



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия**Колчунов В.И.**, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Азапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия**Адилходжаев А.И.**, д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан**Базаров Д.Р.**, д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан**Ванин В.В.**, д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина**Варум У.**, д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия**Войццкий З.**, проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша**Волосухин В.А.**, д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия**Галишикова В.В.**, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия**Дуцев М.В.**, д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия**Евкин А.Ю.**, д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада**Какоев С.**, д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия**Карпенко Н.И.**, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия**Козлов Д.В.**, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия**Красич С.**, канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия**Кудрявцев С.А.**, чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия**Курбацкий Е.Н.**, д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия**Лазарев Ю.Г.**, д-р техн. наук, проф., СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия**Магуле Ф.**, проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция**Мендонка П.**, д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия**Перькова М.В.**, д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия**Сантос Р.**, исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия**Травуш В.И.**, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия**Федюк Р.С.**, д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия**Якутов Н.М.**, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ**Vasserman I.N., Glot I.O., Shadakov I.N.** Finite Element Modeling of Dynamic Deformation of Bidirectional Functionally Graded Beams (Конечноэлементное моделирование динамического деформирования двуправленных функционально градиентных балок) 317**Ларионов Е.А., Азапов В.П., Маркович А.С., Гринько Е.А.** Энергетическая концепция силового сопротивления элементов железобетонных конструкций 331**Belyak A.V., Rynkovskaya M.I., Dabi G.M., Nasibullina L.R., Lei B., Ning L.** Comparative Analysis of Linear and Nonlinear Calculation of the Load-Bearing Capacity of Reinforced Concrete Frames in Multi-Storey Buildings (Сравнительный анализ линейного и нелинейного расчета железобетонного каркаса многоэтажного здания) 348**Mawlood D.A., Koyankin A.A.** Nonlinear Layered Formulation: Modeling Reinforced Concrete Semi-Precast Slabs (Нелинейная послойная формулировка: моделирование сборно-монолитных железобетонных плит) 368**Корнев О.А., Шувалов А.Н., Корнилова А.В., Ермаков В.А.** Влияние геометрических дефектов на ресурс цилиндрических резервуаров из алюминиевых сплавов 383РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**Голиков А.В., Коренец А.М.** Методы снижения напряжений в ребрах ребристо-кольцевого купола при возникновении аварийной ситуации 399ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ**Егерева Э.Н., Калиновский С.А., Семченков Н.В.** Анализ эффективности фрикционных демпферов в многоэтажных каркасах при варьируемой интенсивности сейсмических воздействий 415ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ**Galishnikova V.V., Gebre T.H.** The Graphical Method of Design for Flexural Members Using the SP 16.13330.2017 Standard (Графический метод проектирования изгибаемых элементов с использованием стандарта СП 16.13330.2017) 431

Редактор И.Л. Панкратова

Редактор англоязычных текстов С.Л. Шамбина

Дизайн обложки Ю.Н. Ефремовой

Компьютерная верстка Н.В. Маркеловой

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru

Подписано в печать 20.08.2026. Выход в свет 27.08.2026. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 14,88. Тираж 250 экз. Заказ № 1456. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026 VOLUME 22 No. 4

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by White List of RCSI, Russian Index of Science Citation, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illuminates the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.



The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatin, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dutsev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

Vasserman I.N., Glot I.O., Shardakov I.N. Finite Element Modeling of Dynamic Deformation of Bidirectional Functionally Graded Beams 317

Larionov E.A., Agapov V.P., Markovich A.S., Grinko E.A. Energy Concept of the Force Resistance of Elements of Reinforced Concrete Structures 331

Belyak A.V., Rynkovskaya M.I., Dabi G.M., Nasibullina L.R., Lei B., Ning L. Comparative Analysis of Linear and Nonlinear Calculation of the Load-Bearing Capacity of Reinforced Concrete Frames in Multi-Storey Buildings 348

Mawlood D.A., Koyankin A.A. Nonlinear Layered Formulation: Modeling Reinforced Concrete Semi-Precast Slabs 368

Kornev O.A., Shuvalov A.N., Kornilova A.V., Ermakov V.A. Effect of Geometric Defects on the Service Life of Cylindrical Tanks Made of Aluminium Alloys 383

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

Golikov A.V., Korenets A.M. Methods of Reducing Stress in the Ribs of a Ribbed-Ring Dome in Case of an Accidental Situation 399

DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

Egereva E.N., Kalinovsky S.A., Semchenkov N.V. Analysis of the Effectiveness of Friction Dampers in Multi-Storey Buildings with Varying Intensity of Seismic Impacts 415

EXPERIMENTAL RESEARCH

Galishnikova V.V., Gebre T.H. The Graphical Methods of Design for Flexural Member Using the SP 16.13330.2017 Standard 431

Copy Editor I.L. Pankratova

English Texts' Editor S.L. Shambina

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 2026

© Alborova L.A., photo on the cover of the journal (Torpedo Stadium, Moscow, Russia), 2026

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4-317-330

EDN: LKNCQZ

Research article / Научная статья

Finite Element Modeling of Dynamic Deformation of Bidirectional Functionally Graded Beams

Igor N. Vasserman[✉], Irina O. Glot^{id}, Igor N. Shardakov^{id}Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (UB RAS), Perm, Russian Federation
✉ igorw@icmm.ru

Received: June 4, 2026

Revised: July 22, 2026

Accepted: July 25, 2026

Abstract. This article presents a finite element algorithm for the numerical solution of boundary value problems for the deformation state of elastic beams made of functionally graded materials. The presented algorithm assumes that the density and elastic properties of the beam depend on the coordinates of the cross-section and on the coordinate along the longitudinal axis. The presented formulation allows to solve static and dynamic problems. The Euler-Bernoulli model and the third-order Reddy model are used to describe the deformation state of the beam. The beam finite element utilizes a Hermitian approximation. Using Hamilton's variational principle, the beam equation of motion is obtained in matrix form. The numerical implementation of the resulting finite element algorithm is carried out in Python using the Numpy and Scipy libraries. As an example, a numerical analysis of the solution to the problem of the natural frequencies of vibrations of a bidirectional functionally graded cantilever beam is performed. The numerical convergence and reliability of the obtained solutions are demonstrated. The possibility of coupling of the longitudinal and transverse vibrations of a beam is demonstrated for certain distributions of the physical properties of the material in the beam's cross-section. It is shown that distributing the material properties along the longitudinal axis improves the beam's dynamic properties.

Keywords: functionally gradient materials, beam theories, finite element method

Authors' contribution. Undivided co-authorship. All authors have read and approved the final version of the manuscript.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

Funding. The research was carried out under the state assignment, the registration number of the topic is 124020700047-3.

For citation: Vasserman IN, Glot IO, Shardakov IN. Finite element modeling of dynamic deformation of bidirectional functionally graded beams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):317–330. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-317-330> EDN: LKNCQZ

Igor N. Vasserman, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (UB RAS), 13A Lenin St, Perm, 614000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1961-6243, ORCID: 0000-0001-7799-7521; e-mail: igorw@icmm.ru

Irina O. Glot, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (UB RAS), 13A Lenin St, Perm, 614000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 3231-7996, ORCID: 0000-0002-2842-7511; e-mail: glot@icmm.ru

Igor N. Shardakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (UB RAS), 13A Lenin St, Perm, 614000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4809-4776, ORCID: 0000-0001-8673-642X; e-mail: shardakov@icmm.ru

© Vasserman I.N., Glot I.O., Shardakov I.N., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Конечноэлементное моделирование динамического деформирования двунаправленных функционально градиентных балок

И.Н. Вассерман[✉], И.О. Глот^{ib}, И.Н. Шардаков^{ib}

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

✉ igorw@icmm.ru

Поступила в редакцию: 4 июня 2026 г.

Доработана: 22 июля 2026 г.

Принята к публикации: 25 июля 2026 г.

Аннотация. Представлен конечно-элементный алгоритм численного решения краевых задач о деформационном состоянии упругих балок из функционально градиентных материалов. Предполагается, что плотность и упругие свойства балки зависят от координат поперечного сечения и от координаты вдоль продольной оси. Данная постановка допускает возможность решения статических и динамических задач. Для описания деформированного состояния балки использована модель Эйлера — Бернулли и модель третьего порядка Редди. В балочном конечном элементе применена эрмитова аппроксимация. С помощью вариационного принципа Гамильтона получено уравнение движения балки в матричном виде. Численная реализация полученного конечно-элементного алгоритма осуществлена на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy. В качестве примера осуществлен численный анализ решения задачи о частотах собственных колебаний двунаправленной функционально-градиентной консольной балки. Продемонстрирована численная сходимость полученных решений и их достоверность. Показана возможность взаимосвязи продольных колебаний балки с поперечными при некоторых распределениях физических свойств материала в поперечном сечении балки. Показано, что распределение свойств материала вдоль продольной оси позволяет улучшить динамические свойства балки.

Ключевые слова: функционально градиентные материалы, теории балок, метод конечных элементов

Вклад авторов. Нераздельное соавторство. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

Для цитирования: Вассерман И.Н., Глот И.О., Шардаков И.Н. Конечноэлементное моделирование динамического деформирования двунаправленных функционально градиентных балок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 4. С. 317–330. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-317-330> EDN: LKNCQZ

1. Introduction

Functionally graded materials (FGMs) are a class of composites whose properties vary continuously and smoothly in at least one spatial direction. These property variations may be associated with composition, porosity, or microstructure. Such materials allow to optimally combine component properties and minimize stress concentration at the interface between different materials [1; 2]. Unlike layered composites, they are more resistant to crack propagation and delamination [3].

The concept of functionally graded materials was first proposed as early as the 1970s [4]. However, this idea had not yet been implemented at that time due to the lack of appropriate technologies. It was carried into effect in the following decade in Japan as part of an aerospace project [5; 6], which required the creation of a thermal barrier in a 10 mm thick structure wall. Currently, functionally graded materials are attracting increasing attention from researchers around the world.

Examples of applications of functionally graded materials can be found in [7]. These include prosthetics that combine mechanical strength in the inner layers with biocompatibility in the outer layers [8], functionally graded blades for turbomachinery and wind turbines [9], reinforcement of mine tunnel walls [10], piezoelectric elements for structural vibration monitoring [11], microsensors and microactuators in nano- and microelectromechanical systems [12].

Recently, there has been growing interest in the use of functionally graded materials in building structures [13]. In particular, much attention is given to the development of structures made of functionally graded concrete. Rational distribution of cement content in a structure allows to reduce its production cost and energy consumption [14], minimize residual stresses, and prevent cracking during the setting process [15]. Additive manufacturing and 3D printing, which are often used in the creation of graded materials [16; 17], are well-suited for concrete structures [18–20].

The heterogeneity of functionally graded materials used in building structures is often associated with porosity [21]. Structures made of such materials have a good weight-to-strength ratio, as well as good vibration- and noise-absorbing properties. On the other hand, theories of functionally graded porous materials can be used in modeling distributed defects.

Beams of short to medium length with rectangular cross-sections are typical elements of structures. Treating them as three-dimensional spatial structures results in unjustified computational costs. The earliest and most widely used theory of beams is the classical Euler — Bernoulli theory, in which the cross-section is assumed to be perpendicular to the neutral axis of the beam. This theory does not account for shear in the cross-section; it is suitable for long, slender beams with a high ratio of the longitudinal dimension to the transverse dimensions. For beams of short and medium length, as well as for cases where the assumed deformation shape of the beam neutral axis is comparable to the dimensions of its cross-section, this theory is insufficient. The first-order beam theory (Timoshenko) allows to analyze such structures. However, it requires knowledge of an additional parameter — the shear correction factor — which cannot be determined in terms of this theory. Furthermore, since the shear strain within the cross-section is assumed to be constant, the boundary conditions for the absence of shear stresses at the boundary of the cross-section are not satisfied [22]. All of the aforementioned problems are particularly relevant for heterogeneous beams, including functionally graded beams.

Shear deformation theories of higher-order are free of many shortcomings. In these theories, the distribution of displacements across the cross-section is nonlinear and ensures that shear stresses at the free boundary are zero [23–25]. One such theory is Reddy's third-order theory [26].

The presented review highlights the growing need to develop and implement effective numerical algorithms for solving static and dynamic boundary value problems involving the deformation of structures made of functionally graded materials. The capabilities of well-known software tools such as ANSYS and COMSOL for solving such problems are quite limited.

Most articles on the dynamics of the considered structures focus on unidirectional functionally graded beams. Bidirectional functionally graded beams have been studied in a small number of papers [27–30]. These studies approximate displacements and rotation angles using series of functions that satisfy the kinematic boundary conditions in advance. This approach ensures good accuracy, but significantly reduces the versatility of the numerical method. This is particularly important when the beam is considered not as an isolated object, but as part of a more complex structure. The finite element method provides a single approach for beams with different boundary conditions.

This article presents a variational formulation and implements a finite element method for beams made of functionally graded materials. A heterogeneous beam is considered, the physical properties of which can vary both within the cross-section and along the longitudinal axis. It will be referred to as a bidirectional functionally graded beam. The Euler — Bernoulli model and Reddy's third-order model [26] are used to describe the deformed state of this beam. Hermitian approximation is used in the beam finite element. The numerical implementation of the resulting finite-element algorithm was carried out in Python. A numerical analysis of the solution to the problem of natural modes and frequencies of a bidirectional functionally graded beam was performed. The numerical convergence of the obtained solutions and their reliability were demonstrated. The possibility of coupling of the longitudinal and transverse vibrations of the beam is shown for certain distributions of physical properties of the material across the beam section.

2. Methods

Beams of rectangular cross-section are widely used in construction (Figure 1). The figure shows the coordinate axes and the characteristic dimensions of the structure.

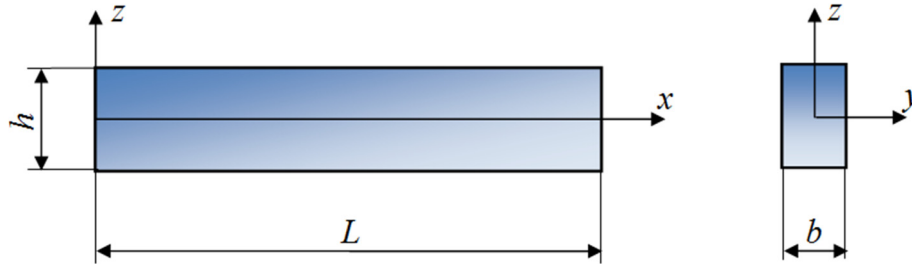


Figure 1. Bidirectional functionally graded beam of rectangular cross-section

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

Here L is the beam length; h and b are the height and width. Directions of the coordinate axes: x is directed along the longitudinal axis of the beam; z is perpendicular to the beam axis and lies in the plane of bending; y is perpendicular to the plane of bending.

2.1. Properties of Functionally Graded Materials

A typical functionally graded material is a composite consisting of particles with a specified continuous distribution of the volume fractions of the constituent phases. In the case of isotropic phases, the material is isotropic, but heterogeneous.

Among the models that describe the effective properties of a material based on the properties of its components, the most common and simplest is the Voigt model (the rule of mixtures).

$$P_f = P_1 V_1 + P_2 V_2, \quad (1)$$

where P_f is the effective property of the material; P_i is the property of the pure i -th component of the material; V_i is the volume fraction of the pure i -th component of the material. The relationship $V_1 + V_2 = 1$ holds. Young's modulus E , shear modulus G and mass density ρ can serve as property P . There are also a number of other models for describing the effective properties of a material, a review of which can be found in [31].

For moderate porosity, the theory of mixtures can also be used:

$$P_f = P_{f0}(1 - V_0), \quad (2)$$

where P_{f0} is the effective property of the material without pores, calculated according to (1), V_0 is the volume fraction of pores. More complex relationships between material properties and porosity, taking into account the pore structure, can be found in [13, Table 3] and in [21].

2.2. Beam Models

In the classical Euler-Bernoulli theory, the distribution of displacements across the cross-section takes the form:

$$u_x(x, z) = u^0(x) - z w_{,x}^0(x); \quad (3)$$

$$u_z(x, z) = w^0(x). \quad (4)$$

Here u_x and u_z are the longitudinal and transverse displacements of an arbitrary point of the beam; u^0 and w^0 are the longitudinal and transverse displacements of a point on the central axis of the beam.

The deformation energy and kinetic energy for them are expressed, according to [32], as

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_{11} (u_{,x}^0)^2 + 2D_{12} (u_{,x}^0) (w_{,xx}^0) + D_{22} (w_{,xx}^0)^2 \right] dx \quad (5)$$

and

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_{11} (\dot{u}^0)^2 + I_{11} (\dot{w})^2 + 2I_{12} (\dot{u}^0) (\dot{w}_{,x}^0) + I_{22} (\dot{w}_{,x}^0)^2 \right] dx, \quad (6)$$

where D_{11} , D_{12} , D_{22} , I_{11} , I_{12} , I_{22} are the integral parameters of the cross-section, calculated as

$$D_{11}(x) = \int_A E(x, z) dA; \quad D_{12}(x) = - \int_A E(x, z) z dA; \quad D_{22}(x) = \int_A E(x, z) z^2 dA, \quad (7)$$

$$I_{11}(x) = \int_A \rho(x, z) dA; \quad I_{12}(x) = - \int_A \rho(x, z) z dA; \quad I_{22}(x) = \int_A \rho(x, z) z^2 dA. \quad (8)$$

It is evident that, unlike homogeneous beams, when the material is distributed asymmetrically along the height, terms that couple longitudinal and transverse vibrations appear.

In higher-order theories, the distribution of displacements across the section can be represented as follows [22–26]:

$$u_x(x, z) = u^0(x) - z w_{,x}^0(x) + \Phi(z) \gamma^0(x), \quad (9)$$

$$u_z(x, z) = w^0(x). \quad (10)$$

Here

$$\gamma^0(x) = w_{,x}^0(x) - \theta^0(x) \quad (11)$$

is the transverse shear strain of a point on the neutral axis of the beam; θ^0 is the total flexural rotation of the cross-section on the neutral axis; $\Phi(z)$ is the correction function. Angles θ^0 and γ^0 are shown in Figure 2.

Function $\Phi(z)$ depends on the cross-section and is selected in a way such that the condition of zero shear stresses on the boundary is satisfied. Taking $\Phi(z)=0$ results in the Euler — Bernoulli theory, $\Phi(z)=z$ results in the Timoshenko theory. For Reddy's third-order theory [26], the correction function has the form:

$$\Phi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right). \quad (12)$$

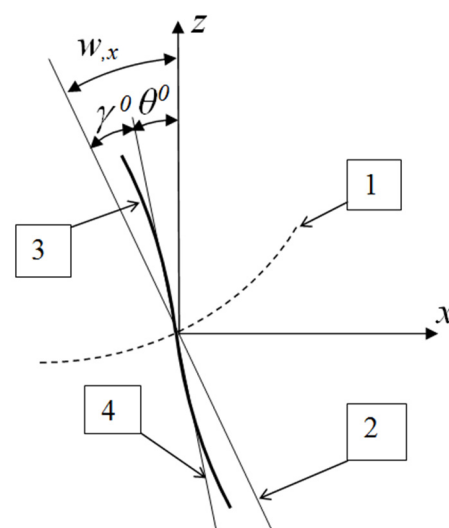


Figure 2. Deformation of the cross-section: 1 — center line; 2 — normal plane; 3 — deformed cross-section; 4 — plane tangent to the deformed cross-section at the point of its intersection with the center line.

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardaikov.

The deformation energy of a beam with a rectangular cross-section can be expressed as [24]:

$$U_R = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{xx} (u_{,x}^0)^2 - 2B_{xx} (u_{,x}^0) (w_{,xx}^0) + 2E_{xx} (u_{,x}^0) (\gamma_{,x}^0) + D_{xx} (w_{,xx}^0)^2 - \right. \\ \left. - 2F_{xx} (w_{,xx}^0) (\gamma_{,x}^0) + H_{xx} (\gamma_{,x}^0)^2 + A_{xz} (\gamma^0)^2 \right] dx, \quad (13)$$

accordingly, the kinetic energy is:

$$K_R = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_A (\dot{u}^0)^2 - 2I_B (\dot{u}^0) (\dot{w}_{,x}^0) + 2I_E (\dot{u}^0) (\dot{\gamma}^0) + I_D (\dot{w}_{,x}^0)^2 - \right. \\ \left. - 2I_F (\dot{w}_{,x}^0) (\dot{\gamma}^0) + I_H (\dot{\gamma}^0)^2 + I_A (\dot{w}^0)^2 \right] dx, \quad (14)$$

where A_{xx} , B_{xx} , D_{xx} , I_A , I_B , I_D are the integral parameters of the section, similar to parameters D_{11} , D_{12} , D_{22} , I_{11} , I_{12} , I_{22} for Bernoulli beams:

$$A_{xx}(x) = \int_A E(x, z) dA; \quad B_{xx}(x) = \int_A E(x, z) z dA; \quad D_{xx}(x) = \int_A E(x, z) z^2 dA; \quad (15)$$

$$I_A(x) = \int_A \rho(x, z) dA; \quad I_B(x) = \int_A \rho(x, z) z dA; \quad I_D(x) = \int_A \rho(x, z) z^2 dA. \quad (16)$$

E_{xx} , F_{xx} , H_{xx} , I_E , I_F , I_H are the integral parameters of the section, containing correction function $\Phi(z)$:

$$E_{xx}(x) = \int_A E(x, z) \Phi(z) dA; \quad F_{xx}(x) = \int_A E(x, z) \Phi(z) z dA; \quad H_{xx}(x) = \int_A E(x, z) (\Phi(z))^2 dA; \quad (17)$$

$$I_E(x) = \int_A \rho(x, z) \Phi(z) dA; \quad I_F(x) = \int_A \rho(x, z) \Phi(z) z dA; \quad I_H(x) = \int_A \rho(x, z) (\Phi(z))^2 dA, \quad (18)$$

A_{xz} is the integral parameter of the section, associated with the contribution of shear strain, containing the derivative of the correction function with respect to z :

$$A_{xz}(x) = \int_A G(x, z) (\Phi_{,z}(z))^2 dA. \quad (19)$$

In expressions (5, 6, 13, 14), terms D_{12} , I_{12} , B_{xx} , I_B , E_{xx} , I_E couple the longitudinal and transverse vibrations. In the case of a material distribution across the section that is symmetric about the central axis, these terms are zero, and the corresponding vibrations are uncoupled. With an asymmetric distribution of material properties, the distribution of axial stresses will also be asymmetric, leading to the coupling of bending and tension in the beam. When considering bending not about the geometric center of the cross-section, but about the physical center z_c , for which $\int_A E(z) (z - z_c) dA = 0$, then bending and tension

can be decoupled for static problems. An approach that allows decoupling of bending and tension for higher-order bending theory is proposed in [33]. However, for dynamic problems, it is possible to simultaneously reduce D_{12} and I_{12} , B_{xx} and I_B , E_{xx} and I_E to zero in this manner only if the ratio of Young's modulus to density is constant across the section. In a general case, the interaction between

bending and tension will occur regardless of the choice of the centerline. This interaction should be distinguished from the effect of longitudinal load on the natural frequency of transverse vibration, which is closely related to Euler instability.

2.3. Finite Element Approximation and Numerical Solution

The finite element method is used to numerically solve the free vibration problem. The element diagram is shown in Figure 3.

Each node is described by $u_i, w_i, w'_i = (\partial w / \partial x)_i$. In Reddy's model either the total bending rotation at the node θ_i , or the transverse shear strain of a point on the neutral axis γ_i are added to the nodal

unknowns. Let these variants of Reddy's model be called θ — variant and γ — variant, respectively.

For the finite-element approximation of longitudinal displacements and total bending rotations of the cross-section, the Lagrange approximation is used; for transverse displacements, the Hermitian approximation is used.

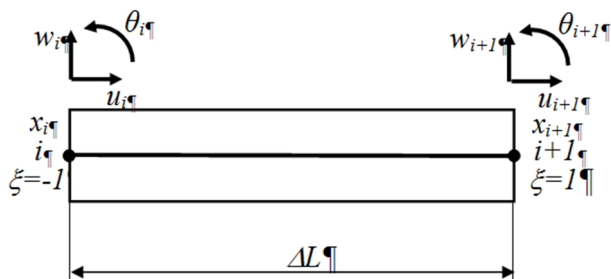


Figure 3. Beam element with two nodes

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

$$u^0 = u_1 N_1 + u_2 N_2, \quad (20)$$

$$\phi^0 = \phi_1 N_1 + \phi_2 N_2, \text{ or } \gamma^0 = \gamma_1 N_1 + \gamma_2 N_2, \quad (21)$$

$$w^0 = w_1 H_1 + w_2 H_3 + w'_1 \hat{l} H_2 + w'_2 \hat{l} H_4. \quad (22)$$

Here

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (23)$$

$$H_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3); \quad H_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3); \quad H_3 = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3); \quad H_4 = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3). \quad (24)$$

Using the expressions for deformation energy and kinetic energy (4, 5, 11, 12), Hamilton's principle, and the finite-element approximation, the equation of motion can be written in matrix form:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (25)$$

where $\mathbf{K}$ is the stiffness matrix; $\mathbf{M}$ is the mass matrix; $\mathbf{q}(t)$ is the vector of nodal displacements, $\mathbf{F}(t)$ is the vector of external forces. When considering free vibrations, the vector of external forces is equal to zero, and the vector of nodal displacements can be represented as

$$\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}} \cos(\omega t + \varphi), \quad (26)$$

where ω is the natural angular frequency of vibration of the beam, φ is the phase, vector $\tilde{\mathbf{q}}$ does not depend on time. As a result, the frequency equation can be obtained in the form

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

The local stiffness and mass matrices of the element are calculated as follows:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Delta L} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dL, \quad (28)$$

$$\mathbf{m}^e = \int_{\Delta L} \mathbf{N}^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{N} dL. \quad (29)$$

Assembly of the global $\mathbf{K}$ and $\mathbf{M}$ matrices from the local $\mathbf{k}^e$ and $\mathbf{m}^e$ matrices is performed in the standard way [34].

For the Bernoulli model:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix}; \quad (30)$$

$$\mathbf{I}_\rho = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & I_{12} \\ 0 & I_{11} & 0 \\ I_{12} & 0 & I_{22} \end{bmatrix}; \quad (31)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & \hat{H}_2 & 0 & H_3 & \hat{H}_4 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 \end{bmatrix}; \quad (32)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ & H''_1 & \hat{H}''_2 & & H''_3 & \hat{H}''_4 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

For higher-order models:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} A_{xx} & -B_{xx} & E_{xx} & 0 \\ -B_{xx} & D_{xx} & -F_{xx} & 0 \\ E_{xx} & -F_{xx} & H_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{xz} \end{bmatrix}; \quad (34)$$

$$\mathbf{I}_\rho = \begin{bmatrix} I_A & -I_B & I_E & 0 \\ -I_B & I_D & -I_F & 0 \\ I_E & -I_F & I_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_A \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Matrices $\mathbf{N}$ and $\mathbf{B}$ for the θ — variant are calculated as

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & 0 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 & 0 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & -N_1 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 & -N_2 \\ 0 & H_1 & \hat{H}_2 & 0 & 0 & H_3 & \hat{H}_4 & 0 \end{bmatrix}; \quad (36)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H''_1 & \hat{H}''_2 & 0 & 0 & H''_3 & \hat{H}''_4 & 0 \\ 0 & H''_1 & \hat{H}''_2 & -N'_1 & 0 & H''_3 & \hat{H}''_4 & -N'_2 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & -N_1 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 & -N_2 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

and for the γ — variant:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & 0 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \\ 0 & H_1 & \hat{H}_2 & 0 & 0 & H_3 & \hat{H}_4 & 0 \end{bmatrix}; \quad (38)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H''_1 & \hat{H}''_2 & 0 & 0 & H''_3 & \hat{H}''_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Here $\hat{H} = \frac{\Delta L}{2}$, $N' = \frac{\partial N}{\partial x}$, $H' = \frac{\partial H}{\partial x}$, $H'' = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$, where ΔL is the length of the element.

A program based on the finite element method was implemented in Python (version 2.7.13) using the NumPy (version 1.11.3) and SciPy (version 0.18.11) libraries. Programs from [34] were used as a prototype. The general structure of the programs for assembling finite element matrices was taken from this book, with Matlab matrix operations replaced by the corresponding Numpy functions. The transition from Matlab to Python is due to the free availability of the latter. The *scipy.linalg.eig* function with default arguments was used as the eigenvalue solver. Integration of the finite element matrices (28, 29) was performed using the Gauss scheme with a number of points $np = 2$. The cross-sectional characteristics (7, 8, 15–19) were calculated using the Gauss — Lagrange integration scheme (an equivalent of the Gauss scheme that includes points at the ends of the interval) with a number of points $nh = 11$.

3. Results and Discussion

The examples below show the results of solving the problem of the natural vibrations of a cantilever beam made of a functionally graded material whose properties vary in both transverse and longitudinal directions. The beam has a rectangular cross-section. In general, the spatial distribution of the beam material properties is described by the following equations:

$$E(x, z) = f_E(z) \exp\left(\frac{\tilde{\beta}x}{L}\right); \quad \rho(x, z) = f_\rho(z) \exp\left(\frac{\tilde{\beta}x}{L}\right), \quad (40)$$

where $\tilde{\beta}$ is the parameter characterizing the intensity of variation of material properties along the beam axis; $f_E(z) = E(0, z)$ and $f_\rho = \rho(0, z)$ are the functions characterizing the variation of the Young's modulus and the mass density in the transverse direction; L is the beam length.

Here, the exponential decrease in the Young's modulus and mass density in the x -direction from the fixed end to the free end given by (2) can be attributed to an increase in porosity in that direction according to the law

$$V_0 = 1 - \exp\left(\frac{\tilde{\beta}x}{L}\right), \quad (41)$$

when $\tilde{\beta} < 0$.

In the z -direction, the change in material properties is due to the varying content of components and is asymmetrical relative to the center line of the beam. Functions f_E, f_ρ were calculated according to (1), where the content of the components varied according to a power law:

$$V_2 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad V_1 = 1 - V_2, \quad (42)$$

where k is a non-negative exponent. On the lower surface, the material consists only of the first component; on the upper surface, it consists only of the second.

For a beam analyzed using Reddy's model, Poisson's ratio ν was assumed to be constant, and the shear modulus was calculated as

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (43)$$

Dimensionless frequencies were obtained

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{B}{D}}, \quad (44)$$

where ω is the natural angular frequency of vibration of the beam, L is the beam length, and B , D are the integral parameters calculated according to formulas

$$B = b \int_{-h/2}^{h/2} f_\rho dz, \quad D = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 f_E dz, \quad (45)$$

where b and h are the width and height of the beam, respectively.

In the considered examples, material constants from [32] were used to describe the beam material, corresponding to the properties of steel at the lower surface and alumina at the upper surface: $E_l = 210$ GPa, $\rho_l = 7800$ kg/m³, $E_u = 390$ GPa, $\rho_u = 3980$ kg/m³. Poisson's ratio was taken as 0.3, and the exponent k in relation (42) is equal to 3.

The results of the calculation of the reduced natural frequencies of the beam obtained using different models are presented below.

Table 1 contains the natural frequencies for a beam that is heterogeneous in two directions ($\beta = -1$), obtained without taking into account the cross-coupling of longitudinal and transverse vibrations. The numerical solution based on the simplified Bernoulli model (which does not account for the rotational inertia of the cross-section relative to the beam neutral axis) virtually coincides with the result of the analytical solution [30]. Accounting for rotational inertia in the case of short beams leads to a significant decrease in natural frequencies, especially for higher modes.

Table 1. Dimensionless natural frequencies of transverse vibrations (Bernoulli model) $\beta = -1$

Mode	Analytical solution [30]	Finite element solution using a simplified model	Taking into account the rotational inertia $L/h=5$	Taking into account the rotational inertia $L/h=10$	Taking into account the rotational inertia $L/h=20$
1	4.7349	4.7349	4.6924	4.7242	4.7323
2	24.2018	24.2018	23.049	23.8984	24.1250
3	63.8645	63.8645	57.2544	61.9988	63.3825
4	123.0979	123.0981	102.2526	116.6982	121.4002

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

Asymmetric distribution of the physical properties of the material relative to the centerline leads to coupling of longitudinal and transverse vibrations. Table 2 lists the natural frequencies of the functionally graded beam. Columns 1 and 2 show the values obtained using the model that neglects the interdependence of flexural and longitudinal vibrations, while Column 3 shows the values obtained using the model that

accounts for this factor. Column 4 compares the amplitudes of longitudinal and transverse vibrations calculated using the full Bernoulli model. The table shows that accounting for the interdependence of longitudinal and flexural vibrations in an heterogeneous beam leads to a decrease in the natural frequencies, and this factor is more significant for higher modes.

Table 2. Interaction of longitudinal and transverse vibrations (Bernoulli model) $\beta = -1$

Mode	Transverse vibrations taking into account rotational inertia	Longitudinal vibrations	Full Bernoulli model	$ w _{\max}$
1	4.6924		4.6143	0.016
2	23.049		22.5405	0.09
3		31.8648	32.0069	4.6
4	57.2544		55.6523	0.12
5		81.0948	81.7920	4.4
6	102.2526		98.5168	0.24

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

The analysis of the natural vibrations of a heterogeneous beam using Reddy's model also yields lower values for the natural frequencies. Table 3 lists the natural frequencies obtained using the full Bernoulli model and the second-order Reddy's model (θ — variant).

Table 3. Natural frequencies of a heterogeneous beam ($\beta = -1$) obtained using the full Bernoulli model and the Reddy model

Mode	Bernoulli $L/h = 5$	Reddy $L/h = 5$	$ w _{\max}$ (Reddy $L/h = 5$)	Bernoulli $L/h = 10$	Reddy $L/h = 10$	Bernoulli $L/h = 20$	Reddy $L/h = 20$
1	4.6143	4.4792	0.015	4.6484	4.6120	4.6570	4.6478
2	22.5405	19.7516	0.073	23.4913	22.5459	23.7304	23.4780
3	32.0069	31.8974	7.4	60.7498	55.7234	62.3378	60.7801
4	55.6523	44.2526	0.08	63.8790	63.7661	119.2573	114.0833
5	81.7920	72.3770	0.13	114.3008	99.3542	—	—
6	98.5168	80.4830	4.9	—	—	—	—

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

Figures 4 and 5 demonstrate the convergence of the developed finite element algorithm. Figure 4 shows how the obtained natural frequency values vary depending on the degree of discretization. Even with a fairly coarse finite element mesh, the accuracy of the solution is adequate. For example, dividing the beam into 8 nodal elements yields an accuracy of 0.03% for the first frequency and 0.4% for the third. The solutions obtained using the two variants of the algorithm (θ - and γ -variants) differ to some extent, especially for the coarse mesh. However, in the θ -variant of the algorithm, a solution with the desired accuracy is achieved on a coarser mesh.

Figure 5 shows that the results of the two algorithm variants converge as the number of nodal elements increases. The difference in the natural frequencies obtained using the θ - and γ -variants of the algorithm (Ω_θ and Ω_γ) is more significant for higher frequencies. The third mode is predominantly longitudinal (Table 3); the contribution of shear strain is negligible, and therefore the solutions obtained using the two variants of the algorithm are virtually identical.

The results presented in Table 4 allow to assess the significance of accounting for the heterogeneity of beam properties when calculating natural frequencies. The table summarizes the solutions obtained for a beam that is homogeneous along its length ($\beta = 0$) with $L/h = 5$ and for a beam whose properties vary in

the longitudinal and transverse directions ($\beta = -1$). The solutions were obtained using the full Bernoulli model and the Reddy model. The table shows that accounting for the heterogeneous distribution of the physical and mechanical characteristics of a cantilever beam in the longitudinal direction leads to an increase in the natural frequencies and, consequently, to an increase in dynamic rigidity in the sub-resonance region.

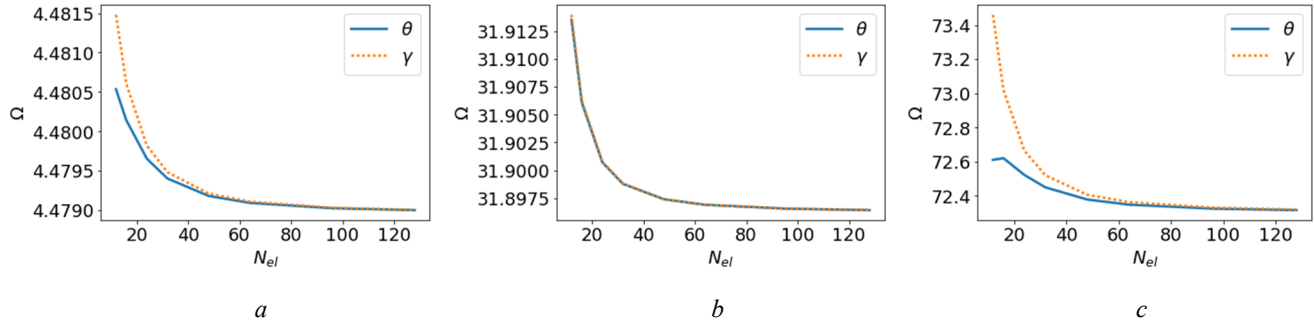


Figure 4. Convergence of the numerical solution for (a) the first, (b) the third and (c) the fifth mode

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

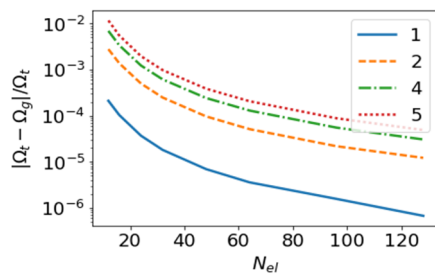


Figure 5. Relative frequency difference obtained using two variants of the algorithm. Digits indicate the mode number

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

Table 4. Comparison of natural frequencies of a bidirectional ($\beta = -1$) and a longitudinally homogenous beam ($\beta = 0$)

Mode	Bernoulli $\beta = -1$	Reddy $\beta = -1$	Bernoulli $\beta = 0$	Reddy $\beta = 0$
1	4.6143	4.4792	3.4330	3.3510
2	22.5405	19.7516	20.4895	17.9510
3	32.0069	31.8974	26.4676	26.3736
4	55.6523	44.2526	53.8033	42.7835
5	81.7920	72.3770	79.6095	71.1021

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

To test this finite-element implementation of the Reddy model, an alternative distribution of material properties presented in [28] was also considered, in which the Young's modulus and mass density vary exponentially in both directions:

$$E(x, z) = E_m \exp\left(p_x \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right) + p_z \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right); \quad \rho(x, z) = \rho_m \exp\left(p_x \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right) + p_z \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right). \quad (46)$$

The resulting dimensionless natural frequencies

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \quad (47)$$

were compared with those calculated in [28] for the following parameter values: $E_m = 210$ GPa, $\rho_m = 7850$ kg/m³, $p_x = 1$, $p_z = 1$. The results are presented in Table 5.

The deviation for the first three frequencies does not exceed 0.1%.

Table 5. Comparison of natural frequencies with [28]

Mode	Karamanli [28]	Present model
1	0.7055	0.7055
2	4.7302	4.7273
3	6.3414	6.3415

Source: made by I.N. Vasserman, I.O. Glot, I.N. Shardakov.

4. Conclusion

A finite-element algorithm is proposed for solving problems involving the static and dynamic deformation of bidirectional functionally graded beams and structures composed of them in terms of the Bernoulli and Reddy beam theories. As an example, the results of a numerical solution to the problem of natural modes and frequencies of a cantilever bidirectional functionally graded beam are presented. Based on these results, the following conclusions can be drawn:

1. The convergence of the obtained natural frequency values with an increase in the number of finite elements in the numerical solution has been established. In particular, for the simplified Bernoulli model, which does not account for the rotational inertia of the cross-sections or the cross-coupling of the longitudinal force and the bending moment, the obtained numerical values of the natural frequencies agree well with those of the analytical solution.

2. For short beams ($L/h \leq 5$), accounting for rotational inertia leads to a significant reduction in natural frequencies, especially for the higher modes.

3. Numerical results that demonstrate the relationship between the natural frequencies and the asymmetry of the distribution of the physical properties of beam material in the cross-section relative to its centerline are presented. An interesting result is the obtained interdependence of the longitudinal and transverse vibrations of the beam when the stiffness properties are distributed asymmetrically relative to the centerline in the cross-sections. This interaction is unrelated to geometric or physical nonlinearity and should be distinguished from the effect of longitudinal loading on the natural frequency of transverse vibrations, which is closely associated with Euler instability. This result fundamentally distinguishes the vibrations of functionally graded beams from those of homogeneous beams.

4. Using Reddy's higher-order model also results in a decrease in the calculated natural frequencies. For the lower frequencies of long beams, this difference is less noticeable.

5. It has been shown that an increase in the material porosity toward the free end of a cantilever beam leads to an increase in the natural frequencies and, consequently, to a decrease in dynamic displacements in the sub-resonance region.

6. Thus, the gradient spatial distribution of the beam material properties in two directions substantially broadens the range of control over the parameters of its dynamic and static deformation behavior.

References

1. Matveenko VP, Fedorov AYu, Shardakov IN. Analysis of stress singularities at singular points of elastic solids made of functionally graded materials. *Doklady Physics*. 2016;61(1):24–28. <https://doi.org/10.1134/S1028335816010031> EDN: WQFCBN
2. Fedorov AYu, Matveenko VP. Investigation of stress behavior in the vicinity of singular points of elastic bodies made of functionally graded materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 2018;85(6):061008. <https://doi.org/10.1115/1.4039619> EDN: OSQKPB
3. Meguid SA, Wang XD, Jiang LY. On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*. 2002;69(14–16):1753–1768. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00046-2](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00046-2) EDN: AYEQFZ
4. Bever MB, Duwez PE. Gradients in composite materials. *Materials Science and Engineering*. 1972;10:1–8. [https://doi.org/10.1016/0025-5416\(72\)90059-6](https://doi.org/10.1016/0025-5416(72)90059-6)
5. Miyamoto Y, Koizumi M, Yamada O. High-pressure self-combustion sintering for ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*. 1984;67(11):224–225. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1984.tb19488.x>
6. Niino M, Hirai T, Watanabe R. The functionally gradient materials, *Journal of the Japan Society for Composite Materials*. 1987;13(1):257–264. <https://doi.org/10.6089/jscm.13.257>
7. Birman V, Bird LW. Modelling and analysis of functionally graded materials and structures. *ASME Applied Mechanics Reviews*. 2007;60:195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164> EDN: SFXRPV
8. Pompe W, Worch H, Eppe M, Friess W, Gelinsky M, Greil P, Hempel U, Scharnweber D, Schulte K. Functionally graded materials for biomedical applications; *Materials Science and Engineering: A*; 2003;362(12):40–60. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00580-X](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00580-X) EDN: KLHYOD
9. Oh SY, Librescu L, Song O. Vibration of turbomachinery rotating blades made-up of functionally graded materials and operating in a high temperature field. *Acta Mechanica*. 2003;166:69–87. <https://doi.org/10.1007/s00707-003-0049-y> EDN: EUNGWR

10. Zhang N, Lu A, Charlie C, Li CC, Zhou J, Zhang X, Wang S, Xuguang Chen X. Support performance of functionally graded concrete lining. *Construction and Building Materials*. 2017;147:35–47. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.04.161>
11. Rubio WM, Vatanabe SL, Paulino GH, Silva ECN. Functionally graded piezoelectric material systems — A multi-physics perspective. In: *Advanced Computational Materials Modeling: From Classical to Multi-Scale Techniques*. 2010. p. 301–339. <https://doi.org/10.1002/9783527632312.ch8>
12. Le CI, Dang ND, Bui TTH, Nguyen DK. Size-dependent large deformation analysis of microscale functionally graded beams and frames. *Acta Mechanica*. 2025;236:1991–2010. <https://doi.org/10.1007/s00707-025-04265-1> EDN: CAGRMM
13. Guo L, Zhao S, Guo Z, Yang J, Kitipornchai S. Functionally graded engineering structures: An overview. *Engineering Structures*. 2026;351:121995. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.121995> EDN: EJHCQB
14. Torelli G, Fernández MG, Lees JM. Functionally graded concrete: Design objectives, production techniques and analysis methods for layered and continuously graded elements. *Construction and Building Materials*. 2020;242:118040. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118040> EDN: HUGIZI
15. Strieder E, Hilber R, Stierschneider E, Bergmeister K. FE-Study on the Effect of Gradient Concrete on Early Constraint and Crack Risk. *Applied Sciences*. 2018;8(2):246. <https://doi.org/10.3390/app8020246>
16. Nian Y, Wan S, Avcar M, Yue R, Li M. 3D printing functionally graded metamaterial structure: Design, fabrication, reinforcement, optimization. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2023;258:108580. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108580> EDN: OXRZKO
17. Ma Z, Liu W, Li W, Liu H, Song J. et al. Additive manufacturing of functional gradient materials: A review of research progress and challenges. *Journal of Alloys and Compounds*. 2024;971:172642. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2023.172642> EDN: GZIBML
18. Lim S, Buswell RA, Le TT, Austin SA, Gibb AGF, Thorpe T. Developments in construction-scale additive manufacturing processes. *Automation in Construction*. 2012;21:262–268. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2011.06.010>
19. Gosselin C, Duballet R, Roux P, Gaudillière N, Dirrenberger J, Morel P. Large-scale 3D printing of ultra-high performance concrete — a new processing route for architects and builders. *Materials & Design*. 2016;100:102–109. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.03.097>
20. Tay YWD, Lim JH, Li M, Tan MJ. Creating functionally graded concrete materials with varying 3D printing parameters. *Virtual and Physical Prototyping*. 2022;17(3):662–681. <https://doi.org/10.1080/17452759.2022.2048521> EDN: GMGOJI
21. Chen D, Gao K, Yang J, Zhang L. Functionally graded porous structures: Analyses, performances, and applications — A Review. *Thin-Walled Structures*. 2023;191:111046. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111046> EDN: IMYZRY
22. Shetty RA, Dushyanthkumar GL, Deepak SA. Classical and refined beam and plate theories: A brief technical review. *Sahyadri International Journal of Research*. 2018;4(2):27–32. Available from: https://sijr.sahyadri.edu.in/Articles/Volume%204/Issue%202/december_2018_6.pdf (accessed: 11.03.2026).
23. Thai H-T, Vo TP. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012;62(1):57–66. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014>
24. Şimşek M. Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*. 2010;240(4):697–705. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.12.013>
25. Emam SA. Analysis of shear-deformable composite beams in postbuckling. *Composite Structures*. 2011;94(1):24–30. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.024>
26. Heyliger PR, Reddy JN. A Higher Order Beam Element for Bending and Vibration Problems. *Journal of Sound and Vibration*. 1988;126:309–326. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(88\)90244-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90244-1)
27. Şimşek M. Bi-directional functionally graded materials (BDFGMS) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions. *Composite Structures*. 2015;133:968–976. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.021>
28. Karamanli A. Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2018;189:127–136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.060>
29. Tang Y, Lv X, Yang T. Bi-directional functionally graded beams: asymmetric modes and nonlinear free vibration. *Composites Part B: Engineering*. 2019;156:319–331. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.140> EDN: YKHWNF
30. Wang Z-H, Wang X-H, Xu G-D, Cheng S, Zeng T. Free vibration of two-directional functionally graded beams. *Composite Structures*. 2016;135:191–198. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.013>
31. Boggarapu V, Gujjala R, Ojha Sh, Acharya Sk, Venkateswara babu P, Chowdary S, kumar Gara D. State of the art in functionally graded materials. *Composite Structures*. 2021;262:113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596> EDN: YLQYWC
32. Alshorbagy AE, Eltaher MA, Mahmoud FF. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*. 2011;35(1):412–425. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.006>
33. Pei YL, Geng PS, Li LX. A modified higher-order theory for FG beams. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2018;72:186–197. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.05.008>
34. Ferreira AJM. *MATLAB codes for finite element analys*. Springer; 2009. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-47952-7>

Энергетическая концепция силового сопротивления элементов железобетонных конструкций

Е.А. Ларионов¹, В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{1,2}, Е.А. Гринько¹

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ markovich-as@rudn.ru

Поступила в редакцию: 9 апреля 2026 г.

Доработана: 1 июня 2026 г.

Принята к публикации: 12 июня 2026 г.

Аннотация. Материал (бетон, сталь, дерево, пластмасса) образуется объединением его фракций в результате их массового и энергетического обмена с окружающей средой. Этот синергетический процесс влечет накопление в единичном объеме материала энергии, связывающей фракции в единое целое и являющейся его удельной энергией целостности. Разрушение материала в энергетическом аспекте представляет обратный к образованию его целостной структуры процесс исчерпания энергии целостности. Вопросы расчета железобетонных конструкций сопряжены с прочностью бетона и стали, динамика которой для оценки текущего и длительного ресурса силового сопротивления железобетонных элементов является существенной в прогнозировании безопасности и живучести этих конструкций. На основе понятия энергии целостности как параметра энергетического состояния материала выявлены оценки длительной прочности и несущей способности по изгибу бетонных элементов и энергетическая оценка конструктивной безопасности железобетонных стержневых систем. Предложенный подход связан с диссипацией энергии целостности при силовых нагружениях и воздействиях окружающей среды.

Ключевые слова: диссипация энергии, коррозионная диссипация, прочность бетона, деформирование железобетона

Вклад авторов. Ларионов Е.А. — научное руководство, общая концепция исследования; Агапов В.П. — концепция исследования, научное рецензирование и редактирование; Маркович А.С. — концепция исследования, анализ научной литературы, написание текста; Гринько Е.А. — редактирование текста. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: Ларионов Е.А., Агапов В.П. Маркович А.С., Гринько Е.А. Энергетическая концепция силового сопротивления элементов железобетонных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 4. С. 331–347. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-331-347> EDN: LPXCUE

Ларионов Евгений Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры технологии строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY AuthorID: 365207, ORCID: 0000-0002-4906-5919; e-mail: evgenylarionov39@yandex.ru

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологии строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, доктор технических наук, доцент кафедры технологии строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434; ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Гринько Елена Алексеевна, ассистент кафедры машиностроительных технологий, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 5360-7164, ORCID: 0000-0002-0459-8359; e-mail: grinko-ea@rudn.ru

© Ларионов Е.А., Агапов В.П. Маркович А.С., Гринько Е.А., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Energy Concept of the Force Resistance of Elements of Reinforced Concrete Structures

Evgeny A. Larionov¹ , Vladimir P. Agapov¹ , Alexey S. Markovich^{1,2} , Elena A. Grinko¹ 

¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation

² Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ markovich-as@rudn.ru

Received: April 9, 2026

Revised: June 1, 2026

Accepted: June 12, 2026

Abstract. A material (concrete, steel, wood, plastic) is formed by combining its fractions as a result of their mass and energy exchange with the environment. This synergetic process entails the accumulation of energy in a unit volume of the material, binding the fractions into a single whole and being its specific energy of integrity. The failure of a material in the energy aspect represents the reverse process to the formation of its integral structure — the depletion of the integrity energy. The issues of calculating reinforced concrete structures are related to the strength of concrete and steel, the dynamics of which, in order to assess the current and long-term life of the mechanical resistance of reinforced concrete elements, is essential in predicting the safety and survivability of these structures. Based on the concept of integrity energy as a parameter of the energy state of the material, the article identifies estimates of the long-term strength and bending bearing capacity of concrete elements and an energy assessment of the structural safety of reinforced concrete frames. The proposed approach is related to the dissipation of integrity energy under mechanical loads and environmental exposure.

Keywords: energy dissipation, corrosive dissipation, strength of concrete, deformation of reinforced concrete

Authors' contribution. Larionov E.A. — supervision, conceptualization; Agapov V.P. — conceptualization, writing — review and editing; Markovich A.S. — conceptualization, literature review, writing — original draft; Grinko E.A. — writing — original draft and editing. All the authors have read the final version of the article and approved it.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Larionov EA, Agapov VP, Markovich AS, Grinko EA. Energy concept of the force resistance of elements of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):331–347. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-331-347> EDN: LPXCUE

1. Введение

В бетонной смеси, как и во всякой термодинамической системе, происходит непрерывный обмен вещества и энергии с окружающей средой, сопровождаемый образованием связей, определяющих прочность бетона $R(t)$. Отвечающая $R(t)$ аккумулированная в единице объема энергетическая мера сопротивления разрушению называется энергией целостности $W(t)$. Параметр $W(t)$ характеризует энергетическое состояние бетона и равен работе $A(t)$ разрушения его единичного объема при

Evgeny A. Larionov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY AuthorID: 365207, ORCID: 0000-0002-4906-5919; e-mail: evgenylarionov39@yandex.ru

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Engineering Academy, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Metal and Timber Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Elena A. Grinko, Assistant of the Department of Mechanical Engineering Technologies, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5360-7164, ORCID: 0000-0002-0459-8359; e-mail: grinko-ea@rudn.ru

мгновенном деформировании. Для упругих материалов удельная работа $A(t)$ внешних сил порождает равную ей удельную потенциальную энергию $\Phi(t)$ и согласно $\Phi(t) = A(t)$ имеет место совпадение величин $\Phi(t)$ и $A(t)$. Динамика энергии целостности реальных материалов, обладающих свойством ползучести, существенно определяется как режимом нагружения и интенсивностью воздействия окружающей среды, так и предысторией их существования. Значимым результатом внешних воздействий являются коррозионные повреждения материалов. Предложенный в работе метод основан на концепции инвариантности начальной энергии целостности от режима ее исчерпания при силовых и средовых воздействиях [1; 2].

Энергия целостности бетона в результате физико-химических процессов увеличивается до определенного момента времени t_0 — это отвечает так называемому старению бетона, в течение которого он набирает прочность. Вопросы длительной прочности бетона рассматриваются для $t \geq t_0$, когда проявляется деградация его прочности, выражаемая уменьшением его энергии целостности вследствие порождаемых ползучестью и коррозионными повреждениями диссипативных потерь.

Если $W_g(t)$ диссипативно рассеянная к моменту t часть начальной энергии целостности $W(t_0)$, то по закону сохранения энергии

$$W(t_0) = W(t) + W_g(t), \quad (1)$$

где величина $W(t) = W(t_0) - W_g(t)$ энергии целостности представляет текущий энергетический ресурс сопротивления.

Равенство

$$W(t_p) = A(t_p) \quad (2)$$

выражает энергетический критерий разрушения, порождаемый работой $A(t_p)$ при мгновенном деформировании. Энергетическому ресурсу $W(t)$ отвечает ресурс $R(t)$ силового сопротивления при одноосном нагружении и ресурс $M(t)$ моментного силового сопротивления при изгибе железобетонного элемента [3; 4].

По концепции прочностной структуры бетон рассматривается как совокупность фракций, объединенных связями со статистически распределенными прочностями $R_i(t)$ [5–7].

Согласно этой концепции, выводится нелинейное реологическое уравнение механического состояния

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{S^0 \sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \theta(\tau) S^0(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

при одноосном неубывающем нагружении [8; 9].

В (3) $S^0(t)$ — функция нелинейности напряжений; $\sigma(t)$ — нормальное напряжение; $C_0^*(t, \tau) = C(\infty, 28) \left[1 - e^{-\gamma(t-t_0)} \right]$ — мера ползучести идеального (нестареющего) бетона; $\theta(\tau)$ — функция старения. При неубывающем нагружении $\mathcal{N}(t)$ бетонного элемента его связи с прочностью $R_i(t) < \sigma(t)$ теряют способность к силовому сопротивлению и происходит перераспределение напряжений с этих разрушенных связей на целые связи с прочностью $R_i(t) \geq \sigma(t)$. Перераспреде-

ние нагружения $\mathcal{N}(t)$ с площади A нормального сечения на ее работоспособную часть $A(t)$ порождает так называемое структурное напряжение:

$$\sigma_c(t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{A(t)} = \frac{A}{A(t)} \frac{\mathcal{N}(t)}{A} = S^0(t) \sigma(t). \quad (4)$$

Согласно (3) и (4)

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \theta(\tau) \sigma_c(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5)$$

Структурное напряжение представляет нормальное напряжение, необходимое для реализации деформации $\varepsilon(t, t_0)$ при условии равнопрочности всех силовых связей элемента. В приложениях используется функция [10]:

$$S^0(t) = S^0 \left(\frac{\sigma(t)}{R(t)} \right) = 1 + V \left[\frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]^m, \quad (6)$$

где V и m эмпирические параметры.

Полагая $A = A(t) + A_a(t)$, получим $S^0(t) = \frac{A(t) + A_a(t)}{A(t)} = 1 + \frac{A_a(t)}{A(t)}$ и величина $V \left[\frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]^m$ от-

вечает отношению суммарных площадей нормальных сечений разрушенных и целых связей.

Напряженно-деформированное состояние механической системы, например железобетонной конструкции, тесно связано с динамикой энергий целостности составляющих ее элементов. Потеря целостности части элементов влечет уменьшение энергии целостности оставшихся, что может привести к разрушению части конструкции или к последовательно прогрессирующему лавинообразному разрушению всей конструкции. Результатом мгновенного разрушения части конструктивных элементов под действием неубывающей нагрузки является импульсное догружение сохранивших несущую способность элементов и возникает задача определения динамических напряжений и моментов в их сечениях. В [11] она решена для упругохрупкого элемента энергетическим методом на основе постоянства полной потенциальной энергии элементов.

В прогнозных расчетах безопасности существен учет ползучести, и в данной работе динамические внутренние усилия элементов определяются согласно инвариантности их энергии целостности от режима нагружения.

Введенные в [1; 11] энергетические подходы оценок силового сопротивления применяются в расчетах долгосрочной безопасности, живучести и устойчивости железобетонных конструкций и их элементов [12–14].

Замечание 1. Энергетические оценки в теории разрушения упругих тел впервые появились в [15] при анализе зарождения трещин. Аналогичные оценки в вопросах разрушения упругопластичных тел возникают, например, в [16; 17].

В [18–20] энергетическим методом оценивается продольная критическая сила, влекущая потерю устойчивости железобетонного стержня.

При этом в [21] наряду с диссипацией его энергии целостности учитывается ее инвариантность при бифуркации равновесных форм.

Замечание 2. В [23; 24] динамический эффект внезапного разрушения элемента конструкции моделируется учетом коэффициента динамичности, а в [25] определяется динамическим расчетом.

В [26] приведен анализ этих подходов и обоснована их приемлемость наряду с сопоставляемым им энергетическим подходом для расчетов по защите сооружений от прогрессирующего обрушения.

Замечание 3. Энергетический подход используется в сейсмическом проектировании. При этом сейсмические силы представляются через так называемую входную сейсмическую энергию [27].

Значимый вклад в диссипативную теорию силового сопротивления железобетона, включающую оценки гистерезисных энергетических потерь и их конструктивную минимизацию, внес В.М. Бондаренко¹. Впервые энергетические соображения для получения оценок динамических напряжений в упруго-хрупких стержневых конструкциях при импульсных нагружениях привлечены Г.А. Гениевым и В.И. Колчуновым [11].

2. Энергия целостности конструктивного элемента

Накопленная в конструктивном элементе энергия целостности исчерпывается в результате работы внутренних сил при его деформировании и воздействиях окружающей среды. Ее величина $W(t)$ полагается [1; 2] инвариантной от режима нагружения и способов воздействия среды.

Эта концепция влечет, в частности, равенство $W(t)$ работе $A(t)$ внутренних сил элемента при его мгновенном (кратковременном) деформировании до предельной деформации ε_u , приводящей к разрушению.

Таким образом, энергия целостности $W(t)$ является интегральным параметром элемента, равным работе внутренних сил при его мгновенном разрушении [1]. Величина $W(t) = \frac{W(t)}{V}$, где V — объем элемента, представляет среднюю плотность энергии целостности.

При изоэнергетическом напряженном состоянии элемента плотность $W_s(t)$ постоянна и является его удельной энергией целостности. На рис.1 приводится геометрическая интерпретация рассматриваемых величин согласно полной диаграмме $\sigma - \varepsilon$ бетонного образца при его деформировании до ε_u .

Площади S фигур на рис. 1 представляют:

$S_{OA^*B^*}$ — предельную плотность энергии, являющейся удельной энергией целостности $W_s^*(t)$;

S_{OAB} — текущую плотность энергии, являющейся рассеянной частью $W_{sd}^*(t)$ энергии $W_s^*(t)$;

$S_{BA^*B^*} = S_{OA^*B^*} - S_{OAB}$ — остаточный ресурс $\tilde{W}_s^*(t) = W_s^*(t) - W_{sd}^*(t)$;

S_{OAC} — разность $\Delta W(t) = \bar{W}(t) - \bar{W}(t)$ энергий, затраченных на осуществление удельных работ внутренних сил элемента при его нагружении и последующем разгрузении.

Для упругопластических тел величина $\Delta W(t)$ является присущей им гистерезисной потерей части энергии $\bar{W}(t)$. Согласно рис. 1, $\bar{W}(t) = W_{sd}^*(t)$.

Замечание 4. Энергия целостности конструктивного элемента является его максимальной энергией сопротивления разрушению. Рассеянная часть этой энергии, затраченная на работу внутренних сил, представляет энергетическую меру диссипации силового сопротивления. При длительном

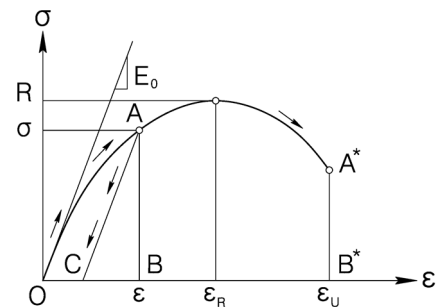


Рис. 1. Текущая и предельная плотность энергии

Источники: выполнено Е.А. Ларионовым, А.С. Марковичем.

Figure 1. Current and ultimate energy density

Source: made by E.A. Larionov, A.S. Markovich.

¹ Бондаренко В.М., Римшин В.И. Диссипативная теория силового сопротивления железобетона : учеб. пособие. Москва : ТИД «Студент», 2015. 111 с. ISBN 978-5-4363-0052-8 EDN: VSMWDX

деформировании часть энергии целостности затрачивается на реализацию деформации ползучести и пластичности. Эта часть энергии является существенной при определении длительной прочности элемента. Значимый вклад в рассеянную часть энергии целостности вносят коррозионные повреждения, влекущие деградацию силового сопротивления элементов.

Рассматриваемые при проектировании задачи определения оптимальных форм конструкций сопряжены с накапливаемой при деформировании потенциальной энергии и сходимостью энергетических функционалов к минимуму по соответствующей последовательности исследуемых форм. При нелинейном расчете шагово-итерационным методом уравнение равновесия конструкции записывается в виде [28]

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma)_j \Delta \mathbf{u}_j^{(i)} = \Delta \mathbf{P}_j - \Delta \mathbf{K}_j^{(i-1)} \Delta \mathbf{u}_j^{(i-1)}, \quad (7)$$

где $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}_\sigma$ — матрицы жесткости и начальных напряжений; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; j — номер шага нагружения; i — номер итерации на данном шаге.

Вектор перемещений $\Delta \mathbf{u}_j^{(i)}$ должен удовлетворять закону сохранения энергии. Поэтому для каждого шага нагружения должно выполняться равенство

$$W_{j-1,j-1} + W_{j-1,j} + W_{j,j} + A_{j-1,j-1} + A_{j-1,j} + A_{j,j} = 0, \quad (8)$$

где $A_{j-1,j-1}$ и $W_{j-1,j-1}$ — работа внешних и внутренних сил начального состояния на начальных перемещениях $\Delta \mathbf{u}_{j-1}$; $A_{j-1,j}$ и $W_{j-1,j}$ — работа внешних и внутренних сил начального состояния на дополнительных (возможных) перемещениях $\Delta \mathbf{u}_j$; $A_{j,j}$ и $W_{j,j}$ — работа дополнительных внешних и внутренних сил на дополнительных перемещениях $\Delta \mathbf{u}_j$.

Исходя из принципа возможных перемещений $W_{j-1,j} + A_{j-1,j} = 0$. Следовательно, $W_{j,j} + A_{j,j} = 0$.

Потребуем, чтобы решение уравнения равновесия на i -й итерации, удовлетворяло условию $W_{j,j}^{(i)} + A_{j,j}^{(i)} = 0$, для чего введем к перемещениям $\Delta \mathbf{u}_j^{(i)}$ поправочный коэффициент c : $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)} = c \Delta \mathbf{u}_j^{(i)}$.

В этом случае работа дополнительных внутренних сил на перемещениях $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j$ равна

$$W_{j,j} = \bar{W}_{j,j} + \bar{\bar{W}}_{j,j}, \text{ где } \bar{W}_{j,j} = -\frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{K}_0 \Delta \bar{\mathbf{u}}_j - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{K}_\sigma \Delta \bar{\mathbf{u}}_j; \bar{\bar{W}}_3 = -\frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^T \Delta \mathbf{K} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j.$$

В свою очередь, внешние силы $\Delta \mathbf{P}_j$ на перемещениях $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j$ совершают работу $A_{j,j} = \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^T \Delta \mathbf{P}_j$.

Подставляя $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j = c \Delta \mathbf{u}_j$ в выражения работ внешних и внутренних сил, приходим к алгебраическому уравнению третьей степени, корнем которого является искомый поправочный коэффициент c :

$$b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + b_3 c^3 = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } b_0 = \frac{1}{2} (\Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)})^T \Delta \mathbf{P}_j; b_1 = \frac{1}{2} (\Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)})^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)}; b_2 = 0; b_3 = \frac{1}{2} (\Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)})^T \Delta \mathbf{K} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)}.$$

3. Длительная прочность и ресурс силового сопротивления бетона

При расчете железобетонных конструкций на прочность возникает вопрос о максимально возможных нагрузках, не влекущих их разрушения в период эксплуатации. При этом существенными характеристиками бетона являются его призмная R_b и так называемая длительная прочность $R_{дл}$ —

максимальный уровень постоянных напряжений, при которых он не разрушается при любой их длительности. Для обычного бетона полагается оценка $R_{\text{дл}} < 0,8 R_{\text{кр}}$, где $R_{\text{кр}}$ — его кратковременная прочность, превышение которой влечет разрушение. Снижение длительной прочности (по сравнению с кратковременной) связывается с развитием микротрещин и преодолением некоторого энергетического барьера в процессе деформирования материала. В аспекте энергетической концепции это явление сопряжено с диссипацией энергии целостности $W_{(t_0)}$.

Рассеянная к моменту t часть этой энергии:

$$W_d(t) = W_{ds}(t) + W_{dc}(t), \quad (10)$$

где слагаемые $W_{ds}(t)$ и $W_{dc}(t)$ порождаются соответственно силовыми и средовыми воздействиями, среди которых значимы учитываемые в этой работе химкоррозионные воздействия.

1. Рассмотрим сначала случай $W_d(t) = W_{dc}(t)$.

Пусть $R(t_0)$ — прочность бетона в момент t_0 , а $R(t, t_0)$ — максимальное постоянное напряжение, которое он выдерживает в течение промежутка

$T = [t_0, t]$. Удельные работы разрушения в моменты t_0 и t согласно (1) и (10) соответственно равны:

$$\tilde{W}(t_0) = R(t_0)\varepsilon(t_0) = R(t_0) \frac{S^0[R(t_0)]R(t_0)}{E(t_0)} = \frac{(1+V)R^2(t_0)}{E(t_0)}, \quad (11)$$

$$\tilde{W}(t, t_0) = R(t, t_0)\varepsilon(t, t_0) = \frac{(1+V)R^2(t, t_0)}{E(t)} [1 + E(t)C^*(t, t_0)]. \quad (12)$$

Поскольку по энергетической концепции $\tilde{W}(t_0) = \tilde{W}(t, t_0)$, то

$$R(t, t_0) = \sqrt{\frac{E(t)}{E(t_0)[1 + E(t)C^*(t, t_0)]}} R(t_0), \quad (13)$$

Множитель $R(t, t_0) = \sqrt{E(t)/E(t_0)[1 + E(t)C^*(t, t_0)]}$ определяется динамикой модуля упругости и меры ползучести $E(t) = E(1 - \beta e^{-at})$ и $C^*(t, t_0) = C(\infty, 28)(1 - e^{-\gamma(t-t_0)})$.

Для достаточно больших промежутков $[t_0, t]$ допустима оценка:

$$R_{\text{дл}} = \frac{R_{\text{кр}}}{\sqrt{1 + \varphi}}, \quad (14)$$

где $\varphi = E(28)C(\infty, 28)$ — характеристика ползучести. Например, для бетона

B60 $E = 4010^3$ МПа; $(\infty, 28) = 40 \cdot 10^{-3}$ МПа⁻¹; $\eta \approx 0,77$ и $R_{\text{дл}} \approx 0,77 R_{\text{кр}}$.

Пусть $\sigma(\tau \leq \sigma_0)$ — неубывающее на промежутке $[t_0, t]$ нагружение. Совершаемая им работа $A[\sigma(t)]$ представляет часть энергии $W(t_0)$ и по энергетической концепции:

$$W(t_0) = \hat{W}[\sigma(\tau)] + A[\sigma(\tau)], \quad (15)$$

где $\hat{W}[\sigma(\tau)]$ — резерв целостности при нагружении $\sigma(\tau)$.

Если $\sigma(\tau) = \sigma_0$ на промежутке $[t_0, t]$, то

$$W(t_0) = \hat{W}[\sigma_0] + A[\sigma_0]. \quad (16)$$

При $\sigma(\tau) \leq \sigma_0$ имеет место соотношение

$$A[\sigma(t)] \leq A(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^2}{E(t)} [1 + E(t)C^*(t, t_0)],$$

влекущее с учетом (12) и (13) оценку

$$\hat{W}(\sigma_0) \leq \hat{W}[\sigma(\tau)]. \quad (17)$$

Согласно (17) при статическом нагружении $\sigma(\tau) = \sigma_0$ получается нижняя оценка величины $\hat{W}[\sigma(\tau)]$ при всех режимах нагружения $\sigma(\tau) \leq \sigma_0$. Это означает, что для целостности на промежутке $[t_0, t]$ бетонной компоненты элемента допустимы все нагружения $\sigma(\tau) \leq R(t, t_0)$. При $\sigma(\tau) = R(t, t_0)$ согласно (12) и (13) $\hat{W}[R(t, t_0)] = 0$ и происходит разрушение элемента. Когда $\sigma(\tau) \leq R(t, t_0)$, возможное на некоторых интервалах времени разгружение влечет уменьшение $W_{ds}(t)$.

Замечание 5. Для оценки прочности при режиме нагружения $\sigma(\tau)$ необходима оценка диссипативно рассеянной части $W_{ds}(t)$ энергии целостности. В [1] приведены оценки для характерных неубывающих на $[0, t]$ режимов $\sigma(\tau) = \sigma_0(1 - \alpha e^{-\gamma\tau})$; $\alpha > 0$; $\gamma > 0$ и $\sigma(\tau) = a, t, a > 0$.

2. Коррозионные воздействия влекут значительную деградацию несущей способности железобетонных элементов конструкций. Результатом химических реакций, инициированных агрессивными по отношению к компонентам конструктивных элементов факторами внешней среды, является изменение физико-механических характеристик бетона и стали. Это порождает существенное уменьшение энергии целостности вследствие увеличения рассеянных ее частей. При одностороннем контакте бетона со средой выявлена послойность химкоррозионных повреждений, начинающихся на поверхности Σ_0 контакта, слабеющих при их углублении и обнуляющихся на некоторой поверхности Σ_t — подвижной границе нейтрализации, где концентрация $C(z, t)$ агрессора равна нулю [28]. Мера влияния этих повреждений по глубине определяется динамикой концентрации $C(z, t)$, меняющейся в переходной зоне толщины $\delta(t)$ от величины C_p в зоне полного разрушения толщины $z^*(t)$ до нуля в неповрежденной зоне толщины $p_{(t)}$. Согласно этим предпосылкам относительная концентрация $\hat{C}(z, t) = C(z, t) / C_p$ удовлетворяет условиям:

$$\hat{C}[z^*, t] = 1; \hat{C}[z^*(t) + \delta(t)] = 0; \frac{d\hat{C}[z^*(t) + \delta(t)]}{dz} = 0, \quad (18)$$

и при аппроксимации $\hat{C}(z, t) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ в случае $z^*(t) = 0$ получим

$$\hat{C}(z, t) = \frac{z^2}{\delta^2(t)} - \frac{2z}{\delta(t)} + 1.$$

Пусть $R(z, t)$ и $E(z, t)$ – прочность и модуль упругости слоя толщиной dz на глубине $z(t)$ переходной зоны. Продвижение коррозионных повреждений порождает одновременное уменьшение концентрации $\hat{C}(z, t)$ и увеличение $R(z, t)$ и $E(z, t)$. Эта сопряженность изменения величин $R(z, t)$ и $E(z, t)$ с дефицитом $K(z, t) = 1 - \hat{C}(z, t)$ концентрации $\hat{C}(z, t)$ позволяет принять равенства:

$$R(z, t) = K(z, t) R(t); \quad (19)$$

$$E(z, t) = K(z, t) E(t). \quad (20)$$

Множитель $K(z, t)$ называется функцией сохранения [3].

Величина $\int_0^{\delta} b(z) K(z, t) dz$ представляет часть площади $S(t)$ нормального сечения переходной зоны элемента ширины $b(z)$.

Согласно равенству

$$R(t) \int_0^{\delta} b(z) K(z, t) dz = \int_0^{\delta} b(z) R(z, t) dz \quad (21)$$

часть сечения с площадью $\int_0^{\delta} b(z) K(z, t) dz$, полагаемая неповрежденной (сохраненной), оказывает такое же силовое сопротивление, как все сечение. Эквивалентное в силовом аспекте приведение поврежденного сечения к расчетному используется в определении остаточного силового $R^*(t)$ и моментного $M^*(t)$ сопротивления [3; 4].

Полагая изменение меры ползучести $C^*(z, t, t_0)$ по переходной зоне обратно пропорциональной дефициту $K(z, t)$, принимают равенство

$$C^*(z, t, t_0) = \frac{C^*(t, t_0)}{K(z, t)}. \quad (22)$$

Согласно (20) и (22) имеет место соотношение

$$E(z, t) C^*(z, t, t_0) = E(t) C^*(t, t_0) = \varphi(t, t_0), \quad (23)$$

означающее инвариантность характеристики ползучести от коррозионных повреждений. Поскольку величина $\varphi(t, t_0)$ является характеристикой неравновесности силовых нагрузок и не связана с коррозионными повреждениями, равенство (23) является естественным и обосновывает представление меры $C^*(z, t, t_0)$ в виде (22).

Среди определяющих глубину нейтрализации $\delta^*(t) = z^*(t) + \delta(t)$ факторов значим уровень $\eta(t) = \delta(t)/R(t)$ напряжения, влияние которого при постоянном уровне η выражается параметрами $m(\eta)$ и $\alpha(\eta)$ в дифференциальном уравнении

$$\frac{d[\Delta\delta(t, t_0)]}{dt} = \alpha(\eta) [\Delta\delta(t, t_0)]^{m(\eta)}. \quad (24)$$

Здесь $\Delta\sigma(t, t_0) = \frac{\delta_{кр}(t, t_0) - \delta(t, t_0)}{\delta_{кр}(t, t_0)}$ — относительный дефицит глубины повреждений, а функции $m(\eta)$ и $d(\eta)$ задаются в виде [30]:

$$m(\eta) = \sum_{i=0}^3 m_i \eta^i; \alpha(\eta) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \eta^i. \quad (25)$$

Нахождение коэффициентов сопряжено с ожидаемыми предельными значениями $\delta^*(\infty, t_0)$ при характерных напряжениях $\delta_{л}$ и $\delta_{т}$, определяющих динамику по $\delta(t)$ относительных объемных деформаций $V(\sigma)/V(0)$ в процессе образования и развития трещин [30].

В [29] на основе экспериментов получена зависимость

$$\delta_0(\eta) = \sum_{i=0}^2 a_i \eta^i \quad (26)$$

между предельной глубиной δ_0 и уровнем η , где коэффициенты a_i выражаются через предельную глубину δ_* при $\sigma = 0$, наименьшую предельную глубину $\delta_{0,\min}$ при $\sigma = \sigma_{л}$ и предельную глубину $\delta_{0,\tau}$ при $\sigma = \sigma_{т}$.

В [1; 32] функция $\delta(t, t_0)$ представляется в виде

$$\delta(t, t_0) = \gamma[t, t_0, \eta(t)] \delta_0(t, t_0), \quad (27)$$

где $\delta(t, t_0)$ описывает динамику продвижения без учета силовых нагружений, а $\gamma[t, t_0, \eta(t)]$ — их влияние на этот процесс. Независимость от времени характерных плотностей $\rho[\sigma_{л}(t)]$ и $\rho[\sigma_{т}(t)]$ бетона влечет инвариантность от времени величин отношения $\delta(t, t_0)/\delta_0(t, t_0)$ при уровнях

$$\eta_{л} = \delta_{л}(t)/R(t) \text{ и } \eta_{т} = \frac{\delta_{т}(t)}{R(t)},$$

что позволяет определять коэффициенты γ_i функции $\gamma(t, t_0, \eta(t)) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \eta(t)^i$ по ее текущим экспериментальным значениям и свойствам $\gamma(0) = 1; \min \gamma(\eta) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \eta_{л}^i; \max \gamma(\eta) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \eta_{т}^i$ решением системы алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \gamma_1 \eta_{л} + \gamma_2 \eta_{л}^2 + \gamma_3 \eta_{л}^3 = \gamma(\eta_{л}) \\ 1 + \gamma_1 \eta_{т} + \gamma_2 \eta_{т}^2 + \gamma_3 \eta_{т}^3 = \gamma(\eta_{т}) \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 \eta_{л} + 3\gamma_3 \eta_{л}^2 = 0 \end{array} \right\}. \quad (28)$$

Замечание 6. Влияние уровня напряжений порождается динамикой появления и развития трещин, что сопряжено с разрывом связей и уменьшением энергии целостности бетонной компоненты конструктивных элементов.

Учет влияния уровня напряжений функцией $\gamma(\eta)$ проще и теснее связан с этой динамикой, нежели ее описание параметрами $\alpha(\eta), m(\eta)$.

Коррозионные повреждения влекут значительное уменьшение энергии целостности бетона. С учетом (19) для слоя на уровне z переходной зоны получим аналогичные (12) и (14) соотношения:

$$R^*(z, t, t_0) = \sqrt{\frac{K(z, t)E(t)}{K(z, t_0)E(t_0)[1 + E(t)C^*(t, t_0)]}} R^*(z, t_0); \quad (29)$$

$$R_{\text{дл}}^*(z) = \frac{R_{\text{кр}}^*(z)}{\sqrt{1 + \varphi}}. \quad (30)$$

Поскольку $W^*(z, t, t_0) = \frac{(1+V)R^2(z, t, t_0)}{E^*(t)} = \frac{(1+V)E^*(t)R^2(z, t_0)}{E^*(t)[1 + E(t)C^*(t, t_0)]E^*(t_0)}$,

а $W^*(z, t_0) = \frac{(1+V)R^2(z, t_0)}{E^*(t_0)}$, то получим равенство

$$W^*(z, t, t_0) = \frac{W^*(t_0, z)}{1 + E(t)C^*(t, t_0)}. \quad (31)$$

4. К вопросу конструктивной безопасности сооружений

Рассмотрим модель сооружения как стержневую систему $(C)_n$, нагруженную пульсационной нагрузкой $P(t)$ (рис. 2) и содержащую n связей C_i , последовательное удаление которых приводит к статически определимой системе C_0 .

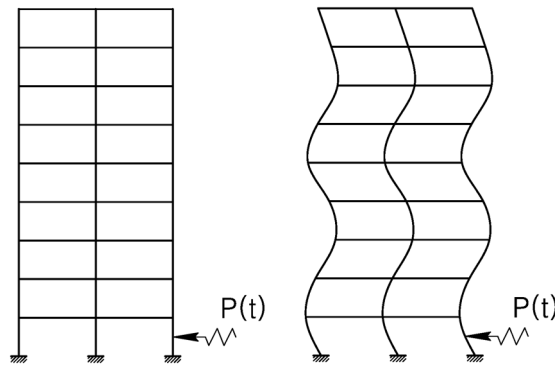


Рис. 2. Стержневая система под действием нагрузки И $P(t)$

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Ларионовым, А.С. Марковичем.

Figure 2. Frame subjected to load $P(t)$

S o u r c e: made by E.A. Larionov, A.S. Markovich.

Под действием пульсационной нагрузки $P(t)$ система совершает вынужденные колебания, уравнения которых в приращениях получено в работе [33] и имеет вид

$$M\ddot{u}(t + \Delta t) + D\dot{u}(t + \Delta t) + (K_0 + K_\sigma)\Delta u = \Delta P + M\ddot{u}(t) + D\dot{u}(t), \quad (32)$$

где $\mathbf{M}$ — матрица масс; $\mathbf{D}$ — матрица демпфирования; $\Delta \mathbf{P}$ и $\Delta \mathbf{u}$ — векторы приращений нагрузки и перемещений при переходе конструкции из состояния в момент времени t в состояние в момент времени $t + \Delta t$.

При учете нелинейности деформирования усилия на каждом шаге должны корректироваться с учетом принятых моделей деформирования материалов, что может привести к нарушению условий равновесия. Возникающая при этом невязка может быть минимизирована с помощью итерационного процесса, который представляется в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{K}\Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t). \quad (33)$$

Вектор невязки $\mathbf{P}_{err,i-1}$ в момент времени $t + \Delta t$ находится как разность между текущим значением нагрузки $\mathbf{P}(t + \Delta t)$ и статическим эквивалентом внутренних сил, т. е.

$$\mathbf{P}_{err,i-1} = \mathbf{P}(t + \Delta t) - [\mathbf{P}_\sigma(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]. \quad (34)$$

Решение уравнения (33) с использованием метода Ньюмарка получено в работе [34].

Задача конструктивной безопасности сооружений должна решаться во временной области с учетом причины импульсного воздействия $\mathbf{P}(t)$ (удар, взрыв и т.д.), вызывающего вынужденные колебания сооружения и возможный отказ того или иного элемента конструкции. Без учета причины такого воздействия рассматриваемая задача лишена физического смысла.

Пусть в некоторый момент

$$\hat{W}_k(t) = W_k(t) - A_k(t) = 0 \quad (35)$$

и элемент C_k разрушается. При этом нагружение, приложенное к нему, догружает остальные элементы и возникает необходимость оценки внутренних усилий в их сечениях. Величина $\hat{W}_k(t)$ представляет энергетический резерв целостности и не зависит от режима разрушения C_k .

При медленном статическом разгрузении элемента C_k до нуля статическое напряжение $\sigma_n^c(t)$ и деформация $\varepsilon_n^c(t)$ целого элемента C_i возрастает до $\sigma_{n-1}^c(t)$ и $\varepsilon_{n-1}^c(t)$, а его внутренние силы согласно диаграмме $\sigma - \varepsilon$ совершают работу:

$$A_i^{sl}(t) = \int_{\varepsilon_n^c(t)}^{\varepsilon_{n-1}^c(t)} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (36)$$

Мгновенное разрушение связи C_k влечет импульсное догружение элементов системы $(C)_{n-1}$ и возрастание напряжения $\sigma_n^c(t)$ до импульсного напряжения $\sigma_{n-1}^u(t)$, порождающего импульсное приращение $\Delta \varepsilon^u$ к деформации ε_n^c . При этом совершается работа $A_i^u = \sigma_{n-1}^u \Delta \varepsilon^u$, влекущая уменьшение $\Delta \hat{W}_i$ резерва целостности $\hat{W}_i$ элемента C_i на величину A_i^u . Согласно диаграмме $\sigma - \varepsilon$:

$$\Delta \hat{W}_i = \int_{\varepsilon_n^c}^{\varepsilon_{n-1}^d} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon; \varepsilon_{n-1}^d = \varepsilon_n^c + \Delta \varepsilon^u \quad (37)$$

равенство

$$\int_{\varepsilon_n^c}^{\varepsilon_{n-1}^d} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \sigma_{n-1}^u \Delta \varepsilon^u \quad (38)$$

позволяет определение приращения $\Delta \varepsilon^u$, деформации ε_{n-1}^d и напряжения $\varepsilon_{n-1}^d = \sigma(\varepsilon_{n-1}^d)$. Величина $\Delta \sigma^d = \sigma_{n-1}^d - \sigma_n^c$ представляет динамическое догружение.

При импульсном догружении ΔM^u аналогично получим равенство

$$\int_{\varepsilon_n^c}^{\varepsilon_{n-1}^d} M(\varepsilon) d\varepsilon = M_{n-1}^u \Delta \varepsilon^u \quad (39)$$

для определения $\Delta \varepsilon^u$, M_{n-1}^d и ΔM^d .

В первом приближении обобщенные диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ и $M(\varepsilon)$ описываются квадратной параболой [11; 14; 22].

При $W_i(t) = A_i^{sl}(t) = \sigma_{n-1}^c(t) [\varepsilon_{n-1}^c(t) - \varepsilon_n^c(t)]$ согласно (35) $\hat{W}_i^c(t) = 0$ и элемент C_i разрушается при медленном разгрузке C_k .

Медленное или мгновенное распределение нагружения $P_{i,n-1}(t)$ на целые элементы $n-2$ кратно статически неопределимой системы $(C)_{n-2}$, порождая уменьшение резерва целостности $\hat{W}_{j,n-1}(t)$ элемента C_j ; $j \neq i, k$ на величину $A_j^{sl}(t) = \sigma_{n-2}^c(t) [\varepsilon_{n-2}^c(t) - \varepsilon_{n-1}^c(t)]$ или $A_j^d(t) = \sigma_{n-2}^d(t) [\varepsilon_{n-2}^d(t) - \varepsilon_{n-1}^c(t)]$ и при $\hat{W}_{j,n-1}(t) = 0$ элемент C_j также разрушится.

Таким образом, разрушение каждого элемента влечет уменьшение резерва целостности всех остальных элементов системы и может привести к исчерпанию (обнулению) резерва целостности еще некоторых элементов. Это обстоятельство порождает вероятность прогрессирующего характера разрушения системы $(C)_n$, инициированного обнулением резерва целостности $\hat{W}_k(t)$. Если $W_i(t) > A_i^d(t)$ для всех $i \neq k$, то все элементы из $(C)_{n-1}$ остаются целыми при мгновенном (и тем более медленном) обнулении $\hat{W}_k(t)$. В этом случае разрушение C_k является локальным. При $W_i(t) > A_i^d(t)$ для всех $i \neq k$ все элементы из $(C)_{n-1}$ также разрушаются и возможно имеет место полное разрушение конструкции.

Если разрушение элемента системы влечет последующее по времени разрушение еще некоторых ее элементов, возникает прогрессирующий процесс исчерпания резерва целостности конструкции.

Такой процесс при последовательных мгновенных разрушениях имеет лавинный характер. Возможные разрушения конструкции определяются энергиями целостности ее элементов и динамической распределения внешних (силовых и моментных) нагружений.

Возникшее вследствие импульсного догружения напряжение $\sigma_{n-1}^u(t)$ порождает импульсное приращение $\Delta \varepsilon_i^u(t)$ к деформации $\varepsilon_n^c(t)$. Сумма $\varepsilon_n^c + \Delta \varepsilon^u$ представляет динамическую деформацию $\varepsilon_{n-1}^d(t)$, которой согласно принятой диаграмме $\sigma_d - \varepsilon$ отвечает динамическое напряжение $\sigma_{n-1}^d(t)$. При динамическом догружении совершается работа $A_i^d(t)$, приводящая к тому же резерву целостности элемента C_i .

Согласно энергетической концепции, этот резерв не зависит от способа его достижения, что влечет равенство работ внутренних сил при импульсном и динамическом режимах.

В качестве количественной характеристики конструктивной безопасности элемента C_i и системы C_i $(C)_n$ вводятся функции [21]:

$$K_i(t) = \frac{\hat{W}_i(t)}{W_i(t)}; \quad (40)$$

$$K(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\hat{W}_i(t)}{W_i(t)}. \quad (41)$$

В (41) α_i — весовой коэффициент элемента C_i ; $\alpha_i = \frac{P_i(t)}{P}$ или $\alpha_i = \frac{M_i(t)}{M}$; P и M — постоянное силовое и моментное нагружения.

5. Результаты

Энергетические подходы в теории железобетона сопряжены с понятием энергии целостности.

1. Оценка безопасности конструкции определяется ее сопоставлением максимальной энергии сопротивления разрушению — энергии целостности, включающей в себя диссипацию вследствие работы внешних сил и коррозионных воздействий.

2. Энергия целостности представляет интегральный параметр состояния, и ее текущее значение отражает наличный ресурс силового сопротивления конструкции, а диссипация отражает уменьшения этого ресурса.

3. Процессу диссипации силового сопротивления сопоставляется динамика уменьшения энергии целостности. При этом остаточному силовому сопротивлению соответствует определяемый внешними силами и коррозионными воздействиями резерв целостности.

4. Для упругих материалов энергия целостности совпадает с накопленной при деформировании максимальной потенциальной энергией — энергетическим барьером, преодоление которого инициирует разрушение. Энергия целостности представляет энергетический барьер для упругопластичных тел, превышение которого над энергетическим барьером упругих тел влечет замедление процесса разрушения за счет пластических деформаций.

6. Заключение

В статье обсуждены вопросы длительного ресурса силового сопротивления железобетонных элементов для прогнозирования безопасности и живучести строительных конструкций и сооружений. На основе понятия энергии целостности как параметра энергетического состояния материала получены оценки длительной прочности и несущей способности по изгибу бетонных элементов и энергетическая оценка конструктивной безопасности железобетонных стержневых систем. Рассмотрена проблема коррозионного воздействия, влекущая значительную деградацию несущей способности железобетонных конструкций при неубывающем нагружении. Предложенный подход связан с диссипацией энергии целостности при силовых нагружениях и воздействиях окружающей среды.

Список литературы

1. Ларионов Е.А. К вопросу длительной прочности бетона // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2005. № 8. С. 28–33. EDN: PFAILF
2. Ларионов Е.А. Длительное силовое сопротивление и безопасность сооружений : дис. ... д-ра техн. наук. Москва, 2005. EDN: MEIJWK
3. Бондаренко В.М. Элементы диссипативной теории силового сопротивления железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 2. С. 47–57. EDN: RZRQOF
4. Бондаренко В.М., Колчунов В.И., Ключева Н.В. Еще раз о конструктивной безопасности и живучести зданий // Вестник отделения строительных наук РААСН. 2007. № 11. С. 81–86. EDN: VTCEFX

5. Бондаренко В.М., Ларионов Е.А. Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях элементов конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 2. С. 16–22. EDN: NUCYYV
6. Ларионов Е.А., Ларионов А.Е. К теории нелинейной ползучести // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 56–65. EDN: TQATUF
7. Ларионов Е.А., Ларионов А.Е. К теории нелинейной ползучести материалов // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 4. С. 35–39. EDN: ZBKRID
8. Ларионов Е.А., Рынкoвская М.И., Гринько Е.А. Реологические уравнения состояния бетона и релаксация напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 22–34. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34> EDN: WXGEUF
9. Larionov E.A., Nazarenko V.G., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A. Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 534–543. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543> EDN: HZXEBV
10. Васильев П.И. К вопросу выбора феноменологической теории ползучести бетона // Ползучесть строительных материалов и конструкций : Сборник статей. Москва : ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1964. С. 106–114.
11. Гениев Г.А., Колчунов В.И., Ключева Н.В., Никулин А.Н., Пятикрестовский К.П. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях. Москва : АСВ. 2004. 216 с. ISBN 5-93093-290-5
12. Ключева Н.В. Основы теории живучести железобетонных конструктивных систем при запроектных воздействиях. Дис. д.т.н., Москва, 2009. EDN: QEMFAR
13. Ключева Н.В. Расчет живучести коррозионно поврежденных железобетонных рам с односторонними связями // Academia. Архитектура и строительство. 2008. № 1. С. 94–99. EDN: ISIBGD
14. Колчунов В.И., Воробьев Е.Д. К анализу деформирования и разрушения эксплуатируемых балочных конструкций при запроектных воздействиях // Третья Международная научно-практическая конференция. Москва, 2005. С. 331–339.
15. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Proceedings of the Royal Society of London, Philosophical Transactions of the Royal Society. 1920. Vol. 221. P. 163. <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
16. Irwin G.R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24. No. 3. P. 361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
17. Orawan E.O. Some problems in ship construction // Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland. 1945. Vol. 89. P. 165.
18. Бондаренко В.М. Учет энергетической и коррозионной диссипации силового сопротивления при оценке устойчивости строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 2. С. 31–57. EDN: NSIXOD
19. Ларионов Е.А., Римшин В.И., Василькова Н.Т. Энергетический метод оценки устойчивости сжатых железобетонных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 77–81. EDN: OUWXYB
20. Ларионов Е.А. Устойчивость сжатого стержня с учетом диссипации энергии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 4. С. 48–57. EDN: TWQYTT
21. Ларионов Е.А., Бондаренко В.М. К вопросу конструктивной безопасности сооружений // Промышленное и гражданское строительство. 2006. № 1. С. 55–57. EDN: HTCQBJ
22. Бондаренко В.М., Ларионов Е.А. Оценка динамических напряжений и моментов в конструктивных элементах сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2006. № 2. С. 93–97. EDN: JSISSN
23. Алмазов В.О., Као З.К. Динамика прогрессирующего разрушения монолитных многоэтажных каркасов. Москва ; АСВ, 2014. 128 с. ISBN 978-5-93093-940-8
24. Алмазов В.О., Плотников А.И., Росторгуев Б.С. Проблемы сопротивления зданий прогрессирующему разрушению // Вестник МГСУ. 2011. № 2-1. С. 16–20. EDN: OUVYJV
25. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev Y.V. Dynamic effects in the beam on an elastic foundation caused by the sudden transformation of supporting condition // Inc. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14. No. P. 27–47. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-4-27-47> EDN: VPKHLB
26. Савин С.Ю., Федорова Н.В. Сопоставление методов расчета несущие системы на внезапный отказ одного из ее элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022 Т. 18. № 4. С. 329–340. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-329-340> EDN: WHZYBW
27. Housner G.W. Limit design of structures to resist earthquakes // I World Conference on Earthquake Engineering USA. 1956. Vol. V. P. 1–13.
28. Agapov V.P., A.S. Markovich. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable // South Florida Journal of Development. 2021. Vol. 2. No. 4. P. 5034–5048.

29. Селяев В.П., Окишина Л.М. Химическое сопротивление цементных композитов при совместном действии нагрузок и агрессивных сред. Саранск : Мордовский университет, 1997. 150 с. ISBN 5-7103-0631-2
30. Бондаренко В.М. Некоторые фундаментальные вопросы развития теории железобетона // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 2. С. 5–14. EDN: LDFSUR
31. Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. Москва : Стройиздат, 1962. 96 с. URL: <https://djvu.online/file/rHJaThqsWD6NS?ysclid=mq81vha7dg725663057> (Дата обращения: 27.03.2026).
32. Бондаренко В.М., Ларионов Е.А. К вопросу о глубине коррозионных повреждений бетона // Бетон и железобетон. 2005. № 4. С.18–21.
33. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. Москва : АСВ, 2004. 247 с. ISBN 5-93093-303-0
34. Агапов В.П., Маркович А.С., Жаззан М., Пхеаром К. Расчет на вынужденные колебания с учетом нелинейности деформирования: теория и реализация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 1. С. 16–27. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-22-1-16-27> EDN: IDQWOZ

References

1. Larionov EA. On the issue of long-term strength of concrete. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2005;(8):28–33. (In Russ.) EDN: PFAILF
2. Larionov EA. *Long-term mechanical resistance and safety of structures*. Dissertation, Doctor of Technical Sciences, Moscow, 2005. (In Russ.) EDN: MEIJWK
3. Bondarenko VM. The elements of dissipative theory of force resistance of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;2:47–57. (In Russ.) EDN: RZRQOF
4. Bondarenko VM, Kolchunov VI, Klyueva NV. Once again on the structural safety and survivability of buildings. *Bulletin of the Department of Construction Sciences of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences*. 2007;(11):81–86. (In Russ.) EDN: VTCEFX
5. Larionov EA, Bondarenko VM. Strains superposition principle when construction elements have structural damages. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2011;(2):16–22. (In Russ.) EDN: NUCYYV
6. Larionov EA, Larionov AE. Towards the theory of nonlinear creep. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2015;(2):56–65. (In Russ.) EDN: TQATUF
7. Larionov EA, Larionov AE. On the theory of nonlinear creep of materials. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2017;(4):35–39. (In Russ.) EDN: ZBKRID
8. Larionov EA, Rynkovskaya MI, Grinko EA. Rheological equations of concrete state and relaxation of stress. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):22–34. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34> EDN: WXGEUF
9. Larionov EA, Nazarenko VG, Rynkovskaya MI, Grinko EA. Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):534–543. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543> EDN: HZXEBC
10. Vasiliev PI. On the issue of choosing a phenomenological theory of concrete creep. *Creep of Building Materials and Structures: Collection of articles*. Moscow: V.A. Kucherenko Central Research Institute of Building Structures; 1964. p. 106–114. (In Russ.)
11. Geniev GA, Kolchunov VI, Klyueva NV, Nikulin AN, Pyatikrestovsky KP. *Strength and deformability of reinforced concrete structures in beyond-design-basis events*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.) ISBN 5-93093-290-5
12. Klyueva NV. *Fundamentals of the theory of survivability of reinforced concrete structural systems in beyond-design-basis events*. Doctoral thesis, Moscow, 2009. (In Russ.)
13. Klyueva NV. Calculation of survivability of corrosion-damaged reinforced concrete frames with unilateral connections. *Academia. Architecture and Construction*. 2008;(1):94–99. (In Russ.) EDN: ISIBGD
14. Kolchunov VI, Vorobyov ED. On the analysis of deformation and destruction of operated beam structures under out-of-design impacts. *Third International Scientific and Practical Conference*. Moscow, 2005. p. 331–339. (In Russ.)
15. Griffith AA. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Philosophical Transactions of the Royal Society*. 1920;221:163. <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
16. Irwin GR. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957;24(3):361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
17. Orawan EO. Some problems in ship construction. *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland*. 1945;89:165.
18. Bondarenko VM. Accounting of energy and corrosive dissipation of power resistance while estimating stability of building structures. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2011;(2):31–57. (In Russ.) EDN: NSIXOD
19. Larionov EA, Rimshin VI, Vasilkova NT. Energy method of estimation of stability of pressed reinforced concrete elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012;(2):77–81. (In Russ.) EDN: OUWXYB

20. Larionov EA. Taking into account the energy dissipation for compressed rod stability. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015;(4):48–57. (In Russ.) EDN: TWQYTT
21. Larionov EA, Bondarenko VM. On the issue of structural safety of buildings. *Industrial and Civil Engineering*. 2006;(1):55–57. (In Russ.) EDN: HTCQBJ
22. Bondarenko VM, Larionov EA. Estimation of dynamic stresses and moments in structural elements of buildings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2006;(2):93–97. (In Russ.) EDN: JSISSN
23. Almazov VO, Kao ZK. *Dynamics of progressive failure of cast-in-situ multi-storey structures*. Moscow: ACB Publ.; 2014. (In Russ.) ISBN 978-5-93093-940-8
24. Almazov VO, Plotnikov AI, Rostorguev BS. Problems of building's strength to progressive collapse. *Vestnik MGSU*. 2011;2-1:16–20. (In Russ.) EDN: OUVYJV
25. Travush VI, Gordon VA, Kolchunov VI, Leontiev YV. Dynamic effects in the beam on an elastic foundation caused by the sudden transformation of supporting condition. *Inc. Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018;14(4):27–47. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-4-27-47> EDN: VPKHLB
26. Savin SYu, Fedorova NV. Comparison of methods for analysis of structural systems under sudden removal of a member. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):329–340. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-329-340> EDN: WHZYBW
27. Housner GW. Limit design of structures to resist earthquakes. *I World Conference on Earthquake Engineering USA*. 1956;V:1–13.
28. Agapov VP, Markovich AS. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048.
29. Selyaev VP, Okshina LM. *Chemical resistance of cement composites under the combined action of loads and aggressive media*. Saransk: Mordovian University; 1997. (In Russ.) ISBN 5-7103-0631-2
30. Bondarenko VM. Some fundamental issues of the development of the theory of reinforced concrete. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2010;(2):5–14. (In Russ.) EDN: LDFSUR
31. Berg OYa. *The physical foundations of the theory of strength of concrete and reinforced concrete*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1962. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/rHJaThqsWD6NS?ysclid=mq81vha7dg725663057> (accessed: 27.03.2026).
32. Bondarenko VM, Larionov EA. On the issue of the depth of corrosion damage to concrete. *Concrete and Reinforced Concrete*. 2005;(4):18–21. (In Russ.)
33. Agapov VP. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.) ISBN 5-93093-303-0
34. Agapov VP, Markovich AS, Jazzan M, Phearom K. Analysis of forced vibrations taking into account nonlinear deformation: Theory and implementation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1): 16–27. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-22-1-16-27> EDN: IDQWOZ

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4-348-367

EDN: LPXPJK

Research article / Научная статья

Comparative Analysis of Linear and Nonlinear Calculation of the Load-Bearing Capacity of Reinforced Concrete Frames in Multi-Storey Buildings

Anastasia V. Belyak¹, Marina I. Rynkovskaya¹, Gizachew M. Dabi^{1,2},
Leysan R. Nasibullina¹, Bin Lei³, Li Ning³

¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation² Arba Minch University, Arba Minch, Ethiopia³ Nanchang University, Nanchang, China

✉ gizex09@gmail.com

Received: May 3, 2026

Revised: July 18, 2026

Accepted: July 27, 2026

Abstract. Reinforced concrete frame systems are widely used in multi-storey residential and public buildings due to their structural efficiency, durability, fire resistance, and architectural flexibility. However, increasing building height, longer spans, complex planning solutions, and stricter serviceability requirements make structural behavior increasingly sensitive to cracking, stiffness degradation and second-order effects, and a purely linear analysis may no longer adequately describe the real behavior of the system. This study presents a comparative analysis of linear and nonlinear calculations of an RC multi-storey frame. Three parametric models with heights of 36 m, 75 m, and 102 m (12, 25, and 34 storeys) with identical plan dimensions of 18×18 m were analyzed using LIRA-SAPR 2024 (Commercial License), Commercial License using five analysis variants: linear with initial stiffness, linear with code-recommended stiffness reduction, physically nonlinear, geometrically nonlinear and combined (physical + geometric) nonlinear. Structural response was evaluated in terms of internal forces, slab force redistribution, lateral displacements, and serviceability deflections. The results demonstrated that the influence of nonlinear effects increased with building height and structural flexibility. Physical nonlinearity associated with crack-induced stiffness degradation was identified as the dominant source of variation between linear and nonlinear analyses, while geometric nonlinearity became increasingly significant when combined with second-order ($P-\Delta$) effects. Combined nonlinear analysis produced substantial redistribution of internal forces, with support slab moments decreasing by 33–89% and significant changes observed in column forces and lateral displacements. The findings highlight the importance of accounting for both material and geometric nonlinearities in the analysis of medium- and high-rise RC frame-core buildings and provide practical recommendations regarding the selection of appropriate analysis methods for structural design.

Keywords: physical nonlinearity, geometric nonlinearity, second-order effects, stiffness degradation, force redistribution, finite element modeling, serviceability limit state, ultimate limit state, ($P-\Delta$) effects, frame-core system

Anastasia V. Belyak, master student of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0009-0000-7445-2163; e-mail: anastasia.vit.bel.work@gmail.com

Marina I. Rynkovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966, ORCID: 0000-0003-2206-2563; e-mail: marine_step@mail.ru

Gizachew M. Dabi, postgraduate student and assistant of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Lecturer, Department of Civil Engineering, Arba Minch University, Arba Minch, Ethiopia; ORCID: 0000-0001-9669-6177; e-mail: gizex09@gmail.com;

Leysan R. Nasibullina, master student of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0009-0009-6536-006X; e-mail: nas5505@bk.ru

Bin Lei, PhD, Professor, Deputy director of School of Infrastructure Engineering, Nanchang University, 999 Xuefu Avenue, Nanchang, 330031, China; ORCID: 0000-0003-2902-4279; e-mail: blei@ncu.edu.cn

Li Ning, PhD, Distinguished research fellow, School of Infrastructure Engineering, Nanchang University, 999 Xuefu Avenue, Nanchang, 330031, China; ORCID: 0009-0003-0204-9924; e-mail: ningli0908@ncu.edu.cn

© Belyak A.V., Rynkovskaya M.I., Dabi G.M., Nasibullina L.R., Lei B., Ning L., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Authors' contribution. Rynkovskaya M.I., Lei B., Ning L. — supervision; Belyak A.V. and Nasibullina L.R. — numerical modelling, calculations, and analysis of results; Dabi G.M. — writing — original draft, review and editing. All authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Belyak AV, Rynkovskaya MI, Dabi GM, Nasibullina LR, Lei B, Ning L. Comparative analysis of linear and nonlinear calculation of the load-bearing capacity of reinforced concrete frames in multi-storey buildings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):348–367. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-348-367> EDN: LPXPJK

Сравнительный анализ линейного и нелинейного расчета железобетонного каркаса многоэтажного здания

А.В. Беляк¹, М.И. Рынковская¹, Г.М. Даби^{1,2,3}, Л.Р. Насибуллина¹, Б. Лей³, Л. Нин³

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

² Университет Арба Минч, Арба Минч, Эфиопия

³ Наньчанский университет, Наньчан, Китай

✉ gizex09@gmail.com

Поступила в редакцию: 3 мая 2026 г.

Доработана: 18 июля 2026 г.

Принята к публикации: 27 июля 2026 г.

Аннотация. Железобетонные каркасные системы широко применяются в многоэтажных жилых и общественных зданиях благодаря своей конструктивной эффективности, долговечности, огнестойкости и архитектурной гибкости. Однако увеличение высоты зданий, пролетов, усложнение объемно-планировочных решений и повышение требований по эксплуатационной пригодности все в большей степени повышают восприимчивость конструкций к трещинообразованию, снижению жесткости и эффектам второго порядка, вследствие чего линейный расчет не всегда способен достаточно точно описать их реальную работу. Авторами выполнен сравнительный анализ линейных и нелинейных расчетов многоэтажного железобетонного каркаса. Рассмотрены три параметрические модели высотой 36, 75 и 102 м (12, 25 и 34 этажа соответственно) с одинаковыми размерами плана 18×18 м. Расчеты выполнены в программном комплексе LIRA-SAPR 2024 (Commercial License) с использованием пяти расчетных схем: линейный расчет с начальной жесткостью, линейный расчет с нормативным снижением жесткости, физически нелинейный расчет, геометрически нелинейный расчет и комбинированный нелинейный расчет, учитывающий одновременно физическую и геометрическую нелинейность. Оценка работы конструкций выполнялась по внутренним усилиям, перераспределению усилий в плитах перекрытий, горизонтальным перемещениям и прогибам по предельным состояниям второй группы. Результаты показали, что влияние нелинейных эффектов возрастает с увеличением высоты здания и его гибкости. Установлено, что физическая нелинейность, связанная с трещинообразованием и снижением жесткости, является основным источником различий между линейными и нелинейными расчетами, тогда как влияние геометрической нелинейности существенно возрастает при совместном учете эффектов второго порядка (P–Δ). Комбинированный нелинейный расчет приводит к значительному перераспределению внутренних усилий, при котором опорные моменты в плитах перекрытий уменьшаются на 33–89 %, а также наблюдаются существенные изменения усилий в колоннах и горизонтальных перемещений здания. Полученные результаты подтверждают необходимость учета как физической, так и геометрической нелинейности при анализе железобетонных каркасно-стеновых зданий

Беляк Анастасия Витальевна, магистрант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0009-0000-7445-2163; e-mail: anastasia.vit.bel.work@gmail.com

Рынковская Марина Игоревна, кандидат технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966; ORCID: 0000-0003-2206-2563; e-mail: marine_step@mail.ru

Даби Гизачеу Мегерса, аспирант, ассистент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-9669-6177; e-mail: gizex09@gmail.com;

Насибуллина Лейсан Рамилевна, магистрант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0009-0009-6536-006X; e-mail: nas5505@bk.ru

Лей Бин, кандидат технических наук, профессор, заместитель директора школы инженерной инфраструктуры, Наньчанский университет, Китай, 330031, г. Наньчан, Сюэфу-авеню, д. 999; ORCID: 0000-0003-2902-4279; e-mail: blei@ncu.edu.cn

Нин Ли, кандидат технических наук, заслуженный научный сотрудник школы инженерной инфраструктуры, Наньчанский университет, Китай, 330031, г. Наньчан, Сюэфу-авеню, д. 999; ORCID: 0009-0003-0204-9924; e-mail: ningli0908@ncu.edu.cn

средней и большой этажности и позволяют сформулировать практические рекомендации по выбору расчетных подходов при проектировании.

Ключевые слова: физическая нелинейность, геометрическая нелинейность, эффекты второго порядка, снижение жесткости, перераспределение усилий, конечно-элементное моделирование, предельное состояние по пригодности к эксплуатации, предельное состояние по несущей способности, эффекты (P–Δ), каркасно-стенная система

Вклад авторов. Рынкoвская М.И., Лей Б., Нин Л. — научное руководство исследованием; Беляк А.В. и Насибуллина Л.Р. — разработка численных моделей, выполнение расчетов и проведение анализа результатов; Дабн Г.М. — подготовка рукописи статьи и доработка по замечаниям рецензентов. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в опубликованную статью.

Для цитирования: Belyak A.V., Rynkovskaya M.I., Dabi G.M., Nasibullina L.R., Lei B., Ning L. Comparative analysis of linear and nonlinear calculation of the load-bearing capacity of reinforced concrete frames in multi-storey buildings // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2026. Т. 22. № 4. С. 348–367. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-348-367> EDN: LPXPJK

1. Introduction

Reinforced concrete frame systems of multi-storey buildings are widely used in residential and public construction due to their manufacturability, cost-effectiveness, durability, fire resistance, and architectural flexibility [1; 2]. The continuous increase in building height, larger structural spans, more complex architectural layouts, and stricter serviceability requirements have significantly increased the sensitivity of structural systems to nonlinear effects. Under such conditions, the accuracy of structural analysis becomes one of the key factors influencing structural safety, reliability, material consumption, and economic efficiency [3]. Traditional linear structural analysis, based on the assumptions of small displacements, constant stiffness, and proportional stress–strain behavior, remains one of the primary tools in engineering design because of its simplicity, transparency, computational efficiency, and compatibility with standard design procedures. Linear analysis is still widely used for medium rise reinforced concrete buildings with sufficient spatial stiffness and regular structural configurations. However, the actual behavior of reinforced concrete structures is more complex than idealized linear models¹ [4]. Due to cracking, stiffness degradation, creep, shrinkage, plastic deformation, and complex interaction between concrete and reinforcement, reinforced concrete members exhibit pronounced nonlinear behavior even at relatively low stress levels due to the development of microcracks within the cement matrix as loading increases; crack propagation and stiffness degradation significantly influence the stress–strain state, redistribution of internal forces, displacement response, and overall load-bearing capacity of reinforced concrete structures [5; 6].

Karpenko, proposing generalized deformation models for reinforced concrete structures as shown in Figure 2, contributed to the development of nonlinear reinforced concrete theory [7]. Emphasizing the influence of crack formation and stiffness degradation on the stress–strain state and load-bearing capacity of reinforced concrete members, Bondarenko and Kolchunov further investigated the behavior of reinforced concrete structures during different loading stages.² Mentioning that physical nonlinearity is one of the most important characteristics of reinforced concrete structures, numerous studies have investigated constitutive models capable of describing nonlinear stress–strain relationships of concrete and reinforcement. Different analytical models have been proposed, including bilinear, trilinear, curvilinear, damage mechanics, and plasticity-based approaches. Modern nonlinear deformation models allow the simulation of cracking, crushing, stiffness degradation, and post-peak structural behavior with significantly higher accuracy than conventional linear methods [8; 9]. The bilinear and trilinear models are as shown in Figure 1.

¹ Guidelines for nonlinear structural analysis and design of buildings. part IIb — reinforced concrete moment frames. Gaithersburg MD: 2017

² Bondarenko VM, *Reinforced concrete and masonry structures*. Moscow: ASV Publ.; 2011. (In Russ.)

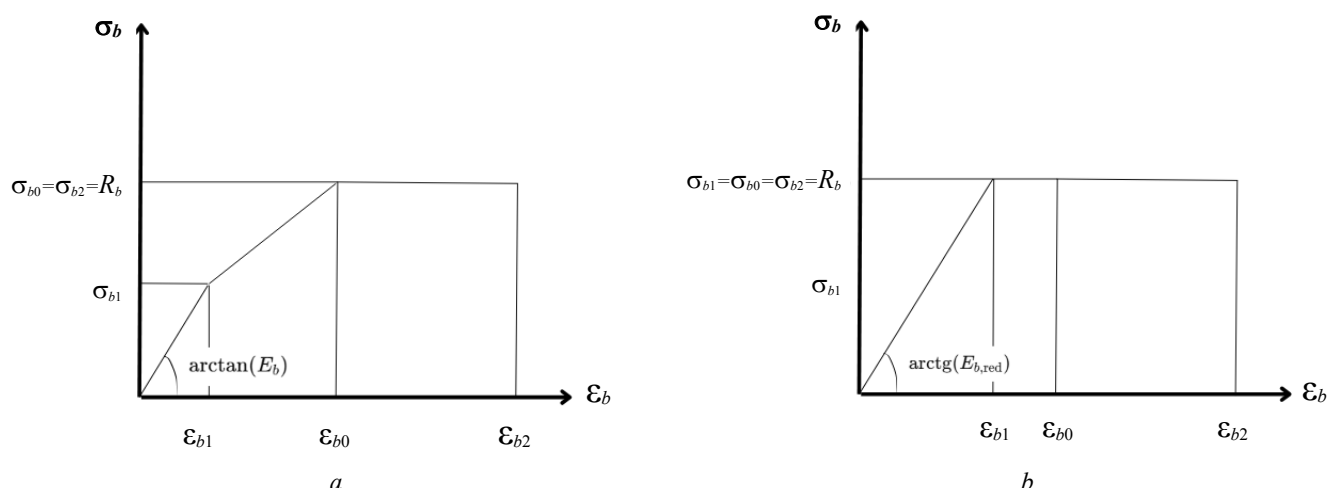


Figure 1. Strain diagrams of compressed concrete:

a — trilinear; *b* — bilinear

Source: made by A.V. Belyak.

The nonlinear deformation model shown in Figure 2, originally proposed by N.I. Karpenko and adopted in SP 63.13330.2018,³ is widely used for describing the nonlinear behavior of concrete and reinforced concrete structures because it realistically captures stiffness degradation and material response over a broad range of loading conditions.

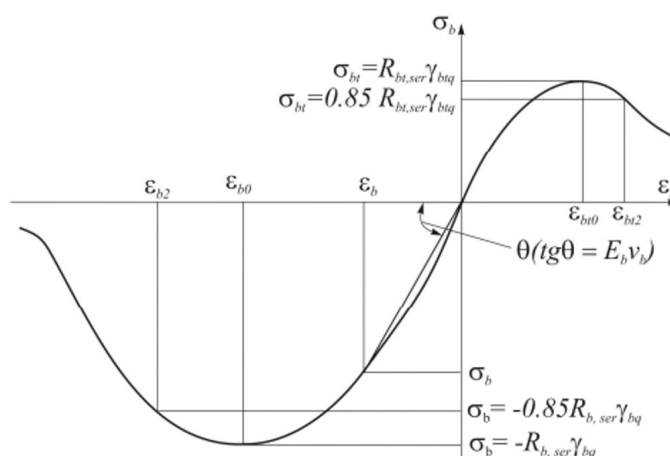


Figure 2. Nonlinear stress–strain diagram of concrete in compression and tension according to the deformation model proposed by N.I. Karpenko and adopted in SP 63.13330.2018

Source: made by A.V. Belyak.

On the other hand, in structures characterized by high slenderness ratios, reduced lateral stiffness, irregular structural layouts, significant wind or seismic loading and large height-to-width ratios, geometric nonlinearity plays an increasingly important role in high-rise and flexible reinforced concrete structures. The horizontal displacements caused by wind or seismic actions generate additional bending moments due to vertical gravity loads which are commonly referred to as second-order effects ($P-\Delta$) and ($P-\delta$) effects, illustrated in Figure 3, may substantially influence the stability and load-bearing capacity of multi-storey frame systems. Studies show that neglecting geometric nonlinearity may lead to underestimation of internal forces, inter-story drifts, and structural instability risks [10].

³ SP 63.13330.2018. Concrete and reinforced concrete structures. Moscow; 2019. (In Russ.)

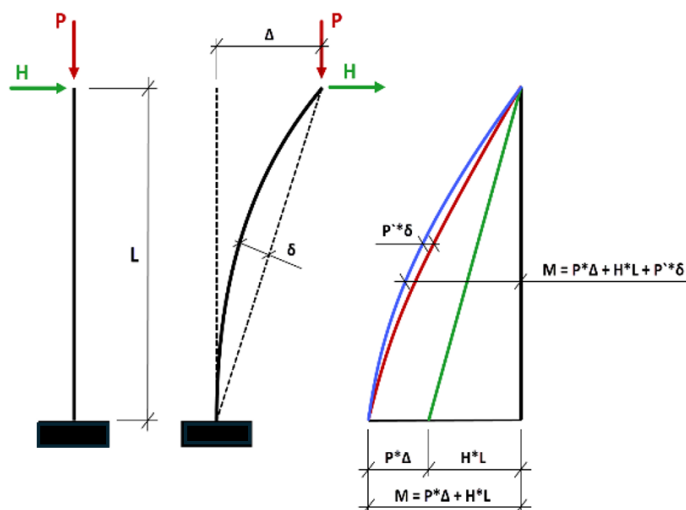


Figure 3. Illustration of the occurrence of second-order P–Δ and P–δ effects

Source: made by A.V. Belyak.

Different commercially available software are widely used to model nonlinear material behavior, crack development, stiffness degradation, plastic deformation, geometric instability, and progressive collapse mechanisms. Within a unified computational framework, studies increasingly focus on integrated nonlinear modeling approaches combining physical and geometric nonlinearities [11; 12].

Investigating nonlinear analysis of reinforced concrete buildings with different slab systems, Abd-Elhamed et al. concluded that nonlinear behavior may occur even under moderate loading conditions and becomes increasingly significant with increasing building height, resulting in greater displacement demands and changes in structural response [13]. Zavala et al. investigated the influence of stiffness irregularity and second-order (P–Δ) effects on reinforced concrete buildings and reported increases of up to 16.5, 11.0, and 14.0% in drifts, shear forces, and bending moments, respectively, together with stiffness degradation reaching 59.9% [14]. Their findings highlighted the importance of considering both stiffness degradation and geometric nonlinearity in structural analysis. The nonlinear dynamic and seismic analysis of reinforced concrete structures that consider only the linear spectral methods may fail to accurately capture plastic deformation, damage accumulation, hysteretic energy dissipation, and progressive collapse behavior during earthquakes. Therefore, nonlinear analysis emphasizing fracture energy regularization, damage mechanics, nonlinear stability analysis, probabilistic structural reliability, progressive collapse assessment and computational optimization has become an essential tool for performance-based seismic design and structural safety assessment [15–22].

Recent studies have emphasized that nonlinear analysis is essential for realistically capturing the behavior of reinforced concrete structures, including cracking, stiffness degradation, force redistribution, plastic deformation, and second-order effects. Consequently, nonlinear analysis has become an increasingly important tool for evaluating the safety, serviceability, and load-bearing performance of reinforced concrete buildings under various loading conditions [23]. Arruda et al. conducted a comprehensive review of reinforced concrete design guidelines incorporating nonlinear analysis and emphasized the increasing adoption of advanced nonlinear approaches for improving the accuracy of structural assessment and design [24]. Hariri-Ardebili and Sattar reviewed sensitivity analysis methods for reinforced concrete structures and demonstrated the significant influence of material properties, stiffness assumptions, geometric imperfections, and modeling parameters on structural response predictions [25]. These studies confirm the importance of accurately accounting for both material and geometric nonlinearities and emphasize the need for comparative investigations capable of quantifying their influence on structural behavior. The development of nonlinear analysis has also been accompanied by increasing attention to

structural reliability assessment. Holický et al. proposed a probabilistic framework combining nonlinear finite element analysis with the First-Order Reliability Method (FORM) for reinforced concrete structures and demonstrated the importance of accounting for uncertainties associated with material properties, structural modeling, and loading conditions in reliability evaluation [22]. Their work highlighted the potential of advanced nonlinear models not only for structural analysis but also for performance-based reliability assessment.

Despite significant advances in nonlinear structural analysis, the existing research on this area predominantly focuses on individual aspects of reinforced concrete behavior, including material, physical and geometrical nonlinearity, performance under seismic loadings, damage mechanics, or finite element modeling. Numerous studies have considered the factors such as cracking, stiffness degradation, plastic deformation, and second-order effects; however, these investigations are often performed separately and under specific structural conditions. So, a comprehensive comparative assessment of linear and nonlinear approaches for reinforced concrete multi-storey frame systems that considers the simultaneous influence of both physical and geometrical nonlinearities remains limited. Furthermore, although finite element software enables advanced nonlinear simulations, practical engineering design continues relying on linear analysis approaches due to their simplicity and computational efficiency. The comparison in applicability and the extent of the discrepancies that may arise when nonlinear effects are omitted have not been sufficiently quantified for typical reinforced concrete multi-storey frame buildings. Particularly, the combined effects of stiffness degradation, cracking, material nonlinearity, and second-order effects, internal force redistribution, and overall load-bearing performance have not been sufficiently investigated.

Hence, a research gap exists in the integrated comparative assessment of linear and nonlinear analysis methods that simultaneously consider physical and geometrical nonlinearities within a unified framework for reinforced concrete frame systems. Primarily, the present study is to address this gap which is essential for establishing rational criteria for selecting appropriate analysis methods and for improving the reliability and safety of structural design. The aim of the study is to evaluate the comparative investigation of linear and nonlinear approaches for reinforced concrete multi-storey frame systems and to quantify the influence of the combined effects of physical and geometrical nonlinearities on structural response, load-bearing capacity, and deformation behavior. To achieve this aim, the study addresses the following objectives:

- analysis of the theoretical foundations of linear and nonlinear structural analysis methods;
- investigation of the influence of physical nonlinearity, including cracking, stiffness degradation, and nonlinear material behavior;
- evaluation of the effects of geometric nonlinearity, including second order (P– Δ) effects, on structural stability and displacement responses;
- comparison of structural parameters obtained from linear and nonlinear analyses; and
- development of engineering recommendations regarding the applicability of different analysis approaches in practical design.

2. Methods

2.1. Structural Models and Geometric Characteristics

To investigate the influence of physical and geometric nonlinearities on the structural response of reinforced concrete frame systems, three parametric building models with heights of 36, 75, and 102 m, corresponding to 12, 25, and 34 stories, respectively, were developed. All models had identical square plan dimensions of 18×18 m and a constant story height of 3.0 m. The structural system consisted of a cast-in-situ reinforced concrete frame with a central core providing lateral stiffness. Perimeter columns were arranged on a regular 6×6 m grid. For clarity, the principal geometric characteristics of the investigated models are summarized in Table 1, while the overall structural configurations are presented in Figure 4. To ensure comparability of the results, the same material properties, loading conditions, support assumptions,

and finite element modeling approach were adopted for all three models. The primary variable parameter was the building height, which enabled the influence of structural slenderness and second-order effects to be evaluated independently of other factors.

Table 1. Geometric characteristics of the investigated building models

Parameter	Model 1	Model 2	Model 3
Building height, m	36	75	102
Number of stories	12	25	34
Plan dimensions, m×m	18×18	18×18	18×18
Storey height, m	3.0	3.0	3.0
Structural system	RC frame	RC frame	RC frame

Source: made by A.V. Belyak.

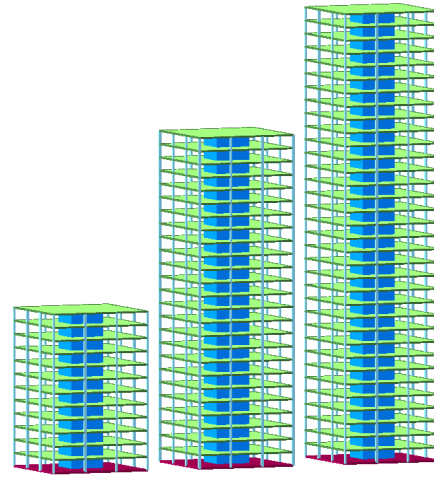


Figure 4. Generalized schemes of 36, 75 and 102 m building models

Source: made by A.V. Belyak.

2.2. Analysis Assumptions and Computational Procedure

In the linear analysis, small displacements, constant stiffness, and linear-elastic material behavior were assumed. The nonlinear analyses additionally considered concrete cracking, stiffness degradation, material nonlinearity, and geometric effects associated with the deformed configuration. The analysis methods were compared using lateral displacements, inter-story drifts, axial forces, bending moments, shear forces, and stability indicators, with particular emphasis on force redistribution and second-order ($P-\Delta$) effects.

All calculations were performed in LIRA-SAPR 2024 (Commercial License). Linear, physically nonlinear, geometrically nonlinear, and combined nonlinear analyses were conducted using the built-in step-by-step iterative procedure with automatic stiffness updating and convergence control. All analyses converged successfully at the prescribed load levels. The principal modeling assumptions adopted in the finite element analyses are summarized in Table 2.

Table 2. Modeling assumptions adopted in the finite element analysis

Item	Assumption
Material behavior (linear analysis)	Linear elastic
Material behavior (nonlinear analysis)	Physical nonlinearity according to LIRA-SAPR deformation laws
Geometric nonlinearity	Included through second-order analysis ($P-\Delta$) effects
Slab modeling	Shell finite elements
Columns and beams	Beam finite elements
Foundation slab	Fixed at the base
Mesh size	0.4×0.4 m
Cracking effects	Accounted for through stiffness reduction and nonlinear deformation laws
Reinforcement modeling	Equivalent reinforcement assigned according to design requirements
Load application	Incremental step-by-step loading
Load combinations	Generated automatically according to applicable design standards

Source: made by A.V. Belyak.

The structural system is a cast-in-situ RC frame with a central core for lateral stiffness; perimeter columns are placed on a 6 m grid. Cross sections are graded over the height of each model as tabulated in Table 3 to reflect realistic stiffness distributions.

Table 3. Geometrical characteristics of building elements

Parameter	Model 1, $H = 36$ m	Model 2, $H = 75$ m	Model 3, $H = 102$ m
Columns, mm	1–12 Stories: 400×400	1–2 Stories: 600×600 3–10 Stories: 500×500 11–25 Stories: 400×400	1–2 Stories: 700×700 3–6 Stories: 600×600 7–15 Stories: 500×500 16–34 Stories: 400×400
Core walls, mm	1–12 Stories: $t = 200$	1–8 Stories: $t = 250$ 9–25 Stories: $t = 200$	1–5 Stories: $t = 300$ 6–20 Stories: $t = 250$ 21–34 Stories: $t = 200$
Edge beams, mm	400×400	400×400	400×400
Floor slabs, mm	200	200	200
Foundation slab, mm	500	500	500

Source: made by A.V. Belyak.

2.3. Material Properties

The base models use concrete class B25 and reinforcement class A500. Design and characteristic properties are given in Table 4.

Table 4. Characteristics of materials

Property	B25 Concrete	A500 Reinforcement
Design resistance, MPa	14.5	435
Characteristic resistance, MPa	18.5	500
Modulus of elasticity, MPa	30 000	200 000
Density, kg/m ³	2500	7850

Source: made by A.V. Belyak.

2.4. Finite Element Modeling

2.4.1. Mesh Generation, Boundary Conditions, and Reinforcement Assignment

The finite element models were developed in LIRA-SAPR 2024 using bar elements for beams and columns and shell elements for slabs and walls. Two families of finite elements were employed in LIRA-SAPR 2024. Columns and beams were modeled using bar finite elements (FE 10, 210, 310, and 410), whereas slabs and core walls were modeled using shell finite elements (FE 41, 44, 230, 341, and 441). A regular mesh with an element size of 0.4×0.4 m was adopted, and the foundation slab was assumed to be fixed as shown in Figure 5. Reinforcement was assigned using the Specified Reinforcement module based on the governing load combinations as shown in Figure 6. The principal numerical modeling parameters are summarized in Table 5.

Table 5. Numerical modeling parameters

Parameter	Value
Software	LIRA-SAPR 2024 (Commercial License)
Structural system	RC frame with central core
Beam/column elements	FE 10, 210, 310, 410
Slab/wall elements	FE 41, 44, 230, 341, 441
Mesh size	0.4×0.4 m
Local refinement	Column–slab connection zones
Boundary condition	Fixed foundation slab
Concrete class	B25
Reinforcement class	A500
Reinforcement assignment	Specified Reinforcement module
Linear stiffness reduction	0.6E (vertical), 0.3E (horizontal)
Nonlinear analyses	Physical, geometric, combined

Source: made by A.V. Belyak.

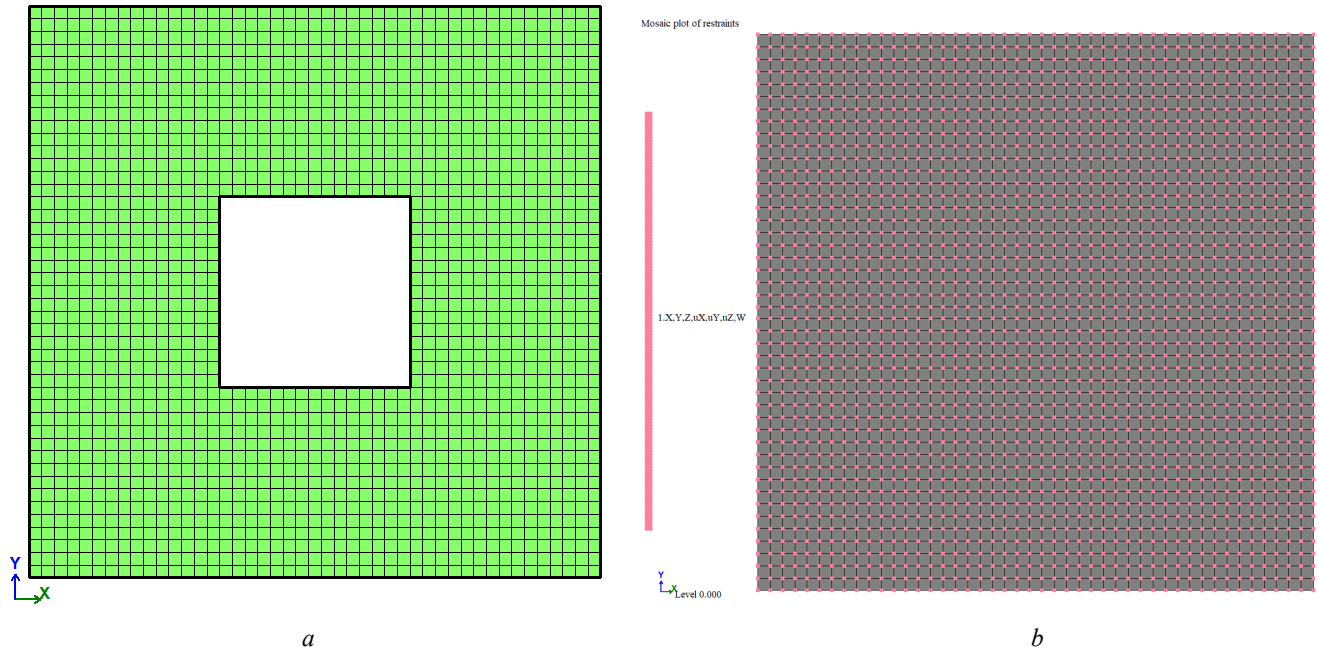


Figure 5. Finite element discretization and boundary conditions adopted in the numerical models:
 (a) typical slab mesh with an element size of 0.4×0.4 m; (b) implementation of fixed support conditions at the foundation slab
 Source: made by A.V. Belyak.

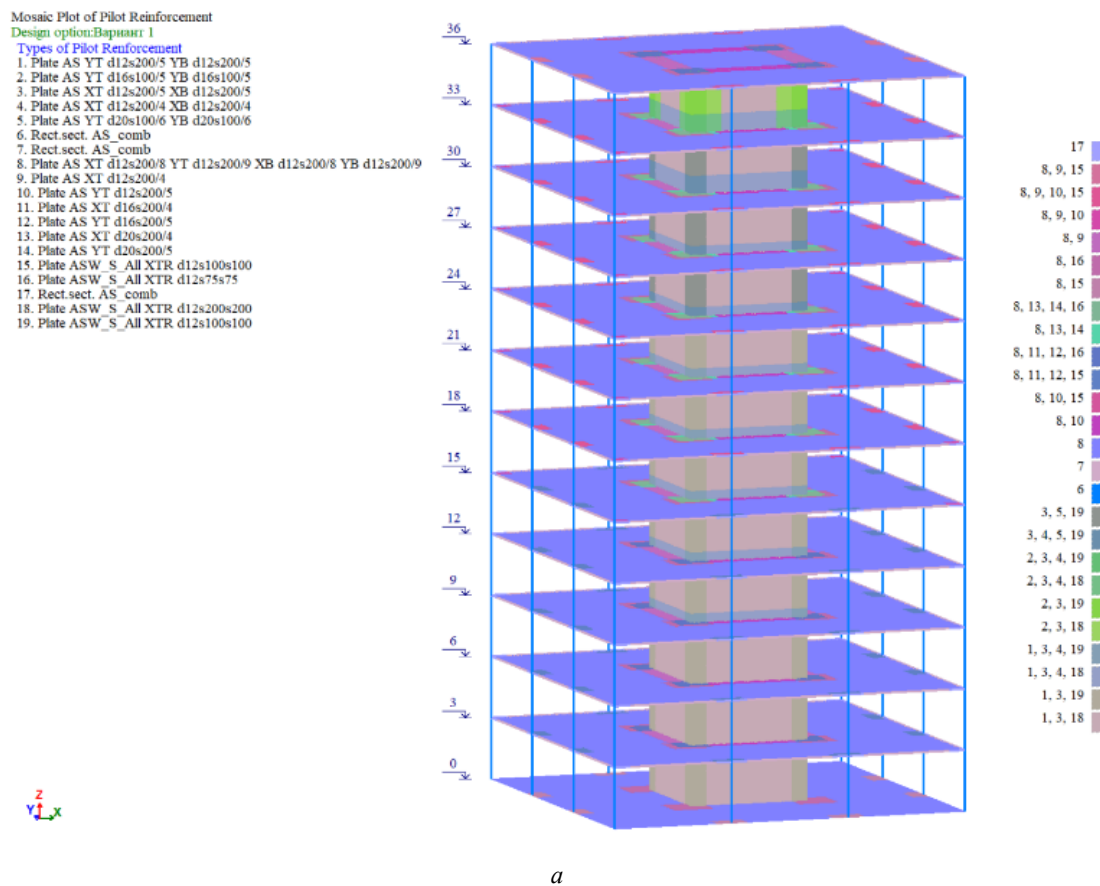


Figure 6. Reinforcement layouts of the investigated building models:
 (a) Model 1 (36m)

Source: made by A.V. Belyak.

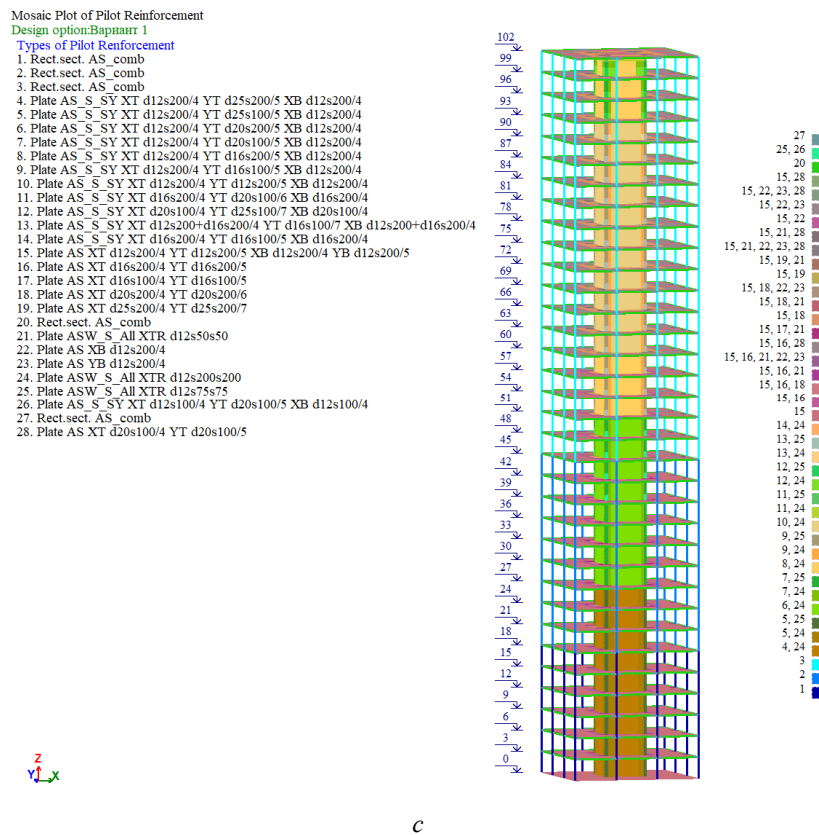
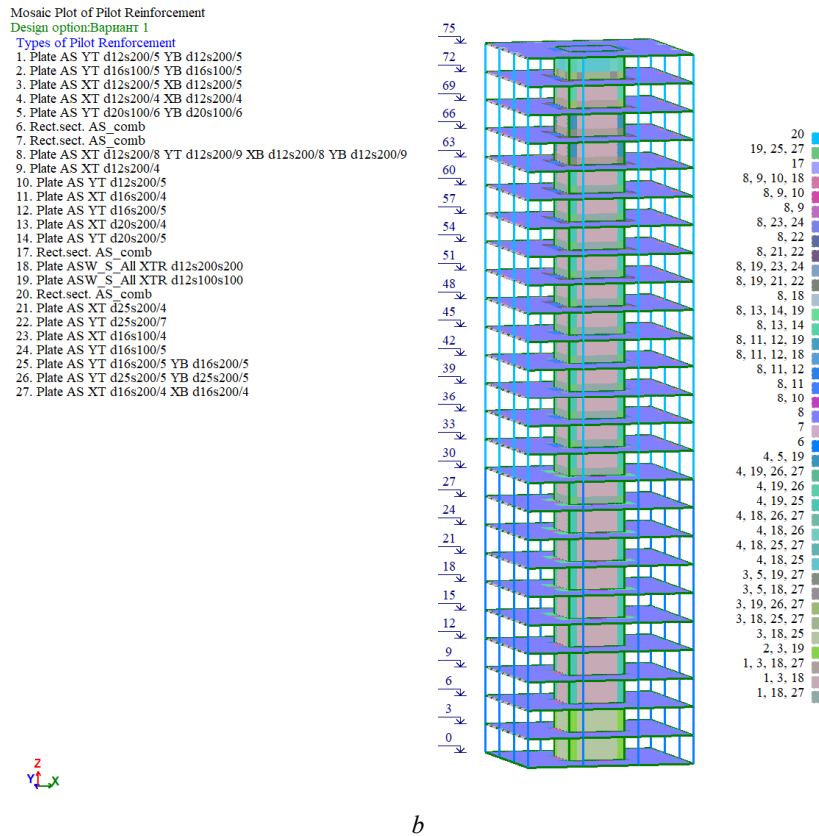


Figure 6 (Ending). Reinforcement layouts of the investigated building models:
(b) Model 2 (75 m), and (c) Model 3 (102 m)

Source: made by A.V. Belyak.

2.4.2. Mesh sensitivity

To assess the influence of mesh discretization on numerical results, a mesh sensitivity study was performed for the representative 75 m building model (Model 2). Four mesh sizes (0.6×0.6 m, 0.5×0.5 m, 0.4×0.4 m, and 0.3×0.3 m) were investigated. The comparison was based on the maximum lateral displacement obtained under the governing wind load combination. The results are summarized in Table 6.

Table 6. Mesh sensitivity study based on maximum lateral displacement of the representative 75 m building model (Model 2)

Mesh Size (m×m)	Linear Analysis (Initial Stiffness), mm	Linear Analysis (Reduced Stiffness), mm	Combined Nonlinear Analysis, mm
0.6×0.6	13.10	30.05	—
0.5×0.5	13.10	30.08	25.43
0.4×0.4	13.10	30.09	27.14
0.3×0.3	13.10	30.07	25.89

Source: made by A.V. Belyak.

As shown in Table 6, the maximum lateral displacement exhibited only minor variations with mesh refinement, indicating convergence of the numerical solution. Since the differences between the 0.5×0.5 m and 0.4×0.4 m meshes were negligible, the 0.4×0.4 m mesh was adopted for all subsequent analyses as a compromise between computational efficiency and numerical accuracy.

2.5. Load Cases and Load Combinations

In this numerical analysis, the structural models were subjected to permanent, variable, climatic, and accidental loading condition in compliance with the Russian design standards. The dead loads include self-weight ($\rho = 2500$ kg/m³), floor and roof finishes (0.3 t/m² floor; 0.45 t/m² roof) and facade load (0.5 t/m). Variable loads include 0.3 t/m² from partitions and 1.95 kPa live load for residential occupancy. Snow load (acting in both principal directions) is computed for Moscow, Russia (snow region III, $S_g = 1.5$ kPa, design value 210 kg/m²) and wind for wind region I ($w_0 = 0.23$ kPa, terrain category *B*), with wind-load diagrams shown in Figures 7 and 8.

7 Wind X+ [1. Main problem; C1. Main problem; D1. Main problem]
Mosaic plot q(lin) along axis X(G)
Units of measurement - t/m

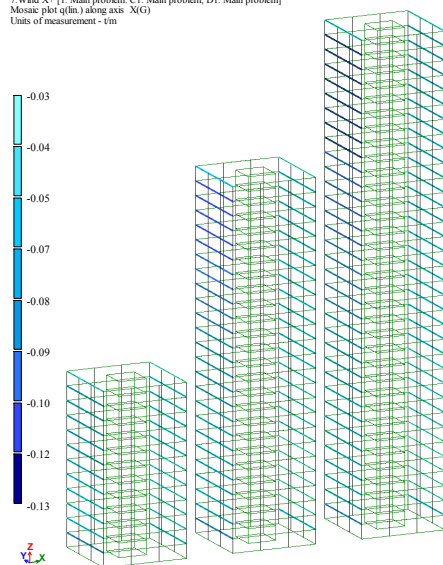


Figure 7. Wind Load Applied Along the X-Axis

Source: made by Belyak A.V.

7 Wind X+ [1. Main problem; C1. Main problem; D1. Main problem]
Mosaic plot q(lin) along axis Y(G)
Units of measurement - t/m

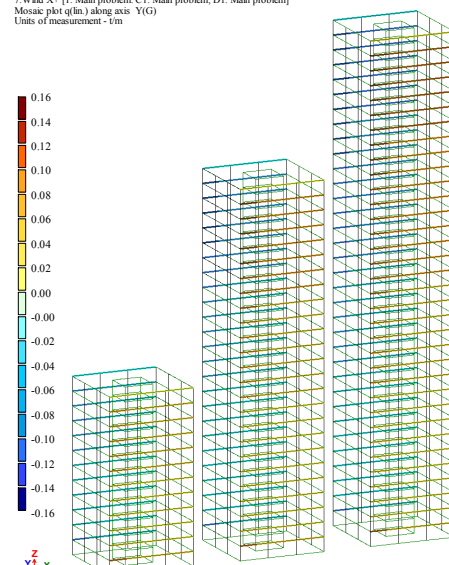


Figure 8. Wind Load Distribution (Zones A and B)

Source: made by Belyak A.V.

Dynamic wind components, and accidental eccentricity effects have been also considered. Two design groups of load combinations were defined in LIRA-SAPR 2024 for the nonlinear analyses:

- **First Limit State (ULS).** The combinations “Design Full” (all permanent and variable loads excluding wind) and “Design WX+” (all actions including wind in the positive X -direction) were used to evaluate internal forces in critical structural members, including axial force (N), bending moments (M_y , M_z), and shear forces (Q_y , Q_z).

- **Second Limit State (SLS).** The combinations “Characteristic Sustained” (long-term combination without wind) and “Characteristic WX+” (serviceability combination including wind) were used to evaluate vertical slab deflections and maximum horizontal displacements of the building, respectively.

The load cases, partial safety factors, and participation coefficients adopted in the ultimate and serviceability limit state combinations are summarized in Table 7.

Table 7. Load cases, partial safety factors, and participation coefficients used in the ULS and SLS load combinations

No.	Load Case	γ_f	ULS-X+	ULS-X-	ULS-Y+	ULS-Y-	SLS-X+	SLS-X-	SLS-Y+	SLS-Y-
1	Self-weight	1.1	1	1	1	1	0.909	0.909	0.909	0.909
2	Floor load	1.2	1	1	1	1	0.833	0.833	0.833	0.833
3	Partition load	1.2	1	1	1	1	0.833	0.833	0.833	0.833
4	Roof load 1	1.2	0.35	0.35	0.35	0.35	0.292	0.292	0.292	0.292
5	Roof load 2	1.3	0.35	0.35	0.35	0.35	0.269	0.269	0.269	0.269
6	Facade load	1.2	1	1	1	1	0.833	0.833	0.833	0.833
7	Snow load	1.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.357	0.357	0.357	0.357
8	Engineering equipment load	1.05	1	1	1	1	0.95	0.95	0.95	0.95
9	Soil load	1.15	1	1	1	1	0.87	0.87	0.87	0.87
10	Wind load (+X)	1.4	1	–	–	–	0.714	–	–	–
11	Wind load (–X)	1.4	–	1	–	–	–	0.714	–	–
12	Wind load (+Y)	1.4	–	–	1	–	–	–	0.714	–
13	Wind load (–Y)	1.4	–	–	–	1	–	–	–	0.714
14	Dynamic wind (+X)	1.4	1	–	–	–	0.714	–	–	–
15	Dynamic wind (–X)	1.4	–	1	–	–	–	0.714	–	–
16	Dynamic wind (+Y)	1.4	–	–	1	–	–	–	0.714	–
17	Dynamic wind (–Y)	1.4	–	–	–	1	–	–	–	0.714
18	Accidental eccentricity (+X)	1.1	1	–	–	–	0.909	–	–	–
19	Accidental eccentricity (–X)	1.1	–	1	–	–	–	0.909	–	–
20	Accidental eccentricity (+Y)	1.1	–	–	1	–	–	–	0.909	–
21	Accidental eccentricity (–Y)	1.1	–	–	–	1	–	–	–	0.909

Source: made by A.V. Belyak.

2.6. Linear and Nonlinear Analysis Procedures

Physical nonlinearity was modeled using the built-in nonlinear constitutive models available in LIRA-SAPR 2024. Concrete behavior was represented by the exponential stress–strain laws “35 — Exponential (Design Strength)” and “25 — Exponential (Characteristic Strength)”, which account for stiffness degradation and nonlinear compressive behavior. The model parameters were generated automatically by the software based on the specified properties of Concrete B25 in accordance with the LIRA-SAPR knowledge base. Reinforcement was modeled using Reinforcement Class A500 with an elastic modulus of 200 GPa and characteristic yield strength of 500 MPa. The nonlinear material models were applied consistently to all investigated building models. Five analysis variants were considered to separately evaluate the influence of stiffness reduction, material nonlinearity, geometric nonlinearity, and their combined effect on the structural response of reinforced concrete frame systems. The investigated calculation approaches are summarized in Table 8.

Table 8. Analysis of variants considered in the study

Analysis Variant	Description
Linear analysis (initial stiffness)	Linear elastic analysis using the uncracked elastic modulus of concrete specified in SP 63.13330.2018. Small displacements, constant stiffness, and the superposition principle were assumed
Linear analysis (reduced stiffness)	Linear elastic analysis considering stiffness reduction due to cracking. The elastic modulus was reduced to 0.6E for vertical members (columns and walls) and 0.3E for horizontal members (beams and slabs) for first limit state (ULS) calculations. For long-term second limit state (SLS) deflection checks, a reduction factor of 0.2E was adopted
Physically nonlinear analysis	Step-by-step nonlinear analysis considering material nonlinearity. Nonlinear finite elements of types 210, 230, 410, and 441 were employed. The analysis incorporated nonlinear deformation diagrams for concrete and reinforcement, allowing for cracking, stiffness degradation, and redistribution of internal forces
Geometrically nonlinear analysis	Step-by-step nonlinear analysis considering geometric nonlinearity and second-order effects. Equilibrium was evaluated in the deformed configuration while maintaining the initial stiffness characteristics. Nonlinear finite elements of types 310 and 341 were used
Combined nonlinear analysis	Step-by-step nonlinear analysis considering both physical and geometric nonlinearities simultaneously. Material nonlinearity, cracking, stiffness degradation, and second-order effects were accounted for within a unified computational framework using nonlinear finite elements of types 410 and 441

Source: made by A.V. Belyak.

The selected analysis variants were adopted to evaluate the influence of various levels of structural nonlinearity on reinforced concrete frame behavior. The linear analysis with initial stiffness served as the reference solution, while the reduced-stiffness analysis represented the simplified treatment of cracking commonly used in design practice. Physical and geometric nonlinear analyses were performed separately to isolate the effects of material nonlinearity and second-order ($P-\Delta$) effects, respectively. The combined nonlinear analysis considered both effects simultaneously and provided the most realistic representation of structural behavior. This approach enabled the individual and combined contributions of stiffness degradation and geometric nonlinearity to be quantified.

2.7. Model Verification and Validation

The adopted numerical modeling strategy was verified through consistency checks of the finite element formulation and validated by comparison with published studies on nonlinear analysis of reinforced concrete buildings. The validation focused on displacement amplification, force redistribution, stiffness degradation, and second-order ($P-\Delta$) effects. The reference studies used for validation are summarized in Table 9. A detailed comparison with the published results is presented in Section 3.6.

Table 9. Reference studies used for model validation

Reference	Validation Aspect
Abd-Elhamed et al. (2023) [13]	Nonlinear response, displacement amplification, building height effects
Zavala et al. (2022) [14]	($P-\Delta$) effects, stiffness degradation, force redistribution

Source: made by G.M. Dabi.

3. Results and Discussion

3.1. First Limit State

a. **Forces in the most loaded column.** The internal forces presented in Tables 10–12 were extracted from the most highly loaded ground-storey central column and top-storey slab under the governing ultimate limit state load combination. The same locations were used for all analysis variants. Axial force (N), bending moment (M_y), and shear force (Q_z) were adopted as the principal response parameters.

Table 10. Model 1 ($H = 36$ m)

Variant	N , t	ΔN , %	M_y , t·m	ΔM_y , %	Q_z , t	ΔQ_z , %
Linear (initial stiffness)	328.17	—	5.86	—	3.02	—
Linear (reduced stiffness)	337.22	+2.7	6.56	+10.7	3.38	+10.7
Physical nonlinearity	310.06	-5.8	6.13	+4.4	3.35	+9.9
Geometric nonlinearity	328.05	0.0	5.87	+0.2	3.01	-0.3
Combined nonlinearity	340.67	+3.7	7.93	+26.1	4.78	+36.8

Source: made by A.V. Belyak.

Table 11. Model 2 ($H = 75$ m)

Variant	N , t	ΔN , %	M_y , t·m	ΔM_y , %	Q_z , t	ΔQ_z , %
Linear (initial stiffness)	643.47	—	6.81	—	4.41	—
Linear (reduced stiffness)	678.25	+5.1	6.89	+14.9	4.59	+3.9
Physical nonlinearity	634.69	-1.4	12.60	+53.5	7.70	+42.7
Geometric nonlinearity	644.29	+0.1	6.39	+8.3	4.35	-1.4
Combined nonlinearity	667.31	+3.6	14.90	+60.7	8.65	+49.0

Source: made by A.V. Belyak.

Table 12. Model 3 ($H = 102$ m)

Variant	N , t	ΔN , %	M_y , t·m	ΔM_y , %	Q_z , t	ΔQ_z , %
Linear (initial stiffness)	883.52	—	10.80	—	5.70	—
Linear (reduced stiffness)	928.27	+4.8	11.65	+7.3	5.86	+2.7
Physical nonlinearity	825.65	-7.0	17.60	+38.6	9.08	+37.2
Geometric nonlinearity	869.09	-1.7	10.79	-0.1	5.56	-2.5
Combined nonlinearity	869.69	-1.6	11.81	+8.6	9.92	+42.5

Source: made by A.V. Belyak.

For the 36 m building model, geometric nonlinearity had a limited effect ($<0.3\%$), whereas the combined nonlinear analysis increased the bending moment and shear force by 26.1 and 36.8%, respectively, demonstrating the influence of stiffness degradation and second-order effects. For the 75 m building model, the influence of geometric nonlinearity became more pronounced. The combined nonlinear analysis increased the bending moment and shear force by 60.7 and 49.0%, respectively, relative to the linear analysis, primarily due to stiffness degradation and (P- Δ) effects. For the 102 m building model, the central core carried a larger share of the lateral load, reducing the axial force by 1.6% while increasing the shear force by 42.5% in the combined nonlinear analysis, indicating redistribution of internal forces between the frame and core wall system as nonlinear effects developed.

b. **Forces in the most loaded slab.** Table 13 summarizes the redistribution of internal forces in the most highly loaded floor slab resulting from nonlinear analysis. Support moments M_x decreased by 21–69%, while support moments M_y decreased by 33–89%. At the same time, span moments M_y increased by 45–56%, indicating redistribution of forces between the two principal slab directions. Significant reductions in Q_x and Q_y were also observed near the columns, confirming the influence of stiffness degradation and cracking on slab behavior.

Table 13. Summary of internal force redistribution in the most highly loaded floor slab under the “Design Full” load combination (combined nonlinear analysis relative to linear initial-stiffness analysis)

Building Model	ΔM_x	ΔM_x	ΔM_y	ΔM_y	ΔQ_x	ΔQ_x	ΔQ_y	ΔQ_y
	Span, %	Support, %	Span, %	Support, %	Span, %	Support, %	Span, %	Support, %
Model 1 ($H = 36$ m)	-21.7	-21.3	56	-33.7	-6.4	-24.6	-96.8	-29.6
Model 2 ($H = 75$ m)	-35.4	-68.8	46.2	-88.8	-76.1	-77.4	-6.1	-136.3
Model 3 ($H = 102$ m)	-16.6	-57.3	45.6	-54.8	-137.0	-55.7	51.5	-67.6

Source: made by A.V. Belyak.

3.2. Second Limit State — Lateral Displacements

Maximum lateral displacements were evaluated at the roof level of each building model under the governing wind load combination (Standard WX+). The displacement values correspond to the node exhibiting the maximum lateral translation in the direction of the applied wind load. The same evaluation criterion was adopted for all linear and nonlinear analyses to enable direct comparison of structural stiffness and second-order effects. The obtained displacement values are summarized in Table 14, while their variation with building height and analysis method is illustrated in Figure 9.

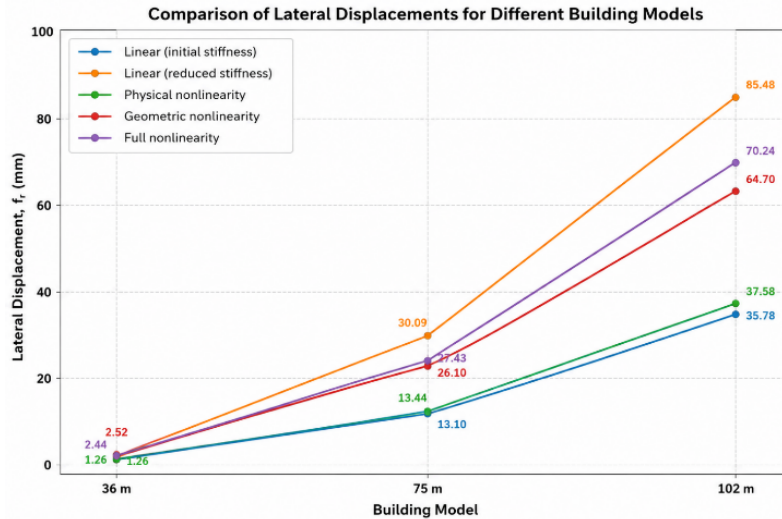


Figure 9. Comparison of horizontal displacements

Source: made by A.V. Belyak.

Table 14. Maximum lateral displacements at the top of the building, mm (load combination: Standard WX+)

Building Model	Linear (Initial Stiffness), mm	Linear (Reduced Stiffness), mm	Physical NL, mm	Geometric NL, mm	Combined NL, mm
Model 1	1.26	2.4	2.52	1.26	2.44
Model 2	13.1	30.09	26.1	13.44	27.43
Model 3	35.78	85.48	64.7	37.58	70.24

Source: made by A.V. Belyak.

Three main observations were identified. First, linear analysis with initial stiffness consistently underestimated lateral displacements because it neglected crack-induced stiffness degradation. Second, geometric nonlinearity alone had a limited influence, but its contribution increased when combined with physical nonlinearity due to second-order (P- Δ) effects. Third, the reduced-stiffness linear approach showed reasonable agreement with the combined nonlinear analysis for the 36 and 75 m models, whereas larger discrepancies were observed for the 102 m model. These observations are limited to the investigated building configurations.

3.3. Second Limit State — Vertical Slab Deflections

Vertical slab deflections were evaluated at the center of the slab panel exhibiting the maximum deformation under the long-term serviceability load combination. The reported values correspond to the maximum downward displacement obtained from the finite element results and were used to assess the influence of physical and geometric nonlinearities on serviceability performance. The obtained deflection values are summarized in Table 15.

Although the observed increases in internal forces and displacements are primarily attributed to stiffness degradation caused by cracking and the development of second-order (P– Δ) effects, other factors may also influence the structural response. These include the adopted support conditions, reinforcement distribution, member stiffness assumptions, and the interaction between the frame and the central core. Variations in these parameters may alter force redistribution patterns and deformation characteristics. Nevertheless, all building models were analyzed using identical modeling assumptions, material properties, boundary conditions, and loading procedures, allowing the influence of physical and geometric nonlinearities to be isolated and compared consistently.

Table 15. Maximum vertical deflections of floor slabs, mm (long-term serviceability load combination)

Building Model	Linear (Initial Stiffness), mm	Linear (Reduced Stiffness), mm	Physical NL, mm	Geometric NL, mm	Combined NL, mm
Model 1	6.58	24.88	18.36	6.54	17.93
Model 2	8.31	30.56	20.8	8.26	20.74
Model 3	11.58	34.33	17.58	9.19	17.36

Source: made by A.V. Belyak.

3.4. Interaction Between Physical and Geometric Nonlinearities

To quantify the interaction between physical and geometric nonlinearities, the interaction index defined by Eq. (1) was evaluated for the principal response parameters. The obtained values are summarized in Table 16.

A commonly used interaction index (I) can be defined as:

$$I = \frac{R_C - R_P - R_G + R_L}{R_L}, \quad (1)$$

where R_L , R_G , R_P , and R_C are the linear analysis, geometrically nonlinear, physically nonlinear, combined nonlinear results respectively.

Table 16. Interaction index between physical and geometric nonlinearities

Model	N	M_y	Q_z	Δ	δ
Model 1 (36 m)	0.094	0.305	0.477	–0.063	–0.059
Model 2 (75 m)	0.049	0.399	0.229	0.076	–0.001
Model 3 (102 m)	0.066	–0.535	0.172	0.105	0.187

Source: made by G.M. Dabi.

The interaction analysis showed that physical and geometric nonlinearities do not act independently and that their influence depends on the response parameter and building height. Axial forces exhibited weak interaction (0.049–0.094), whereas bending moments showed stronger interaction, reaching 0.399 in Model 2. The highest interaction was observed for shear force in Model 1 (0.477). For horizontal displacements, the interaction increased with building height, indicating stronger coupling effects in more slender structures. In Model 3, the negative interaction index for bending moments (–0.535) suggests redistribution of forces within the structural system. Overall, the results demonstrate that combined nonlinear analysis provides a more realistic representation of structural behavior than separate consideration of physical or geometric nonlinearity.

3.5. Sensitivity Analysis of Building Height

To address the robustness of the numerical results obtained based on the variation of the main response parameters obtained from the combined nonlinear analysis, since this approach simultaneously accounts for physical and geometric nonlinearities, an additional sensitivity analysis and COV have been performed with respect to building height. The results for sensitivity analysis are presented Table 17.

Table 17. Sensitivity of response parameters to building height under combined nonlinear analysis

Parameter	$H = 36$ m	$H = 75$ m	$H = 102$ m	Factor (75 / 36 m)	Factor (102 / 75 m)	Factor (102 / 36 m)
N , t	340.67	667.31	869.69	1.96×	1.30×	2.55×
M_y , t×m	7.93	14.9	11.81	1.88×	0.79×	1.49×
Q_z , t	4.78	8.65	9.92	1.81×	1.15×	2.08×
Δ , mm	2.44	27.43	70.24	11.24×	2.56×	28.79×
δ , mm	17.93	20.74	17.36	1.16×	0.84×	0.97×

Source: made by G.M. Dabi.

The result demonstrates that horizontal displacement is the most height-sensitive parameter. The change in Δ from 2.44 for the 36 m model to 70.24 mm for the 102 m model has been observed, corresponding to an increase by a factor of approximately 28.8. This confirms that the influence of nonlinear effects becomes significantly more pronounced with increasing building height and structural flexibility. In contrast, the maximum vertical slab deflection showed limited sensitivity to the overall building height. The δ parameter changed from 17.93 to 17.36 mm for 36 m and 102 models respectively, corresponding to a slight decrease of 3.18% which is an indicator of that vertical slab deflections are governed by local floor stiffness and long-term serviceability effects, whereas horizontal displacements are more strongly influenced by global structural height and lateral flexibility.

The variability analysis summarized in Table 18 reveals that coefficient of variation confirms the high sensitivity of horizontal displacement to building height, with a COV of 102.75%. Axial force, bending moment, and shear force also demonstrate moderate variability, while vertical slab deflection shows low variability with a COV of 9.69%.

Table 18. Variability indicators of response parameters for combined nonlinear analysis

Parameter	Mean	SD	COV, %	Minimum	Maximum
N , t	625.89	266.93	42.65	340.67	869.69
M_y , t×m	11.55	3.49	30.25	7.93	14.90
Q_z , t	7.78	2.68	34.40	4.78	9.92
Δ , mm	33.37	34.29	102.75	2.44	70.24
δ , mm	18.68	1.81	9.69	17.36	20.74

Source: made by G.M. Dabi.

Therefore, the reported trends are not isolated results of a single computational case but reflect systematic changes in structural response associated with increasing building height.

Overall, the sensitivity analysis confirms that the significance of nonlinear effects increases with building height, particularly for lateral displacement and internal force redistribution. This supports the conclusion that nonlinear analysis becomes increasingly important for taller and more flexible reinforced concrete frame systems.

3.6. Discussion in Relation to Previous Research

To evaluate the reliability and practical significance of the obtained results, the present findings were compared with recent studies on nonlinear analysis of reinforced concrete buildings. Particular attention

was given to displacement amplification, force redistribution, stiffness degradation, and the influence of second-order ($P-\Delta$) effects. Table 19 summarizes the comparison between the present study and selected publications.

Table 19. Comparison of present results with previous studies

Reference	Structural System	Reported Findings	Agreement with Present Study
Abd-Elhamed et al. (2023) [13]	5-, 10-, and 15-storey RC buildings	Nonlinear effects increase displacement demands and become more significant with building height	Similar increase in nonlinear effects with increasing building height
Zavala et al. (2022) [14]	RC buildings with stiffness irregularity and ($P-\Delta$) effects	Drift increase up to 16.5%; shear force increase up to 11.0%; bending moment increase up to 14.0%; stiffness degradation up to 59.9%	Similar influence of stiffness de-gradation and ($P-\Delta$) effects on displacement amplification and force redistribution
Present study	12-, 25-, and 34-storey RC frame-core buildings	Horizontal displacement: +93.7–109.4%; M_y : +8.6–60.7%; Q_z : +36.8–49.0%	Consistent with trends reported in recent studies

Source: made by G.M. Dabi.

As shown in Table 19, the present results are consistent with the trends reported in previous investigations. Zavala et al. [14] observed that stiffness degradation and $P-\Delta$ effects lead to increases in drifts, shear forces, and bending moments, while Abd-Elhamed et al. [13] demonstrated that nonlinear effects become increasingly significant with building height. Similar behavior was observed in the present study, where combined physical and geometric nonlinearities increased horizontal displacements by 93.7–109.4%, bending moments by 8.6–60.7%, and shear forces by 36.8–49.0% relative to the linear analysis. Although the magnitude of the response differs among the studies due to differences in structural configuration, modeling assumptions, and building height, all investigations confirm the importance of accounting for stiffness degradation and second-order effects in reinforced concrete structures.

Although the observed differences between linear and nonlinear analyses are primarily attributed to stiffness degradation caused by cracking and the development of second-order ($P-\Delta$) effects, other modeling assumptions may also influence the structural response. These factors include the adopted stiffness-reduction coefficients, reinforcement distribution, boundary conditions, finite element discretization, and the interaction between the frame and the central core. Variations in these parameters may affect force redistribution, displacement demands, and local stress concentrations. Nevertheless, identical modeling assumptions were maintained for all investigated building models and analysis variants, allowing the relative influence of physical and geometric nonlinearities to be evaluated consistently.

4. Conclusion

This study presented a comparative investigation of linear and nonlinear analyses of reinforced concrete frame-core buildings with heights of 36, 75, and 102 m.

1. Nonlinear effects significantly influenced the structural response of the investigated building models, and the difference between linear and nonlinear results increased with building height and structural flexibility.

2. Physical nonlinearity associated with crack-induced stiffness degradation was identified as the dominant source of variation between linear and nonlinear analyses, while geometric nonlinearity became increasingly important when combined with physical nonlinearity through second-order ($P-\Delta$) effects.

3. For the investigated 18×18 m building configurations, the reduced-stiffness linear approach showed reasonable agreement with the combined nonlinear analysis for the 36 and 75 m models, whereas larger discrepancies were observed for the 102 m model, particularly in the prediction of displacements and slab deflections. Further studies are required before generalized height-based applicability limits can be established.

4. Combined nonlinear analysis resulted in significant redistribution of internal forces throughout the structural system. Support slab moments decreased by 33–89%, while transverse forces near columns were substantially reduced, demonstrating the influence of stiffness degradation and stress redistribution on structural behavior.

5. The interaction analysis confirmed that physical and geometric nonlinearities do not act independently. Their combined influence became more pronounced with increasing building height and provided a more realistic representation of structural response than separate consideration of either effect.

6. For the analyzed building models, the engineering nonlinearity method implemented in LIRA-SAPR 2024 (Commercial License) provided a practical compromise between simplified reduced-stiffness approaches and full nonlinear analysis while maintaining computational efficiency.

Overall, the results indicate that linear and nonlinear analyses should be regarded as complementary engineering tools. Linear analysis remains suitable for preliminary design and routine verification, whereas nonlinear analysis is required for reliable assessment of displacement response, force redistribution, and second-order effects in the investigated medium- and high-rise reinforced concrete frame-core buildings.

References / Список литературы

1. Doğan TP, Erkan IH. Evaluation of the Nonlinear Seismic Responses of High-Rise Reinforced Concrete Buildings with Different Foundations and Structural Plans—Considering Soil-Structure Interactions. *Buildings*. 2024;14:1686. <https://doi.org/10.3390/buildings14061686> EDN: XEKOB1
2. Moturu TS, Rani MS. Performance evaluation of functionally graded fiber reinforced concrete under compressive and flexural loading conditions. *Civil Engineering and Architecture*. 2025;13(4):3380–3393. <https://doi.org/10.13189/cea.2025.130438>
3. Tamrazyan AG. *Special considerations in high-rise building design and analysis*. Moscow: ASV Publ.; 2004.
4. Abd-Elhamed A, Mahmoud S, Alotaibi KS. Nonlinear analysis of reinforced concrete buildings with different heights and floor systems. *Sci Rep*. 2023;13:14949. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-41656-7> EDN: EGJPQK
5. Kuzhakhmetova ER. Influence of constructive solutions on the stiffness characteristics of the rammed monolithic reinforced concrete cone-shaped piles with side and bottom forms from crushed stones. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(5):500–518. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-5-500-518> EDN: CMCHSS
- Кужахметова Э.Р. Влияние конструктивных решений на жесткостные характеристики набивной монолитной железобетонной конусообразной сваи со щебневыми образованиями // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 5. С. 500–518. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-5-500-518> EDN: CMCHSS
6. Dabi GM, Rynkovskaya MI, Baza TT, Dereje LS, Nagassa EK, Ali YM. Analytical modelling of fiber reinforced composite coupling beams. *Proceedings of the International Conference ON Engineering Research and Application*. 2022 (ICERA 2022), 6–8 March 2022, Cairo, Egypt, 2023;2936(1):040005. <https://doi.org/10.1063/5.0178523>
7. Karpenko NI, Sokolov BS, Radaykin OV. A determination of strain reinforce concrete flexural elements using stress-strain diagram of concrete and reinforcement. *Construction and Reconstruction*. 2012;2:11–9. EDN: OZMBYX
8. Metwally IM. Three-dimensional nonlinear finite element analysis of concrete deep beam reinforced with GFRP bars. *HBRC Journal*. 2017;13:25–38. <https://doi.org/10.1016/j.hbrj.2015.02.006>
9. Krenn C, Schlicke D. Crack width simulation with discrete reinforcement and 3D nonlinear finite element models. *Engineering Structures*. 2025;332:120122. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120122> EDN: NDREBF
10. Inozemtseva OV, Inozemtsev VK, Murtazina GR. Roll-over stability as a problem of high-rise buildings' designing. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17:228–247. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-3-228-247> EDN: CHSWNA
- Иноземцева О.В., Иноземцев В.К., Муртазина Г.Р. Устойчивость против опрокидывания в практике проектирования высотных зданий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 3. С. 228–247. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-3-228-247> EDN: CHSWNA
11. Evseev NA. Accounting of physical nonlinearity of reinforced concrete structures at computation of structural systems. *Bulletin of Civil Engineers*. 2017;14:66–70. (In Russ.) <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2017-14-5-66-70> EDN: YOAUFH
- Евсеев Н.А. Учет физической нелинейности железобетонных конструкций при численных расчетах конструктивных систем // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 5. С. 66–70. <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2017-14-5-66-70> EDN: YOAUFH
12. James DeLuzio A. *Geometric nonlinearity in structural behavior: evaluating analytical processes*. Springer; 2024. ISBN 103031405072

13. Abd-Elhamed A, Mahmoud S, Alotaibi KS. Nonlinear analysis of reinforced concrete buildings with different heights and floor systems. *Scientific Reports*. 2023;13:14949. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-41656-7> EDN: EGJPQK
14. Zavala DJ, Torres CJ, Moreno JD. Influence of the P-delta effect and stiffness irregularity on the structural behavior of reinforced concrete buildings. *Journal of Physics: Conference Series*. 2022;2287:012047. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2287/1/012047> EDN: XLWIZI
15. Belhocine M, Benyahi K, Bouafia Y, Rahmouni O, Messas A. Nonlinear analysis methods for reinforced concrete structural elements subjected to static and dynamic loads. *Journal of Applied Engineering Sciences*. 2024;14:202–211. <https://doi.org/10.2478/jaes-2024-0025> EDN: FDKWBN
16. Ahmed M, Liang QQ, Sheikh MN, Hadi MNS. Nonlinear inelastic analysis of eccentrically loaded square high-strength concrete short columns incorporating steel equal-angles. *Engineering Structures*. 2023;283:115882. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115882> EDN: FAVSTW
17. Bouckaert I, Godio M, Pacheco de Almeida J. A Hybrid Discrete-Finite Element method for continuous and discontinuous beam-like members including nonlinear geometric and material effects. *Journal of Solids and Structures*. 2024;294:112770. <https://doi.org/10.1016/j.jisistr.2024.112770> EDN: AKCOFF
18. Kolozvari K, Kalbasi K, Orakcal K, Wallace J. Three-dimensional model for nonlinear analysis of slender flanged reinforced concrete walls. *Engineering Structures*. 2021;236:112105. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112105> EDN: CTHSWX
19. Abu-Farsakh GAFR, Obaidat YT, Al-harashsheh H. Nonlinear finite element modeling of reinforced concrete beam-column joints retrofitted using various plates configurations of carbon fiber-reinforced polymers. *Computational Particle Mechanics*. 2024;11:1329–1344. <https://doi.org/10.1007/s40571-023-00690-y>
20. Shamsi M, Zakerinejad M. Numerical experimental and theoretical investigation of reinforced concrete elements with rectangular spiral rebar for multi-behavior analysis. *Scientific Reports*. 2025;15:45015. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-29097-w> EDN: GDGBJE
21. Aminulai HO, Robinson AF, Ferguson NS, Kashani MM. Nonlinear behaviour of corrosion damaged low-strength short reinforced concrete columns under compressive axial cyclic loading. *Engineering Structures*. 2023;289:116245. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116245> EDN: DZGRUM
22. Holicky M, Sykora M, Barnardo-Viljoen C, Mensah KK, Retief JV. Model uncertainties in reliability analysis of reinforced concrete structures. *Proc. SEMC*. 2013:2065-70. <https://doi.org/10.1201/b15963-372>
23. Baza TT, Rynkovskaya MI, Dereje LS, Dabi GM. The effect of joint deformation on the seismic performance of exterior rc beam column joint. *Modern Construction and Architecture*. 2025;1(56). <https://doi.org/10.60797/mca.2025.56.1> EDN: BEPGXR
24. Arruda MRT, Deividas M, Vadimas K. State of the art on structural reinforced concrete design guidelines with non-linear analyses. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024;31:4154–68. <https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2192214>
25. Hariri-Ardebili MA, Sattar S. *Sensitivity analysis of reinforced concrete structures: A Review*. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, NIST TN 2254; 2023. <https://doi.org/10.6028/NIST.TN.2254>

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4-368-382

EDN: LQJMYQ

Research article / Научная статья

Nonlinear Layered Formulation: Modeling Reinforced Concrete Semi-Precast Slabs

Dara A. Mawlood[✉], Alexandr A. Koyankin^{ID}

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia Federation

✉ dara.mawlood@univsul.edu.iq

Received: April 4, 2026

Revised: June 22, 2026

Accepted: July 5, 2026

Abstract. Semi-precast reinforced concrete slab systems enhance construction efficiency by substantially reducing on-site formwork. Construction involves two primary phases: (1) off-site fabrication of semi-precast components and (2) on-site casting of a concrete topping. The interfacial bond strength between the precast base and the cast-in-place overlay is a critical factor governing the composite system's performance. This study presents a comprehensive numerical investigation to evaluate the effect of surface treatment techniques on the flexural behavior of semi-precast RC slabs. A novel six-node triangular layered finite element approach is developed, incorporating material nonlinearity through an enhanced global-local plate formulation. The method employs a cross-sectional discretization strategy, decomposing the slab into distinct material layers where concrete and steel are modeled as discrete plate elements with individual constitutive laws. The computational framework utilizes a decoupled treatment of displacement fields and transverse stresses, facilitating accurate nodal stress evaluation via integrated constitutive models. Spatial discretization is achieved using a C^1 -continuous six-node triangular element, with governing equations derived from a partially mixed variation principle. Validation through benchmark cases demonstrates the method's robustness, with ultimate deflection errors below 4.68% and reaching 0.5% accuracy in optimal scenarios. The proposed triangular layered finite element method achieves superior accuracy and computational efficiency compared to conventional approaches.

Key words: semi-precast slab, strain field, stress field, layered FE discretization, and numerical results

Authors' contribution. The authors have made an equal contribution to the development of the concept, collection of data and their interpretation, and preparation of the article for publication. All authors have read and approved the final version of the manuscript.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Mawlood DA, Koyankin AA. Nonlinear layered formulation: Modeling reinforced concrete semi-precast slabs. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):368–382. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-368-382> EDN: LQJMYQ

Dara A. Mawlood, master student, Department of Building Structures and Controlled Systems, Institute of Civil Engineering, Siberian Federal University, 79 Svobodny av., Krasnoyarsk, 660041, Russia Federation; ORCID: 0009-0003-2819-3107; e-mail: dara.mawlood@univsul.edu.iq

Alexandr A. Koyankin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures and Controlled Systems, Institute of Civil Engineering, Siberian Federal University, 79 Svobodny av., Krasnoyarsk, 660041, Russia Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2779-8314, ORCID: 0000-0001-5271-9904; e-mail: KoyankinAA@mail.ru

© Mawlood D.A., Koyankin A.A., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Нелинейная послойная формулировка: моделирование сборно-монолитных железобетонных плит

Д.А. Мавлуд , А.А. Коянкин 

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

✉ dara.mawloud@univsul.edu.iq

Поступила в редакцию: 4 апреля 2026 г.

Доработана: 22 июня 2026 г.

Принята к публикации: 5 июля 2026 г.

Аннотация. Системы из сборно-монолитных железобетонных плит повышают эффективность строительства за счет существенного сокращения затрат на опалубку на строительной площадке. Строительство включает в себя два основных этапа: (1) изготовление сборных элементов за пределами площадки и (2) заливка верхнего слоя из монолитного бетона на площадке. Прочность связи между сборным основанием и монолитной облицовкой является критическим фактором, определяющим эксплуатационные характеристики композитной системы. В данном исследовании представлено комплексное численное исследование для оценки влияния методов обработки поверхности на изгиб сборных железобетонных плит. Разработан новый метод расчета с шестигрузовым треугольным слоистым конечным элементом, учитывающий нелинейность материала за счет усовершенствованной глобально-локальной формулировки пластины. В этом методе используется стратегия дискретизации поперечного сечения, при которой плита разбивается на отдельные слои материала, где бетон и сталь моделируются как отдельные элементы плиты с собственными определяющими соотношениями. В рамках данной методики расчета используется несвязанный подход к полям смещений и поперечных напряжений, что позволяет точно оценивать узловые напряжения с помощью интегрированных определяющих моделей. Пространственная дискретизация достигается с помощью C^1 -гладкого шестигрузового треугольного элемента с основными уравнениями, полученными на основе частично смешанного вариационного принципа. Проверка с помощью контрольных примеров демонстрирует надежность метода, при этом погрешности предельных отклонений не превышают 4,68 %, а в оптимальных сценариях достигают точности 0,5 %. Предложенный метод многослойных конечных элементов обеспечивает превосходную точность и вычислительную эффективность по сравнению с традиционными подходами.

Ключевые слова: сборно-монолитная плита перекрытия, поле деформаций, поле напряжений, дискретизация на многослойные конечные элементы, численные результаты

Вклад авторов. Авторы внесли равный вклад в разработку концепции, сбор данных и их интерпретацию, подготовку статьи к публикации. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в опубликованную статью.

Для цитирования: Mawlood D.A., Koyankin A.A. Nonlinear layered formulation: Modeling reinforced concrete semi-precast slabs // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 4. С. 368–382. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-368-382> EDN: LQJMYQ

1. Introduction

The use of precast reinforced concrete (RC) systems has greatly enhanced construction productivity by optimizing project timelines and costs [1; 2]. Subsequently, researchers have refined semi-precast slab methods to tackle ongoing industry challenges [3; 4]. Accurate prediction of the structural performance of semi-precast reinforced concrete systems is essential for optimizing cost-efficiency and ensuring safety in design applications [5]. However, the complex composite behavior of these systems, particularly at the interface, poses significant challenges in modeling their nonlinear response, making it an active area of research in structural engineering [6–8]. The finite element (FE) method has established itself as the predominant technique for this nonlinear analysis, demonstrating greater effectiveness than alternative

Мавлуд А. Дара, магистрант кафедры строительных конструкций и управляемых систем, Инженерно-строительный институт, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79; ORCID: 0009-0003-2819-3107; e-mail: dara.mawloud@univsul.edu.iq

Коянкин Александр Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и управляемых систем, Инженерно-строительный институт, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79; eLIBRARY SPIN-код: 2779-8314, ORCID: 0000-0001-5271-9904; e-mail: KoyankinAA@mail.ru

approaches [9–11]. Over the past four decades, advances in FE formulations have produced increasingly sophisticated models capable of capturing the complete nonlinear load-deflection response of reinforced concrete slabs [12–14]. Among these, the layered method was developed to offer a computationally efficient alternative to conventional 3D solid elements, thereby overcoming their inherent limitations [15–17].

This challenge of accurate shear modeling contributes to a broader issue: standardized numerical modeling protocols for semi-precast slabs are still lacking [18–20]. Existing studies and formulations largely concentrate on specialized configurations, such as pre-stressed variants, fiber-reinforced composites, and hybrid structural solutions [21–23].

This research presents a novel six-node, triangular-layered finite element formulation for the materially nonlinear analysis of semi-precast reinforced concrete slabs with cast-in-place concrete overlays. The work complements prior experimental investigations on prototype systems by introducing numerical models to analyze flexural capacity as a function of systematically varied interfacial surface textures, enabling a rigorous evaluation of composite performance [3]. The proposed formulation is based on an innovative global-local plate theory. Semi-precast RC slabs are modeled by discretizing the cross-section into perfectly bonded concrete and steel layers via a superposition approach, with material nonlinearities captured by distinct constitutive models: a smeared crack formulation for concrete and an elasto-plastic framework for steel reinforcement. A key innovation is the unique incorporation of transverse stress components as nodal degrees of freedom within the six-node triangular composite plate element, which significantly enhances computational capability and accuracy.

Within this displacement-based framework, primary solution variables are displacement field parameters, while stress components are derived as secondary quantities through constitutive equations. The model's robustness is validated against benchmark cases, demonstrating superior accuracy and computational efficiency compared to conventional approaches for predicting the nonlinear load-deflection response of semi-precast slab systems.

2. Materials and Methods

The theoretical development of the proposed six-node triangular layered element is based on a plate formulation for combined membrane and bending action. It proceeds according to the following steps.

A more versatile member of the triangular element family is the six-node linear strain triangle (LST) [24–26], depicted in Figure 1.

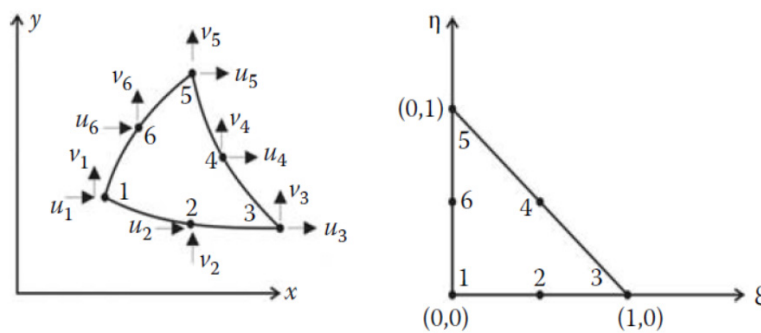


Figure 1. Linear strain triangular element
Source: made by A. Khennan [26].

The displacement field within the element is approximated by:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6,$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 + N_5 v_5 + N_6 v_6 \quad \text{or} \quad [U] = [N][a], \quad (1)$$

$$\text{where } \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) \\ N_5(\xi, \eta) \\ N_6(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda(1-2\lambda) \\ 4\xi\lambda \\ -\xi(1-2\xi) \\ 4\xi\eta \\ -\eta(1-2\eta) \\ 4\eta\lambda \end{bmatrix} \quad \text{with } \lambda = 1 - \xi - \eta.$$

The Jacobian matrix $[J]$ of the geometric transformation is given by:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix};$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1-4\lambda & 4(\lambda-\xi) & -1+4\xi & 4\eta & 0 & -4\eta \\ 1-4\lambda & -4\eta & 0 & 4\xi & -1+4\eta & 4(\lambda-\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

with

$$\lambda = 1 - \xi - \eta. \quad (3)$$

Then, the membrane strain can be determined:

$$[\varepsilon_m] = [B_m][a]; \quad (4)$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

To evaluate the $[B]$ matrix, the partial derivatives with respect to global coordinates (x, y) must be transformed to the local (ξ, η) coordinates using the chain rule:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{then} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

The membrane stiffness matrix for the element is given by using the Gauss quadrature (often called the Hammer formula for triangular domains) [26; 27]:

$$\int_0^+ \int_0^{1-\xi} [B_m(\xi, \eta)]^T [D^i] [B_m(\xi, \eta)] \det[J(\xi, \eta)] d\eta d\xi =$$

$$= t \sum_{i=1}^{nhp} W_i [B_m(\xi_i, \eta_i)]^T [D^i] [B_m(\xi_i, \eta_i)] \det[J(\xi_i, \eta_i)], \quad (7)$$

where nhp represents the number of Hammer points.

$$D^i = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

2.1. Bending Element Formulation

Modern finite element formulations for plates commonly adopt Mindlin — Reissner plate theory. Its primary advantage in FEM context is the use of independent rotational degrees of freedom, θ_x and θ_y , and transverse displacement, $w(x, y)$ [24; 26; 27].

$$w = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) w_i, \theta_x = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) \theta_{xi}, \theta_y = \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) \theta_{yi}. \quad (9)$$

$$\text{With } [B_B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$[B_s] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \dots & \dots & \dots & -\frac{\partial N_6}{\partial y} & 0 & N_6 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -\frac{\partial N_6}{\partial x} & N_6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Therefore, the element stiffness matrix is composed of two distinct contributions: the bending stiffness matrix and the shear stiffness matrix.

$$[K_e]^B = [K_B] + [K_s] = \int_{A_e} [B_B]^T [D^i] [B_B] dA + \int_{A_e} [B_s]^T [D^i] [B_s] dA. \quad (10)$$

2.2. Layer Kinematic Formulation

Reddy's third-order shear deformation theory (TSDT) relaxes the restrictive kinematic assumptions of classical plate theory by explicitly accounting for transverse shear strains and their associated deformation. The displacement field within this framework is expressed as [28]:

$$u^i(x, y, z) = z\psi_x(x, y) - (4z^3)/(3h^2)(\psi_x(x, y) + (\partial w_0^i(x, y))/\partial x); \quad (11)$$

$$v^i(x, y, z) = z\psi_y(x, y) - (4z^3)/(3h^2) \left((\psi_y(x, y) + (\partial w_0^i(x, y))/\partial y) \right);$$

$$w^j(x, y) = w_0^i(x, y),$$

$$\text{where } \psi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \psi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

2.2.1. Strain Field Components

Using the kinematic strain–displacement relations, the strain state in the i -th layer of the reinforced concrete slab is formulated vector form as [19; 28].

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i^{(3)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{pmatrix}, \\ \gamma_i^{(0)} = \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \gamma_i^{(2)} = \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{h^2} \left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ -\frac{4}{h^2} \left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

The strain field can be expressed as follows:

$$\varepsilon_i = z\varepsilon_i^{(1)} + z^3\varepsilon_i^{(3)}; \quad \gamma_i = \gamma_i^{(0)} + z^2\gamma_i^{(2)}. \quad (13)$$

2.2.2. Out-of-Plane Stress Formulation

The element normal stresses are derived from the strains via Hooke's law [24; 29] as follows:

$$\sigma^i = \underline{D}^i \underline{\varepsilon}^i \quad \text{or} \quad \sigma^i = \underline{D}^i \left(z\varepsilon_i^{(1)} + z^3\varepsilon_i^{(3)} \right). \quad (14)$$

Transverse shear stresses, τ_{xz} and τ_{yz} , are calculated independently for each material layer within the reinforced concrete slab. Their expressions are derived as follows:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E_i}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \tau_i = \underline{D}_s^i \underline{\gamma}_i, \quad \tau_i = \underline{D}_s^i \left(\gamma_i^{(0)} + z^2\gamma_i^{(2)} \right), \quad (15)$$

where parameter E_i is the elastic modulus of the i -th layer, and μ is the Poisson's ratio of the reinforced concrete. Within Reddy's Third-Order Shear Deformation Theory, the plate's constitutive law is:

$$\begin{pmatrix} \underline{M}_i^0 \\ \underline{P}_i \\ \underline{Q}_i \\ \underline{R}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D}^i & \underline{F}^i & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{F}^i & \underline{H}^i & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_s^i & \underline{D}_s^i \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{D}_s^i & \underline{F}_s^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_i^{(1)} \\ \underline{\varepsilon}_i^{(3)} \\ \underline{\gamma}_i^{(0)} \\ \underline{\gamma}_i^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Following the standard finite element procedure, the stiffness matrix is assembled as:

$$\underline{F}^i = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} = \int_{z^{i-1}}^{z^i} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} z^4 dz;$$

$$\underline{H}^i = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} = \int_{z^{i-1}}^{z^i} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} z^6 dz;$$

$$\underline{D}^i = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} = \int_{z^{i-1}}^{z^i} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} z^2 dz;$$

$$\underline{D}_s^i = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} = \int_{z^{i-1}}^{z^i} \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} z^2 dz$$

and

$$\underline{F}_s^i = \begin{bmatrix} F_{44} & 0 \\ 0 & F_{55} \end{bmatrix} = \int_{z^{i-1}}^{z^i} \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} z^4 dz;$$

$$\underline{A}_s^i = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} = \int_{z^{i-1}}^{z^i} \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} z^2 dz,$$

where

$$Q_{11} = \frac{E}{(1-\mu^2)}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\mu E}{(1-\mu^2)}, \quad Q_{22} = \frac{E}{(1-\mu^2)}, \quad Q_{66} = G \text{ and } C_{44} = C_{55} = G.$$

3. Methods

The reinforced concrete slab geometry (Figure 2) is defined within a Cartesian coordinate system (x_1, x_2, z) , with the mid-plane at $z = 0$ serving as the reference plane. The slab is idealized as a laminated composite structure comprising perfectly bonded layers of normal concrete (NC) and steel [8]. Computationally, a smeared reinforcement approach is adopted, representing steel rebars as equivalent uniaxial layers positioned at their centroids. The thickness of an equivalent steel layer, t_{ens} , is determined from the rebar cross-sectional area A_s and spacing S as $t_{\text{ens}} = A_s/S$.

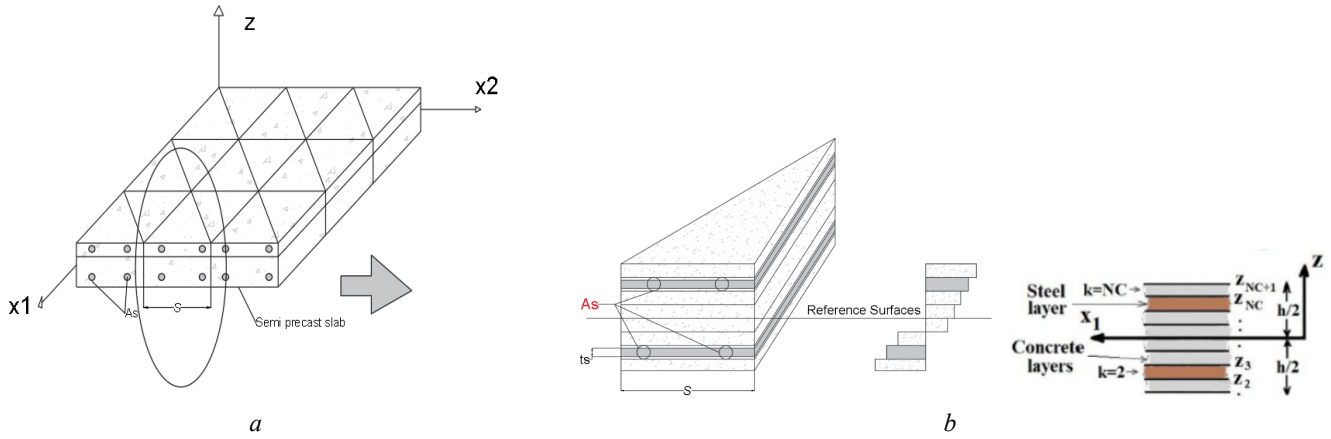


Figure 2. Configuration of the RC slab (a); Idealized laminated composite model (b)

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

3.1. Steel Reinforcement Layer

Steel reinforcement layers are modeled with an idealized elastoplastic constitutive law. For layer i , the elastic stress-strain relationship is given by [28]:

$$\sigma_{\text{steel}}^i = \underline{D}_{\text{steel}}^i \underline{\varepsilon}^i. \quad (17)$$

The sectional properties D_{steel} for steel: $\underline{D}_{\text{steel}}^i = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{D}_{\text{steel}}^i = \begin{bmatrix} E_{sp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$E_s^{(i)}$ represents the elastic modulus of the i -th steel reinforcement layer. The parameter E_{ps} denotes the post-yield plastic modulus of the steel reinforcement layers [8].

3.2. Concrete Layer Properties

In its pre-cracked state, the i -th concrete layer exhibits isotropic, homogeneous, and linear elastic behavior, characterized by the constitutive relation:

$$\sigma_{\text{concrete}}^i = \underline{D}_{\text{concrete}}^i \underline{\varepsilon}_i, \quad \tau_{\text{concrete}}^i = \underline{D}_s^i \underline{\gamma}_i. \quad (18)$$

When the tensile strength f is exceeded in any principal direction, the isotropic constitutive relations (Eqs. 18) become invalid. This study employs the smeared crack approach [29] to characterize post-cracking concrete behavior, necessitating a transformation from isotropic to orthotropic material representation in a local coordinate system ξ, η, ζ . The post-cracking constitutive relationship for layer i in this local coordinate system is expressed as:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \frac{E_i}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tau_{\xi\zeta} \\ \tau_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \frac{E_i}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Note that $\rho \in (0, 1]$ represents the shear retention factor, which is utilized to model the effects of aggregate interlock.

3.3. Mixed Stiffness Matrix

The element stiffness matrix, K_{ei} , can be additively decomposed into its membrane and bending components as follows: $[K_{ei}] = \sum_{i=1}^n [K_{e,i}^m] + [K_{e,i}^B]$, where n : number of layers.

$$[K_{e,i}^m] = \left[\int_{A_e} [B_m]^T [D] [B_m] t dA \right],$$

$$[K_{e,i}^B] = [K_B] + [K_s] = \int_{A_e} [B_B]^T [D_B] [B_B] dA + \int_{A_e} [B_s]^T [D_s] [B_s] dA.$$

Within this formulation, steel reinforcement contributes solely to the membrane stiffness, while concrete contributes to both membrane and bending stiffness components.

$$[K_{e,i}^m] = K_{\text{concrete}}^m + K_{\text{steel}}^m = K_{12,12}^m, \quad \text{then} \quad [K_{e,i}] = [K_{e,i}^m] + [K_{e,i}^B] = \begin{bmatrix} K_{12,12}^{mm} & 0 \\ 0 & K_{18,18}^{BB} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

3.4. Application of Load

The applied load can be calculated using:

$$[K][d] = [P], \quad \text{then} \quad \begin{bmatrix} K_{12,12}^{mm} & 0 \\ 0 & K_{18,18}^{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{mm} \\ d^{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{mm} \\ P^{BB} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

where d^{mm} , d^{BB} are the membrane $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ and bending $(w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, w_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}, w_4, \varphi_{x4}, \varphi_{y4}, w_5, \varphi_{x5}, \varphi_{y5}, w_6, \varphi_{x6}, \varphi_{y6})$ element displacements; P^{mm} , P^{BB} are the membrane and bending element loads.

The nonlinear algebraic system is solved using an incremental-iterative strategy that combines load stepping with the Newton — Raphson method [30; 31].

The algorithm for the standard (non-incremental) Newton — Raphson method is summarized as follows:

1. Find initial displacements; $\bar{d}_0 = [\bar{K}_0(E_0)]^{-1} \Delta P_1$, where $\bar{K}_0$ is found by equation (20).
2. Computing the residual (unbalanced) force vector $\bar{r}_0$: $\bar{r}_0 = [\bar{K}_1(E_1)\bar{d}_0] - \Delta P_1$.
3. A displacement correction, $\Delta \bar{d}_1$, is computed by: $\Delta \bar{d}_1 = [\bar{K}_1(E_1)]^{-1} \bar{r}_0$.
4. The total displacement is updated: $\bar{d}_1 = \bar{d}_0 + \Delta \bar{d}_1$. Thus, the iterative Newton — Raphson step can be expressed in its standard form [12]:

$$\bar{r}_j = \bar{K}_{j+1}(E_{j+1})\bar{d}_j - \bar{P}, \quad \Delta \bar{d}_{j+1} = [\bar{K}_{j+1}(E_{j+1})]^{-1} \bar{r}_j \quad \text{for } j = 1, 2, 3 \dots$$

5. The final, total displacement vector is obtained by: $\bar{d} = \bar{d}_0 + \sum_{j=0}^m \Delta \bar{d}_{j+1}$.

4. Results and Discussion

A MATLAB-based computational tool was developed to implement the proposed six-node triangular layered finite element method for nonlinear analysis. The program's performance was validated by numerically analyzing two semi-precast reinforced concrete slabs with cast-in-place toppings. These test

specimens identical in configuration to those experimentally studied by Mohamed et al. [3] were modeled using the proposed finite element approach, as illustrated in Figure 3.

Two semi-precast slab specimens were modeled using the developed six-node triangular layered FEM. The slabs had a total thickness of 125 mm (75 mm precast slab with 50 mm top slab), are illustrated in Figure 3. Complete material and structural details are provided in Tables 1 and 2.

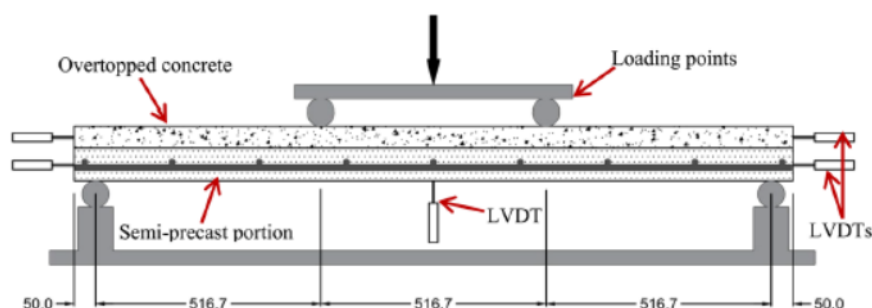


Figure 3. Schematic four-point testing arrangement of the slab

Source: made by Mohamed et al. [3].

Table 1. Description of the specimens and casted concrete strengths.

No.	Thickness, mm	Description	Semiprecast slab		Overtopping	
			Compressive strength, MPa	Splitting strength, MPa	Compressive strength, MPa	Splitting strength, MPa
S2	125	Untreated full thick slab	29.4	4.3	24.9	3.4
S3	125	Wire brushed roughened at the interface slab	30.1	4.1	23.4	3

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

Table 2. Input parameters for the numerical model

Parameters	Values
Young's moduli of concrete	17,000–24,000 MPa
Poisson's ratio of concrete	0.15
Dilation angle	31°
Eccentricity	0.1
Biaxial strength ratio	1.16
K	0.667
Peak compressive strengths of concrete	23.4–33.2 MPa
Peak tensile strengths of concrete	1.3–1.9 MPa
Young's modulus of steel	190,000 MPa
Poisson's ratio of steel	0.3
Yield tensile strength of steel	535 MPa

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

A 12×8 mesh of laminated triangular plate elements discretized the semi-precast slab, with the mesh size determined via a convergence study, illustrated in Figure 4.

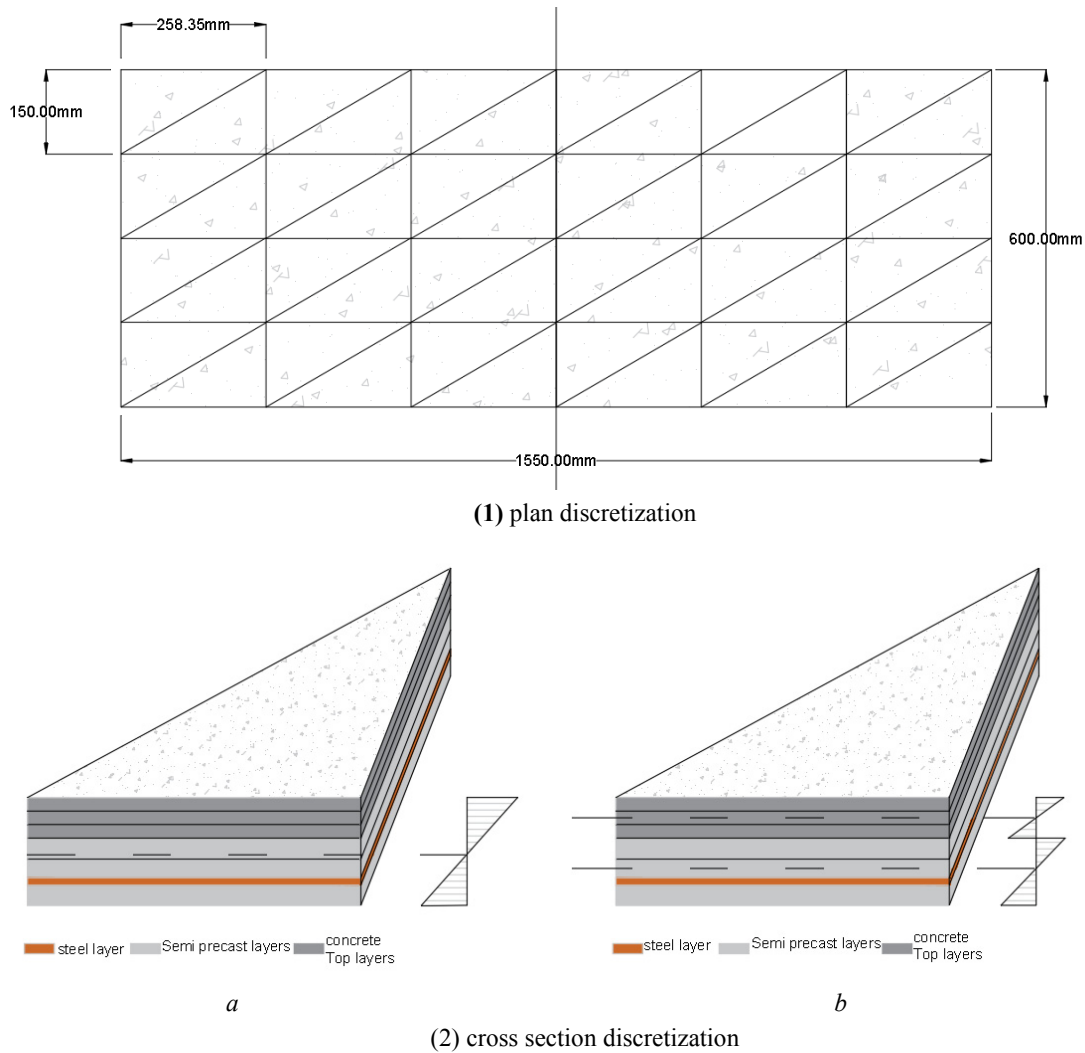


Figure 4. FE mesh of semi precast reinforced concrete slab with concrete topping:

a — neutral axes position before bonding failure; *b* — neutral axes position, after bonding failure

S o u r c e: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

Specimen S2 — a one-way semi-precast RC slab with an untreated, full-depth precast section and a concrete topping — was analyzed using the six-node triangular layered finite element methodology. The evaluation of mid-span deflection established a constant moment region, enabling a detailed assessment of flexural performance. Predictions from the layered FE model were compared against experimental data from Mohamed et al. [3] and results from high-fidelity 3D ABAQUS simulations in a three-way validation.

While the layered approach yielded a conservative estimate of the initial cracking load (Figures 5 and 6), excellent agreement with all reference data was observed beyond the 42 kN load threshold. The model demonstrated high fidelity in deflection prediction, with maximum values deviating by only 4.68% from experimental measurements and 7.40% from the ABAQUS simulations.

The triangular layered FE model demonstrated excellent predictive capability for Specimen S3, which featured a wire-brushed interface, accurately capturing its ultimate load capacity. As shown in Figures 7 and 8, the numerical load-deflection response exhibited remarkable agreement with both the experimental data and the ABAQUS results (Table 3). The maximum deflection prediction deviated by only 0.50% from the experimental measurement and by 12.5% from the ABAQUS simulation.

The deflection behavior and stress distributions resulting from the ABAQUS finite element analysis of the precast reinforced concrete slab are presented in Figures 9 through 14.

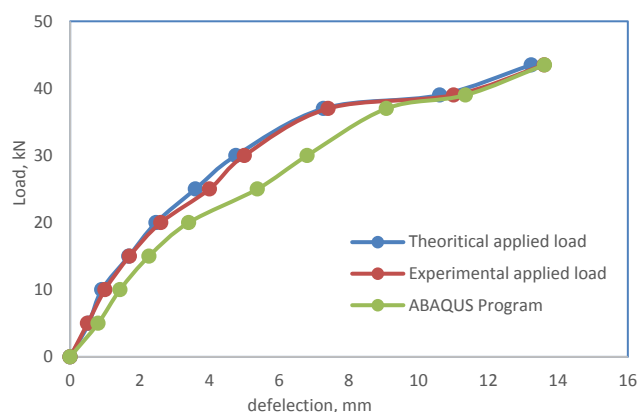


Figure 5. Load-deflection curve for sample (S2)

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

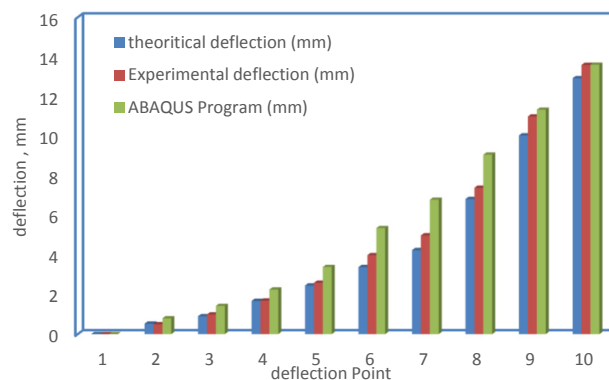


Figure 6. Deflection chart for sample (S2)

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

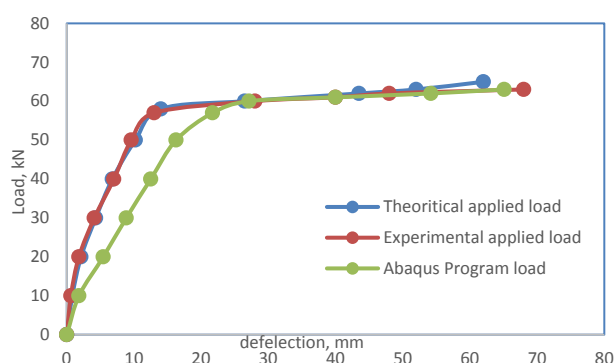


Figure 7. Load-deflection curve for sample (S3)

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

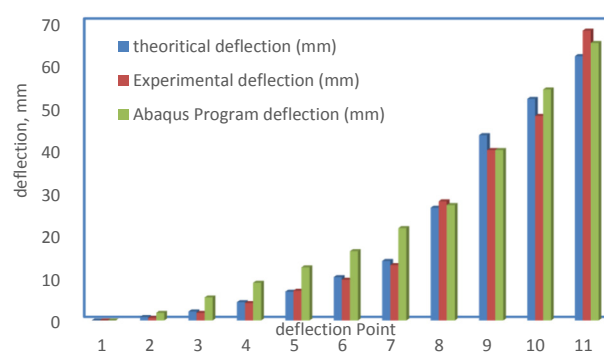


Figure 8. Deflection chart for sample (S3)

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

Table. 3. Experimental and theoretical data

Sample	Exp. Moment = $PL/4$, N. mm	Theo. Moment, N. mm	% diff.	Exp. strain = σ / E , mm/mm	Theo. Strain, mm/mm	% diff.
S2	$17.94 \cdot 10^6$	$17.02 \cdot 10^6$	-5.13	0.00287	0.00270	-5.92
S3	$25.98 \cdot 10^6$	$24.02 \cdot 10^6$	-7.54	0.003158	0.002897	-8.26

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

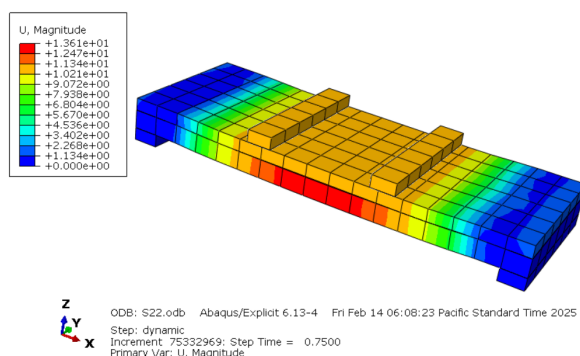


Figure 9. Plot of deflection for sample (S2)

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

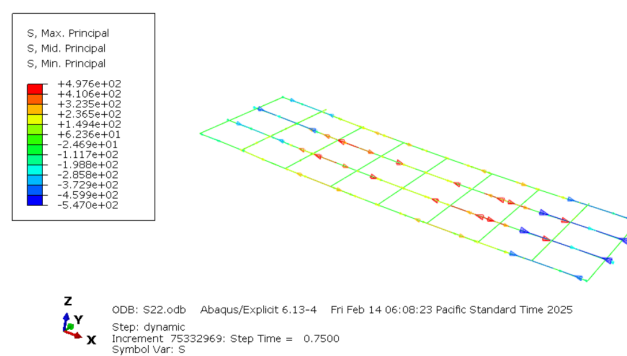


Figure 10. Plot of steel stress for sample (S2)

Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

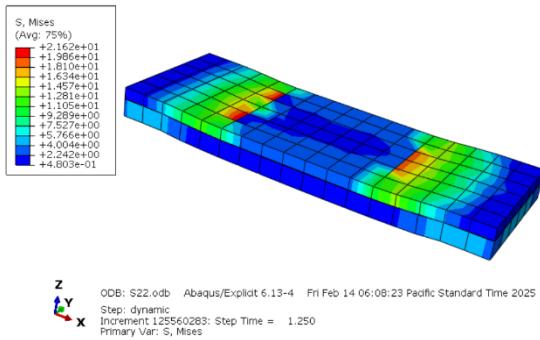


Figure 11. Plot of stress for sample (S2)
Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

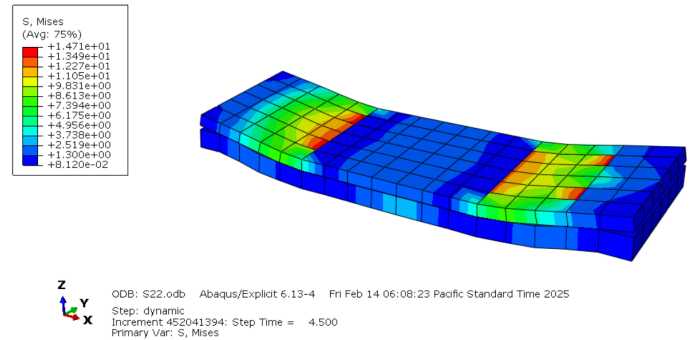


Figure 12. Plot of stress for sample (S3)
Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

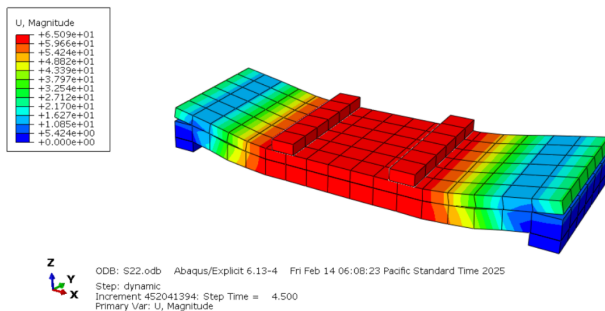


Figure 13. Plot of deflection for sample (S3)
Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

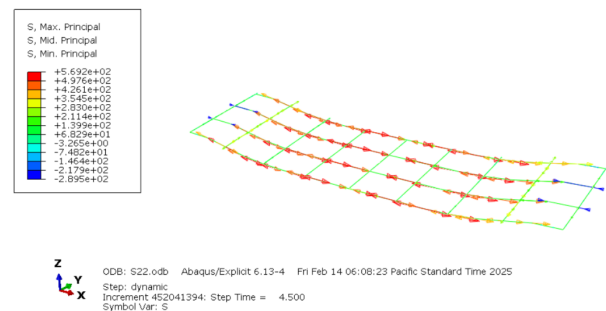


Figure 14. Plot of steel stress for sample (S3).
Source: made by D.A. Mawlood, A.A. Koyankin.

5. Conclusion

1. This study presents a six-node, triangular layered plate finite element model for the nonlinear analysis of semi-precast reinforced concrete slabs.
2. The proposed formulation employs a layer-wise discretization to accurately capture complex through-thickness material behavior.
3. The slab is discretized into multiple concrete layers, with steel reinforcement modeled as equivalent smeared layers positioned at the rebar centroids under a perfect bond assumption.
4. The method directly computes out-of-plane stress components without requiring through-thickness integration and inherently satisfies transverse shear deformation requirements, thereby eliminating the need for shear correction factors. The formulation is derived from a partial mixed variational principle, incorporating both stress and displacement fields within a six-node triangular element.
5. Numerical results demonstrate that the model successfully predicts the ultimate load capacity and failure deflections of semi-precast slabs.
6. Benchmark tests confirm the method's accuracy and computational efficiency, with maximum deflection prediction errors ranging from 0.5 to 4.68% compared to experimental and high-fidelity reference data. The model achieves an excellent balance between accuracy and computational cost.
7. Future research will extend this approach to the materially and geometrically nonlinear analysis of reinforced concrete shell structures within the presented layered framework.

References

1. Tam VWY, Fung IWH, Sing MCP. et al. Best practice of prefabrication implementation in the Hong Kong public and private sectors. *Journal of Cleaner Production*. 2015;109:216–231. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2014.09.045>

2. Akmam Syed Zakaria S, Gajendran T, Rose T, et al. Contextual, structural and behavioural factors influencing the adoption of industrialised building systems: a review. *Architectural Engineering and Design Management*. 2018;141(2):3–26. <https://doi.org/10.1080/17452007.2017.1291410>
3. Mohamed MS, Thamboo JA, Jeyakaran T. Experimental and numerical assessment of the flexural behaviour of semi-precast-reinforced concrete slabs. *Advances in Structural Engineering*. 2020;23:1865–1879. <https://doi.org/10.1177/1369433220904011> EDN: GDQHBHJ
4. Saiah B, Bachene M, Guemana M, Chiker Y, et al. On the free vibration behavior of nanocomposite laminated plates contained piece-wise functionally graded graphene-reinforced composite plies. *Engineering Structures*. 2022;253:113784. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113784> EDN: IKFKRC
5. Ashteyat AM, Al Rjoub YS, Obaidat AT, et al. Strengthening and repair of one-way and two-way self-compacted concrete slabs using near-surface-mounted carbon-fiber-reinforced polymers. *Advances in Structural Engineering*. 2019;22(11):2435–2448. <https://doi.org/10.1177/1369433219843649>
6. Mahmood D, Rafiq S, Adbullah M. Nonlinear 3D finite element model for square composite columns under various parameters. *Iraqi Journal of Civil Engineering*. 2022;16(1):19–28. <https://doi.org/10.37650/ijce.2022.172882> EDN: NRXGDK
7. Mawlood D, Rafiq S. Nonlinear 3D finite element model for round composite columns under various eccentricity loads. *Engineering and Technology Journal*. 2022;40(11):1605–1614. <https://doi.org/10.30684/etj.2022.133106.1168> EDN: QTWLPP
8. Wang R, Fang Z, Lezgy-Nazargah M, et al. Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs using a quasi-3D mixed finite element formulation. *Engineering Structures*. 2023;294:116781. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116781> EDN: HKKQXZ
9. Thamboo JA, Dhanasekar M. Characterisation of thin layer polymer cement mortared concrete masonry bond. *Construction and Building Materials*. 2015;82:71–80. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.12.098>
10. Le CV, Ho VQ, Ho PLH, et al. Limit state analysis of thin plates and slabs by a numerical pseudo-lower yield design approach. *Thin-Walled Structures*. 2022;172:108852. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108852> EDN: JTJDHE
11. Van Vinh P, Avcar M, Belarbi M-O, Tounsi A, Quang Huy L. A new higher-order mixed four-node quadrilateral finite element for static bending analysis of functionally graded plates. *Structures*. 2023;47:1595–1612. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.11.113> EDN: GLXCXE
12. Cinefra M, Kumar SK, Carrera E. MITC9 Shell elements based on RMVT and CUF for the analysis of laminated composite plates and shells. *Composite Structures*. 2019;209:383–90. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.039> EDN: WUDZCK
13. Amirkhani S, Lezgy Nazargah M. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete columns: Evaluation of different modeling approaches for considering stirrup confinement effects. *Structural Concrete*. 2022;23:2820–2836. <https://doi.org/10.1002/suco.202100532> EDN: BXJDTD
14. Yeganeh-Salman A, Lezgy-Nazargah M. Evaluating the accuracy of mass scaling method in non-linear quasi-static finite element analysis of RC structures. *Structural Engineering and Mechanics*. 2023;85:485–500. <https://doi.org/10.12989/SEM.2023.85.4.485>
15. Carrera E, Ciuffreda A. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Composite Structures*. 2005;69(3):271–293. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.07.003> EDN: XYMUZZ
16. Liguori FS, Corrado A, Bilotta A, Madeo A. A layer-wise plasticity-based approach for the analysis of reinforced concrete shell structures using a mixed finite element. *Engineering Structures*. 2023;285:116045. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116045> EDN: XEVDXS
17. Milligan GJ, Polak MA, Zurell C. Finite element analysis of punching shear behaviour of concrete slabs supported on rectangular columns. *Engineering Structures*. 2020;224:111189. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111189> EDN: RVLDC
18. Abeyasinghe CM, Thambiratnam DP, Perera NJ. Flexural performance of an innovative hybrid composite floor plate system comprising glass–fibre reinforced cement, polyurethane and steel laminate. *Composite Structures*. 2013;95:179–190. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.06.019>
19. Adawi A, Youssef MA, Meshaly ME. Finite element modeling of the composite action between hollowcore slabs and the topping concrete. *Engineering Structures*. 2016;124:302–315. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.06.016>
20. Benayoune A, Samad AAA, Trikha DN, et al. Flexural behaviour of pre-cast concrete sandwich composite panel — Experimental and theoretical investigations. *Construction and Building Materials*. 2008, Vol. 22(4):580–592. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2006.11.023>
21. Elsanadedy HM, Almusallam TH, Alsayed SH, et al. Experimental and FE study on RC one-way slabs upgraded with FRP composites. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2015;19(4):1024–1040. <https://doi.org/10.1007/s12205-013-0689-y> EDN: GKSFJQ
22. Liu F, Battini J-M, Pacoste C. Finite-shell-element models for the dynamic analysis of hollow-core concrete floor. *Magazine of Concrete Research*. 2019;71(10):519–532. <https://doi.org/10.1680/jmacr.17.00480>

23. Yu Y, Wei B, Yang Y, et al. Experimental study on flexural performance of steel-reinforced concrete slim floor beams. *Advances in Structural Engineering*. 2019;22(11):2406–2417. <https://doi.org/10.1177/1369433219841917>
24. Werkle H. *Finite elements in structural analysis: Theoretical concepts and modeling procedures in statics and dynamics of structures*. Cham: Springer International Publ.; 2021. p. 191–295. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-49840-5>
25. Oñate E. *Structural analysis with the finite element method: linear statics*. Dordrecht London: Springer; 2009. p. 158–186. ISBN 978-1-4020-8742-4
26. Khennane A. *Introduction to finite element analysis using MATLAB and abaqus*, 1st ed. Baton Rouge: Taylor & Francis Group; 2013. p. 231–379. <https://doi.org/10.1201/b15042>
27. Timošenko SP, Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. 2. ed., [Nachdr.]. New York: McGraw-Hill; 1996. Available from: <https://djvu.online/file/1M8cQRIBat6pU> (accessed: 27.03.2026).
28. Mittelstedt C. *Basics of elasticity theory. Theory of plates and shells*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg; 2023. p. 3–57. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66805-4_1
29. Willam K, Pramono E, Sture S. Fundamental issues of smeared crack models. In: Shah SP, Swartz SE, editors. *Fracture of Concrete and Rock*, New York, NY: Springer New York; 1989. p. 142–157. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3578-1_15
30. Szilard R. *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical, and engineering methods*. Hoboken, NJ: John Wiley; 2004. p. 662–667. <https://doi.org/10.1002/9780470172872>
31. Mawlood DA, Koyankin AA. Triangular layered finite element method for reinforced concrete slabs. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(5), pp. 441–61. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-441-461> EDN: DEEXQA

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4-383-398

EDN: LLCUFN

Научная статья / Research article

Влияние геометрических дефектов на ресурс цилиндрических резервуаров из алюминиевых сплавов

О.А. Корнев¹, А.Н. Шувалов^{1,2}, А.В. Корнилова^{1,2}, В.А. Ермаков¹¹ Московский государственный строительный университет (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация² Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ ermakov@mgsu.ru

Поступила в редакцию: 18 мая 2026 г.

Доработана: 19 июля 2026 г.

Принята к публикации: 27 июля 2026 г.

Аннотация. Освоение ресурсов Крайнего Севера должно сопровождаться организацией инфраструктуры для их хранения и транспортировки (резервуары, газгольдеры, трубопроводы). Применение стали для строительства резервуаров в условиях работы при пониженных температурах не всегда целесообразно, ввиду наличия порога хладноломкости и его смещения со временем в сторону положительных температур. В качестве замены авторы предлагают использовать алюминиевые сплавы, которые в условиях работы при пониженных температурах имеют преимущества. Для строительства выбран наиболее экономически выгодный и технологичный метод возведения резервуаров — метод рулонирования, при котором большинство сварных соединений выполняется в заводских условиях с контролем качества. При этом на строительной площадке при выполнении монтажных швов возможно возникновение дефектов, которые снижают ресурс сварных соединений. Выполнено определение количества циклов до зарождения трещины в сварных соединениях стенки резервуара с дефектами в виде угловатостей и линейного смещения полотнищ. Выполнены аналитические расчеты на основе результатов конечно-элементного моделирования работы резервуара и фрагментов стенки резервуара с дефектами. НДС моделей фрагментов стенки приведено к НДС участка стенки резервуара. Расчеты фрагментов с дефектами выполнены с учетом геометрической и физической нелинейности. Предложенный подход позволяет оценивать ресурс соединений, планировать проведение освидетельствований, усиления или ремонтно-восстановительных работ.

Ключевые слова: дефекты стальных резервуаров, угловатость монтажных швов, смещение листов, сварной шов, аргонодуговая сварка

Вклад авторов: Корнев О.А. — общее руководство и проведение экспериментальных исследований; Шувалов А.Н. — разработка идеологии исследования; Корнилова А.В. — обработка данных расчетного эксперимента, написание текста статьи; Ермаков В.А. — создание графического материала, написание текста статьи. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Корнев Олег Александрович, заместитель директора, Научно-исследовательский институт экспериментальной механики, Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 4890-2128; ORCID: 0009-0009-5545-5284; e-mail: KornevOA@mgsu.ru

Шувалов Александр Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры испытания сооружений, Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 8488-4644; ORCID: 0009-0007-0289-7412; e-mail: AShuvalov@mgsu.ru

Корнилова Анна Владимировна, доктор технических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт экспериментальной механики, Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 6569-6240; ORCID: 0000-0001-5569-9320; e-mail: KornilovaAV@mgsu.ru

Ермаков Валентин Алексеевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт экспериментальной механики, Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 3227-6815; ORCID: 0000-0002-8862-8139; e-mail: Ermakov@mgsu.ru

© Корнев О.А., Шувалов А.Н., Корнилова А.В., Ермаков В.А., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: Корнев О.А., Шувалов А.Н., Корнилова А.В., Ермаков В.А. Влияние геометрических дефектов на ресурс цилиндрических резервуаров из алюминиевых сплавов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 4. С. 383–398. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-383-398> EDN: LLCUFN

Effect of Geometric Defects on the Service Life of Cylindrical Tanks Made of Aluminium Alloys

Oleg A. Kornev¹, Aleksandr N. Shuvalov¹, Anna V. Kornilova^{1,2}, Valentin A. Ermakov¹

¹ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

² RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ ermakov@mgsu.ru

Received: May 18, 2026

Revised: July 19th, 2026

Accepted: July 27, 2026

Abstract. The development of resources in the Far North must be accompanied by the establishment of infrastructure for their storage and transport (tanks, gas holders, pipelines). The use of steel for the construction of tanks in low-temperature operating conditions is not always advisable, due to the presence of a cold-shortness threshold and its shift over time towards positive temperatures. As an alternative, the authors propose the use of aluminium alloys, which offer advantages in low-temperature operating conditions. The most cost-effective and technologically advanced method of tank construction has been selected — the coil-forming method, in which the majority of welded joints are pre-fabricated under quality control. However, defects may arise at the construction site during the execution of field welds, which reduce the service life of the welded joints. The number of cycles required for crack initiation in welded joints of a tank wall with defects in the form of angular and linear misalignment of the plate sections has been determined. Analytical calculations were performed based on the results of finite element modelling of the tank and of tank wall fragments with defects. The stress state of the wall fragment models was reduced to the stress state of a tank wall region. Calculations for fragments with defects were performed taking into account geometric and physical non-linearity. The proposed approach enables the service life of joints to be assessed and facilitates the planning of inspections, strengthening, or repair and restoration work.

Keywords: defects in steel tanks, angularity of mounting seams, sheet misalignment, weld, argon arc welding

Authors' contribution: Kornev O.A. — supervision, investigation; Shuvalov A.N. — methodology; Kornilova A.V. — data processing, text writing; Ermakov V.A. — visualization, text writing. All the authors have read the final version of the article and approved it.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Kornev OA, Shuvalov AN, Kornilova AV, Ermakov VA. Effect of geometric defects on the service life of cylindrical tanks made of aluminium alloys. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):383–398. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-383-398> EDN: LLCUFN

Oleg A. Kornev, Deputy Director, Scientific Research Institute of Experimental Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4890-2128; ORCID: 0009-0009-5545-5284; e-mail: KornevOA@mgsu.ru

Aleksandr N. Shuvalov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Testing of Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8488-4644; ORCID: 0009-0007-0289-7412; e-mail: AShuvalov@mgsu.ru

Anna V. Kornilova, Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, Scientific Research Institute of Experimental Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Professor of the Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 6569-6240; ORCID: 0000-0001-5569-9320; e-mail: KornilovaAV@mgsu.ru

Valentin A. Ermakov, Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Scientific Research Institute of Experimental Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 3227-6815; ORCID: 0000-0002-8862-8139; e-mail: Ermakov@mgsu.ru

1. Введение

Согласно данным геологической разведки, в Арктике содержится 30 % мировых запасов природного газа, 13 % нефти, 9 % угля, большие запасы металлов, в том числе редкоземельных, и минералов (бриллианты, графит). Одной из амбициозных задач по освоению природных ресурсов является реализация проекта «Арктик СПГ-2» для поставок сжиженного природного газа (СПГ) в Китай [1]. Районы Крайнего Севера России также богаты природными ресурсами. Например, на территории Республики Саха (Якутия) сосредоточено 23 месторождения нефти (453 млрд м³) и 44 месторождения газа (1392 млрд м³), среди которых одно обладает статусом уникального и 9 — крупных [2]. Освоение таких объемов ресурсов невозможно без создания качественной инфраструктуры — трубопроводов, газгольдеров, резервуаров для перекачки и хранения продуктов.

Однако строительству новых объектов и их дальнейшей эксплуатации сопутствуют технические риски, среди которых выделяют строительно-монтажные и эксплуатационные. Труднодоступность регионов, сложные геологические условия и пониженные температуры требуют реализации наукоемких и высокотехнологичных проектов [3]. Применение стали для строительства резервуаров в условиях работы при пониженных температурах не всегда целесообразно ввиду наличия порога хладноломкости и его смещения со временем в сторону положительных температур [4]. В исследовании [5] определено, что за 31 год эксплуатации трубопровода порог хладноломкости стали 17Г1С сместился на 10 градусов: с –40 до –30 °С. Кроме того, при длительной эксплуатации снижаются физико-механические характеристики стали. Например, предел прочности стали Р92 уменьшился за 10 лет с 745 до 650 МПа [6].

В качестве замены стальных сплавов целесообразно рассмотреть сплавы алюминиевые, которые не обладают порогом хладноломкости. Физико-механические характеристики современных алюминиевых сплавов не уступают некоторым сталям, а при понижении температуры только улучшаются. Меньший объемный вес (в 3 раза) и повышенная коррозионная стойкость позволят уменьшить затраты на транспортировку, монтаж и эксплуатацию алюминиевых конструкций [7].

С точки зрения технологии возведения для климатических условий Крайнего Севера наиболее перспективным является метод рулонирования как наиболее экономически выгодный и технологичный [8], что также подтверждается расчетом металлоемкости при рассмотрении резервуаров разных объемов [9]. Основная часть сварочных работ с проведением дефектоскопии осуществляется на заводе — свариваются полотнища стенок. Готовые полотнища сворачиваются в рулон и доставляются на строительную площадку, где устанавливаются вертикально и постепенно разворачиваются. Таким образом, на строительной площадке выполняется относительно небольшой объем сварочных работ (вертикальный замыкающий шов, приварка патрубка и др.).

Тем не менее даже при такой технологии существует вероятность возникновения дефектов. В качестве основных можно выделить дефекты в зоне стыка полотнищ стенок: угловатость и линейное смещение полотнищ относительно друг друга [10].

Нормативные документы регламентируют допускаемые параметры данных дефектов при изготовлении конструкции, а также при оценке их расчетного срока службы. Например, при изготовлении полотнищ стенок из стали класса С245 допускается угловатость (угловые деформации стыков) равная 20 мм на базе измерения 500 мм. Также допускается линейное смещение поверхностей относительно друг друга при толщине деталей более 10 мм — 10 % толщины, но не более 3 мм.

Расчетный срок службы резервуаров определяется угловатостью вертикальных сварных швов стенки в случае отсутствия трещиноподобных эксплуатационных дефектов. Предельное значение угловатости зависит от цикличности нагружения конструкций, толщины стенок. Например, при годовом числе циклов нагружения, равном 250 и толщине стенки более 15 мм, — предельное значение угловатости составляет 5 мм на базе измерения 500 мм. Выполнение этого условия обеспечит срок службы 40 лет. При увеличении цикличности нагружения предельное значение должно определяться расчетным путем.

Если резервуар смонтирован с превышением предельных параметров дефектов допускается его приемка на основе выполненных расчетов несущей способности. Согласно Межгосударственному стандарту ГОСТ 31385-2023¹ расчет должен проводиться с помощью метода конечных элементов, учитывать фактическую геометрию конструкции, выполнять проверки по прочности (в том числе малоцикловой) и устойчивости.

Отечественных нормативных документов, которые бы однозначно регламентировали правила проектирования резервуаров из алюминиевых сплавов, на сегодняшний день не существует. Для проектирования конструкций зданий и сооружений из алюминиевых сплавов разработан свод правил 128.13330.2016², однако в документе сказано, что его положения не распространяются на алюминиевые конструкции, подвергающиеся многократному воздействию нагрузок.

В связи с этим для строительства резервуаров из алюминиевых сплавов требуется разработка и согласование дополнительной документации, подтверждающей безопасность принятых решений. До 1 сентября 2024 г. в качестве такого документа выступали специальные технические условия (СТУ), в настоящее время необходима разработка РПСО (результаты применения способов обоснования).

Проектирование осложняется необходимостью учета цикличности нагружения и сваркой алюминиевых конструкций, возможным наличием дефектов монтажа. Для обоснования решений и обеспечения безаварийной эксплуатации при минимальных затратах ресурсов необходимо проведение научных исследований в данном направлении.

Исследования направлены на изучение изменения свойств основного материала и его сварных соединений при рулонировании, подборе оптимальных диаметров каркасов рулонов, усталостной прочности материалов после рулонирования и разворачивания. В [11] исследовался уровень напряжений при скручивании листов разной толщины в рулон из стали 09Г2С. Определено, что при скручивании листа толщиной 18 мм на каркас диаметром 2,2 м возникают напряжения, превышающие предел текучести материала на 37,6 МПа, что приводит к значительным пластическим деформациям. Подобные работы ведутся не только экспериментально, но и расчетным путем методом конечных элементов [12]. Исследование остаточных напряжений в сварных швах стенок резервуаров также показало наличие упругопластических деформаций [13].

Исследование стальных сварных соединений листов с имитацией технологии рулонирования [14] показало, что примененные технологии способствуют хрупкому разрушению. При этом критические температуры вязкохрупкого перехода смещаются в положительную сторону.

Резервуары могут быть нагружены статически, однако в ряде случаев их несущие конструкции работают в условиях циклического нагружения, что требует оценки ресурса до разрушения. Данной тематике посвящено исследование [15], в котором экспериментально и теоретически оценивалось влияние процесса рулонирования на количество циклов до разрушения образцов. Испытания показали, что при одной и той же нагрузке количество циклов до разрушения после рулонирования в среднем увеличилось в 3,4 раза.

Дефекты стальных резервуаров (отклонение образующих от вертикали, угловатость монтажных швов и др.) устраняются методом вставок, свальцованных под проектный радиус. При этом важно знать остаточное напряженное состояние стенок резервуара и правильно подбирать радиус вальцовки [16]. При неправильном ремонте методом вставок возможно возникновение «хлопунов». Для решения данной проблемы авторами [17] разработана методика компьютерного моделирования, позволяющая прогнозировать появление данных дефектов.

Литературный поиск по данным тематикам применительно к резервуарам из алюминиевых сплавов показал ограниченное количество современных трудов. Основная часть исследований приходится

¹ ГОСТ 31385 – 2023. Резервуары вертикальные цилиндрические стальные для нефти и нефтепродуктов. Общие технические условия. Москва : Государственный институт стандартизации; 2023. 112 с. URL: <https://files.stroyinf.ru/Index/80/80549.htm> (дата обращения: 18.02.2026).

² СП 128.13330 «СНиП 2.03.06-85 Алюминиевые конструкции». Москва, 2016. 86 с. URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293747/4293747699.pdf> (дата обращения: 27.02.2026).

на 1970–1980-е гг. Среди них исследование Х.Р. Саидова по оценке влияния поверхностных дефектов на усталостную прочность элементов листовых конструкций, в том числе резервуаров, из алюминиевых сплавов [18]. В работе определено, что предварительное пластическое деформирование, вызванное процессом рулонирования, приводит к увеличению сопротивления материала усталостному разрушению на стадии роста трещины в 2–3 раза в зависимости от уровня нагружения.

Таким образом, развитие регионов Крайнего Севера и технологий строительства делает использование современных алюминиевых сплавов для строительства резервуаров методом рулонирования актуальным.

Цель исследования – оценка влияния потенциальных дефектов монтажа резервуара из алюминиевого сплава с учетом физико-механических характеристик сварного соединения и возможной перегрузки при приемочных испытаниях.

2. Материалы, исходные данные и методика исследования

В качестве рабочего материала в исследовании принят ранее выбранный авторами алюминиевый деформируемый сплав 1915 в состоянии Т группы сплавов Al — Zn — Mg [7]. Основные физико-механические характеристики сплава и его сварного соединения, необходимые для моделирования, получены экспериментально и представлены в табл. 1. Испытания образцов проведены по Межгосударственным стандартам ГОСТ 1497-84, ГОСТ 9454-78, ГОСТ 25.502-79³.

Таблица 1. Физико-механические характеристики алюминиевого сплава 1915Т при $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$
Table 1. Physical and mechanical properties of 1915T aluminium alloy at $t = 20^{\circ}\text{C}$

Характеристика / Characteristics	Основной металл / Base metal	Зона термического влияния / Heat-affected zone	Сварной шов / Weld
Предел прочности, σ_B , МПа / Ultimate strength, σ_B , МПа	365	270	269
Условный предел текучести, $\sigma_{0,2}$, МПа / Yield strength, $\sigma_{0,2}$, МПа	255	210	164
Предел выносливости при симметричном цикле, σ_{-1} , МПа / Fatigue strength for a symmetrical cycle, σ_{-1} МПа	100	—	77
Модуль упругости, E , МПа / Young's modulus, E , МПа	70 000	70 000	70 000
Относительное сужение, ψ , % / Reduction, ψ , %	28	—	26,2

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым / S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

В качестве объекта исследования принят резервуар из алюминиевого сплава по типовому проекту. Диаметр резервуара составляет 15,18 м, а высота — 11,92 м. Днище резервуара образовано листом толщиной 6 мм. Резервуар имеет входной патрубок толщиной 6 мм и диаметром 530 мм. Вокруг патрубка приварено усиление стенки толщиной 6 мм. На отметке +7,700 м предусмотрено кольцо жесткости из алюминиевого профиля. На отметке +11,600 расположено опорное кольцо жесткости, на которое опираются конструкции покрытия. Покрытие резервуара состоит из центрального

³ ГОСТ 1497-84. Металлы. Методы испытаний на растяжение. Москва : Стандартинформ, 2008. 26 с.; ГОСТ 9454-78. Металлы. Метод испытания на ударный изгиб при пониженных, комнатной и повышенных; Температурах. Москва : ИПК Издательство стандартов, 2002. 12 с.; ГОСТ 25.502-79. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний металлов. Методы испытаний на усталость. Москва : Государственный стандарт Союза ССР, 1985. 25 с.

распорного кольца в виде трубы толщиной 20 мм диаметром 510 мм и системы радиальных и тангенциальных прогонов из алюминиевых профилей. Поверх радиальных прогонов приварен настил толщиной 6 мм.

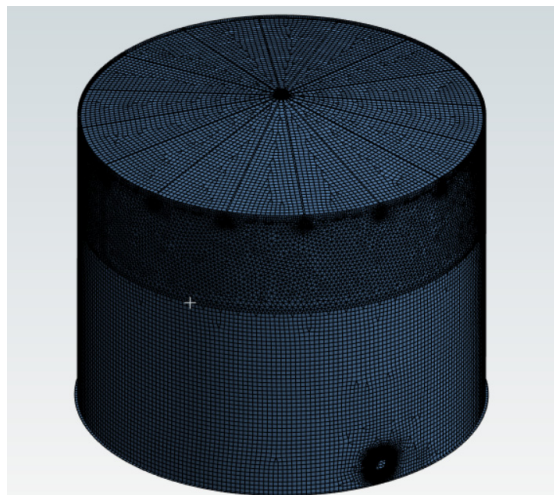


Рис. 1. Общий вид конечно-элементной модели
Источник: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 1. General view of the finite element model
Source: made by V.A. Ermakov.

Толщина стенки меняется по высоте:

- от отметки 0,000 до +3,000 — 10 мм;
- от отметки +3,000 до +6,000 — 8 мм;
- свыше отметки +6,000 — 6 мм.

Расчетная модель резервуара создана в ПК Ansys с помощью стержневых и пластинчатых элементов (рис. 1).

В данном исследовании модель закреплена на жестком основании. Модель рассчитана в упругой постановке, для задания материала использован модуль упругости $E = 70000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$ и плотность алюминиевых сплавов $\rho = 2700$ кг/м³.

Для расчета приняты следующие климатические условия:

- ветровой район Ia;
- снеговой район IV.

В качестве рабочей жидкости принята нефть с плотностью $\rho_{ж} = 0,9$ т/м³.

К модели были приложены следующие основные нагрузки:

- давление рабочей жидкости;
- снеговая нагрузка на покрытие резервуара;
- ветровая нагрузка.

Анализ результатов расчета показал, что НДС стенки формируется в основном за счет действия давления рабочей жидкости. Так как исследование направлено на изучение НДС стенки с дефектами, было принято решение дальнейшие расчеты выполнять на данное воздействие.

Моделирование резервуаров целиком с дефектами трудоемко и требует больших расчетных мощностей, поэтому оценка влияния дефектов осуществлялась на отдельных объемных моделях фрагментов стенок. При этом напряженно-деформированное состояние (НДС) моделей фрагментов повторяет НДС основной модели резервуара.

Для исследования выбрано два типа дефектов монтажа резервуаров методом рулонирования при стыковке полотнищ стенки: угловатость и линейное смещение полотнищ.

В результате была разработана базовая модель фрагмента без дефектов, 7 моделей стенки с угловатостями (рис. 2) и 5 моделей со смещением полотнищ (рис. 3). Все модели учитывают наличие одностороннего сварного шва, полученного методом аргонодуговой сварки. На схеме указана зона сварного шва (СШ), зона термического влияния (ЗТВ) и основной металл (ОМ). Граница сварного шва специально немного расширена, чтобы зона концентрации напряжений приходилась на один тип материала. Высота моделей составляет 100 мм.

Вертикальным граням моделей назначалось симметричное закрепление. К горизонтальным граням моделей прикладывались перемещения и поперечное распределенное усилие, соответствующие горизонтальному перемещению узлов стенки резервуара и поперечным усилиям в месте «вырезания» фрагмента модели от действия давления рабочей жидкости.

Вертикальным граням моделей назначалось симметричное закрепление. К горизонтальным граням моделей прикладывались перемещения и поперечное распределенное усилие, соответствующие горизонтальному перемещению узлов стенки резервуара и поперечным усилиям в месте «вырезания» фрагмента модели от действия давления рабочей жидкости.

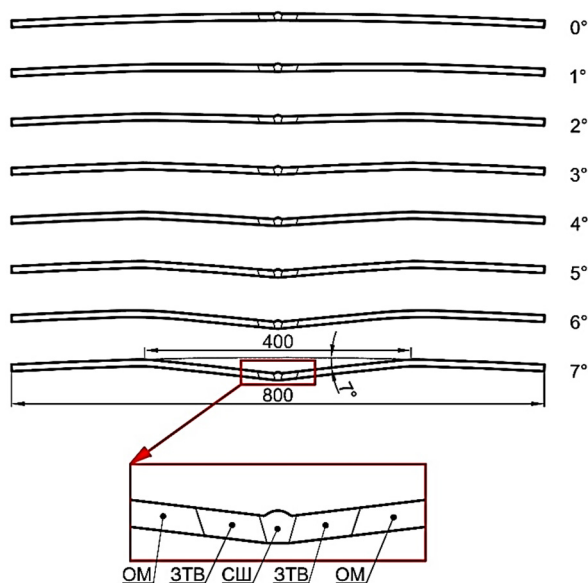


Рис. 2. Схемы фрагментов стенок с дефектами в виде угловатостей

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 2. Schematics of wall sections with defects in the form of angular misalignment

S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

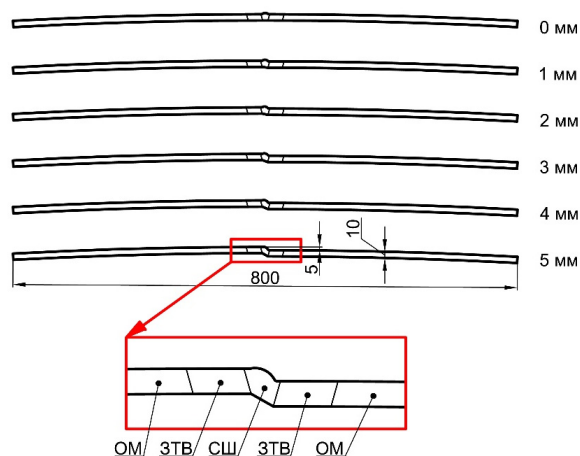


Рис. 3. Схемы фрагментов стенок с дефектами в виде линейного смещения полотнищ

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 3. Schematics of wall sections with defects in the form of linear misalignment of the wall panels

S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

Расчет выполнялся с учетом геометрической и физической нелинейности. Для реализации физической нелинейности работы материалов в расчетной программе были заданы билинейные диаграммы деформирования.

Для верификации расчетной модели фрагмента с дефектом сравнивались напряжения в зоне, расположенной вдали от дефекта с напряжениями в модели резервуара.

Для имитации перегрузки при испытаниях и цикла нормальной загрузки к плоскости стенки изнутри прикладывалось давление рабочей жидкости в следующей последовательности:

1. 125 % среднего рабочего давления в уровне рассматриваемого фрагмента, имитирующего перегрузку при приемочных испытаниях резервуара.

2. Нулевая нагрузка, соответствующая полной разгрузке резервуара.

3. 100 % среднего рабочего давления в уровне рассматриваемого фрагмента, имитирующего цикл нормальной эксплуатации резервуара.

В результате расчета каждой модели с дефектом определялся самый нагруженный узел, для которого строилась диаграмма «Напряжения — деформация».

Общий вид диаграммы «Напряжения — деформация» представлен на рис. 4. При нагружении резервуара без перегрузки возникает рабочий цикл, соответствующий участку «0–0'». Однако из-за перегрузки в ходе испытаний, а также наличия концентрации напряжений возможно возникновение пластических деформаций, которые при дальнейшем циклическом нагружении изменяют параметры цикла, что, в свою очередь, изменяет предел выносливости сварного соединения.

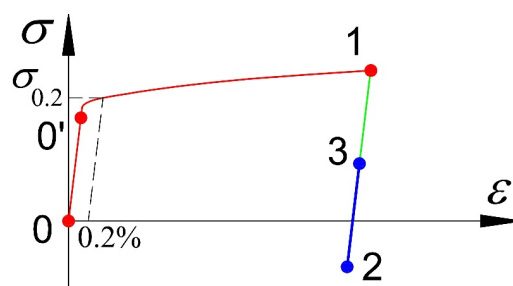


Рис. 4. Схема деформирования самого нагруженного узла в разных условиях нагружения

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 4. Deformation diagram of the most heavily loaded node under various loading conditions

S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

На участке «0–1» происходит нарастание напряжений и деформаций вследствие приложения испытательной нагрузки (125 % от эксплуатационной), так как напряжения превышают значение условного предела текучести $\sigma_{0,2}$, начинаются пластические деформации. На следующем этапе нагрузка полностью снимается (участок «1–2»). Нагружение 100 % эксплуатационной нагрузки приводит к линейному увеличению деформаций и напряжений (участок «2–3»). В дальнейшем повторяется разгрузка и нагружение той же нагрузкой. Таким образом, напряжения в точке «2» соответствуют минимальным напряжениям цикла $\sigma_{\min}$, а напряжения в точке «3» — максимальным напряжениям цикла $\sigma_{\max}$.

Для оценки допускаемого числа циклов до разрушения нормативными документами закреплено две методики:

1. Методика по ГОСТ 34233.6-2017. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Расчет на прочность при малоцикловых нагрузках.

2. Методика по ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок.

Методика по ГОСТ основана на использовании амплитуды напряжений σ_a , коэффициентах запаса прочности по числу циклов n_N и по напряжениям n_σ , характеристиках A и B , приводимых для определенных стальных и алюминиевых сплавов, а также коэффициента C_t для учета изменения температуры эксплуатации:

$$[N] = \frac{1}{n_N} \left[\frac{AC_t}{\sigma_a - \frac{B}{n_\sigma}} \right]^2.$$

Методика ПНАЭ более расширена и дополнительно учитывает характеристики материала, в том числе прочность и пластичность, коэффициент асимметрии цикла напряжений. Однако в документе заявлено, что формула применяется для сталей при отношении $\sigma_{0,2} / \sigma_B \leq 0,7$ и количестве циклов до 10^6 .

В документе изначально приведена формула определения допускаемой амплитуды напряжений:

$$[\sigma_a] = \frac{E e_c}{(4n_N [N_0])^m} + \frac{\sigma_{-1}}{1 + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \frac{1+r}{1-r}},$$

где E — модуль упругости материала; σ_{-1} — предел выносливости материала при симметричном цикле; n_N — коэффициент запаса по количеству циклов (в рамках научного исследования принимается равным 1); $m = 0,5$ — характеристика материала, принимаемая по таблице 5.7 ПНАЭ Г-7-002-86; σ_B — предел прочности материала; $[N_0]$ — допускаемое число циклов до разрушения; r — коэффициент асимметрии цикла нагружения; e_c — характеристика пластичности, определяемая по формуле

$$e_c = \ln \left(\frac{100}{100 - \psi} \right).$$

Преобразование выражения и подстановка характеристики пластичности позволяет выделить формулу для расчета допускаемого числа циклов до разрушения:

$$[N_0] = \frac{1}{4} \left(\frac{Ee_c}{\left[\sigma_a \right] - \frac{\sigma_{-1}}{1 + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \frac{1+r}{1-r}}} \right)^2.$$

Также для повышения числа циклов могут применяться различные методы поверхностного упрочнения и увеличения предела выносливости соединений.

Например, для существенного повышения усталостной прочности успешно применяется ультразвуковая ударная обработка, что доказано при испытании образцов сварных соединений из алюминиевого сплава 2024-T4 [19]. Данный метод давно известен, прост и широко применяется. Однако разрабатываются и более сложные методы. В исследовании [20] показано, что комплексная обработка, сочетающая термическую обработку в растворе, частичную прокатку и естественное старение, позволяет увеличить ресурс сварных соединений в 2–6 раз.

В рамках данного исследования было принято решение применительно к алюминиевому сплаву 1915T использовать методику по ПНАЭ Г-7-002-86 ввиду возможности учета асимметрии цикла нагружения, возникающей при перегрузке конструкции и пластической деформации в зоне концентрации.

Ограничением исследования являются характеристики дефектов: 7 градусов угловатости и 5 мм линейного смещения полотнищ. В расчетах не учтены возможные пластические деформации при рулонировании и разворачивании листов, что также является ограничением исследования. Результаты исследования применимы для любого участка вертикального стыкового шва стенки, за исключением зоны уторного узла.

3. Результаты и обсуждение

В результате расчета на основную нагрузку (давление рабочей жидкости) получены изополя эквивалентных напряжений (рис. 5) и радиальные перемещения элементов резервуара (рис. 6).

Максимальные напряжения в стенке вдали от зон концентрации составляют 78,48 МПа и расположены на высоте 750 мм от днища резервуара. Для верификации модели фрагмента резервуара приняты средние значения нагрузки, перемещений и поперечного распределенного усилия на данной высоте, равные 99 кПа, 8,52 мм и 1,4 Н/мм соответственно.

В результате расчета модели фрагмента стенки резервуара без дефектов на удалении от сварного шва получены эквивалентные напряжения, равные 78,46 МПа (рис. 7).

Таким образом, принятый подход позволяет получить в модели фрагмента НДС, аналогичное с тем состоянием, что возникает в том же месте при расчете всего резервуара. При этом наблюдается достаточная сходимость в пределах 5 %.

Так как диаграмма деформирования материала получена по результатам одноосных испытаний на растяжение, дальнейшая оценка результатов осуществлялась не по эквивалентным напряжениям, а по кольцевым.

В результате серии расчетов фрагментов с угловатостями и смещениями были получены изополя кольцевых напряжений (рис. 8) и графики «Напряжения — деформация» наиболее нагруженных узлов моделей в зонах у сварных швов (рис. 9).

Аналогично графикам на рис. 9 получены графики без перегрузки.

В результате обработки диаграмм получены параметры циклов нагружения для различных типов дефектов, с перегрузкой и без (табл. 2).

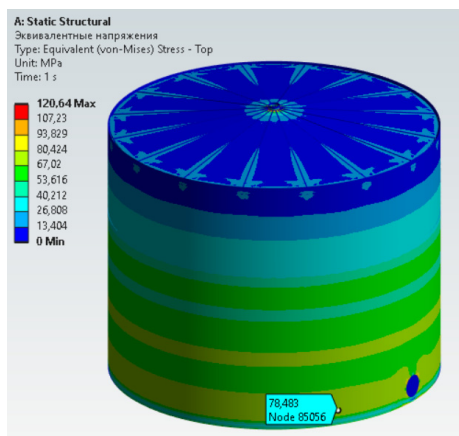


Рис. 5. Изополя эквивалентных напряжений, МПа
(зона патрубка условно не показана)
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 5. Equivalent stresses, MPa
(the pipe connection area is not shown for clarity)
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

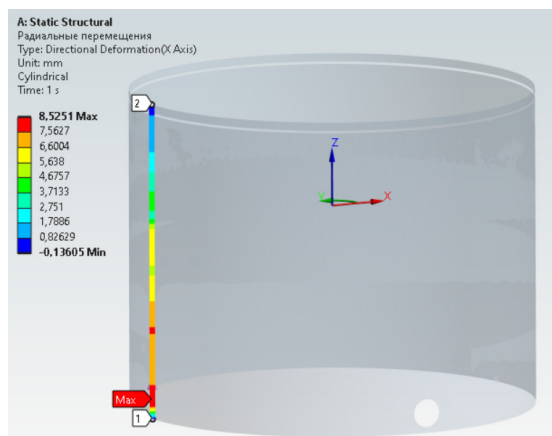


Рис. 6. Радиальные перемещения элементов резервуара, мм
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 6. Radial displacement of tank elements, mm
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

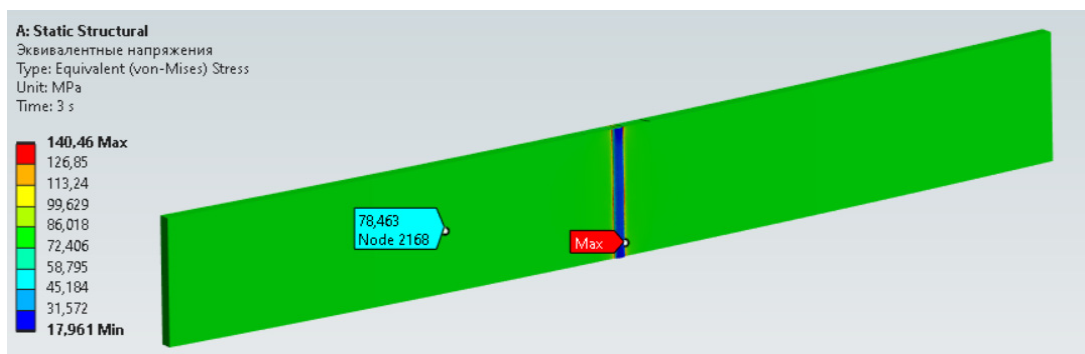


Рис. 7. Эквивалентные напряжения в модели фрагмента стенки резервуара, МПа
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 7. Equivalent stresses in the tank wall fragment model, MPa
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

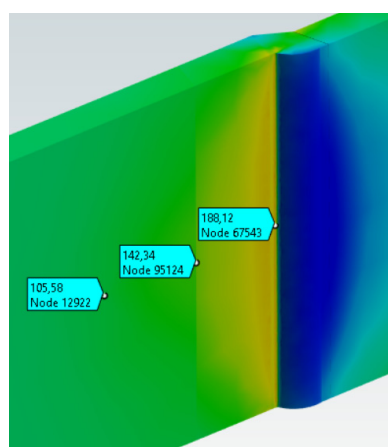
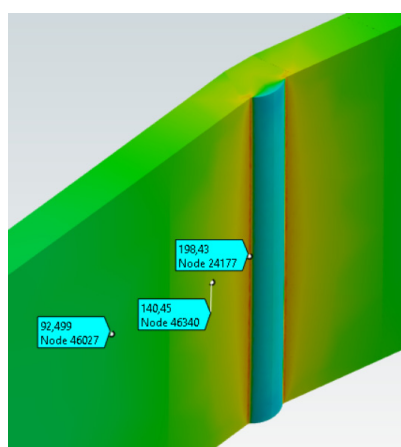


Рис. 8. Изополя кольцевых напряжений в зонах у сварного шва на этапе нагружения с перегрузкой:
a — в модели с угловатостью 7°; *б* — в модели со смещением 5 мм
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 8. Hoop tension in the regions adjacent to the weld during the overload loading stage:
a — in the model with a 7° angular misalignment; *б* — in the model with a 5 mm linear misalignment
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

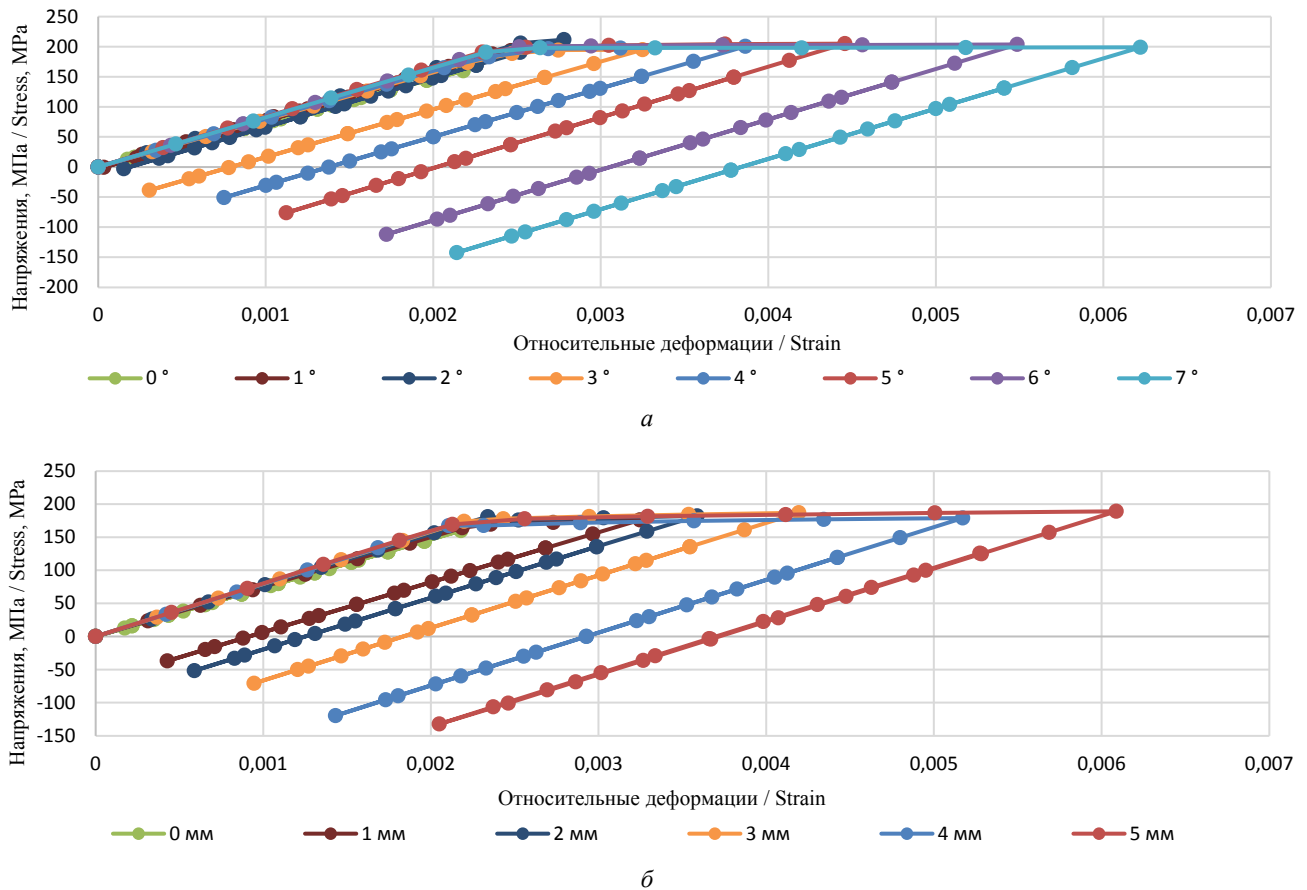


Рис. 9. Графики «Напряжения – деформация» с учетом перегрузки в наиболее нагруженных узлах:

а — в моделях с угловатостями; б — в моделях со смещениями

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 9. Stress–strain diagrams accounting for overload at the most heavily loaded joints:

а — in models with angular misalignment; б — in models with linear misalignment

S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

Таблица 2. Параметры циклов / Table 2. Cycle parameters

Тип дефекта / Type of defect	С перегрузкой / Overload			Без перегрузки / Normal load		
	$\sigma_{\min}$, МПа / MPa	$\sigma_{\max}$, МПа / MPa	r	$\sigma_{\min}$, МПа / MPa	$\sigma_{\max}$, МПа / MPa	r
Без дефектов / Defectless	0,0	127,9	0,00	0,0	127,9	0,00
Угловатость 1° / Angular misalignment 1°	–0,6	154,8	0,00	0,0	167,0	0,00
Угловатость 2° / Angular misalignment 2°	–2,9	169,0	–0,02	0,0	188,5	0,00
Угловатость 3° / Angular misalignment 3°	–38,7	148,6	–0,26	–7,6	188,4	–0,04
Угловатость 4° / Angular misalignment 4°	–50,8	150,5	–0,34	–14,7	195,8	–0,08
Угловатость 5° / Angular misalignment 5°	–76,0	149,2	–0,51	–23,2	201,7	–0,11
Угловатость 6° / Angular misalignment 6°	–112,2	140,9	–0,80	–50,5	202,4	–0,25
Угловатость 7° / Angular misalignment 7°	–142,3	131,1	–1,09	–75,4	197,8	–0,38
Смещение 1 мм / Linear misalignment 1 mm	–36,81	133,54	–0,28	–4,14	169,62	–0,02
Смещение 2 мм / Linear misalignment 2 mm	–51,68	135,53	–0,38	–11,59	175,44	–0,07
Смещение 3 мм / Linear misalignment 3 mm	–70,70	135,52	–0,52	–25,32	180,88	–0,14
Смещение 4 мм / Linear misalignment 4 mm	–119,52	119,39	–1,00	–64,49	174,55	–0,37
Смещение 5 мм / Linear misalignment 5 mm	–132,18	125,77	–1,05	–74,10	184,14	–0,40

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым / S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

На основании данных о параметрах циклов нагружения и физико-механических характеристиках материала получено количество циклов до зарождения трещины для каждого из вариантов модели. Сводные графики ресурса представлены на рис. 10.

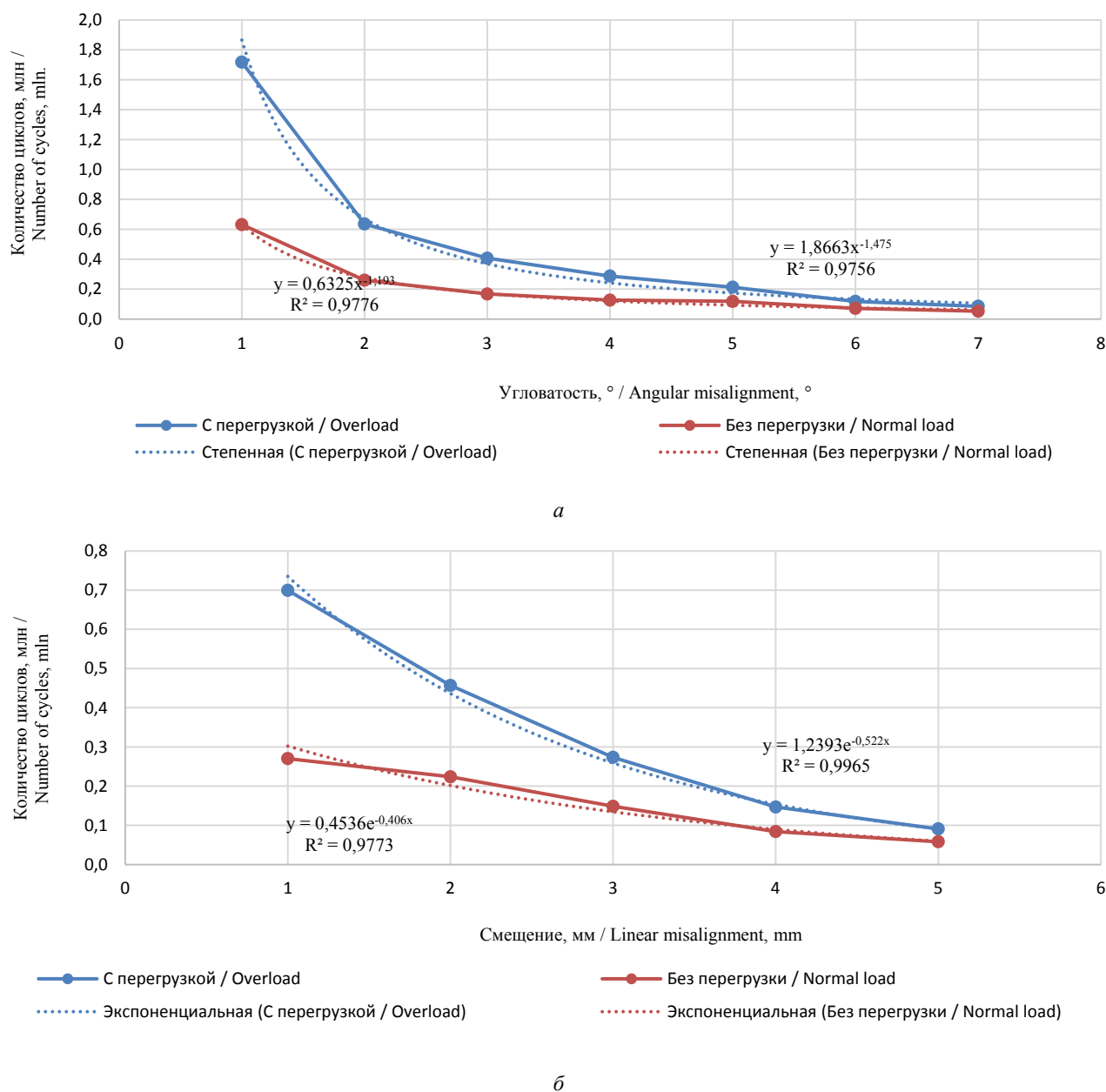


Рис. 10. Ресурс стыкового сварного соединения:

a — при наличии угловатости; *б* — при наличии линейного смещения полотнищ

И с т о ч н и к: выполнено О.А. Корневым.

Figure 10. Fatigue strength of a butt weld:

a — where there is angular misalignment; *б* — where there is a linear misalignment of the plate edges

S o u r c e: made by O.A. Kornev.

Анализ графиков на рис. 10 показал, что наличие и степень дефекта ожидаемо отрицательно сказываются на количестве циклов до зарождения трещины. При этом положительное влияние на работу сварного соединения оказывает перегрузка во время приемочных испытаний. Влияние нивелируется по мере увеличения степени дефектности.

Результаты проведенных расчетов по оценке влияния угловатости описываются степенной функцией в интервале от 1 до 7°, а данные по оценке линейного смещения – экспоненциальной зависимостью в интервале от 1 до 5 мм. При этом минимальная величина достоверности аппроксимации составляет 0,956.

Дополнительно был проведен анализ количества циклов до зарождения трещины в зависимости от амплитуды деформаций цикла нагружения ε_a и типа дефекта. Полученные массивы данных нанесены на общую шкалу (рис. 11).

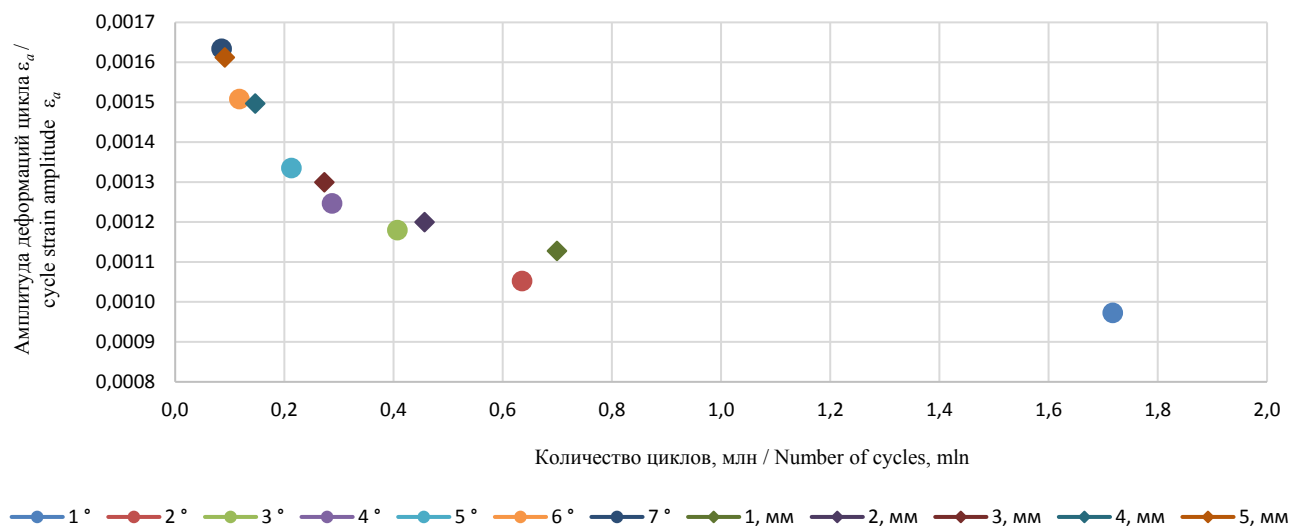


Рис. 11. Зависимость количества циклов до зарождения трещин от амплитуды деформаций ε_a при разных типах дефектов
И с т о ч н и к: выполнено О.А. Корневым.

Figure 11. The number of cycles before cracks initiate as a function of the strain amplitude ε_a for different types of defects
S o u r c e: made by O.A. Kornev.

Анализ данных (рис. 11) показывает аналогичный характер деформирования фрагментов стенки с угловатостями и линейным смещением полотнищ. В интервале от 0,6 до 0,7 млн циклов отчетливо видно, что угловатость 2° является более опасным дефектом, чем линейное смещение полотнищ, равное 1 мм, потому что примерно такое же количество циклов достигается при меньшей амплитуде деформаций.

4. Заключение

Анализ исследований в области строительства резервуаров методом рулонирования позволяет сделать следующие выводы:

1. В большинстве публикаций конструкционным материалом является сталь, и лишь ограниченная часть трудов СССР 1970–1980-х гг. относится к алюминиевым сплавам.
2. Экспериментальные исследования сосредоточены на учете влияния технологии рулонирования и сварных соединений на усталостную прочность конструкций.
3. Средства компьютерного моделирования направлены на прогнозирование появления дефектов в результате ремонтно-восстановительных работ методом вставок.

Новизна исследования заключается в расчете количества циклов до разрушения сварных соединений стенок резервуара из алюминиевого сплава с геометрическими дефектами на основе результатов компьютерного моделирования.

Исходными данными для проведения расчетов послужил типовый проект резервуара, а также результаты определения физико-механических характеристик алюминиевого сплава 1915Т.

В общей сложности было подготовлено 14 конечно-элементных моделей: модель резервуара из стержней и пластин; модель фрагмента стенки со сварным швом без дефектов; 7 моделей фрагментов стенки со сварным швом и разной степенью угловатости; 5 моделей фрагментов стенки со сварным швом и разной степенью линейного смещения полотнищ. Фрагменты стенок рассчитывались с учетом и без учета перегрузки.

Анализ результатов показал закономерное снижение ресурса сварного соединения с увеличением степени дефектности. При этом отмечается положительное влияние перегрузки конструкций при приемо-сдаточных испытаниях.

Предложенный подход позволяет оценивать количество циклов до зарождения трещин на любой высоте вертикального шва, за исключением зоны уторного узла. Следовательно, монтажная организация получает инструмент для обоснования необходимости проведения ремонтно-восстановительных работ или приемки конструкции с допускаемыми дефектами исходя из расчетного срока службы (количества циклов нагружения). Также сведения о количестве циклов могут быть использованы при планировании освидетельствования конструкций в зонах с дефектами.

Результаты исследования приведены при условии, что возможные пластические деформации при рулонировании и разворачивании листов не учитывались. Дальнейшие исследования будут включать учет данных процессов.

Список литературы

1. Зоидов К.Х., Медков А.А. Реализация крупных энергетических проектов в российской Арктике в рамках осуществления совместных инфраструктурно-интеграционных инициатив с Китаем и Индией // Региональные проблемы преобразования экономики. 2022. № 2 (136). С. 5–22. <https://doi.org/10.26726/1812-7096-2022-2-5-22> EDN: CPTHNK
2. Калашников В.В., Ковалев Л.Н. Геологические работы в Республике Саха (Якутия) за 100 лет // Руды и металлы. 2022. № 2. С. 6–24. <https://doi.org/10.47765/0869-5997-2022-10007> EDN: HZHINL
3. Воронина Е.П. Риски и управление ими при реализации проектов освоения нефтегазовых ресурсов арктического шельфа // Научные труды Вольного экономического общества России. 2014. Т. 182. С. 190–197. EDN: TUFPJL
4. Зикеев В.Н., Филиппов Г.А., Шабалов И.П. Закономерности изменения механических свойств конструкционных сталей в ходе длительной эксплуатации и моделирование процессов старения // Проблемы черной металлургии и материаловедения. 2014. № 4. С. 74–82. EDN: TBEWYJ
5. Krechkovska H., Kulyk V., Vira V., Student O. Influence of long-term operation of the 17H1S steel on the main gas pipeline on the change of the mechanical properties // Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 36. P. 334–341. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.043>
6. Jin X., Zhu B.Y., Xia X.X., Li Y.F., Liu X.B., Zhang Y.W., Xu C.L., Yin J., Jia W.Q. Study on the microstructure evolution and effect on mechanical properties of P92 steel during long term service // Materialia. 2024. Vol. 35. Article no. 102124. <https://doi.org/10.1016/j.mtla.2024.102124>
7. Корнев О.А., Шувалов А.Н., Корнилова А.В., Ермаков В.А. Интегральный критерий выбора алюминиевого сплава для строительства резервуаров в условиях Арктики // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 6. С. 605–622. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-6-605-622> EDN: FWXOUY
8. Абрамян С.Г., Бурлаченко О.В., Оганесян О.В. Цифровизация строительства на основе структуризации основных технологических решений на примере сооружения вертикальных стальных резервуаров // Вестник евразийской науки. 2022. Т. 14. № 2. С. 17. EDN: WDITEN
9. Дрындина И.В., Шумкаева Е.П., Ращепкина С.А. О возведении стальных вертикальных цилиндрических резервуаров методом рулонирования // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2025. № 2–1 (101). С. 213–217. <https://doi.org/10.24412/2500-1000-2025-2-1-213-217> EDN: OGDZZZ
10. Почтовик П.Г. Малоцикловая усталостная прочность металлических резервуаров нефтеперекачивающих станций : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01. Москва, 1985. 218 с.
11. Баканов А.А., Мирошник А.И., Пимонов М.В., Абабков Н.В. Механические свойства основного металла и металла сварных соединений после рулонирования листов на каркасы разных диаметров // Инновации в машиностроении (ИнМаш-2020) : материалы XI Междунар. науч.-практической конф., Бийск, 22–23 октября 2020 года. Бийск : АГТУ им. И.И. Ползунова, 2020. С. 213–219. EDN: BVBVCH

12. Вагазова Д.Д., Тляшева Р.Р. Анализ напряженно-деформированного состояния полотноща резервуара в процессе рулонирования на каркасы различных диаметров // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2024. № 10. С. 447–452. <https://doi.org/10.24412/2071-6168-2024-10-447-448> EDN: FXRKWX
13. Гильманишин Р.А., Ерофеев В.В., Шарафиев Р.Г., Якунов В.М. Исследование напряженно-деформированного состояния рулонированных полотнищ вертикальных цилиндрических резервуаров при их изготовлении и монтаже // Нефтегазовое дело. 2015. Т. 13. № 4. С. 193–199. EDN: VTKTJL.
14. Клебанов Я.М., Бурмистров А.Г., Столяров Н.Н. Экспериментальные исследования деформационных и прочностных свойств материала рулонированных сварных соединений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2012. № 3 (35). С. 133–140 EDN: PYUQNB
15. Воронин Р.М., Вагазова Д.Д., Тляшева Р.Р., Кузеев И.Р. Влияние технологии сборки рулонированных резервуаров на усталостную долговечность // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2025. № 4. С. 147–155. <https://doi.org/10.24412/2071-6168-2025-4-147-148> EDN: WTMFCD
16. Комаров П.А. Определение радиуса вальцовки ремонтных вставок при ремонте стальных резервуаров, изготовленных методом рулонирования // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2012. № 4 (36). С. 215–220. EDN: QBUTOT.
17. Тянь В.К., Комаров П.А., Худяков О.В. Системный анализ и прогноз поведения металлоконструкций при ремонте стальных резервуаров, изготовленных методом рулонирования // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. Т. 14. № 1-2. С. 435–438. EDN: PWMOST
18. Саидов Х.Р. Влияние поверхностных дефектов на усталостную долговечность элементов алюминиевых листовых конструкций, работающих в условиях изгиба: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. Москва, 1983. 224 с.
19. Cong J., Liu Z., Zhou S., Zhu X., Gao S. Fatigue life prediction of ultrasonic impact treatment aluminum alloy weld joint based on the continuous damage model and artificial neural network // Engineering Fracture Mechanics. 2025. Vol. 327. Article no. 111503. <https://doi.org/10.1016/j.engfractmech.2025.111503> EDN: FLDGIX
20. Wang Z., Zhang Z., Cheng J., Song G., Liu L. Simultaneously increased strength and plasticity of TIG-welded 7075-T6 aluminum alloy joints via a novel post-weld composite treatment process // Journal of Materials Research and Technology. 2023. Vol. 26. P. 542–555. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.07.228> EDN: VQVBLB

References

1. Zoidov KH, Medkov AA. Implementation of major energy projects in the russian federation in the arctic as part of joint infrastructure and integration initiatives with China and India. *Regional Problems of Transforming the Economy*. 2022;(2):5–22. (In Russ.) <https://doi.org/10.26726/1812-7096-2022-2-5-22> EDN: CPTHNK
2. Kalashnikov VV, Kovalev LN. Geological work in the Republic of Sakha (Yakutia) over 100 years. *Ores and Metals*. 2022;(2):6–24. (In Russ.) <https://doi.org/10.47765/0869-5997-2022-10007> EDN: HZHIHL
3. Voronina EP. Risks and risk management in the implementation of oil and gas development projects of the Arctic shelf. *Scientific Works of the Free Economic Society of Russia*. 2014;182:190–197. (In Russ.) EDN: TUFPJL
4. Zikeev VN, Filippov GA, Shabalov IP. Patterns in the change of mechanical properties of structural steels during long-term service and the modelling of ageing processes. *Problems in Ferrous Metallurgy and Material Science*. 2014;(4):74–82. (In Russ.) EDN: TBEWYJ
5. Krechkovska H, Kulyk V, Vira V, Student O. Regularities of changes in the mechanical properties of constructional steels during long-term operation and modeling of the aging processes. *Procedia Structural Integrity*. 2022;36:334–341. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.043>
6. Jin X, Zhu BY, Xia XX, Li YF, Liu XB, Zhang YW, Xu CL, Yin J, Jia WQ. Study on the microstructure evolution and effect on mechanical properties of P92 steel during long term service. *Materialia*. 2024;35:102124. <https://doi.org/10.1016/j.mtla.2024.102124>
7. Kornev OA, Shuvalov AN, Kornilova AV, Ermakov VA. Integral criterion for the selection of aluminum alloy for the construction of reservoirs in the Arctic. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(6): 605–622. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-6-605-622> EDN: FWXOUY
8. Abramyan SG, Burlachenko OV, Oganessian OV. Construction digitization based on structuring of main technological solutions exemplified by vertical steel tanks. *Eurasian Scientific Journal*. 2024;14(2):17. (In Russ.) EDN: WDIETH
9. Dryndina IV, Shumkaeva EP, Rashchepkina SA. On the construction of steel vertical cylindrical tanks by the rolling method. *International Journal of Humanities and Natural Sciences*. 2025;2-1:213–217. (In Russ.) <https://doi.org/10.24412/2500-1000-2025-2-1-213-217> EDN: OGDZXZ
10. Pochtovik PG. *Low-cycle fatigue strength of metal tanks at oil pumping stations*: [dissertation]. Moscow, 1985. (In Russ.)
11. Bakanov AA, Miroshnik AI, Pimonov MV, Ababkov NV. Mechanical properties of the base metal and the metal in welded joints following the coiling of sheets onto frames of various diameters. *Innovations in Mechanical Engineering*

(InMash-2020): *Proceedings of the 11th International Scientific and Practical Conference, Biysk, 22–23 October 2020. Biysk: I.I. Polzunov Altai State Technical University*, 2020. p. 213–219. (In Russ.) EDN: BVBVCH

12. Vagazova DD, Tlyasheva RR. Analysis of the stress-strain state of the tank panel in the process of rolling onto frames of various diameters. *Izvestiya Tula State University*. 2024;(10):447–452. (In Russ.) <https://doi.org/10.24412/2071-6168-2024-10-447-448> EDN: FXRKWX

13. Gil'manshin RA, Erofeev VV, Sharafiev RG, Yakupov VM. Study of the stress-strain state of coiled sheets of vertical cylindrical tanks in the process of their manufacture and erection. *Petroleum Engineering*. 2015;13(4):193–199. (In Russ.) EDN: VTKTJL

14. Klebanov YaM, Burmistrov AG, Stolyarov NN. Deformation and strength property experimental study of a rolled weld material. *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*. 2012;3(35):133–140. (In Russ.) EDN: PYUQNB

15. Voronin RM, Vagazova DD, Tlyasheva RR, Kuzeev IR. The influence of rolled tank assembly technology on fatigue life. *Izvestiya Tula State University*. 2025;(4):147–155. (In Russ.) <https://doi.org/10.24412/2071-6168-2025-4-147-148> EDN: WTMFCD

16. Komarov PA. Calculation the radius of the rolled inserts in during process of repair steel tanks manufacturing by method of rolling. *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*. 2012;4(36):215–220. (In Russ.) EDN: QBUTOT

17. Tyan VK, Komarov PA, Hudyakov OV. Systems analysis and the behaviour forecast of metal constructions at repair the steel tanks, made by the method of rolling. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2012;14(1-2):435–438. (In Russ.) EDN: PWMOCT

18. Saidov HR. *The Effect of Surface Defects on the Fatigue Life of Components in Aluminum Sheet Structures Subjected to Bending*: [dissertation]. Moscow, 1983. (In Russ.)

19. Cong J, Liu Z, Zhou S, Zhu X, Gao S. Fatigue life prediction of ultrasonic impact treatment aluminum alloy weld joint based on the continuous damage model and artificial neural network. *Engineering Fracture Mechanics*. 2025;327: 111503. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111503> EDN: FLDGIX

20. Wang Z, Zhang Z, Cheng J, Song G, Liu L. Simultaneously increased strength and plasticity of TIG-welded 7075-T6 aluminum alloy joints via a novel post-weld composite treatment process // *Journal of Materials Research and Technology*. 2023;26:542–555. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.07.228> EDN: VQVBLB

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4-399-414

EDN: LOPYUG

Научная статья / Research article

Методы снижения напряжений в ребрах ребристо-кольцевого купола при возникновении аварийной ситуации

А.В. Голиков^{id}, А.М. Коренец^{✉ id}Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация
✉ korieniets@bk.ru

Поступила в редакцию: 7 мая 2026 г.

Доработана: 25 июля 2026 г.

Принята к публикации: 30 июля 2026 г.

Аннотация. Путем анализа отечественных и зарубежных литературных источников исследованы возможные методы управления распределения напряжений в различных конструкциях и рассмотрена возможность их применимости к стальным ребристо-кольцевым куполам при возникновении аварийной ситуации в опорном узле. Проведен расчет численных моделей ребристо-кольцевого купола в различных постановках задач с учетом прогрессирующего обрушения конструкции при повреждении опорного элемента: линейный статический, нелинейный квазистатический, нелинейный динамический. По данным расчета сделаны выводы о характере перераспределения напряжений в конструктивной системе и последующем сценарии обрушения конструкции купола. Проведен анализ численных моделей ребристо-кольцевого купола с поврежденным опорным узлом и моделей, в которых реализованы различные методы регулирования напряженно-деформированного состояния и дана оценка эффективности их использования для управления напряженно-деформированным состоянием в купольных конструкциях при возникновении аварийной ситуации. По результатам численного анализа путем сравнения напряженно-деформированных состояний разных схем с реализованными системами управления распределением усилий в системе предложен механизм регулируемой работы купольного покрытия с допустимой степенью разрушения, позволяющий сохранить несущий каркас и избежать дальнейшего прогрессирующего обрушения.

Ключевые слова: управляемая конструкция, прогрессирующее обрушение, контролируемое разрушение, предварительное напряжение, разгрузка системы

Вклад авторов. Голиков А.В. — общее научное руководство, рецензирование, редактирование, формулировка направления исследования; Коренец А.М. — подготовка текста статьи, проведение исследования, программное обеспечение. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: Голиков А.В., Коренец А.М. Методы снижения напряжений в ребрах ребристо-кольцевого купола при возникновении аварийной ситуации // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 4. С. 399–414. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-399-414> EDN: LOPYUG

Голиков Александр Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 1369-7819, ORCID: 0000-0001-6588-6031; e-mail: av.golikoff@yandex.ru

Коренец Александр Михайлович, аспирант кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 5970-7718, ORCID: 0009-0005-9503-8822; e-mail: korieniets@bk.ru

© Голиков А.В., Коренец А.М., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Methods of Reducing Stress in the Ribs of a Ribbed-Ring Dome in Case of an Accidental Situation

Alexander V. Golikov^{ID}, Alexander M. Korenets^{ID}

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ korienets@bk.ru

Received: May 7, 2026

Revised: July 25, 2026

Accepted: July 30, 2026

Abstract. Through a review of Russian and international scientific literature, this study investigates potential methods for controlling stress distribution in various structural systems and evaluates their applicability to steel ribbed-ring domes in case of accidental situations involving the failure of a support node. Numerical simulations of the ribbed-ring dome were conducted across various problem settings to account for progressive collapse triggered by the localized failure of a supporting element. These simulations encompass linear static, nonlinear quasi-static, and nonlinear dynamic analyses. Based on the computational results, conclusions are drawn regarding the patterns of stress redistribution within the structural system and the subsequent collapse scenarios of the dome. Furthermore, a comparative analysis was performed on numerical models of the ribbed-ring dome with a damaged support node, alongside models incorporating various techniques for stress distribution control. The efficacy of these techniques in controlling the stress distribution in dome structures under accidental situations was rigorously evaluated. Finally, based on the numerical analysis and through a comparative evaluation of the stress distributions across different configurations equipped with force distribution control systems, a mechanism for the adaptive action of the dome roof system is proposed. This mechanism allows for a tolerable degree of localized damage while preserving the integrity of the load-bearing frame and preventing subsequent progressive collapse.

Keywords: controlled structure, progressive collapse, controlled failure, prestressing, system unloading

Authors' contribution: *Golikov A.V.* — supervision, writing — review and editing, conceptualization; *Korenets A.M.* — writing — original draft, investigation, software. All authors are familiar with the final version of the article and approved it.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Golikov AV, Korenets AM. Methods of reducing stress in the ribs of a ribbed-ring dome in case of an accidental situation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):399–414. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-399-414> EDN: LOPYUG

1. Введение

Обеспечение несущей способности конструкции при возникновении аварийной ситуации является одной из задач при проектировании уникальных конструкций и зданий с постоянным массовым пребыванием людей согласно требованию Российского свода правил СП 385.1325800.2018¹. К данным типам конструкций относятся и купольные покрытия ввиду своей распространенности при строительстве общественных зданий и сооружений с большими пролетами.

Особое внимание к защите от прогрессирующего обрушения уделяется однослойным пространственным оболочкам, так как в данных конструкциях повреждение в одном элементе или узле приводит к выходу из строя всех примыкающих элементов, что, в свою очередь, может спровоцировать прогрессирующее обрушение всей конструкции [1]. К данным системам относятся и ребристо-

¹ СП 385.1325800.2018. Свод правил. Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения. Москва : Стандартинформ, 2018. 24 с.

Alexander V. Golikov, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Metal and Timber Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1369-7819, ORCID: 0000-0001-6588-6031; e-mail: av.golikoff@yandex.ru

Alexander M. Korenets, Postgraduate student of the Department of Metal and Timber Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5970-7718, ORCID: 0009-0005-9503-8822; e-mail: korienets@bk.ru

кольцевые купола, которые, несмотря на достаточно высокую степень резервируемости системы, имеют в своей конструкции элементы, выход из строя которых также может привести к значительным повреждениям всего сооружения.

Первые конкретные действия в области защиты зданий от прогрессирующего обрушения стали предприниматься все чаще в конце XX в. [2]. Как один из вариантов решения проблемы обеспечения живучести сооружения при аварийной ситуации ученым сообществом было предложено создание управляемых конструкций. Изучение возможности управления конструкциями с целью создания саморегулируемой конструктивной системы, способной мгновенно реагировать на внешние воздействия путем перераспределения НДС, стало приоритетным направлением для таких отечественных ученых, как Н.П. Абовский и В.Г. Себешев [3]. Ими были рассмотрены различные способы по перераспределению усилий в элементах конструкции с точки зрения строительной механики, что помимо контроля устойчивости сооружения в аварийном состоянии также позволяло решить задачу по более равномерному распределению усилий по элементам конструкции и последующей экономии на материалах путем уменьшения сечения.

Объект исследования — конструктивная система ребристо-кольцевого купола. **Предмет** — характер изменения напряженно-деформированное состояние несущей системы купола при использовании различных методов изменения НДС системы в аварийной ситуации.

Научная новизна состоит в определении степени защиты конструкции ребристо-кольцевого купола от прогрессирующего обрушения каждого из рассматриваемых методов.

Практическая значимость работы — выявление зависимостей в перераспределении напряжений и усилий в рассматриваемых методах защиты от прогрессирующего обрушения в конструкции ребристо-кольцевого купола на основе численных моделей в ПК ЛИРА САПР 2024 R2.3.

Цель исследования — поиск наиболее эффективных методов управления НДС конструкции ребристо-кольцевого купола для создания саморегулируемой конструктивной системы, способной мгновенно реагировать на внешние воздействия путем разгрузки системы и снятия пиковых напряжений [4].

Для достижения цели решен ряд следующих задач:

- критический анализ работ отечественных и зарубежных ученых в области изучения методов управления конструктивными системами;
- оценка применимости рассмотренных методов для конструкции ребристо-кольцевого купола;
- моделирование расчетных схем купола с применением возможных схем по регулированию НДС системы;
- сопоставление результатов моделирования НДС поврежденной схемы со схемами, имеющими разгрузочный механизм регулирования напряжений;
- анализ результатов моделирования защиты от отказа с определением наиболее эффективного метода управления НДС системы применимо к ребристо-кольцевым куполам.

2. Модели и методы

Анализ методов защиты от прогрессирующего обрушения

Перед рассмотрением конкретных конструктивных решений по управлению распределением усилий по элементам конструкции ребристо-кольцевого купола в аварийном режиме работы [5] было проанализировано влияние этих решений в общем виде, а именно на примере численных моделей (рис. 1) (с точки зрения строительной механики) путем замены механизма распределения усилий на линейный простой элемент либо на реакцию или усилие, которое данный механизм должен вызвать [6].

В основу анализа изменения усилий в конструкции купола легли следующие методы изменения НДС системы:

- 1) применение предварительного напряжения в элементах, способного компенсировать дополнительное усилие, вызванное аварийной ситуацией;

- 2) использование затяжек для передачи усилий на менее загруженные элементы;
- 3) уменьшение напряжений в элементах путем разгрузки системы.

Первый метод получил более широкое распространение в железобетонных конструкциях, но с тем нюансом, что там он применяется для повышения несущей способности элемента без изменения сечений и материалов. Сущность метода состоит в предварительном создании усилия в элементе (на этапе строительства), направленного в противоположную сторону от усилия, возникающего в элементе при приложении к нему нагрузки.

Применительно к купольным системам предварительное напряжение может быть приложено к ребрам конструкции в направлении, противоположном усилиям, возникающим в момент повреждения опорного узла. Гипотеза о возможной работе данной теории основана на том, что усилия, возникающие в ребрах при повреждении узла, имеют то же направление, что и при нормальной работе купола и изменяются лишь по величине, то есть направление предварительного напряжения можно задать заранее [7].

В данном методе необходимо определить величину перегруза в наиболее нагруженном элементе и создать предварительное напряжение на эту же величину. Проблема метода состоит в неравномерности напряжений при аварийной ситуации и невозможности заранее определить, в каком из узлов повредится опора, а напряжение будет во всех ребрах приложено одинаковое, поэтому также необходимо проверить на отрицательный эффект от действия данного метода.

Во втором методе затяжки используются как элементы, передающие усилие с перегруженных элементов на недогруженные, тем самым обеспечивая равномерную передачу усилий по ребрам [8]. При анализе работы купола с поврежденным ребром наблюдалась следующая картина распределения напряжений: имелось два типа групп ребер, перегруженные и разгруженные, которые последовательно чередовались по кругу, начиная с группы перегруженных ребер в зоне аварийного узла. Поэтому возникает необходимость в введении в систему элементов, которые могли бы передавать нагрузку с нагруженного ребра на соседнее разгруженное. Также возникает вопрос о месте установки таких элементов, так как из анализа эпюр видно, что максимальные моменты в арках возникают в средней части полуарки, а максимальные усилия в приопорной зоне [9], поэтому в данном методе определяются места максимальных нормальных напряжений, и исходя из этого рассматривается несколько вариантов постановки элементов передачи усилий.

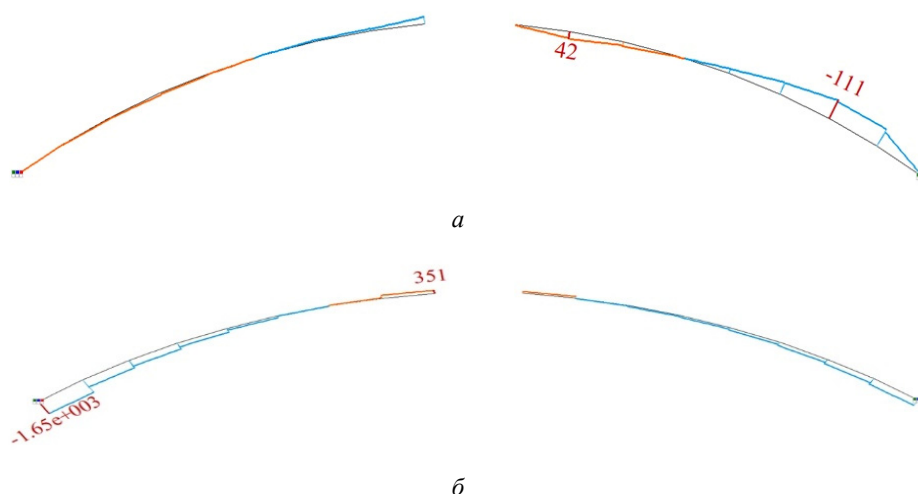


Рис. 1. Эпюры максимальных моментов:

a — и продольных усилий; *б* — в ребрах арки купола

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Figure 1. Diagrams of maximum moments:

a — and longitudinal forces *б* — in the ribs of the dome arch

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

Третий метод с разгрузкой системы подразумевает снятие пиковых напряжений с ребер путем общей разгрузки системы и, как следствие, уменьшение напряжений в целом по системе [10]. В данном случае в разгруженных ребрах напряжения падают до минимума, а в перегруженных ребрах уменьшаются до работоспособного состояния. В купольных конструкциях прикладываются следующие основные типы нагрузок: собственный вес, нагрузка от веса покрытия, снеговая нагрузка, ветровая нагрузка. Три последние нагрузки передаются на купол через кровельные панели покрытия. Сброс данных панелей позволяет оставить в системе напряжения только от собственного веса самой конструкции [11].

Для проверки эффективности различных методов защиты купольного каркаса от прогрессирующего обрушения в программном комплексе ЛИРА САПР 2024 R2.3 разработана модель стального ребристо-кольцевого купола с диаметром основания 42 м, высотой стрелы подъема 7 м, шагом ребер 15° с сечением 35Б2. Для всех элементов применялась сталь С245 по межгосударственному стандарту ГОСТ 27772-2021². При создании модели использовались стержневые конечные элементы типа КЭ10, размеры которых назначались до точек пересечения с соседними элементами, так как данного размера достаточно для анализа по критерию несущей способности элемента, который является основным параметром при оценке эффективности методов. Так как на практике многие типы опорных узлов купольных конструкций имеют жесткое защемление, в схеме на концах ребер были наложены граничные условия в виде ограничения перемещений и углов поворота во всех направлениях [12]. Примыкание колец к ребрам купола выполнено шарнирным с разрешением поворота по осям, перпендикулярным оси стержня. К данной схеме приложены следующие нормативные нагрузки согласно СП 20.13330.2020³:

– нагрузка от кровельного покрытия 0,5 кПа;

– нагрузка от снегового покрова 1,5 кПа,

и третий вариант загрузки для купольной поверхности:

– нагрузка от ветрового воздействия 0,23 кПа.

Расчетное состояние системы предполагает аварийную ситуацию, вызванную дополнительным внешним усилием при наихудшем сочетании проектных нагрузок, поэтому расчет предполагает проверку на два расчетных сочетания нагрузок: основное и особое (рис. 2). Аварийная ситуация предполагает хрупкое разрушение опоры, поэтому в расчетной схеме реализована путем мгновенного удаления узла.

N загруз.	Наименование	Вид	Знакоперен.	Взаимоискл.	Кэф. надежн.	Доля длителн.	1.Основное 1	2.Основное 1	3.Основное 3	4.Особое 1	5.Особое 2	6.Особое 3
Loading ID	Name	Type	Alternating sign	Mutually exclusive	Safety factor	Reduction factor	Basic 1	Basic 2	Basic 3	Special 1	Special 2	Special 3
1	Собственный вес / Self-weight	Постоянное(П) / Permanent	+		1.0	1.0	1.	1.	1.	0.952	0.952	0.952
2	Покровение / Roof	Постоянное(П) / Permanent	+		1.0	1.0	1.	1.	1.	0.833	0.833	0.833
3	Снег 1 / Snow 1	Кратк. прочие (К) / Variable other	+	1	1.2	0.35	1.	0.	0.	0.357	0.	0.
4	Снег 2 / Snow 2	Кратк. прочие (К) / Variable other	+	1	1.2	0.35	0.	1.	0.	0.	0.357	0.
5	Снег 3 / Snow 3	Кратк. прочие (К) / Variable other	+	1	1.2	0.35	0.	0.	1.	0.	0.	0.357
6	Пульсация X / Fluctuation X	Постоянное(П) / Permanent	+		1.0	1.0	1.	1.	1.	1.	1.	1.
7	Ветер X / Wind X	Неактивное (Н/а) / Inactive (N/a)	+		0.0	0.0	0.	0.	0.	0.	0.	0.

Рис. 2. Коэффициенты расчетных сочетаний нагрузок

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Figure 2. Factors of design load combinations

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

Первичным критерием оценки поврежденности элементов купола и эффективности рассматриваемых методов является коэффициент использования сечения по первому предельному состоянию. Анализ конструкции по данному критерию дает представление о степени повреждения элементов,

² ГОСТ 27772-2021. Прокат для строительных стальных конструкций. Общие технические условия. Москва : Российский институт стандартизации, 2021. 35 с.

³ СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. Москва : Стандартинформ, 2018. 95 с.

участках наибольшей концентрации усилий, на которые перераспределилась нагрузка, а также предполагаемом сценарии дальнейшего разрушения конструкции. Данный анализ позволил сделать первоначальные предположения о местах дальнейшего разрушения, которые выступают исходной точкой для применения методов по изменению НДС системы.

Также для уточнения результатов линейного статического расчета выполнен нелинейный геометрический расчет на прогрессирующее обрушение в квазистатической и динамической постановках, по результатам которых проведен сравнительный анализ показателей коэффициентов использования несущей способности сечений элементов, а также значение усилий в наиболее напряженном элементе (табл. 1).

Таблица 1. Расчетные значения усилий в наиболее напряженном элементе при различных постановках задачи

Программный комплекс	ЛИРА САПР 2024 R2.3			
Тип расчета	Линейный статический	Нелинейный квазистатический	Нелинейный динамический	Нелинейный квазистатический с уточненным коэффициентом динамичности
N , кН	1648	1952	1603	1603
M_y , кН×м	87,3	118,7	93,7	93,7
Q_z , кН	34,6	47,1	24,7	24,7
Q_y , кН	0,03	0,1	0,24	0,24
M_z , кН×м	2,1	0,3	1,08	1,08
M_x , кН×м	0,1	0,2	0,11	0,11

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Table 1. Design values of internal forces in the most stressed element for different problem settings

Software	LIRA SAPR 2024 R2.3			
Analysis type	Linear static	Nonlinear quasi-static	Nonlinear dynamic	Nonlinear quasi-static with a refined dynamic amplification factor
N , kN	1648	1952	1603	1603
M_y , kN×m	87,3	118,7	93,7	93,7
Q_z , kN	34,6	47,1	24,7	24,7
Q_y , kN	0,03	0,1	0,24	0,24
M_z , kN×m	2,1	0,3	1,08	1,08
M_x , kN×m	0,1	0,2	0,11	0,11

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

При первичной итерации квазистатического расчета в узле над поврежденной опорой назначался коэффициент динамичности $D_{\text{din}} = 2$ [13].

По результатам данного расчета получено, что обрушение опорного элемента ребра соответствует первой форме колебаний, для которой были приняты частота внутренних колебаний $\nu = 2,43$ рад/с и период колебаний $T = 2,93$ с. Данные параметры были использованы для дальнейшего нелинейного динамического расчета.

При задании динамического расчета были заданы следующие параметры:

- время отказа $dT = 0,1T = 0,1 \times 2,93 = 0,293$ с;
- шаг интегрирования $0,5T = 0,5 \times 2,93 = 1,47$ с;
- время интегрирования 30 с;
- частота для вычисления коэффициентов Рэлея 2,43 рад/с, значение логарифмического декремента колебаний 0,3;
- значение коэффициента Рэлея $\alpha = 0,232$.

По результатам нелинейного динамического расчета получен график кинетической энергии (рис. 3, а) и график вертикальных перемещений надопорного узла (рис 3, б)

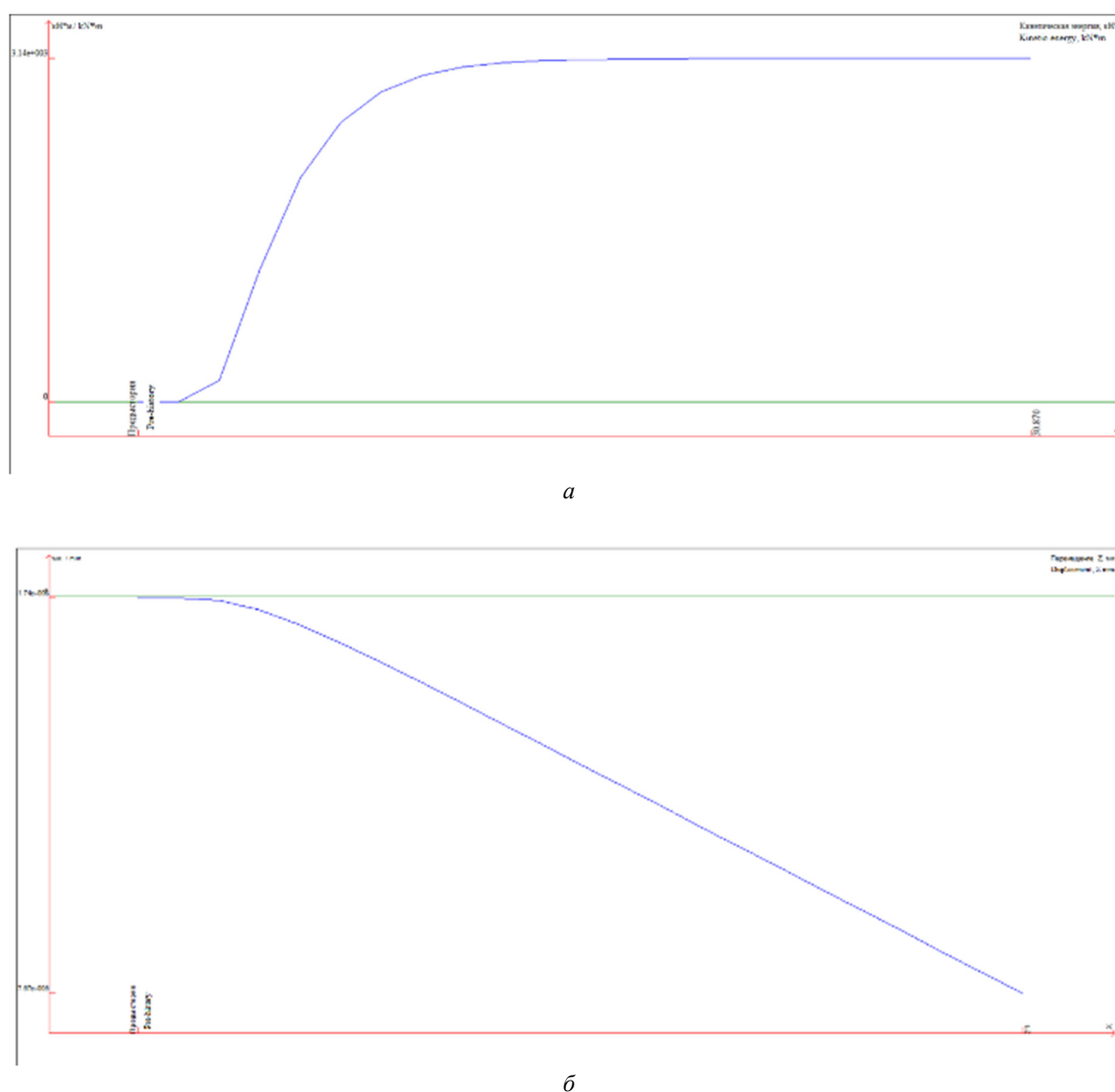


Рис. 3. График кинетической энергии (а), график перемещения надопорного узла по Z, мм (б)

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Figure 3. Kinetic energy graph (а), graph of the displacement of the support node along Z, mm (б)

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

Из анализа графиков получено, что значение максимальных перемещений совпадает с конечной точкой графика, соответствующей равновесному состоянию системы, из чего можно сделать вывод, что коэффициент динамичности для данной конструкции равен $D_{\text{din}} = 1$.

При повторном нелинейном квазистатическом расчете в узле с поврежденным опорным элементом коэффициент динамичности заменен на $D_{\text{din}} = 1$.

В данной схеме рассматривалась аварийная ситуация, при которой опорный узел наиболее нагруженного ребра купола выходит из строя. При такой постановке задачи ребро с поврежденным узлом выключается из работы, и нагрузка от него перераспределяется на соседние ребра, в которых возникают напряжения, значительно превышающие несущую способность ребра. В результате по цепной реакции происходит последовательное разрушение остальных ребер, то есть прогрессирующее обрушение всей конструкции (рис. 4). Данный сценарий перераспределения НДС в системе наблюдался во всех вариантах постановки задачи как при линейном расчете, так и при нелинейном.

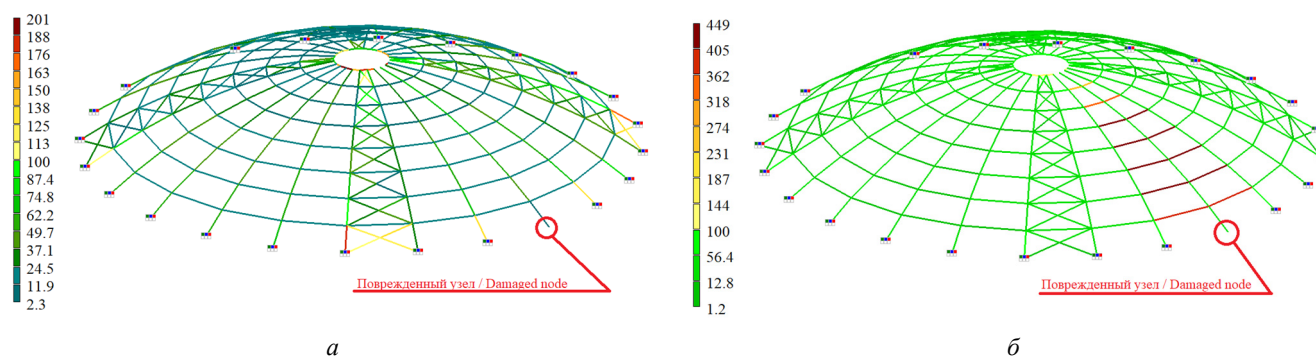


Рис. 4. Мозаика использования сечений по группам предельных состояний:

a — первая группа; *б* — вторая группа

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Figure 4. Mosaic of the utilization of sections by type of limit states:

a — ultimate limit state; *б* — serviceability limit state

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

В поврежденной модели превышение расчетного сопротивления происходило в первую очередь в двух соседних ребрах от места повреждения и ребрах, примыкающих к связям, поэтому первоначально определили величину и точку концентрации максимальных напряжений в данных ребрах. Из анализа продольных усилий и изгибающих моментов выделили четыре наиболее опасных участка:

- участок 1 — в ребре, соседнем с поврежденным с максимальным моментом;
- участок 2 — в ребре, соседнем с поврежденным с максимальным продольным усилием;
- участок 3 — в ребре, примыкающем к связи, с максимальным моментом;
- участок 4 — в ребре, примыкающем к связи, с максимальным продольным усилием.

На основе результатов расчета для особого сочетания нагрузок получены следующие результаты продольных усилий, моментов и нормальных напряжений (табл. 2).

Таблица 2. Расчетные значения N , M_y и σ_x для наиболее опасных участков

Table 2. Design values of N , M_y , and σ_x for the critical regions

№ участка / Region ID	N , кН	M_y , кН×м	σ_x , МПа	1 п.с. / ULS, %	2 п.с. / SLS, %
1	890	123	365	92	52
2	1167	164	408	112	57
3	1019	44	300	107	56
4	1648	87,3	490	168	82

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом / S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

Из анализа данных таблицы получили, что место с наибольшей концентрацией напряжений находится в приопорном участке ребра, примыкающего к связи (участок № 4), поэтому дальнейший анализ методов защиты конструкции от прогрессирующего обрушения проводился для этого участка.

Для удобства анализа изменений в моделях все ребра купола пронумерованы (рис. 5). Повреждение, согласно данной нумерации, рассматривалось в ребре 6, наиболее напряженный участок рассматривался в ребре 9.

Численная модель — 1-й метод

Для метода предварительного напряжения в первой итерации (табл. 3) численной модели приложена нагрузка к наиболее напряженному участку ребра, противоположная направлению внутреннего сжимающего усилия, с величиной, компенсирующей разницу между усилием при аварийной и нормальной работе конструкции. Для данного участка эта величина составляет $1580 - 1270 = 310$ кН. Для данного участка эта величина составляет $1580 - 1270 = 310$ кН. В результате первого приближе-

ния процент использования сечения по первому предельному состоянию уменьшился с 169 до 145 %, в соседнем элементе этого же ребра также уменьшился процент использования с 107 до 106 %. Во второй итерации данная нагрузка предварительного напряжения была приложена ко всем ребрам [14], в результате чего по первому предельному состоянию в ребре 9 процент использования не изменился относительно предыдущей итерации (145 %), но во всех остальных ребрах уменьшился до значений меньше 100 %. В третьей итерации значение предварительного напряжения в ребрах, соединенных со связями, было увеличено до 650 кН, а в остальных ребрах уменьшено до 200 кН. В четвертой итерации нагрузка в ребрах со связями была увеличена до 950 кН. При данных значениях процент использования сечения всех ребер стал меньше 100 % (табл. 4).



Рис. 5. Нумерация ребер купола

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Figure 5. Numbering of the dome ribs

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

Таблица 3. Описание итераций первого метода

№ итерации	Описание
1	Усилие предварительного напряжения прикладывается только к ребрам, исчерпавшим запас прочности при аварийной ситуации. Величина усилия 310 кН
2	Усилие предварительного напряжения прикладывается ко всем ребрам. Величина усилия 310 кН
3	Усилие предварительного напряжения прикладывается ко всем ребрам. Величина усилия для ребер исчерпавших запас прочности — 650 кН, для всех остальных — 200 кН
4	Усилие предварительного напряжения прикладывается ко всем ребрам. Величина усилия для ребер исчерпавших запас прочности — 950 кН, для всех остальных — 200 кН

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Table 3. Description of iterations of the first method

Iteration ID	Description
1	The prestressing force is applied only to the ribs that utilized all their strength under the accidental design situation. The prestressing force is 310 kN
2	The prestressing force is applied to all ribs. The prestressing force is 310 kN
3	The prestressing force is applied to all ribs. The prestressing force is 650 kN for the ribs that utilized all their strength and 200 kN for all other ribs
4	The prestressing force is applied to all ribs. The prestressing force is 950 kN for the ribs that utilized all their strength and 200 kN for all other ribs

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

Таблица 4. Процент использования сечения в ребрах для 1-го метода
 Table 4. Percentage of cross-section utilization in the ribs for the first method

№ ребра / Rib ID	Аварийная работа / Accidental situation	Итерации / Iterations			
		1	2	3	4
1	60	60	35	44	44
2	153	153	129	104	81
3	53	53	30	41	57
4	65	65	40	48	48
5	110	110	85	94	94
6	31	31	31	31	31
7	112	112	87	96	96
8	40	40	39	57	73
9	169	145	145	119	97
10	62	62	37	45	45
11	60	60	35	44	44
12	58	58	34	42	42
13	58	58	33	42	42
14	85	85	62	36	24
15	47	47	23	29	45
16	55	55	30	39	39
17	55	55	30	39	39
18	55	55	30	39	39
19	55	55	30	39	39
20	77	77	54	28	36
21	84	84	61	35	19
22	58	58	33	42	42
23	58	58	33	42	42
24	69	69	44	53	53

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом / S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

Численная модель — 2-й метод

Во втором методе для передачи усилий с перегруженных ребер на менее нагруженные использовались затяжки, выполненные из круга диаметром 30 мм. В первой итерации расчета (рис. 6, *а*) затяжки устанавливались в опорных элементах ребер, соединенных со связями, в верхней точке. По результатам расчета значительных изменений в системе нет: в ребре со связью процент использования уменьшился с 169 до 168 %. Во второй итерации (рис. 6, *б*) при установке затяжек на всех ребрах процент использования сечения уменьшился до 156 %. В третьей итерации (рис. 6, *в*) затяжки устанавливались в точке максимальных моментов [15], и в результате процент использования сечения уменьшился до 147 %.

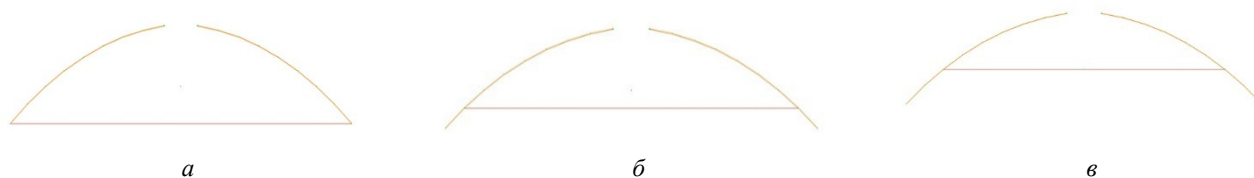


Рис. 6. Схема установки затяжек:

а — первая итерация; *б* — вторая итерация; *в* — третья итерация

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Figure 6. Tie installation diagram:

a — first iteration; *b* — second iteration; *v* — third iteration

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

При дальнейшей установке затяжек еще на уровень выше по ребру привел к увеличению данного показателя в остальных ребрах, поэтому в четвертой итерации использовались затяжки в уровне точек с максимальным моментом с предварительным напряжением в них. При использовании предварительного напряжения значения уменьшаются в пределах 1–2 %, что не дало значительного результата для предотвращения прогрессирующего обрушения конструкции.

Численная модель — 3-й метод

В данном методе моделировалось два варианта расчетных ситуаций: с полным снятием нагрузки и с частичным снятием нагрузки с верхней половины ребер. Система подразумевает сброс кровельных панелей, в результате чего в расчете не учитываются нагрузки от покрытия, ветрового воздействия и снегового покрова. Принципиальное отличие данного метода от двух предыдущих состоит в том, что в предыдущих моделях сохраняется замкнутость системы и общие усилия по системе перераспределяются внутри нее от более загруженных ребер к разгруженным. В данном методе система становится разомкнутой, так как частично снимается внешнее воздействие с нее, в результате чего и происходит уменьшение напряжений в элементах [16].

В первой итерации (рис. 7, б) (табл. 5) система разгружалась полностью и оставалась только нагрузка от собственного веса. Анализ результатов расчета данной итерации показал, что процент использования сечения в ребрах при первом предельном состоянии не превышает 5 %, что говорит о высокой эффективности метода.

Таблица 5. Описание итераций третьего метода

№ Iteration	Описание
1	С конструкции убираются все кровельные панели и нагрузка, которая через них передается
2	С конструкции убирается верхний ярус кровельных панелей возле центрального кольца купола и нагрузка, которая через них передается
3	С конструкции убирается два верхних яруса кровельных панелей от центрального кольца купола и нагрузка, которая через них передается
4	С конструкции убирается три верхних яруса кровельных панелей от центрального кольца купола и нагрузка, которая через них передается
5	С конструкции убирается четыре верхних яруса кровельных панелей от центрального кольца купола и нагрузка, которая через них передается
6	С конструкции убирается пять верхних яруса кровельных панелей от центрального кольца купола и нагрузка, которая через них передается

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Table 5. Description of iterations of the third method

№ итерации	Description
1	All roof panels are removed from the structure, along with the loads transferred through them
2	The uppermost tier of roof panels adjacent to the central ring of the dome is removed from the structure, along with the loads transferred through it
3	The two uppermost tiers of roof panels adjacent to the central ring of the dome are removed from the structure, along with the loads transferred through them
4	The three uppermost tiers of roof panels adjacent to the central ring of the dome are removed from the structure, along with the loads transferred through them
5	The four uppermost tiers of roof panels adjacent to the central ring of the dome are removed from the structure, along with the loads transferred through them.
6	The five uppermost tiers of roof panels adjacent to the central ring of the dome are removed from the structure, along with the loads transferred through them.

S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets

В целях экономической эффективности системы при дальнейшем ее восстановлении [17], в последующих итерациях из модели удалялись последовательно ряды кровельных панелей и нагрузка, которая через них передавалась, начиная с верхнего ряда, примыкающего к центральному кольцу. Итерации проводились до момента пока процент использования самого нагруженного ребра не стал меньше 100 % (табл. 6).

Таблица 6. Процент использования сечения в ребрах для 3-го метода
Table 6. Percentage of cross-section utilization in the ribs for the 3rd method

№ ребра / Rib ID	Аварийная ситуация / Accidental situation	Итерации / Iterations					
		1	2	3	4	5	6
1	60	2	55	51	45	38	28
2	153	5	149	143	130	110	81
3	53	3	50	46	43	35	25
4	65	2	61	56	49	40	28
5	110	3	105	100	91	79	61
6	31	1	30	30	29	28	26
7	112	3	107	102	93	80	62
8	40	4	36	33	28	21	14
9	169	5	164	156	141	117	83
10	62	2	56	52	45	37	27
11	60	2	55	50	44	35	24
12	58	2	54	49	43	34	24
13	58	2	54	49	42	34	24
14	85	5	79	72	63	51	41
15	47	3	44	39	32	23	14
16	55	2	50	46	40	32	22
17	55	2	51	46	40	32	22
18	55	2	51	46	40	32	22
19	55	2	51	46	40	32	22
20	77	3	75	70	61	46	24
21	84	5	78	71	62	51	27
22	58	2	54	49	42	34	24
23	58	2	54	50	44	37	27
24	69	2	66	62	56	47	34

Источники: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом / Sources: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets

3. Результаты исследования и их анализ

По результатам расчетов и анализа работы конструкции в сочетании с методами защиты от прогрессирующего обрушения составлена таблица (табл. 7), где отображены результаты эффективности применения каждого из метода относительно аварийной ситуации.

Таблица 7. Процент использования сечения в ребрах для каждого метода, %
Table 7. Percentage of cross-section utilization in the ribs for each method, %

Параметр / Parameter	1-й метод / 1th method	2-й метод / 2nd method	3-й метод / 3rd method
Максимальный процент использования сечения ребер / Maximum percentage of rib cross-section utilization	97	148	83
Среднее значение уменьшения процента использования сечения по ребрам / The average value of the reduction in the percentage of section utilization along the ribs	21,6	0,0	39,3

Источники: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом / Sources: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets

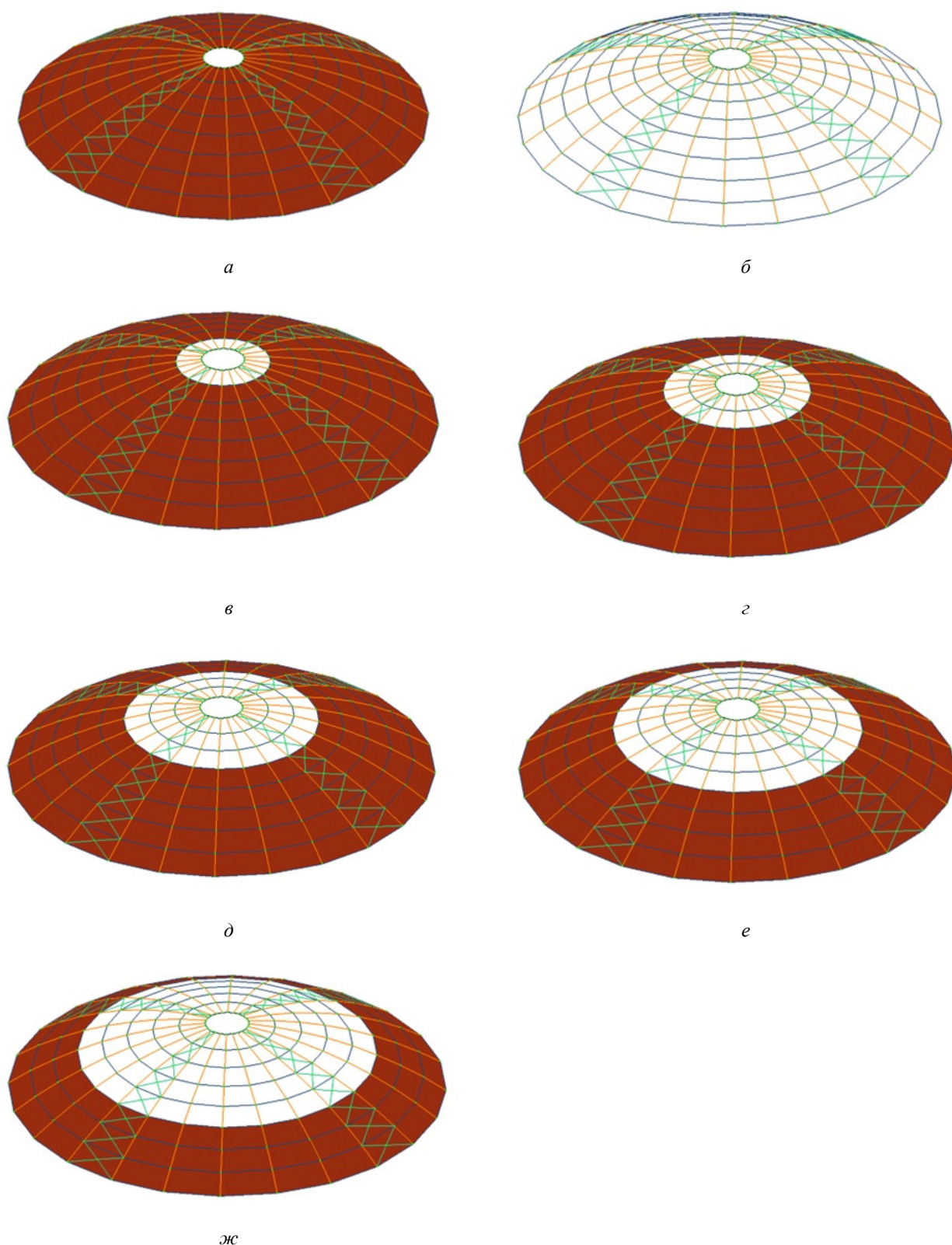


Рис. 7. Расчетная модель:

a — исходное состояние; итерации: № 1 — б, № 2 — в, № 3 — г, № 4 — д, № 5 — е, № 6 — жс
И с т о ч н и к: выполнено А.В. Голиковым, А.М. Коренцом.

Figure 7. Model:

a — initial state; iterations: No. 1 — б, No. 2 — в, No. 3 — г, No. 4 — д, No. 5 — е, No. 6 — жс
S o u r c e: made by A.V. Golikov, A.M. Korenets.

4. Заключение

1. По результатам анализа работы методов защиты стального ребристо-кольцевого купола от прогрессирующего обрушения в случае возникновения аварийной ситуации в опорном узле наибольшую эффективность показал метод № 3 с разгрузкой системы, при котором процент использования сечения в перегруженных ребрах удалось уменьшить до 83 %, а общий средний процент уменьшения составил 39,3 %. Метод № 1 с предварительным напряжением позволил уменьшить процент использования сечений в ребрах до 97 %, а общий средний процент составил 21,6 %. Метод № 2 с использованием затяжек оказался наименее эффективным, не обеспечивая необходимой несущей способности.

2. По результатам анализа 1-го метода можно сказать, что данный метод способен обеспечить работоспособность конструкции и предотвратить ее прогрессирующее обрушение, при этом сохраняется первоначальный эстетический облик конструкции без введения габаритных дополнительных элементов. К недостаткам данного метода можно отнести сложность разработки технологии предварительного натяжения ребер конструкции, а также тот факт, что для разных типов ребер требуется обеспечить разную величину напряжения в пределах одной конструктивной системы.

3. Из результатов работы 2-го метода относительно нулевого значения среднего перераспределения можно сказать, что усилия в конструкции перераспределились, не нарушив замкнутости системы, но, несмотря на снижение усилий в наиболее нагруженном элементе, наличие ребер с процентом использования сечения больше 100 % свидетельствует о недостаточно эффективном и неравномерном перераспределении усилий. Данный факт свидетельствует о невозможности использования данного метода для предотвращения прогрессирующего обрушения. Кроме того, такая конструкция требует внедрения дополнительных элементов с большими габаритами, ограничивающими использование конструкции по эстетическим и технологическим причинам.

4. С точки зрения эффективности третий метод показал наилучшие результаты, так как происходит значительное снижение напряжений и в слабо нагруженных ребрах, а также наблюдается максимальное снижение напряжения в самом нагруженном ребре, что повышает вероятность предотвращения прогрессирующего обрушения. Также данный метод за счет частичного снятия нагрузки имеет дополнительный нереализованный запас для большего снижения нагрузки, что делает его более универсальным для других типоразмеров куполов. К недостаткам данного метода можно отнести значительно большие затраты на восстановление второстепенных конструкций купола.

5. Из анализа всех достоинств и недостатков рассматриваемых методов можно составить следующую градацию приоритетности их применения:

- метод № 3 с разгрузкой системы;
- метод № 1 с предварительным напряжением;
- метод № 2 с использованием затяжек (требует дальнейшей доработки).

6. Исходя из существующей практики анализа работы купольных конструкций, возможно рассмотрение применения данных методов к аналогичным по конструктивной схеме ребристо-кольцевым куполам с другими габаритами.

Список литературы

1. Kolakkattil R., Tsavdaridis K.D., Sanjeevi A.J. A state-of-the-art review of progressive collapse research and guidelines for single-layer lattice shell structures // *Structures*. Vol. 56. 2023. Article no. 104945. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.104945>
2. Xu Z., Yan S. Progressive-collapse mechanism of suspended-dome structures subjected to sudden cable rupture // *Buildings*. 2023. Vol. 13. No. 6. Article no. 1533. <http://doi.org/10.3390/buildings13061533> EDN: YPZCJM
3. Зеленецкий С.А., Себешиев В.Г. Регулирование напряженно-деформированного состояния статически неопределимых ферм способом изменения начальных длин элементов // *Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин)*. 2024. Т. 27. № 3. С. 9–23. <http://doi.org/10.32683/1815-5987-2024-27-93-3-9-23> EDN: KQHNNH

4. Тур В.И., Тур А.В. Влияние на напряженно-деформированное состояние металлического сетчатого купола. Отказ одного из узлов купола // Вузovская наука в современных условиях : сборник материалов 58-й научно-технической конференции : в 2 частях, Ульяновск, 22–31 января 2024 года. Ульяновск : Ульяновский государственный технический университет, 2024. С. 3–5. EDN: TNMJSJ
5. Голиков А.В., Гаранжа И.М., Танасогло А.В. Методика конструкционного формообразования стальных решетчатых башен // Актуальные проблемы строительной отрасли и образования – 2024 : сборник докладов V Национальной научной конференции, Москва, 16 декабря 2024 года. Москва : МГСУ, 2025. С. 30–39. EDN: EEDOCU
6. Tian Li.M., Li D.Ye., Li W., Kou Yu.F. Progressive collapse resistance of single-layer latticed domes under different failure conditions at the same joint // Journal of Building Engineering. 2021. Vol. 36. Article no. 102132. <https://doi.org/110.1016/j.jobe.2020.102132> EDN: KLLNZA
7. Cheng X., Zhonghao Wu Z., Zhen C., Li W., Ma Ch. A novel stability analysis method of single-layer ribbed reticulated shells with roof plates // Thin-Walled Structures. 2024. Vol. 200. Article no. 111902. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111902> EDN: MCAAPO
8. Голиков А.В., Гаранжа И.М., Ильченко А.С., Писарева М.М., Федорова А.Р. Расчетно-аналитическое обоснование влияния прогонов на работу сжатых поясов стальных ферм покрытий // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2025. № 2. С. 31–46. <https://doi.org/110.37153/2618-9283-2025-2-31-46> EDN: VHEHIO
9. Cai Yu., Zheng Ya., Tang J., Luo Ya., Yang Ch. Progressive collapse analysis of single-layer latticed domes under seismic loading using enhanced fiber-based approach // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2024. Vol. 25. Article no. 5. <https://doi.org/110.1142/S0219455425500385> EDN: XJHINH
10. Zhu M., Hu X., Wang J., Jiamin Guo J. A machine learning-based force-finding method for suspend dome structures and case study // Journal of Constructional Steel Research. 2025. Vol. 226. Article no. 109253. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2024.109253> EDN: IGVFII
11. Ferraioli M., Lavino A., Mandara A. Progressive collapse assessment and retrofit of a multistory steel braced office building // International Journal of Steel Structures. 2022. Vol. 22. P. 1086–1107. <https://doi.org/10.1007/s13296-022-00626-x> EDN: PLSTGQ
12. Ye J., Xu L., Yang Y. et al. Comparison of progressive collapse resistance of single-layer latticed domes under different loadings // Journal of Constructional Steel Research. 2017. Vol. 129. P. 204–214. <https://doi.org/110.1016/j.jcsr.2016.11.012>
13. Xiao Z., Li R., Li H., Yan G., Fan R., Jiang S. Effect of joint behaviors on the load-carrying capacity of single-layer reticulated dome // Structures. 2024. Vol. 68. Article no. 107124. <https://doi.org/110.1016/j.istruc.2024.107124> EDN: ZWNHQO
14. Егоров В.В., Егоров В.В., Абу-Хасан М.С., Куправа Л.Р. Определение геометрических размеров купола // Инновационные технологии в строительстве и геоэкологии : материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, Санкт-Петербург, 23 июня 2021 года. Москва : Спутник+, 2021. С. 107–111. EDN: LRBRXA
15. Трянина Н.Ю., Глынина Ю.С. Влияние системы затяжек с предварительным натяжением на напряженно-деформированное состояние ребристо-кольцевого купола // Приволжский научный журнал. 2024. № 1(69). С. 118–124. EDN: FUUDPK
16. Abdollahi A., Poursha M., Abedi K. Seismic response modification factors of single-layer diamatic dome structures // Engineering Structures. 2024. Vol. 310. Article no. 118091. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118091> EDN: KDXQGC
17. Chen L.-M., Huang K.-Y., Liu Y.-J. et al. Analysis and evaluation of the progressive collapse of cable dome structures induced by joint damage // Buildings. 2023. Vol. 13. No. 8. Article no. 2072. <https://doi.org/110.3390/buildings13082072> EDN: BCAYRN
18. Ashoub M.M.N.M., Attia W.A.L. Effect of Alternative Load Path Design Method on Preventing Progressive Collapse and Reducing the Rehabilitation Cost Using FEMA-P58 // Journal of Engineering and Applied Science. 2023. Vol. 70. Article no. 84. <http://doi.org/10.1186/s44147-023-00248-y> EDN: GTBWPZ

References

1. Kolakkattil R, Tsavdaridis KD, Sanjeevi AJ. A state-of-the-art review of progressive collapse research and guidelines for single-layer lattice shell structures. *Structures*. 2023;56:104945. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.104945>
2. Xu Z, Yan S. Progressive-collapse mechanism of suspended-dome structures subjected to sudden cable rupture. *Buildings*. 2023;13(6):1533. <https://doi.org/10.3390/buildings13061533> EDN: YPZCJM
3. Zelenetskiy SA, Sebeshev VG. Regulation of the stress-strain state of statically indeterminate trusses by changing the initial lengths of the elements. *Proceedings of Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)*. 2024;27(3):9–23. (In Russ.) <https://doi.org/110.32683/1815-5987-2024-27-93-3-9-23> EDN: KQHHE
4. Tour VI, Tour AV. Influence on the stress state of a metal reticulated dome. Failure of one of the dome nodes. *University science in modern conditions: Collection of materials of the 58th scientific and technical conference*. In 2 parts, Ulyanovsk, January 22–31, 2024. Ulyanovsk: Ulyanovsk State Technical University, 2024. p. 3–5. (In Russ.) EDN: TNMJSJ

5. Golikov AV, Garanzha IM, Tanasoglo AV. *Methodology of structural shaping of steel lattice towers. Current issues of the construction industry and education — 2024: Collection of reports of the V National scientific conference*, Moscow, December 16, 2024. Moscow: MGSU; 2025. p. 30–39. (In Russ.) EDN: EEDOCU
6. Tian LiM, Li DY, Li W, Kou YuF. Progressive collapse resistance of single-layer latticed domes under different failure conditions at the same joint. *Journal of Building Engineering*. 2021;36:102132. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2020.102132> EDN: KLLNZA
7. Cheng X, Wu Z, Zhen C, Li W, Ma Ch. A novel stability analysis method of single-layer ribbed reticulated shells with roof plates. *Thin-Walled Structures*. 2024;200:111902. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111902> EDN: MCAAPO
8. Golikov AV, Garanzha IM, Ilchenko AS, Pisareva MM, Fedorova AR. Analytical justification of influence of purses on the work of steel roof trusses compressed chain belt. *Earthquake Engineering. Constructions Safety*. 2025;(2):31–46. (In Russ.) <https://doi.org/10.37153/2618-9283-2025-2-31-46> EDN: VHEHIO
9. Cai Yu, Zheng Ya, Tang J, Luo Ya, Yang Ch. Progressive Collapse Analysis of Single-Layer Latticed Domes Under Seismic Loading Using Enhanced Fiber-Based Approach. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2024;25(5). <https://doi.org/10.1142/S0219455425500385> EDN: XJHINH
10. Zhu M, Hu X, Wang J, Guo J. A machine learning-based force-finding method for suspend dome structures and case study. *Journal of Constructional Steel Research*. 2025;226:109253, <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2024.109253> EDN: IGVFII
11. Ferraioli M, Lavino A, Mandara A. Progressive collapse assessment and retrofit of a multistory steel braced office building. *International Journal of Steel Structures*. 2022;22:1086–1107. <https://doi.org/10.1007/s13296-022-00626-x> EDN: PLSTGQ
12. Ye J, Xu L, Yang Y. et al. Comparison of progressive collapse resistance of single-layer latticed domes under different loadings. *Journal of Constructional Steel Research*. 2017;(129):204–214. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2016.11.012>
13. Xiao Z, Li R, Li H, Yan G, Fan R, Jiang S. Effect of joint behaviors on the load-carrying capacity of single-layer reticulated dome. *Structures*. 2024;68:107124. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.107124> EDN: ZWNHQQ
14. Egorov VV, Abu-Khasan MS, Kuprava MS. Determination of the geometric dimensions of the dome. Innovative technologies in construction and geoecology. *Proceedings of the VIII International scientific and practical internet conference*, St. Petersburg, June 23, 2021. Moscow: Sputnik+ Publ.; 2021. p. 107–111. (In Russ.) EDN: LRBRXA
15. Tryanina NYu, Glynina YuS. The effect of a prestressed tightening system on the stress-strain state of a ribbed dome. *Privolzhsky Scientific Journal*. 2024;(1):118–124. (In Russ.) EDN: FUUDPK
16. Abdollahi A, Poursha M, Abedi K. Seismic response modification factors of single-layer diametric dome structures. *Engineering Structures*. 2024;310:118091. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118091> EDN: KDXQGC
17. Chen L-M, Huang K-Y, Liu Y-J. et al. Analysis and evaluation of the progressive collapse of cable dome structures induced by joint damage. *Buildings*. 2023;13(8):2072. <http://doi.org/10.3390/buildings13082072> EDN: BCAYRN
18. Ashoub MMNM, Attia WAL. Effect of alternative load path design method on preventing progressive collapse and reducing the rehabilitation cost using FEMA-P58. *Journal of Engineering and Applied Science*. 2023;70:84. <http://doi.org/10.1186/s44147-023-00248-y> EDN: GTBWPZ

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4-415-430

EDN: LRRDJN

Научная статья / Research article

Анализ эффективности фрикционных демпферов в многоэтажных каркасах при варьiruемой интенсивности сейсмических воздействий

Э.Н. Егерев^{id}, С.А. Калиновский^{✉ id}, Н.В. Семченков^{id}

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ kalinovskiiSA@mgsu.ru

Поступила в редакцию: 29 мая 2026 г.

Доработана: 26 июня 2026 г.

Принята к публикации: 27 июля 2026 г.

Аннотация. Представлено численное исследование динамической реакции структурного каркаса, оснащенного дополнительной системой демпфирования, при сейсмических воздействиях интенсивностью от 3 до 9 баллов. В исследовании проведено сравнение пиковых перемещений и ускорений на уровне верхнего этажа для базовой конфигурации и конфигурации с демпферами. Результаты показывают, что установка демпфирующих устройств приводит к значительному снижению пиковых горизонтальных перемещений: на 40,5 % при низкой интенсивности и более чем на 53 % при экстремальной сейсмической нагрузке в 9 баллов. Кроме того, анализ акселерограмм во времени показывает, что система демпфирования эффективно подавляет высокочастотные остаточные колебания и эффекты «биений», характерные для незащищенной конструкции. Рассматривается механическое устройство фрикционного типа. Важным выводом исследования является то, что демпфированная структура при экстремальном воздействии в 9 баллов демонстрирует реакцию, сопоставимую с незащищенным каркасом при умеренном 5-балльном воздействии. Установлено, что энергодиссипативная способность системы обеспечивает быстрый переход от вынужденных колебаний к затухающим в течение 12–14 с во всех протестированных сценариях. Полученные результаты подтверждают эффективность и надежность предлагаемого решения по демпфированию в снижении динамических нагрузок и предотвращении усталости конструкций при сильных сейсмических событиях.

Ключевые слова: сейсмостойкое строительство, железобетонный каркас, сухое трение, динамический отклик, диссипация энергии, эффект биений, высокочастотные колебания, численное моделирование

Вклад авторов. Егерев Э.Н. — концепция исследования, разработка расчётной модели; Калиновский С.А. — доработка и научное редактирование; Семченков Н.В. — выполнение расчетов по представленному алгоритму, техническое редактирование. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Егерев Эльвира Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 3128-6470, ORCID: 0000-0002-5474-924X; e-mail: EgerevaEN@mgsu.ru

Калиновский Сергей Андреевич, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 1638-7838, ORCID: 0000-0001-6780-5215; e-mail: KalinovskiiSA@mgsu.ru

Семченков Николай Владимирович, магистрант Института гидротехнического и энергетического строительства, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; ORCID: 0009-0006-7423-4960; e-mail: nikolajsemcenkov5@gmail.com.

© Егерев Э.Н., Калиновский С.А., Семченков Н.В., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: *Егерева Э.Н., Калиновский С.А., Семченков Н.В.* Анализ эффективности фрикционных демпферов в многоэтажных каркасах при варьируемой интенсивности сейсмических воздействий // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2026. Т. 22. № 4. С. 415–430. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-415-430> EDN: LRRDJN

Analysis of the Effectiveness of Friction Dampers in Multi-Storey Buildings with Varying Intensity of Seismic Impacts

Elvira N. Egereva^{id}, Sergey A. Kalinovsky^{✉ id}, Nikolai V. Semchenkov^{id}

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ kalinovskisa@mgsu.ru

Received: May 29, 2026

Revised: June 26, 2026

Accepted: July 27, 2026

Abstract. A numerical study of the dynamic response of a structural frame equipped with an additional damping system under seismic impacts with an intensity of 3 to 9 is presented. The study compares peak displacements and accelerations at the upper floor level for the basic configuration and the configuration with dampers. The results show that the installation of damping devices leads to a significant reduction in peak horizontal displacements: by 40.5% at low intensity and by more than 53% at an extreme seismic load of intensity 9. In addition, the analysis of accelerograms over time shows that the damping system effectively suppresses high-frequency residual vibrations and the effects of “beats” characteristic of an unprotected structure. A friction-type mechanical device is considered. An important conclusion of the study is that the damped structure under an extreme impact of intensity 9 demonstrates a reaction comparable to an unprotected frame under a moderate impact of intensity 5. It was found that the energy dissipative ability of the system ensures a rapid transition from forced to damped vibrations within 12–14 seconds in all tested scenarios. The results obtained confirm the effectiveness and reliability of the proposed damping solution in reducing dynamic loads and preventing structural fatigue during severe seismic events.

Keywords: earthquake-resistant construction, reinforced concrete frame, dry friction, dynamic response, energy dissipation, beating effect, high-frequency vibrations, numerical modeling

Authors' contribution. *Egereva E.N.* — conceptualization; *Kalinovskiy S.A.* — writing — review and editing; *Semchenkov N.V.* — performing calculations according to the proposed algorithm. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Egereva EN, Kalinovsky SA, Semchenkov NV. Analysis of the effectiveness of friction dampers in multi-storey buildings with varying intensity of seismic impacts. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026; 22(4):415–430. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-415-430> EDN: LRRDJN

1. Введение

1.1. Актуальность

Сейсмические воздействия представляют одну из наиболее серьезных угроз для зданий и сооружений, особенно в регионах с высокой сейсмической активностью. Традиционные подходы к сейсмозащите, основанные на увеличении жесткости и прочности несущих конструкций, часто при-

Elvira N. Egereva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural and Theoretical Mechanics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 3128-6470, ORCID: 0000-0002-5474-924X; e-mail: EgerevaEN@mgsu.ru

Sergey A. Kalinovsky, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural and Theoretical Mechanics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1638-7838, ORCID: 0000-0001-6780-5215; e-mail: KalinovskiiSA@mgsu.ru

Nikolai V. Semchenkov, Master's Student at the Institute of Hydraulic and Power Engineering, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0009-0006-7423-4960; e-mail: nikolajsemcenkov5@gmail.com

водят к значительному удорожанию строительства и не всегда эффективны при экстремальных (за-проектных) воздействиях. В этой связи все большее распространение получают системы пассивного сейсмогашения, позволяющие снизить динамический отклик здания без существенного увеличения его материалоемкости [1–5]. Среди таких систем особое место занимают фрикционные демпферы, которые рассеивают сейсмическую энергию за счет сил сухого трения, возникающих между контактными поверхностями при взаимных перемещениях [6; 7]. Обеспечение сейсмической безопасности объектов гражданской инфраструктуры остается одной из наиболее актуальных задач строительного проектирования, особенно в регионах, подверженных высокоинтенсивным землетрясениям. На современном этапе развития строительной индустрии, ввиду обновления нормативной документации на основе уточненных данных исследований, перечень регионов, официально отнесенных к зонам повышенного сейсмического риска, существенно расширился по сравнению с ранее утвержденными нормами [1]. Проблема сейсмичности дополнительно усугубляется при строительстве на просадочных и набухающих грунтах, распространенных на территории нашей страны, так как специфическим свойством таких грунтов является их способность при повышении влажности уменьшать скорость прохождения поперечных сейсмических волн, что, в свою очередь, неблагоприятно сказывается на устойчивости зданий и сооружений [2]. Традиционные концепции сейсмостойкого проектирования зачастую опираются на пластичность структурных элементов для диссипации энергии за счет неупругих деформаций, что нередко приводит к необратимым повреждениям конструкций или их полному обрушению при сильных воздействиях. Для минимизации подобных рисков интеграция дополнительных систем диссипации энергии зарекомендовала себя как высокоэффективная стратегия защиты и новых, и существующих каркасных зданий [8–11].

1.2. Обзор существующих решений

В последние годы активно развиваются новые конструкции фрикционных демпферов, ориентированные на повышение эффективности энергопоглощения и расширение функциональных возможностей. В [12] предложена новая конструкция роторного демпфера (RAFD), позволяющая многократно увеличить силу трения без чрезмерного роста нормальной нагрузки. Авторы провели экспериментальные исследования на прототипе, разработали нелинейную механическую модель (с учетом зазора между зубчатым колесом и рейкой) и валидировали ее на основе экспериментальных данных. Аналитическое исследование системы с одной степенью свободы подтвердило его превосходство над традиционными демпферами. В [13] представлен двухступенчатый фрикционный самовосстанавливающийся демпфер (TFSD), который обеспечивает энергопоглощение на первой ступени и совмещает энергопоглощение с самовосстановлением на второй. Экспериментальные циклические испытания подтвердили его работу, а численная модель в OpenSees показала хорошее согласие с экспериментом. Параметрический анализ на многоэтажной раме продемонстрировал преимущества TFSD в контроле межэтажных деформаций и ускорений по сравнению с рамными системами с BRB.

В [14] представлен новый самовосстанавливающийся фрикционный демпфер (SCFD), предназначенный для повышения сейсмостойкости неразрезных мостов. Авторы разработали аналитическую модель восстанавливающей силы и предложили формулу для расчета демпфирующей силы при разных углах намотки фрикционного троса. Многофакторные квазистатические испытания подтвердили стабильную работу устройства, высокую способность к диссипации энергии и точность предложенных теоретических формул.

В экспериментальном и численном исследовании [15] предложен самовосстанавливающийся фрикционный демпфер (SFD) со встроенным механизмом самовосстановления на основе тарельчатых пружин. Авторы провели пять экспериментов с различными комбинациями пружин и сил трения, разработали теоретическую гистерезисную модель и верифицировали ее. Результаты показали, что остаточная деформация во всех экспериментах не превышала 10 % от максимального перемещения. Моделирование в ABAQUS подтвердило согласие с экспериментом (более 90 % по максимальному усилию).

1.3. Исследовательский пробел (GAP)

Анализ современной литературы показывает, что большинство исследований [12–19] сосредоточено на подтверждении факта снижения сейсмического отклика при установке фрикционных демпферов, как правило, для одного расчетного сценария (обычно для одного уровня интенсивности землетрясения). Однако в этих исследованиях остается открытым вопрос о поведении системы в широком диапазоне интенсивностей от умеренных воздействий, при которых конструкция работает упруго, до предельных, приближающихся к обрушению.

В частности, в литературе отсутствуют количественные критерии, позволяющие оценить, при каких интенсивностях демпфер сохраняет свою эффективность; систематические данные о том, способен ли демпфер «нормализовать» отклик системы, сводя экстремальные перемещения к уровню, характерному для управляемых (расчетных) воздействий; анализ чувствительности этих эффектов к изменению жесткостных параметров самой рамы, что важно для оценки надежности применения таких систем в реальных зданиях с неизбежным разбросом свойств материалов.

Среди различных технологий пассивного контроля значительное внимание привлекли фрикционные демпфирующие устройства благодаря их механической простоте, высокой энергоемкости и экономической эффективности [20–23]. Принцип работы данных устройств основан на сухом трении между скользящими поверхностями, что позволяет преобразовывать кинетическую энергию в тепловую и ограничивать сейсмические силы, передаваемые на основную конструктивную систему [24–26]. В отличие от вязкостных демпферов фрикционные устройства характеризуются высокой надежностью и минимальными требованиями к обслуживанию, так как в их конструкции отсутствуют уплотнения или рабочие жидкости, подверженные старению или утечке [27].

Тем не менее поведение конструкций с фрикционными демпферами в широком спектре сейсмических интенсивностей от незначительных толчков до экстремальных воздействий в 9 баллов требует детального численного исследования. Большинство традиционных работ сосредоточено на конкретных сценариях землетрясений. Сравнительный анализ работы систем с демпфированием и без него при различных масштабах интенсивности зачастую упускается из вида. Кроме того, способность фрикционных устройств подавлять остаточные колебания и сложные явления, такие как эффекты «биений» в многоэтажных каркасах, остается областью активных исследований [17; 28–29].

Таким образом, научная проблема состоит в отсутствии количественно обоснованных закономерностей, описывающих эффективность фрикционного демпфера как средства **нормализации** поведения конструкции при переходе от умеренных к экстремальным сейсмическим воздействиям.

1.4. Цель и задачи исследования

Настоящее исследование направлено на восполнение указанных пробелов. Выполнено систематическое параметрическое исследование влияния интенсивности сейсмического воздействия (в диапазоне от 6 до 9 баллов) на эффективность фрикционного демпфера в составе стального рамного каркаса. Для достижения цели решались следующие задачи:

- 1) разработка конечно-элементной модели рамного каркаса с фрикционным демпфером и ее верификация (исследование сходимости по сетке, сравнение с аналитическими решениями);
- 2) количественная оценка снижения пиковых перемещений и ускорений при различных уровнях сейсмического воздействия (PGA от 0,05g до 0,8g);
- 3) проверка гипотезы о нормализации поведения конструкции, т.е. способности демпфера обеспечивать снижение пиковых реакций до уровня, соответствующего воздействию меньшей интенсивности (введение коэффициента редукции и критерия эквивалентной интенсивности);
- 4) анализ чувствительности полученных результатов к варьированию жесткости узлов и конструктивного демпфирования для оценки устойчивости предложенного решения.

Настоящее исследование посвящено решению данных вопросов посредством комплексного численного исследования динамической реакции структурного каркаса, оснащенного дополнитель-

ными фрикционными демпферами. С использованием высокоточного динамического анализа (time-history analysis) исследуются параметры перемещений и ускорений в критических узлах конструкции при сейсмической интенсивности от 3 до 9 баллов. *Основная цель* — количественно оценить снижение пиковых динамических реакций (перемещений и ускорений) конструктивной системы при включении фрикционного демпфера, а также проверить гипотезу о возможности нормализации поведения сооружения в условиях интенсивного сейсмического воздействия. Под нормализацией понимается снижение пиковых откликов до уровня, соответствующего более слабому (расчетному) воздействию, при котором конструкция сохраняет упругую работу без развития необратимых деформаций [30–32].

2. Методы

В качестве базовой конструкции для данного исследования выбран трехэтажный монолитный железобетонный каркас. Геометрическая конфигурация определена следующим образом: высота каждого этажа составляет 3,0 м, ширина пролета равна 6,0 м, общая высота здания 9,0 м. Плоская (2D) конечно-элементная модель каркаса разработана в программном пакете Abaqus/CAE 2024 (Dassault Systèmes). Каркас смоделирован в виде стержневой системы. Колонны и ригели дискретизированы двухузловыми линейными балочными элементами B21, позволяющими учитывать изгибные и осевые деформации. Для обеспечения точности воспроизведения динамических характеристик принят размер конечного элемента приблизительно 0,3 м. Дискретизация выполнена двухузловыми балочными элементами B21, реализующими теорию Тимошенко (учет поперечного сдвига). Обоснование шага сетки выполнено на основе критерия, рекомендованного для балочных систем: для корректного описания изгибных деформаций в линейной постановке необходимо не менее 8–10 элементов на полуолне (или на длине стержня при отсутствии сосредоточенных моментов). В данной модели каждый стержень (пролетом 3 м) разделен на 10 элементов с шагом 0,3 м. Для проверки сходимости было выполнено сравнение с сеткой, содержащей 15 элементов на стержень (шаг 0,2 м). Расхождение по значениям максимальных перемещений и изгибающих моментов составило менее 0,8 %, что подтверждает принятый шаг 0,3 м в качестве расчетного. Материал каркаса — тяжелый бетон класса В30. В рамках настоящего сравнительного исследования его поведение принято линейно-упругим, поскольку основной целью являлась оценка относительной эффективности демпфера в снижении отклика конструкции. Характеристики материала каркаса приняты согласно СП 63.13330.2012¹ для бетона естественного твердения: плотность $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, нормативный начальный модуль Юнга $E = 32,5 \text{ ГПа}$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$. Поперечные сечения колонн и ригелей приняты прямоугольными: для колонн $0,4 \times 0,4 \text{ м}$, для ригелей $0,4 \times 0,6 \text{ м}$. В модель включен фрикционный демпфер, установленный в виде диагональной связи на первом этаже. Демпфер соединяет верхний узел левой колонны (координаты $x = 0,3 \text{ м}$) с нижним узлом правой колонны (координаты $x = 6,0 \text{ м}$). Демпфер смоделирован с использованием соединительного элемента Translator в SIMULIA Abaqus 2023. Данный элемент обеспечивает одноосную зависимость силы от перемещения вдоль своей оси. Поведение демпфера определяется двумя параметрами: упругая жесткость $D_{11} = 1,0 \times 10^8 \text{ Н/м}$ (осевая жесткость демпфера в сборе); сила проскальзывания, равная 5000 Н. Модель кулоновского трения реализована посредством задания пластических свойств соединителя. Пластическое движение при достижении усилия проскальзывания принято равным нулю, что соответствует идеальному жесткопластическому поведению фрикционного элемента. Сопряженная пластичность не учитывалась. Концы соединительного элемента прикреплены к узлам рамы с помощью кинематических связей, обеспечивающих жесткую передачу нагрузки. Для оценки работы демпфера при различной интенсивности сейсмических воздействий на раму поданы синтетические акселерограммы, соответствующие магнитудам 3, 5 и 9 баллов по шкале MSK-64. Пиковые ускорения грунта

¹ СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции (актуализированная редакция СНиП 52-01-2003). Москва, 2015. 162 с.

(PGA) для указанных магнитуд приняты равными 0,3, 1,0 и 7,0 м/с² соответственно. Продолжительность каждого сейсмического сигнала равна 20 с. Сейсмическое воздействие моделировалось приложением горизонтальной инерционной нагрузки ко всей конструкции [33; 34]. На этапе динамического анализа это реализовано посредством нагрузки гравитационного типа с масштабным коэффициентом 1,0, заданной по соответствующей амплитудной кривой. Узлы в основании колонн закреплены по всем степеням свободы ($U_1 = U_2 = UR_3 = 0$) [35]. Численное моделирование проводилось с использованием динамической, явной процедуры в пакете Abaqus/Explicit, который хорошо подходит для анализа сильно нелинейных переходных задач, связанных с трением и большими деформациями. Анализ проводился в два этапа:

1. Гравитационная нагрузка. Сначала был использован статический общий этап для определения собственного веса конструкции (гравитационная нагрузка 9,81 м/с²).

2. Сейсмическое возбуждение. После этапа определения силы тяжести следовал динамический явный этап для определения горизонтального сейсмического ускорения.

Для каждого уровня магнитуды (3, 5 и 9 баллов) были проанализированы две конфигурации модели: рамы без демпфера и рамы, оснащенной фрикционным демпфером.

Верификация разработанной конечно-элементной модели выполнялась путем сопоставления результатов расчета с опубликованными экспериментальными данными для фрикционных демпферов. В исследовании [35; 36] представлены испытания фрикционных демпферов с улучшенной центрирующей способностью, показавшие высокую эффективность в рассеивании энергии. Авторами [37] выполнен детальный конечно-элементный анализ усиленного ротационного фрикционного демпфера в SIMULIA Abaqus 2023, при этом расхождение между численными и экспериментальными результатами не превысило 5 %. В [38] исследовано сейсмическое поведение железобетонных рамных конструкций с переменным фрикционным демпфером; верификация модели по данным экспериментов подтвердила ее адекватность для оценки динамического отклика системы.

В настоящем исследовании использовалась аналогичная методика моделирования фрикционного демпфера и железобетонного каркаса в Abaqus/Explicit. Сопоставление расчетных гистерезисных петель демпфера с данными, представленными в [37], показало расхождение по ключевым параметрам (сила проскальзывания, упругая жесткость, диссипируемая энергия) в пределах 5–7 %, что подтверждает корректность принятых моделей материалов и контактных взаимодействий.

3. Результаты и обсуждение

3.1. Критерии оценки и результаты сравнительного анализа моделей

Из результатов моделирования были извлечены следующие выходные переменные для сравнительного анализа: горизонтальное смещение (U1) и ускорение (A1) верхнего левого углового узла; осевое усилие (CTF1) и относительное смещение (CU1) в соединительном элементе фрикционного демпфера.

Распределение напряжений фон Мизеса в каркасе для оценки напряженного состояния бетона: эффективность демпфера оценивалась путем сравнения пиковых значений этих параметров для моделей «с демпфером» и «без демпфера» при каждом уровне сейсмической интенсивности.

Характеристика ускорения эталонного (незатухающего) кадра представлена на рис. 1, а. При 3-балльной сейсмической активности верхний этаж демонстрирует постоянные высокочастотные колебания в течение всего 20-секундного периода моделирования. Ключевым замечанием является отсутствие рассеивания энергии: амплитуды ускорения колеблются в диапазоне от $\pm 0,05$ до $0,10$ м/с² без существенного снижения после первоначального удара. Этот устойчивый динамический отклик свидетельствует о том, что даже сейсмические явления низкой интенсивности могут вызывать длительную вибрацию в незащищенных конструктивных системах, что потенциально может привести к усталости соединений и вспомогательных элементов.

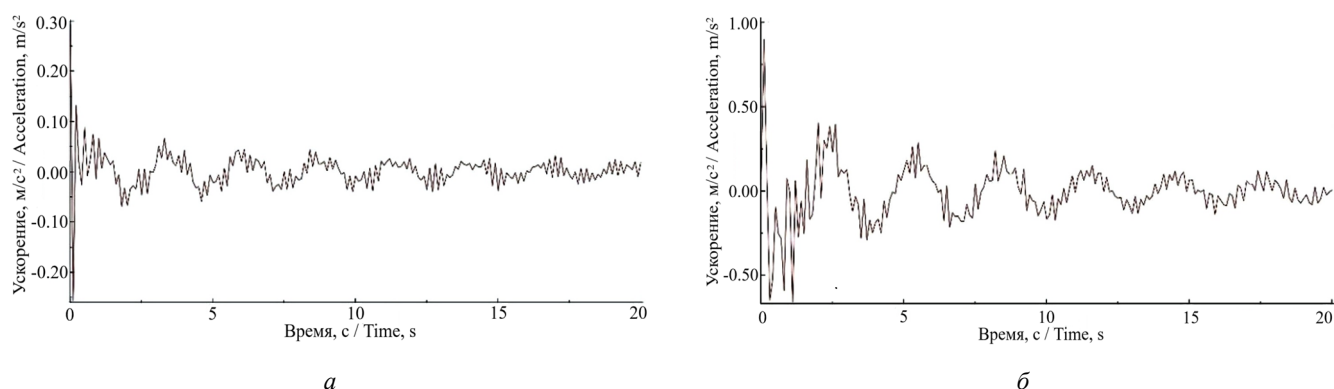


Рис. 1. Временная зависимость ускорений верхнего этажа при сейсмической интенсивности 3 балла:

a — без системы демпфирования; *б* — с системой демпфирования

И с т о ч н и к: выполнено авторами с помощью Abaqus.

Figure 1. Time history of accelerations of the upper floor at a seismic intensity of 3:

a — without damping system; *б* — with damping system

S o u r c e: made by the authors in Abaqus.

Показана высокая чувствительность и эффективность разработанной системы демпфирования при воздействиях малой интенсивности (3 балла), выраженная в сокращении времени релаксации системы более чем на 65 % по сравнению с эталонной моделью (рис. 1, б). Данный график устанавливает, что применение фрикционного демпфера сухого трения позволяет эффективно гасить не только основные тона колебаний, но и высокочастотный спектр отклика верхних этажей при малых амплитудах перемещений.

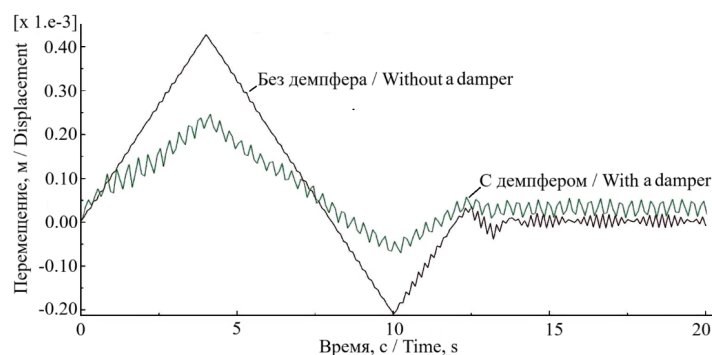


Рис. 2. Сравнение горизонтальных перемещений верхнего этажа для конструкции с демпфером и без него при сейсмической интенсивности 3 балла

И с т о ч н и к: выполнено авторами с помощью Abaqus.

Figure 2. Comparison of the horizontal displacements of the upper floor for a structure with and without a damper at a seismic intensity of 3.

S o u r c e: made by the authors in Abaqus.

По графику рис. 2 установлены критические параметры динамической податливости незащищенного каркаса при малых воздействиях, выраженные в достижении пиковых перемещений $0,42 \times 10^{-3}$ м.

В ходе численного моделирования установлено, что даже при слабой интенсивности (3 балла) отсутствие систем демпфирования приводит к возникновению незатухающих высокочастотных вибраций, что обосновывает необходимость применения методов активной или пассивной виброзащиты. Характеристика горизонтального смещения верхнего этажа для демпфированной конфигура-

ции представлена на рис. 2. При нагрузке интенсивностью в 3 балла максимальное смещение достигает максимума в $0,25 \times 10^{-3}$ м при $t = 4$ с. Примечательной особенностью отклика является наложение высокочастотных колебаний на основной низкочастотный тренд, что можно объяснить динамическим взаимодействием рамы и демпфирующих устройств. После активной фазы нагружения ($t > 12$ с) система эффективно стабилизируется, при этом остаточные колебания поддерживаются на минимальном уровне $\pm 0,05 \times 10^{-3}$ м. Это подтверждает способность системы демпфирования обеспечивать контроль смещения даже при ударах низкой амплитуды.

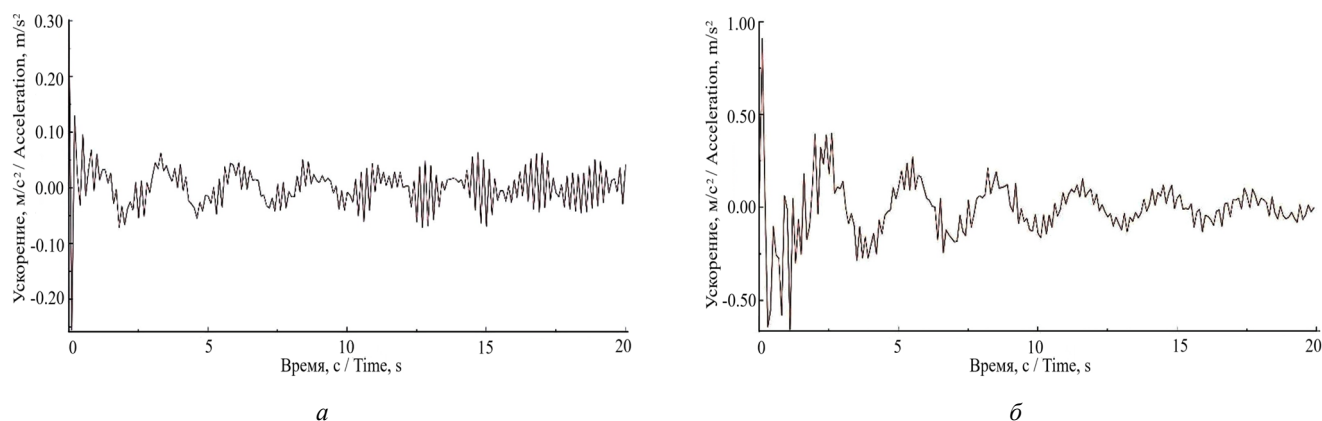


Рис. 3. Временная зависимость ускорений верхнего этажа при сейсмической интенсивности 5 баллов:

a — без системы демпфирования; *б* — системой демпфирования

И с т о ч н и к: выполнено авторами с помощью Abaqus.

Figure 3. Time history of accelerations of the upper floor at a seismic intensity of 5:

a — without damping system; *б* — with damping system

S o u r c e: made by the authors in Abaqus.

Реакция незатухающей системы отсчета на ускорение при нагрузке интенсивностью 5 баллов показана на рис. 3, *a*. После первоначального сейсмического воздействия узел верхнего этажа демонстрирует постоянные высокочастотные колебания, которые не проявляют существенного затухания в течение 20-секундного периода моделирования. Отличительной особенностью этого отклика является эффект «биения», при котором амплитуды ускорения колеблются в стабильном диапазоне $\pm 0,05$ до $0,08$ м/с². Полное отсутствие рассеивания энергии в этом базовом случае приводит к длительной инерционной нагрузке, которая потенциально может привести к усталостным повреждениям конструктивных соединений и второстепенных компонентов.

График (рис. 3, *б*) доказывает эффективность фрикционного демпфера сухого трения при воздействиях средней интенсивности (5 баллов), выраженную в обеспечении быстрого затухания инерционных сил (релаксация системы в течение 12–15 с). Установлено, что применение демпфирующей системы позволяет избежать длительных резонансных эффектов, характерных для незащищенных конструкций, и снизить остаточные ускорения к концу расчетного периода до минимальных значений.

Из графиков (рис. 4) следует, что при 5-балльном воздействии незащищенная система испытывает значительные амплитудные колебания, а также сохраняет высокочастотный резонансный отклик в фазе свободных колебаний. В ходе численного моделирования установлено, что в отсутствие диссипативных устройств (демпферов) конструкция не способна самостоятельно погасить энергию сейсмического толчка за расчетный период 20 с, что ведет к накоплению динамической усталости узлов каркаса. График (рис. 4) показывает эффективность фрикционного демпфера при переходе к средним амплитудам воздействия (5 баллов), выраженную в сохранении времени релаксации системы в пределах 13–14 с. По графикам, изображенным на рис. 4, установлено, что применение демп-

фирующей системы позволяет снизить пиковые перемещения при 5-балльном воздействии на 40,5 % по сравнению с незащищенным каркасом, обеспечивая при этом полное подавление низкочастотных свободных колебаний.

Динамический отклик незатухающей эталонной модели представлен на рис. 5, а. Важным наблюдением является значительное увеличение амплитуды ускорения после $t = 10$ с, при этом пиковые значения достигают приблизительно $\pm 0,35$ м/с². Это явление предполагает резонансное поведение или интерференцию нескольких режимов вибрации при отсутствии рассеяния энергии. Устойчивый и нарастающий характер этих колебаний свидетельствует о том, что конструктивная система не в состоянии автономно подавлять силы инерции, что оправдывает необходимость в дополнительных демпфирующих устройствах даже при сейсмических явлениях низкой интенсивности.

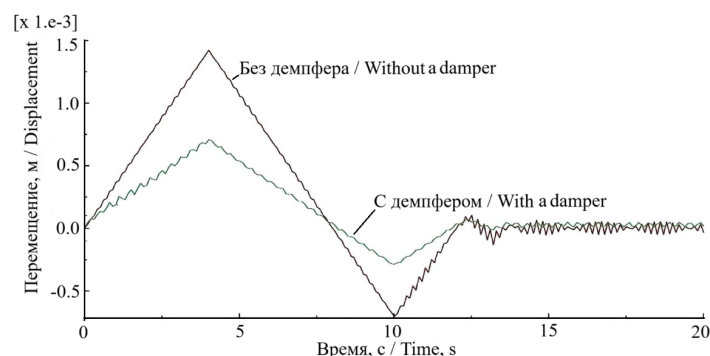


Рис. 4. Сравнение горизонтальных перемещений верхнего этажа для конструкции с демпфером и без него при сейсмической интенсивности 5 баллов

И с т о ч н и к: выполнено авторами с помощью Abaqus.

Figure 4. Comparison of horizontal displacements of the upper floor for a structure with and without a damper at a seismic intensity of 5

S o u r c e: made by the authors in Abaqus.

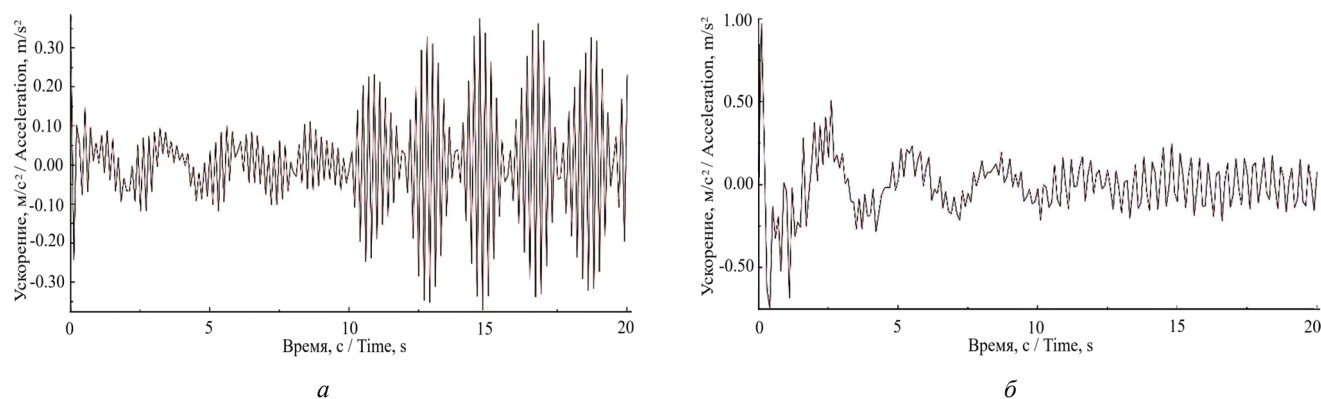


Рис. 5. Временная зависимость ускорений верхнего этажа при сейсмической интенсивности 9 баллов:

а — без системы демпфирования; б — системой демпфирования

И с т о ч н и к: выполнено авторами с помощью Abaqus.

Figure 5. Time history of accelerations of the upper floor at a seismic intensity of 9:

а — without damping system; б — with damping system

S o u r c e: made by the authors in Abaqus.

Динамический отклик незатухающей эталонной модели представлен на рис. 5, а. Важным наблюдением является значительное увеличение амплитуды ускорения после $t = 10$ с, при этом пиковые значения достигают приблизительно $\pm 0,35$ м/с². Это явление предполагает резонансное поведение или интерференцию нескольких режимов вибрации при отсутствии рассеяния энергии. Устой-

чивый и нарастающий характер этих колебаний свидетельствует о том, что конструктивная система не в состоянии автономно подавлять силы инерции, что оправдывает необходимость в дополнительных демпфирующих устройствах даже при сейсмических явлениях низкой интенсивности.

Для бетона класса В30 в рамках данной работы принята линейно-упругая модель поведения. Данное допущение обосновано целью исследования, заключающейся в оценке изолированного вклада фрикционных демпферов в общую диссипацию энергии системы при сейсмических воздействиях (включая интенсивность 9 баллов). Исключение физической нелинейности железобетона из расчетной схемы позволяет исключить наложение эффектов повреждения бетона на работу устройств энергопоглощения, что обеспечивает консервативную оценку эффективности демпфирования и гарантирует работу несущего каркаса преимущественно в упругой стадии за счет перераспределения усилий. Динамическая характеристика демпфированной конструктивной системы при экстремальной 9-точечной нагрузке показана на рис. 5, б. Максимальное ускорение достигает $0,96 \text{ м/с}^2$ во время начального импульса ($t < 0,5 \text{ с}$). Ключевым наблюдением является быстрое снижение амплитуды вибрации: при $t = 5 \text{ с}$ пиковые значения уменьшаются более чем на 50 %. Несмотря на высокую интенсивность удара, система демпфирования эффективно предотвращает резонанс, стабилизируя колебания на низкоамплитудном высокочастотном уровне ($\pm 0,15 \text{ м/с}^2$) к концу моделирования. Это свидетельствует о высокой надежности предложенного демпфирующего решения для защиты сооружения во время сильных сейсмических воздействий.

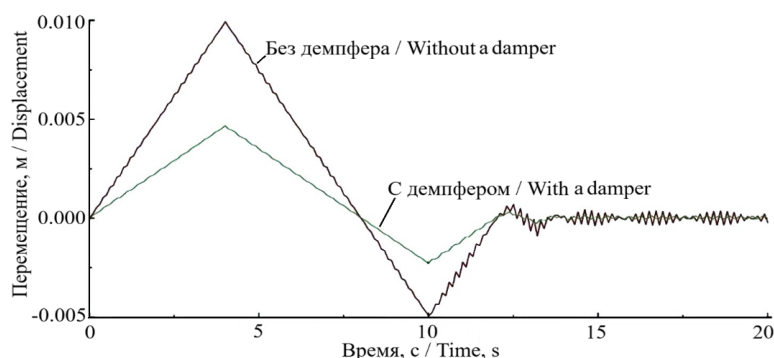


Рис. 6. Сравнение горизонтальных перемещений верхнего этажа для конструкции с демпфером и без него при сейсмической интенсивности 9 баллов

И с т о ч н и к: выполнено авторами с помощью Abaqus.

Figure 6. Comparison of horizontal displacements of the upper floor for a structure with and without a damper at a seismic intensity of 9

S o u r c e: made by the authors in Abaqus.

Реакция конструкции при максимальной сейсмической нагрузке (9 баллов) без дополнительного демпфирования показана на рис. 6. Смещение верхнего этажа достигает критического пика в $10,0 \times 10^{-3} \text{ м}$ при $t = 4 \text{ с}$, что является самым высоким значением, зафиксированным во всех тестовых примерах. После основного импульса система демонстрирует значительные остаточные высокочастотные колебания с амплитудой около $\pm 0,5 \times 10^{-3} \text{ м}$, которые не затухают к концу 20-секундного моделирования. Такой устойчивый уровень вибрации при экстремальных нагрузках указывает на высокий риск разрушения конструкции и вторичных повреждений в отсутствие устройств рассеивания энергии. Реакция конструкции при экстремальной 9-балльной сейсмической активности показана на рис. 6. Несмотря на значительно возросшую нагрузку, система демпфирования ограничивает максимальное горизонтальное смещение верхнего этажа до $4,7 \times 10^{-3} \text{ м}$ ($t = 4 \text{ с}$). Важным наблюдением является быстрая стабилизация конструкции: через $t = 13 \text{ с}$ демпфирующее устройство эффективно подавляет высокочастотные колебания, снижая амплитуду остаточных колебаний почти до нулевых значений. Такие характеристики подтверждают высокую надежность предлагаемого демпфирующе-

го решения для предотвращения смещений конструкций даже во время сильных сейсмических воздействий. Результаты хорошо согласуются с предсказанными кривыми демпфирования, что подтверждает надежность методики.

3.2. Оценка чувствительности и достоверности результатов

Чтобы убедиться, что полученные результаты не случайны, а закономерности устойчивы, был выполнен ряд дополнительных расчетов с варьированием ключевых параметров модели в пределах $\pm 20\%$. Менялись жесткости узлов сопряжения колонн и ригелей (моделировались как жесткие, шарнирные и полужесткие); модуля упругости бетона; величины внешней нагрузки (в диапазоне эксплуатационной). Во всем рассмотренном диапазоне характер распределения внутренних усилий и сами выводы практически не менялись. Отклонения по величине не превышали 15 %, что говорит об **устойчивости** предложенной расчетной схемы к погрешностям исходных данных.

Таблица 1. Влияние варьирования параметров на максимальный изгибающий момент в ригеле, кН·м
Table 1. Effect of varying parameters on the maximum bending moment in the beam, kN·m

Варьируемый параметр / Varied parameter	Значение параметра / Parameter value	Изменение момента / Moment difference, %
Базовый вариант / Base case	—	100 %
Жесткость узла (увеличена на 20 %) / Node rigidity (increased by 20 %)	1,2·K	–4,2 %
Жесткость узла (уменьшена на 20 %) / Node rigidity (decreased by 20 %)	0,8·K	+5,1 %
Модуль упругости (изменен на $\pm 10\%$) / Elastic modulus (changed by $\pm 10\%$)	0,9·E / 1,1·E	$\pm 1,3\%$

Источники: Э.Н. Егерева, С.А. Калиновский, Н.В. Семченков /
Source: made by E.N. Egereva, S.A. Kalinovsky, N.V. Semchenkov.

Из анализа данных (см. табл. 1) видно, что даже значительные изменения жесткостных параметров не меняют качественно картину напряженно-деформированного состояния. Сильнее всего (до 5 %) на момент влияет жесткость узлов, но это укладывается в обычную инженерную погрешность и не затрагивает основные выводы работы.

3.3. Ограничения проведенного анализа

В настоящей работе вклады жесткостного и диссипативного компонентов демпфера отдельно не разделялись. Поэтому зафиксированное снижение динамического отклика на 34 % нельзя отнести исключительно на счет демпфирующих свойств устройства. Свою роль могут играть и рост общей жесткости системы, и перераспределение масс. Для целей данного исследования, среди которых оценка эффективности включения демпфера в расчетную схему, — такой суммарный показатель тем не менее достаточен; подробное разделение эффектов остается **задачей последующих экспериментально-численных исследований**. При этом сам характер снижения отклика, указывающий на устойчивое уменьшение пиковых значений во всех рассмотренных сценариях, свидетельствует о положительном эффекте применения демпфера в рассматриваемой конструктивной системе.

3.4. Оценка эффективности демпфера и критерий нормализации реакции

Чтобы количественно оценить, насколько демпфер нормализует поведение конструкции, был введен **коэффициент редукции K_R** :

$$K_R = R_{\text{без}} / R_c \quad (1)$$

где $R_{\text{без}}$ – пиковая реакция (перемещение или ускорение) системы без демпфера; R_c – пиковая реакция (перемещение или ускорение) с демпфером. Полученные значения сведены в табл. 2.

Таблица 2. Сравнение пиковых реакций и коэффициент редукиции
Table 2. Comparison of peak responses and reduction coefficient

Сценарий / Scenario	Воздействие PGA, м/с ² Impact PGA, m/s ²	Перемещение без демпфера, мм Displacement without a damper, mm	Перемещение с демпфером, мм Displacement with a damper, mm	K_R (перемещение / displacement)	Ускорение без демпфера, м/с ² Acceleration without a damper, m/s ²	Ускорение с демпфе- ром, м/с ² Acceleration with a damper, m/s ²	K_R (ускорение / acceleration)
1	2,0	48,2	31,1	1,55	4,21	2,78	1,51
2	4,0	102,4	54,3	1,89	8,64	4,52	1,91
3	6,0	167,8	74,6	2,25	13,42	6,21	2,16
4	8,0	241,5	89,2	2,71	18,23	7,43	2,45

Источник: составлено Э.Н. Егерева, С.А. Калиновским, Н.В. Семченковым /
Source: made by E.N. Egereva, S.A. Kalinovsky, N.V. Semchenkov.

Здесь PGA обозначено пиковое ускорение грунта (Earthquake intensity). Из анализа данных табл. 2 следует, что с ростом интенсивности воздействия растет и коэффициент редукиции K_R , который доходит до **2,71** для перемещений и **2,45** для ускорений при $\text{PGA} = 8,0 \text{ м/с}^2$. Иными словами, реакция системы с демпфером при воздействии $8,0 \text{ м/с}^2$ ($R_c = 89,2 \text{ мм}$) оказывается сопоставима с реакцией системы без демпфера при заметно менее интенсивном воздействии:

$$\text{PGA}_{\text{эквив}} = \text{PGA}_{\text{исх}} / K_R = 8,0 / 2,71 \approx 2,95 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, демпфер фактически позволяет **нормализовать** поведение конструкции — пиковая реакция при экстремальном событии ($8,0 \text{ м/с}^2$) снижается до уровня, который без демпфера соответствовал бы воздействию $\text{PGA} \approx 3,0 \text{ м/с}^2$, то есть расчетному сейсмическому воздействию для районов с умеренной сейсмичностью.

3.5. Проверка альтернативных гипотез

Снижение пиковых реакций, описанное в п. 3.4, в принципе могло объясняться не только диссипативными свойствами демпфера, но и сопутствующими факторами. Чтобы исключить альтернативные объяснения, были выполнены дополнительные расчеты:

1. **Влияние жесткостного усиления:** сам демпфер как дополнительный связевой элемент увеличивает жесткость системы, а это само по себе снижает перемещения. Чтобы отделить этот эффект, был выполнен расчет с жесткой диагональной связью без фрикционного элемента: коэффициент редукиции составил $K_R^{\text{жестк}} = 1,12$, то есть прирост жесткости дает лишь 12 % снижения, тогда как в системе с демпфером $K_R = 2,71$. Значит, основную долю эффекта ($\approx 59 \%$) обеспечивает именно диссипация энергии.

2. **Изменение массо-инерционных характеристик:** присоединенная масса демпфера теоретически может сдвинуть собственные частоты системы и тем самым изменить ее резонансные свойства. Однако модальный анализ показал, что первые три собственные частоты меняются не более чем на **2,4 %**, а это исключает «уход от резонанса» как основной механизм наблюдаемого эффекта.

3. **Влияние конструкционного демпфирования.** Во всех моделях коэффициент конструкционного демпфирования принят постоянным ($\xi = 2 \%$ в соответствии с рекомендациями [16]). Зна-

чит, все различия между моделями связаны исключительно с дополнительным диссипативным устройством.

Таким образом, проверка альтернативных гипотез подтверждает: снижение пиковых реакций и эффект нормализации поведения конструкции является прямым следствием работы фрикционного демпфера, а не побочным артефактом моделирования.

3.6. Сопоставление с результатами других исследователей

Чтобы оценить, насколько достоверны и репрезентативны полученные результаты, они были сопоставлены с опубликованными данными об эффективности фрикционных демпферов.

По коэффициенту редукции перемещений. В нашей работе пиковые перемещения снизились в 2,7 раза при 9-балльном воздействии. Для сравнения: в исследовании [39], где фрикционный демпфер испытывался на натурном фрагменте высотного здания, снижение виброускорений составило 26,3 %, что соответствует коэффициенту редукции около 1,36. В [40], где система с фрикционными демпферами проверялась на виброплатформе при сейсмических воздействиях, максимальное снижение дрейфа рамы в зависимости от расположения демпфера по высоте составило от 0,7 до 0,3 % (коэффициент редукции около 2,3). Полученное в настоящей работе значение 2,7 лежит у верхней границы этого диапазона, что объясняется более интенсивным воздействием ($PGA = 0,4g$) и подобранными параметрами демпфера.

По эквивалентному коэффициенту демпфирования. В экспериментах с новым фрикционным демпфером PS-LED, проведенных в Политехническом университете Милана, эквивалентное демпфирование достигало порядка 55 % при устойчивой прямоугольной петле гистерезиса [41], что выше типичных показателей традиционных демпферов с ограниченной текучестью (BRB), которые обычно не превышают 40 %. В представленной модели численный анализ дал значение 45–50 %, что близко к результатам [17] и подтверждает адекватность принятых моделей трения.

По стабильности характеристик. В [42], посвященной многосекционным фрикционным демпферам с тарельчатыми пружинами, показано, что такие устройства сохраняют стабильные жесткопластические петли гистерезиса без заметного падения силы трения при повторных нагружениях. В наших расчетах (см. рис. 6) наблюдается тот же характер стабильности, что говорит о надежной работе демпфера при многократных сейсмических воздействиях.

В целом полученные количественные показатели снижения динамического отклика (перемещения уменьшились в 2,7 раза) сопоставимы с лучшими известными результатами и укладываются в диапазон, подтвержденный экспериментальными работами [39; 40]. Это позволяет считать результаты достоверными, а предложенную схему эффективным средством нормализации поведения конструкции в экстремальных условиях.

4. Заключение

На основании вышеизложенного можно сделать следующие **выводы**.

1. Установлено, что традиционные каркасные системы без дополнительных устройств диссипации энергии склонны к формированию длительных незатухающих высокочастотных колебаний на протяжении всего 20-секундного периода моделирования. Даже при слабых сейсмических воздействиях (3 балла) амплитуда ускорений верхнего этажа стабильно колеблется в диапазоне от $\pm 0,05 \text{ м/с}^2$ до $\pm 0,10 \text{ м/с}^2$ без существенного снижения после первоначального динамического импульса.

2. Включение фрикционного демпфера в расчетную схему рамного каркаса обеспечивает существенное снижение амплитуды колебаний на верхних этажах и минимизирует проявление эффекта резонансных биений. Наблюдается эффективное гашение основного и высокочастотного спектров отклика с последующим быстрым затуханием динамического процесса.

3. Показано, что применение демпфера позволяет нормализовать поведение конструкции: реакция при экстремальном воздействии снижается до уровня, соответствующего воздействию умерен-

ной интенсивности ($PGA \approx 3,0 \text{ м/с}^2$), что подтверждает способность системы управлять откликом в условиях запредельных нагрузок.

4. Подтверждена работоспособность демпферов в широком диапазоне нагрузок (от 3 до 9 баллов). Установлено, что при экстремальных сейсмических воздействиях система предотвращает прогрессирующее нарастание инерционных нагрузок после 10-й секунды расчетного периода, обеспечивая контроль над перекосами этажей и общую сейсмостойкость сооружения.

5. Установлено, что время релаксации системы (затухания колебаний) при 9 баллах остается в пределах 13–15 с, что свидетельствует о высокой диссипативной способности выбранных параметров демпфера.

6. Установлено, что при 9-балльном воздействии незащищенная конструкция достигает предельных значений горизонтальных перемещений (10 мм), в то время как внедрение демпфирующей системы позволяет снизить этот показатель на 53 % (до 4,7 мм), обеспечивая снижение динамических реакций до уровня, при котором несущие элементы работают в пределах проектных деформаций.

7. Установлено, что в системе без демпфирования длительность свободных колебаний при сейсмическом воздействии расчетной интенсивности превышает 20 с, что приводит к многократному знакопеременному деформированию узлов. Интеграция фрикционных демпферов сокращает время затухания до 13 с, обеспечивая сохранение геометрической неизменяемости каркаса и удерживая горизонтальные перемещения верхнего этажа в пределах нормативных допусков по деформативности.

Ограничения исследования и перспективы дальнейшей работы. Полученные выводы о динамическом отклике и эффективности фрикционных демпферов справедливы для исследованного диапазона сейсмических воздействий (3, 5 и 9 баллов) в рамках принятых расчетных моделей. Границы применимости представленных результатов ограничены рассмотренной геометрией здания малой и средней этажности и фиксированных грунтовых условий. Дальнейшее развитие исследования требует верификации разработанного подхода с учетом влияния высотности (этажности) и пространственной конфигурации несущего рамного каркаса; варьирования количества жесткостных характеристик демпфирующих устройств; учета физической нелинейности и деформационных свойств грунтов основания; расширения спектра воздействий за счет использования реальных и синтезированных акселерограмм землетрясений.

Список литературы / References

1. Zakharov SA, Drozdov VV, Kalinovsky SA, Vorobieva AD. Classification of systems and methods for protecting buildings and structures in seismically active areas. *Construction Economics*. 2023;(4):167–171. (In Russ.) EDN: RASUCO
Захаров С.А., Дроздов В.В., Калиновский С.А., Воробьева А.Д. Классифицирование систем и методов защиты зданий и сооружений в сейсмически активных районах // Экономика строительства. 2023. № 4. С. 167–171. EDN: RASUCO
2. Olyanskii YuI, Shchekochikhina EV, Kalinovskii SA. Engineering-geological problems of development of territories of distribution of dispersed soils in seismically active regions. *The Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering*. 2020;(1):30–37. (In Russ.) EDN: PBLJJI
Олянский Ю.И., Щечкочихина Е.В., Калиновский С.А. Инженерно-геологические проблемы освоения территорий распространения дисперсных грунтов в сейсмоактивных регионах // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2020. № 1. С. 30–37. EDN: PBLJJI
3. Domadzra Y, Bhandari M, Hasan M. Enhancing earthquake resilience: a review of friction pendulum seismic isolation techniques. *Asian Journal of Civil Engineering*. 2025;26:989–1007. <https://doi.org/10.1007/s42107-024-01231-5> EDN: VNQAPY
4. Azamjonov AT. A Comparative Study of Viscous and Friction Dampers for Seismic Protection of Buildings. *Zenodo*. 2024;3(1):31–35. Available from: <https://zenodo.org/records/13909261> (accessed: 27.02.2026).
5. Titirla MD. A comparative review of passive energy dissipation devices: friction, metallic, and viscous dampers. *Buildings*. 2023;13(4):851. <https://doi.org/10.3390/buildings13040851> EDN: RDJPZO
6. Avinash A, Krishnamoorthy A, Kamath K, Chaithra M. Sliding isolation systems: Historical review, modeling techniques, and the contemporary trends. *Buildings*. 2022;12(11):1997. <https://doi.org/10.3390/buildings12111997> EDN: WVHWNK

7. Arré M, Almazán JL, Auad G. Analysis of uplift in structures with friction pendulum isolators: Relevant parameters and mitigation measures. *Journal of Building Engineering*. 2025;112:113695. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2025.113695> EDN: ANPYXK
8. Belostotsky A, Pavlov A, Nagibovich A. Numerical simulation of the stress-strain state of a large-span structure with joints with gap under the seismic loads in a transient dynamic. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2023;19(3):165–172. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2023-19-3-165-172> EDN: OJRSBK
9. Gil-oulbé M, Al-Shaibani FANA, Lina AS. Performance-Based Seismic Design for buildings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):161-166. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-161-166> EDN: HZDAQR
10. Stupishin LYu, Mondrus VL. Energy properties of symmetric deformable systems. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2024;20(1):35–45. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2024-20-1-35-45> EDN: JAXYEM
11. Constantinou MC, Soong TT, Dargush GF. Passive energy dissipation systems for seismic protection of structures: recent advances. *University at Buffalo*. Buffalo. 1998. Available from: <http://mceer.eng.buffalo.edu> (accessed: 27.02.2026).
12. Ma R, Cheng Z, Zhang X, Bi K, Jiang S. Mechanical behaviors and seismic performance of a novel rotary amplification friction damper (RAFD): Experimental and analytical studies. *Journal of Constructional Steel Research*. 2024;223:109051. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2024.109051> EDN: QVQWDR
13. Liu R, Xue J, Luo Z, Bai C. Enhancing the seismic resilience of structures using a two-stage friction self-centering damper (TFSD). *Journal of Building Engineering*. 2025;114:114290. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2025.114290> EDN: IRRFMO
14. Zheng Y, Zhang W, Fu Y, Zhang C, Rong M, Shi J. Experimental and theoretical studies on the mechanical performances of a novel self-centering friction damper. *Structures*. 2025;82:110638. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.110638> EDN: RZLBVY
15. Lin G, Ma K, Xing G, Huang Z. Study on the seismic performance of self-centering friction damper with embedded disc springs: Experimental and numerical assessments. *Journal of Building Engineering*. 2026;120:115420. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2026.115420> EDN: OYIVYH
16. Avinash A, Krishnamoorthy A, Kamath K, Chaithra M. Sliding isolation systems: Historical review, modeling techniques, and the contemporary trends. *Buildings*. 2022;12(11):1997. <https://doi.org/10.3390/buildings12111997> EDN: SYXVSI
17. Kim H, Constantinou MC. Performance-based testing specifications for seismic isolators. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 2023;52(15):5141–5161. <https://doi.org/10.1002/eqe.4006> EDN: SYXVSI
18. Akbari M, Falborski T, Jankowski R. Optimal design TID controller with filter for multi-storey buildings equipped with active tendons and double-tuned mass damper inerter under near-field earthquakes. *Journal of Building Engineering*. 2025;111:113244. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2025.113244> EDN: JBKRKV
19. Kapasakalis KA, Antoniadis IA, Sapountzakis EJ. Stiff vertical seismic absorbers. *Journal of Vibration and Control*. 2022;28(15–16):1937–1949. <https://doi.org/10.1177/10775463211001624> EDN: IZBOLK
20. Fazilova ZT, Egereva E.N., Chuprynin AY. The simulation of the stress-strain track structure condition on the section with variable stiffness. *Transportation Research Procedia*. 2023;76:712–716. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2023.02.098> EDN: WMRSZD
21. Jaisee S, Yue F, Ooi YH. A state-of-the-art review on passive friction dampers and their applications. *Engineering Structures*. 2021;235:112022. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112022> EDN: MYBJBO
22. Zhang L, Schauer T, Bleicher A. Optimized passive/semi-active vibration control using distributed-multiple tuned facade damping system in tall buildings. *Journal of Building Engineering*. 2022;52:104416. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2022.104416> EDN: DKZKRP
23. Lee BGi, Kim JY, Jung JuS, Lee KS. Seismic protection provided by a new diamond-shaped bracing system with a horizontally layered friction damper. *Journal of Building Engineering*. 2024;92:109709. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2024.109709> EDN: EYOKOK
24. López-Almansa F, De la Cruz ST, Taylor C. Experimental study of friction dissipators for seismic protection of building structures. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*. 2011;10:475–486. <https://doi.org/10.1007/s11803-011-0082-0> EDN: NNCVQK
25. Arvind R, Helen Santhi M, Malathi G, Vasugi V. Performance-based seismic analysis of RC multi-storey framed building equipped with dampers. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2024;387:431–437. https://doi.org/10.1007/978-981-99-6175-7_39
26. Shi M, Wang P, Xu X, Yeol Choi Y. Nonlinear time history analysis for the different column orientations under seismic wave synthetic approach. *World Journal of Engineering and Technology*. 2024;12(3):587–616. <https://doi.org/10.4236/wjet.2024.123038> EDN: NRJLNN
27. Nabid N, Hajirasouliha I, Petkovski M. A practical method for optimum seismic design of friction wall dampers. *Earthquake Spectra*. 2017;33(3):1033–1052. <https://doi.org/10.1193/110316EQS190M>

28. Babaei M, Mollaei S, Petrudi AM, Jalilkhani M, Scurtu IC. Numerical and analytical study of seismic response of structural systems with new formulation using energy and impact methods. *E3S Web of Conferences*. 2021;286:04014 <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202128604014> EDN: WOXAZT
29. Xian Z, Tan P, Zheng W, Yang K, Xiang Y, Zheng Y. Seismic performance of inter-story isolated structure with shape memory alloy variable curvature friction pendulum bearings. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2026;200(Part A):109737. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2025.109737> EDN: ENASXB
30. Akbari M, Falborski T, Jankowski R. Optimal design TID controller with filter for multi-storey buildings equipped with active tendons and double-tuned mass damper inerter under near-field earthquakes. *Journal of Building Engineering*. 2025;111:113244. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2025.113244> EDN: JBKRKV
31. Kapasakalis KA, Antoniadis IA, Sapountzakis EJ. Stiff vertical seismic absorbers. *Journal of Vibration and Control*. 2022;28(15–16):1937–1949. <https://doi.org/10.1177/10775463211001624> EDN: IZBOLK
32. Salles HB, Fadel Miguel LF, Lenzi MS, Lopez RH. A model order reduction framework for performance-based seismic design optimization of friction-tuned mass dampers in large-scale L-shaped buildings with shear cores. *Structures*. 2025;77:109073. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.109073> EDN: EYATTR
33. Savin SY, Fedorova NV, Kolchunov VI. Dynamic forces in the eccentrically compressed members of reinforced concrete frames under accidental impacts. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2022;18(4):111–123. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-111-123> EDN: QXPSAO
34. Chopra AK. *Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering*. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2020. ISBN 0134555120, 9780134555126
35. Egereva EN, Kuznetsova LA. Calculation of the building for stability during seismic activity. *BST: Byulleten' Stroitel'noj Tehniki*. 2022;(11):54–63. (In Russ.) EDN: EGOPQN
Егерева Э.Н., Кузнецов Л.А. Расчет здания на устойчивость при сейсмической активности // БСТ: Бюллетень строительной техники. 2022. № 11. С. 54–63. EDN: EGOPQN
36. Qiu C, Bai M, Liu J, Liu H. Tests of friction dampers with enhanced recentering capability. *Engineering Structures*. 2025;326:119522. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.119522> EDN: YMFBL0
37. Lin ZJ, Zhang C, Yu TH, Liu JY, Wu ZK. The mechanism and finite element analysis of the enhanced rotational friction damper. *Engineering Mechanics*. 2024;41(S):171–178. <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2023.05.S037>
38. Jing X, Wang Q, Jiang M, Shi Q, Yang H. Research on seismic behavior of variable friction damper-RC frame structures. *Structures*. 2025;76:108964. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.108964> EDN: NYFNDS
39. Wang N, Chang X, Kong F, Shen Y. Analysis and optimization of seismic performance of high-rise residential building. *Journal of Vibroengineering*. 2022;24(2):325–336. <https://doi.org/10.21595/jve.2022.22833> EDN: GEPTSB
40. Lin P-C, Chen M-C, Chung M-L. Shaking table test of a damped-outtrigger system incorporating friction dampers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 2023;52(5):1593–1616. <https://doi.org/10.1002/eqe.3831> EDN: HOYMDU
41. Bruschi E, Zoccolini L, Cattaneo S, Quaglini V. Experimental characterization, modeling, and numerical evaluation of a novel friction damper for the seismic upgrade of existing buildings. *Materials*. 2023;16(5):1933. <https://doi.org/10.3390/ma16051933> EDN: SQKULU
42. Sano T, Shirai K, Suzui Y, Utsumi Y. Dynamic loading tests and seismic response analysis of a stud-type damper composed of multiple friction units with disc springs. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 2020;49(13):1342–1360. <https://doi.org/10.1002/eqe.3289> EDN: ZOUVHJ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
EXPERIMENTAL RESEARCH

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4-431-441

EDN: LWBQCE

Research article / Научная статья

**The Graphical Method of Design for Flexural Members
Using the SP 16.13330.2017 Standard****Vera V. Galishnikova¹**, **Tesfaldet H. Gebre^{1,2}**¹RUDN University, Moscow, Russian Federation²Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ tesfaldeth@gmail.com

Received: April 17, 2026

Revised: June 1, 2026

Accepted: June 11, 2026

Abstract. The objective of this paper is to propose the graphical design method for doubly symmetric steel beam section under flexural load compliant to the latest draft of the SP 16.13330.2017 standard. There are different design approaches for steel structures, including manual calculation, computer programs and hybrid methods which are used in different design standards for calculating allowable strength of flexural members. The graphical approach is commonly used in American Institute of Steel Construction as an alternative method and aims in improving the design efficiency for elastic and inelastic flexural members. The current method is intended to design flexural members according to the Russian design standards of the steel construction (SP 16.13330.2017) for steel sections commonly used, and available in the Russian Federation. The results consist of graphical demonstration of the relationships between the nominal flexural strength and the effective member length for various cross-sectional sizes. Using this graphical method to design flexural members can help the designer to select the optimum steel sections, furthermore it will be more helpful to the steel manufacturer to recommend more new Russian steel sections to narrow the gaps between the consecutive section dimensions. With the increasing demands of slender members, the graphical approach is a quick method of design for engineers and researchers to select an optimum steel beam section. In addition, this paper provides a practical example which confirms the efficiency and simplicity of designing a flexural member using this method.

Keywords: Flexural member, lateral torsional buckling, steel design, lightest section, Russian steel sections, graphical method

Author's contribution: *Galishnikova V.V.* — Conceptualization, data curation, methodology, formal analysis, investigation, supervision, project administration, writing — original draft, writing — review & editing, visualization, and validation; *Gebre T.H.* — Conceptualization, methodology, data curation, investigation, software, writing — original draft, writing — review & editing, formal analysis, visualization, and validation.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Galishnikova VV, Gebre TH. The graphical method of design for flexural member using the SP 16.13330.2017 standard. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):431–441. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-431-441> EDN: LWBQCE

Vera V. Galishnikova, Doctor of Technical Sciences, Professor of the department of Architecture and Restoration, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2765-7069, ORCID: 0000-0003-2493-7255; e-mail: galishni@yandex.ru

Tesfaldet H. Gebre, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Architecture and Restoration, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Associate Professor of the Department of Structural and Theoretical Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9753-3906, ORCID: 0000-0002-7168-5786; e-mail: tesfaldeth@gmail.com

© Galishnikova V.V., Gebre T.H., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Графический метод проектирования изгибаемых элементов с использованием стандарта СП 16.13330.2017

В.В. Галишникова¹, Т.Х. Гебре^{1,2}

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ tesfaldethg@gmail.com

Поступила в редакцию: 17 апреля 2026 г.

Доработана: 1 июня 2026 г.

Принята к публикации: 11 июня 2026 г.

Аннотация. Цель исследования — предложить метод графического проектирования двусимметричного сечения стальной балки при изгибе в соответствии с последним проектом СП 16.13330.2017. Существуют различные подходы к проектированию стальных конструкций, включая ручной расчет, компьютерные программы и гибридные методы, которые используются в разных нормах проектирования для расчета допустимой прочности элемента на изгиб. Графический подход широко используется в Американском институте стальных конструкций в качестве альтернативного метода и направлен на повышение эффективности проектирования упругих и неупругих изгибаемых элементов. Настоящий метод предназначен для проектирования изгибаемых элементов в соответствии с российскими нормами проектирования стальных конструкций (СП 16.13330.2017) для стальных профилей, широко используемых и доступных в Российской Федерации. Результаты работы представляют собой графическую демонстрацию соотношения между номинальной прочностью на изгиб и эффективной длиной элемента для различных размеров поперечного сечения. Использование этого графического метода для проектирования изгибаемых элементов может помочь проектировщику в дальнейшем подборе оптимальных стальных профилей, а производителю стали будет полезен для рекомендации большего количества новых российских стальных профилей для уменьшения зазоров между последовательными размерами профиля. В связи с растущими требованиями к гибким элементам графический подход является быстрым методом проектирования, позволяющим инженерам и исследователям выбрать оптимальное сечение стальной балки. Кроме того, в данной статье приводится практический пример, подтверждающий эффективность и простоту проектирования гибких элементов.

Ключевые слова: изгибаемый элемент, продольный изгиб с кручением, проектирование стальных конструкций, наименьшее сечение, российские стальные профили, графический метод

Вклад авторов. Галишникова В.В. — разработка концепции, курирование данных, методология, формальный анализ, проведение исследования, научное руководство, административное руководство исследовательским проектом, написание черновика рукописи, написание рукописи — рецензирование и редактирование, визуализация и валидация результатов; Гебре Т.Х. — разработка концепции, методология, курирование данных, проведение исследования, программное обеспечение, написание черновика рукописи, написание рукописи — рецензирование и редактирование, формальный анализ, визуализация и валидация результатов.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: Galishnikova V.V., Gebre T.H. The graphical method of design for flexural members using the SP 16.13330.2017 standard // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 4. С. 431–441. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-431-441> EDN: LWBQCE

1. Introduction

Due to the use of various steel sections that provide greater architectural flexibility than conventional reinforced concrete structures, steel or composite structures have grown in popularity worldwide. Architects and design engineers are increasingly shifting their attention to steel structures considering that they are much more quickly to construct than reinforced concrete constructions. Using high grade steel structural

Галишникова Вера Владимировна, доктор технических наук, профессор кафедры архитектуры и реставрации, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2765-7069, ORCID: 0000-0003-2493-7255; e-mail: galishni@yandex.ru

Гебре Тесфалдет Хадгембес, кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры и реставрации, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; доцент кафедры строительной и теоретической механики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9753-3906, ORCID: 0000-0002-7168-5786; e-mail: tesfaldethg@gmail.com

faster to construct than reinforced concrete ones. Using high grade steel structural elements has been attracting interest in Russian construction projects because it yields a more slender structure and the stability analysis dominates the design procedure [1]. Recommendations faster to construct than reinforced concrete ones. Using high grade steel structural elements has been attracting interest in Russian construction projects because it yields a more slender structure and the stability analysis dominates the design procedure [1]. Recommendations from different authors for the steel construction standards of the Russian Federation have improved and updated the design standards for steel structures to align with international standards including AISC and Eurocode [2–4]. The graphical approach, which aims to increase the design efficiency for both elastic and inelastic flexural components, is only utilized as an alternative method in the American Institute of Steel Construction standard [5–7]. The proposal of graphical design method using Russian steel sections will provide efficient steel beam design tools for structural designers. Using those methods, it becomes possible to identify the optimum section considering the moment and unbraced length of the flexural member. The graphical method is commonly used by AISC (American Institute of Steel Construction), it is not implemented in other national standards [1–5]. Lateral torsional buckling (LTB) analysis approaches for hot rolled doubly symmetrical sections using different standards are diverse in the consideration of the geometric imperfection, residual stress, and also in the consideration of the inelastic and elastic LTB approaches [6; 7]. AISC used a design calculation method in which the LTB curve is divided into three different parts: the yield (plastic) region, inelastic buckling and elastic buckling [8]. The design calculation and construction procedures of different international standards might differ from country to country and also may result in noticeable variations in the weight of steel considered. The AISC standard is prepared with detailed and simplified approaches and is considered by researchers are considered as a benchmark for comparison with other standards for traditional design aid [8–9]. Because of the presumptions and algorithms employed in commercial software, there are still valid reasons to consider design charts as a crucial practical tool even though the demand for traditional design, which depends on tables and charts, has decreased slightly. In addition, the trial and error method is based on an approximate moment and selecting trial shape, then finally checking the compliance of the section with the requirements of the specification [10–13]. This will lead to the waste of raw materials and energy, as well as the failure to account for effects on the environment [15]. Similarly, the Russian standard follows the same traditional approach for designing flexural members [16]. To overcome this limitation chart-based approach is an alternative and economical approach. The recommended graphical design approach for steel beams under flexural load which adheres with the most recent draft of SP 16.13330.2017 can be used as a quick, error-proof design tool for a variety of steel sections and as a validating tool. While it is a quick design aid, it can be used for educational purposes because it can improve students' engineering perspective and judgment through visual representation. As part of the steel design procedure for flexural members, considering the lateral torsional buckling analysis is a part of the limit state that must be checked for steel beams [17]. Hot-rolled doubly symmetric I-beams are designed for lateral torsion buckling in various stages by taking into account a wide range of scenarios like support conditions, web openings and corrugated webs [15; 18–21]. AISC, Eurocode 3, AS4100, and other common design standards were taken into consideration when evaluating the research utilizing various design guidelines according to their geographic location. Based on the Russian standard (SP) for flexural steel member design, the analysis is carried out using plastic moment resistance, forming plastic hinges, and section element proportions to avoid local buckling [22; 23]. The Russian standard does not use the elastic critical moment and the non-dimensional slenderness like in the American Institute of Steel Construction (AISC) and Eurocode 3 (EC-03) for steel design, but it has a coefficient that accounts for the plasticity and imperfection [24–29]. The lack of the elastic critical moment for LTB capacity of wide flange sections and the modification factor leads the Russian standard to be uneconomical and limited to a specific unbraced length. Generally, the advantages of the elastic design for lateral torsional buckling are to consider in long span beams with a focus on the efficiency and optimization of the member. The elastic critical moments for LTB capacity were studied in different stages which was proposed by [30], and later on studied by different authors for the classical solution for the critical LTB in

different loading types and modification factors [31–36]. Lateral torsional buckling (LTB) is of concern in long-span flexural members, particularly in the negative bending moment regions of continuous-span, steel I-shaped members and during construction. While the elastic critical LTB capacity of a simply supported I-shaped member subjected to uniform moment has a closed-form solution, most LTB modification factors for beams subjected to moment gradients in the literature are empirical and work well only for specific loading and boundary conditions [37]. Through comparisons with analytical solutions using the Rayleigh — Ritz method and numerical solutions from finite element analyses, the stability of the various LTB modification factors in literature and design specifications for various loading and boundary conditions was investigated. The analytical LTB modification factors are derived for doubly symmetric I-shaped members with different combinations of ideal flexural and torsional boundary conditions (simply supported and fixed) and subjected to different loading scenarios. The validity of the LTB modification factors determined using the Rayleigh — Ritz method and other formulae in the literature are also assessed for realistic intermediate restraint conditions, which are neither fully pinned nor fixed, by examining laterally continuous beams. Demonstrating that current design specifications for elastic critical LTB modifications are overly conservative for beams with complete or partial warping fixity, the authors recommend practical and simple alternatives to design such beams. The Russian standard for steel structures has limitations in calculating the stability of flexural members and different methods are recommended by different authors to overcome the limitations [38].

The current paper deals with the proposal of a chart-based method of design for LTB for hot-rolled symmetric I-beam steel using Russian standards. In the presented charts, the flexural member design approach for LTB was considered. The analysis considered three different sections as plastic or yielding, inelastic LTB and elastic LTB based on the unbraced length of the beam. The proposed graph-based design for Russian standard steel sections makes it simple to determine the optimum steel section while taking the available moment and unbraced length of the beam section into account. The graphs are formulated in such a way that the solid lines of the graphs indicate the optimum section for the definite unbraced length with available moment, being stronger than the steel section denoted with a dashed line [3; 39]. The most common graphical method is prepared for AISC steel sections with imperial units which are not commonly available in the Russian steel markets [39]. The current proposal for the design curve method will facilitate the selection of lightweight steel sections, thereby reducing construction costs. Additionally, it may serve as an opportunity for steel manufacturers to propose new steel section sizes based on the gaps among existing sizes.

2. Methods

In this study, the static schematic adapted is a cantilever beam with doubly symmetric I-section which is restrained against warping and rotation at the support in its bending plane as shown in Figure 1.

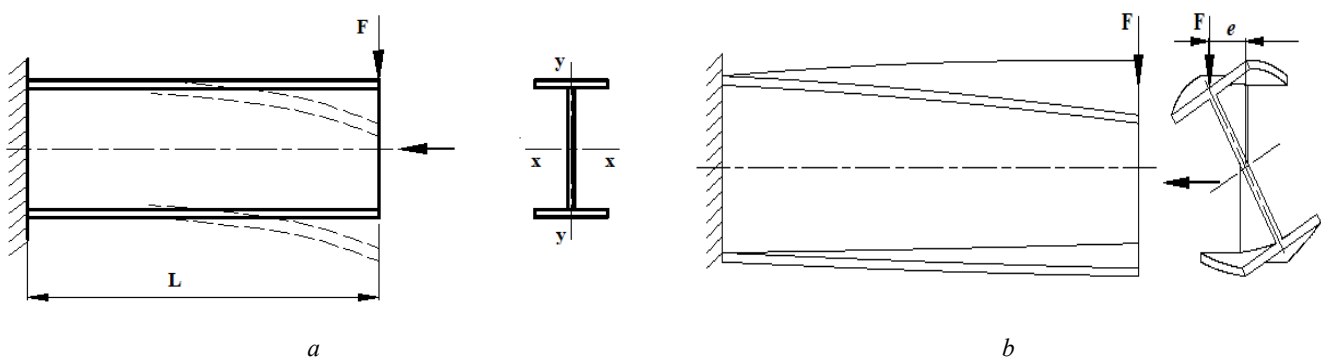


Figure 1. Static schematic of a beam:
a — without loss of stability; *b* — with buckling of a beam
 Source: made by T.H. Gebre.

The graphical method of design for flexural members using the SP 16.13330.2017 standard requires moment capacity graphs from a wide range of steel sections available on the Russian steel markets. This method is used in AISC manual with a variety of graphs, but for the USA steel sections only, therefore it is inapplicable to the Russian steel sections. Developing the graphical method of steel design using the Russian manual and steel sections is performed for an alternative option for designers and researchers. The current study used the Russian code and steel sections to develop the graphical method of design for flexural members [40]. As this approach is a common method in AISC and it is known by design engineers, therefore, it can be assumed that any further actions will not lead to a violation of the integrity of the document's philosophy. For the plastic design under the action of the moment in one of the principal planes for Class 1 members, if the member is loaded with moment in the major principal plane only, the ratio is given by [40]:

$$\frac{M_x}{\phi_b W_{cx} R_y \gamma_c} \leq 1, \quad (1)$$

where M_x is the factored moment about the major principal axis, x , W_{cx} is the section modulus of cross section about the principal axis, x , computed for the compression flange, W_{cx} is the minimum section modulus of cross section about the principal axis, x , R_y is the design yield strength, γ_c is the service factor for structural members and connections, and ϕ_b is the stability factor in bending.

The design buckling moment resistance (nominal moment capacity) for lateral torsional buckling should be computed by eq. (2) for elastic and inelastic designs with limited bracing lengths and loaded exclusively on the major plane:

$$M_x = c_x \beta W_{xn, \min} R_y \gamma_c, \quad (2)$$

where $W_{xn, \min}$ is the minimum section modulus of cross section about the principal axis, x , R_y is the design yield strength for tension, compression, and bending, c_x is the coefficient for the calculation of structural elements taking into account the development of plastic deformations for Class 2 and Class 3 sections, β is the coefficient that takes into account the effect of average shear stress on the moment capacity.

3. Results and Discussion

Flexural members are dominated by bending deformation when subjected to different types of loadings. The available steel sections for flexural members on the Russian market are considered in the current study. Based on the Russian steel manufacturing companies, the most common beam section are designated as Б and III section types [40]. The Б section are doubly symmetric section beams with small flange width to height ratio and III section is a wide flange section with high performance in stability and it has better performance in bending and compression compared to the Б sections [16]. In the current study we tried to consider the III beam section as a case study. The analysis of the nominal bending moment and the development of the design charts for the current study are considered based on the Russian standard (SP 294.1325800.2017) [10]. When we consider the buckling curves for SP 294.1325800.2017, it does not classify sections, but the noticeable part is for the compact section as we considered a limit of the unbraced length for each section. The nominal bending moments are considered for the moderate and slender beams as it gives as a high buckling resistance. The nominal bending moments decrease to a relatively small magnitude and remain constant when we consider a slender beam section. The graphical method of design for flexural members using the SP 16.13330.2017 standard is considered based on M_x vs L_b graphs for each section type and a combined chart is developed. The combined graphical formation of M_x vs L_b chart for 26III2 & 23III1 sections is shown in Figure 2. The graphical method to select the lightest steel section between 26III2 & 23III1 steel sections is given in Figure 2. The combined moment capacity vs lateral

unbraced length graph reflects that 26III2 is heavier than 23III1 section which turns into the dashed line after an intersection between the two graphs. We can consider different options in selecting the lightest section from 26III2 & 23III1 by referring to Figure 2 and I-option, both 26III2 & 23III1 can be selected, but relatively the 23III1 is the lightest one. II-option, as it is above the two curves and the moment capacity of the two sections is small so there is no sufficient section. For III-option, similarly, as it is outside the two curves, in the current graph both 26III2 & 23III1 are not applicable. Special case can be considered as VI-option as shown in Figure 2, 23III1 is the optimal section which is considered as lightest and strong steel section.

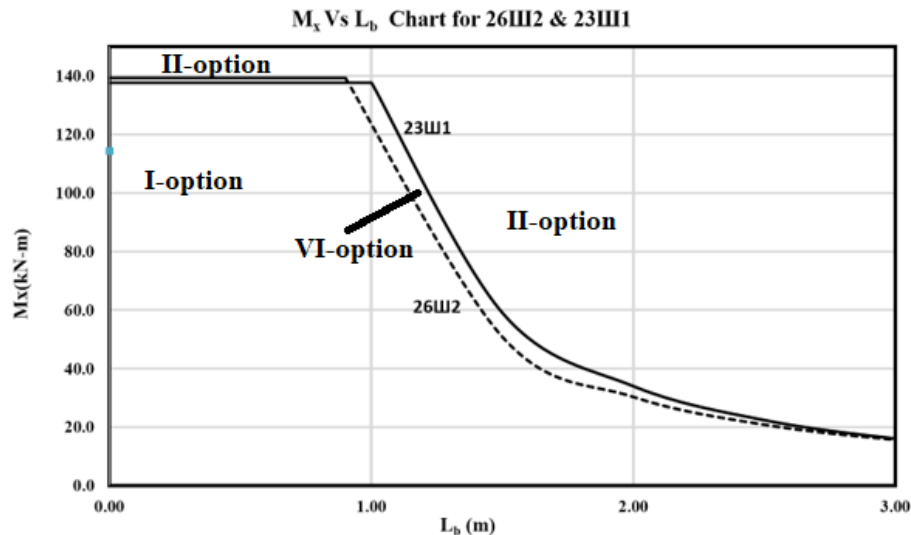


Figure 2. The graphical representation of (M_x) vs L_b Charts for 26III2 & 23III1 sections

Source: made by T.H. Gebre.

By considering the Russian steel sections, the graphical method may be applied in the actual practical design process. First, we must determine the unbraced length and total bending moment of the beam member. For example, let us consider the unbraced length of 2.5 m and the required moment of 300kN-m. Referring to Figure 3, the horizontal and vertical lines corresponding the required moments and unbraced length respectively have to be formed and intersect at a specific point. The intersection point is considered as a bench mark for the selection of the lightest section and 40III1 section is the lightest and adequate section. By projecting the horizontal line backward, the moment capacity is 302 kN-m and it is greater than the required moment which is 300 kN-m as shown in Figure 3.

The graphical method moment (M_x) vs unbraced length (L_b) design curves for moments ranging from 0 to 800 kN-m are shown in Figure 3.

The chart for the flexural member is a plot of moment vs unbraced length and the graph is considered as a strength curve for each specific beam section. The two axes for each graph characterize available moment and unbraced length respectively. Referring to Figure 3 for each steel section designated as per the SP standard, the solid lines represent the lightest and most economic section whereas the dashed lines represent the weaker sections to be considered at first. The continuity or termination of the lines within the graphs indicate the slenderness behavior of the beam section and when the beam is inadequate to resist the load. Generally, the graphs for lateral torsional buckling based on the AISC are classified in to three different types: plastic, inelastic and elastic stages. Plastic moment indicates that the beam is fully braced and reaches its plastic moment capacity before buckling. The moment capacity starts to drop with yielding behavior and it is considered as inelastic lateral torsional buckling. The third stage is elastic lateral torsional buckling as the beam drops below the yielding point and it is considered as a slender member. In the current

study, the chart based flexural member design is prepared based on the Russian standard. This method will overcome the limitation of the traditional method of design of flexural members which follows the tubulated data and iterative methods for selecting the lighter section. common wide flange sections are considered and the graphs are compiled together as shown in Figures 3, 4 and 5. The graphical method moment (M_x) vs unbraced length (L_b) design curves for moments ranging from 800 to 2500 kN-m are shown in Figure 4.

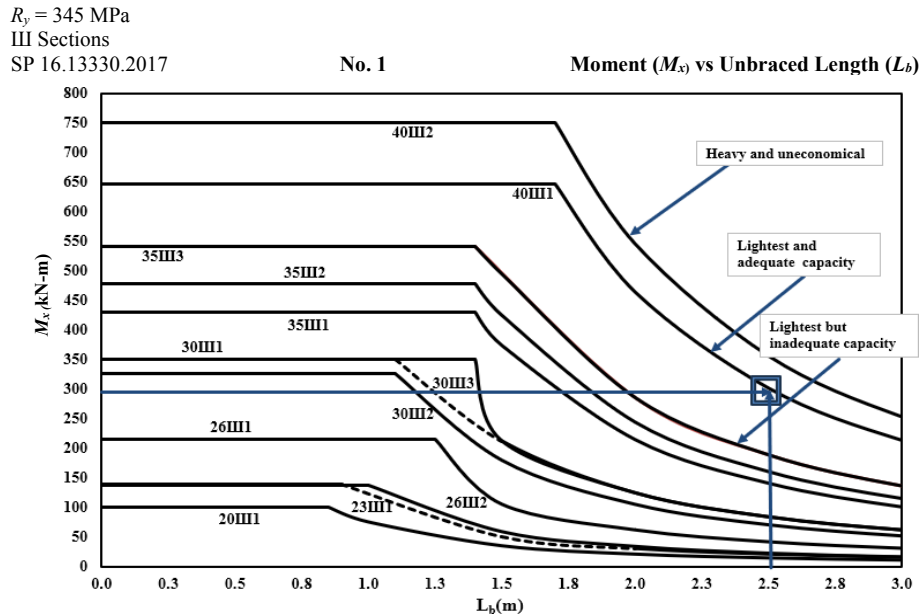


Figure 3. The graphical method moment M_x vs unbraced length L_b design curves for moments from 0 to 800 kN-m

Source: made by T.H. Gebre.

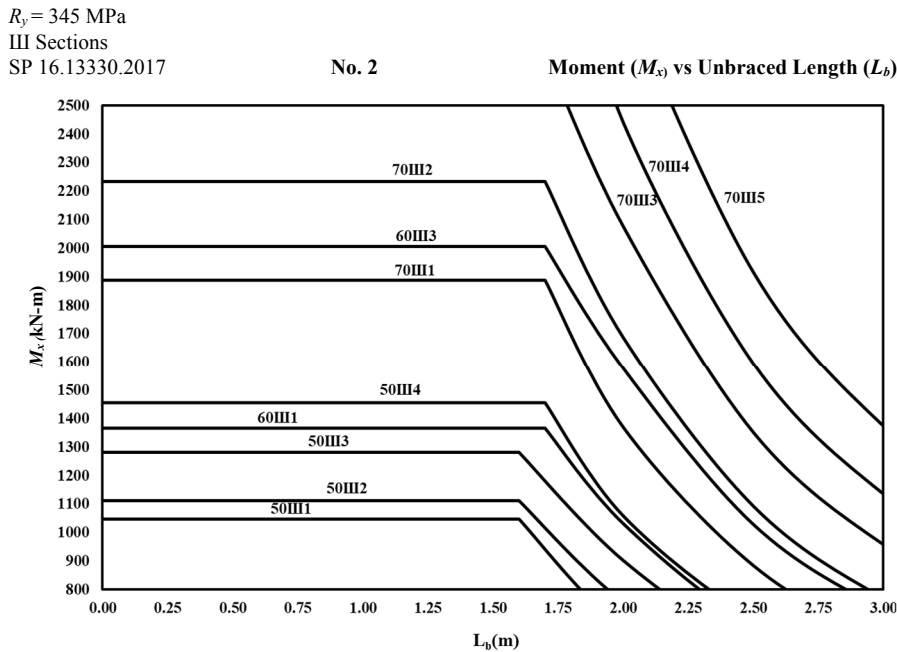
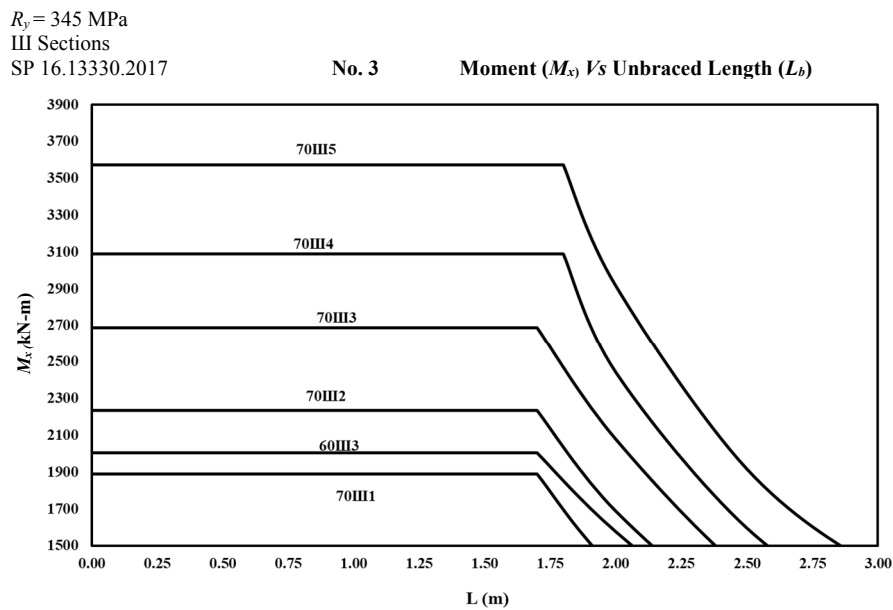


Figure 4. The graphical method moment M_x vs unbraced length L_b design curves for moments ranging from 800 to 2500 kN-m

Source: made by T.H. Gebre.

Similarly, the moment capacity for the ranges between 1500 to 3900 kN-m can be computed for different values of unbraced length using the graphs shown in Figure 5.

The above results are considered for charts of plastic moments and inelastic lateral torsional buckling as the Russian standard is recommended for limited unbraced length. The Russian standard (SP 16.13330.2017) provides buckling factors and limited optimum unbraced length of every beam section based on the section properties. In order to consider the stability of the flange or local buckling, the characteristic nominal slenderness is less than the ultimate slenderness value which can be calculated from ultimate nominal slenderness [10; 14]. The overall stability of the beam is checked and considered to be ensured if a solid rigid flooring is supported on the upper belt and securely fixed to it. According to SP 16.13330.2017 [10; 15] the nominal slenderness and stable unbraced length for the lateral — torsional buckling strength and for doubly symmetric I — section may be calculated by Eqns. (3)–(9).



$$\frac{\ell_{ef}}{b'_f} \leq \left[0,35 + 0,0032 \frac{b'_f}{t_f} + \left(0,76 - 0,02 \frac{b'_f}{t_f} \right) \right] \frac{b'_f}{h_f} \sqrt{\frac{E}{R_y}}, \quad (3)$$

where ℓ_{ef} is the effective length, b_f and t_f are the width and thickness of the compression flange; h_f is distance (height) between the axes of the flanges. If the limit slenderness, which is flange stability, is $b/l < 15$, the value of $b/l = 15$ needs to be taken. If the stability condition is not met, then it is necessary to check the overall stability, taking into account the coefficient of reduction of the design resistance (ϕ_b) according to the formula:

$$\sigma = \frac{M}{W_x \phi_b} \leq R_y \gamma_c. \quad (4)$$

To determine ϕ_b , ϕ_1 needs to be found using the following equation:

$$\phi_1 = \psi \frac{I_y}{I_x} \frac{h}{\ell_{ef}} \frac{E}{R_y}. \quad (5)$$

The ψ coefficient is taken according to Table 73 of the SP 16.13330.2017 standard and depending on the parameter shown below:

$$\alpha = 8 \left(\frac{l_f}{h_f} \frac{t_f}{b_f} \right) \left(1 + \frac{a t_w^3}{b_f t_f^3} \right), \quad (6)$$

where $a = 0.5h_f$, φ_b is determined from Table 74 of SP 16.13330.2017, and when checking the local stability of the wall, the following conditions must be met:

$$\bar{\lambda}_w = \frac{h}{t_w} \sqrt{\frac{R_y}{E}} \leq 2.5, \quad (7)$$

in the presence of local stresses, and

$$\bar{\lambda}_w = \frac{h}{t_w} \sqrt{\frac{R_y}{E}} \leq 3.5, \quad (8)$$

in the absence of local stresses. If these conditions are not met, the beam web must be strengthened with transverse stiffeners, the maximum distance between which should not fall outside

$$a_{\max} \leq 2h_w \rightarrow \bar{\lambda} > 2.5, \quad a_{\min} < 2h_w \rightarrow \bar{\lambda} > 3.2, \quad (9)$$

if the we tried to consider for the elastic design (slender member) based on the Russian standards, which is more conservative in comparing with AISC-LRFD [39] and Eurocode 3 [28; 29], then its flexural capacity is considered minimum. Therefore, the chart method for larger unbraced length is considered to account for the elastic design or for slender steel beam sections. The graphical design method for optimal flexural member using the SP 16.13330.2017 standard with the Russian version of steel sections has been presented. These visual representations can be easily implemented for the designs of steel beams at the technical office because they generate the same optimal sections as the standard computer programs. Additionally, other nations that employ Russian steel with doubly symmetric sections various for support conditions and thin members can use the graphical method used in this work as a design guide.

4. Conclusion

The paper presented the graphical scheme of design using the Russian design procedure and steel sections as an alternative to the existing technique. Doubly symmetrical wide flange sections identified as III sections were considered and the graphical results are presented. The graphical method of design can be used by engineers as an alternative and quick method of design for flexural members based on the moment capacity and unbraced length as an input data. For manual or computer design procedure, the design curves for the method are considered as a validation tool and it increasing the accuracy of the design procedure for steel members. From the current study of graphical method of design, three different sections as plastic or yielding, inelastic LTB and elastic LTB based on the unbraced length of the beam, were considered. The proposed graph-based design for Russian standard steel sections makes it simple to determine the optimum steel section while taking the available moment and unbraced length of the beam section into account. The graphs are formulated in such a way that the solid lines of the graphs indicate the optimum section some definite unbraced length with available moment, being stronger than the steel section denoted with a dashed line. The current proposal for the design curve method will facilitate the selection of lightweight steel sections, thereby reducing construction costs. Additionally, it may serve as an opportunity for steel manufacturers to propose new steel section sizes based on the gaps among existing sizes.

References

1. Bortsov AN, Kuklev AV, Sychev ON, Lipin VK. Issues in the production of shipbuilding and high-strength steel rolled products with special properties. *Metallurgist*. 2025;69:971–980. <https://doi.org/10.1007/s11015-025-02019-x> EDN: DDWWXS
2. Alekseytsev AV, Gaile L, Druks P. Optimization of steel beam structures for frame buildings subject to their safety requirements. *Magazine of Civil Engineering*. 2019;91(7):3-15. <https://doi.org/10.18720/MCE.91.1>
3. Gebre TH. The development of chart based method for steel beam designs using the Russian sections. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;14(6):495–501. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-6-495-501> EDN: YUZVRZ
4. Bikoko TGLJ, Tchamba JC. Comparison of a steel column design buckling resistance between the South African/Canadian (SANS 10162-1:2005/CAN/CSA-S16-01:2005), Eurocode 3 (EN 1993-1-1:2005) and Australian/New Zealand (AS4100:1998/NZS3404:1997) standards — Part I: PFC-SA (South African Parallel Flange Channel Section). *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*. 2015;12(3 Ver. II):160–169. Available from: <https://www.iosrjournals.org/iosr-jmce/papers/vol12-issue3/Version-2/T01232160169.pdf> (accessed: 27.06.2026).
5. Gautier T, Bikoko LJ, Tchamba JC. standards-Part I: PFC- SA (South African Parallel Flange Channel Section). *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering Ver II* 2015;12:2320–334.
6. American Institute of Steel Construction: *ANSI/AISC 360–16: An American national standard specification for structural steel building*, Chicago. American Institute of Steel Construction. 2016.
7. Gebre TH, Lebed EV, Galishnikova VV. Comparative study of the AISC-LRFD, Eurocode 3 & SP 16.13330.2017 steel members design. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Epub ahead of print 2019. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/675/1/012009> EDN: SLGIWH
8. American Institute of Steel Construction: *ANSI/AISC 360–22: An American national standard specification for structural steel building*, Chicago. American Institute of Steel Construction. 2022.
9. Bakhom MM, Mourad SA, Hassan MM. Comparison of actions and resistances in different building design codes. *J Adv, Res*; 7. Epub ahead of print 2016. <https://doi.org/10.1016/j.jare.2015.11.001>
10. Pinarbasi S, Genc T, Akpınar E., Okay F. Comparison of design guidelines for hot-rolled I shaped steel Compression members according to AISC 360-16 and EC3. *Advances in Civil Engineering*. 2020;20. <https://doi.org/10.1155/2020/6853176> EDN: CCIVCC.
11. *Research on Engineering Structures and Materials*. 2025;12(3):201–216. <https://doi.org/10.17515/resm2025-717st0302rs> EDN: FXYGGA
12. Rajendran S, Parthasaarathi R, Kumar MR, et al. Comparative analysis of structural steel design of IS vs. AISC code standards. *Research on Engineering Structures and Materials*. 2025;12(3):201–216. <https://doi.org/10.17515/resm2025-717st0302rs> EDN: FXYGGA
13. Parkinson A. A Comparison of Eurocode and AISC Stability analysis methods for practical steel design. *SDSS 2025 International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures*. 2025;8:1253–1258. <https://doi.org/10.1002/cepa.70210>
14. Xue J, Ma S, Chen X, Wu Q. Experimental investigation and design of novel hollow flange beams under bending. *Buildings*. 2024;14(5):141314. <https://doi.org/10.3390/buildings14051413> EDN: PIAFDE
15. Kucukler M, Gardner L, Macorini L. Flexural-torsional buckling assessment of steel beam-columns through a stiffness reduction method. *Engineering Structures* 2015;101:662–676. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.07.041>
16. Drewniok MP, Campbell J, Orr J. The Lightest Beam Method – A methodology to find ultimate steel savings and reduce embodied carbon in steel framed buildings. *Structures* 2020;27:687–701. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.06.015> EDN: OOCBPI
17. Brandão MCL, Yepes-Bellver L, Kripka M, Alves ÉC. Parametric Analysis in the Optimization Design of Composite Cellular Beams. *Infrastructures* 2026;11:135. <https://doi.org/10.3390/infrastructures11040135> EDN: JVXZDO
18. Looirits K, Talvik I. Comparative study of the buckling of steel beams in Eurocode 3 and the Russian code. *Journal of Constructional Steel Research* 2006;62:1290–1294. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2006.04.022>
19. Galishnikova VV, Gebre TH. A comparative study of beam design curves against lateral torsional buckling using AISC, EC and SP. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(1):25–32. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-1-25-32> EDN: PPVQNT
20. de Carvalho AS, Rossi A, Martins CH. Assessment of lateral–torsional buckling in steel I-beams with sinusoidal web openings. *Thin-Walled Structures* 2022;175:109242. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109242> EDN: VYPYUX
21. Boissonnade N, Nseir J, Somja H. Experimental and numerical investigations towards the lateral torsional buckling of cellular steel beams. *Thin-Walled Structures* 2024;195:111388. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111388> EDN: ERDTNY
22. Ben Seghier MEA, Carvalho H, de Faria CC, Correia JAFO, Fakury RH. Numerical analysis and prediction of lateral-torsional buckling resistance of cellular steel beams using FEM and least square support vector machine optimized by metaheuristic algorithms. *Alexandria Engineering Journal*. 2023;67:489–502. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.12.062> EDN: OSDPIX

23. Bärnkopf E, Jáger B, Kövesdi B. Lateral–torsional buckling resistance of corrugated web girders based on deterministic and stochastic nonlinear analysis. *Thin-Walled Structures* 2022;180:109880. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109880> EDN: GECOUA
24. SP 16.13330.2011. Steel structures. Updated version of SNiP II-23-81*. Moscow: Ministry of Regional Development of Russia, 2011.
25. Vedyakov II, Odessky PD, Gukova MI, Tsetlin BS. Updated edition of SNiP II-23-81 “Steel structures” — SP 16.13330.2011. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2011;(3):70–77. (In Russ.) EDN: NUYPZ
- Ведяков И.И., Одесский П.Д., Гукова М.И., Цетлин Б.С. Актуализированная редакция СНиП II-23-81 “Стальные конструкции” — СП 16.13330.2011 // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 3. С. 70–77. EDN: NUYPZ
26. Doan SN. Probabilistic safety assessments of truss structures designed by AISC 360-16 and EC 3. *Journal of Science And Technology In Civil Engineering*. 2024;18:149–162. [https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(2\)-11](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(2)-11) EDN: XNXYGL
27. Abarkan I, Rabi M, Ferreira FPV, Shamass R, Tsavdaridis KD. Lateral–torsional buckling of high-strength steel I-beams: design, parameter and reliability analysis. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers — Structures and Buildings*. 2026;179(5):522–541. <https://doi.org/10.1680/jstbu.25.00076>
28. Piotrowski R, Andrzej S. The elastic critical moment of lateral torsional buckling of steel beams with spatially elastically restrained at the support nodes. *Materials*. 2026;19(1):120. <https://doi.org/10.3390/ma19010120> EDN: CZVZQR
29. Piotrowski R, Andrzej S. The effect of steel beam elastic restraint on the critical moment of lateral torsional buckling. *Materials*. 2022;15(4):1275. <https://doi.org/10.3390/ma15041275> EDN: WXGMXZ
30. EN 1993-1-8; *Eurocode 3: Design of Steel Structures—Part 1-8: Design of Joints*. Brussels, Belgium: European Committee for Standardization, 2005.
31. EN 1993-1-1; *Eurocode 3: Design of Steel Structures—Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Brussels, Belgium: European Committee for Standardization.
32. Timoshenko S. *Theory of elastic stability*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2009. http://archive.org/details/theoryofelastics0000timo_p9e0 (accessed: 20.04.2026).
33. Nayak N, Anilkumar PM, Subramanian L. Lateral-torsional buckling modification factors in steel I-shaped members: Recommendations using energy-based formulations. *Engineering Journal*. 2024;61(3). <https://doi.org/10.62913/engj.v61i3.1328> EDN: PMROUB
34. Nonn J, Wilden V, Feldmann M. A consistent approach for global buckling of steel structures. *Steel Construction*. 2023;16(2):93–104. <https://doi.org/10.1002/stco.202200040> EDN: YZMZGB
35. Karim F. *Lateral torsional buckling of steel beams with beam and shell elements*. Lappeenranta–Lahti University of Technology LUT, 2024. Available from: <https://lutpub.lut.fi/handle/10024/168046> (accessed: 20.04.2026).
36. Schafer BW, Geschwindner LF, Sabol T, Uang ChM. Review of local buckling width-to-thickness limits. *Engineering Journal* 2022;59:65–84. <https://doi.org/10.62913/engj.v59i1.1212> EDN: QNKUVF
37. Ghasemi Jouneghani H, Fanaie N, Haghollahi A. Theoretical formulation for calculating elastic lateral stiffness in a simple steel frame equipped with elliptic brace. *Steel and Composite Structures*. 2022;45(3):437–454. Available from: <http://hdl.handle.net/10453/170430> (accessed: 22.06.2026).
38. Bajer M, Barnat J, Pijak J. Lateral Torsional Buckling of Selected Cross-Section Types. *Procedia Engineering* 2017;190:106–110. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.314>
39. Galay VS. Stability of steel centrally compressed rods in the methods of SP 16.13330.2011 and EN 1993-1-1. *AlfaBuild*. 2019;11:82–91. EDN: IFNPOY
40. Ilyushenkov AO. On the SP 16.13330.2017 standard stability calculation of I-type bending elements with constant and variable cross-sections. *Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2025;44:20–39. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2025-1\(44\)-20-39](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2025-1(44)-20-39) EDN: EAPXTJ
41. *American Institute of Steel Construction (AISC), Specification for Structural Steel Buildings*. 16th edn. 2023.
42. SP 294.1325800.2017. *The construction of steel. Design rules*. Moscow: Ministry of Construction, Housing and Utilities of the Russian Federation;
