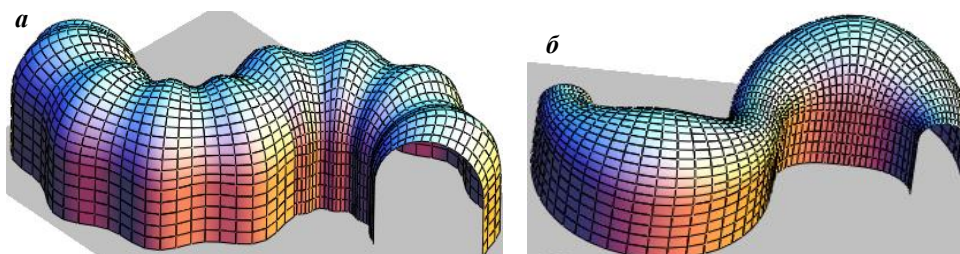


Рис. 6. Комбинированные пространственные конструкции из оболочек в форме каналовых поверхностей Иоахимсталя

В качестве направляющих каналовых поверхностей Иоахимсталя могут использоваться, в частности, кривые 2-го порядка: эллипс, гипербола, парабола. Кривые 2-го порядка имеет полярную форму уравнений при совмещении начальной точки с фокусом кривой или центром эллипса. Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющими кривыми 2-го порядка приведены на рис. 7. В верхнем ряду поверхности с направляющим эллипсом, в среднем ряду с направляющей параболой, в нижнем ряду направляющая кривая - гипербола.

На рис. 8 приведены рисунки комбинированных пространственных конструкций из отсеков каналовых поверхностей Иоахимсталя с направляющими кривыми второго порядка.

В предыдущих примерах для направляющих каналовых поверхностей Иоахимсталя использовались заданные (3) или известные в математической литературе уравнения в полярной системе координат, в частности для кривых 2-го порядка. Если уравнение направляющей кривой задается в параметрической

форме  $x = x(u)$ ,  $y = y(u)$ , то, как показано в работе [12], в формуле (1) принимают:

$$r(u) = \sqrt{[x(u) - x_0]^2 + [y(u) - y_0]^2} ;$$

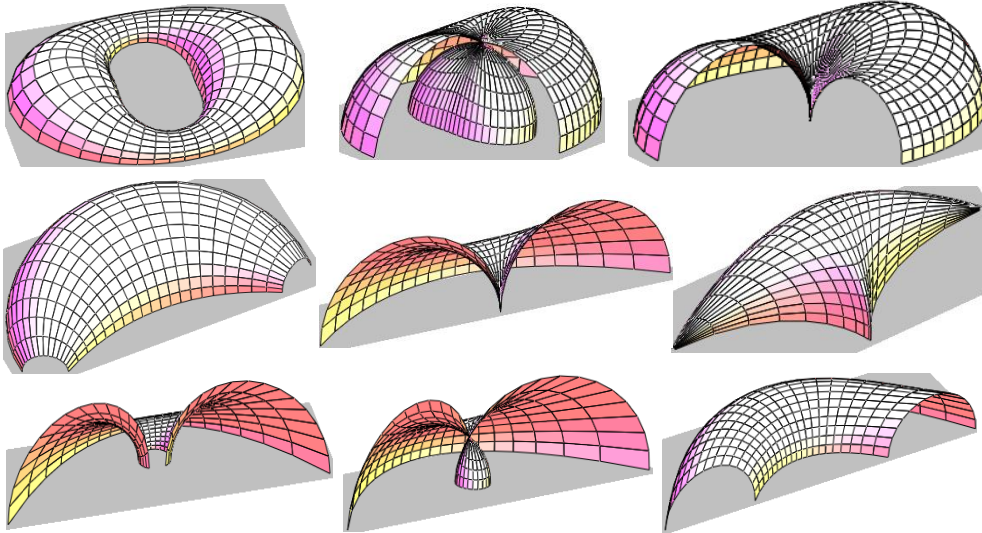


Рис. 7. Каналовые поверхности Иоахимстеля с направляющими кривыми 2-го порядка

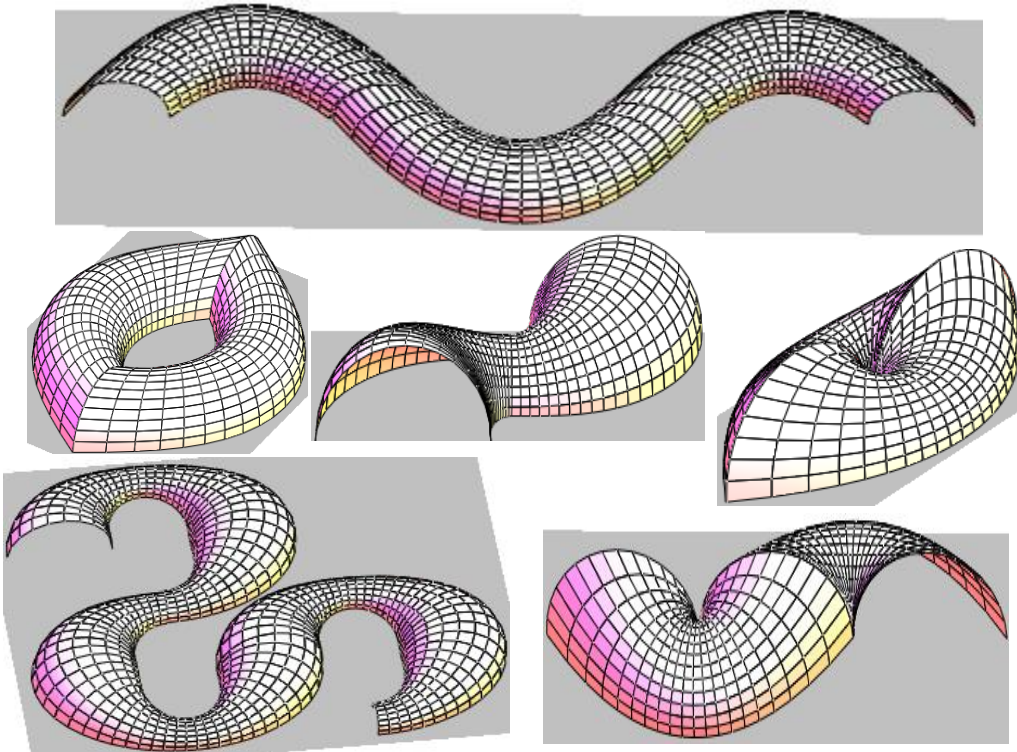


Рис. 8. Комбинированные пространственные конструкции в форме каналовых поверхностей Иоахимстеля с направляющими кривыми 2-го порядка

$$\cos u = \cos \theta(u) = \frac{x(u) - x_0}{\sqrt{[x(u) - x_0]^2 + [y(u) - y_0]^2}} ; \quad \sin u = \sin \theta(u) = \frac{y(u) - y_0}{r(u)} , \quad (4)$$

где:  $x_0, y_0$  - координаты полюса каналовой поверхности.

Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющим косинусом  $x = au$ ;  $y = b \cos(\pi u)$ ;  $-0,5 \leq u \leq 0,5$  представлены на рис. 9.

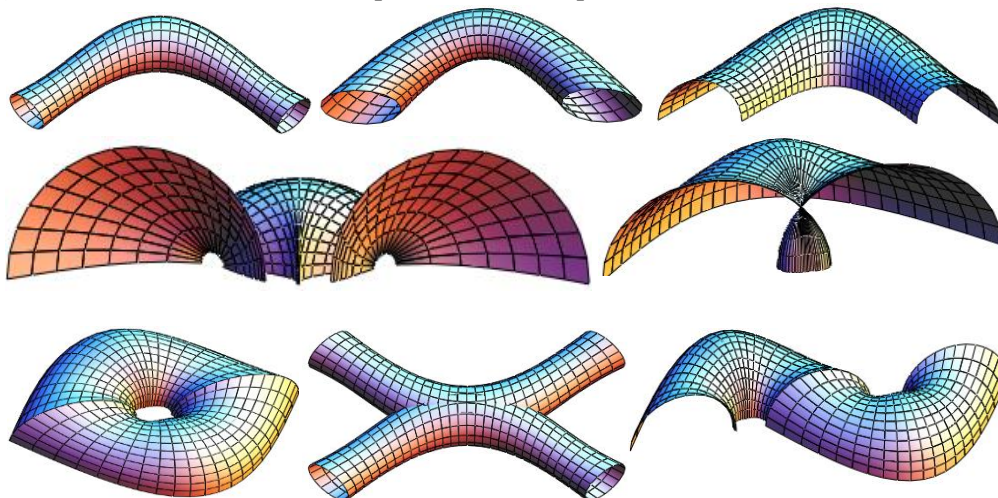


Рис. 9 Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющей косинусоидой

#### Л и т е р а т у р а

1. *Joachimsthal F.* J. reine und angew. Math., 1846.
2. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 540 с.
3. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.
4. *Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Encyclopedia of Analytical Surfaces. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
5. *Marc Dohm.* The implicit equation of a canal surface// Journal of Symbolic Computation. – 2009. – Vol. 44, Iss. 2. – P. 111-130.
6. *Иванов В.Н., Жиль-улбе Матье.* К вопросу о геометрии и конструировании оболочек в форме каналových поверхностей Иоахимсталя//Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвуз. сб. научных тр., вып.4. – М.: МБК «Биоконтроль», 1994. - С. 68-75.
7. *Иванов В.Н.* Каналовые поверхности Иоахимсталя с плоской линией центров// Исследования пространственных систем: Материалы семинара кафедры сопротивления материалов РУДН. - М.: Изд-во РУДН, 1996. - С. 32-36.
8. *Иванов В.Н., Насер Юнес Аббуши.* Исследования геометрии каналových поверхностей Иоахимсталя// Проблемы теории и практики в инженерных исследованиях: Труды XXXIII научной конференции РУДН. – М.: РУДН, 1997. – С. 115-118.
9. *Иванов В.Н.* Конструирование оболочек на основе каналových поверхностей Иоахимсталя// Вестник Российского университета дружбы народов/ Специальный выпуск: «Инженерные исследования». – № 1. – 2000. – С. 57-61.
10. *Насер Юнес Ахмед Аббуши.* Применение каналových поверхностей Иоахимсталя в различных отраслях строительства// Вестник Российского университета дружбы народов/ Серия: «Инженерные исследования»/ Специальный выпуск «Геометрия и расчет тонкостенных пространственных конструкций». – № 1. – 2002. – С. 80-89.
11. *Иванов В.Н.* Каналовые поверхности Иоахимсталя с направляющими кривыми 2-го порядка// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2008. – № 4. – С. 3-10.
12. *Иванов В.Н.* Каналовые поверхности Иоахимсталя с произвольной направляющей кривой// Геометрическое моделирование и компьютерные технологии: теория, практика, образование/ Материалы VI международной научно-практической конференции. 21-24 апреля 2009 г. – Харьков: ХПИПИТ, 2009. – С. 46-51.
13. *Иванов В.Н., Кривошапко С.Н.* Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография. – М.: Изд-во РУДН, 2010. – 540 с.

References

1. Joachimsthal F. (1846). *J. reine und angew. Math.*
2. Shulikovskiy, V.I. (1963). *Classic Differential Geometry*, Moscow: GIFML, 540 p.
3. Krivoschapko, S.N., Ivanov, V.N. (2010). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Moscow: 'LIBROKOM', 560 p.
4. Krivoschapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
5. Dohm, Marc (2009). The implicit equation of a canal surface, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 44, Iss. 2, p. 111-130.
6. Ivanov, V.N. Mathieu, Gil-oulbe. (1994). On question of geometry and design of the shells in the form of Joachimsthal's canal surfaces, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, Iss. 4, Moscow, p. 68-75.
7. Ivanov, V.N. (1996). Joachimsthal's canal surfaces with a plane center line, *Issledovaniya Prostranstvennyh Sistem*, Moscow: RUDN, p. 32-36.
8. Ivanov, V.N., Abbushy, Nasr Unes (1997). Investigation of the geometry of Joachimsthal's canal surfaces, *Problemy Teorii i Praktiki v Inzhenernyh Issledovaniyah*, Moscow: RUDN, p. 115-118.
9. Ivanov, V.N. (2000). Construction of the shells on the base of Joachimsthal's canal surfaces, *Vestnik Rossiyskogo Universiteta Druzhby Narodov*, «Engineering Investigation», № 1, p. 57-61.
10. Abbushy, Nasr Unes (2002). The application of Joachimsthal's canal surfaces in various branches of building, *Vestnik Rossiyskogo Universiteta Druzhby Narodov*, «Engineering Investigation», № 1, p. 80-89.
11. Ivanov, V.N. (2008). Joachimsthal's canal surfaces with a directrix curve of the second order, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, p. 3-10.
12. Ivanov, V.N. (2009). Joachimsthal's canal surfaces with any directrix curve, *VI<sup>th</sup> International Conference: Geometric Design and Computer Technologies: Theory, Practice, Education*, April 21-24, 2009, Kharkov: HPIPiT, p. 46-51.
13. Ivanov, V.N., Krivoschapko, S.N. (2010) Analytical Methods of Analysis of Shells of Non-canonic Form, Moscow: Izd-vo RUDN, 540 p.

**THIN-WALLED SHELL STRUCTURES  
ON THE BASE OF JOACHIMSTHAL'S CANAL SURFACES**

V.N. Ivanov, Valensya Rodrigues Edward G.  
*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow*

The article concerns with the questions of the forming of the space thin-walled structures on the base of the Joachimsthal's canal surfaces. The Joachimsthal's canal surfaces are formed by the system of the circles lying in the planes of pencil. This allows making such structures without using of complex types of shuttering and these surfaces give an opportunity to create different interesting forms of the spatial thin-walled construction.

KEY WORDS: cyclic surfaces, canal surfaces, surface with the generating curves in the planes of pencil, thin-walled space structures.



**Теория упругости**

**РАСЧЕТ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ  
С КРЕСТООБРАЗНОЙ ФОРМОЙ ПОДОШВЫ**

С. П. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, проф.*,  
А.В. ГЛУШКОВ, *аспирант*,  
*Поволжский государственный технологический университет,*  
*424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3,*  
*e-mail: sp-ivanov@mail.ru, IvanovSP@volgatech.net, 256289@gmail.com.*

*Представлены результаты аналитических и численных расчетов оснований крестообразных фундаментов, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой. Установлен характер распределения напряжений и перемещений в активной зоне крестообразных фундаментов. Выполнено сравнение расчетных и экспериментальных*

значений осадок штампов со сложной формой подошвы. Получены многофакторные степенные зависимости осадок фундаментов крестообразной формы в связных и несвязных грунтах. Показана возможность проектирования фундаментов по предельно допустимым осадкам.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** метод конечных элементов, метод угловых точек, крестообразный фундамент, анализ напряженно-деформированного состояния основания.

В практике строительства для зданий с каркасной схемой, как правило, используются отдельно стоящие фундаменты на естественном основании квадратной и прямоугольной формы подошвы. Для снижения материалоемкости нулевого цикла целесообразно использование эффективных конструкций фундаментов с крестообразной формой подошвы.

Основное достоинство крестообразных фундаментов по сравнению с типовыми решениями является качественно лучшая совместная работа с основанием как под подошвой, так и в промежутках между выступами.

По данным профессора Е. А. Сорочана установлено, что изменение формы фундамента от квадратной к крестообразной оказывает значительное влияние на все компоненты напряженно-деформированного состояния грунтового основания [1]. Оптимизация формы подошвы фундаментов, устройство выступов позволяет включить в работу больший объем грунта, трансформировать эпюру контактных напряжений, снизить осадки фундаментов. В современных нормах отсутствует методика расчета фундаментов со сложной формой подошвы.

Для загрузки прямоугольной площади поверхности основания равномерно распределенной нагрузкой А. Лявом [2] были определены величины вертикальных сжимающих напряжений  $\sigma_z$ . В. Г. Короткин [3], используя функции напряжений акад. Б. В. Галеркина, получил формулы для всех составляющих напряжений и перемещений при действии равномерно распределенной нагрузки по прямоугольной площадке. Значения вертикальных напряжений представлены в виде:

$$\sigma_z = \frac{3qz^3}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \left\{ \arctg \frac{(x+a)(y+b)}{z\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \arctg \frac{(x+a)(y-b)}{z\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} + \right.$$

$$+ \arctg \frac{(x-a)(y-b)}{z\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \arctg \frac{(x-a)(y+b)}{z\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} +$$

$$\frac{z(x+a)(y+b)[(x+a)^2 + (y+b)^2 + 2z^2]}{[(x+a)^2 + z^2][(y+b)^2 + z^2]\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} -$$

$$\frac{z(x+a)(y-b)[(x+a)^2 + (y-b)^2 + 2z^2]}{[(x+a)^2 + z^2][(y-b)^2 + z^2]\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} +$$

$$\frac{z(x-a)(y-b)[(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2z^2]}{[(x-a)^2 + z^2][(y-b)^2 + z^2]\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} -$$

$$\left. \frac{z(x-a)(y+b)[(x-a)^2 + (y+b)^2 + 2z^2]}{[(x-a)^2 + z^2][(y+b)^2 + z^2]\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right\}.$$

При  $x = y = 0$  выражение для  $\sigma_z$  принимает вид:

$$\sigma_z = \frac{2q}{\pi} \left[ \arctg \frac{ab}{z\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} + \frac{abz(a^2 + b^2 + 2z^2)}{(a^2 + z^2)(a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \right].$$

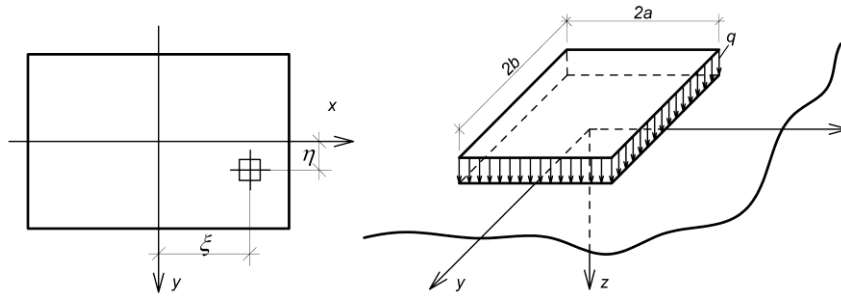


Рис. 1. Расчетная схема приложения прямоугольной нагрузки на основание

Напряжения для точек, расположенных на глубине  $z$  на прямой, проходящей через одну из угловых точек прямоугольной площадки загрузки, принимают вид [4]:

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{4abz}{(4a^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{4ab} + (1 - 2\mu) \left[ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{az} \right] \right\}, \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{4abz}{(4b^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{4ab} + (1 - 2\mu) \left[ \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{bz} \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{4abz(4a^2 + 4b^2 + 2z^2)}{(4a^2 + z^2)(4b^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} + \operatorname{arctg} \frac{4ab}{z\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} \right], \quad (3)$$

$$\tau_{zy} = \frac{qz^2}{\pi} a \left[ \frac{1}{z^2\sqrt{4a^2 + z^2}} - \frac{1}{(4b^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} \right], \quad (4)$$

$$\tau_{xz} = \frac{qz^2}{\pi} b \left[ \frac{1}{z^2\sqrt{4b^2 + z^2}} - \frac{1}{(4a^2 + z^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} \right], \quad (5)$$

$$\tau_{yx} = \frac{q}{2\pi} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{4b^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{4a^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}} + (1 - 2\mu) \left[ \ln \frac{2z}{z + \sqrt{4b^2 + z^2}} + \ln \frac{z + \sqrt{4a^2 + 4b^2 + z^2}}{z + \sqrt{4a^2 + z^2}} \right] \right\}. \quad (6)$$

Вертикальные напряжения  $\sigma_z$  по оси прямоугольной площадки загрузки равны учетверенным значениям напряжений  $\sigma_z$  в соответствующих точках, расположенных на удвоенной глубине на вертикалях, проходящих через углы площадки нагружения:

$$\sigma_z[z = z_i; y = 0; x = 0] = 4\sigma_z[z = 2z_i; y = a; x = b].$$

Для удобства вычислений составлены таблицы значений  $\sigma_z$  и  $\Theta$  и эпюры распределения напряжений  $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$  [3],[4].

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (7)$$

Для определения напряжений в основании крестообразного фундамента используем метод угловых точек.



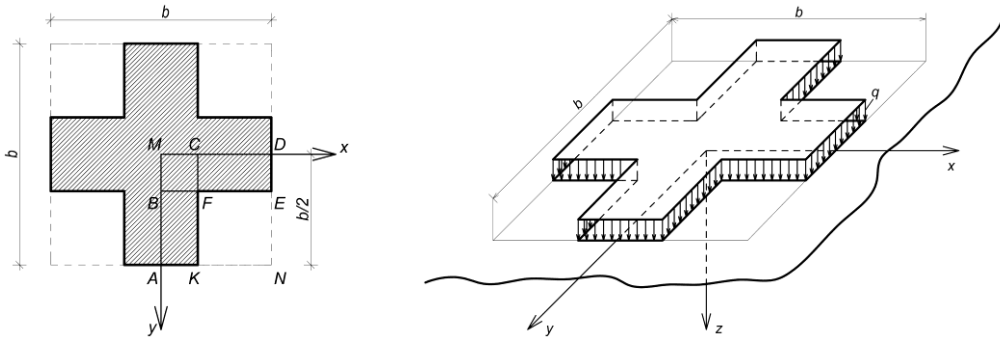


Рис. 2. Расчетная схема крестообразного фундамента при определении напряжений по методу угловых точек

Для определения напряжений в точке  $M$  на прямой, не проходящей через одну из угловых точек, целесообразно разделить площадь загрузки на три прямоугольника  $AMCK$ ,  $BMDE$  и  $BMCF$ . Затем определяются напряжения в точке  $M$  от загрузки каждого из указанных прямоугольников в отдельности, и полученные результаты суммируются:

$$\sigma = \sigma_{AMCK} + \sigma_{BMDE} - \sigma_{BMCF} \quad (8)$$

Вертикальные напряжения под углом загруженного прямоугольника определяются по формуле:

$$\sigma_z = K_c p, \quad (9)$$

где  $K_c$  – табличный коэффициент для определения сжимающих напряжений по вертикали, проходящей через угловую точку загруженного прямоугольника [3-5]. Вертикальные сжимающие напряжения под центром крестообразного фундамента на глубине  $z/2$  равны учетверенной величине напряжений  $\sigma_z$  на некоторой глубине  $z$  под углом загруженного прямоугольника в точке  $M$ .

На рис. 3 представлены эпюры распределения вертикальных напряжений от единичной нагрузки в основании крестообразного фундамента: точка  $M$  – под центром фундамента; точка  $D$  – по краю; точка  $N$  – между выступами фундамента.

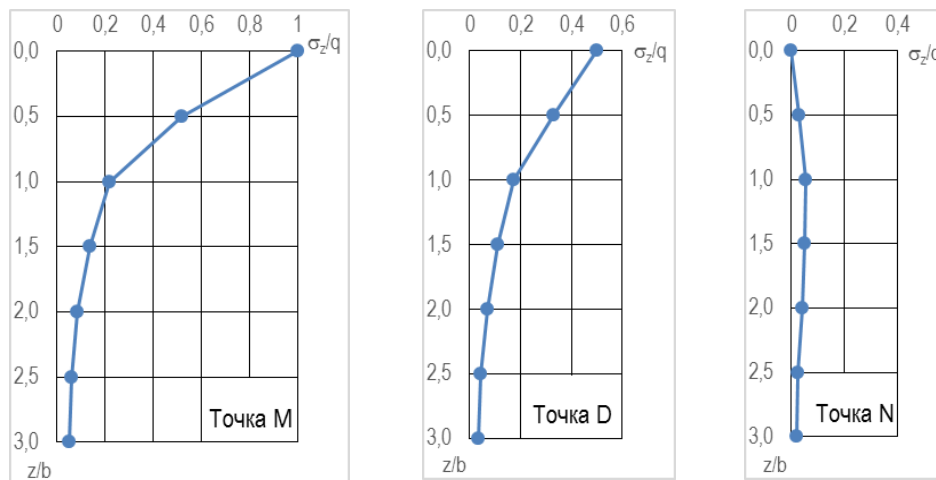


Рис. 3. Распределение вертикальных напряжений  $\sigma_z$  в основании крестообразного фундамента

Вертикальное перемещение точки на глубине  $z$  под углами прямоугольной загруженной площадки со сторонами  $a$  и  $b$  определяются по формуле [6]:

$$\omega_{\text{угл}}(z) = \frac{aq}{2E} (1 - \mu^2) \left( A - \frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} B \right), \quad (10)$$

$$A = \frac{1}{\pi} \left( \ln \frac{\sqrt{1+m^2+n^2}+m}{\sqrt{1+m^2+n^2}-m} + m \ln \frac{\sqrt{1+m^2+n^2}+1}{\sqrt{1+m^2+n^2}-1} \right);$$

где

$$B = \frac{n}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{m}{n\sqrt{1+m^2+n^2}}; \quad m = \frac{b}{a}; \quad n = \frac{z}{a}; \quad \mu - \text{коэффициент Пуассона.}$$

Значения  $A$  и  $B$  приведены в таблице, составленной М. Е. Харром [6].

Применяя принцип суперпозиции можно определить вертикальное перемещение любой точки в массиве грунта.

Для частного случая вертикальных перемещений поверхности грунта ( $z = 0$ ) значения коэффициента  $B$  в уравнении (10) равны нулю. Имеют смысл только величины коэффициента  $A$ , соответствующие  $n = 0$ .

При приложении нагрузки по прямоугольной площади шириной  $2a$  и длиной  $2b$  можно определить соответствующие вертикальные перемещения по формуле:

$$\omega = \frac{2aq}{E} (1 - \mu^2) K_0. \quad (11)$$

Значения безразмерного коэффициента  $K_0$  определяются по табл. 1 [5]. Осадку крестообразного фундамента можно определить по методу эквивалентного слоя угловых точек [5]. Осадка угловой точки загруженной прямоугольной области равна  $\frac{1}{2}$  осадки ее центра.

Соотношение между коэффициентами эквивалентного слоя для угловой точки прямоугольной, загруженной равномерно распределенной нагрузкой, и ее центром имеет вид:

$$A\omega_c = \frac{1}{2} A\omega_0, \quad (12)$$

где  $A\omega_c$  – коэффициент эквивалентного слоя для угловых точек прямоугольной площади загрузки, определяется по таблице [5].

Для определения осадки крестообразного фундамента используем метод угловых точек, согласно которому рассматриваемую точку  $M$  (рис. 2) располагают так, чтобы она была угловой. В этом случае осадка точки  $M$  поверхности грунта под действием равномерно распределенной нагрузки будет равна алгебраической сумме осадок грунта от соответствующих прямоугольных площадок загрузки, для которых она является угловой:

$$s_M = (h_{3AMCK} + h_{3BMDE} - h_{3BMCF}) m_{\text{вп}}, \quad h_3 = (A\omega_c) b, \quad (13)$$

где  $h_{3AMCK} = (A\omega_c)_{AMCK} \cdot b/6$ ;  $h_{3BMDE} = (A\omega_c)_{BMDE} \cdot b/6$ ;  $h_{3BMCF} = (A\omega_c)_{BMCF} \cdot b/6$ .

Используя принцип суперпозиции, осадку центра крестообразного фундамента определяем как сумму осадок угловой точки  $M$  симметричных прямоугольных площадей загрузки.

Произведем сравнение теоретических данных с результатами полевых натуральных штамповых испытаний крестообразного фундамента. Для полевых экспериментов использовался штамп с крестообразной формой подошвы при  $b = 94,8$  см, площадь подошвы  $5000$  см<sup>2</sup> в соответствии с ГОСТ 20276-2012. На опытной площадке №1 в основании штампа залегает связный грунт (суглинок мягкопластичный) с  $\gamma = 19,2$  кН/м<sup>3</sup>;  $c = 25,0$  кПа;  $\varphi = 19^\circ$ ;  $E = 17,0$  МПа. Результаты штамповых испытаний крестообразного фундамента показаны на рис. 4.

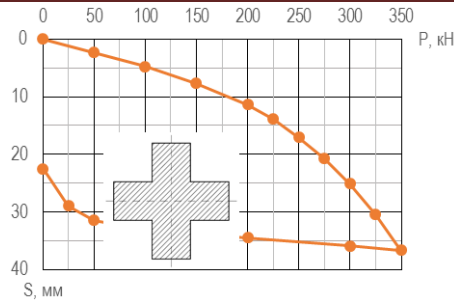


Рис. 4. Зависимость  $S=f(P)$  для крестообразного штампа (связный грунт)

По данным экспериментальных исследований в пределах линейной зависимости  $S=f(P)$  осадка крестообразного фундамента при  $P=0,100$  МПа составляет  $S=4,8$  мм; при  $P=0,150$  МПа соответственно  $S=7,6$  мм.

Вычислим теоретическую осадку крестообразного фундамента площадью подошвы  $5000 \text{ см}^2$  для инженерно-геологических условий площадки №1 по методу эквивалентного слоя угловых точек (рис. 8):

$$h_{\text{зАМСК}} = (A\omega_c)_{\text{АМСК}} \cdot \frac{b}{6} = 1,092 \cdot 15,8 = 17,25 \text{ см};$$

$$h_{\text{зБМДЕ}} = (A\omega_c)_{\text{БМДЕ}} \cdot \frac{b}{6} = 1,092 \cdot 15,8 = 17,25 \text{ см};$$

$$h_{\text{зБМCF}} = (A\omega_c)_{\text{БМCF}} \cdot \frac{b}{6} = 0,687 \cdot 15,8 = 10,85 \text{ см}.$$

При  $P=0,100$  МПа:

$$s_M = (h_{\text{зАМСК}} + h_{\text{зБМДЕ}} - h_{\text{зБМCF}}) m_{\text{вп}} = \\ = (17,25 + 17,25 - 10,85) \cdot \frac{0,793}{17,0} \cdot 0,100 = 0,110 \text{ см} = 1,10 \text{ мм}.$$

Осадка центра крестообразного фундамента составляет  $S=4s_M=4,40$  мм.

При  $P=0,150$  МПа:

$$s_M = (h_{\text{зАМСК}} + h_{\text{зБМДЕ}} - h_{\text{зБМCF}}) m_{\text{вп}} = \\ = (17,25 + 17,25 - 10,85) \cdot \frac{0,793}{17,0} \cdot 0,150 = 0,159 \text{ см} = 1,59 \text{ мм}.$$

Осадка центра крестообразного фундамента составляет

$$S=4s_M=6,37 \text{ мм}.$$

Таким образом, предложенный метод позволяет оценить напряженно-деформированное состояние основания крестообразного фундамента в пределах линейной зависимости  $S=f(P)$  [7].

Для оценки напряженно-деформированного состояния основания крестообразного фундамента была решена пространственная задача методом конечных элементов [8] с одновременным учетом прочностных и деформационных свойств грунта с использованием геотехнического комплекса Plaxis. Грунт в до предельного состоянии представляет собой сплошную линейно деформируемую среду, переходящую с последующим нагружением в предельное (пластическое) состояние в соответствии с критерием текучести (прочности) Мора-Кулона [9]. Расчет выполняется с использованием шаговой процедуры приложения нагрузки. По контакту подошвы фундамента с основанием принято условие полного прилипания. Расчетная область основания принималась с размерами  $10,0 \times 10,0 \times 15,0$  м (рис. 5).

Рассмотрим основные результаты исследования осадок фундаментов, представленные на рис. 6. Исследованиями установлено, что осадка фундамента

крестообразной формы при давлении  $P = 400$  кПа в связном грунте в 1,27 раза меньше осадки фундамента квадратной формы.

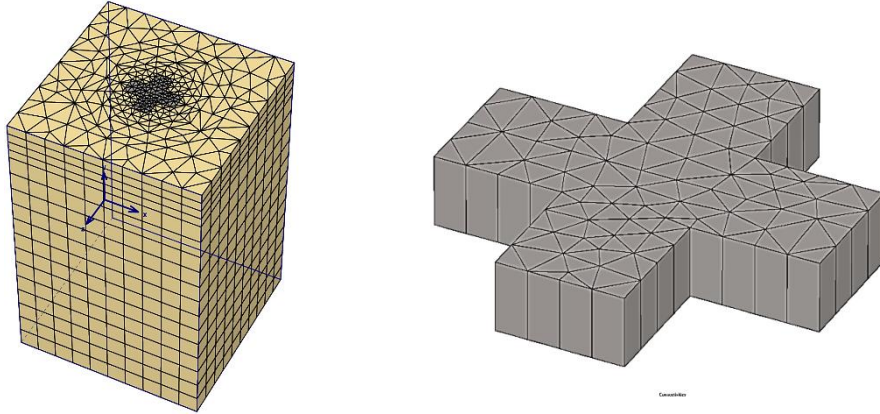


Рис. 5. Расчетная схема МКЭ (пространственная задача)

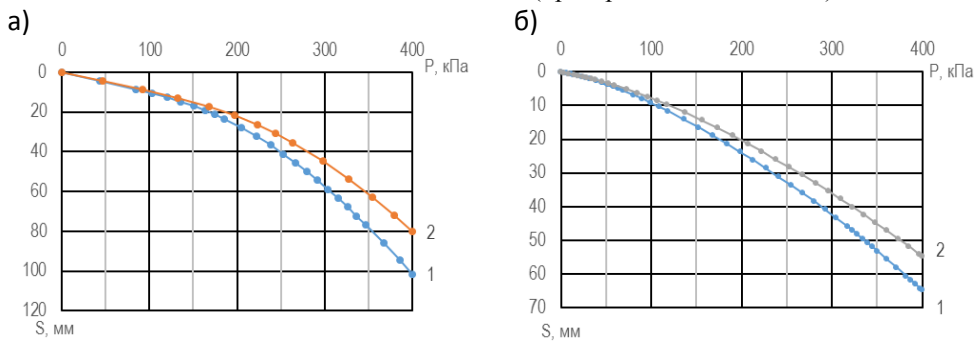


Рис. 6. Зависимости  $S=f(P)$  для связного (а) и несвязного грунта (б):  
1 – квадратный штамп; 2 – крестообразный штамп

Наличие выступов по подошве фундамента положительно влияет на работу грунта в основании по сравнению с моделью квадратной формы [7], [10].

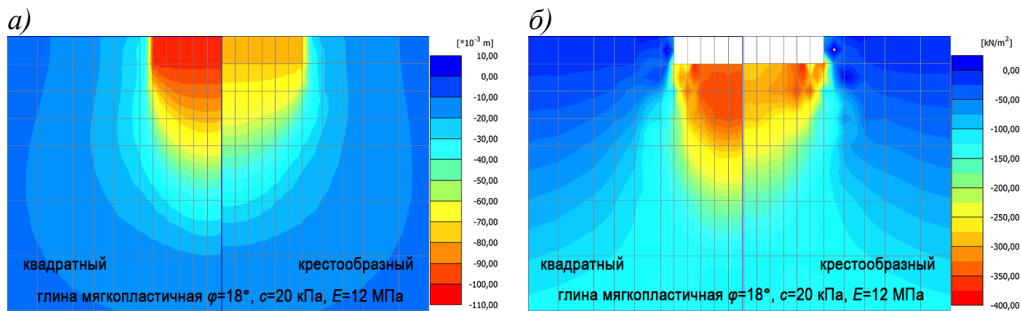


Рис. 7. Изолинии вертикальных перемещений (а) и вертикальных напряжений (б) в основании квадратного и крестообразного фундаментов для связного грунта при  $P = 400$  кПа

На рис. 7,а приведены изолинии вертикальных перемещений в основании (связный грунт) для квадратного и крестообразного фундаментов. Переход к крестообразной форме подошвы фундамента приводит к снижению величины наибольших вертикальных перемещений на уровне подошвы в 1,27 раза при  $P = 400$  кПа. Ширина зоны деформации для крестообразного фундамента в 1,25 раза больше, чем для квадратного фундамента за счет включения в работу большего объема грунта в активной зоне. На глубине  $0,5b$  вертикальные пе-

ремещения  $U_z$  составляют соответственно 82 мм (квадратный) и 63 мм (крестообразный штамп). Глубина зоны деформации квадратного и крестообразного фундамента при  $P = 400$  кПа соответственно составляет  $1,82b$  и  $1,76b$ .

Анализ распределения вертикальных напряжений  $\sigma_z$  в связном грунте показывает, что зафиксирована концентрация напряжений в плоскости подошвы, максимальные значения  $\sigma_z$  при  $P = 400$  кПа для квадратного и крестообразного штампов составили соответственно 380,9 кПа и 386,3 кПа. Из приведенных данных видно (рис. 7,б), что для фундаментов имеет место различный характер распределения и затухания напряжений  $\sigma_z$  с глубиной. Для крестообразного фундамента напряжения  $\sigma_z$  распределяются в активной зоне по большей площади и быстрее затухают с глубиной. На глубине  $0,75b$  от подошвы квадратного штампа значения  $\sigma_z$  снижаются 1,17 раза, для крестообразного штампа снижаются соответственно в 1,72 раза.

Для использования в проектной практике решений нелинейных задач механики грунтов представляется возможным выявить влияние факторов ( $\varphi$ ;  $c$ ;  $E$ ;  $\nu$ ;  $p$ ;  $H/b$ ;  $K$ ) на осадку  $S$  крестообразного фундамента. В качестве математической модели, связывающей величину осадки крестообразного фундамента с исходными параметрами, принята многофакторная степенная зависимость:

$$S = \frac{0,12 \cdot p^{1,90} \cdot (H/b)^{0,37} \cdot K^{1,05}}{E^{0,89} \cdot c^{0,66} \cdot \varphi^{1,49} \cdot \nu^{0,71}} \quad (\text{для связного грунта}); \quad (14)$$

$$S = \frac{2441,06 \cdot p^{1,60} \cdot (H/b)^{0,49} \cdot K^{0,82}}{E^{1,55} \cdot \varphi^{3,31}} \quad (\text{для несвязного грунта}), \quad (15)$$

где  $H$  – мощность сжимаемого слоя;  $K$  – масштабный коэффициент.

Сопоставление полученных нелинейных решений с данными статических испытаний фундаментов с различной формой подошвы указывает на их хорошее соответствие и возможность проектирования эффективных фундаментов со сложной формой подошвы, исходя из условия достижения предельно допустимых осадок.

#### Л и т е р а т у р а

1. Сорочан Е. А. Фундаменты промышленных зданий. – М.: Стройиздат, 1986. – 303 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
3. Короткин В. Г. Объемная задача для упругого изотропного полупространства // Сб. Гидроэнергопроект, 1938. – №4. – С. 52-85.
4. Флорин В. А. Основы механики грунтов, т. 1. – Ленинград: Госстройиздат, 1959. – 356 с.
5. Цытович Н. А. Механика грунтов. – М.: Госстройиздат, 1963. – 636 с.
6. Харр М. Е. Основы теоретической механики грунтов. М.: Стройиздат, 1971. – 320 с.
7. Van Baars S. The inclination and shape factors for the bearing capacity of footings // Soils and Foundations. – 2014. – Vol. 54. – №1. – P. 985-992.
8. Tezzon E., Tullini N, Minghini F. Static analysis of shear flexible beams and frames in adhesive contact with an isotropic elastic half-plane using a coupled FE-BIE model // Engineering Structures. – 2015. – Vol. 104. – №1. – P. 32-50.
9. Esen I. A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass// Finite Elements in Analysis and Design. – 2013. – Vol. 66.–№66.– P. 26-35.
10. Wei H.W., Wu Y.Z., Yu Z.H. Design parameter optimization of beam foundation on soft soil layer with nonlinear finite element // Journal of Central South University. – 2012. – Vol. 19. – №6. – P. 1753-1763.

#### References

1. Sorochan, E.A.(1986). *Fundamenty Promyshlennykh Zdaniy*, Moscow: Stroyizdat, 303 p.
2. Lyav, A. (1935). *Matematicheskaya Teoriya Uprugosti*, Moscow: ONTI, 674 p.

3. Korotkin, V.G. (1938). Obyomnaya Zadacha dly Uprugogo Izotropnogo Poluprostranstva, *Sb. Gidroenergoproekta*, №4, p. 52-85.
4. Florin, V. A. (1959). *Osnovy Mekhaniki Gruntov*, tom 1. Leningrad: Gosstroyizdat, 356 p.
5. Tzytovich, N. A. (1963). *Mekhanika Gruntov*, Moscow: Gosstroyizdat, 636 p.
6. Kharr, M. E. (1971). *Osnovy Teoreticheskoy Mekhaniki Gruntov*, Moscow: Stroyizdat, 320 p.
7. Van Baars, S. (2014). The inclination and shape factors for the bearing capacity of footings, *Soils and Foundations*, Vol. 54, №1, p. 985-992.
8. Tezzon, E., Tullini, N, Minghini, F. (2015). Static analysis of shear flexible beams and frames in adhesive contact with an isotropic elastic half-plane using a coupled FE–BIE model, *Engineering Structures*, Vol. 104, №1, p. 32-50.
9. Esen, I. (2013). A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 66, № 66, p. 26-35.
10. Wei, H.W., Wu, Y.Z., Yu, Z.H. (2012). Design parameter optimization of beam foundation on soft soil layer with nonlinear finite element, *Journal of Central South University*, Vol. 19, №6, p. 1753-1763.

### SOIL BASEMENT ESTIMATIONS OF THE CROSS-SHAPED ISOLATED FOUNDATIONS

S.P. Ivanov, A. V. Glushkov,  
*Volga State University of Technology, Russia, Yoshkar-Ola.*

The article presents the results of analytical numerical calculations of the cruciform foundations under the uniformly distributed load. The distributions of the stresses and displacements in active zone of the cross-shaped foundations are featured. The comparison of experimental and analytical settlements of complex form foundations is carried out. Multifactor power dependences are gained to define the settlements of cruciform foundations on cohesive and non-cohesive soil basement. The ability of the effective foundation forms using the condition of the maximum allowable settlement is featured.

KEY WORDS: finite element method, corner point method, cruciform foundation, stress-strain analysis.



### ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ С КОНЦЕВЫМИ ЗОНАМИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Б.Б. КАЗБЕКОВ, аспирант  
*Институт математики и механики НАН Азербайджана*  
*Азербайджан, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9;*  
*e-mail: brrustam@mail.ru*

Дается решение задачи о поперечном изгибе тонкой пластины, заземленной по краям отверстий и ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных сквозных трещин с пластическими концевыми зонами, коллинеарных осям абсцисс и ординат неравной длины. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением моментов вне круговых отверстий и прямолинейных трещин с концевыми зонами пластических деформаций. Удовлетворяя граничным условиям, решение задачи теории изгиба пластин сводится к двум бесконечным системам алгебраических уравнений и двум сингулярным интегральным уравнениям. Затем каждое сингулярное интегральное уравнение сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: перфорированная тонкая пластина, прямолинейные трещины с концевыми зонами, поперечный изгиб, зоны пластических деформаций.

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную упругую пластину, опертую или заземленную по краям периодической системой круговых отверстий, которая изгибается под действием постоянной поперечной нагрузки. Материал

пластины принят упруго-идеально пластическим, удовлетворяющим условию пластичности Треска-Сен-Венана. Считаем, что круговые отверстия имеют радиус  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ) и центры в точках  $P_{m_1} = m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 2h_* \exp(i\alpha)$ ,  $h_* > 0$ ,  $\text{Im } \omega_2 > 0$  (рис. 1). Изотропная пластина ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных сквозных трещин коллинеарных осей абсцисс и ординат. Действие поперечной нагрузки будет стимулировать возникновение в вершинах трещин зон пластических деформаций.

Рассмотрим задачу о начальном развитии пластических деформаций на продолжении трещин. Исследование напряженно-деформированного состояния пластины с двоякопериодической системой круговых отверстий с прямолинейными сквозными трещинами показывает, что первые зоны пластических деформаций возникнут на продолжении линий трещин. В соответствии с моделью Леонова-Панасюка-Дагдейла [1] пластическая зона будет представлять собой узкий слой на продолжении трещин. Экспериментально показано, что зоны пластических деформаций будут представлять собой отрезки, расположенные на продолжении трещины. В тонких пластинах зоны пластических деформаций физически могут реализовываться в виде плоскости скольжения.

Берега трещин вне концевых зон свободны от внешних нагрузок. Принято, что в прочесе деформирования изотропной тонкой пластины противоположные берега трещин не контактируют между собой. Требуется определить напряженно-деформированное состояние изотропной тонкой пластины по крайевым условиям, выражающим отсутствие смещений вдоль контура круговых отверстий и внешних нагрузок на берегах двоякопериодической системы прямолинейных сквозных трещин с учетом пластических деформаций на продолжении трещин. Таким образом, требует решения следующая краевая задача теории изгиба пластин:

$$D\Delta\Delta W(x, y) = q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial W(\tau)}{\partial x} + i \frac{\partial W(\tau)}{\partial y} = 0, \quad \tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2 \quad \text{на контурах отверстий}, \quad (2)$$

$$M_n(t) = 0, \quad N_n(t) + \frac{\partial H_{nt}}{\partial t} = 0 \quad \text{на берегах трещин}, \quad (3)$$

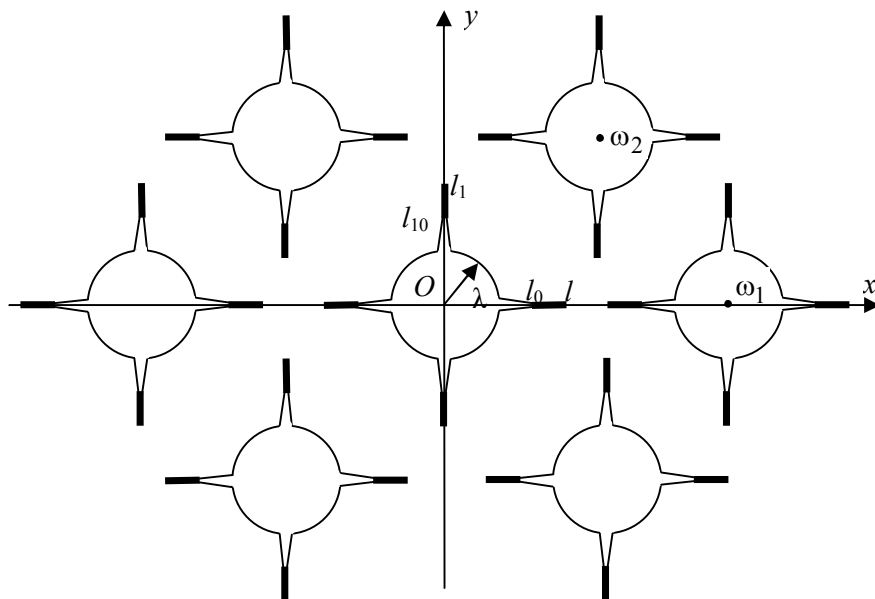


Рис. 1. Расчетная схема задачи об изгибе пластины

$M_n(t) = M_s$ ,  $N_n(t) + \frac{\partial H_{nt}}{\partial t} = 0$  на берегах зон пластических деформаций.

Здесь  $q$  – поперечная нагрузка;  $t$  – аффикс точек берегов трещин и зон пластических деформаций;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $h$  – толщина пластины.

Размеры зон пластических деформаций изначально неизвестны; их следует определить в процессе решения задачи из дополнительного условия.

Решение поставленной задачи строится по принципу суперпозиции:

$$W(x, y) = W_0(x, y) + W_1(x, y),$$

$$W_0(x, y) = \frac{qz^2\bar{z}^2}{64D} + \frac{2q}{D} \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_0(z) + \chi_0(z)],$$

$$W_1(x, y) = \frac{2q}{D} \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)].$$

На основании краевых условий на жестко защемленных краях отверстий имеем:

$$\frac{\tau\bar{\tau}}{32} + \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\tau\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия на берегах трещин и зон пластических деформаций имеют вид:

$$\varepsilon\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} + \frac{3t^2}{32} = f_0 + iC \quad \text{на } L_1, \quad (5)$$

$$\varepsilon\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + t_1\overline{\Phi'(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} + \frac{3t_1^2}{32} = f_0 + iC_* \quad \text{на } L_2,$$

Здесь  $t$  – аффикс точек берегов трещин и зон пластических деформаций, направленных коллинеарно осям абсцисс и ординат соответственно;  $C$  и  $C_*$  – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условия равновесия;  $L_1$  и  $L_2$  – совокупность берегов трещин и зон пластических деформаций, коллинеарно соответственно осям абсцисс и ординат.

Постановка задачи включает случаи дефектов типа трещин ( $\varepsilon = -(3+\nu)/(1-\nu)$ ) и жестких включений ( $\varepsilon = 1$ ).

**Решение краевой задачи.** Аналитические функции  $\Phi(t)$ ,  $\Psi(t)$  ищем в виде [2, 3]:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (6)$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z);$$

$$\Phi_0(z) = \varphi_0'(z), \quad \Psi_0(z) = \chi_0''(z);$$

$$\varphi_0(z) = \varphi_{01}(z) + \varphi_{10}(z), \quad \chi_0(z) = \chi_{01}(z) + \chi_{10}(z);$$

$$\varphi_{01}(z) = A_1z + A_2z^3 + A_0\xi(z) - \alpha_2\lambda^2\zeta(z); \quad (7)$$

$$\chi_{01}(z) = B_0 + B_1z^2 + B_2z^4 - A_0\xi_*(z) - \beta_2\lambda^2\nu(z) + \alpha_2\lambda^2\zeta_*(z);$$

$$\nu(z) = \int \zeta(z)dz, \quad \xi(z) = \int \nu(z)dz, \quad \zeta_*(z) = -\int Q(z)dz;$$

$$\xi_*(z) = -\int \nu_*(z)dz, \quad \nu_*(z) = -\int \zeta_*(z)dz$$

$$\varphi_{10}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k-1)}(z);$$



$$\chi_{10}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k-2)}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} Q^{(2k-1)}(z); \quad (8)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\pi i(1+\kappa)} \int_{L_1} g(t) \zeta(t-z) dt + A'; \quad (9)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{\pi i(1+\kappa)} \int_{L_1} g(t) [\kappa \zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] dt + B';$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{L_2} g_1(t_1) \zeta(it_1 - z) dt_1 + A'';$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{L_2} [g_1(t_1) \kappa \zeta(it_1 - z) - [Q(it_1 - z) + it_1 \gamma(it_1 - z)] g_1(t_1)].$$

Интегралы в (12) берутся по линиям  $L_1$  и  $L_2$

$$L_1 = [-l, -\lambda] + [\lambda, l], \quad L_2 = [-l_1, -\lambda] + [\lambda, l_1],$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n} \left[ \frac{1}{z - P_{mn}} + \frac{1}{P_{mn}} + \frac{z}{P_{mn}^2} \right]; \quad \gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[ \frac{1}{(z - P_{mn})^2} - \frac{1}{P_{mn}^2} \right];$$

$$\frac{\gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^{2k+2}} + \sum_{m,n} \frac{1}{(z - P_{mn})^{2k+2}} \quad (k=0,1,2,\dots);$$

$$Q(z) = \sum_{m,n} \left[ \frac{\bar{P}_{mn}}{(z - P_{mn})^2} - 2z \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^3} - \frac{\bar{P}_{mn}}{P_{mn}^2} \right];$$

$$\frac{Q^{(k)}(z)}{(-1)^k (k+1)!} = \sum_{m,n} \frac{\bar{P}_{mn}}{(z - P_{mn})^{k+2}} \quad (k=2,3,\dots).$$

Потенциалы (6)-(9) выбираются так, что  $w(x, y)$  является двоякопериодической функцией. Также постоянные  $A_i, B_i$  подбираются таким образом, что функция  $w_0(x, y)$  двоякопериодическая. Используя условия периодичности функции  $w_0(x, y)$  и свойства введенных функций, находим, что

$$A_0 = \frac{\omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2}{32\pi i}; \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{1}{96} \left[ \delta_1 \frac{\bar{\omega}_1 \omega_2 - \bar{\omega}_2 \omega_1}{2\pi i \omega_1} - 1 \right]; \quad B_2 = \frac{\gamma_2 \bar{\omega}_1 - \gamma_1 \bar{\omega}_2}{\omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2};$$

$$\beta_2 \lambda^2 \delta_1 + \alpha_2 \lambda^2 (\gamma_1 + \bar{\delta}_1) - 2A_1 \bar{\omega}_1 - 2B_1 \omega_1 = A_0 L_1(\omega); \quad (11)$$

$$\beta_2 \lambda^2 \delta_2 + \alpha_2 \lambda^2 (\gamma_2 + \bar{\delta}_2) - 2A_1 \bar{\omega}_2 - 2B_1 \omega_2 = A_0 L_2(\omega);$$

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1 + \frac{1}{6} \left[ \delta_1 \omega_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\delta}_1 \bar{\omega}_1^2 - \gamma_1 \omega_1^2 \right]; \quad (12)$$

$$L_2(\omega) = \bar{\xi}_2 - \gamma_2^{**} - \pi i \bar{\omega}_2 + \frac{1}{6} \left[ \delta_2 \omega_2 \bar{\omega}_2 - \bar{\delta}_2 \bar{\omega}_2^2 - \gamma_2 \omega_2^2 \right];$$

$$\xi_1 = 2\xi \left( \frac{\omega_1}{2} \right) + \frac{\delta_1 \omega_1^2}{8}; \quad \xi_2 = 2\xi \left( \frac{\omega_2}{2} \right) + \frac{\delta_2 \omega_2^2}{8};$$

$$\gamma_1^{**} = 2\nu^* \left( \frac{\omega_1}{2} \right) - \bar{\omega}_1 \nu \left( \frac{\omega_1}{2} \right) + \pi i \bar{\omega}_1 + \frac{\gamma_1 \omega_1^2}{8} - \frac{\gamma_1^* \omega_1}{2};$$

$$\gamma_2^{**} = 2\nu^* \left( \frac{\omega_2}{2} \right) - \bar{\omega}_2 \nu \left( \frac{\omega_2}{2} \right) + \pi i \bar{\omega}_2 + \frac{\gamma_2 \omega_2^2}{8} - \frac{\gamma_2^* \omega_2}{2}.$$

Следовательно, с учетом выражений (10)-(11) соотношения (6)-(9) дают двоякопериодическую функцию  $w(x,y)$ . Постоянная  $B_0$  в формуле для функции  $\chi_0(z)$  находится из условия равенства  $w(x,y)$  нулю на контуре кругового отверстия  $L_{0,0}$ . Из условий симметрии задачи относительно координатных осей, находим, что

$$\text{Im } \alpha_{2k} = 0, \quad \text{Im } \beta_{2k} = 0 \quad (k=0,1,2,\dots). \quad (13)$$

Представления (6)–(9) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением смещений. Неизвестные искомые функции  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$  ( $k=1,2,\dots$ ) должны быть найдены из краевых условий (4)-(5). В силу выполнения условия двоякопериодичности система граничных условий (4) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре  $L_{0,0}$  ( $\tau = \lambda e^{i\theta}$ ), а система граничных условий (5) вырождается в краевое условие на  $L_1$  и  $L_2$ .

К основным представлениям рассматриваемой задачи (6)-(9) следует добавить дополнительные условия

$$\int_{-l}^{-\lambda} g(t) dt = 0; \quad \int_{\lambda}^l g(t) dt = 0; \quad (14)$$

$$\int_{-l_1}^{-\lambda} g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \int_{\lambda}^{l_1} g_1(t_1) dt_1 = 0.$$

Эти условия обеспечивают однозначность углов поворота срединной плоскости при обходе контуров трещин [4].

Краевое условие (4) преобразуем относительно аналитических функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ :

$$\Phi_0(\tau) + \bar{\Phi}_0(\tau) - [\tau \Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta} = f_1(\theta) + f_2(\theta) - \frac{\tau \bar{\tau}}{32} + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta). \quad (15)$$

$$f_1(\theta) + f_2(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \bar{\Phi}_1(\tau) + [\tau \Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (16)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \bar{\Phi}_2(\tau) + [\tau \Phi'_2(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}.$$

Считается, что функции  $f_1 + if_2$ ,  $\varphi_1 + i\varphi_2$  на контуре кругового отверстия  $|\tau| = \lambda$  разлагаются в комплексные ряды Фурье, имеющие в силу симметрии рассматриваемой задачи вид:

$$f_1(\theta) + f_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } F_{2k} = 0; \quad (17)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } D_{2k} = 0;$$

$$F_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-2ki\theta} d\theta, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (18)$$

$$D_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_1 + \varphi_2) e^{-2ki\theta} d\theta.$$

Подставив в (18) выражения (17) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов находим величин  $F_{2k}$ ,  $D_{2k}$ :

$$F_{2k} = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} g^*(t) f_{2k}(t) dt, \quad g^*(t) = \frac{g(t)}{i(1+\kappa)}, \quad (19)$$

$$D_{2k} = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \int_{L_2} g_1(t_1) \varphi_{2k}(t_1) dt_1.$$

Ввиду громоздкости функций  $f_{2k}(t)$  и  $\varphi_{2k}(t_1)$  в явном виде не приводятся.

Для нахождения коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ , применяем метод степенных рядов. Подставляя в левую часть краевого условия (15) вместо аналитических функций  $\Phi_0(\tau)$ ,  $\overline{\Phi_0(\tau)}$ ,  $\Phi'_0(\tau)$  и  $\Psi_0(\tau)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а правую часть (15) вместо  $f_1 + if_2$ ,  $\varphi_1 + i\varphi_2$  ряды Фурье (17) и применяя процедуру метода степенных рядов, получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ . После некоторых преобразований получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_{2k}$ :

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{j=1}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2j+2} + b_j \quad (j=0,1,2,\dots). \quad (20)$$

Неизвестные коэффициенты  $\beta_{2k}$  определяются из уравнений:

$$\beta_2 = \frac{1}{1-\lambda^2 \varepsilon_3} \left[ \varepsilon_1 - A'_0 + \varepsilon_2 \alpha_2 \lambda^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \quad (21)$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3) \alpha_{2j+2} - A'_{-2j-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2}.$$

Таким образом, решая краевой задачи (4), определение искомым коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$  сведено к бесконечным алгебраическим уравнениям, в правой части которых имеются величины, зависящие в виде интегралов от искомым функций  $g(x)$  и  $g_1(y)$ . Для определения искомым функций  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  имеются граничные условия (5) на берегах трещин.

Требую, чтобы функции (6)-(9) удовлетворяли краевому условию на контуре трещины  $L_1$ , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно  $g_*(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\varepsilon}{\pi} \int_{L_1} g_*(t) \zeta(t-x) dt + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) [\kappa \zeta(t-x) + \\ & + Q(t-x) - (t-x) \gamma(t-x)] dt + H(x) = iC + f_0, \quad (22) \\ & H(x) = \frac{3x^2}{32} - \kappa A' + \overline{A'} + \overline{B'} + (1+\varepsilon) \Phi_*(x) + x \Phi'_*(x) + \Psi_*(x), \\ & \Phi_*(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x), \quad \Psi_*(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x). \end{aligned}$$

Таким же образом, удовлетворяя граничному условию на контуре  $L_2$ , получаем еще одно сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции  $g_1(y)$ :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1+\varepsilon}{\pi i(1+\kappa)} \int_{L_2} \left\{ g_1(t_1) \left[ i\zeta(it-iy) - \overline{i\zeta(it-iy)} \right] + \right. \\
 & \left. + \overline{g_1(t_1)} \left[ iQ(it-iy) + (it-iy)\overline{\gamma(it-iy)} - \overline{i\zeta(it-iy)} \right] \right\} dt_1 + N(y) = iC_* + f_0, \\
 & N(y) = -\kappa A'' + \overline{A''} + \overline{B''} - \frac{3y^2}{32} + \varepsilon \overline{\Phi_*(iy)} + iy \overline{\Phi'_*(iy)} + \overline{\Psi_*(iy)}, \\
 & \Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi_*(x) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Используя условия [4], обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах разрезов  $L_1$  и  $L_2$ ,

$$\operatorname{Re} \int_{-l}^{-\lambda} \bar{t}g(t)dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda}^l \bar{t}g(t)dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{-l_1}^{-\lambda} \bar{t}_1g_1(t_1)dt_1 = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda}^{l_1} \bar{t}_1g_1(t_1)dt_1 = 0,$$

находим, что  $C = 0$ ;  $C_* = 0$ .

Для решения сингулярных интегральных уравнений (22), (23) воспользуемся разложением функций  $\zeta(z)$ ,  $\gamma(z)$ ,  $Q(z)$  в основном параллелограмме периодов. Каждое сингулярное интегральное уравнение приводим к стандартному виду с помощью замены переменных. Далее применяя процедуру алгебраизации [5, 6] вместо каждого интегрального уравнения получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим правильные решетки, имеющие наибольшее практическое применение.

1) правильная треугольная решетка ( $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 2 \exp(i\pi/3)$ ). Находим по полученным формулам значения постоянных  $A_0$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ :

$$A_0 = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi}, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = 0.$$

Постоянные  $L_1(\omega)$  и  $L_2(\omega)$  в системе для определения  $A_1$  и  $B_1$  в этом частном случае имеют вид:

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1, \quad L_2(\omega) = \frac{L_1(\omega)}{\sqrt[3]{e^{\pi i}}},$$

а постоянные  $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{16\pi} L_1(\omega); \quad \varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_4 = 0; \quad \varepsilon_5 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_6 = 0.$$

б) правильная квадратная решетка ( $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 2i$ ). Для этого случая

$$A_0 = -\frac{1}{4\pi}, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{\gamma_1}{192\pi};$$

$$L_1(\omega) = \bar{\xi}_1 - \gamma_1^{**} - \pi i \bar{\omega}_1 - \frac{2}{3}\gamma_1, \quad L_2(\omega) = -iL_1(\omega);$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{8\pi} L_1(\omega); \quad \varepsilon_2 = 0; \quad \varepsilon_3 = \frac{\pi}{4}; \quad \varepsilon_4 = 0; \quad \varepsilon_5 = \frac{2\gamma_1 + \pi}{4}; \quad \varepsilon_6 = 0.$$

**Численные результаты.** Для определения искомых величин  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $g^*(t_k)$ ,  $g_1(t_k)$  необходимо совместное решение системы, полученной на основании алгебраизации основных уравнений.

Каждое из сингулярных интегральных уравнений (22), (23) сводилось к конечной системе алгебраических уравнений. Из-за неизвестных размеров зон пластических деформаций полученная объединенная алгебраическая система уравнений оказывается нелинейной. Решение рассматриваемой задачи и, соответственно сингулярных интегральных уравнений (22), (23), ищется в классе всюду ограниченных функций, поскольку напряжения в изотропной упругой пластине со сквозными трещинами с концевыми пластическими зонами ограничены. Как известно из теории краевых задач, такое решение существует при дополнительных условиях (условиях разрешимости краевой задачи).

Приводя каждое сингулярное интегральное уравнение (22), (23) к стандартной форме, применяем интерполяционный полином Лагранжа, построенный по чебышевским узлам и квадратурные формулы типа Гаусса (метод Мультиппа-Каландия). Таким образом, каждое сингулярное интегральное уравнение первого рода сводится к конечной системе алгебраических уравнений, связанных с двумя бесконечными системами линейных алгебраических уравнений (20), (21). Чтобы замкнуть полученную объединенную алгебраическую систему, состоящую из двух бесконечных систем алгебраических уравнений (20), (21) и двух конечных систем уравнений, нужно добавить еще два уравнения, определяющие размеры концевых зон пластических деформаций на продолжении трещин. Эти уравнения получаем, записывая условия разрешимости краевой задачи:

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k g_k^0(\tau_m) \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2M} \pi, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k g_{1k}^0(\tau_m) \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0.$$

Таким образом, получена замкнутая алгебраическая система, полностью определяющая решение рассматриваемой упругопластической задачи о поперечном изгибе тонкой пластины.

Для определения предельного состояния изгибаемой тонкой пластины, при котором произойдет рост трещин, используем критерий хрупкого разрушения пластины, в качестве которого принимаем критерий критического раскрытия берегов трещин у основания пластической зоны. Согласно указанному критерию рост развитие трещин имеет место, когда раскрытие берегов трещин в вершине у основания пластической зоны достигает предельного для материала пластины значения  $\delta_{cr}$ , т.е. при выполнении условий

$$\int_{-l}^{l_0} g(t) dt = -i\delta_{cr}, \quad \int_{-l_1}^{l_0} g_1(t) dt = i\delta_{cr}, \quad (25)$$

Представим условия (25) в дискретном виде, используя указанные выше замены переменных и квадратурную формулу Гаусса

$$\frac{1-h_1^2}{2\sqrt{2M}} \sum_{k=1}^{M_1} \frac{p_k^0}{\sqrt{(1-h_1^2)(1+\tau_k)+h_1^2}} = \delta_{cr}, \quad (26)$$

$$-\frac{1-\lambda_2^2}{2\sqrt{2M}} \sum_{n=1}^{M_2} \frac{r_n^0}{\sqrt{(1-\lambda_2^2)(1+\tau_n)+\lambda_2^2}} = \delta_{cr},$$

где  $M_1, M_2$  – число чебышевских узлов, принадлежащих интервалам  $(l_0, l)$ ,  $(l_{10}, l_1)$ .

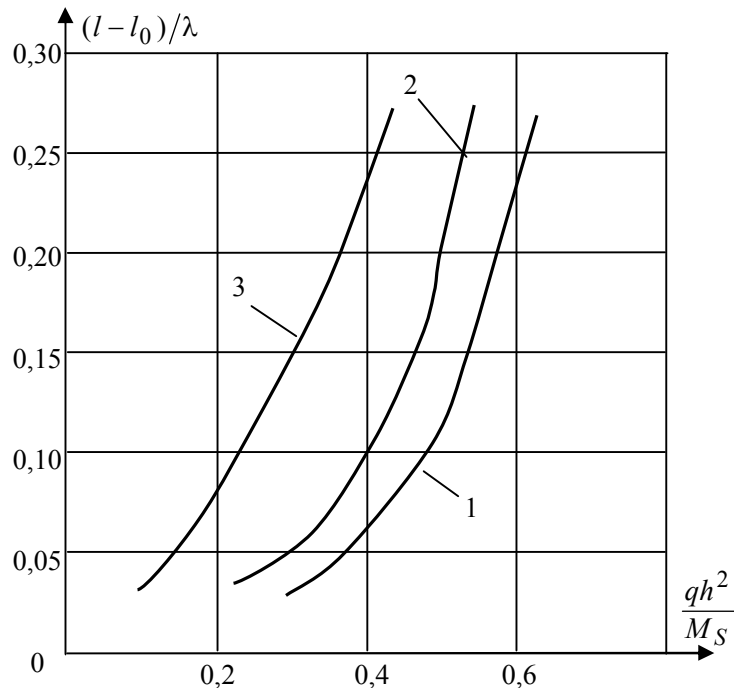


Рис. 2. Зависимость длины концевой зоны пластических деформаций  $(l_0 - l)$  при  $l = 1,5\lambda$  и значениях радиусов отверстий  $\lambda = 0,3; 0,4; 0,5$  (кривые 1-3) для треугольной сетки отверстий

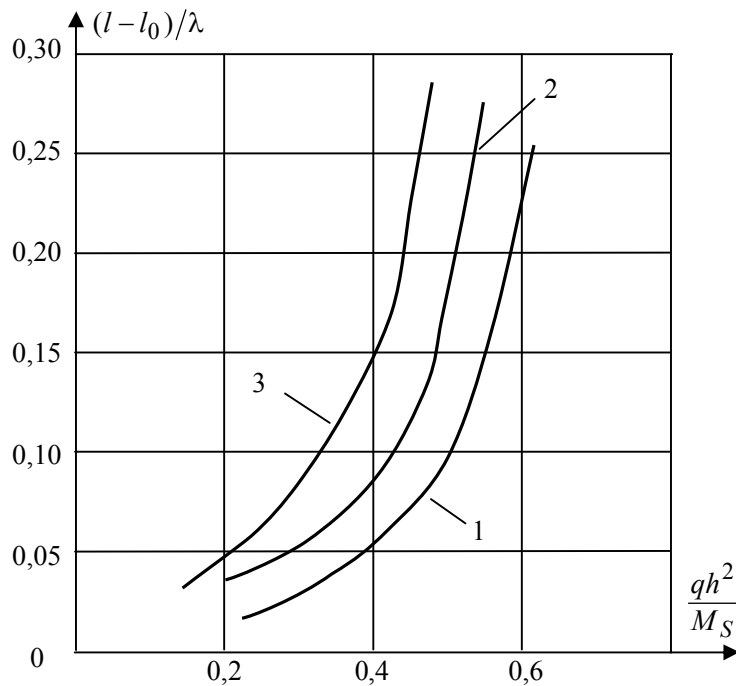


Рис. 3. Зависимость длины концевой зоны пластических деформаций  $(l_0 - l)$  при  $\lambda = 0,3$  и значениях длины трещин  $l = 1,10\lambda; 1,25\lambda; 2,00\lambda$  (кривые 1-3)

Полученная объединенная алгебраическая система является нелинейной из-за заранее неизвестных размеров зон пластических деформаций, поэтому ее

удобно решать методом последовательных приближений. В каждом объединенная алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений  $M$  порядка  $M=40$ .

На рис. 2 представлена зависимость длины концевой зоны пластических деформаций  $(l_0 - l)$  при  $l=1,5\lambda$  и значениях радиусов отверстий  $\lambda=0,3; 0,4; 0,5$  (кривые 1-3) для треугольной сетки отверстий. На рис. 3 аналогичная зависимость показана для  $\lambda = 0,3$  и значениях длины трещин  $l = 1,10\lambda; 1,25\lambda; 2,00\lambda$  (кривые 1-3). Совместное решение объединенной алгебраической системы и условий (26) позволяет, имея заданные характеристики трещиностойкости материала, определить критическую диаграмму разрушения поперечной изгибающей нагрузкой тонкой пластины, опертой или защемленной по краям периодической системой круговых отверстий, размеры зон пластических деформаций для состояния предельного равновесия, при которых имеет место рост трещин.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
2. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. – 556 с.
3. *Мирсалимов В.М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. – Баку.: Элм, 1984. – 124 с.
4. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. *Мирсалимов В.М.* Неодномерные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
6. *Ladopoulos E.G.* Singular integral equations, Linear and non-Linear theory and its applications in science and engineering. – Berlin: Springer Verlag, 2000. – 553 p.

#### R e f e r e n c e s

1. *Panasyk, VV.* (1991). Mechanics of quasibrittle fracture of materials. Kiev: Naukova Dumka, 416 p.
2. *Grigolyuk EI, Filshhtinskii LA.* (1970). Perforated plates and shells. Moscow: Nauka, 556 p.
3. *Mirsalimov VM.* (1984). Fracture of elasto - and elastoplastic bodies with cracks. Baku: Science. 124 p.
4. *Savruk MP.* (1981). Two-dimensional problem of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka, 324 p.
5. *Mirsalimov VM.* (1987). Non-one dimensional elastoplastic problems. Moscow: Nauka, 256 p.
6. *Ladopoulos EG.* (2000). Singular integral equations, Linear and non-Linear theory and its applications in science and engineering. Berlin: Springer Verlag, 553 p.

### **TRANSVERSE BENDING OF A THIN PERFORATED PLATE WEAKENED BY RECTILINEAR CRACKS WITH END ZONES OF PLASTIC DEFORMATION**

B.B. Kazbekov

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

We give a problem solution for transverse bending of a thin plate, clamped at holes edges and weakened by doubly periodic system of rectilinear through cracks with unequal length, collinear to abscissa and ordinate axes plastic end zones. We construct the general representation of the solutions describing the class of problems with a doubly periodic distribution of moments out of the circular holes and rectilinear cracks with end zones of plastic deformations. Satisfying the boundary conditions, the solution of the plate bending theory problem is reduced to two infinite systems of algebraic equations and two singular integral equations. Then, each of the singular integral equations reduces to finite system of linear algebraic equations.

**KEYWORDS:** perforated thin plate, rectilinear crack with end zones, transverse bending, zones of plastic deformation.

## Расчет и проектирование строительных конструкций

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ (КОМПЬЮТЕРНОЙ) МОДЕЛИ МНОГОРЕБРИСТОГО ПЕРЕКРЫТИЯ

А.С. МАРКОВИЧ, канд. тех. наук, доцент  
Российский университет дружбы народов,  
115419, г. Москва, Орджоникидзе, д. 3, [tuao@yandex.ru](mailto:tuao@yandex.ru)

*В последние несколько десятков лет метод конечных элементов широко применяется для исследования на ЭВМ напряженно-деформированного состояния, как отдельных строительных конструкций, так и целых зданий, сооружений и комплексов. Как правило, дискретная конечно-элементная модель любого здания или сооружения состоит из набора конечных элементов различных размерностей, которые стыкуются между собой. Неправильная стыковка плохо совместимых конечных элементов ведет к искажению расчетной модели в целом и как следствие к заведомо ошибочным результатам расчета. Данная проблема остро стояла на раннем этапе развития численных методов, актуальна и сегодня. Автор статьи ставит цель вернуться к обсуждению данной проблемы. В качестве объекта исследования рассмотрено монолитное многоребристое перекрытие, для моделирования которого требуется использовать разные типы конечных элементов.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** компьютерное моделирование, численные методы, метод конечных элементов, расчетные модели конструкций, многоребристые перекрытия

Аналитические методы расчета многоребристых (кессонных) перекрытий, разработанные в докомпьютерный период, изложены во многих пособиях по железобетонным конструкциям. Эти методы довольно громоздки и применимы только в простых случаях для перекрытий с несложной конфигурацией ребер. Казалось бы, с развитием численных методов расчета, используя весь имеющийся набор конечных элементов (КЭ) [1], особых трудностей при моделировании на ЭВМ подобных конструкций возникать не должно.

Однако как показывает практический опыт, расчетные модели, которыми оперируют расчетчики, выдавая их за адекватные, по своему физическому смыслу в ряде случаев далеки от реальной работы конструкции. Причиной этого является необходимость стыковки в узлах расчетной модели КЭ различной размерности. Этой проблеме посвящено большое количество публикаций [3, 5, 6, 7], а дискуссии о правомерности сочетания тех, или иных КЭ в дискретной расчетной схеме продолжают не один десяток лет.

В настоящей статье автор ставит цель провести анализ расчетных моделей многоребристых перекрытий, используя стандартный набор КЭ. В качестве примера рассмотрено монолитное железобетонное кессонное перекрытие каркасного здания, пролетом 9,2 м (рис. 1). Шаг балок (ребер) и толщина плиты составляют 2 м и 70 мм соответственно. Балки (ребра) сечением 400×300 мм опираются на колонны, имеющие квадратное сечение 400×400 мм. При создании расчетной схемы могут использоваться следующие компьютерные модели перекрытия (рис. 2).

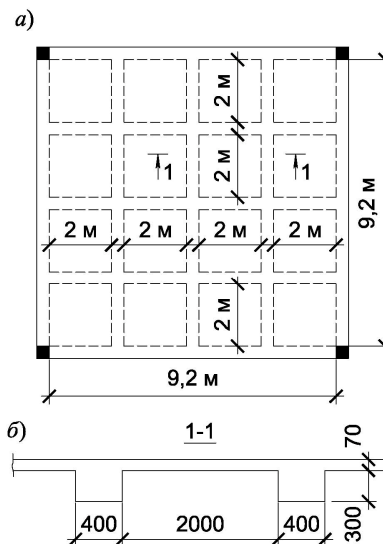


Рис. 1. План перекрытия



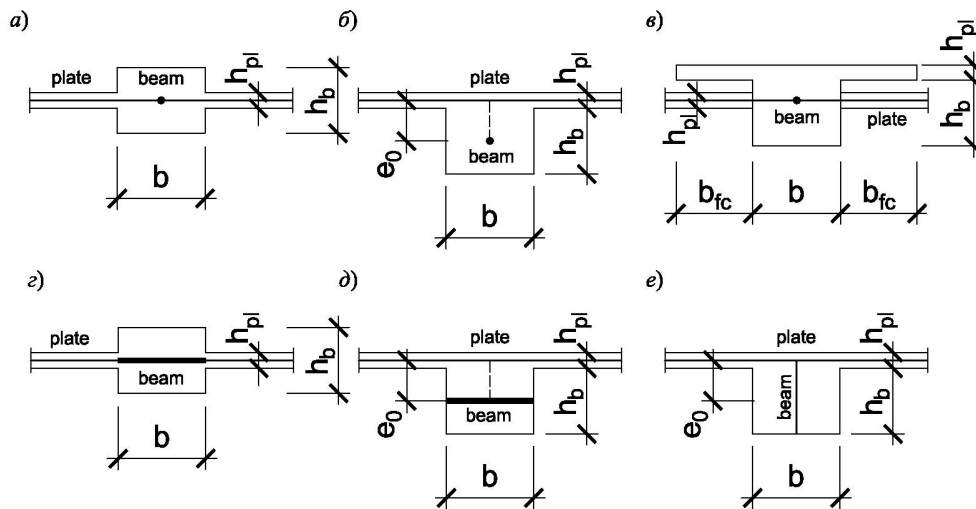


Рис. 2. Распространенные компьютерные модели многоребристого перекрытия

Довольно распространенными являются дискретные модели, в которых плиты перекрытия моделируются двухмерными КЭ элементами пластин или оболочек, а ребра плит – одномерными стержневыми элементами (рис. 2 а, б, в) [2, 4]. Популярность подобных моделей обеспечивается с одной стороны относительной совместимостью двухмерных КЭ пластин, для которых характерна изгибная группа усилий и одномерных КЭ стержней, с другой стороны использование перечисленных КЭ позволяет выполнять отдельный расчет армирования плит и ребер (балок), что с успехом может быть реализовано при помощи модулей автоматизированного расчета арматуры.

Для построения адекватной компьютерной модели необходимо обеспечить совместную работу плиты и ребер (балок), другими словами следует учитывать работу балок (ребер) в части плиты.

Исходя из выше сказанного, очевидно, что геометрическая модель перекрытия, представленная на рис. 2 а, не выдерживает никакой критики.

Для учета эксцентриситета балок относительно середины поверхности плиты в расчетную модель вводят абсолютно жесткие вставки (рис. 2 б). В данном случае введение абсолютно жестких вставок является реализацией гипотезы Кирхгоффа, согласно которой плоские сечения остаются плоскими и в деформированном состоянии элемента. Наличие эксцентриситета балки неизбежно приводит к возникновению в плите мембранной группы усилий, занижающих изгибающие моменты в пролете. Данный факт подтверждается экспериментальными данными о благоприятном влиянии распора. Таким образом, при учете эксцентриситета ребер плиту следует моделировать оболочечными КЭ, способными воспринимать помимо изгибной, также и мембранную группу усилий.

Необходимо отметить, что с одной стороны использование эксцентричного сопряжения балки снимает вопрос учета части плиты (полки) в работе ребра, однако с другой стороны приводит к возникновению в стержневом элементе, моделирующем балку, осевой силы, уравнивающей мембранную группу усилий в плите. По этой причине определяющим внутренним усилием в оценке НДС балки будет являться осевая сила, эксцентрично приложенная относительно нейтральной оси, что не является характерным для балочных ростверков. Таким образом, при использовании автоматизированного модуля подбора арматуры армирование балок (ребер) будет выполнено как для внецентренно-растянутых элементов.

Поскольку при моделировании эксцентриситета ребер вводимые жесткие вставки не учитывают толщину ребра и с учетом того, что в центре тяжести ребер появляются точки сингулярности, свойственные методу КЭ [2], возникает определенная трудность в аппроксимации опорных изгибающих моментов в плите. Если для узких ребер ( $b = 1/4 \dots 1/6 h$ ) этот эффект не оказывает существенного влияния, то при широких ребрах величины моментов на границе ребра и в точке сингулярности могут отличаться в несколько раз. По этой причине достоверный расчет многоребристых перекрытий, особенно с широкими ребрами, на основании геометрической модели, представленной на рис. 2 б весьма затруднителен.

Довольно часто для учета работы ребер в части плиты используется модель (рис 2 в), в которой ребра плиты моделируются стержневыми КЭ таврового сечения. В этой модели центр тяжести стержневого элемента совпадает со срединной поверхностью плиты. С одной стороны использование балок таврового сечения снимает вопрос учета их эксцентриситета, однако с другой стороны неопределенным параметром является ширина свеса полки, которую следует учитывать в работе плиты. В различных методических пособиях ширина свеса полки принимается разной (от 3 до 15 толщин плиты). В виду того, что эксцентриситет ребер равен нулю в плите возникает только изгибная группа усилий, а балки таврового сечения работают на изгиб подобно балочным ростверкам. Применение данной модели позволяет использовать для моделирования плиты двумерные КЭ Клафа (пластины) и одномерные пространственные стержневые КЭ. В этом случае значения изгибающих моментов в пролете плиты получаются большими по сравнению с моделью (рис. 2 б), в которой помимо изгибной возникает еще и мембранная группа усилий в плите.

Необходимо иметь в виду, что при моделировании ребер плиты балками таврового сечения работа балки в части плиты учитывается дважды, а в местах пересечения ребер – трижды (рис. 3), что неизбежным образом приведет к перearмированию плиты.

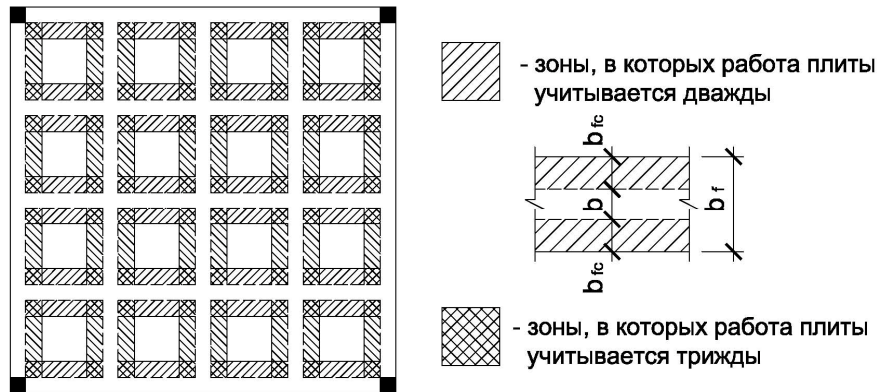


Рис. 3. Учет ширины полки  $b_{fc}$  балки таврового сечения

Несмотря на указанные недостатки, неоспоримым достоинством данной модели является простота ее реализации, к тому же автоматизированный расчет армирования не требует выполнения дополнительных операций по приведению к эквивалентной расчетной схеме изгибаемого элемента, как в случае использования жестких вставок для моделирования эксцентриситета балки.

Вполне допустимы расчетные модели (рис. 2 з, д, е), в которых плита и ребра плиты моделируются КЭ пластин или оболочек. Как и в случае со стержневыми элементами влияние эксцентриситета ребер может быть учтено введе-

нием жестких вставок (рис. 3 д). Преимуществом рассматриваемых моделей является возможность моделирования плиты и ребер КЭ одинаковых размерностей, что позволяет избежать проблем со стыковками различных типов КЭ. Однако при использовании пластинчатых КЭ наблюдается разрыв полей напряжений на межэлементных границах, что несколько затрудняет общую оценку НДС, например, на участках с переменной жесткостью. К тому же в таком случае расчет армирования ребер будет выполнен как для плит с расстановкой арматуры на нижних и верхних гранях элемента.

При сложной геометрии ребра плиты могут быть смоделированы КЭ плоского напряженного состояния (рис. 2 е). Однако необходимо считаться с тем, что КЭ плоского напряженного состояния (диафрагмы) не имеют угловых неизвестных, соответствующих углу поворота относительно оси, ортогональной плоскости диафрагмы ( $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ), поэтому в узлах способны воспринимать

только линейные перемещения  $u(x, z)$  и  $w(x, z)$ .

С целью исключения большинства недостатков, присущих вышеупомянутым моделям, для точного расчета многоребристых перекрытий предлагается использовать более детализированную дискретную модель с использованием абсолютно жестких вставок (рис. 4).

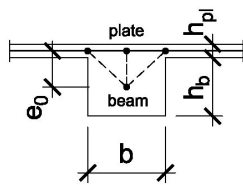


Рис. 4. К учету ширины ребра

Данная модель позволяет учитывать толщину балок (ребер) при вычислении опорных моментов в плите. Для реализации этой модели жесткие вставки следует устанавливать к узлам серединой поверхности плиты с нужным эксцентриситетом, в таком случае обеспечивается неискажаемость сечений ребер в местах соединения с плитой.

Верификационные линейные расчеты показали преимущества данной модели. Податливость опор (колонн) учитывалась введением в расчетную модель одноузловых КЭ, обладающих в вертикальном направлении погонной жесткостью  $EA / l = 16 \cdot 10^4$  т/м. Модуль Юнга  $E = 3 \cdot 10^6$  т/м<sup>2</sup>. Коэффициент Пуассона  $\mu = 0,18$ .

Сравнение значений пролетных изгибающих моментов рассматриваемой модели многоребристого перекрытия с приведенными в начале статьи распределенными моделями, показано на рис. 5.

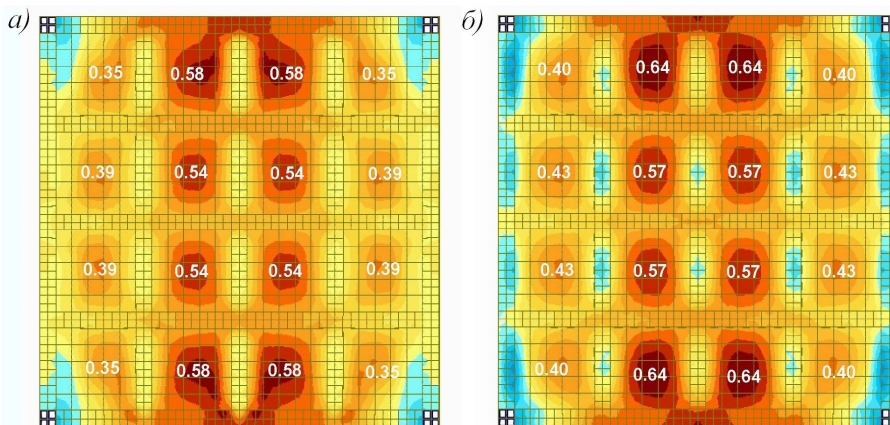


Рис. 5. Изополя изгибающих моментов  $M_x$ : а – согласно модели, представленной на рис. 4; б – то же согласно модели, представленной на рис. 2, б

При использовании КЭ модели, учитывающей помимо эксцентриситета еще и ширину ребер (рис. 4), значения пролетных моментов  $M_x$  уменьшаются на

5,5% (рис. 5) по сравнению с моделью (рис. 2 б), в которой учитывается только эксцентриситет ребер и – на 25% (рис. 6) по сравнению с моделью (рис. 2 в), в которой ребра плиты моделируются балками таврового сечения при свесе полок равном  $b_{fc} = 6h_{pl}$ .

В случае моделирования ребер плиты пластинчатыми КЭ на жестких вставках (рис. 2 д) значения пролетных моментов в плите отличаются не более чем на 2% (рис. 7).

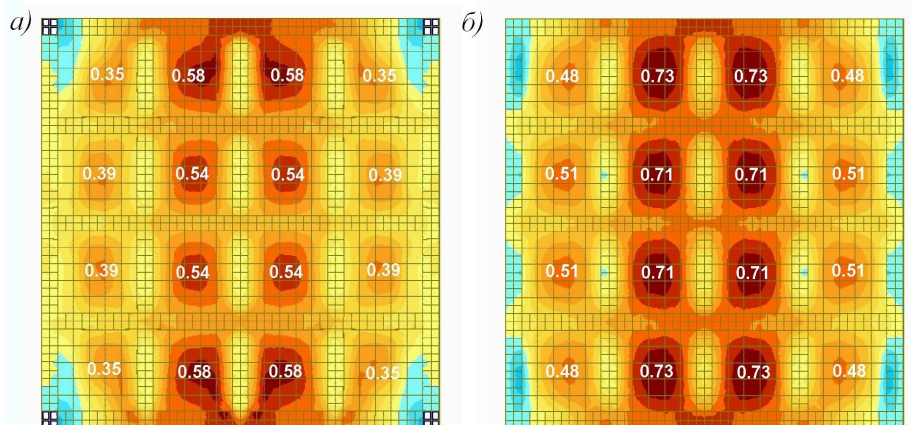


Рис. 6. Изополя изгибающих моментов  $M_x$ : а – согласно модели, представленной на рис. 4; б – то же согласно модели, представленной на рис. 2, в

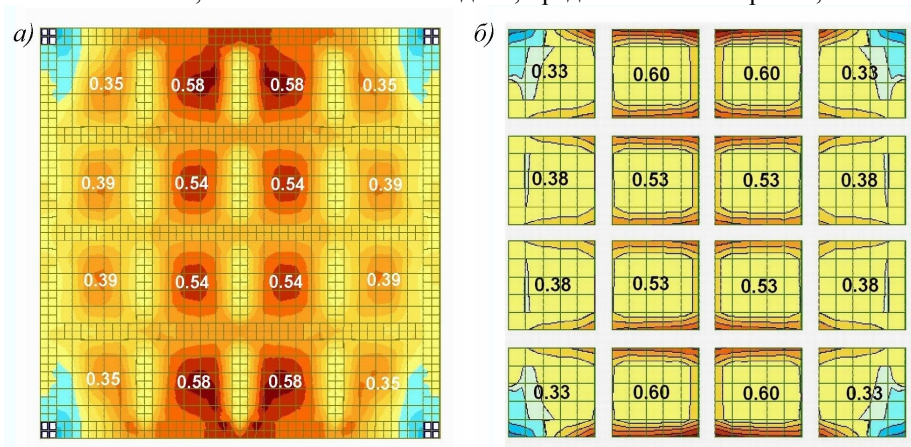


Рис. 7. Изополя изгибающих моментов  $M_x$ : а – согласно модели, представленной на рис. 4; б – то же согласно модели, представленной на рис. 2, д

**Вывод:** Проведенный анализ верификационных расчетов многоребристого перекрытия по нескольким КЭ моделям показал работоспособность предлагаемой модели. В сравнении с вышеупомянутыми моделями (рис. 2) детализированная расчетная модель позволяет получить более точное решение относительно вертикальных перемещений, изгибной и мембранной группы усилий в плите.

Экспериментальные методы определения НДС многоребристых перекрытий, примененные П.Л. Нерви, и обзор аналитических методов расчета, применявшихся в 1950-е годы, описаны в работе [8].

#### Л и т е р а т у р а

1. Аганов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Ассоциация строительных вузов, 2004. – 248 с.

2. Городецкий А.С., Евзеров И.Д., Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Городецкий Д.А. Метод конечных элементов. Теория и численная реализация. – Киев: Факт, 1997. – 140 с.
3. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с., ил.
4. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. – Москва: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 360 с.
5. Свойский Ф.М. Несовместимые конечные элементы для расчета листовых пространственных конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – Горький: Изд-во Горьковского университета, 1986. – С. 59-70.
6. Мастаченко В.Н. Об оценке адекватности расчетных и реальных моделей строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – 1971. – №4. – С. 3-7.
7. Семенов В.А., Семенов П.Ю. Конечные элементы повышенной точности для расчета сложных пространственных систем // Докл. XVI Международной конф. «Математическое моделирование в механике деформируемых тел. Метод граничных и конечных элементов», 23-26 июня 1998 г. Санкт-Петербург. – СПб.: СПбГАСУ, 1998. – Том 1. – С. 68-69.
8. Halpern Allison B., Billington David P., Adriaenssens Sigrid. The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi // Proc. of the Int. Assos. for shell and spatial structures (IASS) Symposium 2013 “Beyond the Limits of Man”, 23-27 September, Wroclaw Univ. of Technology, Poland, pp. 1-7.

#### References

1. Agapov, V.P. (2004). Metod Konechnykh Elementov v Statike, Dinamike i Ustoychivosti Konstruktsiy, 2-e izd., ispr. i dop., Moskva: Assotsiatsiya stroitel'nykh vuzov, 248 p.
2. Gorodetskiy, A.S., Evzerov, I.D., Strelets-Streletskiy, E.B., Bogovis, V.E., Genzerskiy, Yu.V., Gorodetskiy, D.A. (1997). Metod Konechnykh Elementov. Teoriya i Chislennaya Realizatsiya, Kiev: Fakt, 140 p.
3. Perel'muter, A.V., Slivker, V.I. (2007). Raschetnye Modeli Sooruzheniy i Vozmozhnost' Ikh Analiza, Moscow: DMK Press, 600 p., il.
4. Gorodetskiy, A.S., Evzerov, I.D. (2009). Komp'yuternye Modeli Konstruktsiy, Moscow: Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 360 p.
5. Svoyskiy, F.M. (1986). Nesovmestimye konechnye elementy dlya rascheta listovykh prostranstvennykh konstruktsiy, Prikladnye Problemy Prochnosti i Plastichnosti, Gor'kiy: Izd-vo Gor'kov-skogo universiteta, pp. 59-70.
6. Mastachenko, V.N. (1971). Ob otsenke adekvatnosti raschetnykh i real'nykh modeley stroitel'nykh konstruktsiy, Stroitel'naya Mekhanika I Raschet Sooruzheniy, №4, pp. 3-7.
7. Semenov, V.A., Semenov, P.Yu. (1998). Konechnye elementy povyshennoy tochnosti dlya rascheta slozhnykh prostranstvennykh system, Dokl. XVI Mezhdunarodnoy Konf. «Matematicheskoe Modelirovanie v Mekhanike Deformiruemykh Tel. Metod Granichnykh i Konechnykh Elementov», 23-26 iyunya 1998 g., Sankt-Peterburg., SPb.: SPbGASU, T. 1, pp. 68-69.
8. Halpern Allison B., Billington David P., Adriaenssens Sigrid. (2013). The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi, Proc. of the Int. Assos. for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2013 “Beyond the Limits of Man”, 23-27 September, Wroclaw Univ. of Technology, Poland, pp. 1-7.

### THE PRACTICAL REALIZATION OF A MATHEMATICAL (COMPUTERIZED) MODEL OF A CONCRETE RIBBED SLAB

A.S. Markovich

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

In the past few decades, the method of final elements was widely used in testing stress-strain state on computer building structures. As a rule, discrete final element's model of any structure consists of the final elements number of different sizes, which are joined to each other. Wrong docking of badly compatible final elements leads to deformation of calculated model generally and as a result to wrong calculation data knowingly. This problem was especially acute in the early stage of development of numerical methods, and it is relevant today. The author of the article intends to return to the discussion of this issue. As the object of study, concrete ribbed slab was considered there, for modeling which required using different types of final elements.

**Key words:** computer modeling, numerical methods, method of final elements, calculated model analyzing, concrete ribbed slab.

## Расчет и проектирование машиностроительных конструкций

### ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА ПРИ ФОРМООБРАЗОВАНИИ ГНУТЫХ ПРОФИЛЕЙ МЕТОДОМ ПРОКАТКИ НА ПРОФИЛЕГИБОЧНОМ СТАНЕ

Ю.А. МОРОЗОВ канд. техн. наук, доц.\*,

Е.Ю. ВЕРХОВ канд. техн. наук, доц.,

А.А. ФРОЛОВ канд. техн. наук, доц.,

Е.В. КРУТИНА канд. техн. наук, доц.

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)  
111250, Москва, Б. Семеновская, 38, т. 8(916)877-66-96\*; [akafest@mail.ru](mailto:akafest@mail.ru)\*

*Сравниваются результаты моделирования процесса гибки широкой полосы на основании метода баланса работ с использованием условия пластичности Треска и Губера-Мизеса, для четырех различных начальных распределений предела текучести по толщине полосы. Приведены кривые изменения изгибающих моментов с определением величины погрешности относительно экспериментальных исследований.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** гибка; изгиб-растяжение; радиус кривизны; нейтральный радиус; изгибающий момент; метод баланса работ.

Использование элементов гибки при формообразовании деталей одинарной кривизны, находит широкое применение в производстве изделий различной конфигурации и назначения. Так, например, на профилегибочных станах изготавливаются различные гнутые профили, широко применяемые в строительстве при возведении легких светопрозрачных металлоконструкций и каркасном строительстве [1].

Стандартный горячекатаный металлический гнутый уголок, швеллер, Z-образный профиль в таких случаях оказываются неэффективными, т.к. они жестко связывают высоту стенок с их толщиной, а значит и массой погонного метра. В тоже время в практике встречается много случаев, когда стандартная толщина стенки оказывается избыточной, и нет смысла перегружать конструкцию лишним весом [2].

Использование сварки десятков и сотен метров листового металла при фасонном конфигурировании требуемого профиля является экономически нецелесообразным. Поэтому наиболее логичным является использование гнутых профилей, оформленных из целой листовой заготовки.

Следует отметить, что чистый изгиб в данном случае рассматривать некорректно, т.к. использование тянущих и формующих валков будет обеспечивать не только поджим листовой заготовки, но и ее растяжение при оформлении в профиль требуемой конфигурации [3, 4]. Таким образом, при численном анализе процессов сложного нагружения, для подсчета напряжений растяжения, создаваемых при формоизменении заготовки, необходимо рассматривать изгибающий момент при изгибе с растяжением.

Формула изгибающего момента при изгибе с растяжением широкой полосы из упрочняющегося материала может быть получена на основании метода баланса работ [5]:

$$dA_{\text{внутр}} = dA_{\text{внешн}}, \quad (1)$$

где  $dA_{\text{внутр}}$ ,  $dA_{\text{внешн}}$  – приращение работ внутренних и внешних сил.

Приращение работы внутренних сил:

$$dA_{\text{внутр}} = \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV, \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $d\varepsilon_{ij}$  – приращения компонента тензора деформаций;  $dV$  – элементарный объем деформируемого тел объемом  $V$ ;  $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  – сумма приращений работ напряжений  $\sigma_{ij}$  создаваемых в направлении приращений деформаций  $d\varepsilon_{ij}$ .

Применительно к изгибу с растяжением широкой полосы (напряжения и деформации изменяются только по толщине полосы) уравнение (2) полярных координатах можно записать в виде (рис. 1)

$$dA_{\text{внутр}} = \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} (\sigma_r d\varepsilon_r + \sigma_\theta d\varepsilon_\theta) \alpha r dr,$$

где  $\sigma_r, \sigma_\theta$  – радиальные и тангенциальные напряжения [6];  $d\varepsilon_r, d\varepsilon_\theta$  – приращения радиальных и тангенциальных деформаций;  $r$  – радиус произвольного кольцевого элемента толщиной  $dr$ , ограниченного углом  $\alpha$ ;  $r_{\text{вн}}, r_{\text{нар}}$  – деформированные внутренний и наружный радиусы изгибаемой полосы, принимаемые вследствие деформационного изменения начальных радиусов [7-10];  $\rho_H$  – радиус нейтральной поверхности при изгибе с растяжением.

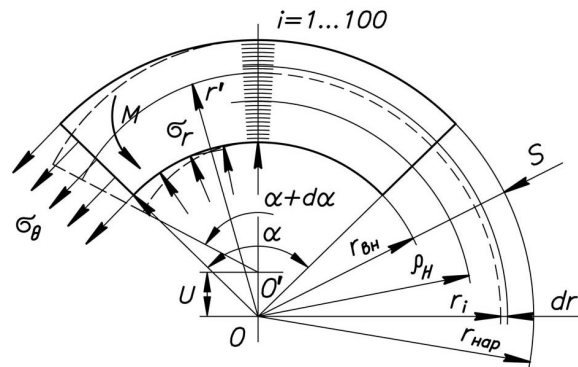


Рис. 1. Схема изгиба широкой полосы с растяжением

В условиях плоской деформации  $d\varepsilon_\theta = -d\varepsilon_r$ , поэтому

$$dA_{\text{внутр}} = \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} d\varepsilon_r (\sigma_r - \sigma_\theta) \alpha r dr.$$

Для рассматриваемого случая из условия пластичности Треска, имеем:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \pm \sigma_i,$$

а из условия пластичности Губера-Мизеса

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i,$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений, причем знак «плюс» относится к зоне сжатия в тангенциальном направлении, а знак «минус» к зоне растяжения.

Радиальные деформации имеют обратные знаки, поскольку в зоне тангенциального сжатия волокна испытывают радиальное растяжение ( $d\varepsilon_r > 0$ ), а в зоне тангенциального растяжения – радиальное сжатие ( $d\varepsilon_r < 0$ ).

Для различных условий пластичности получили разные формулы для расчета приращения работы внутренних сил при изгибе с растяжением широкой полосы

$$dA_{\text{внутр}} = \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} \sigma_i |d\varepsilon_r| \alpha r dr; \quad dA_{\text{внутр}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} \sigma_i |d\varepsilon_r| \alpha r dr.$$

Используя зависимость

$$d\varepsilon_r = \frac{d\alpha}{2\alpha} \left( 1,0 - \frac{\rho_{\text{н}}^2}{r_i^2} \right), \quad (3)$$

получим 
$$dA_{\text{внутр}} = \frac{d\alpha}{2} \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} \sigma_i \left| 1,0 - \frac{\rho_{\text{н}}^2}{r_i^2} \right| r dr; \quad (4,а)$$

$$dA_{\text{внутр}} = \frac{d\alpha}{\sqrt{3}} \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} \sigma_i \left| 1,0 - \frac{\rho_{\text{н}}^2}{r_i^2} \right| r dr, \quad (4,б)$$

где  $d\alpha/\alpha$  – относительное изменение центрального угла  $\alpha$ .

Приращение работы внешних сил при изгибе с растяжением складывается из приращения работ растягивающих напряжений и работы изгибающего момента  $M$ :

$$dA_{\text{внешн}} = \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} \sigma_{\theta} dU_{\theta} + M d\alpha,$$

где  $dU_{\theta}$  – тангенциальные перемещения торцов кольцевого элемента (слоя толщиной  $dr$ ), определяемые по уравнению:

$$\frac{dU_{\theta}}{r\alpha} = \frac{r\alpha - r'(\alpha + d\alpha)}{r\alpha} = d\varepsilon_{\theta},$$

где  $r'$  – радиус слоя после деформации, откуда  $dU_{\theta} = r\alpha d\varepsilon_{\theta}$ .

При допущении плоской деформации

$$d\varepsilon_{\theta} = -d\varepsilon_r,$$

с учетом выражения (3), получим:

$$dU_{\theta} = \frac{1}{2} \left( 1,0 - \frac{\rho_{\text{н}}^2}{r_i^2} \right) r d\alpha,$$

следовательно: 
$$dA_{\text{внешн}} = \mp \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} \sigma_{\theta} \left| 1,0 - \frac{\rho_{\text{н}}^2}{r_i^2} \right| r dr + M d\alpha, \quad (5)$$

где знак «минус» относится к зоне сжатия в тангенциальном направлении, а знак «плюс» к зоне растяжения.

Из условия баланса работ (1) с использованием уравнений (5) и (4), получим выражения для расчета изгибающего момента при изгибе с растяжением широкой полосы для различных условий пластичности

$$M = \frac{1}{2} \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} (\sigma_i \pm \sigma_{\theta}) \left| 1,0 - \frac{\rho_{\text{н}}^2}{r_i^2} \right| r dr; \quad (6,а)$$



$$M = \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} \left( \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \pm \frac{\sigma_\theta}{2} \right) \left| 1,0 - \frac{\rho_{\text{н}}^2}{r_i^2} \right| r dr. \quad (6,6)$$

Для сравнения результатов расчета моментов внешних сил по выражениям (6,а) и (6,б) было проведено численное моделирование на ЭВМ процесса изгиба с растяжением широкой полосы. При моделировании сечение исходной недеформированной полосы единичной толщины ( $S = 1,0$  мм) представлялось состоящим из 100 волокон одинаковой толщины [11]. В пределах каждого волокна непрерывно изменяющиеся по толщине напряжения и деформации принимались постоянными (как показали расчеты на ЭВМ, увеличение числа волокон свыше 100 не повышает точности расчетов).

Сопrotивление пластической деформации стали 08 кП [12, 13]

$$\sigma_i = \sigma_{0,2} + 34,6 \varepsilon_i^{0,5}.$$

В связи с тем, что изгиб полосы на кромке формообразующего инструмента приводит к крайне неравномерному распределению по толщине полосы деформаций и, следовательно, неравномерному упрочнению, моделирование процесса изгиба широкой полосы проводили для четырех разных случаев начального распределения предела текучести по толщине полосы [14]:

– равномерного (рис. 2, а):

$$\sigma_{0,2} = 230 \text{ МПа};$$

– с линейным ростом от внутренних волокон к внешним (рис. 2, б):

$$\sigma_{0,2} = 230 \left( 1,0 + \frac{i-1}{100} \right) \text{ МПа};$$

– с линейным уменьшением (рис. 2, в):

$$\sigma_{0,2} = 230 \left( 2,0 - \frac{i-1}{100} \right) \text{ МПа};$$

– гиперболического (рис. 2, г):

$$\sigma_{0,2} = 2 \cdot 230 \left[ 2 \left( \frac{i-1}{100} \right)^2 - 2 \frac{i-1}{100} + 1 \right] \text{ МПа}.$$

При моделировании изгиба радиус кривизны внутренней поверхности изменялся в пределах от  $r_{\text{вн}} = \frac{0,5}{\sigma_{0,2} E}$  до  $r_{\text{вн}} = 1,8S = 1,8$  мм (минимальный радиус изгиба металла) с шагом  $\Delta r = 0,5r_{\text{вн}}$  при  $r_{\text{вн}} \geq 20S$  и  $\Delta r = 0,05r_{\text{вн}}$  при  $r_{\text{вн}} < 20S$ , где  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа – модуль нормальной упругости для стали 08кп;  $\sigma_{0,2}^{\text{cp}}$  – средний по толщине начальный предел текучести.

Расчеты проводили для пяти ( $i = 1 \dots 5$ ) значений растягивающих напряжений, равных в процессе каждого изгиба:

$$\sigma_\theta = (i/5) \sigma_{0,2}^{\text{cp}} = \text{const}.$$

Таким образом, было сформировано пять групп кривых (на графиках представлены только крайние значения из выборки)

$$\sigma_\theta = 0,2 \sigma_{0,2}^{\text{cp}}; \sigma_\theta = 0,4 \sigma_{0,2}^{\text{cp}}; \sigma_\theta = 0,6 \sigma_{0,2}^{\text{cp}}; \sigma_\theta = 0,8 \sigma_{0,2}^{\text{cp}}; \sigma_\theta = \sigma_{0,2}^{\text{cp}}.$$

Из приведенных на рис. 2 результатов моделирования следует, что формула изгибающего момента, полученная из условия пластичности Губера-Мизеса

(6б), дает на 15...170% большие значения по сравнению формулой, полученной из условия пластичности Треска (6а). Причем разница тем больше, чем больше растягивающие напряжения и неравномерность распределения механических свойств по толщине полосы.

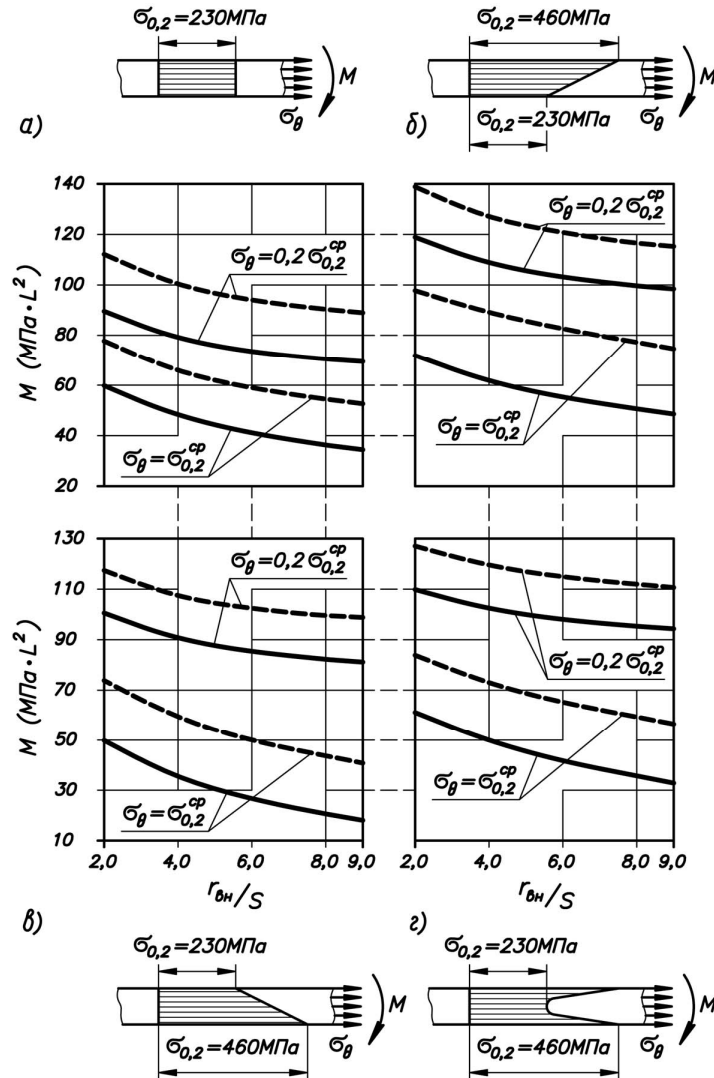


Рис. 2. Кривые изменения изгибающих моментов, рассчитанных по формулам (6а) (—) и (6б) (-----)

Сравнение результатов моделирования процесса изгиба широкой полосы, показало удовлетворительную сходимость величины изгибающих моментов (6а) с экспериментальными данными (при одинаковых условиях трения, радиусах изгиба, толщине и марке стали листовой заготовки погрешность максимальных растягивающих напряжений не превышала 1,0%; а максимальная погрешность утонения гнутой заготовки 10%).

Использование формулы (6б) приводит к увеличению погрешности.

**Выводы:** Методом баланса работ из условий пластичности Треска и Губера-Мизеса получены формулы для расчета изгибающего момента и при изгибе с растяжением широкой полосы из упрочняющегося материала.

Показано, что использование разных условий пластичности может приводить к значительному различию расчетных значений моментов, и это различие

тем больше, чем выше растягивающие напряжения и больше равномерность распределения механических свойств по толщине полосы.

#### Л и т е р а т у р а

1. Лукашкин Н.Д., Кохан Л.С., Пунин В.И., Морозов Ю.А. Гибка профилей на прессах и станах. – М.: МГВМИ, 2005. – 140 с.
2. Морозов Ю.А. Исследование процесса получения гнутых профилей на станах // *Металлургия XXI века: Сб. Трудов 1-й международной конференции молодых специалистов*. – М.: ВНИИМЕТМАШ им. акад. А.И. Целикова, 2005. – С. 270-272.
3. Punin V.I., Kokhan L.S. and Morozov Yu.A.. Reduction of the Length of Strip Rolled on Roll-Forming Machines // *Metallurgist*, Vol. 56, Iss. 11-12, March 2013, pp. 938-940.
4. Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А. Анализ и разработка технологии изготовления гнутых толстолистовых деталей // *Вестник Московского государственного открытого университета. Техника и Технология*. – М.: МГОУ. – 2011. – №4 (6). – С. 14-19.
5. Лукашкин Н.Д., Кохан Л.С. Обработка металлов давлением. – М.: МГВМИ, 2006. – 424 с.
6. Кохан Л.С., Роберов И.Г., Морозов Ю.А., Шульгин А.В. Кинематические параметры гибки профилей // *Технология металлов*. – М.: Наука и технологии, 2009. – Вып. 1. – С. 10-13.
7. Кохан Л.С., Морозов Ю.А., Пунин В.И. Повышение точности профиля при П-образной гибке // *Технология металлов*. – М.: Наука и технологии, 2013. – Вып. 5. – С. 15-17.
8. Пунин В.И., Кохан Л.С., Морозов Ю.А. Инженерный подход к процессу гибки профилей // *Заготовительные производства в машиностроении*. – М.: Машиностроение, 2013. – №9. – С. 29-31.
9. Kokhan L.S., Roberov I.G., Morozov Yu.A., and Borisov A.V. Thinning of the walls of rolled profiles // *Steel in Translation*. – 2009. – Vol. 39, Nu 3. – Pp. 194-196.
10. Roberov I.G., Kokhan L.S., Morozov Yu.A., and Borisov A.V. Model of wall thinning in shaping relief surfaces // *Steel in Translation*. – 2009. – Vol. 39, Nu 5. – P. 379-381.
11. Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А., Фролов А.А. Прижим вытяжного штампа для качественного получения сложных листовых деталей // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2015. – № 2. – С. 11-17.
12. Целиков А.И., Томленов А.Д., Зюзин В.И. и др. Теория прокатки. Справочник. – М.: *Металлургия*, 1982. – 335 с.
13. Филиппов Ю.К., Тупалин С.А., Крутина Е.В. Металлы и сплавы для художественной чеканки. – М.: МГТУ «МАМИ», 2013. – 29 с.
14. Верхов Е.Ю., Тетерин Г.П., Зайцев Г.В. Изгибающий момент при пластическом изгибе с растяжением широкой полосы // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия*. – М.: МИСиС, 1989. – Вып. 1. – С. 67-71.

#### References

1. Lukashkin, N.D., Kokhan, L.S., Punin, V.I., Morozov, Yu.A. (2005). *Gibka Profiley na Pressakh i Stanakh*, Moscow: MGVMI, 140 p.
2. Morozov, Yu.A. (2005). Studying the process of obtaining formed sections on mills, *Metallurgiya XXI veka: Sb. Tr. 1-j Mezhdunarodnoy konferentsii molodykh spetsialistov*, Moscow: VNIIMETMASH im. akad. A.I. Tselikova, pp. 270-272.
3. Punin, V.I., Kokhan, L.S., and Morozov, Yu.A. (2013). Reduction of the Length of Strip Rolled on Roll-Forming Machines, *Metallurgist*, Vol. 56, Iss. 11-12, pp. 938-940.
4. Verkhov, E.Yu., Morozov, Yu.A. (2011). Analysis and development of manufacturing technology for plate bent parts, *Vestnik Moskovskogo Gosudarstvennogo Otkrytogo Universiteta, Tekhnika i Tekhnologiya*, Moscow: MGOU, no. 4 (6), pp. 14-19.
5. Lukashkin, N.D., Kokhan, L.S. (2006). *Obrabotka Metallov Davleniem* [Metal Forming], Moscow: MGVMI, 424 p.
6. Kokhan, L.S., Roberov, I.G., Morozov, Yu.A., Shul'gin, A.V. (2009). The kinematic parameters of bending profiles, *Tekhnologiya Metallov*, Moscow: Nauka i Tekhnologii, no. 1, pp. 10-13.
7. Kokhan, L.S., Morozov, Yu.A., Punin, V.I. (2013). Increasing the accuracy of the profile in the U-shaped bending, *Tekhnologiya Metallov*, Moscow: Nauka i Tekhnologii, no. 5, pp. 15-17.
8. Punin, V.I., Kokhan, L.S., Morozov, Yu.A. (2013). Engineering approach to the process of bending profiles, *Zagotovitel'nye Proizvodstva v Mashinostroenii*, no. 9, pp. 29-31.

9. Kokhan, L.S., Roberov, I.G., Morozov, Yu.A., and Borisov A.V. (2009). Thinning of the walls of rolled profiles, *Steel in Translation*, Vol. 39, Nu 3, pp. 194-196.
10. Roberov, I.G., Kokhan, L.S., Morozov, Yu.A., and Borisov, A.V. (2009). Model of wall thinning in shaping relief surfaces, *Steel in Translation*, Vol. 39, Nu 5, pp. 379-381.
11. Verkhov, E.Yu., Morozov, Yu.A., Frolov, A.A. (2015). Clamp drawing die for high-quality produce complex sheet metal parts, *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*, № 2, pp. 11-17.
12. Tselikov, A.I., Tomlenov, A.D., Zyuzin, V.I. et al (1982). *Teoriya Prokatki*, Moscow: Metallurgiya, 335 p.
13. Filippov, Yu.K., Tipalin, S.A., Krutina, E.V. (2013). *Metally i Splavy dlya Khudozhestvennoy Chekanki*, Moscow: MGTU «MAMI», 29 p.
14. Verkhov, E.Yu., Teterin, G.P., Zajtsev, G.V. (1989). The bending moment in the plastic bending with stretching broadband, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenij. Chernaya metallurgiya*, Moscow: MISiS, №. 1, pp. 67-71.

#### STUDY OF THE BENDING MOMENT IN FORMING CURVED PROFILE METHOD FOR ROLLING MILL FORMING

Yu.A. Morozov, E.Yu. Verkhov, A.A. Frolov, E.V. Krutina  
*Moscow State Machine-Building University (MAMI), Moscow*

The results of modeling the bending process on the basis of broad band balance method works using terms Tresca and Huber-Mises are compared. The authors use four different initial distributions of the yield strength of the strip thickness. Curves of change of bending moments to quantify the uncertainty regarding the experimental studies are presented.

KEY WORDS: bending; bend-elongation; the radius of curvature of the neutral range; the bending moment; balance method works.



#### Теория пластичности

#### ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ БЕТОНА ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В.И. АНДРЕЕВ, профессор, д.т.н.

*Научно исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ «МГСУ»),  
Москва, Ярославское шоссе, 26.*

*Толстостенные оболочки встречаются во многих инженерных конструкциях, в частности в теплоэнергетическом строительстве. Другим примером практического приложения является конструкция хранилища для криогенных жидкостей. В работе рассматривается задача расчета находящегося в осесимметричном температурном поле конечного цилиндра, материал которого имеет нелинейную диаграмму деформирования. Параметры диаграммы зависят от температуры.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: толстостенная оболочка, бетон, нелинейность, неоднородность, теория пластичности.

В работах [1-5] рассмотрены одномерные задачи нелинейной теории упругости и теории пластичности для тел с одномерной (радиальной) неоднородностью механических характеристик. Радиальная неоднородность в конструкциях возникает при наличии осесимметричных физических полей различной природы (температурное, радиационное, влажностное [6] и пр.).

Ниже рассматривается задача расчета защитной оболочки газохранилища, находящейся в поле отрицательных температур. Материал оболочки имеет нелинейную диаграмму  $\sigma - \varepsilon$  (рис. 1):

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i) = E\varepsilon_i - A\varepsilon_i^\alpha, \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{E\varepsilon_{\max}}{E\varepsilon_{\max} - \sigma_{\max}}; \quad A = \frac{E\varepsilon_{\max} - \sigma_{\max}}{\varepsilon_{\max}^\alpha}. \quad (2)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma_{\max}$  – предельное напряжение,  $\varepsilon_{\max}$  – предельная деформация,  $E_{s,\max}$  – секущий модуль.

Защитная оболочка газохранилища представляет собой толстостенную цилиндрическую оболочку, и изготавливаются из предварительно напряженного железобетона (рис. 2).

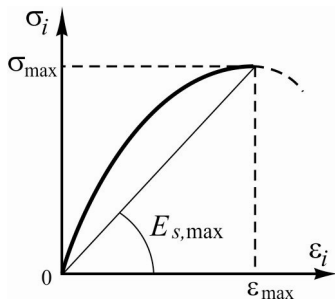


Рис. 1 Нелинейная диаграмма  $\sigma - \varepsilon$

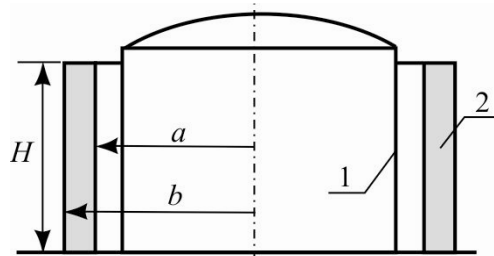


Рис. 2. Схема газохранилища: 1 - стальная первичная емкость, 2 - защитная железобетонная оболочка

Криогенные жидкости хранятся при температурах, достигающих  $-165^\circ\text{C}$ . Как указано в работе [7], при таких низких температурах прочность бетона почти в 4 раза, а модуль упругости в 2 раза увеличивается по сравнению с соответствующими значениями при нормальной температуре.

Учитывая, что на внешней поверхности конструкции температура близка к нормальной, за счет значительного градиента температуры происходит существенное изменение деформационных и прочностных характеристик бетона.

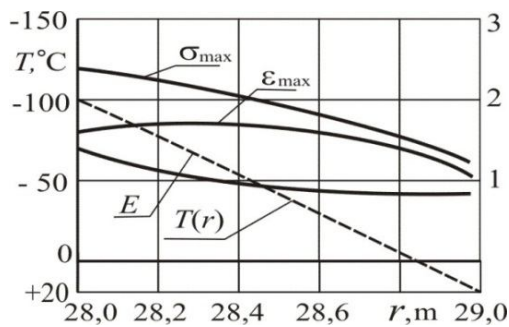


Рис. 3. Относительное изменение механических свойств бетона при отрицательных температурах

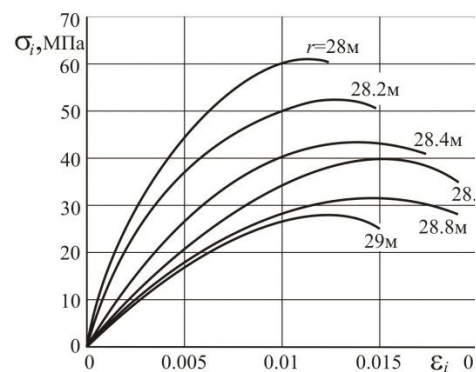


Рис. 4. Диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  для разных слоев оболочки

Параметры диаграммы (1) определяются равенствами (2) и являются функциями координаты  $r$ , что обусловлено их зависимостью от температурного поля  $T = T(r)$ .

На рис. 3 показаны графики относительного изменения предельных прочностных и деформационных характеристик, а также модуля упругости бетона по толщине цилиндра при отрицательных температурах (за единицу взяты значения при 20°C).

Существенная зависимость механических характеристик, являющихся параметрами диаграммы  $\sigma_i - \varepsilon_i$ , от температуры указывает на необходимость учета в расчетах неоднородности упругопластических свойств материала. Поскольку толщина оболочки намного меньше ее размеров, график  $T(r)$  близок к линейной функции. На основании зависимостей, показанных на рисунке 3, в соответствии с (1) и (2) мы можем построить диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  для разных слоев оболочки (рис. 4).

В качестве примера приведем некоторые результаты расчета оболочки в эксплуатационном режиме ( $T_a = -100^\circ\text{C}$ ,  $T_b = 20^\circ\text{C}$ ).

Решение краевой задачи теплопроводности представляется равенством:

$$T(r) = T_b + (T_a - T_b) \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}. \quad (3)$$

Линеаризация упругопластической задачи осуществлялась методом упругих решений. Для численного решения упругой задачи на каждом шаге итерационного процесса применялся вариационно-разностный метод, при этом система линейных алгебраических уравнений формировалась в оптимальную структуру и решалась методом Гаусса.

Граничные условия в задаче пластичности соответствовали жесткой заделке на нижнем торце цилиндра со свободными от нагрузок боковыми и верхней торцевой поверхностями.

На рис. 5 показаны эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  в среднем сечении цилиндра с размерами  $a = 28\text{м}$ ,  $b = 29\text{м}$ ,  $H = 40\text{м}$ . Вычисления проводились при следующих значениях механических и термических характеристик:

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu = 0,2; \sigma_{\max} = 30 \text{ МПа}; \varepsilon_{\max} = 0,01; \alpha_T = 1 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}.$$

Поскольку температурное поле в рассматриваемой задаче таково, что на внешней поверхности цилиндра температура выше, чем на внутренней, естественным является тот факт, что напряжения во внутренней области – растягивающие, а во внешней – сжимающие.

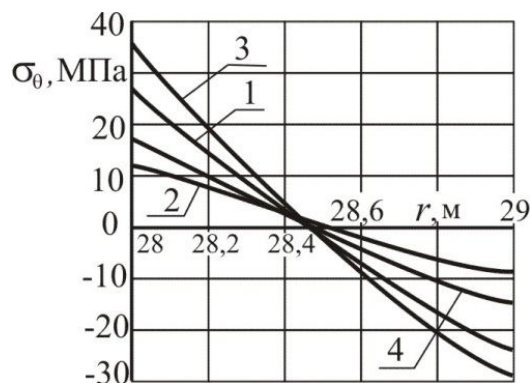


Рис. 5. Эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  в среднем сечении оболочки.

1 – линейный однородный материал; 2 – нелинейный однородный материал;  
3 – линейный неоднородный материал; 4 – нелинейный неоднородный материал

Так же в отличие от задач, описанных выше, учет неоднородности рассматриваемого типа приводит не к снижению, а к повышению напряжений по сравнению с однородным материалом, что обусловлено увеличением жесткости материала при уменьшении температуры. В свою очередь, учет нелинейности диаграммы деформирования по-прежнему ведет к уменьшению напряжений.

#### Л и т е р а т у р а

1. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. – М.: Изд-во АСВ, 2002. – 288 с.
2. Andreev V.I. About the Unloading in Elastoplastic Inhomogeneous Bodies// Applied Mechanics and Materials. – Vols. 353-356 (2013). – Pp. 1267-1270.
3. Andreev V.I. Elastic-plastic equilibrium of a hollow cylinder from inhomogeneous perfectly plastic material// Applied Mechanics and Materials. – Vols. 405-408 (2013). – Pp. 3182-3185
4. Andreev V.I., Avershyev A.S., Jemiolo S. Elastic-plastic state of inhomogeneous soil array with a spherical cavity// Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 842. – Pp. 462-465.
5. Андреев В.И., Полякова Л.С. Аналитическое решение физически нелинейной задачи для неоднородной толстостенной цилиндрической оболочки// Вестник МГСУ. – 2015. – № 11. – С. 38-45
6. Андреев В.И., Аверсьев А.С. Благоупругость толстостенных неоднородных оболочек: Монография. – М.: Изд-во КЮГ, 2015. – 98 с.
7. Kokini K., Perkins R.W. Free and thermal stress singularities in finite concreted cylinders// Comput. and Struct. –1984. – Vol. 1. – №4. – Pp. 531-534

#### References

1. Andreev, V.I. (2002). *Some Problems and Methods of Mechanics of Nonhomogeneous Bodies*, Moscow: Izd-vo ASV, 288 p.
2. Andreev, V.I. (2013). About the Unloading in Elastoplastic Inhomogeneous Bodies, *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 353-356, pp. 1267-1270
3. Andreev, V.I. (2013). Elastic-plastic equilibrium of a hollow cylinder from inhomogeneous perfectly plastic material, *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 405-408, pp. 3182-3185.
4. Andreev, V.I., Avershyev, A.S., Jemiolo, S. (2014). Elastic-plastic state of inhomogeneous soil array with a spherical cavity, *Advanced Materials Research*, Vol. 842, pp. 462-465
5. Andreev, V.I., Polyakova, L.S. (2015). Analytical solution of physically nonlinear problem for inhomogeneous thick-walled cylinder, *Vestnik MGSU*, №11, pp. 38-45
6. Andreev, V.I., Avershyev, A.S. (2015). *Moisture Elasticity of Inhomogeneous Thick-Walled Shells*: Monograph, Moscow: Izd-vo KYuG, 98 p.
7. Kokini, K., Perkins, R.W. (1984). Free and thermal stress singularities in finite concrete cylinders, *Comput. and Struct.*, Vol.1, № 4, pp. 531-534.

### AXISYMMETRIC PROBLEM IN PLASTICITY THEORY OF THICK-WALLED SHELL WITH ACCOUNTING FOR INHOMOGENEITY OF CONCRETE AT SUBZERO TEMPERATURES

V.I. ANDREEV

*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia  
(NIU MGSU)*

*Thick-walled shells are found in many engineering structures, particularly in the construction of thermal power. Another example of practical application is the design of storage facilities for cryogenic liquids.*

*We consider the problem calculating finite cylinder which is in an axisymmetric temperature field, the material of which has a non-linear stress-strain diagram. Chart options depend on the temperature.*

**KEYWORDS:** *thick-walled shell, concrete, nonlinearity, inhomogeneity, theory of plasticity.*

## Численные методы расчета конструкций

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ ТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ В РАСЧЕТАХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.П. АГАПОВ, *д-р техн. наук, профессор*

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,*

*Ярославское шоссе, 26, Москва, Россия, 129337; E-mail: agapovpb@mail.ru*

*Описывается методика конечно-элементного моделирования стержней таврового сечения, основанная на использовании трехмерной теории и суперэлементной технологии. Дается краткая сводка расчетных формул и приводится описание алгоритма, реализованного в программе ПРИНС. Рассматривается тестовая задача. Результаты расчета, полученные по программе ПРИНС, сравниваются с аналитическим решением.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** строительные конструкции, стержневые системы, метод конечных элементов, суперэлементы, программные комплексы

В связи с внедрением в расчетную практику электронных вычислительных машин, развитием вычислительных комплексов для обеспечения прочностных расчетов и стремлением проектировщиков и расчетчиков использовать более адекватные расчетные схемы меняются подходы к моделированию сооружений и выбору расчетных методик. В частности, для анализа напряженно-деформированного состояния стержней все чаще используется трехмерная теория [1, 2]. Большинство широко распространенных конечно-элементных программ (NASTRAN [3], ANSYS [4], ABAQUS [5] и др.) позволяют представлять стержни как совокупность объемных элементов, однако непосредственное моделирование стержней трехмерными элементами приводит к резкому возрастанию размерности задачи. Автором предложена и реализована в вычислительном комплексе ПРИНС [6, 7] суперэлементная методика моделирования стержней прямоугольного сечения, которая позволяет при использовании трехмерной теории приводить характеристики стержней к узлам, лежащим в их торцевых сечениях. Благодаря такому подходу удалось избежать противоречий, присущих одномерной теории изгиба и кручения стержней некруглого поперечного сечения и создавать более точные расчетные модели стержней и стержневых систем при незначительном увеличении числа степеней свободы конструкции.

В данной статье предложенная ранее методика суперэлементного моделирования стержней распространяется на стержни таврового сечения. Сущность методики заключается в следующем.

Для стержня таврового сечения формируется конечно-элементная схема, как показано на рис. 1. В вычислительном комплексе ПРИНС этот процесс автоматизирован с помощью интерактивного графического пре-процессора. При этом исходные данные вводятся только для тех узлов стержня, которые лежат в торцевых сечениях. Затем также автоматически генерируется более подробная сетка с разбивкой стержня по высоте и по сечению, как показано на рис. 2.

На стадии формирования характеристик элемента, изображенного на рис. 2, промежуточные узлы исключаются. Чтобы избежать решения системы уравнений высокого порядка, осуществляется послойное редуцирование (понижение порядка) этих уравнений.

Для этого стержень делится на слои по своей длине. Одновременно формируются характеристики для двух соседних слоев  $i-j$  и  $j-k$  (рис. 3) в виде:



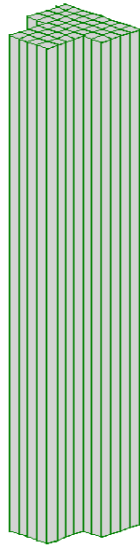
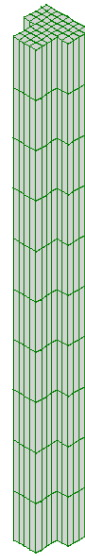
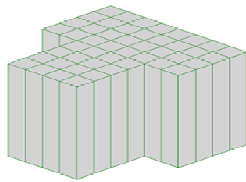


Рис. 1. Исходная конфигурация узлов конечно-элементной схемы



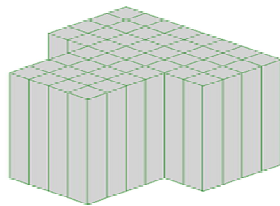
ВК ПРИНС

Рис. 2. Разбивка стержня на объемные конечные элементы



$k$

$j$



$j$

$i$

Рис. 3. Два соседних слоя стержня

$$\begin{cases} f_i^{(1)} \\ f_j^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} & k_{1,2}^{(1)} \\ k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{cases} \delta_i \\ \delta_j \end{cases} + \begin{cases} \bar{f}_i^{(1)} \\ \bar{f}_j^{(1)} \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_j^{(2)} \\ f_k^{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(2)} & k_{1,2}^{(2)} \\ k_{2,1}^{(2)} & k_{2,2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{cases} \delta_j \\ \delta_k \end{cases} + \begin{cases} \bar{f}_j^{(2)} \\ \bar{f}_k^{(2)} \end{cases},$$

где  $f_i^{(m)}, f_j^{(m)}, f_k^{(m)}, m = 1, 2$  - векторы узловых сил на поверхностях  $i, j$  и  $k$ ;  $k_{1,1}^{(m)}, k_{1,2}^{(m)}, k_{2,1}^{(m)}, k_{2,2}^{(m)}$  - блоки матриц жесткости нижнего ( $m = 1$ ) и верхнего ( $m = 2$ ) слоев;  $\bar{f}_i^{(m)}, \bar{f}_j^{(m)}, \bar{f}_k^{(m)}$  - векторы узловых сил от поверхностной и/или объемной нагрузки.

Используя условия равновесия на границе между слоями

выразим перемещения  $\{\delta_j\}$  на границе между слоями через перемещения  $\{\delta_j\}$  и  $\{\delta_k\}$  на внешних границах пакета из двух слоев:

$$\{f_j^{(1)}\} + \{f_j^{(2)}\} = [k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{2,2}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)}]\{\delta_j\} + [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\} + \{\bar{f}_j^{(1)}\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\} = 0,$$

где  $[k_{j,j}] = [k_{2,2}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)}]$ .

Определяя из формул (1) векторы  $f_i^{(1)}$  и  $f_k^{(2)}$  и подставляя в полученные выражения значение  $\{\delta_j\}$ , приходим к соотношению:

$$\begin{cases} f_i^{(1)} \\ f_k^{(2)} \end{cases} = [K_{i,k}] \begin{cases} \delta_i \\ \delta_k \end{cases} + \begin{cases} \bar{f}_i \\ \bar{f}_k \end{cases},$$

где

$$[K_{i,k}] = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} - k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} k_{2,1}^{(1)} & -k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} k_{1,2}^{(2)} \\ -k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} - k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} k_{1,2}^{(2)} \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_i^{(1)} - k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} \{ \bar{f}_j^{(1)} + \bar{f}_j^{(2)} \} \\ \bar{f}_k^{(2)} - k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} \{ \bar{f}_j^{(1)} + \bar{f}_j^{(2)} \} \end{Bmatrix}$$

есть матрица жесткости и вектор нагрузки пакета из двух слоев, приведенные к узлам на внешних поверхностях пакета.

Применяя описанные выше операции к каждой паре соседних слоев, на последнем этапе получим матрицу жесткости и вектор нагрузок, приведенные к торцевым сечениям суперэлемента.

Предложенная методика реализована в вычислительном комплексе ПРИНС. Размеры статьи не позволяют привести полное описание алгоритма и тексты программ. Отметим только, что при исключении внутренних узлов в памяти ЭВМ сохраняется вся информация, необходимая для выполнения обратного хода, т.е. для вычисления перемещений промежуточных узлов и напряжений во всех элементах стержня.

В заключение приводим результаты тестового расчета, который был выполнен по программе ПРИНС для консольного стержня таврового сечения. Размеры стержня и способ нагружения показаны на рис. 4.

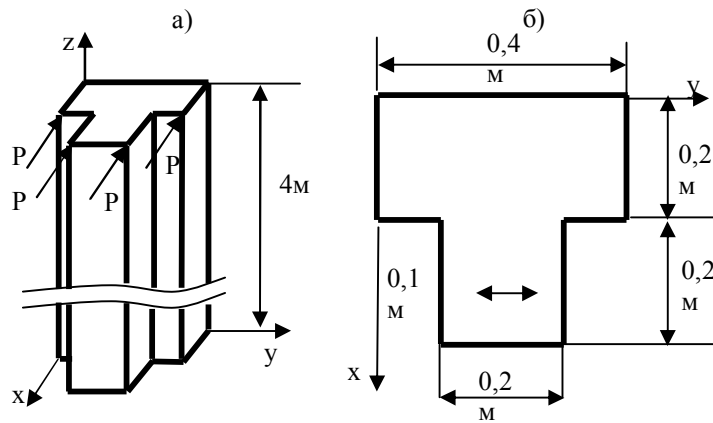


Рис. 4. Способ нагружения (а) и размеры сечения (б) стержня

Сила  $P$  принималась равной 10 КН, модуль упругости материала  $E = 3,2 \times 10^7$  КПа и коэффициент Пуассона  $\mu = 0,2$ . При принятых исходных данных максимальное перемещение и максимальное напряжение в стержне, подсчитанные по формулам сопротивления материалов, равны

$$\Delta_{x, \max} = 0,0181 \text{ м} \text{ и } \sigma_{z, \max} = 25400 \text{ КПа, соответственно.}$$

Результаты расчета по программе ПРИНС представлены на рис.5 для перемещений и на рис.6 для напряжений. Найденные по программе величины перемещений и напряжений равны  $\Delta_{x, \max} = 0,01797 \text{ м}$  и  $\sigma_{z, \max} = 24900 \text{ КПа}$ , соответственно. Расхождение составляет 0,718% для перемещений и 2% для напряжений.

**Вывод:**

Предложенный способ конечно-элементного моделирования стержня таврового сечения позволяет получить высокую точность результатов при незначительном увеличении числа степеней свободы конечного элемента и при устранении недостатков, присущих классическим моделям, основанным на гипотезе плоских сечений.

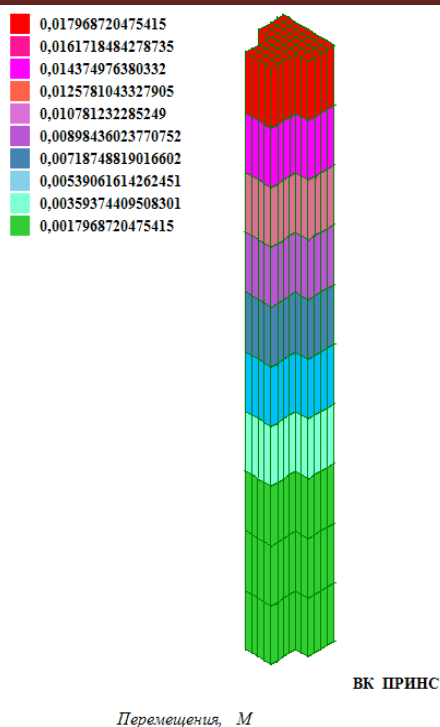


Рис. 5. Перемещения в стержне

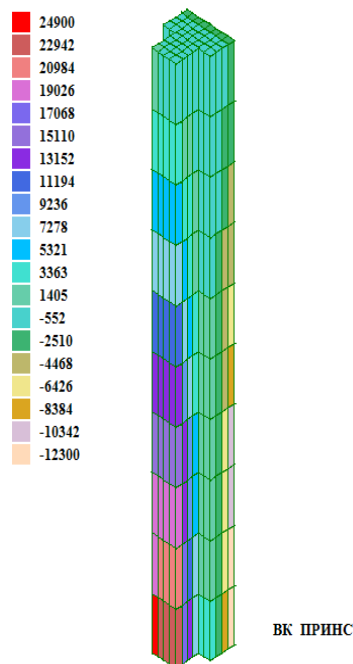


Рис. 6. Напряжения в стержне

#### Л и т е р а т у р а

1. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г. и др. Расчет остаточного поперечного импульса в железобетонной колонне при ударно-волновом нагружении ее боковой поверхности// Вестник ТГАСУ. – 2012. – № 4. –С. 179-190.
2. Белов Н.Н., Копаница Д.Г., Кумляк О.Г. и др. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. – Томск: STT, 2004. – 466 с.
3. NASTRAN theoretical manual. NASA, Washington, 1972.
4. Басов К.А. ANSYS. Справочник пользователя. – М.: Изд-во “ДМК-Пресс», 2005. – 637 с.
5. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia (2011).
6. Агапов В.П. Новый подход к моделированию стержней при расчете конструкций на прочность методом конечных элементов// Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций: Тр. Межд. молодежной научн. конф., посвященной 55-летию РУДН. – М.: Изд-во РУДН, 2014. – С. 16-20.
7. Агапов В.П. Сопоставительный анализ двух подходов к моделированию стержней при расчете строительных конструкций методом конечных элементов// Научное обозрение. – 2015. – № 8. – С.79-86.

#### References

1. Belov, N.N., Yugov, N.T., Kopanitz, D.G., et al (2012). An analysis of residual transversal impulse in reinforced concrete column when impulse-and-wave loading of its lateral surface, *Vestnik TGASU*, № 4, p. 179-190.
2. Belov, N.N., Kopanitz, D.G., Kumlyak, O.G. et al (2004). *An Analysis of Reinforced Concrete Structures When Explosion and Impulsive Loads*, Tomsk: 466 p.
3. NASTRAN theoretical manual. NASA, Washington, 1972.
4. Basov, K.A. (2005). ANSYS. Spravochnik Pol'sovatelya, Moscow: “DMK- Press», 637 p.
5. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia (2011).
6. Agapov, V.P. (2014). A new approach to modelling of rods in strength analysis of structures by finite element method, *Prochnost, Polzuchest i Razrushenie Stroitel'nyh i Mashinostroitel'nyh Materialov i Konstrukzij: Tr. Mezhd. Molodyozhnoy Nauchn. Konf., Posvyaschennoy 55-letiyu RUDN*, Moscow: Izd-vo RUDN, p. 16-20.
7. Agapov, V.P. (2015). Comparative analysis of two approaches to modeling of roads in an analysis of building structures by finite element method, *Nauchnoe Obozrenie*, № 8, p. 79-86.

**MODELLING OF THE T-SECTION RODS IN THE ANALYSIS OF BUILDING STRUCTURES BY FINITE ELEMENT METHOD**

V.P. AGAPOV  
*NIU MGSU, Moscow*

The technique of finite-element modeling of the T-section rods, based on the use of three-dimensional theory and super element technology, is described. A brief summary of the calculation formulas and a description of the algorithm realized in the program PRINS is presented. The test task is considered. The calculation results obtained by the program PRINS are compared with the analytical solution.

**Key words:** building structures, rod systems, finite element method, super element, software.



УДК 627.8

**ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА  
РАСЧЕТНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ  
СОСТОЯНИЕ АРОЧНОЙ ПЛОТИНЫ**

Д.В. КОЗЛОВ, *д.т.н., профессор,*  
В.И. ВОЛКОВ, *к.т.н., профессор,*  
А.И. ГОЛЫШЕВ, *к.т.н., доцент,*  
А.А. УЧЕВАТКИН, *аспирант*

*ФГБОУ ВО "Российский государственный аграрный университет – МСХА  
имени К.А. Тимирязева"*  
*127550, г. Москва, ул. Прянишникова, 19*

*Светлой памяти учителя, заслуженного деятеля науки РФ, д.т.н.,  
профессора Григория Моисеевича КАГАНОВА посвящается*

*Рассмотрен вопрос влияния размеров конечных элементов на расчетное напряженно-деформированное состояние арочной плотины применительно к математическому обоснованию эффективности конструктивных решений, направленных на усиление сооружения.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** усиление плотин, напряженно-деформированное состояние, МКЭ, размеры конечных элементов, арочная плотина.

Исследованию напряженно-деформированного состояния бетонных плотин, включая арочно-гравитационную плотину Саяно- Шушенской ГЭС и другие аналогичные, а также путям его улучшения и повышения несущей способности посвящено значительное число работ, например, [1, 2, 3, 4, 7]. Вопрос усиления бетонных плотин встает, как правило, очень остро при длительной эксплуатации гидроузла, что приводит к появлению трещин на напорной грани, ослабленных зон в бетоне плотины и в основании.

В рамках проведенных ранее исследований по усилению профиля арочной плотины был выполнен комплекс предварительных расчетов с небольшим количеством элементов (2100 элементов для плотины и 9800 элементов для основания). Крупные элементы в плотине не позволяли корректно аппроксимировать форму напорной грани плотины до заданных параметров. Благодаря этим расчетам удалось на первом этапе сделать ориентировочные оценки возможности применения предлагаемых для усиления мероприятий с количественной оценкой положительного эффекта. На основании анализа полученных результатов было принято решение продолжить работу в данном направлении с уменьшением размеров конечно-элементной сетки, чтобы приблизить КЭ модель к

проектному профилю арочной плотины, и проанализировать влияние на численные значения получаемых расчетных напряжений усиления плотины, направленного на улучшение общей картины напряженно-деформированного состояния.

На первом этапе решения этой задачи было произведено тотальное обновление конечно-элементной сетки и более точное приближение модели к форме арочной плотины для удобства ее использования в дальнейших расчетах. Всего было построено пять новых моделей. Сетка в каждой последующей была гуще (на контакте плотины-основание) сетки предыдущей модели (рис. 1). Сделано это было с целью возможности сравнения полученных результатов для выбора оптимальной разбивки для данной постановки задачи.

Для определения изменения величины дополнительных сжимающих напряжений на фоне уменьшения размеров конечных элементов также был проведен расчет и для плотины с усилением гребня со стороны верховой грани (рис. 2).

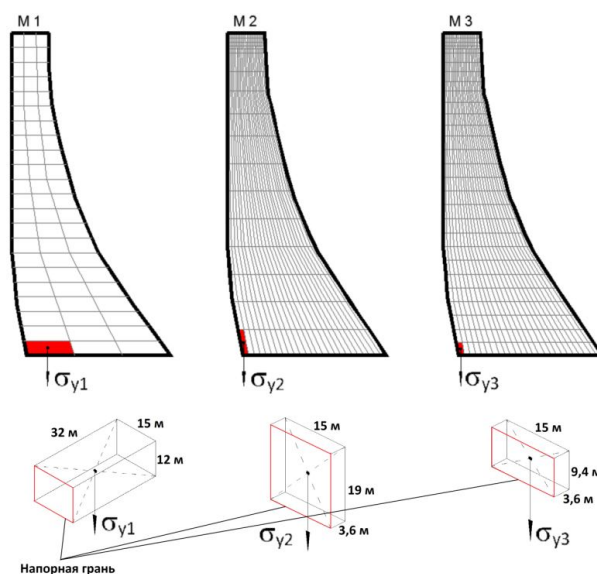


Рис. 1. Частота разбивки различных моделей (M1, M2, M3) и размеры элементов, в которых оценивалось влияние усиления. Модели M4 и M5 условно не показаны. Размеры элементов: M4 – 15×4,7×3,6 м, M5 – 15×2,3×3,6 м.

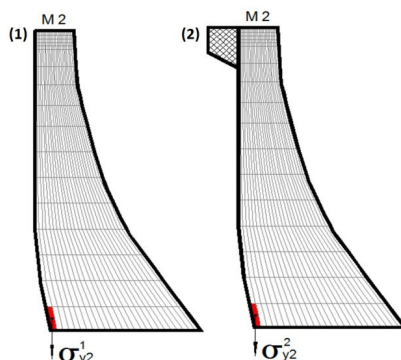


Рис. 2. Вариант плотины (M2) без усиления (1) и с усилением (2) соответственно

Вопросу о назначении размеров и типа конечных элементов в зависимости от вида моделируемой конструкции посвящен ряд работ, в которых даются те

или иные рекомендации применительно к сравнительно простым элементам сооружений: железобетонные перекрытия, плиты, балки, рамы, фермы и т.п. [5, 8]. К примеру, для железобетонной балки и плиты перекрытия под распределенной нагрузкой расчет методом конечных элементов можно верифицировать аналитическим, приведенным в [6]. Однако, когда речь заходит об анализе напряженно-деформированного состояния весьма сложной пространственной системы, провести верификацию, зачастую, просто не представляется возможным. Несмотря на попытки авторов статей, и научных работ (о назначении размеров и типов конечных элементов) "докопаться" до истины, выводы носят, как правило, рекомендательный характер со ссылкой на математические погрешности вычислительных комплексов.

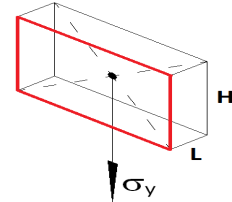


Рис. 3. Рассматриваемый конечный элемент

Суммируя вышеизложенное, в данной работе был проведен сравнительный анализ расчетных вертикальных напряжений в ключе арки на верхней грани на контакте плотины с основанием для моделей с разной частотой разбивки на конечные элементы. Были проведены сравнения для элементов с относительными размерами  $H_{эл}/L_{эл}$  равными 5.3, 2.6, 1.3, 0.65, 0.33 (рис. 3.)

Проведенный анализ с уточненной сеткой показали значительные расхождения величины добавки к сжатию, полученной при расчетах на старой модели (Model1). Значение погрешности определения напряжений в крайних элементах возрастало, что привело к прогрессивному росту приращения величины напряжений. Результаты сравнения представлены на Рис. 4 и в Таблице.

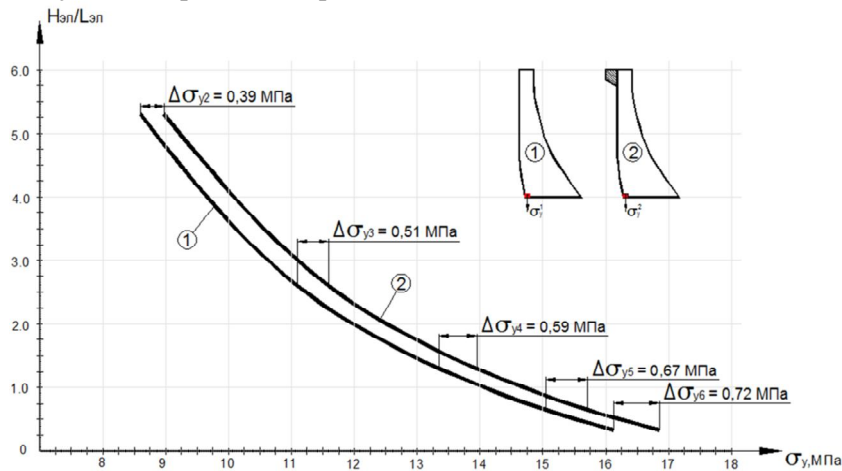


Рис. 4. Величина сжимающих напряжений в ключе арки на верхней грани на контакте плотины с основанием,  $H_{эл}/L_{эл}$  – относительный размер рассматриваемого конечного элемента,  $\sigma_y$  – расчетное вертикальное напряжение, МПа, 1 – плотина без усиления, 2 – плотина с усилением

Как видно из таблицы и графика (рис. 4), расчетная величина сжимающих напряжений с уменьшением размеров элементов непрерывно возрастает от 5,76 МПа до 16,13 МПа для неусиленного профиля, и от 5,99 МПа до 16,85 МПа для плотины с усилением гребня со стороны верхней грани. Возрастает также и величина добавки к сжатию, вызванная усилением профиля плотины со стороны верхнего бьефа: от 0,23 МПа до 0,72 МПа. При этом величина приращения вертикальных напряжений (по которой можно оценивать влияние предлагаемого усиления на напряженно-деформированное состояние плотины) остается практически неизменной и составляет 4,3 %.

Таблица. Сравнение полученных результатов при различном сгущении конечно - элементной сетки (сжатие принято со знаком +; 1 – плотина без усиления; 2 – плотина с усилением)

Вариант плотины и сетки		Параметр			
		Расчетное вертикальное напряжение, $\sigma_y$ , МПа	Дополнительное сжатие $\Delta\sigma_y$ , МПа	Приращение сжатия при сгущении сетки $\Delta\sigma_y^n / \Delta\sigma_y^{n-1}$ , %	Приращение напряжений при сгущении сетки, $\sigma_{y2}^n / \Delta\sigma_{y1}^n$ , %
Model1	1	5,76	0,23	41	3,8
	2	5,99			
Model2	1	8,58	0,39	23,5	4,3
	2	8,97			
Model3	1	11,08	0,51	13,6	4,4
	2	11,59			
Model4	1	13,35	0,59	11,9	4,2
	2	13,94			
Model5	1	15,04	0,67	6,9	4,3
	2	15,71			
Model6	1	16,13	0,72		4,3
	2	16,85			

### Выводы:

1. Проведенное исследование показало, что имеет место существенная зависимость расчетной величины сжимающих напряжений  $\sigma_y$  от разбивки сетки и от размеров элементов, что требует более углубленной проработки.

2. При изменении размеров конечных элементов (сгущение сетки), значение приращения вертикальных напряжений, связанное с усилением плотины, остается практически неизменным - 4,3 %. Использование этого относительного, весьма информативного показателя возможно в дальнейших исследованиях по определению влияния различных типов усилений на напряженно-деформированное состояние арочных плотин.

3. Принимая во внимание отсутствие влияния частоты сетки КЭ на величину приращения вертикальных напряжений (применительно к решению задачи по оценке эффективности мероприятий по усилению плотины), выбор сетки необходимо осуществлять с учетом заданной точности аппроксимации формы арочной плотины, а также с учетом скорости вычисления на ПК.

### Литература

- Каганов Г.М., Волков В.И., Учеваткин А.А. К вопросу усиления арочных плотин при невозможности сработки водохранилища// Природообустройство. – № 1. – 2012. –С. 40-42.
- Каганов Г.М., Волков В.И., Учеваткин А.А. Пути усиления некоторых типов арочных плотин в широких створах// Гидротехническое строительство. – № 8. – 2011. – С. 46-50.
- Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Гребенчиков В.П., Цыбаков В.А., Нефёдов А.В., Катанов А.Д., Пономарёв Д.И. Расчетное обоснование решений по обеспечению надёжности конструкций водосброса № 2 бетонной плотины Богучанской ГЭС. // В сб. «Бетонные и железобетонные гидротехнические сооружения», Известия ВНИИГ, т. 244, 2005, стр. 227-233.
- Александров А.В., Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Балагуров В.Б. Расчетное обоснование и технические решения по усилению железобетонных конструкций ГЭС (ГАЭС), имеющих трещины различного направления, при действии комплекса нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2014. № 6. С. 50-54.
- Шимановский А.О., Путько А.В. Применение методов конечных элементов в решении задач прикладной механики: Учебно-методическое пособие. – Гомель: БелГУТ, 2008. – 61 с.
- Ассоциация «ЖЕЛЕЗОБЕТОН». Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003), Москва, 2005. – Электронный документ, условия доступа: <http://www.gosthelp.ru/text/PosobieSP521012003Posobi.html>

7. Lin Peng, Zhou Weiyuan, Liu Hongyuan. Experimental Study on Cracking, Reinforcement, and Overall Stability of the Xiaowan Super-High Arch Dam// *Rock Mechanics and Rock Engineering*. – 2015. – Vol. 48. – №2. – P. 819-841.
8. Brooker O. How to design reinforced concrete flat slabs using Finite Element Analysis. – Published by the Concrete Centre, May 2006.

#### References

1. Kaganov, G.M., Volkov, V.I., Uchevatkin, A.A.(2012). On the question of strengthening of arch dams at the inability of the reservoir drawdown, *Prirodoobustroystvo*, № 1, p. 40-42.
2. Kaganov, G.M., Volkov, V.I., Uchevatkin, A.A.(2011). Ways to strengthen certain types of arch dams in wide cross-sections, *Gidotekhnicheskoe Stroitel'stvo*, № 8, p. 46-50.
3. Rubin OD, Lisichkin SE, Grebenshikov VP, Zcibakov VA, Nefedov AV, Katanov AD, Ponomarev DI Raschetnoe obosnovanie resheniy po obespecheniyu nad'ozhnosti konstrukcii vodosbrosa № 2 betonnoy plotini Boguchanskoj GES. Sb. «Betonnii i zhelezobetonnie gidrotekhnicheskie sooruzheniya», Izv. VNIIG, t. 244, 2005, pp. 227-233.
4. Aleksandrov, A.V., Rubin, O.D., Lisichkin, S.E., Balagurov, V.B. Raschetnoe obosnovanie I tekhnicheskie resheniya po usileniyu zhelezobetonnykh konstrukcij GES (GAES) imeyushchih treshchini razlichnogo napravleniya pri dejstvii kompleksa nagruzok // *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruktsiy i Sooruzheniy*, 2014 №6, pp. 50-54.
5. Shimanovski, A.O., Putyato, A.V. (2008). *Application of Finite Element Methods in Solving Problems of Applied Mechanics*, Gomel': BelGUT, 61 p.
6. Assootziatziya "Zhelesobeton". *Posobie po Proektirovaniyu Betonnykh i Zhelesobeton. Konstruktsiy iz Tyazhologo Betona bez Predvaritel'nogo Napryazheniya Armatury* (k SP 52-101-2003), Moscow, 2005, elektronnyy Dokument: <http://www.gosthelp.ru/text/PosobieSP521012003Posobi.html>
7. Lin Peng, Zhou Weiyuan, Liu Hongyuan. Experimental Study on Cracking, Reinforcement, and Overall Stability of the Xiaowan Super-High Arch Dam, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, Vol. 48, №2, p. 819-841.
8. Brooker, O. (2006). *How to Design Reinforced Concrete Flat Slabs Using Finite Element Analysis*, Published by The Concrete Centre, May 2006.

#### FINITE ELEMENT SIZE INFLUENCE UPON DESIGN STRESS-STRAIN STATE OF ARCH DAM

Kozlov D.V., Volkov V.I., Golyshchikov A.I., Uchevatkin A.A.

"Rossiyskiy Gosudarstvennyy Agrarnyy Universitet – MSHA im. K.A. Timiryaseva"

FE size influence upon the design stress-strain state of arch dam is investigated keeping in mind the mathematical substantiation the effectiveness of constructive solutions to strengthen the structure.

**Keywords:** strengthening dams, stress-strain state, FEM, the sizes of the finite elements, arch dam.



#### ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ «СТРОЯЩЕЕСЯ БЕТОННОЕ СООРУЖЕНИЕ – НЕСКАЛЬНОЕ ОСНОВАНИЕ»

О.Д. РУБИН, доктор технических наук\*

П.В. ШЕСТОПАЛОВ, инженер\*\*

\* АО «Научно-исследовательский институт энергетических сооружений»;  
125362, г. Москва, Строительный проезд, д. 7А, [info@niies.ru](mailto:info@niies.ru)

\*\* АО «ИГХолдинг Рус», 123317, Москва, Пресненская наб., д.6, стр.2, оф.43-10, [info@ighrus.com](mailto:info@ighrus.com)

Предлагается усовершенствованная методика численного конечно-элементного моделирования строящихся бетонных сооружений на нескальных основаниях. При этом размеры моделируемого фрагмента основания ограничиваются глубиной сжимаемой толщи основания. Учитывается увеличение модулей деформаций грунтов основания с ростом глубины расположения грунтовых слоев.



**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** строящиеся бетонные сооружения; нескальное основание; конечно-элементное моделирование; фрагмент основания; глубина сжимаемой толщи; вертикальные сжимающие напряжения; компрессионные испытания; напряженно-деформированное состояние; устойчивость; прочность.

Одна из особенностей усовершенствованной методики численного моделирования строящихся бетонных сооружений на нескальном основании заключается в более корректном моделировании фрагмента массива основания [1]. При этом используется физическая величина, называемая глубиной сжимаемой толщи основания [2]. Предварительно определяется глубина сжимаемой толщи основания. Размеры фрагмента основания по вертикали назначаются соответствующими величине глубины сжимаемой толщи основания. Следует упомянуть, что в процессе возведения сооружения глубина сжимаемой толщи основания изменяется. Учитывая данное обстоятельство, конечно-элементные модели системы «строящееся бетонное сооружение – нескальное основание» корректируются в процессе поэтапных расчетных исследований. При этом на каждом этапе расчетов изменяется вертикальный размер моделируемого фрагмента основания.

Другой важнейшей особенностью усовершенствованной методики численного моделирования строящихся бетонных сооружений на нескальном основании является учет изменения модуля деформации грунтов основания по глубине в зависимости от роста дополнительных (помимо бытовых) вертикальных сжимающих напряжений [3]. При этом закономерности изменения модуля деформации по глубине устанавливаются на основе анализа данных компрессионных испытаний грунтов. Также был учтен опыт численного моделирования сооружений с основаниями [4, 5, 6].

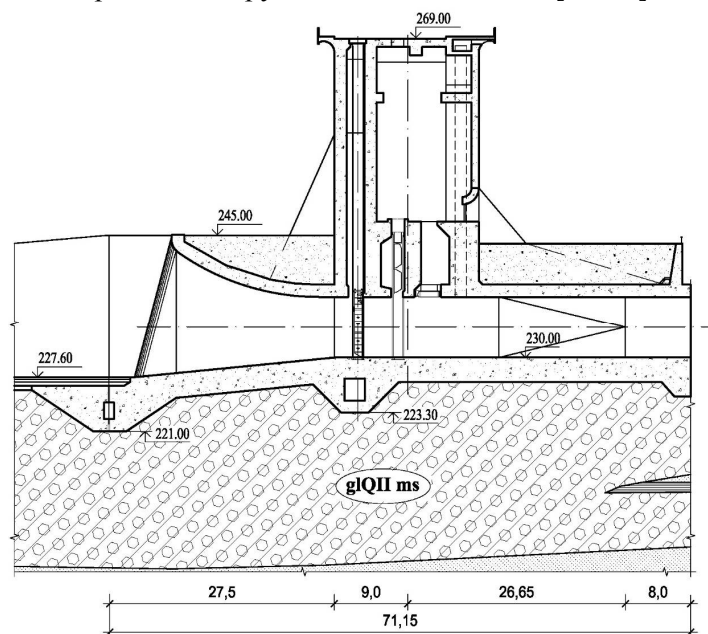


Рис. 1.

Было предложено определять глубину сжимаемой толщи основания непосредственно из решения задачи напряженно-деформированного состояния системы «строящееся бетонное сооружение – нескальное основание» на основе соответствующих конечно-элементных моделей в рамках усовершенствованной

методики математического конечно-элементного моделирования систем «строящееся бетонное сооружение – нескальное основание».

На примере строящегося водоприемника Загорской ГАЭС-2, расположенного на нескальном основании, были выполнены расчеты глубины сжимаемой толщи основания для шести характерных этапов возведения сооружения: 1-й этап (по состоянию на 16.05.2009 г.), 2-й этап (по состоянию на 21.01.2010 г.), 3-й этап (по состоянию на 10.10.2010 г.), 4-й этап (по состоянию на 23.07.2011 г.), 5-й этап (по состоянию на 01.12.2011 г.), 6-й этап (по состоянию на 29.08.2012 г.). Конструкция водоприемника представлена на рис. 1.

На основании предложенной методики определения глубины сжимаемой толщи, были получены следующие результаты (соответствующие расчетным этапам): 6,0; 7,7; 9,9; 12,7; 17,9; 21,0 м.

Графики зависимости глубины сжимаемой толщи  $H_c$  (м) от величины давления на основание  $P$  (кПа), а также в относительных единицах представлены на рис. 2 и 3.

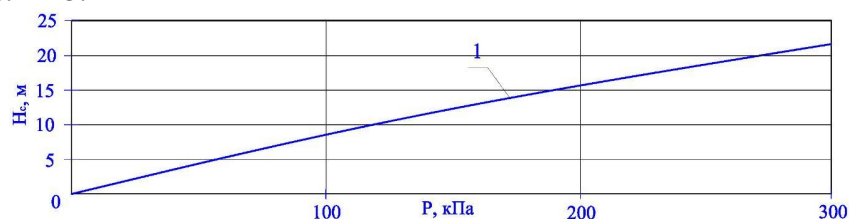


Рис. 2.

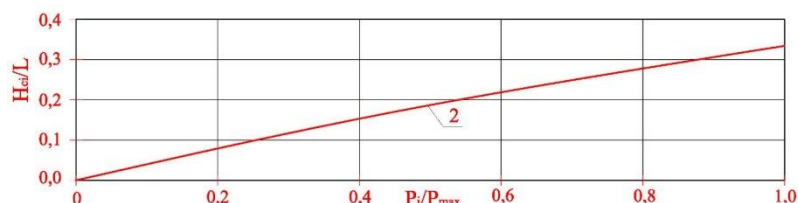


Рис. 3.

На основе анализа полученных результатов была разработана зависимость для определения глубины сжимаемой толщи (м) основания водоприемника Загорской ГАЭС-2 на каждом из этапов расчета:

$$H_{ci} = -0,00009 \cdot P_i^2 + 0,086 \cdot P_i, \quad (1)$$

где  $P_i$  – давление на основание (кПа) на данном ( $i$ -том) этапе расчетов.

В относительных единицах данная зависимость имеет вид:

$$\xi = -0,122 \cdot \rho^2 + 0,393 \cdot \rho, \quad (2)$$

где  $\xi$  – относительная величина сжимаемой толщи  $h/L$  (относительно длины сооружения  $L$ );  $\rho$  – относительная (относительно максимального значения  $P_{\max}$ ) величина давления на основание.

Учёт изменения деформационных характеристик грунтов по глубине основания водоприемника проводился на основе анализа данных компрессионных испытаний. При этом была установлена закономерность увеличения значений модулей деформации с ростом глубины заложения каждого слоя конечных элементов, аппроксимирующих грунтовое основание.

Так, в зависимости от величины вертикальных сжимающих напряжений в рамках анализа данных компрессионных испытаний образцов грунтов основания водоприемника Загорской ГАЭС-2 для начального этапа исследований было получено следующее:

- для вертикальных сжимающих напряжений в интервале от 0,0 до 0,1 МПа, модуль деформации  $E$  составил 17,6 МПа;
- для вертикальных сжимающих напряжений в интервале от 0,1 до 0,2 МПа, модуль деформации  $E$  составил 25,0 МПа;
- для вертикальных сжимающих напряжений в интервале от 0,2 до 0,3 МПа, модуль деформации  $E$  составил 32,5 МПа;
- для вертикальных сжимающих напряжений в интервале от 0,3 до 0,4 МПа, модуль деформации  $E$  составил 40,9 МПа;
- для вертикальных сжимающих напряжений в интервале от 0,4 до 0,5 МПа, модуль деформации  $E$  составил 50,0 МПа;
- для вертикальных сжимающих напряжений в интервале от 0,5 до 0,6 МПа, модуль деформации  $E$  составил 60,0 МПа;
- для вертикальных сжимающих напряжений в интервале от 0,6 до 0,7 МПа, модуль деформации  $E$  составил 71,4 МПа;
- для вертикальных сжимающих напряжений в интервале от 0,7 до 0,8 МПа, модуль деформации  $E$  составил 88,2 МПа.

На основе анализа полученных результатов была разработана зависимость для определения модулей деформации грунта при изменении действующих вертикальных сжимающих напряжений в основании водоприемника Загорской ГАЭС-2:

$$E = 62,5 \cdot \sigma^2 + 47,35 \cdot \sigma + 15,97, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль деформации грунта (кПа),  $\sigma$  – вертикальные напряжения в данном слое основания (кПа). Разработанная зависимость представлена на графике (рис. 4).

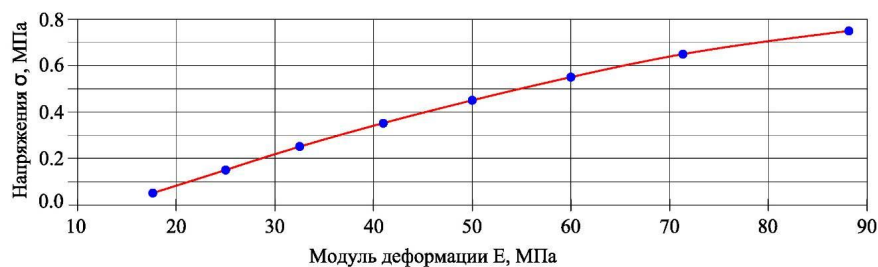


Рис. 4.

Таблица 1

Глубина залегания слоя, м	Модули деформации, МПа	
	В верхней части основания (в зоне установки труба-марок 1ТМ01 и 1ТМ03)	В нижней части основания (в зоне установки труба-марок 1ТМ02, 1ТМ04-1ТМ06)
0-2	43,9	42,0
2-4	47,3	45,3
4-6	50,8	48,6
6-8	54,3	52,0
8-10	57,8	55,3
10-12	61,3	58,6
12-14	64,8	62,0
14-16	68,3	65,3
16-18	71,7	68,6
18-20	75,2	72,0
20-24	78,7	75,3

С учетом полученных выше результатов была разработана математическая конечно-элементная модель системы «строящееся бетонное сооружение – не-скальное основание» применительно к водоприемнику Загорской ГАЭС-2 [1]. При этом значения модулей деформации основания принимались в соответствии с табл. 1. На основе разработанной КЭ модели водоприемника Загорской ГАЭС-2 совместно с основанием были выполнены расчетные исследования напряженно-деформированного состояния сооружения и основания, устойчивости и прочности данного сооружения.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Шестопалов П.В.* Уточнение фактических физико-механических характеристик грунтов, слагающих основание водоприемника строящейся Загорской ГАЭС-2 на основе расчетных исследований и данных натурных наблюдений // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* – 2013. – №3. – С. 64-71.

2. *СП 23.13330.2011.* (Актуализированная редакция СНиП 2.02.02-85 «Основания гидротехнических сооружений»).

3. *Шестопалов П.В.* Особенности численного моделирования оснований бетонных сооружений с учетом изменения модуля деформации по глубине // *Материалы международной научно-практической конференции «Проблемы комплексного обустройства техноприродных систем».* – М., МГУП, 2013. – С. 309-312.

4. *Oka F., Kimoto S., Adachi T.* Calibration of elastoviscoplastic models for cohesive soils// Prediction, analysis and design in geomechanical applications/ *The 11th Conf. of IACMAG.* Torino, 2005. – Vol. 1. – P. 449-456.

5. *Brinkgreve R.B., Yamamuro J.A., Kaliakin V.N.* Selection of soil models and parameters for geotechnical engineering application // *Soil Constitutive Models: Evaluation, Selection, and Calibration.* *Journal of American Society of Civil Engineers,* 2005. – V. 128. – Pp. 69–98.

6. *Poulos H.G., Carter J.P., Small J.C.* Foundations and retaining structures – Research and practice// *International conference on soil mechanics and geotechnical engineering.* –Vol. 4. – 2001. – Pp. 2527-2606.

#### R e f e r e n c e s

1. *Shestopalov, P.V.* (2013). Utochnenie fakticheskikh fiziko-mekhanicheskikh harakteristik gruntov, slagayushchih osnovanie vodopriemnika stroyashchejsya Zagorskoj GAES-2 na osnove raschetnyh issledovanij i dannyh naturnyh nablyudenij, *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernyh Konstrukcij i Sooruzhenij*, №3, p. 64-71.

2. *SP 23.13330.2011* (Aktualizirovannaya redakciya SNiP 2.02.02-85 «Osnovaniya gidrotexnicheskix sooruzhenij»).

3. *Shestopalov, P.V.* (2013). Osobennosti chislenogo modelirovaniya osnovanij betonnyh sooruzhenij s uchetoм izmeneniya modulya deformacii po glubine, *Materialy mezhd. nauchno-prakt. konferencii «Problemy Kompleksnogo Obustrojstva Tekhnoprirodnih Sistem»*, M., MGUP, pp. 309-312.

4. *Oka, F., Kimoto, S., Adachi, T.* (2005). Calibration of elastoviscoplastic models for cohesive soils, Prediction, analysis and design in geomechanical applications, *The 11th Conf. of IACMAG*, Torino, 2005, Vol. 1, pp. 449-456.

5. *Brinkgreve, R.B., Yamamuro, J.A., Kaliakin, V.N.* (2005). Selection of soil models and parameters for geotechnical engineering application, *Soil Constitutive Models: Evaluation, Selection, and Calibration*, *Journal of American Society of Civil Engineers*, Vol. 128, pp. 69–98.

6. *Poulos, H.G., Carter, J.P., Small, J.C.* (2001). Foundations and retaining structures – Research and practice, *International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Vol. 4, 2001, pp. 2527-2606.

### THE FEATURES OF MATHEMATICAL FINITE-ELEMENT MODELING OF THE SYSTEM "NEWLY BUILT CONCRETE STRUCTURES – NON ROCK FOUNDATION"

Rubin O.D., Shestopalov P.V.

An improved method of numerical finite-element modeling of concrete structures built on nonrock foundations is provided. The dimensions of the modeled fragment reason to the depth limit of the compressible foundations strata. The increase in deformation modulus of the foundations strata with an increase in the depth of the soil layers is taken into account.

**Keywords:** concrete structure, nonrock base, the depth of the soil layers, finite element modelling, compression test, stress-strain state, stability, strength.

## Экспериментальные исследования

УДК 624.131.23

### РАСЧЕТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАСОЛЕННЫХ ГРУНТОВ

А.Д. КАЮМОВ\*, *д-р техн. наук, профессор,*

Р.М. ХУДАЙКУЛОВ\*\*, *стажер-соискатель*

\*НИИАД «Узавтойул» ГАК,

\*\* ТАДИ, *rashidbek\_19\_87@mail.ru*

*В статье приведены результаты исследования расчетных характеристик засоленных грунтов земляного полотна автомобильных дорог Узбекистана, используемых при расчете дорожных одежд. В результате статистической обработки экспериментальных данных получены зависимости для определения расчетных характеристик исходя от типа и количества засоления, плотности и влажности грунтов.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** засоленные грунты, земляное полотно, автомобильная дорога, водно-физические свойства грунтов, лёссовый грунт, прочностные свойства засоленных грунтов.

К засоленным грунтам относятся грунты, содержащие в верхней метровой толще более 0,3% по массе легкорастворимых - хлористых, сернокислых и углекислых солей натрия, кальция и магния. Почвы, содержащие в поверхностных слоях до глубины 1-2 м в свободном состоянии более 1% легкорастворимых солей, называют солончаками [1]. Основными факторами появления засоленных грунтов вообще, в частности в Узбекистане являются искусственное орошение хлопчатника и других посевных, минерализованные грунтовые воды близко залегаемые к поверхности земли, затрудненный сток поверхностных вод и превышение количества испарения от количества атмосферных осадков, обусловленный климатическим условием региона.

Анализ литературных материалов показывает, что в засоленных грунтах земляного полотна очень часто встречаются:  $NaCl$ ,  $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ ,  $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ ,  $MgCl_2 \cdot 6H_2O$ ,  $CaCl_2 \cdot 6H_2O$ ,  $NaHCO_3$ ,  $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ ,  $CaCO_3$ ,  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  и другие соли.



Рис. 1. Земляное полотно из засоленного грунта



Рис. 2. Кристаллы соли в составе грунта

Засоленные грунты распространены в основном в сухих засушливых зонах и занимают 240 млн. гектаров площади всего земного шара. В странах СНГ засоленные грунты распространены в Казахстане, в республиках Центральной Азии, на территориях северно - восточного Кавказа и юго-восточной Украины, которые занимают в общем 120,8 млн. гектаров площади. В Узбекистане орошаемые земли занимают 1970,7 тысяч гектаров площади, 50% которых приходится на вновь осваиваемые земли. В частности, 75% земель засолены в различ-

ной степени, из них слабо засоленные грунты составляют 1117,7 тысяч гектаров, средне засоленные 611,2 тысячи и сильно засоленные 241,6 тысяч гектаров земли [2], которые широко используются при строительстве земляного полотна автомобильных и железных дорог (рис. 1,2).

В настоящее время при проектировании дорожной одежды и назначения конструкции земляного полотна автомобильных дорог в условиях Узбекистана расчетные характеристики засоленных грунтов - модуль упругости грунта  $E_p$ , удельное сцепление  $C_p$  и угол внутреннего трения  $\varphi_p$  принимаются по нормативным документам ШНК 2.05.02-07 [3] и МКН 46-08 [4]. При их выборе, сначала устанавливаются расчетные значения влажности и плотности грунтов для данных условий, а затем при известных их значениях определяют величины прочностных и деформационных характеристик. Необходимо отметить, что в действующих нормативных документах приведены расчетные характеристики для глинистых и лёссовых грунтов. Однако, при назначении расчетных характеристик грунтов в этих документах не учитываются вид и количество солей в грунте. Это приводит к необоснованному назначению толщины дорожной одежды, высоты насыпи и крутизны откосов земляного полотна. Исходя из вышеизложенного, изучение влияния количества и вида солей в грунте на их расчетные характеристики является весьма актуальной задачей.

В Научно-исследовательском институте автомобильных дорог ГАК «Узавтоуил» проводились наблюдения за работой земляного полотна из засоленных грунтов, находящегося в длительной эксплуатации, а также за построенными опытными участками, находящимися в различных условиях их увлажнения. Обследование проводили два раза в году (весной и осенью) в течение нескольких лет (с 2000 по 2014 г.). Дорожные одежды на обследованных участках имели следующие конструкции: асфальтобетонное покрытие толщиной 10-20 см и основание из гравийно-песчаной смеси толщиной 20-30 см. В процессе наблюдений были заложены шурфы на глубинах 0-0,1; 0,3-0,4; 0,5-0,6; 0,8-0,9 и 1,1-1,3 м, где весовым методом определяли влажность и методом режущего кольца ( $500 \text{ см}^3$ ) плотность засоленных грунтов.

После статистической обработки результатов исследований и сравнения их многолетними данными было установлено следующее.

Разуплотнение грунта в верхней и нижней частях земляного полотна практически отсутствует, хотя годы наблюдений отличались суровой зимой и жарким летом. Средние значения коэффициента уплотнения грунта на глубине 0-0,4 м равен 1,02, на глубине 0,4-1,0 м – 0,99 и на глубине 1,0-1,5 м - 0,97.

Расчетная влажность засоленных грунтов земляного полотна автомобильных дорог зависит от типа местности по условиям увлажнения и вида засоления грунта и равна  $0,60W_T$  для 1-2 типа местности,  $0,65 W_T$  для 3 ( $W_T$ - влажность на границе текучести) типа местности.

Известно, что высота насыпи назначается из условия предохранения ее верхней части от увлажнения грунтовыми и поверхностными водами, что обеспечивается требуемым возвышением низа дорожной одежды над поверхностью земли и расчетным уровнем грунтовых или поверхностных вод. Проведенные обследования дорог показывают, что минимальное возвышение поверхности покрытия в наиболее низком месте поперечного профиля над расчетным уровнем грунтовых вод в зависимости от коэффициента уплотнения грунтов при различных засолениях можно принимать по данным табл. 1.

Обследование существующих дорог показывают, что крутизну откосов насыпей, возводимых из различных засоленных грунтов в зависимости от коэффициента запаса устойчивости и нагрузки от заднего колеса автомобиля можно назначить согласно табл. 2.

Таблица 1. Значения минимального возвышения поверхности покрытия над уровнем грунтовых вод

Грунты	Значения минимального возвышения поверхности покрытия над уровнем грунтовых вод, м							
	хлоридное и сульфатно-хлоридное засоление				сульфатное и хлоридно-сульфатное засоление			
	коэффициент уплотнения							
	0,96	0,98	1,00	1,02	0,96	0,98	1,00	1,02
Слабозасоленные	1,30	1,10	0,90	0,70	1,10	0,90	0,70	0,50
Среднезасоленные	1,43	1,21	0,99	0,77	1,21	0,99	0,77	0,55
Сильнозасоленные	1,56	1,32	1,08	0,84	1,32	1,08	0,84	0,60
Избыточно- засоленные	1,69	1,43	1,17	0,91	1,43	1,17	0,91	0,65

Таблица 2. Значения крутизны откосов земляного полотна из засоленных грунтов

Засоленность грунтов	Коэффициент запаса, $K_{зап}$			
	1,00		1,25	
	Нагрузка от заднего колеса автомобиля, т			
	10	13	10	13
Слабозасоленные	1:1,0	1:1,5	1:1,5	1:2,0
Среднезасоленные	1:1,5	1:2,0	1:2,0	1:2,5
Сильнозасоленные	1:2,0	1:2,5	1:2,5	1:3,0
Избыточно-засоленные	1:2,5	1:3,0	1:3,0	1:3,5

Специальные исследования, направленные на изучение влияния вида и количества солей на расчетные характеристики засоленных грунтов - сила сцепления  $C_p$ , угол внутреннего трения  $\varphi_p$  и модуль упругости  $E_p$  проводились в два этапа:

1. В засоленных грунтах, искусственно сформированных в лабораторных условиях научно-исследовательского института автомобильных дорог при ГАК «Узавтойул»;

2. В полевых условиях, на опытном участке построенного на автомобильной дороге в Сырдарьинской области - 4Р33 «Даштобод-Найман (Гулистон-Гагарин)» в сульфатно и хлоридно-сульфатно засоленных грунтах (рис. 3), а также на автомобильной дороге М-37 «Самарканд-Ашхобод-Туркменбаши» на участке 321-331 км, в хлоридно и сульфатно-хлоридно засоленных грунтах (рис. 4).



Рис. 3. Общий вид опытного участка на автодороге 4Р33 «Даштобод-Найман (Гулистон-Гагарин)»



Рис. 4. Автомобильная дорога М-37«Самарканд-Ашхабад-Туркменбаши, 321-331 км»

Исследования в лабораторных условиях проведены с двумя разновидностями лессовых грунтов, отобранных в районе г. Ташкента. Гранулометрический состав грунтов был определен ситовым и пипеточным методом с предварительным отмывом грунта от легкорастворимых солей, с применением в качестве диспергатора гексаметафосфата натрия. Свойства грунтов определялись в соответствии с существующими стандартными методами исследования грунтов.

В табл. 3-5 приводятся гранулометрический состав, водно-физические свойства и химический состав исследуемых грунтов.

Таблица 3. Гранулометрический состав грунтов

Грунт №	Содержание фракций, %					Наименование грунта по ШНК 2.05.02-08
	0,25-0,15	0,15-0,05	0,05-0,01	0,01-0,005	0,005	
1	0,3	1,02	57,62	12,26	28,80	Легкий пылеватый суглинок
2	0,4	13,09	61,56	7,94	17,01	Тяжелая пылеватая супесь

Таблица 4. Водно-физические свойства грунтов

Грунт №	Предел текучести, $W_l$	Предел раскатывания, $W_p$	Число пластичности, $I_p$	Оптимальная влажность, $W_o$	Максимальная плотность, $\rho$ кг/м <sup>3</sup>
1	0,27	0,19	0,08	0,15	1790
2	0,266	0,21	0,056	0,17	1750

Таблица 5. Химический состав грунтов

Грунт №	Содержание, %		
	легкорастворимых солей	гипса ( $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ )	карбонатов ( $CaCO_3$ )
1	0,210	0,44	20,0
2	0,144	0,22	22,0

По содержанию легкорастворимых солей исследованные грунты относятся к незасоленным, а по дорожной классификации - это легкий пылеватый суглинок и тяжелая пылеватая супесь.

Образцы из лессовых грунтов измельчали механическим путем и просеяли через сито размером 1 мм. Затем хлоридные и сульфатные соли ( $NaCl$ ,  $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ ,  $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ ,  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  (мелкокристаллический) и  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  (крупнокристаллический) растворяли в различных соотношениях: 1, 2, 3, 5, 8, 10, 4, 12 % на воде. Подготовленный солевой раствор добавляли в грунт, перемешивали и получили смесь засоленного грунта с различной степенью засоления. После этого смесь засоленного грунта высушили на воздухе и вновь измельчали механическим путем и просеяли через сито размером 1 мм. Просеянный грунт увлажняли до нужной влажности: 0,60; 0,70; 0,80; 0,90  $W_T$  и помещали в эксикатор. Для равномерного распределения влажности искусственно увлажненный засоленный грунт выдерживали в эксикаторе 24 часа. Затем грунт уплотняли в специальное кольцо с диаметром 7,1 см и высотой 3,5 см до коэффициента уплотнения 0,94; 0,96; 0,98; 1,00; 1,02. После этого кольцо с грунтом поместили в прибор «Маслова-Лурье» для определения силы сцепления  $C$  и угол внутреннего трения  $\varphi$ .

Сила сцепления  $C$  и угол внутреннего трения  $\varphi$  определили при вертикальной нагрузке 0,1; 0,2; 0,3 МПа. Значения сдвига по горизонтальной плоскости определяли с помощью мессуры. После установки мессура постепенно поэтапно загружали сдвигающие касательные (горизонтальные) нагрузки. Разность сдвигающих нагрузок между этапами составляла 20% от вертикальной нагрузки.

Горизонтальную нагрузку увеличивали до момента происхождения сдвига образца и фиксировали его значения. Этот процесс повторяли на шести образ-



цах под соответствующей вертикальной нагрузкой. После этого составляли график зависимости сопротивления грунта сдвигу от вертикальной нагрузки и определяли  $\varphi$  и  $C$ .

На первом цикле исследования в лабораторных условиях формовали образцы, уплотняя их до максимальной плотности при оптимальной влажности с содержанием соли в составе 5%  $NaCl$  и 3%  $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ . При проведении испытания контролировали влажность и плотность грунта в зоне сдвига. Практически влажность и плотность в зоне сдвига во всех случаях оказывалась одинаковой и равной влажности и плотности до сдвига, из чего следовало, что уплотнения в процессе сдвига не происходило. Результаты исследований представлены в табл. 6.

Таблица 6. Прочностные свойства засоленных грунтов

Грунт	Сцепление $C$ , МПа	Угол внутреннего трения $\varphi$ , град
Незасоленный	0,026	26
Засоленный (5% $NaCl$ )	0,017	30
Засоленный (3% $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ )	0,019	32

Из табл. 6 следует, что у засоленных грунтов, содержащих как хлористый, так и сернокислый натрий, сцепление меньше, а угол внутреннего трения больше, чем у незасоленных грунтов. Это можно объяснить тем, что в грунте с оптимальной влажностью, содержащим 5%  $NaCl$  и 3%  $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$  при 20<sup>0</sup>С растворяется соответственно 3,54 и 2,58% солей, а в кристаллическом состоянии остается соответственно 1,46 и 0,42%. Эти соли, являясь структурными элементами, увеличивают дисперсность грунта.

Поскольку на поверхности кристаллов легкорастворимых солей не образуются одно-коллоидных пленок, то с увеличением содержания соли в нерастворенном состоянии, т.е. в качестве механической примеси в грунте сцепление падает, а угол внутреннего трения увеличивается.

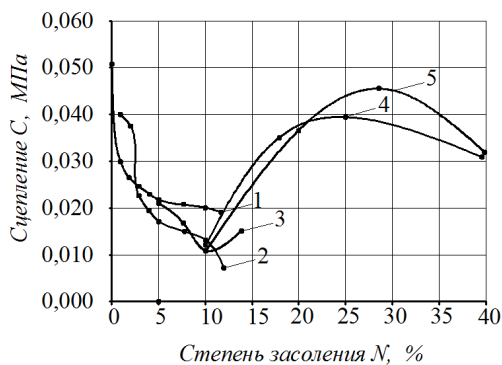


Рис. 5. График зависимости удельного сцепления засоленного грунта от степени засоления:

1- $NaCl$ , 2- $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ , 3- $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ , 4- $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  (мелкокристаллический), 5- $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  (крупнокристаллический)

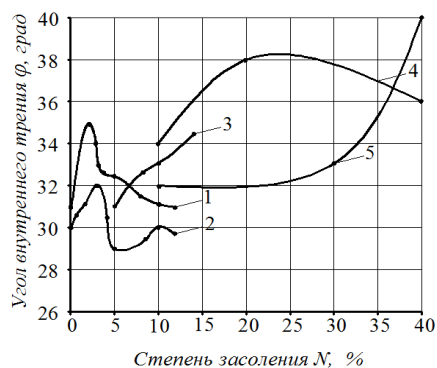


Рис. 6. График зависимости угла внутреннего трения засоленного грунта от степени засоления:

1- $NaCl$ , 2- $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ , 3- $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ , 4- $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  (мелкокристаллический), 5- $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  (крупнокристаллический)

Результаты исследований на втором цикле по выявлению влияния количество солей, такие как  $NaCl$ ,  $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ ,  $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ ,  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  (мелкокристаллический) и  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  (крупнокристаллический) на прочностные характеристики, представлены на рис. 5 и 6.

В результате исследований установлено (рис. 5 и 6), что хлористый натрий в малых концентрациях (до 1%) увеличивает сцепления и угла внутреннего трения грунта. В процессах пептизации и частичной дегидратации грунта, происходящих под влиянием слабых растворов хлористого натрия, уменьшается толщина водных пленок грунтовых частиц и увеличивается число контактов в единице объема. В связи с этим происходит коагуляция, сжатие диффузного слоя, уменьшение количества связанной воды, часть солей остаются в нерастворенном состоянии, т.е. в качестве механической примеси.

С увеличением дозировки хлористого натрия до 13% уменьшается сила сцепления и угла внутреннего трения грунта.

Сернокислый натрий до 3% уменьшает сцепления грунтов и увеличивает угол внутреннего трения грунта. Однако с увеличением дозировки этой соли до 13% приводит к уменьшению силы сцепления, а угол внутреннего трения практически не изменяется по сравнению с незасоленными грунтами.

С увеличением содержания сернокислого магния до 13% уменьшается сила сцепления и угол внутреннего трения грунта.

Гипсовые грунты отличаются от незасоленных повышенным сопротивлением сдвигу. С увеличением количества гипса до 30-40% практически увеличивается сила сцепления и угол внутреннего трения.

Для определения деформационных характеристик в выше приведенном порядке приготовили образцы засоленного грунта в металлическом кольце с диаметром 10 см и высотой 11 см. На поверхность уплотненного образца поместили штамп с диаметром 3 см и на рычажном прессе определили модуль упругости засоленного грунта  $E$  при различном удельном давлении  $P$ .

При определении модуля упругости засоленного грунта удельные нагрузки на грунты прикладывали в зависимости от влажности грунтов при испытаниях, и она имела значения 0,03-0,2 МПа.

В полевых условиях для определения значения динамических модулей упругости грунтов применили установку динамического нагружения и для статических модулей упругости - рычажный пресс. Установка динамического нагружения снабжена динамометрическим кольцом с тензодатчиками, что позволяет контролировать величину усилия. В качестве амортизатора использовали специальное резиновое кольцо либо пружину. Для измерения деформаций применяли специальные пластины с тензодатчиками и записью на осциллограф, который фиксировал величину деформации на движущейся бумажной ленте с увеличением от 2 до 48 раз. При статическом нагружении, деформации измеряли индикаторами часового типа с ценой деления 0,01 мм.

Наряду с определением статических и динамических модулей упругости рабочего слоя земляного полотна на опытном участке и на существующих автомобильных дорогах, устанавливали прочностные характеристики грунта - угла внутреннего трения и сцепления непосредственно на опытной секции с помощью прибора одноплоскостного вращательного среза (а. с. № 1678969) [5].

Для контроля прочностные характеристики, определенные прибором одноплоскостного вращательного среза, сопоставляли со значениями угла внутреннего трения и удельного сцепления, полученного в лабораторных условиях на приборе "Маслова-Лурье", используя образцы грунта отобранных с места обследования.

Экспериментально полученные в лабораторных и полевых условиях значения расчетных характеристик засоленных грунтов  $C$ ,  $\varphi$ ,  $E$  были статистически обработаны. Их значения при коэффициенте уплотнения  $K_y = 1,0$  приведены в табл. 7.

Таблица 7. Расчетные характеристики засоленных грунтов при  $K_y = 1,0$

Степень засоления $N, \%$	Сульфатное и хлоридно-сульфатное засоление				Хлоридное и сульфатно-хлоридное засоление			
	Влажность грунтов, в долях $W_T$							
	0,60	0,70	0,80	0,90	0,60	0,70	0,80	0,90
0	$\frac{80}{0,054} / 29$	$\frac{62}{0,043} / 26$	$\frac{50}{0,036} / 25$	$\frac{44}{0,031} / 24$	$\frac{76}{0,064} / 26$	$\frac{60}{0,053} / 24$	$\frac{49}{0,046} / 23$	$\frac{43}{0,051} / 22$
3	$\frac{78}{0,052} / 27$	$\frac{60}{0,041} / 24$	$\frac{48}{0,034} / 23$	$\frac{42}{0,029} / 22$	$\frac{74}{0,062} / 24$	$\frac{58}{0,051} / 22$	$\frac{47}{0,044} / 21$	$\frac{41}{0,049} / 20$
6	$\frac{76}{0,049} / 25$	$\frac{58}{0,038} / 22$	$\frac{46}{0,031} / 21$	$\frac{40}{0,026} / 20$	$\frac{72}{0,059} / 22$	$\frac{56}{0,048} / 20$	$\frac{45}{0,041} / 19$	$\frac{39}{0,046} / 18$
9	$\frac{73}{0,046} / 22$	$\frac{55}{0,035} / 19$	$\frac{43}{0,028} / 18$	$\frac{37}{0,023} / 17$	$\frac{69}{0,056} / 20$	$\frac{53}{0,045} / 18$	$\frac{42}{0,038} / 17$	$\frac{36}{0,043} / 16$
12	$\frac{70}{0,043} / 20$	$\frac{52}{0,032} / 17$	$\frac{40}{0,025} / 16$	$\frac{34}{0,020} / 15$	$\frac{66}{0,053} / 17$	$\frac{50}{0,042} / 16$	$\frac{39}{0,035} / 15$	$\frac{33}{0,040} / 14$

Примечание: в числителе - слева значения модуль упругости грунта  $E_p$  (МПа), справа значения угол внутреннего трения грунта  $\varphi_p$  (град), в знаменателе значения сила сцепления грунта  $C_p$  (МПа).

Из табл. 7 следует, что с увеличением влажности грунтов и количества солей уменьшаются их расчетные характеристики не зависимо от типа засоления, но с увеличением коэффициента уплотнения наоборот, увеличиваются.

После математического анализа экспериментальных данных получены выражения для определения расчётных характеристик сульфатно и хлоридно-сульфатно (СХС), хлоридно и сульфатно-хлоридно (ХСХ) засоленных грунтов:

$$\left. \begin{aligned} E_{СХС} &= \Delta E_W (W_{РАС}^2 - 1,9 \cdot W_{РАС} + 0,98) - \Delta E_N (N^2 + 23 \cdot N + 1,20) + \Delta E_3 (K_3^2 - 0,25 \cdot K_3 - 0,64) \\ E_{ХСХ} &= \Delta E_W (W_{РАС}^2 - 1,9 \cdot W_{РАС} + 0,98) - \Delta E_N (N^2 + 23 \cdot N + 1,20) + \Delta E_3 (K_3^2 - 0,27 \cdot K_3 - 0,64) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{СХС} &= \Delta C_W (W_{РАС}^2 - 1,99 \cdot W_{РАС} + 1,10) - \Delta C_N (N + 0,22) + \Delta C_3 (K_3^2 - 1,8872 \cdot K_3 + 0,890) \\ C_{ХСХ} &= \Delta C_W (W_{РАС}^2 - 1,80 \cdot W_{РАС} + 0,88) - \Delta C_N (N + 0,33) + \Delta C_3 (K_3^2 - 1,8872 \cdot K_3 + 0,890) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{СХС} &= \Delta \varphi_W (W_{РАС}^2 - 1,82 \cdot W_{РАС} + 1,31) - \Delta \varphi_N \cdot N \\ \varphi_{ХСХ} &= \Delta \varphi_W (W_{РАС}^2 - 2,02 \cdot W_{РАС} + 1,89) - \Delta \varphi_N \cdot N \end{aligned} \right\} (3)$$

где  $\Delta E_W, \Delta E_N, \Delta E_3, \Delta C_W, \Delta C_N, \Delta C_3, \Delta \varphi_W$  и  $\Delta \varphi_N$  - соответственно коэффициенты учитывающие влажность, степень засоления, коэффициент уплотнения грунтов, значения которых приведены в табл. 8.

Таблица 8. Коэффициенты учитывающие влажность, степень засоления и коэффициент уплотнения грунтов

Сульфатное и хлоридно-сульфатное засоление					
$\Delta E_W, \text{ МПа}$	300	$\Delta C_W, \text{ МПа}$	0,15	$\Delta \varphi_W, \text{ град}$	50
$\Delta E_N, \text{ МПа}$	0,0238	$\Delta C_N, \text{ МПа}$	0,0009	$\Delta \varphi_N, \text{ град}$	0,7
$\Delta E_3, \text{ МПа}$	178,57	$\Delta C_3, \text{ МПа}$	4,643	-	-
Хлоридное и сульфатно-хлоридное засоление					
$\Delta E_W, \text{ МПа}$	275	$\Delta C_W, \text{ МПа}$	0,325	$\Delta \varphi_W, \text{ град}$	25
$\Delta E_N, \text{ МПа}$	0,0238	$\Delta C_N, \text{ МПа}$	0,012	$\Delta \varphi_N, \text{ град}$	0,7
$\Delta E_3, \text{ МПа}$	357,14	$\Delta C_3, \text{ МПа}$	4,643	-	-

Таким образом, результаты проведенных экспериментов в лабораторных и полевых условиях показывают, что не только влажность и плотность, а также вид и количество солей в грунтах влияет на их расчётные характеристики - модуль упругости  $E_p$ , угол внутреннего трения  $\varphi_p$ , удельное сила сцепления  $C_p$ . Из

ходя из этого необходимо учитывать вида и количества засоления грунтов при расчете дорожных одежд.

При разработке конструкции дорожных одежд, значения расчётных характеристик засоленных грунтов в зависимости от влажности и плотности, количества и вида солей рекомендуется определить по выражениям (1)-(3).

#### Л и т е р а т у р а

1. Бабков В.Ф., Андреев О.В. Проектирование автомобильных дорог. – Ч. 2: М.: Транспорт, 1987. - 415 с.
2. Кузиев Р.К., Сектименко В.Е., Исмонов А.Дж. Атлас почвенного покрова Республики Узбекистан (на узб. языке). – Госкомитет «Кадастр земли». - Ташкент, 2010. - 44 с.
3. ШНК. 2.05.02-07 Автомобильные дороги. Нормы проектирования. –Ташкент, 2007. – 89 с.
4. МКН 46-2008. Инструкция по проектированию нежестких дорожных одежд. – Ташкент, 2008. – 246 с.
5. А. с. № 1678969. Устройство для определения свойств грунтов. – М.: Бюлл. изобр. – 1991. – № 35.

#### References

1. Babkov, V.F., Andreev, O.V. (1987). *Proektirovanie Avtomobil'nyh Dorog*, part 2, Moscow: Transport, 415 p.
2. Kuziev, R.K., Sektimenko, V.E., Ismonov, A.J. (2010). *Atlas Pochvennogo Pokrova Respubliki Uzbekistan* (in Uzbek.), Goskomitet “Kadastr Zemli”, Tashkent, 44 p.
3. ShNK. 2.05.02-07: “*Avtomobil'nie Dorogi*”: Normy proetirovaniya, Tashkent, 2007, 89 p.
4. MKN 46-2008: “*Instruktsiya po Proetirovaniyu Nezhostkih Dorozhnyh Odezhd*”, Tashkent, 2008, 246 p.
5. A.S. № 1678969: “*Ustroistvo dlya Opredeleniua Svoystv Gruntov*”, Moscow: Byull. Izobr., 1991, № 35.

#### ESTIMATED CHARACTERISTICS OF SUB GRADE SOILS

A.D. Kayumov\*, R.M. Hudaykulov\*\*

\*NIAD “Uzavtoyul” GAK, \*\*TADI, Uzbekistan, Tashkent

In the paper, results of studies of estimated characteristics of grounds in saline areas of Uzbekistan used in the sub grade soil construction of automobile roads are given. As the result of interpretation of experimental data, the graphic analytical dependences for determination of estimated characteristics of grounds according to the type and quantity of salinization, density, and humidity of soils were derived.

KEYWORDS: salinization, sub grade soil construction, automobile road, estimated characteristics of sub grade soils, strength of soils.



#### ВЫНОСЛИВОСТЬ ПЛИТЫ ПРОЕЗЖЕЙ ЧАСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ СО СВАРНЫМИ АРМАТУРНЫМИ СЕТКАМИ

Н.Ю. НОВАК, м.н.с., инженер

Филиал ОАО ЦНИИС НИЦ «Мосты», Москва

Рассмотрена возможность применения арматурных сеток заводского изготовления, изготовленных контактной сваркой, для плит проезжей части автодорожных мостов. Приведены результаты экспериментальных исследований сварных соединений арматуры и полноразмерных образцов железобетонной плиты. Обоснована возможность применения сварных сеток наравне с «вязаными» каркасами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: выносливость, железобетонная плита проезжей части, сварка, арматурная сварная сетка.

В течение жизненного цикла транспортные сооружения подвергаются воздействию многократно повторяющихся переменных нагрузок разной интенсивности. Это приводит к появлению в конструкции начальных трещин и последующему их росту и раскрытию, что в конечном итоге приводит к разрушению. Данное явление известно как “усталость”, а способность сопротивляться подобному разрушению называется выносливость.

Расчет на выносливость элементов конструкции мостов практически не менялся в действующих нормативных документах Российской Федерации более 25 лет. Большинство экспериментальных исследований по выносливости в нашей стране датируются 50-80ми годами (ЦНИИС, МИИТ и др.) [2,3,4]. Многие результаты этих работ не нашли отражения в нормативных документах, а ряд положений СП 35.13330.2011 [1] не имеет достаточной опытной проверки.

Исследование сварных соединений арматурных стержней является важной и актуальной задачей в настоящее время и за рубежом. Современные исследования [7,8] направлены с одной стороны на уточнение усталостной работы арматуры, а также на исследование воздействия на выносливость сварных соединений. Однако, следует учитывать иные характеристики зарубежных материалов и производственных процессов, что не позволяет напрямую использовать зарубежный опыт.

В настоящее время в отечественных мостовых нормативных документах при расчете на выносливость существует коэффициент  $\beta$ , учитывающий влияние на условия работы арматурных элементов наличия сварных стыков или приварки к другим арматурным элементам. Он составляет 0.6-0.65 при  $\rho=0-0.4$ . Данные значения коэффициента  $\beta$  приводят к необходимости значительного увеличения количества арматурных стержней или их диаметра, а в сочетании с отсутствием современных исследований по применению соединений, изготовленных с помощью новых технологий контактной сварки, заставили отказаться от применения сварных сеток в плитах проезжей части балок заводского изготовления. Филиал АО ЦНИИС «НИЦ «Мосты» на своей экспериментальной базе в 2013-2014 г.г. провел комплекс исследований и испытаний сварных крестообразных соединений по типу К1-Кт арматуры класса А400 из стали марки 25Г2С и гладкой арматуры А240, а также фрагментов железобетонной плиты автодорожных балок на выносливость [5]. Результаты исследований позволили обосновать новый коэффициент  $\beta$  для современной контактной сварки, проводимой согласно разработанного СТО [6].

Экспериментальная часть работы состояла из двух этапов. Первый этап – испытания арматурных стержней из стали марки 25Г2С класса А400  $\emptyset$  12 и  $\emptyset$  14 мм с приваренным стержнем из стали марки Ст3сп класса А240  $\emptyset$  8 мм на выносливость с последующей регулировкой режимов, а также стержней без сварки в качестве эталонных. Второй этап – испытание на выносливость полно-размерных образцов плиты проезжей части с вязаными и сварными сетками.

Сварные соединения стержней для испытаний были изготовлены на станке - автомате для сварки сеток с регулятором контактной сварки на заводе «МОКОН» (ПАО «МОСТОТРЕСТ»). Все испытания как статические, так и динамические, проводились автором статьи в специализированной лаборатории филиала АО ЦНИИС НИЦ «Мосты» на сертифицированной универсальной испытательной машине МУП-20. Проведены испытания на выносливость шести стержней с одноимпульсным режимом сварки (один импульс сварочного тока) при коэффициенте асимметрии цикла  $\rho=0.2$  и максимальном напряжении в стержне 220 МПа. В процессе испытаний два стержня разрушились, не пройдя 2 млн циклов изменения нагрузки. На основе полученных данных проведена корректировка настроечных параметров регулятора сварки и осуществлен переход на двухимпульсный режим (два импульса сварочного тока, по величине меньше

однократного на 25-30%). Все вновь изготовленные образцы стержней  $\varnothing 12$  с новым режимом сварки при тех же испытательных режимах прошли  $2 \cdot 10^6$  циклов изменения нагрузки и были успешно испытаны статически.

В рамках исследований были проведены металлографический анализ и определена твердость по Викерсу (HV) сварных соединений стержней, прошедших циклическую нагрузку [5]. Один из исследованных образцов показан на рис. 1. В результате было установлено, что в различных зонах сварных соединений структура металла меняется от феррито-перлитной до мартенситной. Это обуславливает увеличение значений твердости металла от 210 HV (основной металл) до 336-545 HV (зона термического влияния) в случае одноимпульсной сварки и до 265-310 HV в случае двухимпульсной сварки, что на 39% ниже. Такое уменьшение твердости означает рост пластичности стали в зоне сварки и, соответственно, приводит к увеличению предела выносливости.

Испытаниями арматурных стержней установлено, что новый двухимпульсный режим привел к значительному снижению воздействия процессов сварки на характеристики рабочей арматуры.

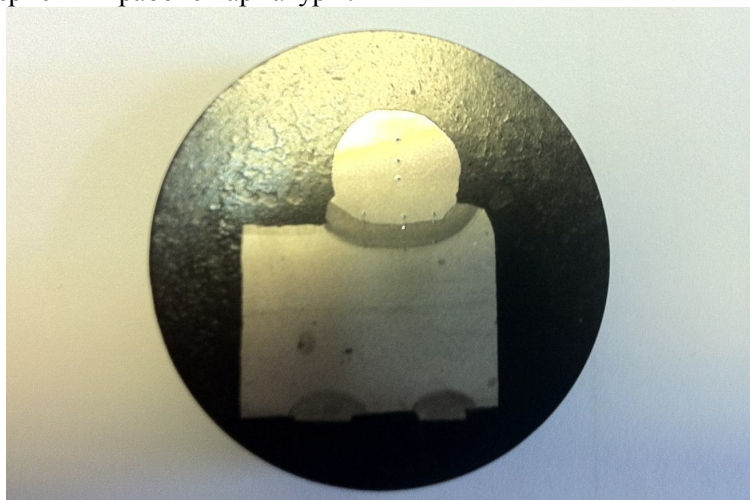


Рис. 1. Микрошлиф сварного соединения, запрессованный в компаунд

Основной этап экспериментальной работы составляли натурные испытания полноразмерных образцов железобетонной плиты проезжей части. Часть плит (Образцы П1С и П2С) были испытаны статически, а 4 плиты подверглись испытаниям на выносливость. Ширина каждого образца составляла 1,00 метр, пролет плиты 2,35 метра. Габаритные размеры образца и схема приложения нагрузки показаны на рис. 2. На рис. 3 приведена фотография образца плиты, установленного в стенд для проведения испытаний на выносливость. Коэффициент асимметрии цикла при испытаниях составил 0,155 при максимальной нагрузке 17,8 тонны и статическом пригрузе 4,7 тонн. Образцы П3В и П5В со сварными сетками (нижняя сетка –  $\varnothing 14$  мм А400, верхняя –  $\varnothing 12$  мм А400) выдержали 2 млн циклов изменения нагрузки и были испытаны статически. Значения разрушающей нагрузки этих образцов оказались близки к полученным при контрольных статических испытаниях образцов П1С и П2С и образца П6С с вязаными сетками, прошедшего 2 млн циклов. Отклонение не превышает 3%, что находится в пределах точности проведения испытаний.

Образец П4В со сварными сетками (нижняя сетка –  $\varnothing 12$  мм А400, верхняя –  $\varnothing 12$  мм А400) выдержал 1,15 млн циклов и разрушился в местах сварки. При диаметрах 14 мм и более изменение свойств металла арматурного стержня происходит в меньшем объеме и сварное соединение практически не влияет на пластические и прочностные свойства арматурного стержня.

До проведения экспериментальной работы были проведены компьютерные расчеты по методу конечных элементов в программном комплексе MIDAS Civil (сертификат №0896211). Сопоставление значений прогибов всех образцов под действием испытательных нагрузок на всех этапах нагружения и расчетной кривой прогибов компьютерной модели представлены на рисунке 4. Деформированный вид образца под действием нагрузки  $P = 33$  тонны показан на рис. 5. Коэффициент корреляции полученных опытным путем и расчетных прогибов составил 0,996 и свидетельствует о хорошем соответствии работы компьютерной модели и реальных образцов.

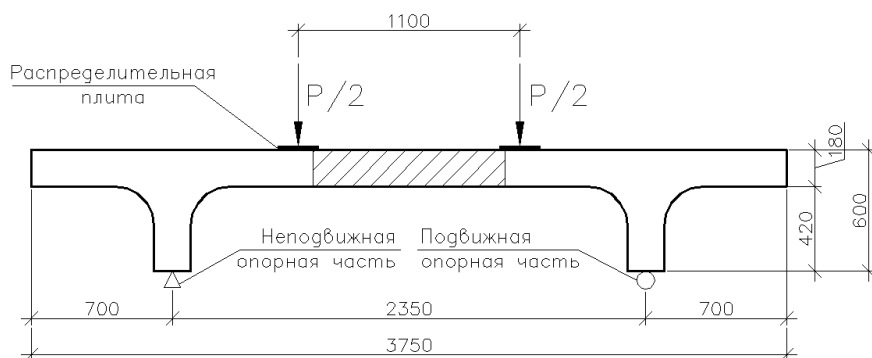


Рис. 2. Схема поперечного сечения образца и размещения испытательной нагрузки



Рис. 3. Образец плиты, установленный в стенде для проведения испытаний на выносливость

Сравнение напряжений в арматурных стержнях и сжатом бетоне, полученных в ходе расчета конечно-элементной модели на всех основных этапах нагружения, а также соответствующих им напряжений по ГОСТ и СП показали, что отклонения не превышают 5%. Так достижение арматурными стержнями предела текучести при  $33 \pm 0,5$  тоннах испытательной нагрузки соответствует 390,3 МПа по расчету и 390,0 МПа по ГОСТ 5781. Разрушение по сжатой зоне

бетона наступило при 49,5-50,0 тоннах, что соответствует 57,1-57,7 МПа согласно расчетам и 57,8 МПа по ГОСТ 26633 для бетона марки В45. Экспериментальные образцы работают согласно теоретическим предпосылкам нормативных документов, а компьютерная расчетная модель досконально повторяет эту работу.

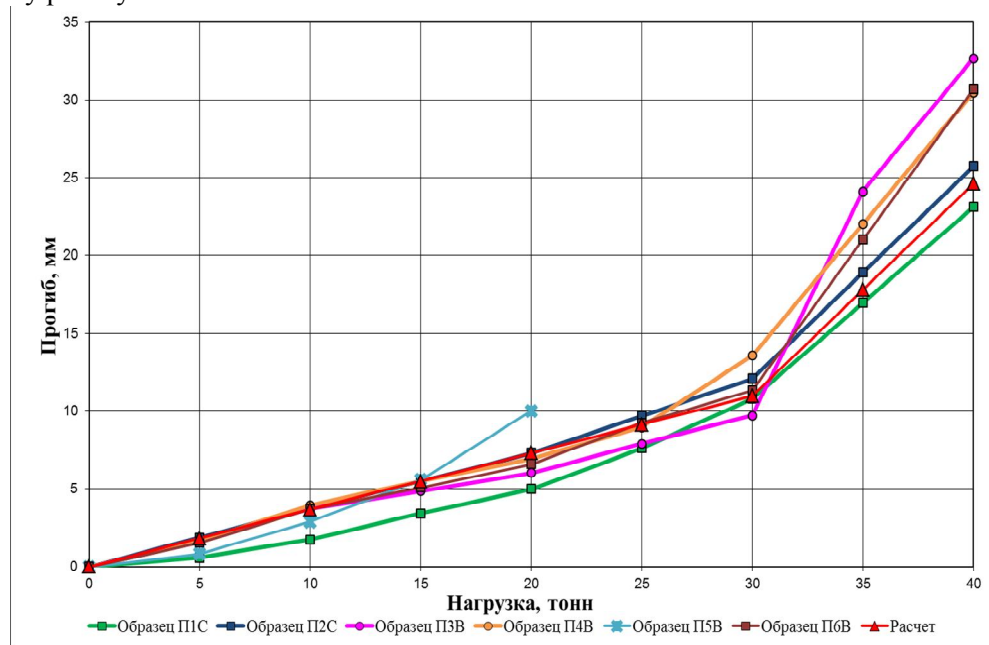


Рис. 4. График прогибов при статических испытаниях всех образцов и расчетная кривая прогибов

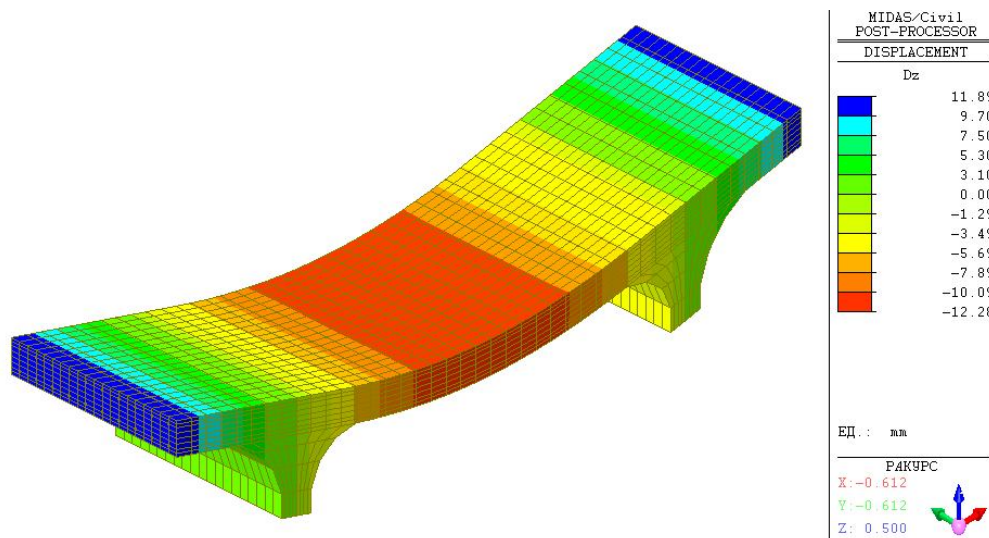


Рис. 5. Деформированный вид образца при воздействии нагрузки  $P = 33$  тонны

## Выводы

Экспериментальные исследования сварных крестообразных соединений и образцов плиты проезжей части, армированных сварными сетками, а также проведенные расчеты позволили сделать вывод о возможности применения контактной сварки стержней арматуры из стали марки 25Г2С класса А400 диаметром 14 мм и более в плите проезжей части. Итогом работы стал выпуск СТО для ПАО «МОСТОТРЕСТ» на применение сварных сеток заводского изготов-



ления с использованием сварных крестообразных соединений рабочей арматуры из стали марки 25Г2С и распределительной арматуры [5]. В действующий нормативный документ СП 35.13330.2011 внесено примечание о возможности увеличения коэффициента  $\beta$  на 35% согласно проведенным исследованиям и утвержденному СТО.

#### Л и т е р а т у р а

1. СП 35.13330.2011 «Мосты и трубы» (Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84\* «Мосты и трубы»). – С. 75-77, 99-102.
2. Берг О.Я., Писанко Г.Н., Хромец Ю.Н. Исследование физического процесса разрушения бетона под действием статической и многократно повторяющейся нагрузки // Труды ЦНИИС. – Вып. 60. – М.: Транспорт, 1966. – С. 79-109.
3. Матаров И.А., Прокопович А.Г., Кедров А.Г. Исследование арматуры из стали марки 25Г2С под действием статических и многократно повторных нагрузок. // Труды ЦНИИС. – Вып. 37. – М.: Трансжелдориздат, 1960. - С. 141-221.
4. Карпухин Н.С. Основы теории выносливости железобетона. – М.: Золотое сечение, 2008. – 256 с.
5. Отчет НИР № ИС-13-978-06 филиала ОАО ЦНИИС «НИЦ «Мосты». Испытания фрагментов железобетонной плиты проезжей части автодорожных балок на выносливость с рекомендациями по рациональному армированию – М., 2014. – 46 с.
6. СТО 01373996-001-2015 «Арматурные сетки заводского изготовления, выполненные контактной сваркой, для плит проезжей части автодорожных мостов». – М., 2015. – 23 с.
7. Amir Soltani, Kent A. Harries, Bahram M. Shahrooz, Henry G. Russell, and Richard A. Miller. Fatigue Performance of High-Strength Reinforcing Steel// *J. Bridge Eng.* – May/June 2012. – P. 454-461
8. Wilast Amorn, Jeremy Bowers, Amgad Girgis, Maher K. Tadros Fatigue of Deformed Welded-Wire Reinforcement, *PCI Journal*, Jan/Feb 2007. – P. 2-17.

#### Reference

1. SP 35.13330.2011 *Bridges and Culverts*, pp. 75-77, 99-102
2. Berg, O.Ya., Pisanko, G.N., Hrometz, Yu.N. (1966). Research of the physical process of destruction of concrete under static and frequently repeated loading, *Proceedings of TCNIIS*, M.: Transport, Iss. 60, pp. 79-109.
3. Matarov, I.A., Prokopovich, A.G., Kedrov A.G. (1960). Research of rebar made of 25G2S steel under static and frequently repeated loads, *Proc. TCNIIS*, Vol. 37, M.: Transzheldorizdat, p. 141-221.
4. Karpukhin, N.S. (2008). *Osnovnyy Teorii Vynoslivosti Zhelezobetona*, Moscow: Zolotoe sechenie, 256 p.
5. Otchet NIR № IS-13-978-06 Filiala ОАО TzNIIS "NITz Mosty", M., 2014, 46 p.
6. STO 01373996-001-2015 “*Prefabricated Reinforcing Meshes of Factory Prefabrication Made by Resistance Spot Welding for Roadway Slabs of Highway Bridges*”, Moscow, 2015, 23 p.
7. Amir Soltani, Kent A. Harries, Bahram M. Shahrooz, Henry G. Russell, and Richard A. Miller (2012). Fatigue Performance of High-Strength Reinforcing Steel, *J. Bridge Eng.*, May/June 2012, pp. 454-461.
8. Wilast Amorn, Jeremy Bowers, Amgad Girgis, Maher K. Tadros (2007). Fatigue of Deformed Welded-Wire Reinforcement, *PCI Journal*, Jan/Feb 2007, pp. 2-17.

### FATIGUE OF A ROADWAY SLAB OF HIGHWAY BRIDGES WITH WELDED ROD MESHES

N.Yu. Novak

“NITz “Mosty”, branch of AO TCNIIS, Moscow

The problem of prefabricated reinforcing meshes with contact welding application for roadway slabs of highway bridges is considered. The experimental study results for welded joints of reinforcement bars and full-size samples of reinforced concrete slab are given. The possibility of the use of welded meshes as alternative to "knitted" is shown.

**Keywords:** fatigue, reinforced roadway slab, welding, reinforcing welded mesh

## **Требования к оформлению статей в журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений»**

Текст статьи подготавливается в виде компьютерной, готовой к изготовлению печатной матрицы, распечатки и варианта на электронном носителе. Текст распечатки должен быть четким. Формат текста с размером по вертикали 23 см и по горизонтали 13,5 см. Текст размещается в середине листа формата А4.

Поля рукописи должны быть следующие:

верхние и нижнее по 3,4 см; справа и слева по 3, 8 см.

Отступ первой строки абзаца – 0,75 см.

Текст подготавливается в системе *Word*, размер шрифта 11 пунктов. Шрифт *Times New Roman*, межстрочный интервал *одинарный*. Текст оформляется по аналогии с представленными в сборнике статьями. Обязательно использовать *автоматический перенос*.

Заголовок **СТРОЧНЫМИ** буквами, жирным шрифтом, центрируется (в заголовке не должно быть переносов).

После пропуска одной строки следует И.О. ФАМИЛИЯ, *ученая степень, ученое звание* (или *инженер, аспирант, студент*) (курсивом) автора. Соавтор аналогично.

С новой строки: *Организация* (место работы, курсивом). Если соавторы из разных организаций против каждого автора из одной организации ставится одна звездочка \*, против авторов (соавторов) из другой организации – две звездочки \*\* (и т.д.). После последовательного перечисления всех авторов статьи (каждого с новой строки) следуют наименования организаций, предваренные \* или \*\* (и т.д.) звездочками. Затем с новой строки следует полный почтовый и электронный адрес автора.

После пропуска одной строки следует *краткая аннотация статьи* (курсив, 10 пт) объемом не более 6-8 строк, затем после пропуска одной строки идут ключевые слова, и, наконец, после пропуска одной строки идет основной текст.

После основного текста следует: Л и т е р а т у р а (центрируется)

Далее идет пронумерованный список цитируемой литературы (Full –10). Авторы выделяются курсивом. Затем с новой строки следует: R e f e r e n c e s (центрируется) и повторяется цитируемая литература на английском языке или на родном языке, но латинскими буквами (Full – 9).

В заключительной части статьи приводятся **НАЗВАНИЕ** статьи (строчными жирными буквами), ф.и.о. авторов (централизуются) и перевод аннотации статьи на иностранный, предпочтительнее, английский язык. Затем с новой строки идут ключевые слова (KEY WORDS: ...) на английском языке.

Рисунки оформляются в тексте статьи предпочтительно средствами *Word* или других графических средств. Рисунки, оформленные отдельно от текста, должны полностью занимать страницу в пределах формата текста, на листе А4. Рисунки, выполненные чертежными средствами (тушью или черными чернилами), должны быть аккуратными с четкими надписями. Рисунки и надписи на них должны быть единым целым (сгруппированы) и не распадаться при их перемещении. Рисунки отделяются от текста на 6 пт.

Формулы в тексте статьи готовятся с помощью редактора формул *Microsoft equation* с установленными параметрами:

Full –11, Subscript/Suhtscript – 9, Sub- Subscript/Suhtscript – 7,

Symbol – 14, Subsymbol – 10.

Математика (функции) – латинские символы курсивом, греческие символы – прямым шрифтом. Между формулами и сверху, снизу от текста интервал 3 *pt*.

Номера страниц проставляются карандашом в левом нижнем углу страницы. Последняя страница предоставляется в двух экземплярах, второй экземпляр подписывается авторами статьи.

Аспирантам и соискателям желательно приложить к статье отзыв научного руководителя или специалиста по тематике статьи из организации, где выполняется работа.

Редакция имеет право снимать с публикации статьи, не отвечающие указанным требованиям, или, если на статью поступят два отрицательных отзыва рецензентов, или членов редакционного совета, или членов редколлегии журнала.