СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2026 Том 22 № 3

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3

http://journals.rudn.ru/structural-mechanics

Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
Периодичность: 6 выпусков в год.
Языки: русский, английский.
Журнал индексируют: РЦНИ (Белый список), РИНЦ, RSCI, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, Dimensions.
Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения (технические науки), 2.1.2. Основания и фундаменты, подземные сооружения (технические науки), 2.1.9. Строительная механика (технические науки).

Международный научно-технический журнал *«Строительная механика инженерных конструкций и сооружений»* знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия
Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:
Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия
Адилходжаев А.И., д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан
Базаров Д.Р., д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан
Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина
Варум У., д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия
Войцицкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша
Волосухин В.А., д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия
Галишникова В.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия
Дуцев М.В., д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия
Евкин А.Ю., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада
Какоеи С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия
Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия
Козлов Д.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия
Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия
Кудрявцев С.А., чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия
Курбацкий Е.Н., д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия
Лазарев Ю.Г., д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия
Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция
Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия
Перькова М.В., д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия
Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия
Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия
Федюк Р.С., д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия
Якупов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

Benin A.V., Semenov A.S. Orthotropic Hyperelastic Model of Concrete Deformation Under Complex Multiaxial Loading (Ортотропная гиперупругая модель деформирования бетона при сложном многоосном нагружении) 183

Корнев О.А., Шувалов А.Н., Корнилова А.В., Ермаков В.А. Нормирование дефектов монтажных сварных швов и околошовной зоны вертикальных резервуаров из алюминиевых сплавов..... 199

Tran H.P., Pham N.T., Le V.T., Dang V.P. Stability of the Coastal Revetment Using 2D and 3D Simulations: A Case Study in Vinh Long, Vietnam (Устойчивость берегового укрепления с использованием 2D- и 3D-моделирования: исследование на примере Виньлонга, Вьетнам) 222

Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К. Изгиб ортотропной тонкой пластинки, свободно опертой по всем сторонам 235

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Repin V.A., Martinov V.A., Popova M.V., Chibrikin D.A. Rational Reinforcement of Continuous Three-Span Timber Beams (Рациональное армирование неразрезных трехпролетных деревянных балок) 253

Маркина Ю.Д. Влияние степени детализации расчетной модели на напряженно-деформированное состояние антенно-мачтового сооружения 267

Косицын С.Б., Акулич В.Ю., Осетинский Л.Н. Оценка размеров фрагмента грунтового массива при численном моделировании тройникового соединения цилиндрических оболочек 283

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Shakarneh O.M.D. Comparative Analysis of the Stiffness Characteristics of Masonry wall Based on Experimental Data and an Orthotropic Model (Сравнительный анализ жесткостных характеристик стены из каменной кладки на основе экспериментальных данных и ортотропной модели) 293

Редактор И.Л. Панкратова
Редактор англоязычных текстов С.Л. Шамбина
Дизайн обложки Ю.Н. Ефремовой
Компьютерная верстка Н.В. Маркеловой

Адрес редакции:
Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru

Подписано в печать 25.06.2026. Выход в свет 29.06.2026. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 15,35. Тираж 250 экз. Заказ № 1043. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, 2026
© Мамедова С.Р., фото на обложке (Павильон Алиф, Дубай, ОАЭ), 2026

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026 VOLUME 22 NO. 3

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3

http://journals.rudn.ru/structural-mechanics

Founded in 2005
by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
Published 6 times a year.
Languages: Russian, English.
Indexed by White List of RCSI, Russian Index of Science Citation, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, Dimensions.
The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal *"Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings"* shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

OPEN ACCESS The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF
Nikolai I. Vatin, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF
Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR
Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:
Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan
Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia
Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIIAME, Tashkent, Uzbekistan
Mikhail V. Dutsev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia
Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada
Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia
Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia
Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia
Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia
Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia
Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia
Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia
Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia
Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia
Frederic Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France
Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal
Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia
Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal
Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia
Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine
Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal
Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia
Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland
Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

Benin A.V., Semenov A.S. Orthotropic Hyperelastic Model of Concrete Deformation Under Combined Multiaxial Loading 183

Kornev O.A., Shuvalov A.N., Kornilova A.V., Ermakov V.A. Rationing of Defects in Mounting Welds and Near-Seam Areas of Vertical Tanks made of Aluminum Alloys 199

Tran H.P., Pham N.T., Le V.T., Dang V.P. Stability of the Coastal Revetment Using 2D and 3D Simulations: A Case Study in Vinh Long, Vietnam 222

Shagivaleev K.F., Surnin D.A., Surnina E.K. Bending of an Orthotropic Thin Plate Simply Supported on all Sides 235

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

Repin V.A., Martinov V.A., Popova M.V., Chibrikin D.A. Rational Reinforcement of Continuous Three-Span Timber Beams 253

Markina Yu.D. Influence of the Level of Detail of the Computational Model on the Stress State of a Guyed Mast 267

Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu., Osetinskii L.N. Estimation of Dimensions of the Soil Body Fragment in Numerical Modeling of a T-Connection of Cylindrical Shells 283

EXPERIMENTAL RESEARCH

Shakarneh O.M.D. Comparative Analysis of the Stiffness Characteristics of Masonry wall Based on Experimental Data and an Orthotropic Model.... 293

Copy Editor I.L. Pankratova
English Texts' Editor S.L. Shambina
Graphic Designer Iu.N. Efremova
Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:
Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 2026
© Mamedova S.R., photo on the cover of the journal (Alif Pavilion, Dubai, UAE), 2026

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 183–198

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ
ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-183-198
EDN: LCSKFX

Research article / Научная статья

Orthotropic Hyperelastic Model of Concrete Deformation Under Combined Multiaxial Loading

Andrey V. Benin[1], **Artem S. Semenov**[2]✉

[1] Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, *Saint Petersburg, Russian Federation*
[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, *Saint Petersburg, Russian Federation*
✉ semenov.artem@googlemail.com

Received: April 22, 2026
Revised: May 20, 2026
Accepted: June 1, 2026

Abstract. A mathematical model is proposed to describe nonlinear deformation of concrete under uniaxial and multiaxial loading. The material model takes into account the difference in the material's resistance to tension and compression. Accounting for orthotropy reflects the directional nature of concrete microcracking. The model accounts for the nonlinearity, multiaxiality, and anisotropy of concrete deformation using a locally orthotropic hyperelastic material model with orthotropic axes coinciding with the principal stress directions. The orthotropic material model takes into account all seven possible joint invariants of the strain tensor and anisotropy tensors. The case of a piecewise quadratic approximation of the elastic potential is studied in detail. Due to the existence of the potential, this model has improved convergence in the numerical solution of nonlinear boundary value problems. A comparison of the results of the proposed locally orthotropic hyperelastic deformation model with experimental data and calculation results using N.I. Karpenko's orthotropic model demonstrated good prediction accuracy under uniaxial (difference from experiments less than 1%) and multiaxial (difference from experiments less than 15%) loading.

Keywords: concrete, modeling, orthotropic hyperelastic material, tension-compression anisotropy, non-linear concrete behavior

Authors' contribution: *Benin A.V.* — conceptualization, literature review, mathematical model development, analysis of results, text editing; *Semenov A.S.* — mathematical model creation, calculations and analysis of results, text draft, review and editing. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

Funding. The research is funded by the Russian Scientific Foundation № 25-19-00921 "Multilevel microstructural models of inelastic deformation and fracture for monocrystalline and polycrystalline superalloys under complex thermo-mechanical loading."

For citation: Benin AV, Semenov AS. Orthotropic hyperelastic model of concrete deformation under combined multiaxial loading. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2026;22(3):183–198. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-183-198 EDN: LCSKFX

Andrey V. Benin, Candidate of Technical Sciences, Head of the testing laboratory "N.A. Belolyubsky Mechanical Laboratory," Associate Professor of the Department of Mechanics and Strength of Materials and Structures, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9 Moskovsky Pr., Saint Petersburg, 190031, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8251-4345, ORCID: 0000-0001-5646-0354; e-mail: nich@pgups.ru
Artem S. Semenov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mechanics and Control Processes, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya St, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8879-2244, ORCID: 0000-0002-8225-3487; e-mail: semenov.artem@googlemail.com

© Benin A.V., Semenov A.S., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Ортотропная гиперупругая модель деформирования бетона при сложном многоосном нагружении

А.В. Бенин[1], А.С. Семенов[2]✉

[1] Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, *Санкт-Петербург, Российская Федерация*
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, *Санкт-Петербург, Российская Федерация*

✉ semenov.artem@googlemail.com

Поступила в редакцию: 22 апреля 2026 г.
Доработана: 20 мая 2026 г.
Принята к публикации: 1 июня 2026 г.

Аннотация. Предложена математическая модель для описания нелинейного деформирования бетона при одноосном и многоосном нагружении с учетом разносопротивляемости материала при растяжении/сжатии. Учет ортотропии отражает направленный характер микрорастрескивания бетона. Модель учитывает нелинейность, многоосность и анизотропию деформирования бетона на основе использования модели локально-ортотропного гиперупругого материала с осями ортотропии, совпадающими с направлениями главных напряжений. В ортотропной модели материала учитываются все семь возможных совместных инвариантов тензора деформации и тензоров анизотропии. Для удобства идентификации детально исследован случай кусочно-квадратичной аппроксимации упругого потенциала. Рассматриваемая модель в силу существования потенциала обладает улучшенной сходимостью при численном решении нелинейных краевых задач. Сравнение результатов предложенной локально-ортотропной гиперупругой модели деформирования с данными экспериментов и результатами расчета по ортотропной модели Н.И. Карпенко продемонстрировали хорошую точность прогнозов при одноосном (отличие от экспериментов менее 1 %) и многоосном нагружении (отличие от экспериментов менее 15 %).

Ключевые слова: бетон, моделирование, ортотропный гиперупругий материал, разносопротивляемость при растяжении/сжатии, нелинейное поведение бетона

Вклад авторов. *Бенин А.В.* — концепция исследования, анализ литературы, разработка математической модели, анализ результатов, редактирование текста; *Семенов А.С.* — разработка математической модели, выполнение расчетов и анализ результатов, подготовка и редактирование текста. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 25-19-00921 «Многоуровневые микроструктурные модели неупругого деформирования и разрушения моно- и поликристаллических жаропрочных сплавов при сложном термомеханическом нагружении».

Для цитирования: *Бенин А.В., Семенов А.С.* Ортотропная гиперупругая модель деформирования бетона при сложном многоосном нагружении // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 183–198. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-183-198 EDN: LCSKFX

1. Introduction

The main causes of nonlinear behavior of concrete are microcracking under tension and failure (microcracking and crushing) under compression, as well as concrete creep. The need to take nonlinear properties of concrete into account [1] arises when solving various problems related to the evaluation of strength of reinforced concrete structures. Therefore, in 2003, instead of SNiP 2.03.01-84[1] building code introduced in the USSR, new design standards for concrete and reinforced concrete structures — SNiP 52-01-2003[2]— were approved and put into effect. For the first time in the Russian Federation, these standards declare the analysis based on a nonlinear deformation model using stress-strain diagrams for concrete and reinforcement as the primary analysis method. This approach, based taking nonlinear deformation into account, was preserved in the updated version of SP 63.13330.2018[3], accepted in 2019.

[1] SNiP 2.03.01-84. Concrete and Reinforced Concrete Structures. State Committee for Construction (Gosstroy) of USSR. Moscow: Central Institute of Standard Designs of Gosstroy of USSR; 1985.

[2] SNiP 52-01-2003. Concrete and Reinforced Concrete Structures. Basic Provisions. Moscow: Concrete and Reinforced Concrete Research Institute of State Committee for Construction (Gosstroy) of Russia; 2004.

[3] SP 63.13330.2018. Concrete and Reinforced Concrete Structures. Basic Provisions. Moscow: Ministry of Construction, Housing and Utilities (Minstroy) of the Russian Federation, 2018; Available from: https://www.minstroyrf.gov.ru/upload/iblock/d40/SP-63.pdf (accessed: 25.12.2025).

When describing the behavior of concrete in triaxial stress state, nonlinearity can be taken into account either in terms of nonlinear elasticity theory [1; 2–9] or plasticity theory [1; 9–25], as well as using material models that account for damage [9; 26–50]. Detailed reviews of models of elastic and inelastic deformation of concrete are presented in [1; 51].

A number of critical elements in reinforced concrete structures (near-support zones of box-section members of bridge superstructures, anchorage zones of prestressed reinforcement in bridge superstructure beams, joints between columns and slabs and beams, diaphragms of bridge superstructures, pylons of cable-stayed bridges, etc.) are subjected to multiaxial stress. The development of a three-dimensional, nonlinear, anisotropic model of concrete deformation remains an unresolved problem. Existing models of nonlinear deformation of concrete [10–13; 19; 31; 40; 52, etc.] are generally limited to the consideration of *isotropic* material. *Orthotropy*, which reflects the nature of microcracking in concrete, is taken into account, for example, in the model proposed by N.I. Karpenko [3]. A shortcoming of this model is the absence of elastic potential. In this study, the nonlinearity, multiaxiality, and anisotropy of concrete deformation are taken into account by using a model of locally orthotropic hyperelastic material with orthotropy axes coinciding with the directions of the principal stress axes. Due to the presence of potential, the model under consideration offers a number of advantages in the numerical solution of boundary value problems, such as symmetry of stiffness matrices and improved convergence of iterative procedures for finding nonlinear solutions. It should be noted that the hyperelastic model also possesses the property of thermodynamic consistency.

Under uniaxial tension, the initiation and propagation of cracks during microcracking occur in the plane orthogonal to the direction of the applied stress. In a combined multiaxial stress state, the initiation and propagation of cracks during microcracking occur predominantly in the plane orthogonal to the direction of the maximum principal tensile stress. When there are two (or three) positive principal stresses, cracks form in two (or three) mutually orthogonal planes, the orientation of which is determined by the principal planes of the stress tensor [1]. The formation of a system of identically oriented microcracks leads to a change in the mechanical properties of concrete. Its stiffness in certain directions decreases. It can no longer be considered an *isotropic* body, and an appropriate approximation of its anisotropy is, in general, an *orthotropic* material.

Local orthotropy is attained as the load increases due to a non-uniform stress state resulting from the directed, depending on the orientation of the principal stress planes, development of internal microcracks. In accordance with the principle of symmetry formulated by P. Curie — “the symmetries of the causes are to be found in the effects” [53] — the constitutive equations of the material must account for the elements of symmetry in the microstructure of concrete. Orthotropy has been taken into account using an elastic material model in [2; 4; 6–8, etc.], and when using plasticity and damage models in [41; 47–49, etc.], but it should be noted that elastic potential was not introduced in any of the cited works.

The second factor contributing to the accuracy of the nonlinear solution, along with the consideration of anisotropy, is the choice of a function that approximates the uniaxial experimental curves under compression and tension. Various empirically motivated analytical approximations of stress-strain diagrams of concrete have been proposed in [54–63, etc.]. A detailed review of research in this area is presented in [51; 60; 62]. Examples of such relationships for describing stress-strain curves for short-term uniaxial compression $\sigma_{xx}(\varepsilon_{xx})$ include:

- *Eurocode recommendation (EN 1992-1-1*[4]*)*

$$\frac{\sigma_{xx}}{\hat{\sigma}_c} = \frac{k\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c} - \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c}\right)^2}{1+(k-2)\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c}}, \tag{1}$$

[4] EN 1992-1-1:2004: Eurocode 2. *Design of concrete structures — Part 1–1: General rules and rules for buildings*. 2004. 225 p.

where $\hat{\sigma}_c = R_b = f_{cm}$ is the peak stress (strength) of concrete in compression; $\hat{\varepsilon}_c$ is the strain corresponding to the peak stress $\hat{\sigma}_c$; $k = 1.05E_{cm}\hat{\varepsilon}/f_{cm}$; E_{cm} is the initial (secant) modulus of elasticity of concrete, determined at the stress level of $0.4f_{cm}$.

- *N.I. Karpenko's approximation* [1]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_c^0\left(\hat{v}_c \pm (v_0 - \hat{v}_c)\sqrt{1-\omega_1\frac{\sigma_{xx}}{\hat{\sigma}_c} - (1-\omega_1)\left(\frac{\sigma_{xx}}{\hat{\sigma}_c}\right)^2}\right)}, \tag{2}$$

where E_c^0 is the initial modulus of elasticity of concrete in compression; $\hat{v}_c = \hat{E}_c / E_c^0 = \hat{\sigma}_c / (\hat{\varepsilon}_c E_c^0)$ is the value of the rate of change coefficient of the secant modulus $v_c = E_c / E_c^o = \sigma_{xx} / (\varepsilon_{xx} E_c^o)$ at the top of the diagram; for the ascending branch $v_0 = 1$, $\omega_1 = 2 - 2.5\hat{v}_c$, and for the descending branch — $v_0 = 2.05\hat{v}_c$, $\omega_1 = 1.95\hat{v}_c - 0.138$.

In expression (2), the plus sign corresponds to the ascending branch of the stress-strain diagram of concrete, and the minus sign corresponds to the descending branch.

- *Exponential-power approximation of G.V. Murashkin* [60]

$$\sigma_{xx} = A\varepsilon_{xx}^b e^{-c\varepsilon_{xx}}, \tag{3}$$

where coefficients *A, b, c* are determined from conditions $\left.\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{xx}}\right|_{\varepsilon_{xx}=0} = E_c^0$, $\left.\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{xx}}\right|_{\varepsilon_{xx}=\hat{\varepsilon}_c} = 0$, $\sigma_{xx}\big|_{\varepsilon_{xx}=\hat{\varepsilon}_c} = \hat{\sigma}_c$.

- *A.V. Benin's approximation* [59]

$$\frac{\sigma_{xx}}{\hat{\sigma}_c} = \begin{cases} k\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c} - (2k-3)\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c}\right)^2 + (k-2)\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c}\right)^3, & |\varepsilon_{xx}| \le \varepsilon_{\text{crc}} \\ \frac{\sigma_{res}}{\hat{\sigma}_c} + \frac{\sigma_{\text{crc}} - \sigma_{\text{res}}}{\hat{\sigma}_c + d(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{\text{crc}})\hat{E}_c}, & |\varepsilon_{xx}| \ge \varepsilon_{\text{crc}} \end{cases}, \tag{4}$$

where $k = E_c^0 / \hat{E}_c = E_c^0\hat{\varepsilon}_c / \hat{\sigma}_c = 1/\hat{v}_c$, σ_{res} is the residual strength, $\sigma_{\text{crc}} = 0.7\hat{\sigma}_c$ and ε_{crc} are the stress and strain at the beginning of crack formation.

Along with uniform analytical relationships for the entire diagram or a portion of it (1)–(4), etc., piecewise-linear approximations have become widely used in numerical analysis. The simplest variants are bilinear and trilinear approximations. With a large number of data points, multilinear approximations provide highly accurate description of the analytical relationship or experimental data (which are typically obtained in tabular form). A piecewise-linear approximation of the stress-strain diagram allows a mathematical representation

$$\sigma_{xx} = \sum_{i=1}^{N} A_i\varepsilon_{xx}\left[H(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{i+1}) - H(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_i)\right], \tag{5}$$

where $H(x) = \frac{1}{2}\left[\text{sign}(x) + 1\right] = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$ is the Heaviside function; A_i are the constants determined based on the slopes of stress-strain diagrams for tension and/or compression.

The *aim* of this study is to develop a general orthotropic hyperelastic model of nonlinear deformation of concrete under uniaxial and multiaxial loading, with the ability to simplify the identification of material parameters based on piecewise-linear approximations of the stress-strain diagram.

2. Methods

2.1. Constitutive Equations of Orthotropic Hyperelastic Model

The development of a general three-dimensional nonlinear anisotropic model of concrete deformation under combined multiaxial loading has not yet been fully resolved. Existing models of inelastic concrete deformation are limited to the case of isotropic material. *Orthotropy*, which reflects the nature of directional microcracking in concrete, is taken into account in the model by N.I. Karpenko [1–3]. One of the shortcomings of this model is the absence of elastic potential. This study attempts to account for the nonlinearity, multiaxiality, and anisotropy of concrete deformation by using a model of locally orthotropic hyperelastic material with orthotropic axes coinciding with the directions of the principal stresses.

In general case, when analyzing the combined multiaxial stress state of reinforced concrete structural members, it is necessary to use the general three-dimensional form of the constitutive equations, which represents the relationship between the six components of the stress tensor and the six components of the strain tensor, which becomes nonlinear at high stress levels. One of the rational material models for describing physically nonlinear deformation of concrete is the orthotropic *hyperelastic* material. Hyperelasticity implies the possibility of introducing scalar potential (free energy, Helmholtz thermodynamic potential) for the strain tensor, which allows the stress tensor to be defined as its derivative

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

or in the form of direct tensor calculus used hereinafter

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{6}$$

Introduction of a convex potential ensures the existence, uniqueness of the solution, and the possibility of using efficient finite-element methods to solve (elliptic) boundary value problems.

For isotropic material, the potential can be considered as a function of the invariants of the strain tensor. For linearly elastic material, the potential is a quadratic function of the first and second invariants.

The symmetry group of orthotropic material includes reflections with respect to three orthogonal planes, characterized by the normals to the microcrack growth planes $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$. For cracked concrete, these directions correspond to the directions of the principal stresses and may vary depending on the combined non-proportional loading program. It is assumed that elastic potential ψ for an orthotropic material is a function of the invariants of the strain tensor and the second-rank tensors characterizing the anisotropic properties of the material [64]:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1; \tag{7a}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2; \tag{7b}$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3, \tag{7c}$$

where symbol represents dyadic (tensor) product of vectors.

When solving specific problems, it is sufficient to consider only two anisotropy tensors $\mathbf{M}_1$ and $\mathbf{M}_2$, since the following relationship holds: $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{1}$, where is a unit tensor. Given this, 7 invariants can generally be the arguments of the elastic potential:

$$J_1 = tr\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad J_2 = tr\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad I_3 = \det \boldsymbol{\varepsilon}; \tag{8}$$

$$J_4 = tr\left(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{M}_1 \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}, \quad J_5 = tr\left(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2\right) = \mathbf{M}_1 \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^2; \tag{9}$$

$$J_6 = tr\left(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{M}_3 \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}, \quad J_7 = tr\left(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2\right) = \mathbf{M}_3 \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^2. \tag{10}$$

In the orthotropic hyperelastic material model, the definition of the elastic potential

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3) = \psi(J_1, J_2, I_3, J_4, J_5, J_6, J_7) \tag{11}$$

fully determines the form of the constitutive equations and the elastic moduli tensors.

In the case of small strains, the simplest representation of elastic potential ψ is the quadratic form of the components of the strain tensor:

$$\psi = \frac{1}{2}\lambda J_1^2 + \mu J_2 + \frac{1}{2}\alpha_1 J_4^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 J_6^2 + 2\alpha_3 J_5 + 2\alpha_4 J_7 + \alpha_5 J_1 J_4 + \alpha_6 J_1 J_6 + \alpha_7 J_4 J_6, \tag{12}$$

where λ and μ are the Lamé parameters; $\alpha_1, ..., \alpha_7$ are the material constants. Isotropic material corresponds to the case when $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0$.

Elastic potential (12) is a generalization of the variant proposed in [65], which takes into account invariants J_5 and J_7.

To take into account the physical nonlinearity of concrete behavior, it is proposed to generalize (12) by introducing nonlinear functions of the invariants:

$$\psi = \frac{1}{2}\lambda J_1^2 + \mu J_2 + a_1\left(J_4\right) + a_2\left(J_6\right) + a_3\left(J_5\right) + a_4\left(J_7\right) + a_5\left(J_1 J_4\right) + a_6\left(J_1 J_6\right) + a_7\left(J_4 J_6\right), \tag{13}$$

where $a_1, ..., a_7$ are twice differentiable piecewise-continuous functions.

The constitutive equation, which expresses the relationship between stresses and strains, is obtained by substituting (13) into (6):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = {} & \lambda J_1 \mathbf{1} + 2\mu\, \boldsymbol{\varepsilon} + \\ & + a_1' \mathbf{M}_1 + a_2' \mathbf{M}_3 + \\ & + a_3'\left(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_1\right) + a_4'\left(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_3\right) + \\ & + a_5'\left(J_1 \mathbf{M}_1 + J_4 \mathbf{1}\right) + a_6'\left(J_1 \mathbf{M}_3 + J_6 \mathbf{1}\right) + a_7'\left(J_4 \mathbf{M}_3 + J_6 \mathbf{M}_1\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Differentiating this expression yields a quasi-linear relationship between the stress rates and strain rates:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3) \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{15}$$

where the tensor of tangent elastic moduli of rank 4

$${}^4\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \tag{16}$$

can be expressed as:

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{C} = {} & \lambda\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{1}\boxtimes\mathbf{1} + \\
& + a_1''\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_1 + a_2''\mathbf{M}_3\otimes\mathbf{M}_3 + \\
& + a_3'\left(\mathbf{M}_1\boxtimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\boxtimes\mathbf{M}_1\right) + a_4'\left(\mathbf{M}_3\boxtimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\boxtimes\mathbf{M}_3\right) + \\
& + a_3''\left(\mathbf{M}_1\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{M}_1\right)\otimes\left(\mathbf{M}_1\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{M}_1\right) + a_4''\left(\mathbf{M}_3\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{M}_3\right)\otimes\left(\mathbf{M}_3\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{M}_3\right) + \\
& + a_5'\left(\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{M}_1\right) + a_6'\left(\mathbf{M}_3\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{M}_3\right) + a_7'\left(\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3\otimes\mathbf{M}_1\right) + \\
& + a_5''\left(J_1\mathbf{M}_1 + J_4\mathbf{1}\right)\otimes\left(J_1\mathbf{M}_1 + J_4\mathbf{1}\right) + \\
& + a_6''\left(J_1\mathbf{M}_3 + J_6\mathbf{1}\right)\otimes\left(J_1\mathbf{M}_3 + J_6\mathbf{1}\right) + a_7''\left(J_4\mathbf{M}_3 + J_6\mathbf{M}_1\right)\otimes\left(J_4\mathbf{M}_3 + J_6\mathbf{M}_1\right).
\end{aligned} \tag{17}
$$

The symbols for direct and cross dyadic (tensor) products are used here:

$$
\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right)_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}, \quad \left(\mathbf{A}\boxtimes\mathbf{B}\right)_{ijkl} = \tfrac{1}{2}\left(A_{ik}B_{jl} + A_{il}B_{jk}\right). \tag{18}
$$

In the case of piecewise-linear approximation of stress-strain diagrams (5), $a_i'' = \text{const}$ for $i = 1,2$; $a_j' = \text{const}$ for $j = 3, 4,\ldots,7$ and, as a consequence, $a_3'' = a_4'' = a_5'' = a_6'' = a_7'' = 0$, which leads to substantial simplification of expression (17):

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{C} = {} & \lambda\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{1}\boxtimes\mathbf{1} + \\
& + a_1''\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_1 + a_2''\mathbf{M}_3\otimes\mathbf{M}_3 + \\
& + a_3'\left(\mathbf{M}_1\boxtimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\boxtimes\mathbf{M}_1\right) + a_4'\left(\mathbf{M}_3\boxtimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\boxtimes\mathbf{M}_3\right) + \\
& + a_5'\left(\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{M}_1\right) + a_6'\left(\mathbf{M}_3\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{M}_3\right) + a_7'\left(\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3\otimes\mathbf{M}_1\right).
\end{aligned} \tag{19}
$$

In this case, the tensor of tangent moduli will be piecewise-constant. As follows from (19), the nine independent components of the tangent tensor of elastic moduli ${}^4\mathbf{C}$ are associated with (along intrinsic anisotropy axes $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$) the elastic potential constants introduced in (12) by the relations

$$
\begin{aligned}
& C_{1111} = \lambda + 2\mu + a_1'' + 2a_3' + 2a_5'; \quad C_{2222} = \lambda + 2\mu; && C_{1212} = \mu + a_3'/2; \\
& C_{1122} = \lambda + a_5'; && C_{2233} = \lambda + a_6'; && C_{2323} = \mu + a_4'/2; \\
& C_{1133} = \lambda + a_5' + a_6' + a_7'; && C_{3333} = \lambda + 2\mu + a_2'' + 2a_4' + 2a_6'; && C_{3131} = \mu + (a_3' + a')_4/2.
\end{aligned} \tag{20}
$$

The elastic potential constants can be expressed in terms of the components of the tangent tensor of the elastic moduli as the solution to the linear system of algebraic equations (20):

$$
\begin{aligned}
& \mu = C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}; \\
& \lambda = C_{2222} - 2\left(C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}\right); \\
& a_1'' = C_{1111} + C_{2222} - 2C_{1122} - 4C_{1212}; \\
& a_2'' = C_{3333} + C_{2222} - 2C_{2233} - 4C_{2323}; \\
& a_3' = 2\left(C_{3131} - C_{2323}\right); \\
& a_4' = 2\left(C_{3131} - C_{1212}\right); \\
& a_5' = C_{1122} - C_{2222} + 2\left(C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}\right); \\
& a_6' = C_{2233} - C_{2222} + 2\left(C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}\right); \\
& a_7' = C_{1133} - C_{1122} - C_{2233} + C_{2222} - 2\left(C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}\right).
\end{aligned} \tag{21}
$$

Taking (20) into account, expression (15) can be written in matrix form:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\sigma}_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu+a_1''+2a_3'+2a_5' & \lambda+a_5' & \lambda+a_5'+a_6'+a_7' & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+a_5' & \lambda+2\mu & \lambda+a_6' & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+a_5'+a_6'+a_7' & \lambda+a_6' & \lambda+2\mu+a_2''+2a_4'+2a_6' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+\dfrac{a_3'}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+\dfrac{a_4'}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+\dfrac{a_3'+a_4'}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ 2\dot{\varepsilon}_{12} \\ 2\dot{\varepsilon}_{23} \\ 2\dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

The structure of the matrix in (22) allows to clarify the physical significance of the introduced material constants. Constants a_1'' and a_2'' characterize the influence of microcracking processes on the relationship between normal stresses (acting along $\mathbf{n}_1$ and $\mathbf{n}_3$) and coaxial longitudinal strains. Constants a_3' and a_4' characterize the influence of microcracking processes on the relationship between shear stresses (acting in planes with normals $\mathbf{n}_1$ and $\mathbf{n}_3$) and the corresponding shear strains. Constants a_5', a_6' and a_7' characterize the influence of microcracking processes on the relationship between the normal stresses and transverse strains.

The reciprocal form of constitutive equations (22), which allows the strain rates to be expressed in terms of the stress rates, is as follows:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ 2\dot{\varepsilon}_{12} \\ 2\dot{\varepsilon}_{23} \\ 2\dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\dfrac{\nu_{12}}{E_2} & -\dfrac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_{21}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & -\dfrac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_{31}}{E_1} & -\dfrac{\nu_{32}}{E_2} & \dfrac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\mu_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\mu_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\mu_{31}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\sigma}_{31} \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

where the introduced coefficients in the tangent compliance matrix (23) (which represent the tangent Young's moduli E_1, E_2, E_3 in the three directions along orthotropy axes $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, three Poisson's ratios $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ and three shear moduli $\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31}$) are expressed in terms of the elastic potential coefficients using the relations obtained by inverting the upper-left 3×3 block of the matrix of elastic moduli from (22):

$$E_1 = D/\left[\left(a_2''+2a_4'\right)\left(\lambda+2\mu\right)+a_6'\left(4\mu-a_6'\right)+4\mu\left(\lambda+\mu\right)\right];$$
$$E_3 = D/\left[\left(a_1''+2a_3'\right)\left(\lambda+2\mu\right)+a_5'\left(4\mu-a_5'\right)+4\mu\left(\lambda+\mu\right)\right];$$
$$E_2 = D/\left[a_1''\left(a_2''+2a_4'+2a_6'+\lambda+2\mu\right)+a_2''\left(2a_3'+2a_5'+\lambda+2\mu\right)+2a_3'\left(2a_4'+2a_6'+\lambda+2\mu\right)+\right.$$
$$\left.+2a_4'\left(2a_5'+\lambda+2\mu\right)+a_5'\left(4\mu-a_5'+2a_6'-2a_7'\right)+a_6'\left(4\mu-a_6'-2a_7'\right)-a_7'\left(2\lambda+a_7'\right)+4\mu\lambda\left(\lambda+\mu\right)\right];$$

$$\nu_{21}=\frac{\left(a_2''+2a_4'\right)\left(\lambda+a_5'\right)+a_5'\left(2\mu+a_6'\right)-a_6'^2-a_7'\left(\lambda+a_6'\right)+2\lambda\mu}{\left(a_2''+2a_4'\right)\left(\lambda+2\mu\right)+a_6'\left(4\mu-a_6'\right)+4\mu\left(\lambda+\mu\right)};$$

$$\nu_{13}=\frac{-a_5'a_6'+2\mu\left(a_5'+a_6'\right)+a_7'\left(\lambda+\mu\right)+2\mu\lambda}{\left(a_1''+2a_3'\right)\left(\lambda+2\mu\right)+a_5'\left(4\mu-a_5'\right)+4\mu\left(\lambda+\mu\right)};$$

$$\nu_{32}=\frac{\left(a_1''+2a_3'\right)\left(\lambda+a_6'\right)+a_6'\left(2\mu+a_5'\right)-a_5'^2-a_7'\left(\lambda+a_5'\right)+2\lambda\mu}{\left(a_2''+2a_4'\right)\left(\lambda+2\mu\right)+a_6'\left(4\mu-a_6'\right)+4\mu\lambda\left(\lambda+\mu\right)};$$

$$\mu_{12}=\mu+a_3'/2;$$

$$\mu_{23}=\mu+a_4'/2;$$

$$\mu_{31}=\mu+a_3'/2+a_4'/2;$$

$$\begin{aligned}D=\;&a_1''a_2''\left(\lambda+2\mu\right)+2a_1''a_4'\left(\lambda+2\mu\right)+a_1''a_6'\left(4\mu-a_6'\right)+4a_1''\mu\left(\lambda+\mu\right)+2a_2''a_3'\left(\lambda+2\mu\right)+a_2''a_5'\left(4\mu-a_5'\right)+\\&+4a_2''\mu\left(\lambda+2\mu\right)+4a_3'a_4'\left(\lambda+2\mu\right)+2a_3'a_6'\left(4\mu-a_6'\right)+8a_3'\mu\left(\lambda+\mu\right)+2a_4'a_5'\left(4\mu-a_5'\right)+8a_4'\mu\left(\lambda+\mu\right)+\\&+4a_5'\mu\left(2\mu-a_5'+a_6'-a_7'\right)+2a_5'a_6'a_7'+4a_6'\mu\left(2\mu-a_6'\right)-4a_7'\mu\left(\lambda+a_6'\right)-a_7'^2\left(\lambda+2\mu\right)+4\mu^2\left(3\lambda+2\mu\right).\end{aligned}\qquad(24)$$

In this respect, the symmetry conditions for the compliance matrix (23) are assumed to be satisfied:

$$\frac{\nu_{12}}{E_2}=\frac{\nu_{21}}{E_1},\quad \frac{\nu_{23}}{E_3}=\frac{\nu_{32}}{E_2},\quad \frac{\nu_{31}}{E_1}=\frac{\nu_{13}}{E_3}.\qquad(25)$$

2.2. Identification of Material Parameters and Functions

In general case, to determine the 9 material parameters $\lambda,\mu,a_1,...,a_7$ that appear in the elastic potential expression (13), it is necessary to conduct 6 experiments for hard or soft loading: 3 for uniaxial tension/compression along 3 different axes of orthotropy and 3 for shear in different orthogonal planes. Such methods for determining material parameters in full-scale or computational experiments are typical for composites and materials with technologically induced orthotropy and are unlikely to be applicable to concrete and similar brittle materials. At the same time, it is necessary to take into account the specific nature of the difference in resistance under tension and compression (sensitivity to the type of stress state).

The simplest case of parameter identification, where tension and compression curves are only available for uniaxial loading, along with data on transverse strain, is considered further.

For *uniaxial tension* along the *x*-axis, the principal stresses are determined as follows: $\sigma_1=\sigma_{xx}>0$, $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0$. Normal $\mathbf{n}_1$ to the plane with the maximum principal stresses is oriented along the *x*-axis. It is clear that under uniaxial tension, the transverse strains will be negative and equal to each other: $\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=-\nu_t(\varepsilon_{xx})\varepsilon_{xx}$. Function $\nu_t(\varepsilon_{xx})$ is assumed to be known based on experimental data. The expressions for the invariants for the case of tension are the following:

$$J_1=\varepsilon_{xx}+2\varepsilon_{zz},\quad J_2=\varepsilon_{xx}^2+2\varepsilon_{zz}^2,\quad I_3=\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}^2,\quad J_4=\varepsilon_{xx},\quad J_5=\varepsilon_{xx}^2\quad J_6=\varepsilon_{zz},\quad J_7=\varepsilon_{zz}^2.\qquad(26)$$

Considering the assumptions made, the system of nontrivial equations (22) in the case where the normal to the plane of maximum principal stresses $\mathbf{n}_1$ is oriented along the *x*-axis, and $\mathbf{n}_3$ lies along the *z*-axis, is transformed into:

$$\begin{cases}\dot\sigma_{xx}=\left[\lambda+2\mu+a_1''+2a_3'+2a_5'-\nu_t'\left(2\lambda+2a_5'+a_6'+a_7'\right)\right]\dot\varepsilon_{xx}=h_t(\varepsilon_{xx})\dot\varepsilon_{xx},\\ \dot\sigma_{yy}=\left[\lambda+a_5'-\nu_t'\left(2\lambda+2\mu+a_6'\right)\right]\dot\varepsilon_{xx}=0,\\ \dot\sigma_{zz}=\left[\lambda+a_5'+a_6'+a_7'-\nu_t'\left(2\lambda+2\mu+a_2''+2a_4'+3a_6'\right)\right]\dot\varepsilon_{xx}=0,\end{cases}\qquad(27)$$

where $h_t(\varepsilon_{xx})$ is the piecewise-constant function of the tangent moduli, determined from the stress-strain curve for uniaxial tension.

Due to symmetry (indistinguishability of axes *y* and *z* under uniaxial tension from the natural state along the *x*-axis, corresponding to $\mathbf{n}_1$) in addition to (27), the following conditions should be added: $C_{2222} = C_{3333}$, $C_{1122} = C_{1133}$, $C_{1212} = C_{2323}$, which lead to equalities

$$\begin{aligned} &a_2'' + 2a_4' + 2a_6' = 0; \\ &a_6' + a_7' = 0; \\ &a_4' = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Parameters $\lambda = \dfrac{E_0 v_0}{(1+v_0)(1-2v_0)}$ and $\mu = \dfrac{E_0}{2(1+v_0)}$ are determined based on the initial values of the Young's modulus and Poisson's ratio of an initially isotropic body at zero strain. Due to the limited availability of experimental data, the lack of equations is compensated by making assumptions about approaching the isotropic case in the form of $a_3' = a_6' = 0$. Then, from equations (27) and (28), all the basic material constants for the tension case are found:

$$\begin{aligned} &a_1'' = h_t - 2\mu(1 + 2v_t' - 2v_t'^2) + \lambda(1 - 2v_t')^2; \\ &a_5' = 2\mu v_t' - \lambda(1 - 2v_t'); \\ &a_2'' = a_3' = a_4' = a_6' = a_7' = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

For *uniaxial compression* along the *x*-axis, the principal stresses are determined by the following equations: $\sigma_3 = \sigma_{xx} < 0, \sigma_2 = \sigma_1 = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$. Normal $\mathbf{n}_3$ to the plane with the minimum principal stresses is oriented along the *x*-axis. Under uniaxial tension, the transverse strains will be positive and equal to each other: $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -v_c(\varepsilon_{xx})\varepsilon_{xx}$. Function $v_c(\varepsilon_{xx})$ is assumed to be known based on experimental data. The expressions for the invariants under compression are the following:

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{zz}, \quad J_2 = \varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{zz}^2, \quad I_3 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}^2, \quad J_4 = \varepsilon_{zz}, \quad J_5 = \varepsilon_{zz}^2 \quad J_6 = \varepsilon_{xx}, \quad J_7 = \varepsilon_{xx}^2. \tag{30}$$

Considering the assumptions made, the system of nontrivial equations (22) in the case when the normal to the plane of minimum principal stresses $\mathbf{n}_3$ is oriented along the *x*-axis, and $\mathbf{n}_1$ — along the *z*-axis, transforms into:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{zz} = \left[-v_c'\left(2\lambda + 2\mu + a_1'' + 2a_3' + 3a_5'\right) + \lambda + a_5' + a_6' + a_7'\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = 0, \\ \dot{\sigma}_{yy} = \left[-v_c'\left(2\lambda + 2\mu + a_5'\right) + \lambda + a_6'\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = 0, \\ \dot{\sigma}_{xx} = \left[-v_c'\left(2\lambda + a_5' + 2a_6' + a_7'\right) + \lambda + 2\mu + a_2'' + 2a_4' + 2a_6'\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = h_c(\varepsilon_{xx})\dot{\varepsilon}_{xx}, \end{cases} \tag{31}$$

where $h_c(\varepsilon_{xx})$ is the piecewise-constant function of the tangent moduli, determined from the stress-strain diagram for uniaxial compression.

Due to symmetry (indistinguishability of axes *y* and *z* under uniaxial compression along the *x*-axis, corresponding to $\mathbf{n}_3$) in addition to (31), the following conditions should be added: $C_{1111} = C_{2222}$, $C_{1133} = C_{2233}$, $C_{2323} = C_{3131}$, which lead to equalities

$$\begin{aligned} &a_1'' + 2a_3' + 2a_5' = 0, \\ &a_5' + a_7' = 0, \\ &a_3' = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Due to the limited availability of experimental data, the lack of equations is compensated by making assumptions about approaching the isotropic case in the form of $a_4' = a_5' = 0$. Then, from equations (31) and (32), all the basic material constants for compression are found:

$$\begin{aligned} a_2'' &= h_c - 2\mu(1 + 2\nu_c' - 2\nu_c'^2) + \lambda(1 - 2\nu_c')^2; \\ a_6' &= 2\mu\nu_c' - \lambda(1 - 2\nu_c'); \\ a_1'' &= a_3' = a_4' = a_5' = a_7' = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

The nonzero coefficients a_1'', a_2'', a_5', a_6' obtained in (29) and (33) are piecewise-constant functions. Invariants J_1, J_4, J_6 serve as the parameters that define the interval within which the coefficients remain constant:

$$\begin{aligned} a_1''(J_4) &= \sum_{k=1}^{N}\left\{h_t^{(k)} - 2\mu\left[1 + 2\nu_t'^{(k)} - 2\left(\nu_t'^{(k)}\right)^2\right] + \lambda\left[1 - 2\nu_t'^{(k)}\right]^2\right\}\left[H(J_4 - J_4^{(k+1)}) - H(J_4 - J_4^{(k)})\right]\langle J_4\rangle; \\ a_5'(J_1J_4) &= \sum_{k=1}^{N}\left\{2\mu\nu_t'^{(k)} - \lambda\left[1 - 2\nu_t'^{(k)}\right]\right\}\left[H(J_1J_4 - J_1^{(k+1)}J_4^{(k+1)}) - H(J_1J_4 - J_1^{(k)}J_4^{(k)})\right]\langle J_4\rangle; \\ a_2''(J_6) &= \sum_{k=1}^{N}\left\{h_c^{(k)} - 2\mu\left[1 + 2\nu_c'^{(k)} - 2\left(\nu_c'^{(k)}\right)^2\right] + \lambda\left[1 - 2\nu_c'^{(k)}\right]^2\right\}\left[H(J_6 - J_6^{(k+1)}) - H(J_6 - J_6^{(k)})\right]\langle -J_6\rangle; \\ a_6'(J_1J_6) &= \sum_{k=1}^{N}\left\{2\mu\nu_c'^{(k)} - \lambda\left[1 - 2\nu_c'^{(k)}\right]\right\}\left[H(J_1J_6 - J_1^{(k+1)}J_6^{(k+1)}) - H(J_1J_6 - J_1^{(k)}J_6^{(k)})\right]\langle -J_6\rangle, \end{aligned} \tag{34}$$

where $H(x)$ is the Heaviside function, $\langle x\rangle = \max(0, x)$ are the Macaulay brackets.

The proposed model of orthotropic hyperelastic material was implemented in CES version 5.26 (Constitutive Equation Studio) [66], using which the results presented below were obtained.

3. Results and Discussion

The integration of the constitutive equations in the case of rigid loading is performed directly based on (22). In the case of soft loading, when the components of the stress tensor are specified and the components of the strain tensor need to be determined, it is necessary to invert the matrix of tangent moduli. The structure of the tangent modulus matrix (22), which contains a large number of zero components, corresponds to a representation in the coordinates of the axes of intrinsic anisotropy $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$. They are governed by microcracking processes and are not directly related to the directions of the principal stress axes. Therefore, in the general case of arbitrary multiaxial loading, solving these problems requires preliminary determination of the principal axes of the stress tensor.

Along the axes of intrinsic anisotropy, the tangential components of the stress tensor are absent, and for a simplified set of constants (see Section 2.2, (29), (33) and (34)) when $\sigma_{11} > 0$ and $\sigma_{33} < 0$, the following representation is obtained:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + a_1'' + 2a_5' & \lambda + a_5' & \lambda + a_5' + a_6' \\ \lambda + a_5' & \lambda + 2\mu & \lambda + a_6' \\ \lambda + a_5' + a_6' & \lambda + a_6' & \lambda + 2\mu + a_2'' + 2a_6' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \end{Bmatrix}. \tag{35}$$

In the considered case of piecewise-constant coefficients a_1'', a_2'', a_5', a_6' (34), equation (35) can be easily integrated. This results in piecewise-linear approximations of the stress-strain diagram (5).

3.1. Uniaxial Loading

Figure 1 shows a comparison of the results calculated using the orthotropic hyperelastic material model (6)–(35) with experimental data [59] for uniaxial compression and tension of B25 and B40 concrete. The results were obtained for the case of hard loading, for which it is possible to get both ascending and descending (post-peak) branches of the stress-strain diagram.

A total of 32 points were specified as input data for generating a complete stress-strain diagram, including both the compression curve and the tension curve, taking into account the ascending and descending branches. In this case, it is possible to obtain a design curve with a good degree of accuracy. The characteristic values of the parameters for B25 and B40 concrete [59], used in the calculations, are presented in Table.

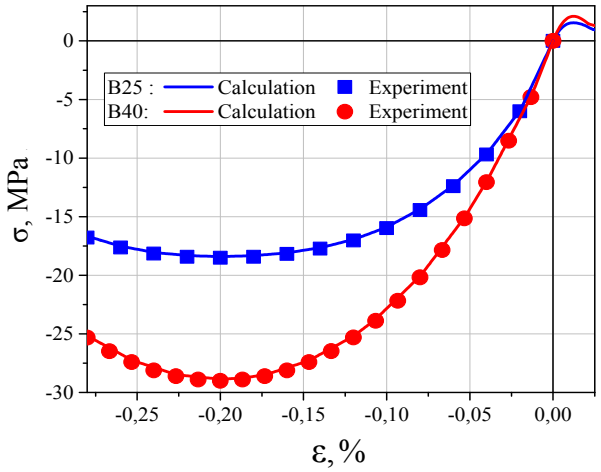


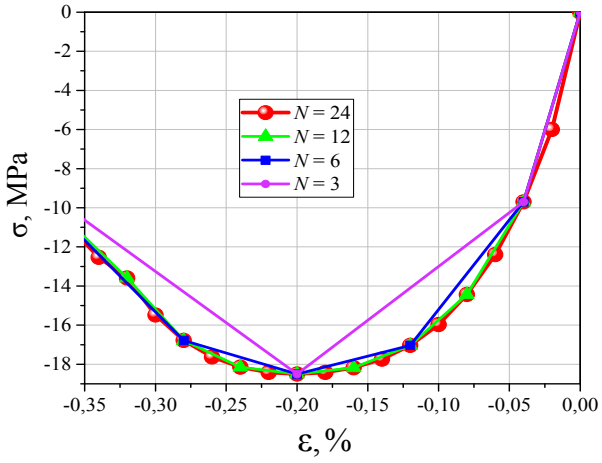
Figure 1. Comparison of calculation results for the orthotropic hyperelastic material model with experimental data under uniaxial compression and tension for B25 and B40 concrete

S o u r c e: made by A.S. Semenov. Experimental data obtained by A.V. Benin [59].

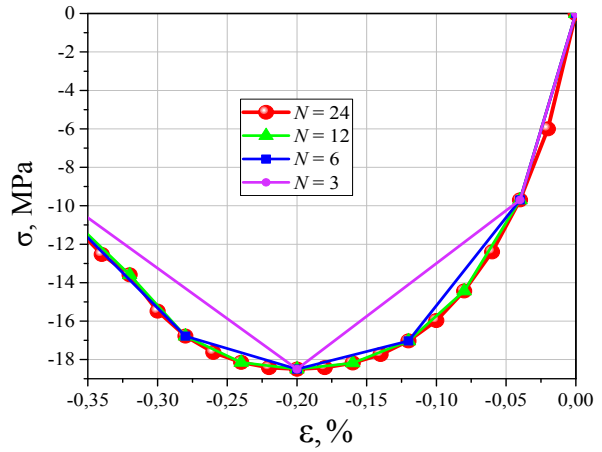
Values of parameters of B25 and B40 concrete used in calculations

Concrete parameters	B25	B40
$\hat{\sigma}_c = R_b$, MPa	18.5	29.1
$\hat{\sigma}_t = R_b^t$, MPa	1.55	2.1
$\hat{\varepsilon}_c$, %	0.199	0.201
$\hat{\varepsilon}_t$, %	0.0123	0.0124
E_c^0, MPa	30000	36000
$\hat{E}_c$, MPa	9343	1455
$\hat{E}_t$, MPa	12602	16934

S o u r c e: made by A.V. Benin, A.S. Semenov.



a



b

Figure 2. Stress-strain diagrams for B25-concrete under: *a* — tension; *b* — compression, obtained on the basis of the orthotropic hyperelastic material model with a different number of segments *N* of a piecewise linear approximation

S o u r c e: made by A.S. Semenov.

Depending on the number of segments *N*, the stress-strain diagram yields approximations with varying degrees of accuracy. Figure 2 shows multi-segment approximations of the stress-strain diagram for B25 concrete in tension and compression for various values of doubling number of segments.

A comparison of the calculation results for B25 concrete in compression using the hyperelastic orthotropic model (6)–(35) with N.I. Karpenko's orthotropic model (2) and experimental data [59] is shown in Figure 3.

On the ascending branch of the diagram, both models demonstrate high accuracy in describing the curve; however, on the descending branch, a systematic deviation is observed for the N.I. Karpenko's model. The use of a multi-segment piecewise-linear approximation of the stress-strain curve ensures high accuracy in approximating the hyperelastic orthotropic model. A 16-point approximation was used to construct the compression curve.

3.2. Multiaxial Loading

Here, monotonic triaxial compression of concrete with varying degrees of transverse confinement is examined. The ratios of the three axial components of the stress tensor took the following values:

- 10%-confinement with $\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 = -1 : -1/10 : -1/10$;
- 6.9%-confinement with $\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 = -1 : -1/14.5 : -1/14.5$.

Experimental data corresponding to the specified loading conditions are presented in the paper by Yu.N. Malashkin [67].

The stress-strain diagrams for the concrete under consideration are taken from [1]. A comparison of the results calculated using the hyperelastic orthotropic model (6)–(35) with N.I. Karpenko's orthotropic model (2) and experimental data [67] for various degrees of confinement is shown in Figures 4 and 5. Both orthotropic models demonstrate satisfactory predictive accuracy (deviation from the experiment of less than 15%) compared to the experiment.

4. Conclusion

As an alternative to the currently dominant empirical approach to formulating the constitutive equations for concrete, a thermodynamically consistent, locally orthotropic, hyperelastic model is proposed to describe the nonlinear deformation of concrete under monotonic multiaxial load, taking into account the tension-compression anisotropy. Local orthotropy develops as the load increases due to the growth of internal microcracks, the direction of which is determined by the orientation of the principal stress planes. Hyperelastic potential was defined based on a piecewise quadratic approximation using 7 joint invariants of the strain and anisotropy tensors.

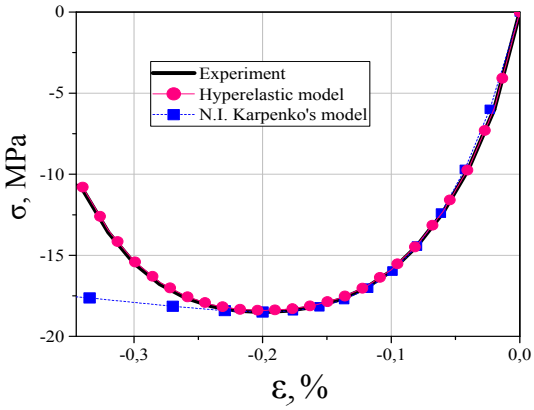


Figure 3. Comparison of results calculated using the hyperelastic orthotropic model with the orthotropic model of N.I. Karpenko and experimental data for uniaxial compression

S o u r c e: made by A.S. Semenov.
Experimental data obtained by A.V. Benin [59].

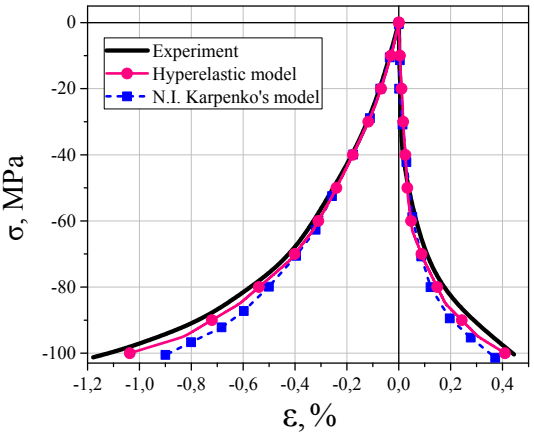


Figure 4. Comparison of results calculated using the hyperelastic orthotropic model with the orthotropic model of N.I. Karpenko and experimental data for multiaxial loading $\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 = -1 : -1/10 : -1/10$

S o u r c e: made by A.S. Semenov, A.V. Benin.
Experimental data obtained by Yu.N. Malashkin [67].

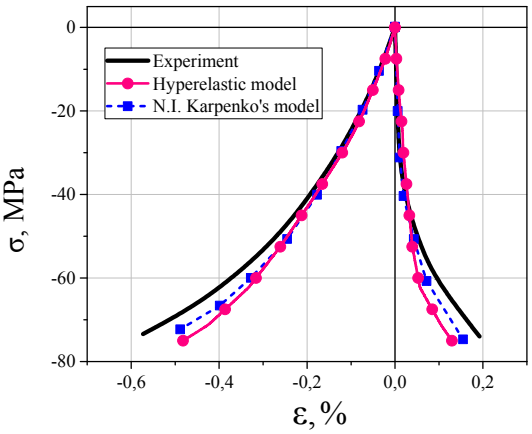


Figure 5. Comparison of results calculated using the hyperelastic orthotropic model with the orthotropic model of N.I. Karpenko and experimental data for multiaxial loading $\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 = -1 : -1/14.5 : -1/14.5$

S o u r c e: S o u r c e: made by A.S. Semenov, A.V. Benin.
Experimental data obtained by Yu.N. Malashkin [67].

In general case, the model contains 9 material parameters. A method is proposed for simplified identification of material parameters based on experimental stress-strain diagrams for compression and tension, with measurements of longitudinal and transverse strains.

The obtained results allow to draw the following conclusions:

1. A comparison of the results obtained using the proposed orthotropic hyperelastic deformation model with experimental data for B25 and B40 concrete demonstrated good prediction accuracy under uniaxial loading (deviation from the experiments of less than 1%) and multiaxial loading (deviation from the experiments of less than 15%).

2. The proposed model allows to describe both the ascending and descending branches of the concrete stress-strain curve.

3. When describing the behavior of concrete on the descending branch of the strain diagram, the proposed model demonstrated higher accuracy compared to N.I. Karpenko's model of orthotropic elastic material.

Further development of the model involves explicit consideration of damage accumulation during loading and development of methods for identifying material parameters based on experimental data obtained under multiaxial loading.

References

1. Karpenko NI. *General models of reinforced concrete mechanics.* Moscow: Stroyizdat Publ.; 1996. (In Russ.) ISBN 5-274-01682-0

2. Karpenko NI. *Theory of deformation of reinforced concrete with cracks.* Moscow: Stroyizdat Publ.; 1976. (In Russ.) Available from: https://djvu.online/file/Vb91H5loSebPQ?ysclid=mqusg0t7x6992914859 (accessed: 22.12.2025).

3. Karpenko NI. On the construction of a general orthotropic model of concrete. *Structural mechanics and calculation of structures.* 1987;2:31–36. (In Russ.)

4. Balan TA. *Model of concrete deformation under short-term loading*. Structural mechanics and calculation of structures. 1986;4:32–36. (In Russ.)

5. Vu NT, Polyakova YeN. Deformation of concrete under volumetric stress state. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2025;20(5):683–693. (In Russ.) https://doi.org/10.22227/1997-0935.2025.5.683-693 EDN: SZKPOG

6. Robins PI, Kong FK. Modified finite element method applied to RG deep beams. *Civil engineering and public works review*. 1973;11:1061–1072.

7. Cedolin T, Mulas MG. Una legge contitutiva secante ed esplicita per il caicestruzzo in statipiani di tensione. *Studi e Ricerche Politecnico di Milano*. 1981;3:75–105.

8. Ahmad SH, Shah SP, Khaloo AR. Orthotropic model of concrete for triaxial stresses. *Journal of Structural Engineering*. 1986;112:165–181. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1986)112:1(165)

9. Benin AV, Semenov AS, Semenov SG, Melnikov BE. The simulation of bond fracture between reinforcing bars and concrete. Part 2. Models without taking the bond discontinuity into account. *Magazine of Civil Engineering.* 2014;45(1): 23–40. (In Russ.) https://doi.org/10.5862/MCE.45.4 EDN: RWXKLV

10. Geniev GA. A variant of the deformation theory of concrete plasticity. *Concrete and Reinforced Concrete.* 1969; 2:18–20. (In Russ.)

11. Geniev GA, Kissyuk VN, Tyupin GA. *Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1974. (In Russ.)

12. Leites ES. A variant of the theory of plastic flow of concrete. *Structural Mechanics and Analysis of Structures.* 1978;3:34–37. (In Russ.)

13. Kruglov VM, Donets AN, Tikhomirov SA. Construction of physical relationships of concrete based on the theory of plastic flow. *Issues of design, construction and operation of artificial structures on railways*. Novosibirsk, 1986. P. 47–53. (In Russ.)

14. Kruglov VM, Erofeev VT, Vatin NI, Al-Dulaimi Salman Dawood Salman. Version of the deformation theory of plastic ductility of concrete in a plane stress state. *Russian journal of transport engineering*. 2019;4(6). (In Russ.) https://doi.org/10.15862/11SATS419

15. Ostrik AV, Kim VV. Numerical models of non-stationary deformation and destruction of concretes. *Composite materials constructions*. 2020;(4):11–24. (In Russ.) EDN: TYYSUF

16. Bazant ZP, Bhat PD. Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. *J. Engrg. Mech., ASCE.* 1976; 106:701–721. (In Russ.) https://doi.org/10.1061/jmcea3.0002152

17. Kotsovos MD. A mathematical model of the deformational behavior of concrete under generalzed stresses based on fundamental material properties. *Material of construction.* 1980;13:289–329. (In Russ.) https://doi.org/10.1007/BF02480434

18. Gerstle KH. Simple formulation of triaxial concrete behavior. *Journal of ACI*. 1981;75(5):382–387.

19. Dvorkin EN, Cuitiño AM, Gioia G. A concrete material model based on non-associated plasticity and fracture. *Engineering Computations*. 1989;6(4):281–294. https://doi.org/10.1108/eb023783

20. Pramono E, Willam K. Fracture energy-based plasticity formulation of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. 1989;115:1183–1204. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:6(1183)

21. Voyiadjis GZ, Abu-Lebdeh JM. Plasticity model for concrete using the bounding surface concept. *Int. J. plasticity.* 1994;10:1–21. https://doi.org/10.1016/0749-6419(94)90051-5

22. Feenstra PH, De Borst R. A composite plasticity model for concrete. *International Journal of Solids and Structures.* 1996;33:707–730. Available from: https://www.sci-hub.ru/10.1016/0020-7683(95)00060-n (accessed: 11.12.2025).

23. Chen W-F. *Plasticity in Reinforced Concrete*. J. Ross Publ.; 2007. ISBN 978-1-932159-74-5

24. Hu L, Li S, Zhu J, Yang X. Mathematical model of constitutive relation and failure criteria of plastic concrete under true triaxial compressive stress. *Materials*. 2021;14(1):14. https://doi.org/10.3390/ma14010102 EDN: HEEITC

25. Agapov VP, Markovich AS, Aidemirov KR. Models of nonlinear deformation of concrete in a triaxial stress state and their implementation in the PRINS computational complex. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):162–177. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177 EDN: LUJBRU

26. Lemaitre J, Desmorat R. *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Berlin: Springer Publ.; 2005. https://doi.org/10.1007/b138882

27. Krajcinovic D, Foneska GU. The continuous damage theory of brittle materials Part I: General theory. *J. App. Mech.* 1981;48:809–815. https://doi.org/10.1115/1.3157739

28. Ortiz M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of Materials.* 1985;4(1):67–93. https://doi.org/10.1016/0167-6636(85)90007-9

29. Oñate E, Oller S, Oliver J, Lubliner J. A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity. *Engineering Computations.* 1988;5(4):309–319. https://doi.org/10.1108/eb023750

30. Mazars J, Pijaudier-Cabot G. Continuum damage theory — Application to concrete. *J. Engrg. Mech., ASCE.* 1989;115:345–365. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345)

31. Lubliner J, Oliver J, Oller S, Onate E. A plastic-damage model for concrete. *Int. J. Solids Struct.* 1989;25:299–326. https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4

32. Ju JW. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*. 1989;25(7):803–833. https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90015-2

33. Yazdani S, Schreyer HL. Combined plasticity and damage mechanics model for plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics.* 1990;116(7):1435–1450. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:7(1435)

34. Papa E, Taliercio A. Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete. *Engineering Fracture Mechanics*. 1996;55(2):163–179. https://doi.org/10.1016/0013-7944(96)00004-5 EDN: AKSAQF

35. Lee J, Fenves GL. Plastic-Damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics.* 1998;124(8):892–900. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892)

36. Peerlings RHJ, de Borst R, Brekelmans WAM, Geers MGD. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*. 1998;3:323–342. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(1998100)3:4<323::AID-CFM51>3.0.CO;2-Z

37. Cauvin A, Testa RB. Damage mechanics: basic variables in continuum theories. *International Journal of Solids and Structures.* 1999;36(5):747–761. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00044-4 EDN: ABXONN

38. Jefferson AD. Craft — a plastic-damage-contact model for concrete. I. Model theory and thermodynamic considerations. *International Journal of Solids and Structures.* 2003;40(22):5973–5999. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00390-1 EDN: KETFMT

39. Krätzig WB, Pölling R. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. *Computers & Structures.* 2004;82(15–16):1201–1215. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.002

40. Tao X, Phillips DV. A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states. *Cement and Concrete Composites.* 2005;27(6):716–726. https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2004.09.017

41. Badel P, Godard V, Leblond J-B. Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure. *International Journal of Solids and Structures.* 2007;44(18–19):5848–5874. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.02.001 EDN: KETJOX

42. Červenka J, Papanikolaou VK. Three dimensional combined fracture–plastic material model for concrete. *International Journal of Plasticity.* 2008;24(12):2192–2220. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.01.004

43. Wu J-Y, Xu S-L. An augmented multicrack elastoplastic damage model for tensile cracking. *International Journal of Solids and Structures*. 2011;48:2511–2528. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.05.001

44. Benin AV, Semenov AS, Semenov SG, Melnikov BE. The simulation of bond fracture between reinforcing bars and concrete. Part 1. Models with account of the discontinuity. *Magazine of Civil Engineering.* 2013;40(5):86–99. (In Russ.) https://doi.org/10.5862/MCE.40.10 EDN: QZTMSJ

45. Benin AV, Semenov AS, Semenov SG. Fracture analysis of reinforced concrete bridge structures with account of concrete cracking under steel corrosion. *Advanced Materials Research.* 2014;831:364–369. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.831.364 EDN: UEGPWH

46. Benin AV, Semenov AS, Semenov SG, Beliaev MO, Modestov VS. Methods of identification of concrete elastic-plastic-damage models. *Magazine of Civil Engineering*. 2017;76(8):279–297. https://doi.org/10.18720/MCE.76.24 EDN: YSTEJC

47. Voyiadjis GZ, Zhou Y, Kattan PI. A new anisotropic elastoplastic-damage model for quasi-brittle materials using strain energy equivalence. *Mechanics of Materials.* 2022;165:104163. EDN: SPCISK

48. Mader T, Schreter-Fleischhacker M, Shkundalova O, Neuner M, Hofstetter G. Constitutive modeling of orthotropic nonlinear mechanical behavior of hardened 3D printed concrete. *Acta Mech.* 2023;234:5893–5918. https://doi.org/10.1007/s00707-023-03706-z EDN: PZXSBQ

49. Xue L, Ren X. A tensorial energy-release-rate based anisotropic damage-plasticity model for concrete. *Mechanics of Materials*. 2024;195:105025. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2024.105025 EDN: HQFIEY

50. Rakic D, Bodić A, Milivojevic N, Dunić V, Živković M. Concrete damage plasticity material model parameters identification. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2021;15:111–122. https://doi.org/10.24874/jsscm.2021.15.02.11 EDN: GWWDNU

51. Raveendra Babu R, Benipal GS, Singh AK. Constitutive modelling of concrete: an overview. *Asian Journal of Civil Engineering.* 2005;6(4):211–246. Available from: https://sid.ir/paper/298643/en

52. Domenico DD, Bernardo LFA. *Mechanical behavior of concrete materials and structures: Experimental evidence and analytical models*. Basel: MDPI; 2022. https://doi.org/10.3390/books978-3-0365-4911-8

53. Curie P. *Selected works*. Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russ.)

54. Smith G, Young L. Ultimate theory in flexure by exponential function. *Journal ACI.* 1955;52(11):349–359.

55. Liebenderg AC. Stress-strain function for concrete subjected to short-term loading. *Mag. of Concrete Research.* 1962;14(41):85–90.

56. Saennz LP. Discussion *of equation to the stress-strain curvier of concrete*. By P. Desai and S. Krishnan. *ACI Journal Proc*. 1964;61(9):1229–1235.

57. Shah S, Winter G. Inelastic behavior and fracture of concrete. *Journal ACI.* 1968;20:5–28.

58. Bachinskii VIa, Bambura AN, Vatagin SS. Relationship between stresses and strains of concrete under short-term inhomogeneous compression. *Concrete and Reinforced Concrete*. 1984;10:18–19. (In Russ.) Available from: https://science.totalarch.com/magazine/concrete/concrete_1984_10.pdf (accessed: 22.12.2025).

59. Benin AV. *Deformation and fracture of reinforced concrete: analytical, numerical and experimental research*. SPb.: PGUPS; 2006. (In Russ.) EDN: QNMQKR

60. Murashkin GV, Murashkin VG, Panfilov DA. Description of concrete deformation diagrams in domestic and foreign norms. *Bulletin of the Volga Regional Branch of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences*. 2011;14:144–150. (In Russ.) EDN: VXJXRL

61. Radaikin OV. About construction of concrete deformation diagrams at uniaxial short-time tension/compression with the use of the damage deformation criterion. *Bulletin of Civil Engineers.* 2017;(6):71–78. (In Russ.) https://doi.org/10.23968/1999-5571-2017-14-6-71-78 EDN: YPNFNL

62. Rimshin VI, Krishan AL, Mukhametzyanov AI. Constructing a deformation diagram of uniaxially compressed concrete. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2015;(6):23–31. (In Russ.) EDN: TYCWVB

63. Travush VI, Murashkin VG. Concrete deformation model for reconstructed reinforced concrete. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.* 2022;18(4):132–137. https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-132-137 EDN: TDTBVO

64. Spencer AJM. Theory of invariants. In: Eringen AC. (Ed.), Continuum Physics, vol. 1. Academic Press, New York, 1971. p. 239–353. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X

65. Lavrov K, Semenov A, Benin A. Modeling of nonlinear multiaxial deformation of concrete on the base of hyperelastic orthotropic model. *International Scientific Conference Week of Science in Spbpu — Civil Engineering (SPBWOSCE-2015),* December, 3–4, 2015. Saint-Petersburg, Russia, 2016;53:01043. https://doi.org/10.1051/matecconf/20165301043 EDN: VYDRJZ

66. Semenov AS. *Computational methods in theory of plasticity.* Saint-Petersburg: SPbSPU Publ.; 2008. (In Russ.) ISBN 978-5-7422-2031-8 EDN: QJUTBT

67. Malashkin YuN. *Deformation and fracture of concrete in combined stress states.* Dissertation of Doctor of Engineering Sciences. 1984. (In Russ.)

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 199–221

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-199-221
EDN: KKABDB

Научная статья / Research article

Нормирование дефектов монтажных сварных швов и околошовной зоны вертикальных резервуаров из алюминиевых сплавов

О.А. Корнев[1], А.Н. Шувалов[1], А.В. Корнилова[1,2], В.А. Ермаков[1]✉

[1] Московский государственный строительный университет (Национальный исследовательский университет), *Москва, Российская Федерация*

[2] Российский университет дружбы народов, *Москва, Российская Федерация*

✉ Ermakov@mgsu.ru

Поступила в редакцию: 12 марта 2026 г.
Доработана: 14 мая 2026 г.
Принята к публикации: 23 мая 2026 г.

Аннотация. Цель исследования — создание методики нормирования наиболее опасных дефектов сварных алюминиевых конструкций. Методика разработана для сварного шва и зоны термического влияния и учитывает напряженно-деформированное состояние и свойства материала в месте расположения дефекта. Предложенная методика базируется на постулатах линейной механики разрушения и классических подходах усталости металлов. Определяются допустимые параметры дефектов при приложении статической испытательной и циклической эксплуатационной нагрузки. Расчеты по предложенному алгоритму методом обобщенного приведенного градиента показали, что при эксплуатационной нагрузке допускается меньший размер дефекта. На базе проведенных экспериментов и данных литературного обзора были сформулированы функциональные зависимости порогового значения коэффициента интенсивности напряжений от предела текучести материала для трех групп алюминиевых сплавов с различным химическим и стехиометрическим составом компонентов. Анализ полученных функциональных зависимостей показал, что при увеличении предела текучести алюминиевых сплавов пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений также возрастает в отличие от сталей, у которых повышение предела текучести приводит к снижению порогового значения коэффициента интенсивности напряжений. Методика проиллюстрирована расчетом допустимых параметров дефектов в монтажных швах вертикального резервуара из сплава 1915Т. Рассмотрены зоны, в которых существует вероятность возникновения дефектов — центр шва и два участка зоны термического влияния, отличающихся по своим механическим свойствам. В дальнейшем предполагается проведение экспериментальных исследований сварных швов в алюминиевых конструкциях, полученных различными технологиями сварки и расширение номенклатуры исследуемых сплавов.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, листовые конструкции, модели дефектов, зона термического влияния, дефекты сварного шва, пористость сварки, поверхностная трещина, подповерхностная трещина, газовая пора, пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений

Корнев Олег Александрович, заместитель директора, Научно-исследовательский институт экспериментальной механики, Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 4890-2128; ORCID: 0009-0009-5545-5284; e-mail: KornevOA@mgsu.ru

Шувалов Александр Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры испытания сооружений, Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 8488-4644; ORCID: 0009-0007-0289-7412; e-mail: AShuvalov@mgsu.ru

Корнилова Анна Владимировна, доктор технических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт экспериментальной механики, Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 6569-6240; ORCID: 0000-0001-5569-9320; e-mail: KornilovaAV@mgsu.ru

Ермаков Валентин Алексеевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт экспериментальной механики, Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 3227-6815; ORCID: 0000-0002-8862-8139; e-mail: Ermakov@mgsu.ru

© Корнев О.А., Шувалов А.Н.., Корнилова А.В., Ермаков В.А., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Вклад авторов: *Корнев О.А.* — общее руководство и проведение исследований; *Шувалов А.Н.* — разработка идеологии исследования; *Корнилова А.В.* — обработка данных вычислительного эксперимента, написание текста статьи; *Ермаков В.А.* — создание графического материала, написание теста статьи. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в .публикуемую статью.

Для цитирования: *Корнев О.А., Шувалов А.Н., Корнилова А.В., Ермаков В.А.* Нормирование дефектов монтажных сварных швов и околошовной зоны вертикальных резервуаров из алюминиевых сплавов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 199–221. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-199-221 EDN: KKABDB

Rationing of Defects in Mounting Welds and Near-Seam Areas of Vertical Tanks made of Aluminum Alloys

Oleg A. Kornev[1], Aleksandr N. Shuvalov[1], Anna V. Kornilova[1,2], Valentin A. Ermakov[1]✉

[1] Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), *Moscow, Russian Federation*
[2] RUDN University, *Moscow, Russian Federation*

✉ Ermakov@mgsu.ru

Received: March 12, 2026
Revised: May 14, 2026
Accepted: May 23, 2026

Abstract. The purpose of the study is to create a methodology for standardizing the most dangerous defects in welded aluminum structures. The methodology is designed for the weld and the heat-affected zone and takes into account the stress-strain state and material properties at the location of the defect. The proposed methodology is based on the principles of linear fracture mechanics and classical approaches to metal fatigue. The methodology determines the permissible parameters of defects under static test and cyclic operational loads. Calculations using the proposed algorithm based on the generalized reduced gradient method have shown that a smaller defect size is acceptable under operational loads. Based on the conducted experiments and literature review data, functional dependencies of the threshold value of the stress intensity factor on the yield strength of the material were formulated for three groups of aluminum alloys with different chemical and stoichiometric compositions of the components. The analysis of the obtained functional dependencies showed that as the yield strength of aluminum alloys increases, the threshold value of the stress intensity factor also increases, in contrast to steels, where an increase in the yield strength leads to a decrease in the threshold value of the stress intensity factor. The methodology is illustrated by calculating the permissible parameters of defects in the installation seams of a vertical tank made of alloy 1915T. The zones where defects are likely to occur are the center of the weld and two sections of the heat-affected zone that differ in their mechanical properties. In the future, it is planned to conduct experimental studies of welds in aluminum structures obtained using various welding technologies and to expand the range of alloys under study.

Keywords: stress-strain state, sheet metal structures, defect models, heat-affected zone, weld defects, porosity in welding, surface crack, subsurface crack, gas pocket, stress intensity factor threshold

Authors' contribution: *Kornev O.A.* — general guidance and conduct of experimental research; *Shuvalov A.N.* — development of research ideology; *Kornilova A.V.* — conducting surveys, experimental data, writing the text of the article; *Ermakov V.A.* — creating graphic material, writing the text of the article. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Oleg A. Kornev, Deputy Director, Scientific Research Institute of Experimental Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4890-2128; ORCID: 0009-0009-5545-5284; e-mail: KornevOA@mgsu.ru

Aleksandr N. Shuvalov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Testing of Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8488-4644; ORCID: 0009-0007-0289-7412; e-mail: AShuvalov@mgsu.ru

Anna V. Kornilova, Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, Scientific Research Institute of Experimental Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Professor of the Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 6569-6240; ORCID: 0000-0001-5569-9320; e-mail: KornilovaAV@mgsu.ru

Valentin A. Ermakov, Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Scientific Research Institute of Experimental Mechanics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 3227-6815; ORCID: 0000-0002-8862-8139; e-mail: Ermakov@mgsu.ru

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Kornev OA, Shuvalov AN, Kornilova AV, Ermakov VA. Rationing of defects in mounting welds and near-seam areas of vertical tanks made of aluminum alloys. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2026;22(3): 199–221. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-199-221 EDN: KKABDB

1. Введение

Основным направлением стратегии ускоренного развития территорий Крайнего Севера является проведение фундаментальных и прикладных научных исследований. Импульс развитию инфраструктуры Крайнего Севера может дать расширение применения алюминиевых сплавов, в том числе для строительства вертикальных резервуаров для хранения нефти и нефтепродуктов. В [1] проведен обзор литературных источников и собственных экспериментальных исследований, показавший, что использование алюминиевых сплавов существенно снижает транспортные и эксплуатационные расходы во время всего жизненного цикла объекта. Коррозионная стойкость алюминиевых сплавов позволяет увеличивать срок службы объектов до 6 раз по сравнению со стальными конструкциями [2–4].

С точки зрения технологии возведения резервуаров для климатических условий Крайнего Севера наиболее перспективным является метод рулонирования как наиболее экономически выгодный и автоматизированный. При этом методе элементы резервуаров (стенка, днище, плавающая крыша, понтон, настил стационарной кровли) изготавливают в заводских условиях, сворачивают в рулоны и доставляют на монтажную площадку. Метод имеет целый ряд преимуществ перед традиционной полистовой сборкой, широко применяемой, например, в странах Персидского залива. При рулонировании выше скорость возведения, минимизируется вероятность дефектности, так как дефекты катанных листов выбраковываются при выходном контроле на металлургическом предприятии. Например, сварка трением с перемешиванием (СТП), применяемая на заводе-изготовителе, практически не вносит дефектов в силу особенностей технологического процесса. При строительстве резервуаров из алюминиевых сплавов методом рулонирования наиболее опасным по вероятности наличия дефектов является монтажный сварной шов, выполняемый аргонодуговой сваркой (АДС), и его околошовная зона — зона термического влияния (ЗТВ). Согласно Российскому государственному стандарту ГОСТ Р ИСО 6520-1-2012[1], дефекты сварных швов в металлах (в том числе в алюминиевых сплавах) разделены на шесть основных групп: 1-я — трещины; 2-я — полости; 3-я — твердые включения; 4-я — несплавление и непровар; 5-я — отклонение формы и размера; 6-я — прочие дефекты. В работах В.В. Панасюка [5; 6], В.В. Москвичева [7–9], А.М. Лепихина [8] и других обоснована необходимость приравнивать технологические дефекты сварных швов к трещиноподобным дефектам (несплошностям идентичного размера при оценке работоспособности сварных соединений с дефектами). Попытка реализации такого подхода к дефектности сварных швов предпринята в работе Е.И. Елсукова [10], в которой постулируется, что прочность сварного соединения достигается за счет обеспечения в материале шва высоких значений ударной вязкости и относительного сужения. В работе описана связь предельных размеров дефектов с величиной номинальных напряжений в стенке резервуара для двух сталей Ст3сп и 09Г2С, основанная на действующих в момент написания работы ПБ 03-381-00[2]. Тем не менее некоторые ошибочные положения данной работы не позволили автору получить адекватные результаты. Кроме того, работа ограничена дефектами в стальных конструкциях.

В [11] приведены дефекты, наиболее часто возникающие в сварном шве, выполняемом разными видами сварочных технологий, и ЗТВ при сварке алюминиевых сплавов. Классификация соответствует ГОСТ Р ИСО — 2012. Из всех дефектов, регламентированных ГОСТ Р ИСО 6520-2012, в дан-

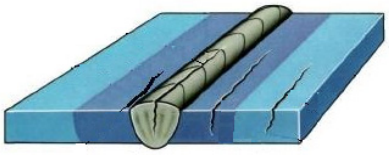
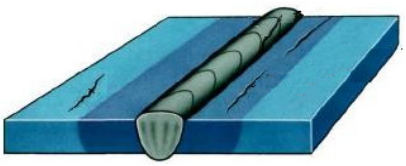
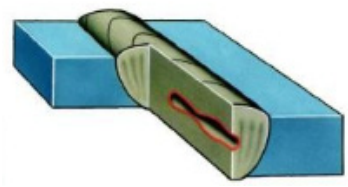
[1] ГОСТ Р ISO 6520-1-2012. Сварка и смежные процессы. Классификация геометрических дефектов в металлических материалах. Часть 1 : Сварка плавлением. URL: https://docs.cntd.ru/document/1200095143 (дата обращения: 22.03.2026).

[2] ПБ 03-381-00. Правила устройства вертикальных цилиндрических стальных резервуаров для нефти и нефтепродуктов. URL: https://docs.cntd.ru/document/1200007380 (дата обращения: 22.03.2026).

ной работе рассмотрены наиболее опасные дефекты (табл. 1), имеющие потенциал «страгивания» и роста по критериям механики разрушения. Принято, что дефекты типа «несплавление» и «непровар» (обозначение по ИСО 6520-1-401, ИСО 6520-402) в шве резервуара недопустимы.

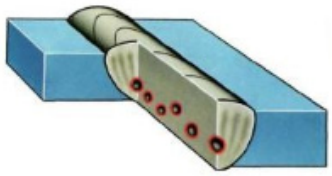
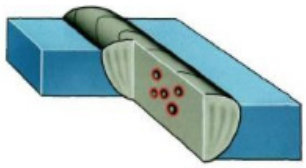
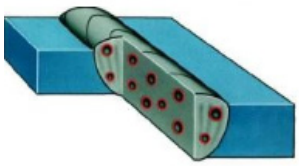
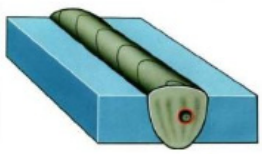
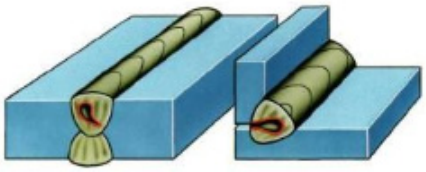
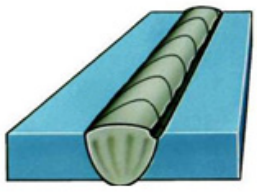
Согласно Приказу[3], в настоящее время применяются нормативные документы по допустимой дефектности сварных соединений вертикальных резервуаров. Однако эти документы касаются стальных резервуаров и не учитывают реальное напряженно-деформированное состояние конструкции в районе шва. При таком подходе некоторые дефекты признаются недопустимыми независимо от их расположения и размеров. Кроме того, с развитием методов и видов неразрушающего контроля (НК) выявляемость дефектов постоянно возрастает и признавать недопустимыми дефекты любого размера и расположения в конструкции становится экономически неэффективно. Проведенный обзор нормативной и технической литературы не выявил однозначной методики определения допустимости дефектов (нормирования дефектности) в сварных швах и ЗТВ резервуаров из алюминиевых сплавов в зависимости от геометрии дефекта, номинальных напряжений и механических свойств материала в зоне его обнаружения. В связи с этим была сформулирована цель настоящего исследования — создание методики нормирования наиболее опасных по вероятности разрушения конструкции дефектов сварных швов и ЗТВ с учетом напряженно-деформированного состояния и свойств материала в зоне расположения дефекта. Объектом исследования является вертикальный резервуар из алюминиевого сплава, выполненный методом рулонирования, часть сварных швов которого выполнена СТП, а монтажные швы на площадке АДС. Задачами исследования является нормирование наиболее опасных по вероятности разрушения дефектов швов, выполненных АДС при строительстве вертикального резервуара методом рулонирования в условиях Крайнего Севра.

Таблица 1. **Дефекты сварного монтажного шва вертикального резервуара**
Table 1. **Defects in the welded mounting seam of the vertical reservoir**

Наименование дефекта / Name of the defect	**Схематическое изображение дефекта / Schematic representation of the defect**	**Обозначение согласно ГОСТ Р ИСО 6520-1-2012 / Designation according to GOST R ISO 6520-1-2012**
Продольная трещина / Longitudinal crack		В металле шва / In the weld metal ИСО 6520-1011 / ISO ИСО 6520-1011 На границе сплавления / At the boundary of the fusion ИСО 6520-1012 / ISO 6520-1012 В ЗТВ / In the heat-affected zone ИСО 6520-1013 / ISO 6520-1013 В основном металле / In the base metal ИСО 6520-1014 / ISO 6520-1014
Разрозненные трещины / Group of disconnected cracks		В металле шва / In the weld metal ИСО 6520-1051 / ISO 6520-1051 В ЗТВ / In the heat-affected zone ИСО 6520-1053 / ISO 6520-1053 В основном металле / In the base metal ИСО 6520-1054 / ISO 6520-1054
Вытянутая полость / Elongated cavity		ИСО 6520-2015 / ISO 6520-2015

[3] Приказ Ростехнадзора от 23.08.2023 № 305. Об утверждении Руководства по безопасности «Рекомендации по техническому диагностированию сварных вертикальных цилиндрических резервуаров для нефти и нефтепродуктов». URL: https://www.gosnadzor.ru/industrial/rukovodstva-po-bezopasnosti/Пр-305 %20от %2023.08.2023.pdf (дата обращения: 27.12.2025).

Окончание табл. 1 / Ending of the Table 1

Наименование дефекта / Name of the defect	**Схематическое изображение дефекта / Schematic representation of the defect**	**Обозначение согласно ГОСТ Р ИСО 6520-1-2012 / Designation according to GOST R ISO 6520-1-2012**
Линейная пористость / Linear porosity		ИСО 6520-2014 / ISO 6520-2014
Скопление пор / Clustered (localized) porosity		ИСО 6520-2013 / ISO 6520-2013
Равномерная пористость / Uniformly distributed porosity		ИСО 6520-2012 / ISO 6520-2012
Газовая пора / Gas pocket		ИСО 6520-2011 / ISO 6520-2011
Свищ / Worm hole		ИСО 6520-2016 / ISO 6520 -2016
Подрез / Undercut		ИСО 6520-5011 / ISO 6520-5011

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым / S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

2. Методы, оборудование и материалы

В [1] с помощью интегрального оптимизационного критерия определено, что лучшими свойствами среди рассмотренных материалов обладает сплав 1915Т. Поэтому в данной работе все иллюстративные расчеты ведутся для этого сплава.

При нормировании допустимых дефектов сварных швов типа ИСО 6520-1011, ИСО 6520-1012, ИСО 6520-1013, ИСО 6520-1014, ИСО 6520-1051, ИСО 6520-1053, ИСО 6520-1054, ИСО 6520-5011 приняты модели линейной механики разрушения (ЛМР) с поправкой Ирвина [12].

Задача по определению допустимых дефектов, моделируемых в ЛМР как трещины, для резервуаров разбита на две части.

• Определение допустимых дефектов испытательной статической нагрузкой (принято равной 1,25 от суммарной эксплуатационной нагрузки). Принято, что допустимыми параметрами обладает дефект, у которого при приложении испытательной нагрузки значение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) вблизи вершины дефекта меньше или равно K_{Ic} (вязкости разрушения в зоне формирования дефекта):

$$K_I \le K_{Ic}.$$

• Определение допустимых дефектов при эксплуатации резервуара (нагрузка циклическая). Принято, что допустимыми параметрами обладает дефект, у которого при приложении нагрузки значение коэффициента интенсивности напряжений вблизи вершины дефекта меньше/равно K_{th} (порогового значения в зоне формирования дефекта) — условие «не страгивания»:

$$K_I \le K_{th}.$$

При нормировании дефектов принято минимальное из двух полученных значений (при статической испытательной перегрузке) и при циклическом нагружении эксплуатационной нагрузкой с учетом поправки Ирвина на пластичность [12] $l^* = l + 0,5r_p$, где r_p — размер пластической зоны вблизи вершины дефекта, зависящий от того, какое состояние реализуется — плоское деформированное (ПДС) $r_p = \dfrac{K_I^2}{6\pi\sigma_{\text{т}}^2}$ или плоское напряженное (ПНС) $r_p = \dfrac{K_I^2}{2\pi\sigma_{\text{т}}^2}$, $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести материала в месте формирования дефекта, МПа. Принято, что вблизи вершины трещины реализуется ПДС при выполнении условия: $tol \ge 2,5\left(\dfrac{K_{Ic}}{\sigma_{0,2}}\right)^2$ [13].

Для полуэллиптических трещин в вертикальном сварном шве и его ЗТВ принимается модель, предложенная в работе [14]. Схема поверхностного полуэллиптического дефекта показана на рис. 1. Такой подход для решения практической задачи реализован при определении допустимых параметров трещин в основном металле крупного габаритного металлургического оборудования после периода длительной эксплуатации [15]. Для нормирования дефектов сварных швов и ЗТВ при применении АДС алюминиевого сплава применяется впервые. В принятой схематизации ось Z – образующая цилиндрической части резервуара. Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) согласно [14]:

$$K_{\text{I}} = \frac{2 - 0,82\dfrac{l^*}{c}}{\left[1 - \left(0,89 - 0,57\sqrt{\dfrac{l^*}{c}}\right)^3 \left(\dfrac{l^*}{t}\right)^{1,5}\right]^{3,25}} \Phi\sigma^*\sqrt{l^*}, \tag{1}$$

где l^* — эффективная длина трещины (с учетом поправки Ирвина на пластичность).

Для точки A справедливо: $\Phi = \left[1,1 + 0,35\left(\dfrac{l^*}{t}\right)^2\right]\sqrt{\dfrac{l^*}{c}}$; $\sigma^* = 0,64\sigma + 0,36\sigma_{\text{B}}$.

Для точки D:

$$\Phi = 1;\quad \sigma^* = 0,111\left(\sigma_A + 5\sigma_{\text{B}} + 3\sigma\right) - 0,4\frac{l}{c}\left(0,17\sigma_A + 0,21\sigma_{\text{B}} - 0,38\sigma_D\right) + 0,28\frac{l}{t}\left(1 - \sqrt{\frac{l}{c}}\right)\left(\sigma_A - \sigma_D\right).$$

В выражении (1) приняты следующие обозначения: *l, c, t* — геометрические параметры дефекта (рис. 1), толщина листа, м; σ_A, σ_B, σ_D — растягивающие напряжения (по оси *Y* — суммарные кольцевые напряжения от всех типов нагрузок на резервуар, полученные расчетом МКЭ), МПа; σ^* — кольцевые растягивающие напряжения в крайних точках (*A* и *D*), МПа, Ф — коэффициент, зависящий от геометрических параметров трещины, безразмерный. Выражение (1) справедливо для $l \le c$ и $l \le 0,7t$.

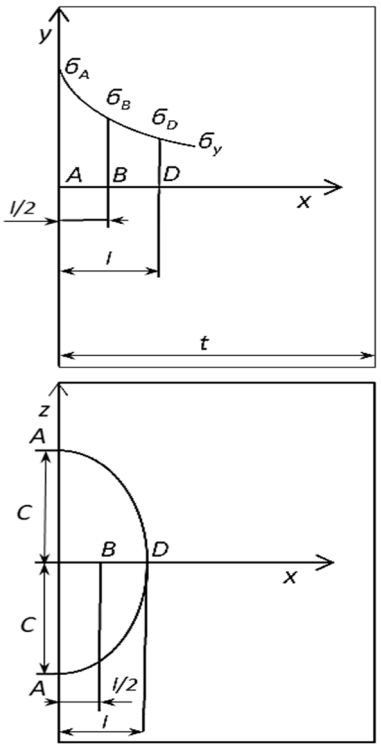


Рис. 1. Схема полуэллиптической трещины
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 1. The scheme of a semi-elliptical crack
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

При расчетах принято, что трещина растет в направлении максимального значения коэффициента интенсивности напряжений при заданной схеме нагружения и параметров трещины. В первую очередь, необходимо сравнить значения коэффициентов интенсивности напряжений по двум гипотетически возможным направлениям роста, так как реализуется вариант минимальных энергетических затрат. По статистическим данным принято, что наиболее часто при первичном обследовании полуэллиптические трещины имеют соотношение $l = c$ (т.е. большая полуось в два раза больше глубины дефекта).

Для расчета КИН при моделировании поверхностных полуэллиптических трещин в зоне около круглого отверстия (зона патрубка) стандартным решением считаются подходы Ньюмана — Раджу [16]. Формулы, полученные в [16], учитывают практически все параметры, влияющие на рост поверхностной несквозной трещины у отверстия, однако они громоздки, содержат многочлены высоких степеней, сложны в практических расчетах. Поэтому в данной работе используется упрощенный подход Ша (Shah) [17], который рассматривает трещины как часть эллипса в неограниченном теле, но с поправкой на концентрацию напряжений от отверстия. Согласно данному подходу, критическая глубина трещины по критерию «не страгивания» определяется следующим образом (с учетом пластичности):

$$l_{\text{кр}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{th}}{Y\sigma}\right)^2, \tag{2}$$

где *Y* — обобщенный коэффициент формы, согласно [16] принят 1,2; σ — локальное номинальное напряжение в зоне концентрации напряжений, полученное методом конечных элементов (МКЭ).

Дефекты в сварном шве типа ИСО 6520-2015, ИСО 6520-2016 (табл. 1) в контексте данной работы рассматриваются как дефекты, которые имитируют подповерхностную несплошность. Для перечисленных выше дефектов в данной работе принята схематизация в виде эллиптической трещины. Для дефектов этого типа принята модель, предложенная в работе [18]. Схема подповерхностного эллиптического дефекта показана на рис. 2. Модель применена для расчета эллиптических дефектов вертикального шва резервуара.

Коэффициент интенсивности напряжений согласно [18]:

$$K_I = \frac{1,79 - 0,66\dfrac{l^*}{c}}{\left[1 - F \cdot \left(\dfrac{l}{b}\right)^{1,8}\right]^{0,54}} \sigma^* \sqrt{l^*}. \tag{3}$$

В точке A: $F = 1 - 0,4\frac{l^*}{c} - \left(0,5 - \frac{b}{t}\right)^2$; $\sigma^* = \frac{1}{2}\left(\sigma_A + \sigma_B\right) + \frac{1}{30}\frac{l^*}{c}\left(4\sigma_A - 3\sigma_B - \sigma_D\right)$.

В точке D: $F = 1 - 0,4\frac{l^*}{c} - 0,8\left(0,5 - \frac{b}{t}\right)^{0,4}$; $\sigma^* = \frac{1}{2}\left(\sigma_D + \sigma_B\right) + \frac{1}{30}\frac{l}{c}\left(4\sigma_D - 3\sigma_B - \sigma_A\right)$.

В выражении (3) приняты следующие обозначения: l, c, b — геометрические параметры дефекта, м; σ_A, σ, σ_D — напряжения (по оси Y), МПа; σ^* — напряжения в крайних точках (A и D), МПа, F — коэффициент, зависящий от геометрических параметров трещины, безразмерный. Выражение (3) справедливо при выполнении условия $l \le c, l \le 0,9b$ и $b \le 0,5t$.

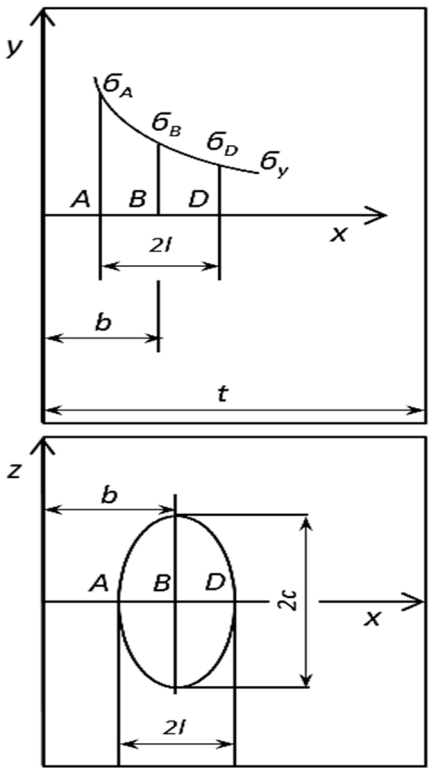


Рис. 2. Схема эллиптической трещины
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 2. The scheme of elliptical crack
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

Моделирование поверхностных несквозных эллиптических трещин в сварном шве и ЗТВ вокруг патрубка сливного отверстия резервуара проводилось согласно [17]. Для допустимого размера малой полуоси эллипса принято

$$l = \frac{Q}{\pi}\left(\frac{K_{th}}{Y_1\sigma}\right)^2, \tag{4}$$

где Q — коэффициент, учитывающий эллиптичность и пластическую зону, принимается 1,5, Y_1 — поправка Ирвина (здесь 1,12).

Наиболее сложным для математического моделирования является пористость сварных швов и ЗТВ, которая по международному стандарту ISO 6520-2012 классифицируется по размерам, форме и характеру распределения в металле шва (см. табл. 1). Пористость разделяется на общую (истинную) и закрытую. Истинная (общая) пористость — отношение объема открытых и закрытых пор к общему объему материала, выраженное в процентах. Согласно [19], допустимый уровень общей пористости рекомендуется определять по соотношению

$$\Pi = \frac{\left(A \cdot K_{\text{кач}} \cdot K_{\text{толщ}}\right)}{100}, \tag{5}$$

где П — истинная пористость, %; A — базовое значение пористости для принятого класса качества, %; $K_{\text{кач}}$ — коэффициент качества (0,5–1,0); $K_{\text{толщ}}$ — коэффициент толщины металла (0,8–1,2).

Однако формула (5), как и большинство зависимостей, входящих в нормативные и рекомендательные документы, касается сварки изделий из черных металлов и титана. Кроме того, ни в одном из них допустимые параметры дефекта не связаны с нагруженностью и механическими свойствами материала. Для устранения этого недостатка при определении допустимости дефектов типа ИСО 6520-2012, ИСО 6520-2013 и ИСО 6520-2014 в работе предложены подходы, разработанные для пористых материалов. Были рассмотрены зависимости, связывающие прочностные характеристики компактного, пористого материалов и параметров пористости, предложенные Б.У. Пинесом, Е. Рышковичем и В. Даквортом, Н.Р. Басфортом и С.Б. Твиссом, М. Эдье, В.Т. Трощенко, К.К. Шиллером и А.И. Красовским, В. Галлиной и Г. Манноне, Е. Дударовой и Р. Хейнесом. Но все эти зависимости учитывают ряд сложно определяемых и трактуемых в практических инженерных расчетах коэффи-

циентов. Поэтому в данной работе была принята классическая формула М.Ю. Бальшина [20], связывающая параметр пористости П (в долях от единицы), прочность (временное сопротивление разрыву) компактного σ_0 и пористого материала σ_b:

$$\sigma_b = \sigma_0 \left(1 - \Pi\right)^3. \tag{6}$$

Пористость П оценивается как отношение объема участка шва с порами к объему этого же участка в бездефектном состоянии. Принято, что если напряжения на участке сварного шва с дефектами ИСО 6520-2012, ИСО 6520-2013 и ИСО 6520-2014 достигают предела текучести при статических испытаниях под давлением, то данная пористость является недопустимой. В противном случае возможно частичное «схлопывание» пор и образование дефекта ИСО 6520-2015 (вытянутая полость). Если напряжения при статических испытаниях не достигли предела текучести материала, то при циклической нагрузке необходимо сравнить предел усталости материала (шва и двух участков ЗТВ) при коэффициенте асимметрии 0 максимальными напряжениями цикла нагружения, полученными расчетом численными методами (МКЭ). Если напряжения выше, чем предел выносливости, то пористость с такими параметрами на данном участке недопустима (достигла браковочного параметра). Этот участок шва следует переварить.

Одиночная пора (дефект ИСО 6520-2011 по классификации ИСО 6520-2012) представляет собой газовую раковину в сварном шве и ЗТВ. При моделировании такого дефекта объемная полость описывается в виде сфероида и виртуально располагается на равных расстояниях от края листа (один из диаметров совпадает с центральной линией). Если полость «вскрывается» на поверхность, она приобретает вид полусферической выточки, где концентрация на 10–20 % выше. Данный случай в работе не рассматривался. Во все расчеты заложены ограничения, не допускающие изменения вида дефекта. Теоретический коэффициент концентрации для сфероида согласно [21; 22] определяется следующим образом: $\alpha_\sigma = \dfrac{27 - 15\mu}{2\left(7 - 5\mu\right)}$, где μ = 0,33 — коэффициент Пуассона материала (для сплава 1915Т). Это выражение с поправкой на конечные размеры принимает вид [21]

$$\alpha_\sigma = \frac{27 - 15\mu}{2\left(7 - 5\mu\right)} \frac{2 + \left(1 - \dfrac{d}{t}\right)^3}{3\left(1 - \dfrac{d}{t}\right)}, \tag{7}$$

где d — диаметр виртуального сфероида, мм; t — габаритный размер сечения, в котором располагается дефект, мм (в данной схематизации — толщина свариваемого листа).

В расчетах (в силу отсутствия точных данных о коэффициентах чувствительности к подрезам материала шва и ЗТВ) принято допущение, что материал абсолютно чувствителен к надрезам (т.е. эффективный коэффициент концентрации равен теоретическому). Принятое допущение идет в запас прочности. Статические напряжения определены как произведение теоретического коэффициента концентрации на номинальные напряжения в зоне обнаруженного дефекта. Пора является недопустимой, если статические напряжения на участке сварного шва с дефектом ИСО 6520-2011 достигают предела текучести при статических испытаниях. Если напряжения при статических испытаниях не достигли предела текучести материала, то при циклической нагрузке сравниваются максимальные напряжения цикла в зоне концентрации с пределом усталости при коэффициенте асимметрии 0. Если они больше, чем предел усталости, то пора с такими параметрами на данном участке недопустима.

Для определения параметров трещин, удовлетворяющих условиям (отсутствие мгновенного разрушения при приложении статической испытательной нагрузки, «не страгивание» дефектов при эксплуатационной нагрузке), использовался метод обобщенного приведенного градиента (ОПГ) —

численный метод нелинейной оптимизации. Для построения регрессионных моделей применен метод Брандона [23].

Вышеприведенный подход проиллюстрирован нормированием наиболее опасных дефектов в резервуаре, выполненном из сплава 1915Т по типовому проекту (рис. 3).

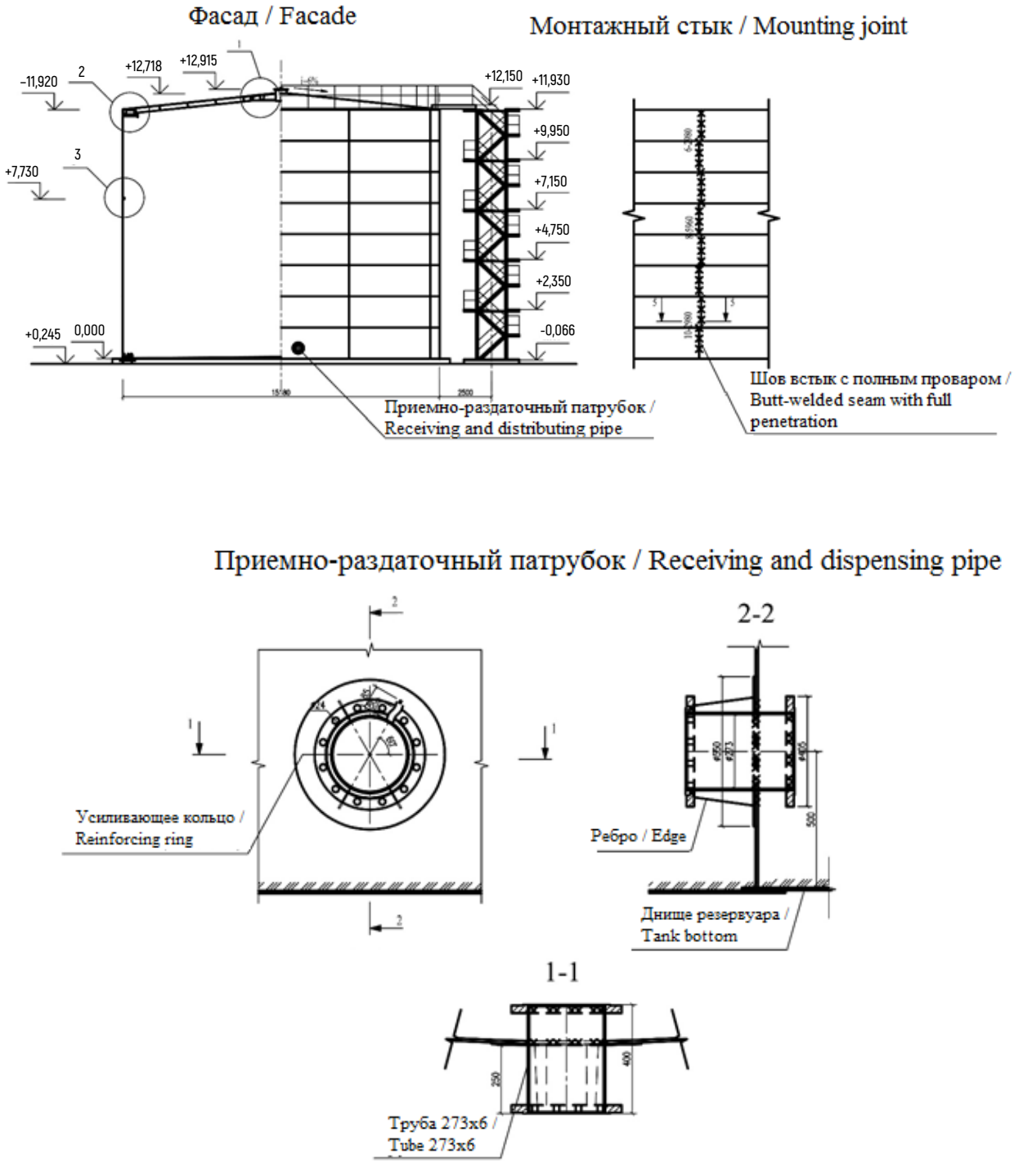


Рис. 3. Вертикальный резервуар для хранения нефти и нефтепродуктов

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 3. Vertical reservoir for oil and petroleum products storage

S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

Для расчета напряженно-деформированного состояния резервуара использовался пакет прикладных программ ANSYS. Для моделирования основной нагрузки принималось, что резервуар наполнен жидкостью с плотностью 0,9 г/см^3. Диаметр резервуара составляет 15,18 м, а высота — 11,92 м. Анализ результатов расчета показал, что напряженно-деформированное состояние (НДС) стенки формируется в основном за счет действия давления рабочей жидкости (рис. 4). Базовая модель содержит 65 115 элементов и 58 857 узлов. Модель состоит из пластин и стержней (покрытие). Минимальный размер элемента 0,43 мм в зонах сгущения. Это опорные участки покрытия на опорное кольцо резервуара. Расчет проводился итерационно, сходимость была достигнута на 5-й итерации.

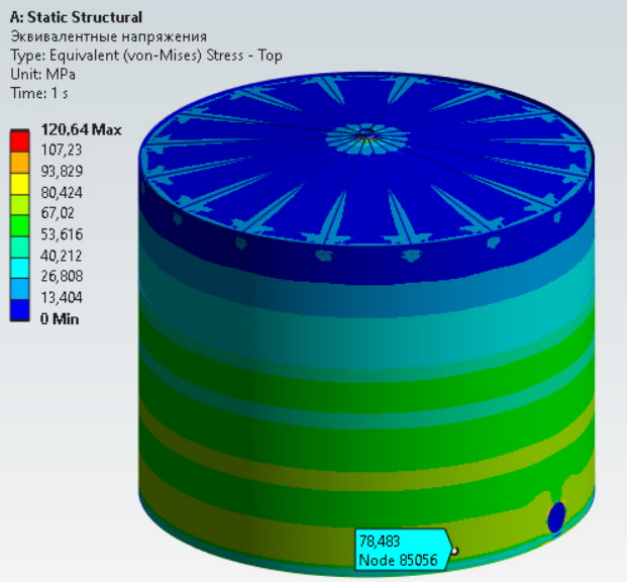


Рис. 4. Эквивалентные напряжения в стенке резервуара, МПа
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 4. Equivalent stresses in the tank wall, MPa
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

Микроструктура сварного образца была исследована после полирования и травления реактивом Келлера с помощью инвертированного исследовательского микроскопа Olympus GX51 в отраженном свете. Для исследования твердости основного материала, материала шва и ЗТВ по Виккерсу (*HV*5) использовался поверенный универсальный твердомер КВ3000.

3. Результаты и обсуждение

3.1. Определение характеристик трещиностойкости материала сварного шва и ЗТВ

В [24] указывается на существенную стохастическую неоднородность свойств ЗТВ при сварке ранее рулонированных листовых материалов для строительства резервуаров. Это подтверждается и исследованиями микроструктуры сварного соединения АДС, проведенными в рамках данной работы. Микроструктура сварного шва и ЗТВ показана на рис. 5. Видно, что структура шва (рис. 5, *а*) состоит из крупных дендритов α-твердого раствора (светлые зоны), мелкодисперсной эвтектики и интерметаллидных фаз (темные зоны). Это соответствует литой структуре материала шва. В центре шва наблюдались более мелкие дендриты, размер которых увеличивался при приближении к ЗТВ, что объясняется градиентом скорости охлаждения после прохождения металлургических процессов сварки. В структуре ЗТВ (рис. 5, *б*) и основного металла (рис. 5, *в*) четко определяется направление проката листа образца и стохастически расположенные интерметаллидные включения.

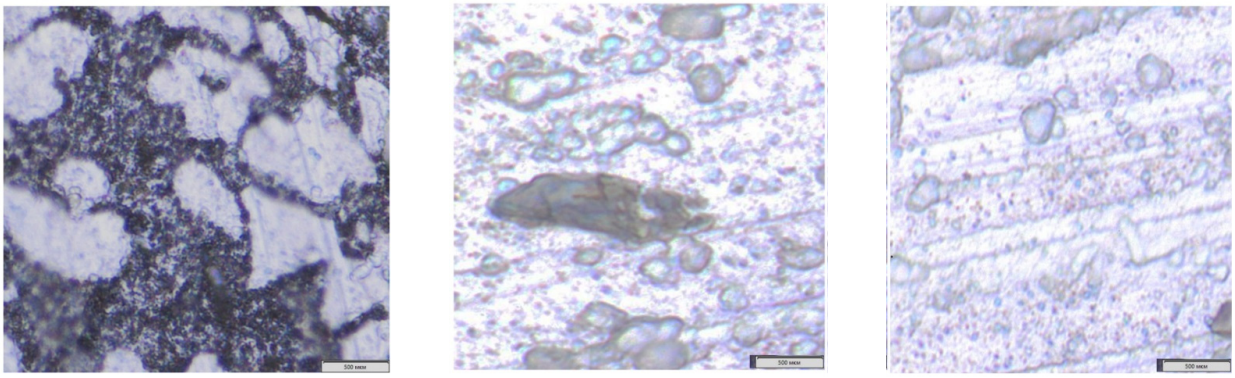
Для определения соотношений механических свойств ЗТВ, сварного шва и основного металла была измерена твердость в поперечном сечении методом Виккерса на специально изготовленных сварных образцах. При исследовании твердости была рассмотрена половина шва с ЗТВ в силу симметрии задачи (графическая интерпретация экспериментальных данных приведена на рис. 6). Экспериментальная зависимость (рис. 6) аппроксимируется полиномиальным выражением (8) с коэффициентом детерминации 0,94. За ноль по горизонтальной оси принят центр шва:

$$HV5(\%) = -28,052x^6 - 291,14x^5 - 1191,4x^4 - 2424,10x^3 - 2528x^2 - 1250x - 143,95, \quad (8)$$

где $HV5(\%)$ — твердость материала в ЗТВ в процентах от твердости основного материала вне зоны термического влияния ($HV5(\%) = \frac{HV5}{90}100$), $HV5$ — измеренная величина твердости по Виккерсу,

МПа в ЗТВ, 90 — среднее значение твердости основного материала; x — отношение расстояния от центра сварного шва к ширине шва (ширина шва принята 12 мм как среднее значение по образцу).

В работе принято следующее допущение — изменение механических свойств, в том числе предела текучести, подчиняется тому же закону, что и дюраметрия (согласно, например, [25]). В соответствии с этим выделены четыре реперные зоны, в которых определялись допустимые параметры трещин (центр шва — 0, далее 1 и 2 — отношений расстояний от центра шва к его ширине и зона основного металла) для каждого уровня кольцевых напряжений по высоте образующей цилиндрической части резервуара при приложении испытательной (статической) и эксплуатационной (циклической) нагрузки. На рис. 6 показано, что при достижении расстояния от центра шва, равного трем его толщинам, твердость (как принятый индикатор механических свойств) становится равной твердости основного материала, а согласно принятому допущению и предел текучести становится равным пределу текучести, ранее определенному экспериментально [1].



а *б* *в*

Рис. 5. Микроструктура сварного шва и ЗТВ:
а — структура сварного шва; *б* — ЗТВ; *в* — основного металла
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 5. Microstructure of the weld:
а — structure of the weld; *б* — the zone of thermal influence; *в* — the base metal
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.



Рис. 6. Зависимость изменения твердости *HV*5 в шве и ЗТВ (в процентах от твердости основного материала) от отношения расстояния точки измерения твердости от ширины шва АДС (показана половина поперечного сечения)
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 6. The dependence of the change in hardness *HV*5 in the seam and in the heat affected zone (as a percentage of the hardness of the base material) on the ratio of the distance of the hardness measurement point to the width of the seam made by argon arc welding (half of the section is shown)
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

Для реализации предложенной методики необходимо пороговое значение КИН. В.П. Когаевым определена надежная функциональная зависимость порогового значения КИН от предела текучести материала для коэффициента асимметрии 0: $K_{th} = 12,7 - 6 \cdot 10^{-3} \sigma_{0,2}$. Однако эта зависимость адекватно применима только для сталей. Поэтому в рамках данного исследования было проведено определение функциональных зависимостей порогового значения КИН от предела текучести алюминиевых сплавов. При этом использованы экспериментальные данные авторов и данные литературного обзора, статистическая обработка которых позволила получить зависимости вида $K_{th} = f\left(\sigma_{0,2}\right)$ при коэффициенте асимметрии 0 для разных типов алюминиевых сплавов (9)–(11). Зависимости приведены в табл. 2. Для сплавов группы Al-Cu-Mg функциональная зависимость строилась по данным восьми источников (табл. 2), т.е. усреднялись данные экспериментов для каждого из восьми значений предела текучести (не менее трех замеров). Для сплавов группы Al-Mg — по шесть, включая собственные экспериментальные исследования, для сплавов группы Al-Zn-Mg — по пять, включая собственные экспериментальные данные.

Таблица 2. **Функциональные зависимости порогового КИН от предела текучести**
Table 2. **Functional dependences of the threshold stress intensity factor for the yield strength**

№	Группа сплавов / Group of alloys	$K_{th} = f\left(\sigma_{0,2}\right)$	Коэффициент корреляции с экспериментальными данными / Correlation coefficient with experimental data	Литературные источники, использованные при формулировке функциональных зависимостей / Literary sources used in the formulation of functional dependencies
1	Al-Cu-Mg	$K_{th} = 0,0128\sigma_{0,2} + 0,6279$ (9)	$R^2 = 0,89$	[26–33]
2	Al-Mg	$K_{th} = 0,0339\sigma_{0,2} - 1,7233$ (10)	$R^2 = 0,78$	[34–38]
3	Al-Zn-Mg	$K_{th} = 0,0078\sigma_{0,2} + 1,0767$ (11)	$R^2 = 0,86$	[38–43]

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым / S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

Анализ полученных функциональных зависимостей показал, что при увеличении предела текучести алюминиевых сплавов пороговое значение КИН также возрастает в отличие от сталей, у которых повышение предела текучести приводит к снижению K_{th}.



Рис. 7. Трещина в сварном шве узла конструкции пешеходного моста в результате циклических испытаний
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 7. A crack in a welded joint of a pedestrian bridge structural assembly resulting from cyclic testing
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

Для зоны шва, выполненного АДС, нельзя принимать функциональные зависимости, построенные для основного металла. Шов — это расплавленный в процессе сварки и кристаллизовавшийся при охлаждении металл (см. рис. 5), в то время как основной металл получен горячей прокаткой с последующим старением. Химический состав шва, согласно [11], определяется долями участия в его формировании основного и присадочного материалов и потерей элементов при испарении и окислении в зоне горения дуги. Следовательно, химический состав и механические свойства шва не соответствуют свойствам основного металла. Для зоны сварного шва приняты данные работы [44] $K_{th} = 2,0$ МПа$\sqrt{\text{м}}$. Резкая граница между значениями порогового КИН сварного шва и ЗТВ опосредованно подтверждается усталостными испытаниями моста пролетом 10 м из сплава 1915Т, в результате которых трещины образовались именно в шве (рис. 7).

Таблица 3. **Критериальные значения КИН (сплав 1915Т)**
Table 3. **Criteria values of the threshold stress intensity factor (alloy 1915T)**

№ / No.	Отношение расстояния от центра сварного шва к его ширине / The ratio of the distance from the center of the weld to its width	*HV*5, %	Предел текучести, МПа / Yield strength, MPa	Пороговое значение КИН, K_{th}, МПа·$\sqrt{м}$ / Threshold stress intensity factor, K_{th}, MPa·$\sqrt{m}$	Вязкость разрушения, K_{Ic} (K_Q) МПа·$\sqrt{м}$ / Fracture toughness, K_{Ic} (K_Q) MPa·$\sqrt{m}$
1	0 (Центр шва / Center of the weld)	–	165	2,0 согласно [44] / 2.0 according to [44]	12,0 согласно [44] / 12.0 according to [44]
2	1 (ЗТВ / Zone of thermal influence)	70	178	2,5 согласно (8) / 2.5 according to (8)	23,0 согласно (8) / 23.0 according to (8)
3	2 (ЗТВ / Zone of thermal influence)	92	235	2,9 согласно (8) / 2.9 according to (8)	31,0 согласно (8) / 31.0 according to (8)
4	3 (Основной металл / The base metal)	100	255	3,2 согласно (11) / 3.2 according to (11)	34,0

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым / S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

3.2. Моделирование дефектности сварного монтажного шва с применением ЛМР

При расчетах принято, что трещина растет в направлении максимального значения коэффициента интенсивности напряжений при заданной схеме нагружения и параметров трещины (первый шаг при расчете сравнение коэффициентов интенсивности напряжений по двум гипотетически возможным направлениям роста), т.е. реализуется вариант минимальных энергетических затрат. Принято, что наиболее часто при первичном обследовании полуэллиптические трещины имеют соотношение $l = c$. Расчет методом ОПГ показал, что наименьший допустимый размер дефекта получается при эксплуатационной, а не испытательной нагрузке для всех рассмотренных типов дефектов. Ограничения метода ОПГ соответствуют вышеприведенным ограничениям модели. Метод ОПГ имеет один существенный недостаток — он чувствителен к нелинейности ограничений, но все наложенные ограничения моделей линейны. Именно поэтому этот метод был выбран в качестве расчетного. Результаты расчетов проиллюстрированы графически (рис. 8–10).

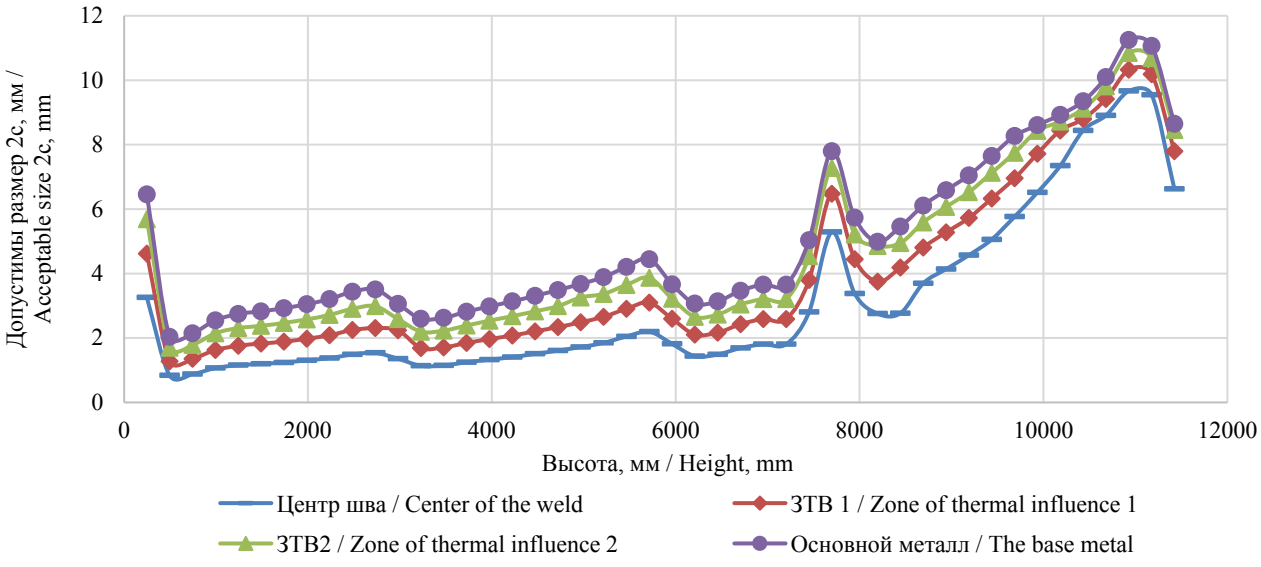


Рис. 8. Допустимый размер полуэллиптического дефекта в зависимости от его расположения в вертикальном монтажном шве
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 8. The permissible size of a semi-elliptical defect depends on its location in the vertical mounting seam
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

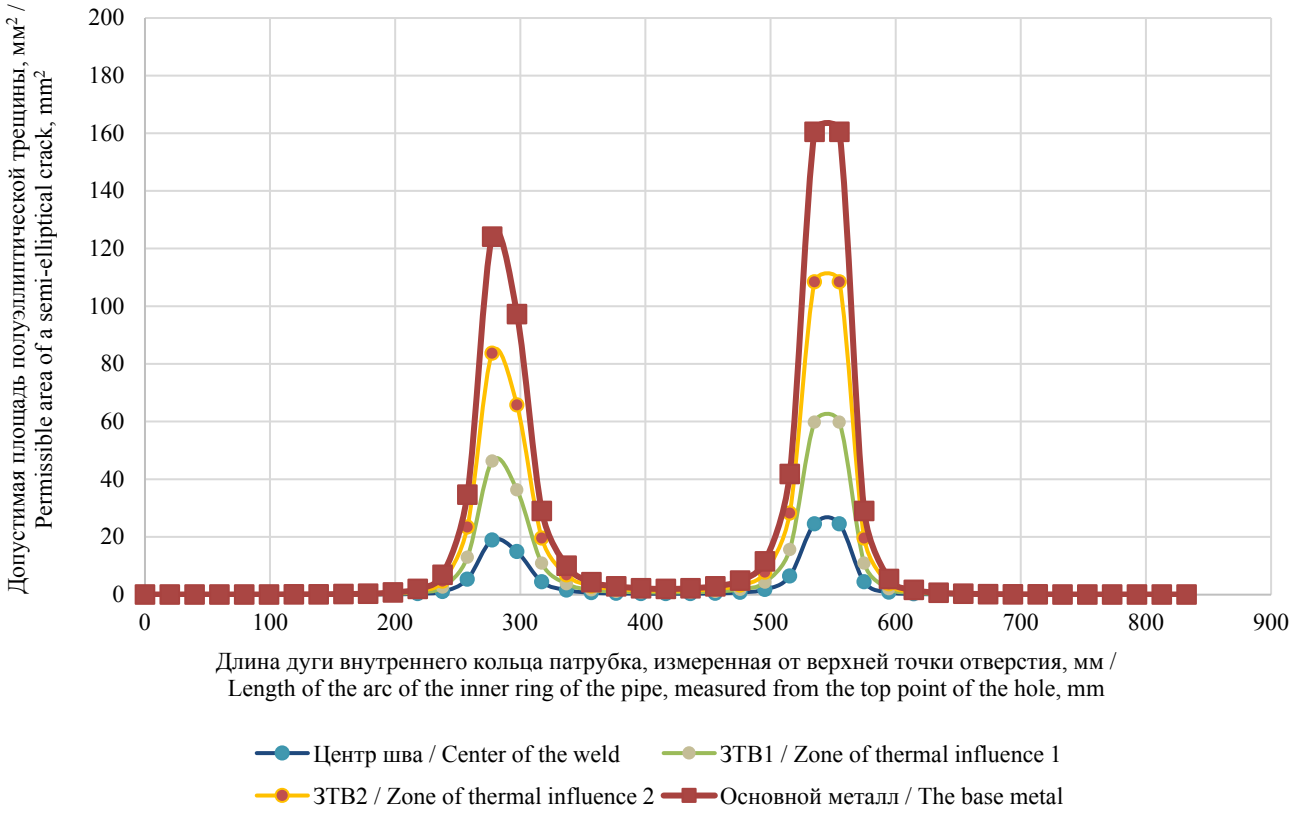


Рис. 9. Зависимость допустимой расчетной площади полуэллиптического дефекта во внутреннем кольце патрубка резервуара от длины дуги

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 9. Dependence of the permissible calculated area of a semi-elliptical defect in the inner ring of a tank pipe on the arc length

S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

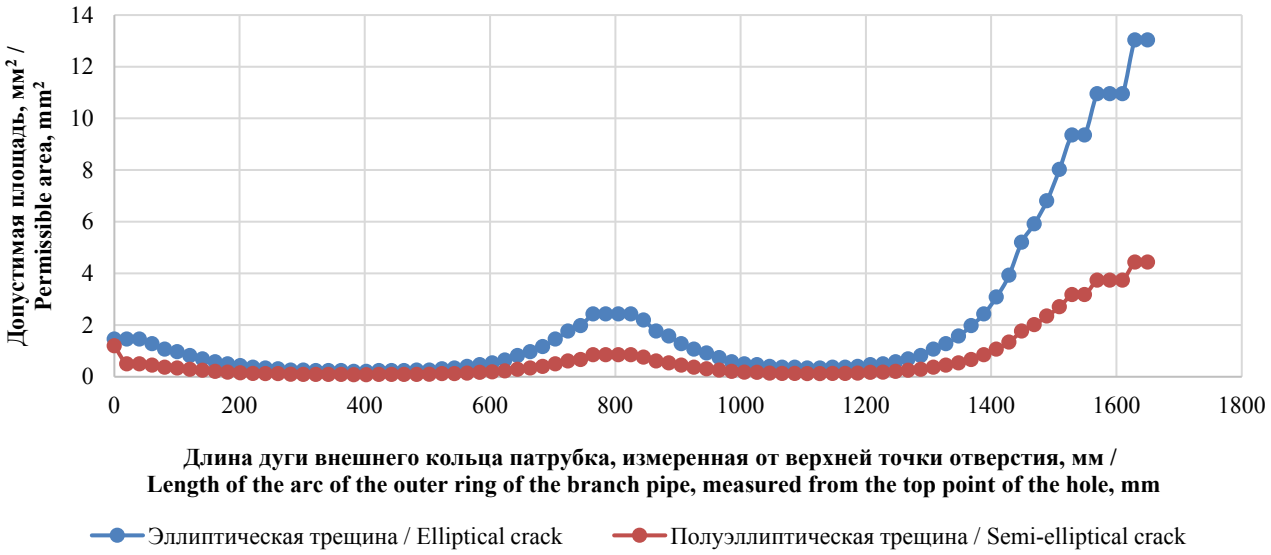


Рис. 10. Зависимость допустимой расчетных площадей трещин в шве внешнего кольца патрубка

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 10. Dependence of the permissible calculated area of cracks in the weld of the outer ring of the branch pipe

S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

3.3. Определение допустимых параметров пористости

Механические характеристики участков, где существует вероятность появления пористости в процессе АДС (это центр шва и два участка ЗТВ), приведены в табл. 4. Как и при расчетах допустимых несквозных трещин, принято, что изменение всех механических свойств подчиняется тому же закону, что и дюраметрия. Усталостные свойства центра шва приняты с учетом данных эксперимента, проведенного в рамках данного исследования.

Графическое представление зависимости допустимой общей пористости при эксплуатации резервуара в вертикальном сварном шве и ЗТВ показано на рис. 11 и 12.

Таблица 4. **Механические свойства сварного шва и ЗТВ**
Table 4. **Mechanical properties of the weld and zone of thermal influence**

Механические свойства, МПа / Mechanical properties, MPa	**Центр шва / Center of the weld**	**ЗТВ1 / Zone of thermal influence 1**	**ЗТВ2 / Zone of thermal influence 2**
Предел текучести / Yield strength, $\sigma_{0,2}$	165	178	235
Предел выносливости при коэффициенте асимметрии цикла, равном 0 / Endurance limit at a cycle asymmetry coefficient equal to 0, σ_0	72	80	101

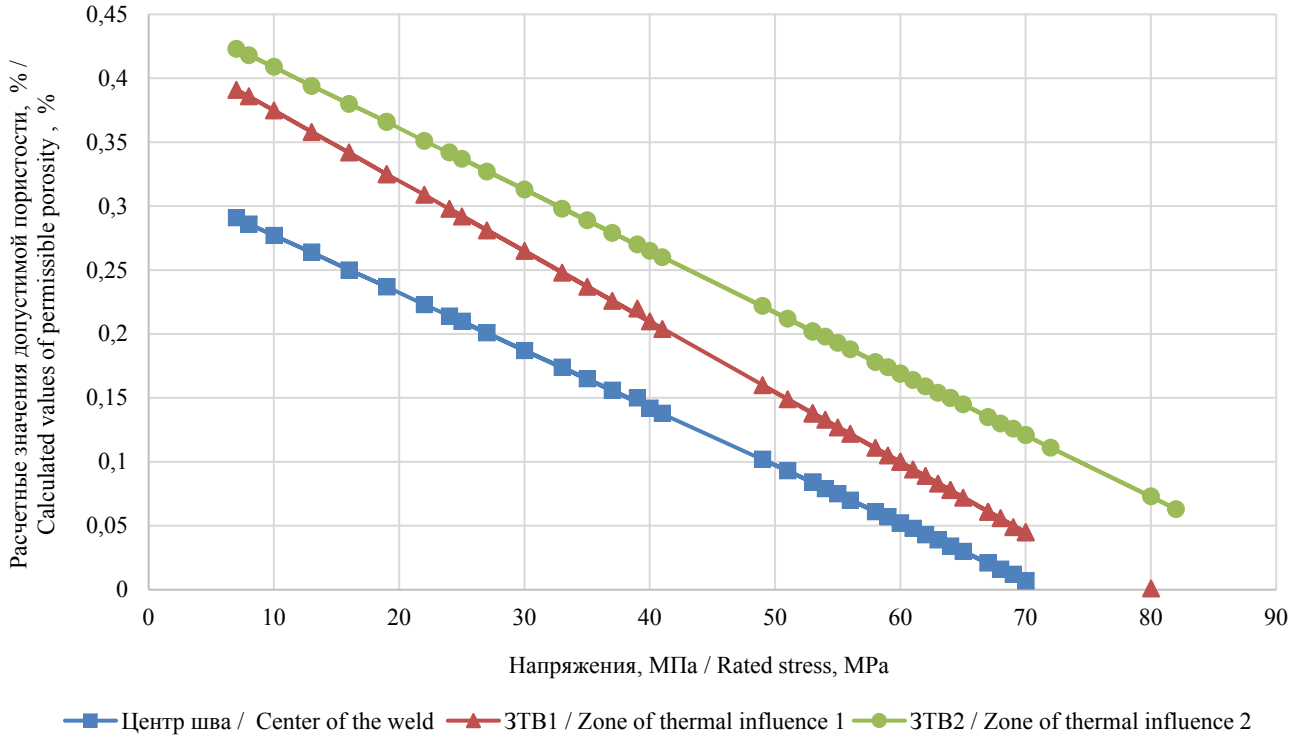


Рис. 11. Зависимость допустимых значений истинной пористости в долях единицы от напряжений и механических свойств материала (вертикальный шов)
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 11. The dependence of the permissible values of true porosity in fractions of one on the stresses and mechanical properties of the material (vertical weld)
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

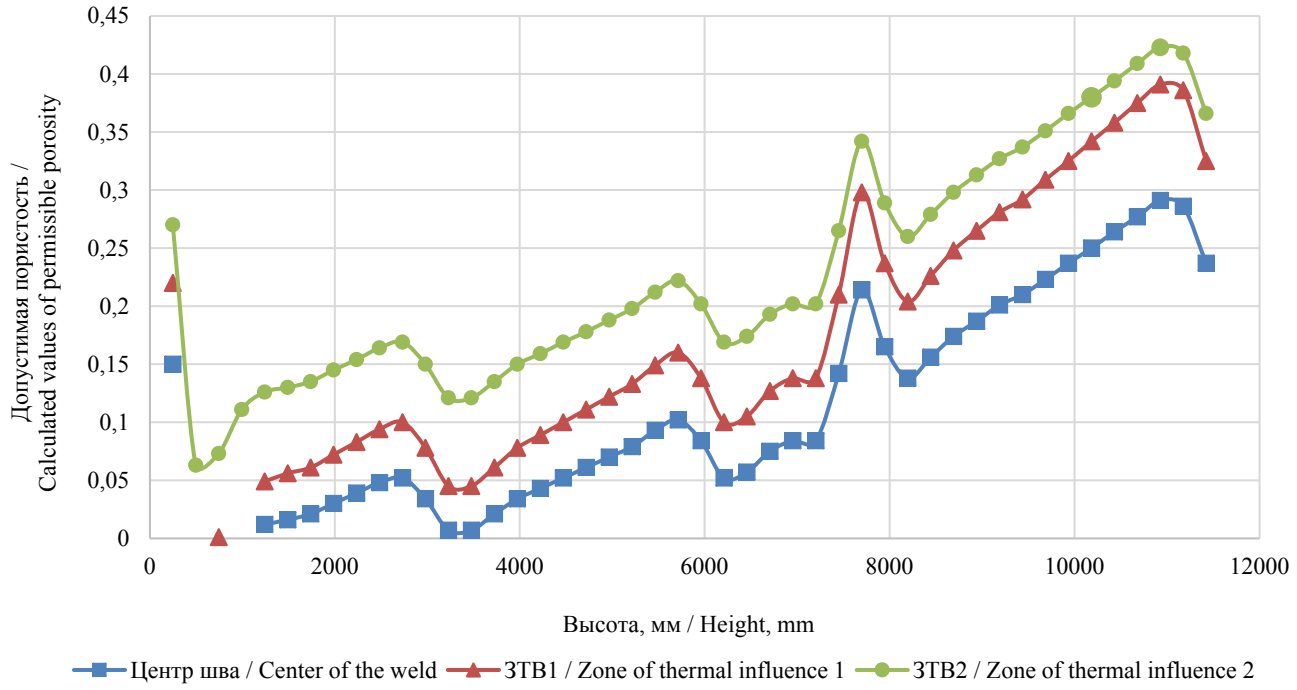


Рис. 12. Зависимость допустимых значений истинной пористости в долях единицы от высоты резервуара (вертикальный шов)
И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 12. The dependence of the permissible values of true porosity in fractions of a unit on the height of the tank (vertical weld)
S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

По результатам расчета методом Брандона [23] получена двухпараметрическая регрессионная зависимость допустимой пористости (в долях единицы) от предела выносливости материала и напряжений в месте формирования дефекта при коэффициенте асимметрии цикла 0:

$$\text{П} = 1,2\left(0,0001\sigma^2 - 0,0132\sigma + 0,5027\right)\left(-0,0018\sigma_0^2 + 0,33229\sigma_0 - 13,839\right).$$

Модель имеет ограничения по входящим в нее параметрам $72 \le \sigma_0 \le 101$, $7 \le \sigma \le 82$. Коэффициент несовпадения Тейла 0,17, что указывает на высокое совпадение модельных данных с данными расчетного эксперимента, по которому она была построена. Частный коэффициент эластичности модели по пределу выносливости материала 2, по напряжениям — 1,5. Это значит, что при увеличении предела выносливости на 1 % значение допустимой пористости увеличивается на 2 %, при увеличении напряжений на 1 % допустимый параметр пористости уменьшается на 1,5 % при прочих равных условиях. Следовательно, можно сделать вывод о превалирующем влиянии на допустимый параметр пористости механических свойств материала. Это влияние на 30 % выше, чем влияние уровня напряжений. Аналогично были получены значения допустимой пористости для зон сварного шва и ЗТВ для внешнего и внутреннего колец патрубка резервуара.

Графическое представление зависимости допустимых диаметров одиночных пор при эксплуатации резервуара пор приведены на рис. 13 (вертикальный шов).

Зоны, где график отсутствует, означают, что на данных высотах шва поры полностью недопустимы.



Рис. 13. Зависимость допустимых диаметров одиночных пор от высоты места их расположения в вертикальном шве при эксплуатации резервуара

И с т о ч н и к: выполнено В.А. Ермаковым.

Figure 13. The dependence of the permissible diameters of single pores on the height of their location in the vertical weld during tank operation

S o u r c e: made by V.A. Ermakov.

4. Заключение

1. Доказана принципиальная возможность применения линейной механики разрушения для области сварного шва, зоны термического влияния и основного металла листовых конструкций из алюминиевых сплавов, но с учетом поправки на пластичность материала, что позволило создать оригинальную методику к нормированию дефектов сварного шва, выполненного АДС, и зоны термического влияния при сварке алюминиевых сплавов.

2. Доказано, что при увеличении предела текучести алюминиевых сплавов пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений также возрастает в отличие от сталей, у которых повышение предела текучести приводит к снижению порогового значения коэффициента интенсивности напряжений. На базе проведенных экспериментов и данных литературного обзора были сформулированы функциональные зависимости порогового значения коэффициента интенсивности напряжений от предела текучести материала для трех групп алюминиевых сплавов с различным химическим и стехиометрическим составом компонентов $K_{th} = 0,0128\sigma_{0,2} + 0,6279$ (для сплавов системы Al-Cu-Mg), $K_{th} = 0,0339\sigma_{0,2} - 1,7233$ (для сплавов системы Al-Mg), $K_{th} = 0,0078 \cdot \sigma_{0,2} + 1,0767$ (для сплавов системы Al-Zn-Mg).

3. Проведено исследование микроструктуры сварного шва АДС и зоны термического влияния, которое выявило, что структура шва состоит из крупных дендритов α-твердого раствора, мелкодисперсной эвтектики и интерметаллидных фаз, что соответствует литой структуре материала шва. В центре шва расположены более мелкие дендриты, размер которых увеличивался при приближении к зоне термического влияния, что объясняется градиентом скорости охлаждения после прохождения металлургических процессов сварки. Различия в структуре материала влияют на его прочностные

свойства. Получена полиномиальная зависимость изменения механических свойств материала от отношения расстояния от центра шва к его ширине.

4. Для наиболее опасных дефектов сварных швов и зоны термического влияния предложены модели, базирующиеся на линейной механике разрушения, с обязательным учетом поправки на пластичность. Для дефектов монтажного шва типа продольная трещина, разрозненные трещины и подрез принята модель полуэллиптической поверхностной трещины. Для моделирования поверхностных полуэллиптических трещин в зоне около круглого отверстия (зона патрубка резервуара) предложено применять подход Ша (Shah), который рассматривает трещины как часть эллипса в неограниченном теле, но с поправкой на концентрацию напряжений от отверстия. Для дефектов типа вытянутая полость и свищ предложена модель подповерхностной эллиптической трещины. Для оценки пористости принята классическая формула М.Ю. Бальшина, связывающая параметр пористости и прочность компактного и пористого материала. Для дефектов типа газовой поры разработана модель, базирующаяся на классических подходах усталости металлов с учетом концентрации напряжений. Иллюстративные расчеты по предлагаемым моделям показали, что допустимые параметры дефектов больше зависят от механических свойств материала в зоне его возникновения, чем от напряжений в этой зоне.

5. Для наиболее сложно моделируемого типа дефекта — пористости получена двухпараметрическая регрессионная зависимость допустимой пористости от предела выносливости материала (σ_0) и напряжений в месте формирования дефекта (σ) при коэффициенте асимметрии цикла 0: $\Pi = 1,2\left(0,0001\sigma^2 - 0,0132\sigma + 0,5027\right)\left(-0,0018\sigma_0^2 + 0,33229\sigma_0 - 13,839\right)$. Модель имеет ограничения по входящим в нее параметрам $72 \le \sigma_0 \le 101$, $7 \le \sigma \le 82$. Частный коэффициент эластичности модели по пределу выносливости материала 2, по напряжениям –1,5. Следовательно, при увеличении предела выносливости на 1 % значение допустимой пористости увеличивается на 2 %, при увеличении напряжений на 1 % допустимый параметр пористости уменьшается на 1,5 %.

В дальнейшем предполагается проведение экспериментальных исследований дефектности сварных швов в алюминиевых конструкциях, полученных различными технологиями сварки, и расширение номенклатуры исследуемых сплавов.

Список литературы

1. *Корнев О.А., Шувалов А.Н., Корнилова А.В., Ермаков В.А.* Интегральный критерий выбора алюминиевого сплава для строительства резервуаров в условиях Арктики // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 6. С. 605–622. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-6-605-622 EDN: FWXOUY

2. *Альтман М.Б.* Применение алюминиевых сплавов : справочное руководство. Москва : Металлургия, 1973. 408 с.

3. *Reza Kashyzadeh K., Ghorbani S., Averyanov A.S.* Influence of environmental temperature on the corrosion resistance of various aluminum alloys: an experimental study // RUDN Journal of Engineering Research. 2025. Vol. 26. No. 1. P. 94–106. https://doi.org/10.22363/2312-8143-2025-26-1-94-106 EDN: LACBPD

4. *Sovetbayev R., Nugman Ye., Shayakhmetov Ye., Kawalek A.* Preparation of AlMgSi1 (6082) aluminum alloy for the study of mechanical and physico-chemical properties in the rolling process // Eurasian Journal of Applied Engineering and Technology (EJAET). 2024. No. 147. P. 231–244. https://doi.org/10.32523/2616- 7263-2024-147-2-231-244 EDN: IVEQDU

5. *Белокур И.П., Панасюк В.В., Буйна Е.В.* О критериях оценки дефектов сварных соединений // Автоматическая сварка. 1975. № 5. С. 30–33.

6. *Панасюк В.В.* Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие : в 4 томах. Т. 4 : Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов. Киев : Наукова думка. 1990. 680 с. ISBN 5-12-000489-X

7. *Москвичев В.В.* Низкотемпературная механика разрушения сварных конструкций // Современные технологии, материалы и оборудование для сварочно-монтажных и ремонтных работ в условиях низких климатических температур Севера и Сварка и контроль качества сварных соединений : круглый стол, Якутск, 14–18 марта 2022 г. Якутск : ООО «Компания Дани-Алмас», 2022. С. 17–19. EDN: YUVTZX

8. *Москвичев В.В., Лепихин А.М., Чернякова Н.А.* Исследования трещиностойкости и надежности сварных соединений из малоуглеродистых и низколегированных сталей // Сварочное производство. 2021. № 3. С. 11–23. https://doi.org/10.34641/SP.2021.1036.3.008 EDN: SGHLHO

9. *Москвичев В.В.* Ресурсное проектирование и безопасность крупногабаритных сварных конструкций // Сварка в России — 2019: современное состояние и перспективы : тезисы докладов Междунар. конф., Томск, 03–07 сентября 2019 г. Томск : СТТ, 2019. С. 209. EDN: RSOPYO

10. *Елсуков Е.И.* Метод нормирования дефектов сплошности сварных соединений вертикальных цилиндрических резервуаров : дис. … канд. техн. наук: 05.23.01: Челябинск, 2002. 220 с.

11. *Дриц А.М., Овчинников В.В.* Сварка алюминиевых сплавов. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Руда и металлы, 2020. ISBN 978-5-98191-088-3

12. *Партон В.З.* Механика разрушения. От теории к практике. Москва : Наука, 1990. 240 с. ISBN 5-02-014287-5

13. *Броек Д.* Основы механики разрушения / пер. с англ. Москва : Высш. шк., 1980. 368 с.

14. *Ovchinnikov A.V.* Approximate formula for determining stress intensity factors for bodies with surface cracks // Strength Problems. 1986. No. 11. P. 44–47.

15. *Чжо З.* Обеспечение долговечности кривошипных штамповочных машин после периода длительной эксплуатации на основе математического моделирования и экспериментальных исследований : дис. … канд. техн. наук: 2.5.7. Москва, 2023. 143 с.

16. NASA Technical Memorandum 83200: Stress-Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies. https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19810023035/downloads/19810023035.pdf

17. ASTM Digital Library: On the Surface Flaw Emanating from a Circular Hole (Original Paper). https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/ADA039817.pdf

18. *Ovchinnikov A.V.* Approximate formula for determining stress intensity factors for bodies with subsurface cracks // Strength Problems. No. 11. 1986. P. 41–43.

19. Таблица дефектов сварных швов. URL: https://inner.su/articles/tablitsa-defektov-svarnykh-shvov/#main-toc (дата обращения: 04.03.2026).

20. *Бальшин М.Ю.* Зависимость механических свойств порошковых металлов от пористости и предельные свойства пористых металлокерамических материалов // Доклады Академии Наук СССР. 1949. Т. LXVII. № 5. С. 831–834.

21. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений / пер. с нем. Лебедев Н.Н. ; ред. пер. Лурье А.И. Москва; Ленинград : ОГИЗ. Гостехиздат, 1947. 204 с.

22. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений: Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность. Москва : Мир, 1977. 302 с. URL: https://djvu.online/file/HQLeQWGzKzuCE (дата обращения: 27.02.2026).

23. *Brandon D.B.* Developing mathematical models for computer control // Instrument Society of America Journal. 1959. No. 6. P. 70–73.

24. *Клебанов Я.М., Бурмистров А.Г., Столяров Н.Н.* Экспериментальные исследования деформационных и прочностных свойств материала рулонированных сварных соединений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2012. № 3 (35). С. 133–140. EDN: PYUQNB

25. *Мощенок В.И., Лалазарова Н.А., Дощечкина И.В., Демченко С.В.* Сравнение показателей прочности, определённой при испытаниях на растяжение, и по значениям твёрдости // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. 2016. № 73. С. 115–118. EDN: WTPHUL

26. *Бадиков К.А.* Оценка и прогнозирование роста усталостной трещины в алюминиевом сплаве и конструкционных сталях при нерегулярном нагружении : дис. … канд. техн. наук: 01.02.04. Волгоград, 2020. 182 с. EDN: TZVWRF

27. *Rajendran C., Vinoth Kumar M., Sonar T., Mallieswaran K.* Investigating the effect of PWHT on microstructural features and fatigue crack growth behavior of friction stir welded AA2024-T6 aluminum alloy joints // Forces in Mechanics. 2022. Vol. 8. Article no. 100107. https://doi.org/10.1016/j.finmec.2022.100107 EDN: NUDKJW

28. *Няфкин А.Н., Жабин А.Н., Автаев В.В.* Распространение трещин в композиционных материалах системы Al-SiC при циклических нагрузках // Труды ВИАМ. 2024. № 3 (133). С. 63–75. https://doi.org/10.18577/2307-6046-2024-0-3-63-75 EDN: ERUHTP

29. *Manjunatha C.M., Parida B.K.* Prediction of fatigue crack growth after single overload in an aluminum alloy // AIAA Journal. 2004. Vol. 42. https://doi.org/10.2514/1.880.

30. *Moussouni A., Benachour M., Benachour N.* Prediction of fatigue cracks using gamma function // Fatigue of Aircraft Structures. 2023. Vol. 2022. Iss. 14. https://doi.org/10.2478/fas-2022-0004 EDN: OQOPDR

31. *Bray G.H., Glazov M., Rioja R.J., Li D., Gangloff R.P.* Effect of artificial aging on the fatigue crack propagation resistance of 2000 series aluminum alloys // International Journal of Fatigue. 2001. Vol. 23. Supplement 1. P. 265–276. https://doi.org/10.1016/S0142-1123(01)00159-1.

32. *Lacarac V., Smith D.J., Pavier M.J., Priest M.* Fatigue crack growth from plain and cold expanded holes in aluminium alloys // International Journal of Fatigue. 2000. Vol. 22. Iss. 3. P. 189–203. https://doi.org/10.1016/S0142-1123(99)00126-7

33. *Warner J.S., Bray H.B., Gangloff R.P.* Environment-enhanced fatigue crack propagation and inhibition in aluminum alloys under full immersion and atmospheric exposure // DoD Corrosion conference. 2009. P. 1–17.

34. *Шуртаков А.К.* Оптимизация состава и механических свойств сварных и крепёжных соединений алюминиевых сплавов для создания кузовов железнодорожных вагонов нового поколения : дис. … канд. техн. наук : 05.16.01 Москва, 2017. 193 с.

35. *Ilman M.N., Kusmono, Muslih M.R., Triwibowo N.A., Sehono* Enhanced fatigue performance of tandem MIG 5083 aluminium alloy weld joints by heat sink and static thermal tensioning // International Journal of Lightweight Materials and Manufacture. 2022. Vol. 5. Iss. 4. P. 440–452. https://doi.org/10.1016/j.ijlmm.2022.05.003 EDN: BQSGRH

36. *Lukács J., Meilinger Á., Pósalaky D.* High cycle fatigue and fatigue crack propagation design curves for 5754-H22 and 6082-T6 aluminium alloys and their friction stir welded joints // Weld World. 2018. Vol. 62. P. 737–749. https://doi.org/10.1007/s40194-018-0599-1

37. *Spangenberger A.G., Lados D.A.* A novel physics-based predictive model for small fatigue crack growth with microstructural sensitivity in cast aluminum alloys // Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science. 2019. Vol. 50. No. 9. P. 4364–4377. https://doi.org/10.1007/s11661-019-05349-z EDN: NBJCCZ

38. *Menzemer C., Srivatsan T.S.* The effect of environment on fatigue crack growth behavior of aluminum alloy 5456 // Materials Science and Engineering: A. 1999. Vol. 271. Iss. 1–2. P. 188–195. https://doi.org/10.1016/S0921-5093(99)00222-1

39. *Jin J., Lu W., Fu Z., Zhu Z., Chen W., Gou G.* Corrosion fatigue crack growth in A7N01S−T5 aluminum alloy MIG welded joints // Journal of Materials Research and Technology. 2023. Vol. 23. P. 2202–2218. https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.01.103 EDN: ZEGVTU

40. *Garcia C., Lotz T., Martinez M., Artemev A., Alderliesten R., Benedictus R.* Fatigue crack growth in residual stress fields // International Journal of Fatigue. 2016. Vol. 87. P. 326–338. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.020

41. *Ganesan K., Rao T.S., Rao S.R.K.* Investigating the effect of stress ratio on fatigue crack growth rate behaviour in friction stir welded AA7075-T651 aluminium alloy plates // International Journal of Fatigue. 2024. Vol. 188. Article no. 108527. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108527 EDN: QJPWRV

42. *John R., Jata K.V., Sadananda K.* Residual stress effects on near-threshold fatigue crack growth in friction stir welds in aerospace alloys // International Journal of Fatigue. 2003. Vol. 25. Iss. 9–11. P. 939–948. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2003.08.002.

43. *Siqueira A.F., Baptista C.A.R.P., Guimarães O.L.C., Ruckert C.O.F.T.* Describing the total fatigue crack growth curves for aluminum alloys with an exponential equation // Procedia Engineering. 2010. Vol. 2. Iss. 1. P. 1905–1914. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2010.03.205 EDN: ODAEHB

44. *Саидов Х.Р.* Влияние поверхностных дефектов на усталостную долговечность элементов алюминиевых листовых конструкций, работающих в условиях изгиба : дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. Москва, 1983. 224 с.

References

1. Kornev OA, Shuvalov AN, Kornilova AV, Ermakov VA. Integral criterion for the selection of aluminum alloy for the construction of reservoirs in the Arctic. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(6):605–622. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-6-605-622 EDN: FWXOUY

2. Al'tman MB. *Application of aluminum alloys*. Moscow: Metallurgy Publ.; 1973. (In Russ).

3. Reza Kashyzadeh K, Ghorbani S, Averyanov AS. Influence of environmental temperature on the corrosion resistance of various aluminum alloys: an experimental study. *RUDN Journal of Engineering Research.* 2025; 26(1):94–106. https://doi.org/10.22363/2312-8143-2025-26-1-94-106 EDN: LACBPD

4. Sovetbayev R, Nugman Ye, Shayakhmetov Ye, Kawalek A. Preparation of AlMgSi1 (6082) aluminum alloy for the study of mechanical and physico-chemical properties in the rolling process. *Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Technical Science and Technology Series*. 2024;(147):231–244. https://doi.org/10.32523/2616-7263-2024-147-2-231-244 EDN: IVEQDU

5. Belokur IP, Panasyuk VV, Bujna EV. On Criteria for Evaluating Defects in Welded Joints. *Automatic Welding*. 1975;(5):30–33. (In Russ.)

6. Panasyuk VV. *Mechanics of Failure and Strength of Materials: Reference Manual in 4 Volumes. Vol. 4: Fatigue and Cyclic Crack Resistance of Structural Materials*. Kyiv: Naukova Dumka Publ.; 1990. (In Russ.) ISBN 5-12-000489-X

7. Moskvichev VV. Low-Temperature Fracture Mechanics of Welded Structures. *Modern Technologies, Materials, and Equipment for Welding, Installation, and Repair Work in the Low Climatic Temperatures of the North and Welding and Quality Control of Welded Joints.* Yakutsk, March 14–18, 2022. Yakutsk: Dani-Almas Company LLC; 2022. p. 17–19. (In Russ.) EDN: YUVTZX

8. Moskvichev VV, Lepihin AM, Chernyakova NA. Investigations of fracture toughness and reliability of welded joints from low-carbon andlow-alloy steels. *Welding Production.* 2021;(3):11–23. (In Russ.) https://doi.org/10.34641/SP.2021.1036.3.008 EDN: SGHLHO

9. Moskvichev VV. Lifetime analysis and safety of large-scale welded structures. *Welding in Russia — 2019: Current Status and Prospects: Abstracts of Papers from the International Conference.* Tomsk, September 3–7, 2019. Tomsk: STT Limited Liability Company Publ.; 2019. p. 209. (In Russ.) EDN: RSOPYO

10. Elsukov EI. *A Method for Standardizing Continuity Defects in Welded Joints of Vertical Cylindrical Tanks* [dissertation]. Chelyabinsk; 2002. (In Russ.)

11. Dric AM, Ovchinnikov VV. *Welding of Aluminum Alloys*. 2nd ed., revised and expanded. Moscow: Ores and Metals; 2020.

12. Parton VZ. *Fracture Mechanics: From Theory to Practice*. Moscow: Nauka; 1990. (In Russ.)

13. Broek D. *Elementary engineering fracture mechanics*. Noordhoff International Publ.; 1974. ISBN 90-247-2580-1

14. Ovchinnikov AV. Approximate formula for determining stress intensity factors for bodies with surface cracks. *Strength Problems*. 1986;(11): 44–47.

15. Zhao Z. *Ensuring the Durability of Crank-Type Presses After a Long Period of Operation Based on Mathematical Modeling and Experimental Studies*. [dissertation]. Moscow; 2023. (In Russ.)

16. Memorandum 83200: Stress-Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies. https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19810023035/downloads/19810023035.pdf

17. ASTM Digital Library: On the Surface Flaw Emanating from a Circular Hole (Original Paper). https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/ADA039817.pdf

18. Ovchinnikov AV. Approximate formula for determining stress intensity factors for bodies with subsurface cracks. *Strength Problems*. 1986;(11):41–43.

19. *Table of Weld Defects*. Available from: https://inner.su/articles/tablitsa-defektov-svarnykh-shvov/#main-toc (accessed: 04.03.2026)

20. Bal'shin MYu. The Dependence of the mechanical properties of powder metals on porosity and the limit properties of porous metal-ceramic materials. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*. 1949;LXVII(5):831–834. (In Russ.)

21. Neuber G. *Stress Concentration*. Translated from German by N.N. Lebedev; edited by A.I.M. Lurie; Leningrad: OGIZ, Gostekhizdat Publ.; 1947. (In Russ.)

22. Peterson R. *Stress concentration factors; charts and relations useful in making strength calculations for machine parts and structural elements*. New York: Wiley Publ.; 1974. Available from: https://archive.org/details/stressconcentrat0000pete (accessed: 27.02.2026).

23. Brandon DB. Developing mathematical models for computer control. *Instrument Society of America Journal*. 1959;(6):70–73.

24. Klebanov YaM, Burmistrov AG, Stolyarov NN. Deformation and strength property experimental study of a rolled weld material. *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*. 2012;3:133–140. (In Russ.) EDN: PYUQNB

25. Moshchenok VI, Lalazarova NA, Doshchechkina IV, Demchenko SV. Comparison of the strength factors defined in a tensile-strength test and by measuring hardness. *Bulletin of Kharkov National Automobile and Highway University*. 2016;(73):115–118. (In Russ.) EDN: WTPHUL

26. Badikov KA. *Assessment and Prediction of Fatigue Crack Growth in Aluminum Alloys and Structural Steels Under Irregular Loading* [dissertation]. Volgograd, 2020. (In Russ.) EDN: TZVWRF

27. Rajendran C, Vinoth Kumar M, Sonar T, Mallieswaran K. Investigating the effect of PWHT on microstructural features and fatigue crack growth behavior of friction stir welded AA2024-T6 aluminum alloy joints. *Forces in Mechanics*. 2022;8:100107. https://doi.org/10.1016/j.finmec.2022.100107 EDN: NUDKJW

28. Nyafkin AN, Zhabin AN, Avtaev VV. Crack propagation in composite materials of the Al-SiC system under cyclic loading. *Proceedings of VIAM*. 2024;3:63–75. (In Russ.) https://doi.org/10.18577/2307-6046-2024-0-3-63-75 EDN: ERUHTP

29. Manjunatha CM, Parida BK. Prediction of fatigue crack growth after single overload in an aluminum alloy. *AIAA Journal*. 2004;42. https://doi.org/10.2514/1.880

30. Moussouni A, Benachour M, Benachour N. Prediction of fatigue cracks using gamma function. *Fatigue of Aircraft Structures*. 2023; 2022(14). https://doi.org/10.2478/fas-2022-0004

31. Bray GH, Glazov M, Rioja RJ, Li D, Gangloff RP. Effect of artificial aging on the fatigue crack propagation resistance of 2000 series aluminum alloys. *International Journal of Fatigue*. 2001;23(1):265–276. https://doi.org/10.1016/S0142-1123(01)00159-1

32. Lacarac V, Smith DJ, Pavier MJ, Priest M. Fatigue crack growth from plain and cold expanded holes in aluminium alloys. *International Journal of Fatigue*. 2000; 22(3):189–203. https://doi.org/10.1016/S0142-1123(99)00126-7

33. Warner JS, Bray HB, Gangloff RP. Environment-enhanced fatigue crack propagation and inhibition in aluminum alloys under full immersion and atmospheric exposure. *DoD Corrosion conference*. 2009. p. 1–17.

34. Shurtakov AK. *Optimization of the composition and mechanical properties of welded and fastened joints in aluminum alloys for the manufacture of next-generation railway car bodies* [dissertation]. Moscow, 2017. (In Russ.)

35. Ilman MN, Kusmono, Muslih MR, Triwibowo NA, Sehono. Enhanced fatigue performance of tandem MIG 5083 aluminium alloy weld joints by heat sink and static thermal tensioning. *International Journal of Lightweight Materials and Manufacture*. 2022;5(4):440–452. https://doi.org/10.1016/j.ijlmm.2022.05.003 EDN: BQSGRH

36. Lukács J, Meilinger Á, Pósalaky D. High cycle fatigue and fatigue crack propagation design curves for 5754-H22 and 6082-T6 aluminium alloys and their friction stir welded joints. *Weld World*. 2018;62:737–749. https://doi.org/10.1007/s40194-018-0599-1

37. Spangenberger AG, Lados DA. A novel physics-based predictive model for small fatigue crack growth with microstructural sensitivity in cast aluminum alloys. *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science.* 2019;50(9):4364–4377. https://doi.org/10.1007/s11661-019-05349-z EDN: NBJCCZ

38. Menzemer C, Srivatsan TS. The effect of environment on fatigue crack growth behavior of aluminum alloy 5456. *Materials Science and Engineering: A*. 1999;271(1–2):188–195. https://doi.org/10.1016/S0921-5093(99)00222-1

39. Jin J, Lu W, Fu Z, Zhu Z, Chen W, Gou G. Corrosion fatigue crack growth in A7N01S−T5 aluminum alloy MIG welded joints. *Journal of Materials Research and Technology*. 2023;23:2202–2218. https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.01.103 EDN: ZEGVTU

40. Garcia C, Lotz T, Martinez M, Artemev A, Alderliesten R, Benedictus R. Fatigue crack growth in residual stress fields. *International Journal of Fatigue*. 2016;87:326–338. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.020

41. Ganesan K, Rao TS, Rao SRK. Investigating the effect of stress ratio on fatigue crack growth rate behaviour in friction stir welded AA7075-T651 aluminium alloy plates. *International Journal of Fatigue.* 2024;188:108527. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108527 EDN: QJPWRV

42. John R, Jata KV, Sadananda K. Residual stress effects on near-threshold fatigue crack growth in friction stir welds in aerospace alloys. *International Journal of Fatigue*. 2003;25(9–11):939–948. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2003.08.002 EDN: ODAEHB

43. Siqueira AF, Baptista CARP, Guimarães OLC, Ruckert COFT. Describing the total fatigue crack growth curves for aluminum alloys with an exponential equation. *Procedia Engineering.* 2010;2(1):1905–1914. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2010.03.205 EDN: ODAEHB

44. Saidov HR. *The Effect of Surface Defects on the Fatigue Life of Components in Aluminum Sheet Structures Subjected to Bending* [dissertation]. Moscow, 1983.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 222–234

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-222-234
EDN: KKMJWA

Research article / Научная статья

Stability of the Coastal Revetment Using 2D and 3D Simulations: A Case Study in Vinh Long, Vietnam

Hoang P. Tran[1], Ngoc T. Pham[2], Van T. Le[3], Van P. Dang[2]✉

[1] Vinh Long Province Agricultural Project Management Board, *Vinh Long, Vietnam*
[2] Thuyloi University, *Ha Noi, Vietnam*
[3] Institute of Coastal and Offshore Engineering, *Ho Chi Minh City, Vietnam*

✉ phudv@tlu.edu.vn

Received: April 4, 2026
Revised: May 28, 2026
Accepted: June 3, 2026

Abstract. Coastal erosion in the Mekong Delta has intensified due to climate change and rising sea levels, necessitating robust protective structures. This study evaluates the stability of a coastal revetment in Duyen Hai, Vinh Long province, using both two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D) numerical simulations. Vinh Long, following its 2025 administrative merger, faces significant pressure from the East Sea's irregular tidal regime and monsoon-driven wave energy. The stability analysis was conducted using the Simplified Bishop Method within the Limit Equilibrium Method (LEM) framework via the GeoStudio software suite (SLOPE/W and SLOPE3D). Results indicate that the safety factors (FS) for all considered load combinations, basic and extreme, comply with the Vietnamese national standard TCVN 9901:2023. Notably, the 3D simulations yielded FS values approximately 11.2% higher than the 2D counterparts, with the 3D model providing a more realistic representation of soil-structure interaction by accounting for lateral resistance and interaction forces between cross-sections. Furthermore, under an extreme loading combination representing the rainy season, where upstream discharge artificially elevates the landside water level by 1.5 m, the safety factors decrease due to increased pore water pressure within the embankment. This research demonstrates that while 2D analysis remains a conservative and safe approach for design, 3D modeling offers critical insights for cost-effective design refinement and a more accurate understanding of complex failure mechanisms in soft-soil coastal foundations.

Keywords: Protective structure stability, Limit Equilibrium Method, 2D simulation, 3D simulation, Bishop Simplified Method, Mekong Delta

Authors' contribution: *Tran H.P.* — methodology, software, validation, writing — original draft, visualization; *Pham N.T.* — data curation, visualization, methodology, writing — review; *Le V.T.* — validation, visualization, writing — review; *Dang V.P.* — conceptualization, validation, resources, writing — review & editing, supervision, visualization. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the preparation of this article.

Data availability. All data obtained over the course of this study are included in the article being published.

For citation: Tran HP, Pham NT, Le VT, Dang VP. Stability of the coastal revetment using 2D and 3D simulations: A case study in Vinh Long, Vietnam. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(3):222–234. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-222-234 EDN: KKMJWA

Hoang P. Tran, Master of Civil Engineering, Board Member, Department of Project Operation and Management**,** Vinh Long Province Agricultural Project Management Board, Long Chau, Vinh Long, Vietnam; ORCID: 0009-0005-4578-1458; e-mail: thphu9@gmail.com
Ngoc T. Pham, Doctor of Civil Engineering, Lecturer, Faculty of Civil Engineering, Thuyloi University, 175 Tay Son, Dong Da, Ha Noi, Vietnam; ORCID: 0000-0002-4928-6236, e-mail: thinhtls@tlu.edu.vn
Van T. Le, Doctor of Civil Engineering, Head of the Research Department of Oceanography, Institute of Coastal and Offshore Engineering, Cho Quan, Ho Chi Minh City, Vietnam; ORCID: 0009-0006-3545-8814; e-mail: levantuan.vktb@gmail.com
Van P. Dang, Doctor of Civil Engineering, Lecturer, Faculty of Civil Engineering, Thuyloi University, 175 Tay Son, Kim Lien, Ha Noi, Vietnam; ORCID: 0000-0001-9600-0539; e-mail: phudv@tlu.edu.vn

© Tran H.P., Pham N.T., Le V.T., Dang V.P., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Устойчивость берегового укрепления с использованием 2D- и 3D-моделирования: исследование на примере Виньлонга, Вьетнам

Х.Ф. Тран[1], Н.Т. Фам[2], В.Т. Ле[3], В.Ф. Данг[2]✉

[1] Совет по управлению сельскохозяйственным проектом провинции Виньлонг, *Лонг Чау, Виньлонг, Вьетнам*
[2] Университет Туйлой, Тай Сон, *Ким Лиен, Ханой, Вьетнам*
[3] Институт прибрежной и морской инженерии, *Чо Куан, Хошимин, Вьетнам*
✉ phudv@tlu.edu.vn

Поступила в редакцию: 4 апреля 2025 г.
Доработана: 28 мая 2026 г.
Принята к публикации: 3 июня 2026 г.

Аннотация. Эрозия побережья в дельте Меконга усилилась из-за изменения климата и повышения уровня моря, что требует внедрения надежных защитных сооружений. Авторами проведена оценка устойчивости берегового укрепления в районе Дуенхай, провинция Виньлонг, с использованием двухмерного (2D) и трехмерного (3D) численного моделирования. После административной реформы 2025 г. Виньлонг испытывает значительное давление со стороны нерегулярного приливного режима Восточного моря и энергии волн, вызванных муссонами. Расчет на устойчивость выполнен упрощенным методом Бишопа в рамках метода предельного равновесия (МПР) с помощью программного комплекса GeoStudio (SLOPE/W и SLOPE3D). Результаты показывают, что коэффициенты запаса (КЗ) для всех рассматриваемых сочетаний нагрузок — как основных, так и особых — соответствуют требованиям национального стандарта Вьетнама TCVN 9901:2023. Примечательно, что значения КЗ, полученные при расчете 3D-модели, оказались примерно на 11,2 % выше, чем у 2D-модели. Трехмерная модель дает более реалистичное представление о взаимодействии грунта и сооружения за счет учета бокового сопротивления и взаимодействия сил между сечениями. Кроме того, при сочетании нагрузок с особыми воздействиями, соответствующими сезону дождей (когда сброс воды искусственно повышает уровень воды с внутренней стороны укрепления на 1,5 м), коэффициенты запаса снижаются из-за увеличения порового давления воды в теле насыпи. Исследование демонстрирует, что 2D-расчет остается подходом для безопасного проектирования с избыточным запасом прочности, однако 3D-моделирование предоставляет критически важные сведения для экономической оптимизации конструкции и более точного понимания сложных механизмов разрушения фундаментов в мягких прибрежных грунтах.

Ключевые слова: устойчивость защитных сооружений, метод предельного равновесия, 2D-моделирование, 3D-моделирование, упрощенный метод Бишопа, дельта Меконга

Вклад авторов: *Тран Х.Ф.* — методология, программное обеспечение, валидация, написание исходного текста; *Фам Н.Т.* — подготовка данных, визуализация, методология, редактирование текста; *Ле В.Т.* — валидация, визуализация, редактирование текста; *Данг В.Ф.* — концепция, валидация, источники, редактирование текста, руководство, визуализация. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: *Tran H.P., Pham N.T., Le V.T., Dang V.P.* Stability of the coastal revetment using 2D and 3D simulations: a case study in Vinh Long, Vietnam // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 222–234. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-222-234 EDN: KKMJWA

1. Introduction

Coastal erosion driven by climate change and sea-level rise represents a critical threat to low-lying deltaic regions globally. In Vietnam, particularly within the Mekong Delta, this dynamic is exceptionally severe. Currently, nearly 40% of the Vietnamese Mekong Delta's 744.0 km coastline experiences severe

Тран Хоанг Фу, магистр в области гражданского строительства, член совета, отдел эксплуатации и управления проектами, совет по управлению сельскохозяйственными проектами провинции Виньлонг, Лонгчау, Виньлонг, Вьетнам; ORCID: 0009-0005-4578-1458; e-mail: thphu9@gmail.com
Фам Нгок Тхинь, доктор в области гражданского строительства, преподаватель факультета гражданского строительства, Университет Туйлой, Тай Сон, 175, Ким Лиен, Ханой, Вьетнам; ORCID: 0000-0002-4928-6236; e-mail: thinhtls@tlu.edu.vn
Ле Ван Туан, доктор в области гражданского строительства, директор исследовательского отдела океанографии, Институт береговой и морской техники, Чо Куан, Хошимин, Вьетнам; ORCID: 0009-0006-3545-8814; e-mail: levantuan.vktb@gmail.com
Данг Ван Фу, доктор в области гражданского строительства, преподаватель факультета гражданского строительства, Университет Туйлой, Тай Сон, 175, Ким Лиен, Ханой, Вьетнам; ORCID: 0000-0001-9600-0539; e-mail: phudv@tlu.edu.vn

erosion, with hotspot retreat rates reaching alarming levels of up to 50 to 95 meters annually [1]. The underlying drivers of this catastrophic erosion are complex, involving climate-induced sea-level rise, localized subsidence, and a critical reduction in sediment supply; the sediment load of the Mekong River has plummeted from historical highs to an estimated 42 million tons per year due to extensive upstream damming and sand mining [1]. Vinh Long province is highly vulnerable to these compounding factors. Following the July 2025 national administrative reform, which consolidated Ben Tre, Tra Vinh, and Vinh Long into a single provincial unit under Resolution No. 60-NQ/TW, drastically expanding its coastal administrative boundary [2], the region faces unprecedented pressure from the East Sea's irregular semi-diurnal tidal regime (with amplitudes up to 3.5 to 4.0 meters) and monsoon-driven wave energy.

To counteract these existential threats, provincial governments have implemented structural protective measures covering approximately 68% of the affected shorelines in the Mekong Delta [3]. Structural engineering interventions, including traditional sea dikes, Busadco breakwaters, semi-circular breakwaters, and centrifugal pile-rock systems, have been widely deployed [3–11]. Empirical monitoring demonstrates the physical efficacy of these structures; for instance, breakwaters in the region achieve a 62% reduction in wave transmission heights, facilitating rapid sediment storage and creating alluvial offsets at rates up to 3.1 cm per month. However, while these structures effectively mitigate hydrodynamic forces, their placement on the highly cohesive, low-bearing-capacity soft clays characteristic of the Mekong Delta may cause significant potential slip failures.

Despite extensive documentation regarding the hydrodynamic performance and wave-reduction efficiency of these physical coastal defenses, a critical analytical gap persists regarding the computational modeling of their geotechnical stability. In engineering practice, stability analyses of protective structures and coastal embankments are overwhelmingly performed using two-dimensional (2D) Limit Equilibrium Methods (LEM) [12–15], treating the slope as an infinite plane-strain condition. While computationally efficient, contemporary geotechnical advances demonstrate that 2D plane-strain assumptions systematically yield a highly conservative factor of safety by artificially assuming the shear resistance along the lateral boundaries (end effects) of the finite sliding mass is exactly zero [16]. Modern variational limit equilibrium frameworks prove that for slopes comprised of highly cohesive soils, the magnitude of this 3D spatial effect increases approximately linearly with soil cohesion [16]. Therefore, relying exclusively on 2D methodologies systematically underestimates safety margins and can lead to the specification of over-engineered, excessive physical reinforcements, necessitating the adoption of advanced 3D spatial modeling to accurately capture realistic failure mechanisms.

Therefore, the specific object of this research is the 900-meter-long Long Huu — Hiep Thanh coastal revetment system, constructed on highly cohesive soft-soil foundations in Duyen Hai, Vinh Long province. The primary aim of this study is to evaluate the structural stability and identify the complex spatial failure mechanisms of the revetment under dynamic, monsoon-driven hydrological loading conditions. To fulfill this aim, the specific objectives of the study are: (1) to execute comparative steady-state seepage and limit equilibrium stability analyses using Bishop's Simplified Method in both 2D (SLOPE/W) and 3D (SLOPE3D) computational environments; (2) to quantitatively assess the safety factor variance generated by the inclusion of lateral shear resistance inherent to 3D space in cohesive clays; and (3) to rigorously validate the structural integrity of the revetment against the threshold criteria mandated by the TCVN 9901:2023 national standard under both basic and extreme loading combinations.

2. Research Methods

Slope stability is one of the most important and challenging problems in geotechnical engineering, directly related to the safety of infrastructure projects such as dams, roads, and mining areas [12; 13]. Mechanically, a slope is considered stable when the anti-slip forces of the soil mass are large enough to resist the sliding forces caused by gravity or external influences. In the history of soil mechanics, the Limit Equilibrium Method (LEM) has become a dominant tool due to its high practicality. Among the LEM methods, the Bishop method, specifically the simplified Bishop method, plays an important bridging role

between less accurate classical methods and complex modern methods. Bishop's simplified method is based on key mechanical assumptions to address the static indeterminacy of the problem [12]. First, this method applies only to slip surfaces in the shape of a circular arc. Second, Bishop assumes that the shear forces between blocks (X) are zero, meaning that the interaction forces between the soil blocks consist only of horizontal normal forces (E). Third, the safety factor is calculated based on the overall moment equilibrium condition with respect to the center of the circular slip surface and the vertical force equilibrium for each individual block. Although this method does not satisfy the horizontal force balance condition for the entire mass, experimental and verification studies have shown that Bishop's safety factor results are often very close to those of more accurate methods, such as the Spencer or Morgenstern-Price methods. This makes Bishop the commonly adopted method in engineering practice for analyzing circular slip surfaces.

In slope stability analysis, the two-dimensional (2D) simulation method is the most popular in engineering practice due to its convenience and long history of development. 2D simulations are based on the assumption of plane deformation, in which the sliding mass is divided into vertical slices [12; 13]. 2D analysis has a distinct advantage in terms of computational efficiency. Solving a 2D problem typically takes only a few seconds to a few minutes, allowing engineers to perform a series of sensitivity analyses of geological and hydrological variables. Furthermore, 2D methods (such as simplified Bishop or Morgenstern-Price) often yield lower (conservative) safety factors than observed in reality, due to the omission of resistance at the edges of the sliding mass [16]. This inadvertently creates a safety margin for the structure design. The primary technical constraint of 2D analysis is its inability to describe complex geometric conditions. For embankment sections with horizontal curvature, abrupt changes in embankment crest elevation, or heterogeneous geology along the alignment, the plane deformation assumption becomes unsuitable. In addition, 2D analysis does not account for lateral resisting forces, which are crucial for stabilizing finite-sized sliding masses.

To address the limitations mentioned above, three-dimensional simulation has become increasingly attractive. In which the Slope3D module extends the capabilities of GEOSTUDIO by applying a method of columns instead of slices, allowing for the simulation of sliding masses in real three-dimensional space [16–19]. This provides a highly suitable analytical framework for complex geotechnical systems that cannot be fully covered by 2D models. The advantages of 3D modeling lie in its ability to fully consider boundary effects and slope curvature. Studies have shown that for highly cohesive soils and large depth-to-surface landslides. Slope3 allows direct integration of 3D geological models from software such as Leapfrog, enabling accurate depiction of weak points, faults, and changes in subsurface layers. The ability to search for landslide surfaces using the Cuckoo algorithm or automatic optimization helps to determine a more representative failure mechanism in complex space. 3D analysis requires a much larger amount of geological and topographic survey data than 2D analysis [20]. The modeling process and problem-solving time are also more expensive, sometimes requiring powerful computing systems and a significant investment in software and personnel training. The introduction of Slope3D into the GeoStudio ecosystem represents a leap forward in the ability to capture realistic three-dimensional failure mechanisms. Instead of considering only a single cross-section, Slope3D allows for the simulation of the entire potential slip mass, thereby accounting for side resistance, a factor that often increases the safety factor compared to 2D analyses. Comparative studies show that 3D safety factors are typically 15 to 30% higher than 2D under symmetrical conditions. Still, they may be lower if the geology has localized weak areas that a 2D cross-section cannot fully cover.

Slope3D extends Bishop's theory by replacing 2D slices with vertical 3D columns, as shown in Figure 1. The potential sliding mass in 3D space is discretized into a network of columns with cross-sections ($dx \times dy$) [21]. Each of these columns becomes a basic computational unit, subject to a more complex system of forces in three-dimensional (x, y, z) space. For any given column in Slope3D, the forces involved include its own weight (W), the pore water pressure at the base of the column (U), the normal force at the base (N), and the mobilized shear force at the base (S) [19; 22]. Similar to 2D, the lateral interaction forces between columns play a crucial role in establishing equilibrium.

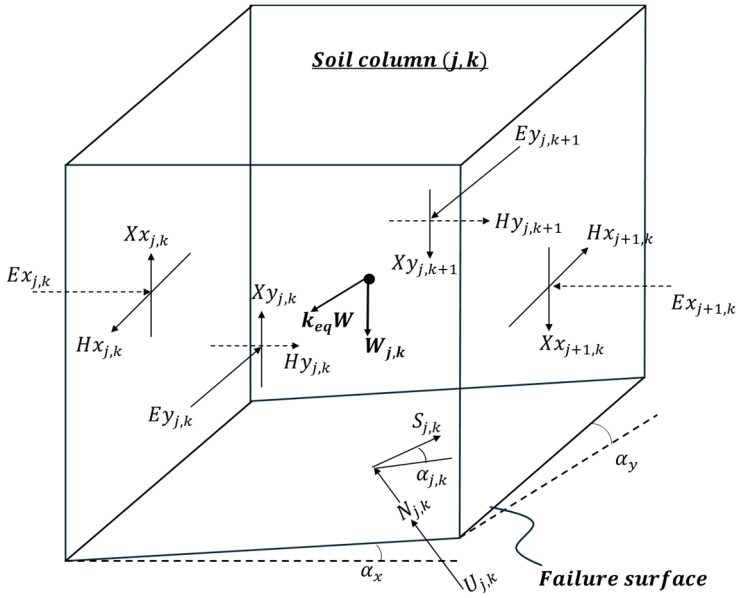


Figure 1. Forces acting on the soil column

S o u r c e: made by H.P. Tran.

In GeoStudio's Bishop 3D method, the following simplification assumptions are applied [17; 20]. First, side shear forces between columns in the vertical direction are ignored (total equal to zero). Second, it is assumed that normal interaction forces between columns are horizontal. Finally, the direction of slip of the entire mass is determined uniformly, usually the one with the greatest tendency toward instability.

The Bishop 3D safety factor equation, Eq. (1), can be expressed as an integral over the entire projected area of the sliding block [19]:

$$FS = \frac{\sum R_{j,k}\left(c_{j,k}A_{j,k} + W_{j,k}\left(1 - r_{u\,j,k}\right)\tan\Phi_{j,k}\right)/m_{\alpha\,j,k}}{\sum W_{j,k}\left[R_{j,k}m_z + k_{eq}e_{j,k}\right]}. \quad (1)$$

The coefficient $m_{\alpha\,j,k}$ for each column (j, k) now depends on the normal vector of the slip surface at the bottom of that column and the assumed slip direction. A subtle point in Slope3D is the handling of the normal force (N). Because N depends on FS, the problem in 3D becomes more sensitive to boundary conditions and slip surface shape, especially when the slip surface is not a perfect sphere.

3. Case Study

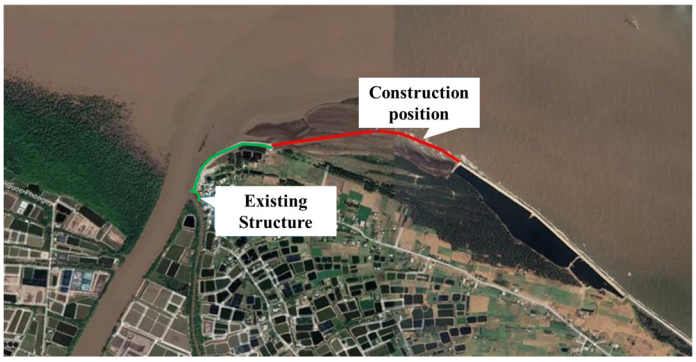


Figure 2. Location of the construction site

S o u r c e: made by H.P. Tran.

The construction site is located at Duyen Hai Town, Vinh Long Province, Vietnam, as illustrated in Figure 2. This is a 900 m long construction line that is going to be constructed to protect the shoreline in this area. The cross-section of the coastal revetment and the soil properties of the soil at this construction site are presented in Table 1 and Figure 3. Two distinct loading combinations were established for the numerical simulations, i.e., basic and extreme loading combinations. Basic loading combination represents the high-probability,

everyday operational conditions of the coastal defense system with the landside water level at +1.00 m and the seaside water level at –2.57 m. Extreme loading combination simulates a low-probability, critical stress event representative of the monsoon rainy season. Under this condition, heavy upstream discharge artificially elevates the landside water level by 1.5 meters relative to the normal level. Thus, the landside water level is at +2.50 m, and the seaside water level is at –2.57 m. This differential creates a severe hydraulic gradient, drastically increasing pore water pressures within the embankment body and foundation, thereby representing the most severe threat to slope stability in this area.

Table 1. **Soil properties**

Item	Symbol	Unit	Embankment	Layer 1	Layer 2	Concrete	Crushed stone
Unit weight	γ	kN/m^3	18.9	18.9	16.5	24.0	22.0
Saturated unit weight	γ_{sat}	kN/m^3	19.1	19.1	16.6	24.0	23.0
Friction angle	φ	Degree	22.03°	22.03°	4.10°	35°	40°
Cohesion	c	kPa	6.9	6.9	6.0	1000	5
Hydraulic conductivity	k_x, k_y	m/s	6.74e-06	6.74e-06	5.94e-08	–	–

S o u r c e: made by H.P. Tran.

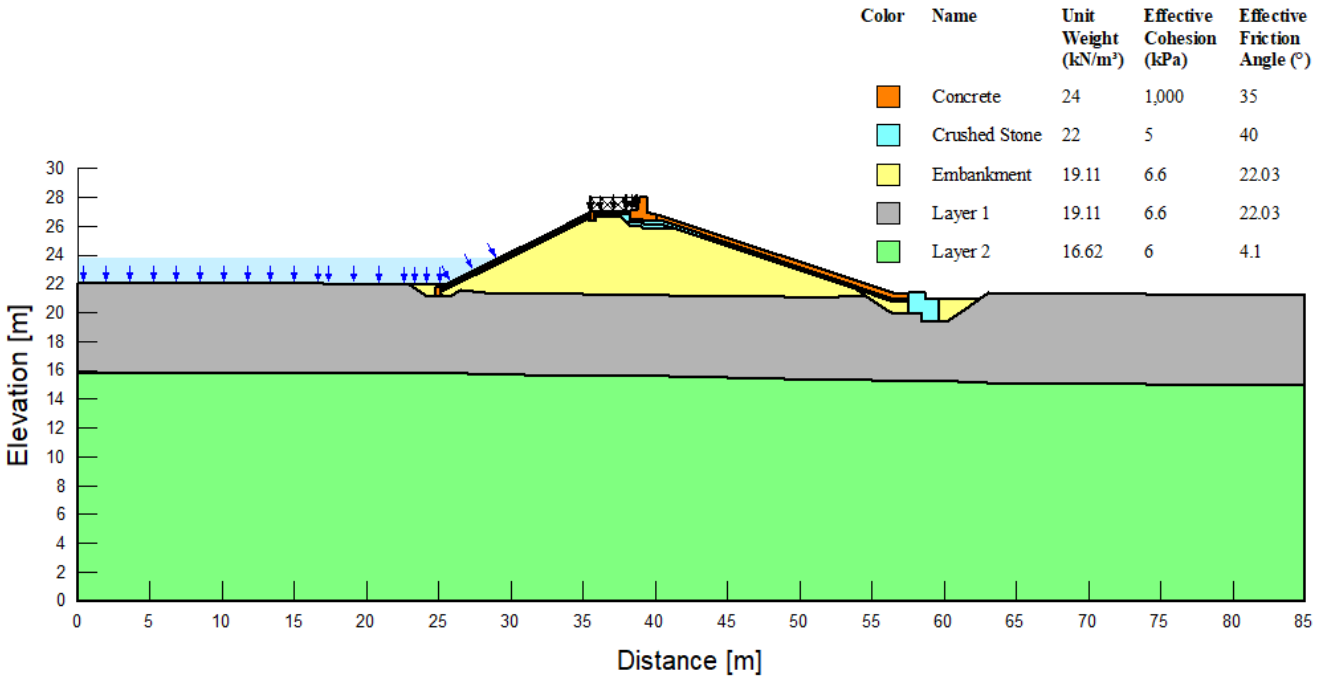


Figure 3. Cross-section of the coastal revetment and soil materials

S o u r c e: made by H.P. Tran.

4. Results and Discussion

4.1. Seepage and Stability Results

The analysis results from SLOPE/W 2D and SLOPE3D are shown in the figures below for three load combinations: the basic load combination and the extreme loading combination. First, the seepage analyses were carried out for these two load combinations as presented in Figure 4 to Figure 7. It is obvious that both the 2D and 3D simulations provide the same results of the piezometric line from the landside to the seaside and also the same of the pore-water pressure contour. The seepage flow mostly occurs at the embankment

and soil layer 1 to the toe of the embankment. It can be observed through Figure 8, which is a plot of the water rate at the toe on the right side of the embankment, the water rate at Point 2 is higher than that of the others. Additionally, the water rate at Point 2 obtained from the 3D simulation is higher than that of the 2D simulation by around 40%. Thus, there is a structure placed at the embankment toe to collect the water and to prevent the erosion caused by this flow.

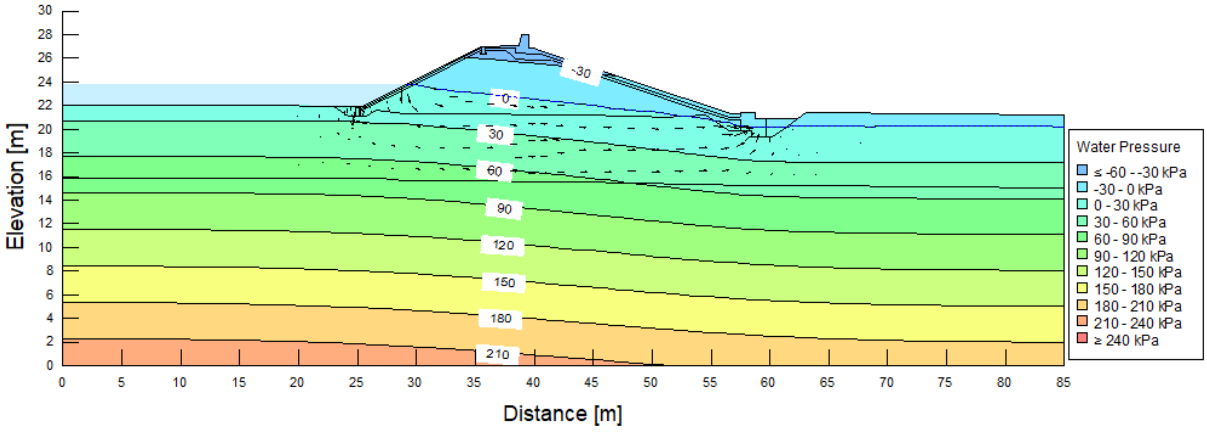


Figure 4. Seepage analysis using 2D simulation for basic loading combination

S o u r c e: made by H.P. Tran.

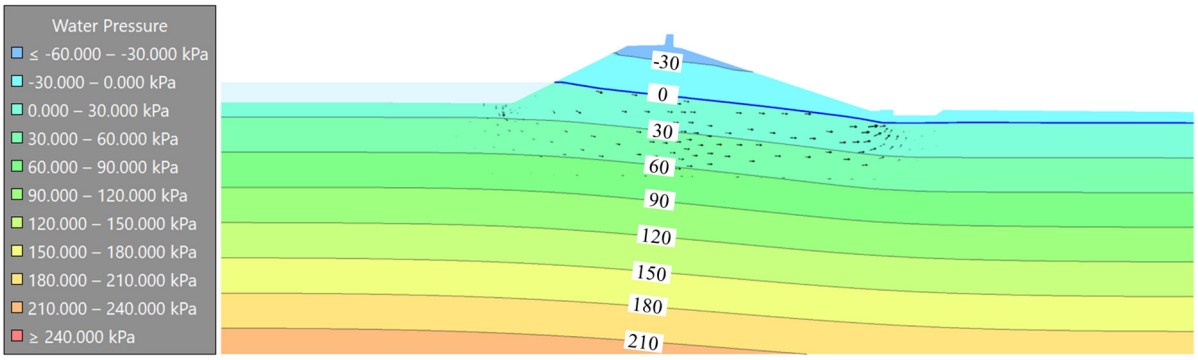


Figure 5. Seepage analysis using 3D simulation for basic loading combination

S o u r c e: made by H.P. Tran.

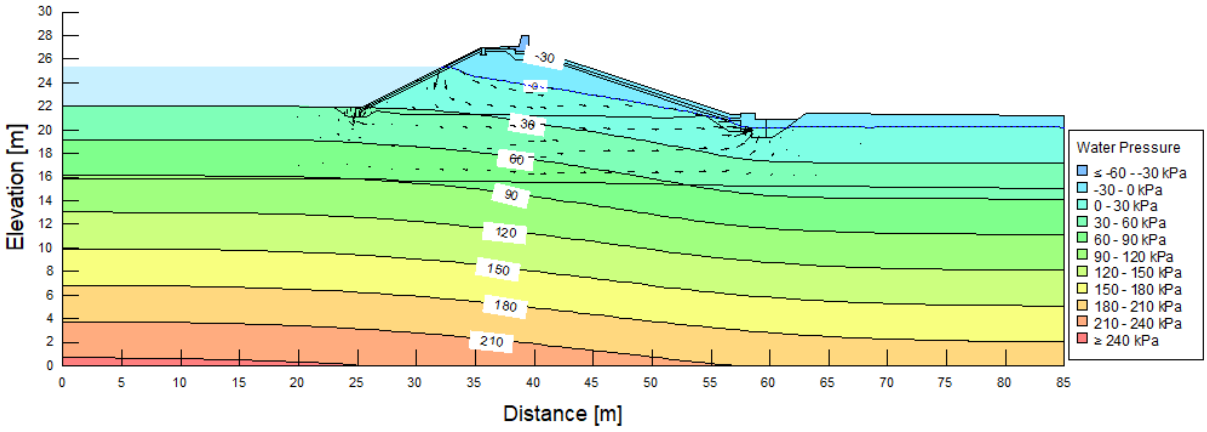


Figure 6. Seepage analysis using 2D simulation for extreme loading combination

S o u r c e: made by H.P. Tran.

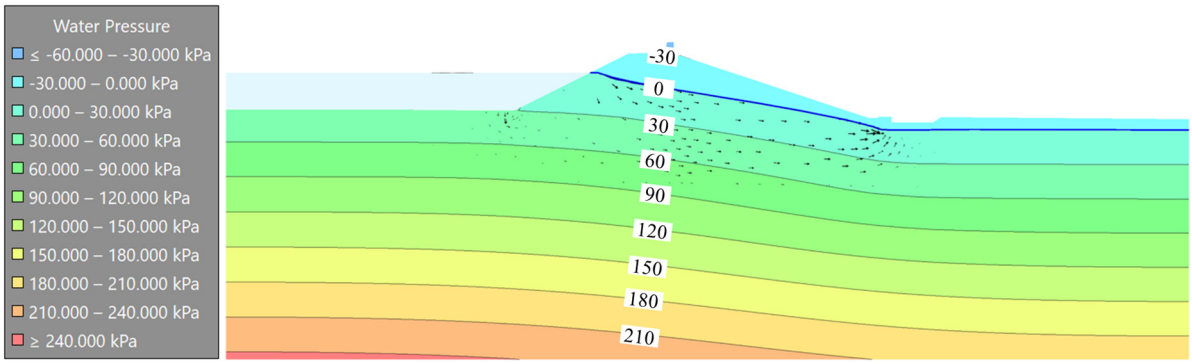


Figure 7. Seepage analysis using 3D simulation for extreme loading combination

S o u r c e: made by H.P. Tran.

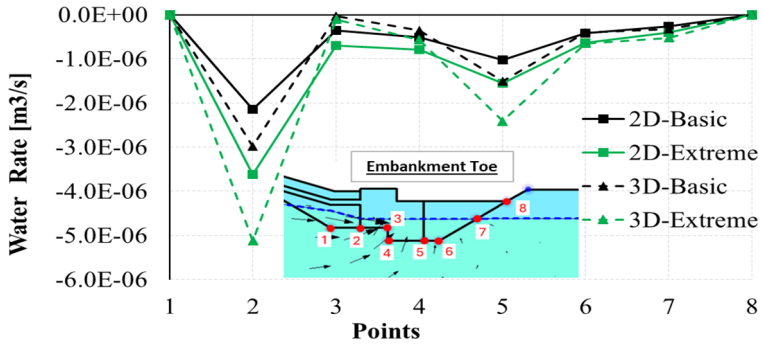


Figure 8. Seepage analysis using 3D simulation for extreme loading combination

S o u r c e: made by H.P. Tran.

Next, the stability analyses were conducted for both loading combinations using both the 2D and 3D simulations. The results are presented in Table 2 and Figure 9 to Figure 12. In general, the structural stability was evaluated against the safety thresholds prescribed by the Vietnamese National Standard TCVN 9901:2023 (Sea dike structures — Require-ments for design) [23]. This standard utilizes a limit state design approach, mandating minimum allowable factors of safety, $[K]$, that reflect the reliability index required for coastal infrastructure in soft-soil environments. For the basic load combination, the standard requires $[K] \geq 1.10$. For extreme combinations (incorporating a simulated 1.5 m storm surge), the threshold is adjusted to $[K] \geq 1.05$ to account for the low probability of such events. These values align with global risk-based engineering frameworks, such as Eurocode 7's partial factor logic, which balances economic material allocation with a low probability of structural failure. As presented in Table 2, the deterministic stability analysis reveals that the revetment is safe under the basic and extreme load combinations according to the Vietnamese National Standard TCVN 9901:2023. It can be seen that the basic load combination yields the higher safety factor, while the special load combination yields the lower safety factor. This can be explained by the fact that, for the extreme loading combination, the water level on the landside is 1.5 m higher than in the basic loading combination. This results in a higher piezometric line, increasing pore water pressure in the embankment body, thereby reducing the stability of the coastal revetment.

Table 2. **Safety factor from stability analysis**

Loading Combination	2D	3D	[*K*]	Check
Basic loading combination	1.311	1.459	1.10	OK
Extreme loading combination	1.252	1.389	1.05	OK

S o u r c e: made by H.P. Tran.

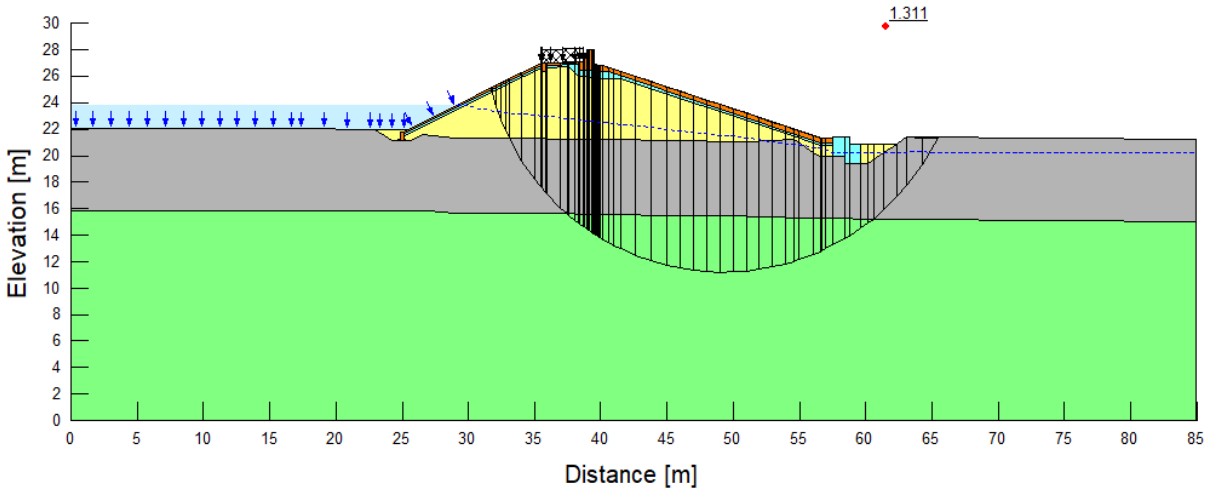
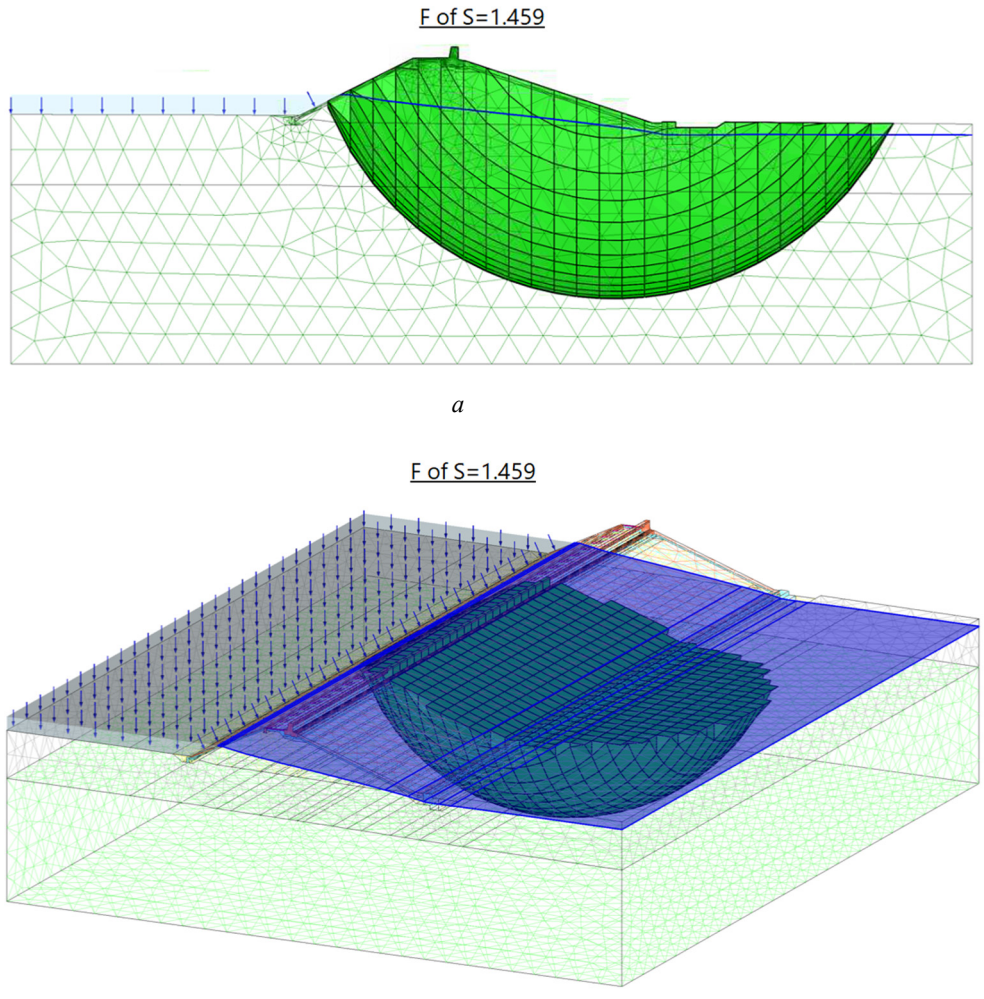


Figure 9. Stability analysis using 2D simulation for basic loading combination

S o u r c e: made by H.P. Tran.



a

b

Figure 10. Stability analysis using 3D simulation for basic loading combination:

a — Front view; *b* — 3D view

S o u r c e: made by H.P. Tran.

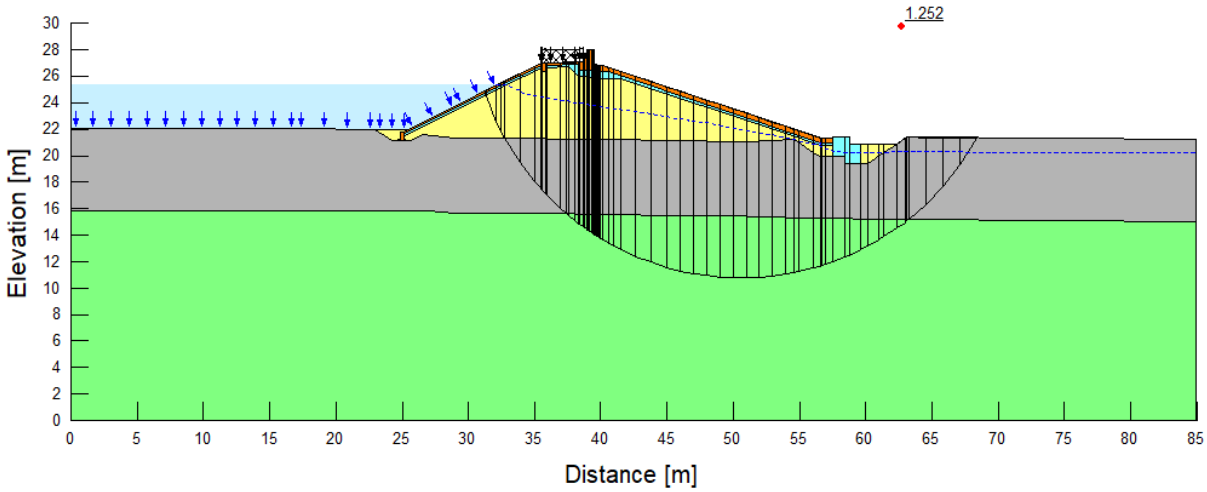
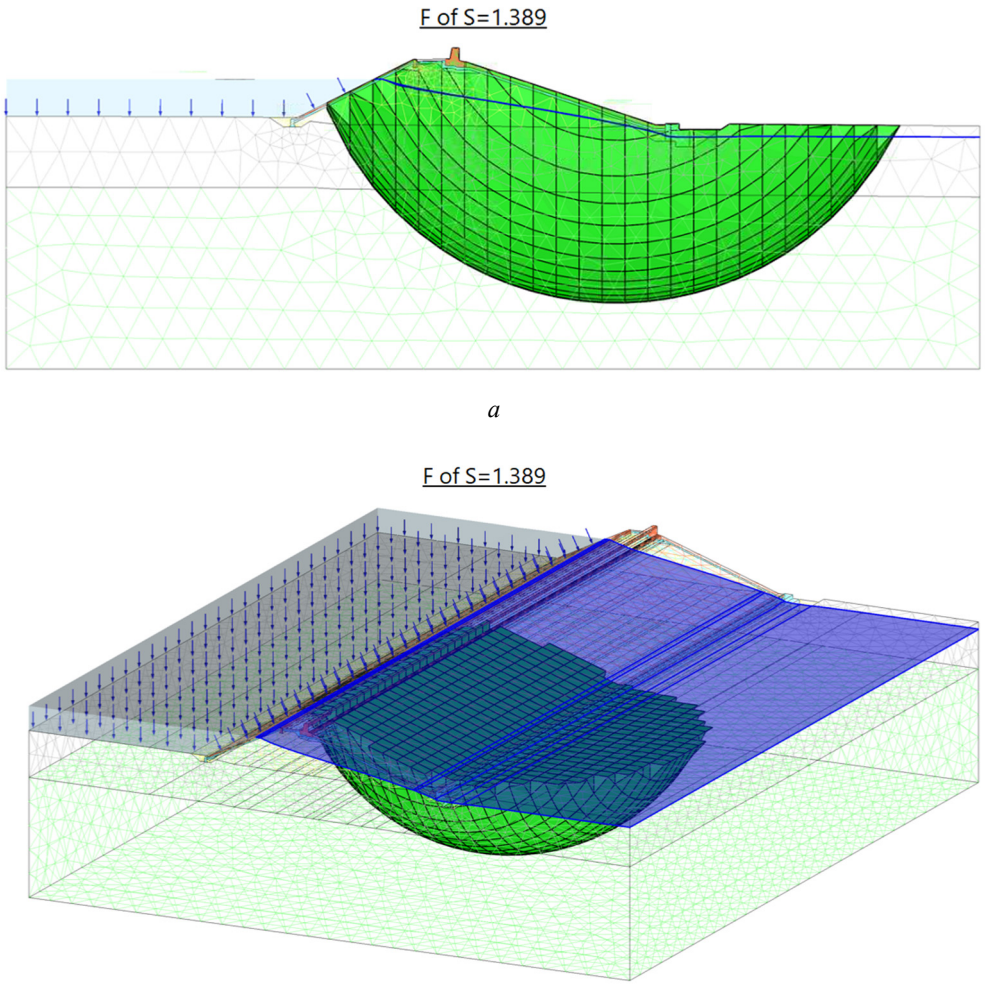


Figure 11. Stability analysis using 2D simulation for extreme loading combination

S o u r c e: made by H.P. Tran.



a

b

Figure 12. Stability analysis using 3D simulation for extreme loading combination:

a — Front view; *b* — 3D view

S o u r c e: made by H.P. Tran.

4.2. Discussion on the 3D Spatial Effects

Comparing the results between 2D and 3D simulations, it can be seen that the safety factor in the 3D simulation is higher than in the 2D simulation (approximately 11.2%). The observed 11.2% increase in the FS obtained from 2D plane-strain to 3D spatial frameworks is consistent with the established performance of LEM in cohesive soils. This variance is fundamentally driven by the mobilization of lateral shear resistance and interaction forces along the z-axis of the finite sliding mass, which are mathematically omitted in 2D models. Our findings align closely with the empirical benchmarking conducted by Shoffiana, A. et al. (2022) [24], who reported 3D/2D FS ratios ranging from 1.09 to 1.397 (a 9 to 40% difference) for embankments on soft foundations. While some studies, such as those by Bahsan and Fakhriyyanti (2018), have reported higher ratios reaching 1.44 [25], the 11.2% increase in this study is theoretically consistent with the specific geotechnical properties of clay layer 2. According to the variational limit equilibrium frameworks established by Zhang et al. (2024), the magnitude of the 3D effect is highly sensitive to soil cohesion; in purely frictional soils, the 3D effect vanishes, whereas it increases approximately linearly with the dimensionless cohesion parameter $c/(\gamma.H.tan\Phi)$ [16].

Furthermore, the study by Xue et al. (2025) utilized a 3D Finite Difference Method (FDM/FEM) and reported a relatively small safety factor increase, from 1.27 in the 2D analysis to 1.311 in the 3D analysis, for their reinforced slope [26]. This narrower margin of increase is mechanistically attributed to the fundamental differences between FEM/FDM and LEM. Finite Element and Finite Difference frameworks inherently calculate complex stress-strain redistributions, localized volumetric yielding around structural reinforcements (such as piles), and capture massive reductions in spatial displacement. These strain-based mechanics often result in more conservative scalar safety factors for reinforced structures. In contrast, the 3D Limit Equilibrium Method (LEM) utilized in this current study focuses purely on statics, directly integrating the lateral boundary resistance of the highly cohesive natural clay matrix into the force-balance equations. By recognizing these distinct mechanical functions and methodological behaviors, the 11.2% variance is validated not as a numerical inconsistency, but as a mathematically precise evaluation of spatial confinement within a pure LEM framework.

As of 2026, the majority of engineering design standards in Vietnam still require a 2D simulation to verify the stability of the coastal revetment. However, the 2D simulation seems to underestimate the stability of the protective structure system compared to reality. It implies that using 2D simulation in practice design can be safer but inefficient in terms of the economic aspect. The question of using 2D or 3D simulation in practice design should be discussed more in future research.

5. Conclusions

This paper conducted the stability analysis for the coastal revetment, which aims to protect the shoreline located in Vinh Long province, Vietnam, from erosion, using 2D and 3D simulations. The results can be stated as follows:

1. The implementation of the Long Huu — Hiep Thanh revetment geometry successfully mitigates macroscopic slope instability on highly cohesive, low-bearing-capacity foundations. Deterministic analyses confirm that the structural configuration maintains safety factors of 1.252 (2D) and 1.389 (3D) under extreme conditions featuring a 1.5-meter simulated water level increase. These values strictly satisfy the high-stress threshold requirements ($[K] \geq 1.05$) mandated by the Vietnamese national standard TCVN 9901:2023, validating the design's resilience against severe climate-induced storm surges.

2. Three-dimensional slope stability modeling, utilizing the column method framework, yields safety factors approximately 11.2% higher than equivalent 2D plane-strain simulations for the same critical slip surfaces. This numerical divergence is theoretically sound and mechanistically attributed to the mobilization of lateral shear resistance and interaction forces along the z-axis of the finite sliding mass, which are artificially omitted in 2D assumptions but become highly pronounced in the cohesive clays characterizing the Mekong Delta.

3. For linear coastal infrastructure lacking complex concave or convex topographical geometries, 2D and 3D numerical seepage models exhibit negligible variance in calculated piezometric flow lines and pore water pressure distributions. Under these specific, straight-axis longitudinal conditions, 2D steady-state seepage analyses remain quantitatively robust, indicating that computationally expensive 3D groundwater flow modeling is unwarranted unless significant lateral foundation inhomogeneities or sharp coastal curvatures are present.

4. While traditional 2D Limit Equilibrium Methods serve as a highly conservative benchmark ensuring maximum structural safety, the routine mathematical omission of lateral boundary effects systematically suppresses the perceived structural capacity of the slope. Consequently, this over-conservatism inevitably leads to the specification of over-engineered, excessive physical reinforcements. The application of 3D spatial stability analysis presents a mathematically validated pathway for cost-effective design refinement, allowing engineers to safely optimize material allocation in massive, capital-intensive coastal infrastructure projects without compromising regulatory safety thresholds.

References

1. Marchesiello P, Nguyen NM, Gratiot N, Loisel H, Anthony EJ, Dinh CS, et al. Erosion of the coastal Mekong delta: Assessing natural against man induced processes. *Cont Shelf Res*. 2019;181:72–89. https://doi.org/10.1016/j.csr.2019.05.004

2. Vietnam PwC. Snapshot on Vietnam's administrative reform 2025. 2025. https://www.pwc.com/vn/en/publications/2025/vietnam-administrative-reform.pdf

3. Ty TV, Duy DV, Phat LT, Minh HVT, Thanh NT, Uyen NTN, Downes NK. Coastal erosion dynamics and protectivee measures in the Vietnamese Mekong Delta. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2024;12(7):1094. https://doi.org/10.3390/jmse12071094 EDN: KVSBCK

4. Nordstrom KF. Living with shore protection structures: A review. *Estuar Coast Shelf Sci*. 2014;150:11–23. https://doi.org/10.1016/j.ecss.2013.11.003

5. Phan QM, Nguyen VP, Hoang TN, Vu NT. A novel approach using sustainable structures in preventing coastal erosion and forming sandy beach in Vietnam. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;869:072053. https://doi.org/10.1088/1757-899X/869/7/072053 EDN: BBOUSQ

6. Schoonees T, Gijón Mancheño A, Scheres B, Bouma TJ, Silva R, Schlurmann T, et al. Hard structures for coastal protection, towards greener designs. *Estuaries and Coasts*. 2019;42:1709–1729. https://doi.org/10.1007/s12237-019-00551-z EDN: DPRYUU

7. Angnuureng BD, Adade R, Chuku EO, Dzantor S, Brempong EK, Mattah PA. Effects of coastal protection structures in controlling erosion and livelihoods. *Heliyon*. 2023;9:e20633. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e20633 EDN: KBYIGS

8. Le Xuan T, Ba HT, Thanh VQ, Wright DP, Hasan Tanim A, Tran Anh D, et al. Evaluation of coastal protection strategies and proposing multiple lines of defense under climate change in the Mekong Delta for sustainable shoreline protection. *Ocean Coast Manag*. 2022;228:106301. https://doi.org/10.1016/j.ocecoaman.2022.106301 EDN: JIDBUM

9. Zhechev N. Structures for permanent stabilization of the sea coast. *IOP Conf Ser Mater Sci Eng*. 2023;1297:012006. https://doi.org/doi:10.1088/1757-899X/1297/1/012006 EDN: ETNUBV

10. Fernández-Hernández M, Iglesias L, Escobar J, Ortega JJ, Pérez-Montiel JI, Paredes C, et al. The influence of hard protection structures on shoreline evolution in Riohacha, Colombia. *Appl Sci*. 2025;15(14):8119. https://doi.org/10.3390/app15148119 EDN: KGVFUT

11. Thinh PN, Van Phu D. Investigation of failure of riverbank protection structure: a case study in Long An province, Vietnam. *Int J Comput Civ Struct Eng*. 2025;21:62–74. https://doi.org/10.22337/2587-9618-2025-21-2-62-74 EDN: GPAIKJ

12. Duncan JM, Wright SG, Brandon TL. *Soil Strength and Slope Stability*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.; 2014.

13. Janbu N. Slope stability computations: In: *Embankment-dam Engineering. Textbook*. Wiley Publ.; 1973;12(4):47–86. https://doi.org/10.1016/0148-9062(75)90139-4.

14. Nguyen HPT, Pham NTP, Nguyen TMS, Ngo VL, Dang VP. Seepage and stability of an earth dam under the condition of rainfall infiltration. *Struct Mech Eng Constr Buildings*. 2025;21:207–215. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-3-207-215 EDN: SUEUSV

15. Dang VP, Nguyen TMS, Le XB, Pham NT. Slope stability at the Bau Trang area using deterministic, upper and lower bounds, and reliability analyses. *Inzynieria Mineralna*. 2025;2:129–143. https://doi.org/10.29227/IM-2025-01-02-012

16. Zhang F, Jia S, Gao Y. Recent advances in stability analysis and design of 3D slopes. *Front Built Environ*. 2024;10:1410474. https://doi.org/10.3389/fbuil.2024.1410474 EDN: XNGABW

17. GEOSTUDIO. *Stability Modeling with GeoStudio*; 2022. Available from: https://studylib.net/doc/28240904/geostudio-stability-modeling-oct2022?ysclid=mr2fa9i3nq994287640&p=2 (accessed: 17.01.2026).

18. Kumar S, Rao B, Choudhary SS, Burman A, Roy LB. Comparison of 2D and 3D slope stability analysis using limit equilibrium method. In: *Proceedings of the Indian Geotechnical Conference*; 2022. https://www.igs.org.in/storage/proceedings-uploads/TH-6-44-291223025834.pdf

19. Kumar S, Kumar A, Rao B, Choudhary SS, Burman A. Analysis of 2D and 3D slope stability using the Bishop simplified method. In: *IOP Conf Ser Earth Environ Sci*. 2024;1326:012117. https://doi.org/10.1088/1755-1315/1326/1/012117 EDN: TNBNZS

20. 2GEOSTUDIO. *Slope stability analysis with GeoStudio and PLAXIS*; 2023.

21. Chen J, Zhu D, Zhu Y. A simplified method for effective calculation of 3D slope reliability. *Water (Switzerland)*. 2023;15(17):3139. https://doi.org/10.3390/w15173139 EDN: KQWFEI

22. Reid ME, Christian SB, Brien DL, Henderson ST. *Scoops3D: software to analyze 3D slope stability throughout a digital landscape; U.S. Geological Survey Techniques and Methods*. 2015. https://doi.org/10.3133/tm14A1

23. TCVN 9901: *TCVN 9901:2023 Sea dike structures - Requirements for design*. Ha Noi: [publisher]; 2023.

24. Shoffiana A, Lastiasih Y, Rendy Satrya T. Comparison of embankment reinforcement requirements with geotextile on soft soil with 2D and 3D slope stability analysis methods. *Journal of Infrastructure & Facility Asset Management*. 2022;4. https://doi.org/10.12962/jifam.v4i2.14369 EDN: TVFHGR

25. Bahsan E, Fakhriyyanti R. Comparison of 2D and 3D stability analyses for natural slope. *International Journal of Engineering and Technology*. 2018;7(4.35):662–667. https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.35.23085

26. Xue W, Qian W, Lin S, Chen Q, Li X. A case study of stability analysis and treatment measures for a river bank slope considering the action of a heaped load. *Water (Switzerland)*. 2025;17(21):3068. https://doi.org/10.3390/w17213068 EDN: DZDBYW

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 235–252

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-235-252
EDN: LFEAKE

Научная статья / Research article

Изгиб ортотропной тонкой пластинки, свободно опертой по всем сторонам

К.Ф. Шагивалеев, Д.А. Сурнин, Е.К. Сурнина✉

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., *Саратов, Российская Федерация*
✉ eksurnina@mail.ru

Поступила в редакцию: 24 марта 2026 г.
Доработана: 12 мая 2026 г.
Принята к публикации: 25 мая 2026 г.

Аннотация. Эффективность использования композиционных материалов в различных конструкциях в первую очередь зависит от совершенства расчетных методов и точности проектирования. Учитывая широкое применение пластин из композиционных материалов в инженерных конструкциях, задачи, связанные с их изгибом под действием нагрузки, решаются с использованием различных математических методов. Рассмотрена тонкая прямоугольная пластинка постоянной толщины. Материал пластинки упругий и ортотропный. В качестве исходного уравнения используется уравнение классической теории изгиба тонких анизотропных пластин, в основе которой лежит известная гипотеза недеформируемых нормалей. Поставлена задача построения аналитических решений для тонкой ортотропной пластинки, шарнирно опертой по всем сторонам и находящейся под действием статической нагрузки, приложенной на ограниченной области. Представлены два варианта нагружения: первый — действие полосовой нагрузки, второй — действие нагрузки, приложенной в пределах прямоугольной области. Для решения уравнения статического изгиба пластинки применяется операционное исчисление, связанное с преобразованием Лапласа. Приведены примеры расчетов. В качестве тестовых задач рассмотрена пластинка из углепластика под действием нагрузки, равномерно приложенной по прямоугольной области. Численные расчеты выполнены с использованием пакета компьютерной алгебры MathCAD. Проведены сравнительные исследования для проверки достоверности полученных результатов.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, композиционный материал, упругость, статическая нагрузка, дифференциальное уравнение, операционное исчисление, аналитическое решение

Вклад авторов: *Шагивалеев К.Ф.* — концепция исследования, рецензирование и выводы; *Сурнин Д.А.* — расчет, обработка результатов, написание текста; *Сурнина Е.К.* — обзор литературы, редактирование. Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: *Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К.* Изгиб ортотропной тонкой пластинки, свободно опертой по всем сторонам // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 235–252. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-235-252 EDN: LFEAKE

Шагивалеев Камиль Фатыхович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных материалов, конструкций и технологий, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 9726-5456, ORCID: 0009-0001-6962-9355; e-mail: kfshag@yandex.ru

Сурнин Дмитрий Аркадьевич, аспирант кафедры транспортного строительства, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 9654-2120, ORCID: 0009-0005-5373-8804; e-mail: dasurnin98@mail.ru

Сурнина Елена Камилевна, кандидат технических наук, доцент кафедры транспортного строительства, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 5584-2282, ORCID: 0000-0003-2500-1256; e-mail: eksurnina@mail.ru

© Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Bending of an Orthotropic Thin Plate Simply Supported on all Sides

Kamil F. Shagivaleev, Dmitry A. Surnin, Elena K. Surnina✉

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, *Saratov, Russian Federation*
✉ eksurnina@mail.ru

Received: March 24, 2026
Revised: May 12, 2026
Accepted: May 25, 2026

Abstract. The effectiveness of using composite materials in various structures primarily depends on the sophistication of the calculation methods and design accuracy. Considering the widespread use of plates made of composite materials in engineering structures, problems associated with their bending under load are solved using various mathematical methods. The present study considers a thin rectangular plate of constant thickness. The plate material is elastic and orthotropic. The underlying equation is the equation of the classical theory of bending of thin anisotropic plates, which is based on the well-known hypothesis of non-deformable normal lines. The objective is to construct analytical solutions for a thin orthotropic plate, simply supported on all sides and subjected to a static load applied over a limited area. Two loading cases are considered: the first is the action of a strip load, the second is the action of a load applied over a rectangular area. To solve the equation of static bending of the plate, operational calculus associated with the Laplace transform is used. Examples of calculations are given. A carbon fiber plate under the action of a uniformly distributed load over a rectangular area is considered as a test problem. Numerical calculations were performed using the MathCAD computer algebra software. Comparative studies for verification of the reliability of the obtained results were carried out.

Keywords: rectangular plate, composite material, elasticity, static load, differential equation, operational calculus, analytical solution

Authors' contribution: *Shagivaleev K.F.* — conceptualization, review and conclusions; *Surnin D.A.* — analysis, processing of results, writing; *Surnina E.K.* — literature review, editing. All the authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Shagivaleev KF, Surnin DA, Surnina EK. Bending of an orthotropic thin plate simply supported on all sides. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(3):235–252. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-235-252 EDN: LFEAKE

1. Введение

Современные композиционные материалы благодаря своей высокой удельной прочности и жесткости позволяют создавать легкие, прочные и долговечные конструкции, которые используют в различных отраслях промышленности. В отличие от изотропных материалов (сталь, алюминий), свойства которых одинаковы во всех направлениях, композиты часто имеют три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, то есть являются ортотропными материалами. Это позволяет максимально эффективно использовать прочность волокон в направлении главных напряжений. Ортотропная прямоугольная пластина считается классическим примером применения композиционных материалов в машиностроении, гражданском строительстве, судостроении, нефтегазовой и авиакосмической промышленности. Поэтому исследования поведения ортотропных пластин под действием разных видов нагрузок вызывают неослабевающий интерес ученых и инженеров на протяжении уже многих лет.

Kamil F. Shagivaleev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Materials, Structures and echnologies, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9726-5456, ORCID: 0009-0001-6962-9355; e-mail: kfshag@yandex.ru
Dmitry A. Surnin, Postgraduate student of the Department of Transport Construction, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9654-2120, ORCID: 0009-0005-5373-8804; e-mail: dasurnin98@mail.ru
Elena K. Surnina Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Transport Construction, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5584-2282, ORCID: 0000-0003-2500-1256; e-mail: eksurnina@mail.ru

Обзор литературы показывает, что для исследования напряженно-деформированного состояния пластин широко применяются численные методы, такие как метод конечных элементов [1; 2], метод конечных разностей [3], метод граничных элементов [4], бессеточный метод [5] и др., с помощью которых можно проанализировать изгиб пластин с различными краевыми условиями, схемами нагружения и свойствами материала. Однако, хотя вышеупомянутые численные методы удовлетворяют инженерным требованиям с приемлемой погрешностью, они дают приближенное решение, что является их главным недостатком.

Поэтому исследователи продолжают изучать аналитические и полуаналитические методы для более достоверного анализа рассматриваемой задачи и разработки точных аналитических решений для проверки численных (приближенных) решений [6–21].

Для анализа изгиба прямоугольных тонких пластин применяют классические традиционные полуобратные методы, такие как решение Навье и решение Леви [6], с помощью которых можно решать только статические задачи изгиба пластины с двумя противоположными шарнирно-опорными краями. Полуобратный метод обычно не позволяет получить единый алгоритм решения, поскольку требует подбора пробных функций для каждого случая, удовлетворяющих как разрешающему уравнению, так и граничным условиям. Для исследования пластин используют также метод суперпозиции [7; 8], метод симплектической суперпозиции [8–10], расширенный метод Канторовича [11; 12], метод конечного интегрального преобразования [13–18] и др.

Метод симплектической суперпозиции [8–10] широко используется для решения задач изгиба пластин. Однако метод включает в себя сложные математические операции, требующие квалифицированных специалистов в области математики и механики.

Метод конечного интегрального преобразования – эффективный математический метод, который успешно применяется для решения задач изгиба с различными граничными условиями. Этот метод позволяет получить аналитическое решение напрямую из дифференциального уравнения изгиба пластины. В [13] для исследования изгиба пластин с различными сложными граничными условиями авторы применяют двойное интегральное конечное синус-преобразование Фурье. В [14] изучают изгиб ортотропных пластин с комбинированными граничными условиями, используя двойные общие интегральные преобразования. Авторы работы [17] используют двумерный обобщенный метод конечного интегрального преобразования для получения новых аналитических решений изгиба ортотропных прямоугольных тонких фундаментных плит. В [18] для изучения поведения при изгибе прямоугольных тонких пластин с линейно изменяющейся толщиной, расположенных на двухпараметрическом основании, авторы предлагают обобщенный метод интегрального преобразования.

Цель исследования — с использованием метода интегрального преобразования (преобразования Лапласа) продолжить исследования изгиба ортотропных тонких прямоугольных пластин, начатые в [19].

Задачи исследования:

– получить аналитические решения изгиба ортотропных прямоугольных тонких пластин, шарнирно опертых по всему контуру и находящихся под действием полосовой равномерно распределенной нагрузки и нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольной области;

– исследовать напряженно-деформированное состояние пластины при действии нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольной области;

– проверить достоверность и точность получаемых по этому методу результатов на основе сравнения их с данными, опубликованными в научной литературе.

2. Постановка задачи и метод решения

В [19] выведены решения для ортотропной прямоугольной пластинки, свободно опертой по всем сторонам при действии нагрузки, распределенной по полосе по $q_0 \sin\dfrac{n\pi y}{b}$ (рис. 1).

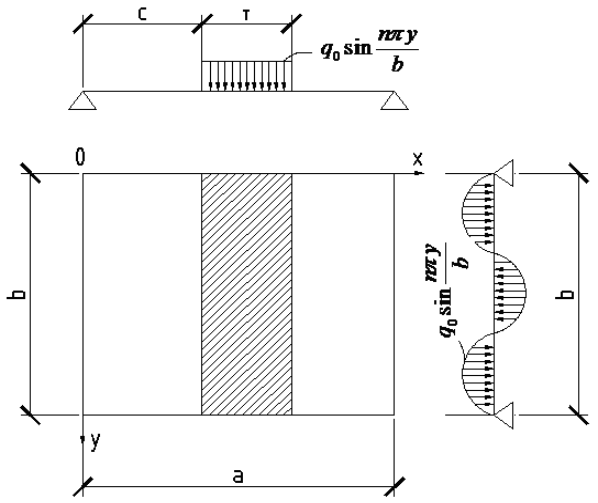


Рис. 1. Схема пластинки при действии полосовой нагрузки
И с т о ч н и к: выполнено К.Ф. Шагивалеевым и др. [19].

Figure 1. Diagram of a plate under the action of a strip load
S o u r c e: by K.F. Shagivaleev et al. [19].

При расчете пластинки использовалось дифференциальное уравнение классической теории анизотропных пластинок [20]:

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\begin{cases}0, & \text{при } 0\le x<c;\\ q_0\sin\dfrac{n\pi y}{b}, & \text{при } c\le x\le c+\tau;\\ 0, & \text{при } c+\tau<x\le a,\end{cases} \tag{1}$$

где $D_1=\dfrac{E_1 h^3}{12\left(1-\mu_1\mu_2\right)}$; $D_2=\dfrac{E_2 h^3}{12\left(1-\mu_1\mu_2\right)}$; $D_k=G\dfrac{h^3}{12}$; $D_3=D_1\mu_2+2D_k$; E_1, E_2 — модули упругости; μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона; G — модуль сдвига; h — толщина пластинки; $n=1,3,5\ldots$.

Для решения дифференциального уравнения (1) применили операционное исчисление, связанное с преобразованием Лапласа.

Решения дифференциального уравнения (1) имеют вид:

- при $r>s$:

$$\begin{aligned}w(x,y)=\frac{q_0}{2s^4\gamma D_1}\Big\{&\Big[2\gamma+P_2^2 chP_1(x-c)-P_1^2 chP_2(x-c)\Big]\eta(x-c)-\\&-\Big[2\gamma+P_2^2 chP_1(x-c-\tau)-P_1^2 chP_2(x-c-\tau)\Big]\eta(x-c-\tau)-\\&-P_2^2 k_1 shP_1 x+P_1^2 k_2 shP_2 x\Big\}\sin\lambda y,\end{aligned} \tag{2}$$

где $k_1=\dfrac{chP_1(a-c)-chP_1(a-c-\tau)}{shP_1 a}$; $k_2=\dfrac{chP_2(a-c)-chP_2(a-c-\tau)}{shP_2 a}$; $\gamma=\sqrt{r^4-s^4}$; $P_1=\sqrt{r^2+\gamma}$; $P_2=\sqrt{r^2-\gamma}$; $r^2=\dfrac{D_3}{D_1}\lambda^2$; $s^4=\dfrac{E_2}{E_1}\lambda^4$; $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$; $\eta(x-c)$ — единичная функция, которая при $x\ge c$ равна 1и при $x<c$ равна 0; $\eta(x-c-\tau)$ — единичная функция, которая при $x\ge c+\tau$ равна 1 и при $x<c+\tau$ равна 0.

Обращаем внимание на то, что единичные функции $\eta(x-c)$ и $\eta(x-c-\tau)$ приняты только для сокращения записи выражений. Они указывают, с какого значения координаты *x* появляется в выражении данное слагаемое.

- **При** $r = s$:

$$w(x,y)=\frac{q_0}{r^4 D_1}\left\{\left[1-chr(x-c)+\frac{1}{2}r(x-c)shr(x-c)\right]\eta(x-c)-\right.$$
$$-\left[1-chr(x-c-\tau)+\frac{1}{2}r(x-c-\tau)shr(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)+$$
$$\left.+k_3 shr\,x+k_4 r\,x\,chr\,x\right\}\sin\lambda y, \qquad (3)$$

где

$$k_3=\frac{1}{2\,sh^2 r\,a}\left\{(2\,shr\,a+r\,a\,chr\,a)\left[chr(a-c)-chr(a-c-\tau)\right]-\right.$$
$$\left.-r\,shr\,a\left[(a-c)shr(a-c)-(a-c-\tau)shr(a-c-\tau)\right]\right\};$$

$$k_4=-\frac{1}{2shr\,a}\left[chr(a-c)-chr(a-c-\tau)\right].$$

- **При** $r < s$:

$$w(x,y)=\frac{q_0}{2s^4\gamma_1\gamma_2 D_1}\left[\left(2\gamma_1\gamma_2-2\gamma_1\gamma_2 Y_1+r^2 Y_4\right)\eta(x-c)-\right.$$
$$-\left(2\gamma_1\gamma_2-2\gamma_1\gamma_2\overline{Y_1}+r^2\overline{Y_4}\right)\eta(x-c-\tau)+$$
$$\left.+\left(-r^2\eta_1+2\gamma_1\gamma_2\eta_2\right)X_2+\left(r^2\eta_2+2\gamma_1\gamma_2\eta_1\right)X_3\right]\sin\lambda y, \qquad (4)$$

где

$$\gamma_1=\sqrt{\frac{1}{2}\left(s^2+r^2\right)};\quad \gamma_2=\sqrt{\frac{1}{2}\left(s^2-r^2\right)};$$

$$X_1=\cos\gamma_2 x\,ch\,\gamma_1 x; \qquad Y_1=\cos\gamma_2(x-c)ch\gamma_1(x-c);$$

$$X_2=\sin\gamma_2 x\,ch\,\gamma_1 x; \qquad Y_2=\sin\gamma_2(x-c)ch\gamma_1(x-c);$$

$$X_3=\cos\gamma_2 x\,sh\gamma_1 x; \qquad Y_3=\cos\gamma_2(x-c)sh\gamma_1(x-c);$$

$$X_4=\sin\gamma_2 x\,sh\,\gamma_1 x; \qquad Y_4=\sin\gamma_2(x-c)sh\gamma_1(x-c);$$

$$\overline{Y_1}=\cos\gamma_2(x-c-\tau)ch\gamma_1(x-c-\tau); \qquad \overline{Y_3}=\cos\gamma_2(x-c-\tau)sh\gamma_1(x-c-\tau);$$

$$\overline{Y_2}=\sin\gamma_2(x-c-\tau)ch\gamma_1(x-c-\tau); \qquad \overline{Y_4}=\sin\gamma_2(x-c-\tau)sh\gamma_1(x-c-\tau);$$

$$\eta_1=\left[A_2(B_4-C_4)+A_3(B_1-C_1)\right]\left(A_2^2+A_3^2\right)^{-1};$$

$$\eta_2=\left[A_2(B_1-C_1)-A_3(B_4-C_4)\right]\left(A_2^2+A_3^2\right)^{-1};$$

$$A_1 = \cos\gamma_2 a\, ch\,\gamma_1 a\,; \qquad B_1 = \cos\gamma_2 (a-c)\, ch\,\gamma_1 (a-c);$$

$$A_2 = \sin\gamma_2 a\, ch\,\gamma_1 a\,; \qquad B_2 = \sin\gamma_2 (a-c)\, ch\,\gamma_1 (a-c);$$

$$A_3 = \cos\gamma_2 a\, sh\,\gamma_1 a\,; \qquad B_3 = \cos\gamma_2 (a-c)\, sh\,\gamma_1 (a-c);$$

$$A_4 = \sin\gamma_2 a\, sh\,\gamma_1 a\,; \qquad B_4 = \sin\gamma_2 (a-c)\, sh\,\gamma_1 (a-c);$$

$$C_1 = \cos\gamma_2 (a-c-\tau)\, ch\,\gamma_1 (a-c-\tau); \qquad C_3 = \cos\gamma_2 (a-c-\tau)\, sh\,\gamma_1 (a-c-\tau);$$

$$C_2 = \sin\gamma_2 (a-c-\tau)\, ch\,\gamma_1 (a-c-\tau); \qquad C_4 = \sin\gamma_2 (a-c-\tau)\, sh\,\gamma_1 (a-c-\tau).$$

В [19] было отмечено, что полученные решения можно использовать при исследовании изгиба ортотропной пластинки при действии нагрузки, распределенной вдоль оси y по любому закону.

В данной работе поставлена задача получения аналитических выражений для определения перемещений, усилий и моментов в прямоугольной тонкой пластинке ($a \times b$), свободно опертой по всем сторонам и находящейся под действием статической нагрузки, приложенной на ограниченной области: полосовой равномерно распределенной нагрузки (рис. 2) и нагрузки, действующей по ограниченной прямоугольной области (рис. 3). Материал пластинки упругий ортотропный.

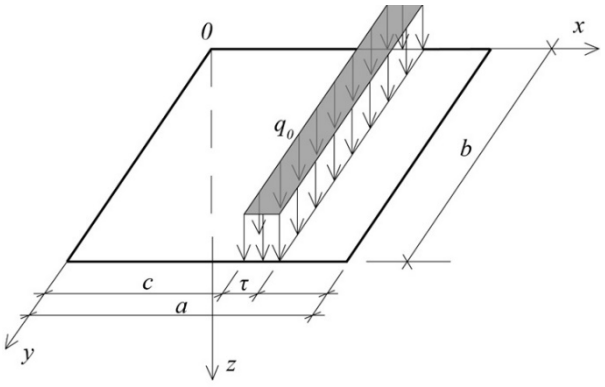


Рис. 2. Схема пластинки при действии полосовой равномерно распределенной нагрузки
И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным.

Figure 2. Diagram of a plate under the action of a uniformly distributed strip load
S o u r c e: made by D.A. Surnin.

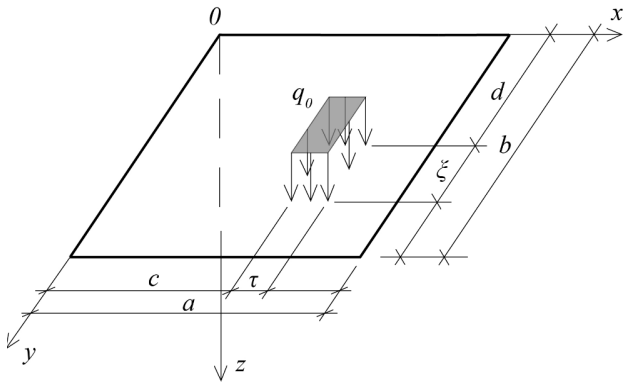


Рис. 3. Схема пластинки при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0 , равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами τ и ξ
И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным.

Figure 3. Diagram of a plate under the action of a continuous load of intensity q_0, uniformly distributed over a rectangle with sides τ and ξ
S o u r c e: made by D.A. Surnin.

В первом случае рассмотрена прямоугольная ортотропная пластинка, на которую действовала полосовая равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q_0(рис. 2).

Нагрузку разложили в тригонометрический ряд по переменной y :

$$q(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le x < c; \\ q_0 \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{1,3,5..}^{n} \dfrac{1}{n} \sin\lambda y, & \text{при } c \le x \le c+\tau; \\ 0, & \text{при } c+\tau < x \le a. \end{cases} \tag{5}$$

Используя приведенные решения (2–4), получили выражения для определения перемещения, усилий и моментов при действии рассматриваемой нагрузки (5).

■ **При** $r > s$:

$$w(x,y)=\frac{q_0}{D_1}\frac{2}{\pi}\sum_{1,3,5}^{\infty}\frac{1}{s^4\gamma n}\Big\{\Big[\,2\gamma+P_2^2\,chP_1(x-c)-P_1^2chP_2(x-c)\,\Big]\eta(x-c)-$$
$$-\Big[2\gamma+P_2^2chP_1(x-c-\tau)-P_1^2chP_2(x-c-\tau)\Big]\eta(x-c-\tau)-P_2^2k_1shP_1x+P_1^2k_2shP_2x\Big\}\sin\lambda y,$$

$$M_x=-D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=$$
$$=-q_0\frac{2}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{\gamma n}\left\{\left[-2\gamma\frac{\mu_1}{\lambda^2}+\Omega_2 ch\,P_1(x-c)-\Omega_1 ch\,P_2(x-c)\right]\eta(x-c)-\right.$$
$$\left.-\left[-2\gamma\frac{\mu_1}{\lambda^2}+\Omega_2 chP_1(x-c-\tau)-\Omega_1 chP_2(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)-\Omega_2k_1shP_1x+\Omega_1k_2shP_2x\right\}\sin\lambda y;$$

$$M_y=-D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=$$
$$=-q_0\frac{E_2}{E_1}\frac{2}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{\gamma n}\left\{\left[-2\gamma\frac{\lambda^2}{s^4}+\Omega_4 ch\,P_1(x-c)-\Omega_3 ch\,P_2(x-c)\right]\eta(x-c)-\right.$$
$$\left.-\left[-2\gamma\frac{\lambda^2}{s^4}+\Omega_4 chP_1(x-c-\tau)-\Omega_3 chP_2(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)-\Omega_4k_1shP_1x+\Omega_3k_2shP_2x\right\}\sin\lambda y;$$

$$Q_x=-\left(D_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+D_3\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)=$$
$$=-q_0\frac{2}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{s^2 n}\Big\{\Big[\,P_2sh\,P_1(x-c)+P_1sh\,P_2(x-c)\,\Big]\eta(x-c)-$$
$$-\Big[\,P_2sh\,P_1(x-c-\tau)+P_1sh\,P_2(x-c-\tau)\,\Big]\eta(x-c-\tau)-P_2k_1ch\,P_1x-P_1k_2ch\,P_2x\,\Big\}\sin\lambda y;$$

$$Q_y=-\left(D_3\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+D_2\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)=$$
$$=-q_0\frac{2}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{\lambda n}\Big\{\Big[-2+ch\,P_1(x-c)+ch\,P_2(x-c)\,\Big]\eta(x-c)-$$
$$-\Big[-2+ch\,P_1(x-c-\tau)+ch\,P_2(x-c-\tau)\,\Big]\eta(x-c-\tau)-k_1sh\,P_1x-k_2sh\,P_2x\,\Big\}\cos\lambda y;$$

$$H_{xy}=-2D_k\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=$$
$$=-q_0\frac{2}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{\gamma\lambda n}\left(\frac{r^2}{s^2}-\mu_1\frac{s^2}{\lambda^2}\right)\Big\{\Big[\,P_2\,sh\,P_1(x-c)-P_1sh\,P_2(x-c)\,\Big]\eta(x-c)-$$
$$-\Big[\,P_2\,sh\,P_1(x-c-\tau)-P_1sh\,P_2(x-c-\tau)\,\Big]\eta(x-c-\tau)-P_2k_1ch\,P_1x+P_1k_2ch\,P_2x\,\Big\}\cos\lambda y\,, \qquad (6)$$

где $\Omega_1=1-\frac{\mu_1}{\lambda^2}P_1^2$; $\Omega_2=1-\frac{\mu_1}{\lambda^2}P_2^2$; $\Omega_3=\mu_1-\frac{\lambda^2}{s^4}P_1^2$; $\Omega_4=\mu_1-\frac{\lambda^2}{s^4}P_2^2$.

■ **При** $r = s$:

$$w(x,y)=\frac{q_0}{D_1}\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5}^{\infty}\frac{1}{r^4 n}\left\{\left[1-chr(x-c)+\frac{1}{2}r(x-c)shr(x-c)\right]\eta(x-c)-\right.$$
$$\left.-\left[1-chr(x-c-\tau)+\frac{1}{2}r(x-c-\tau)shr(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)+k_3 shr\,x+k_4 r\,x\,chr\,x\right\}\sin\lambda y;$$

$$M_x=-q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{r^2 n}\left\{\left[-\mu_1\frac{r^2}{\lambda^2}\left(1-chr(x-c)\right)+\frac{1}{2}\Omega_5 r(x-c)shr(x-c)\right]\eta(x-c)-\right.$$
$$-\left[-\mu_1\frac{r^2}{\lambda^2}\left(1-chr(x-c-\tau)\right)+\frac{1}{2}\Omega_5 r(x-c-\tau)shr(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)+$$
$$\left.+\Omega_5 k_3 shrx+\left(2shrx+\Omega_5 r\,x\,chrx\right)k_4\right\}\sin\lambda y;$$

$$M_y=q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2 n}\left\{\left[1-chr(x-c)+\frac{1}{2}\Omega_5 r(x-c)sh\,r(x-c)\right]\eta(x-c)-\right.$$
$$-\left[1-ch\,r(x-c-\tau)+\frac{1}{2}\Omega_5 r(x-c-\tau)shr(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)+$$
$$\left.+\Omega_5 k_3 shrx-\left(2\mu_1\frac{r^2}{\lambda^2}shrx-\Omega_5 r\,x\,chrx\right)k_4\right\}\sin\lambda y;$$

$$Q_x=-q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{r\,n}\left\{\left[\,sh\,r(x-c)\right]\eta(x-c)-\left[\,sh\,r(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)+2k_4 ch\,rx\right\}\sin\lambda y;$$

$$Q_y=q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{\lambda\,n}\left\{\left[1-chr(x-c)\right]\eta(x-c)-\left[1-chr(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)-2k_4 shrx\right\}\cos\lambda y;$$

$$H_{xy}=-q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{r\lambda n}\Omega_5\left\{\frac{1}{2}\left[-sh\,r(x-c)+r(x-c)chr(x-c)\right]\eta(x-c)-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left[-shr(x-c-\tau)+r(x-c-\tau)chr(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau)+$$
$$\left.+k_3 chrx+\left(chrx+r\,x\,shrx\right)k_4\right\}\cos\lambda y, \qquad (7)$$

где $\Omega_5=1-\mu_1\frac{r^2}{\lambda^2}$.

■ **При** $r < s$:

$$w(x,y)=\frac{q_0}{D_1}\frac{2}{\pi}\sum_{1,3,5}^{\infty}\frac{1}{s^4\gamma_1\gamma_2 n}\left[\left(2\gamma_1\gamma_2-2\gamma_1\gamma_2 Y_1+r^2 Y_4\right)\eta(x-c)-\right.$$
$$-\left(2\gamma_1\gamma_2-2\gamma_1\gamma_2\overline{Y_1}+r^2\overline{Y_4}\right)\eta(x-c-\tau)+$$
$$\left.+\left(-r^2\eta_1+2\gamma_1\gamma_2\eta_2\right)X_2+\left(r^2\eta_2+2\gamma_1\gamma_2\eta_1\right)X_3\right]\sin\lambda y,$$

$$M_x = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 n} \left\{ \left[-\Omega_6 (1-Y_1) + \Omega_5 Y_4 \right] \eta(x-c) - \right.$$
$$\left. - \left[-\Omega_6 \left(1-\overline{Y_1}\right) + \Omega_5 \overline{Y_4} \right] \eta(x-c-\tau) - \Omega_5 (\eta_1 X_2 - \eta_2 X_3) - \Omega_6 (\eta_2 X_2 + \eta_1 X_3) \right\} \sin \lambda y;$$

$$M_y = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 n} \left\{ \left[-\Omega_7 (1-Y_1) + \Omega_8 Y_4 \right] \eta(x-c) - \right.$$
$$\left. - \left[-\Omega_7 \left(1-\overline{Y_1}\right) + \Omega_8 \overline{Y_4} \right] \eta(x-c-\tau) - \Omega_8 (\eta_1 X_2 - \eta_2 X_3) - \Omega_7 (\eta_2 X_2 + \eta_1 X_3) \right\} \sin \lambda y;$$

$$Q_x = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 n} \left\{ \left[\Omega_9 \gamma_1 Y_2 + \Omega_{10} \gamma_2 Y_3 \right] \eta(x-c) - \right.$$
$$\left. - \left[\Omega_9 \gamma_1 \overline{Y_2} + \Omega_{10} \gamma_2 \overline{Y_3} \right] \eta(x-c-\tau) + \Omega_9 (\gamma_1 \eta_2 X_1 - \gamma_1 \eta_1 X_4) - \Omega_{10} (\gamma_2 \eta_1 X_1 + \gamma_2 \eta_2 X_4) \right\} \sin \lambda y;$$

$$Q_y = q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\lambda n} \left[(1-Y_1) \eta(x-c) - \left(1-\overline{Y_1}\right) \eta(x-c-\tau) + \eta_2 X_2 + \eta_1 X_3 \right] \cos \lambda y;$$

$$H_{xy} = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 \lambda n} \left(\frac{r^2}{s^2} - \mu_1 \frac{s^2}{\lambda^2} \right) \left[(\gamma_1 Y_2 - \gamma_2 Y_3) \eta(x-c) - \right.$$
$$\left. - \left(\gamma_1 \overline{Y_2} - \gamma_2 \overline{Y_3}\right) \eta(x-c-\tau) + (\gamma_2 \eta_1 + \gamma_1 \eta_2) X_1 - (\gamma_1 \eta_1 - \gamma_2 \eta_2) X_4 \right] \cos \lambda y, \qquad (8)$$

где $\Omega_6 = \mu_1 \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\lambda^2}$; $\Omega_7 = \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\lambda^2}$; $\Omega_8 = \mu_2 - \frac{r^2}{\lambda^2}$; $\Omega_9 = 1 - \frac{r^2}{s^2}$; $\Omega_{10} = 1 + \frac{r^2}{s^2}$.

Положив во всех приведенных выражениях $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, можно получить решения для изотропной пластинки.

Во втором случае на прямоугольную ортотропную пластинку действовала сплошная нагрузка интенсивностью q_0, равномерно распределенная по прямоугольнику со сторонами τ и ξ (см. рис. 3).

Разложили нагрузку в тригонометрический ряд по переменной y:

$$q(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le x < c; \\ q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{n} \frac{1}{n} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y, & \text{при } c \le x \le c+\tau; \\ 0, & \text{при } c+\tau < x \le a, \end{cases} \qquad (9)$$

где $\xi_1 = d + \frac{\xi}{2}$.

Используя приведенные решения (2–4), получили выражения для определения перемещения, усилий и моментов при действии рассматриваемой нагрузки (9).

■ **При** $r > s$:

$$w(x,y) = \frac{q_0}{D_1} \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{s^4 \gamma n} \left\{ \left[2\gamma + P_2^2 ch P_1 (x-c) - P_1^2 ch P_2 (x-c) \right] \eta(x-c) - \right.$$
$$- \left[2\gamma + P_2^2 ch P_1 (x-c-\tau) - P_1^2 ch P_2 (x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) -$$
$$\left. - P_2^2 k_1 sh P_1 x + P_1^2 k_2 sh P_2 x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y,$$

$$M_x = -D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma n} \left\{ \left[-2\gamma \frac{\mu_1}{\lambda^2} + \Omega_2 ch P_1 (x-c) - \Omega_1 ch P_2 (x-c) \right] \eta(x-c) - \right.$$

$$- \left[-2\gamma \frac{\mu_1}{\lambda^2} + \Omega_2 ch P_1 (x-c-\tau) - \Omega_1 ch P_2 (x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) -$$

$$\left. - \Omega_2 k_1 sh P_1 x + \Omega_1 k_2 sh P_2 x \right\} \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \sin\lambda y ;$$

$$M_y = -D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -q_0 \frac{E_2}{E_1} \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma n} \left\{ \left[-2\gamma \frac{\lambda^2}{s^4} + \Omega_4 ch P_1 (x-c) - \Omega_3 ch P_2 (x-c) \right] \eta(x-c) - \right.$$

$$- \left[-2\gamma \frac{\lambda^2}{s^4} + \Omega_4 ch P_1 (x-c-\tau) - \Omega_3 ch P_2 (x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) -$$

$$\left. - \Omega_4 k_1 sh P_1 x + \Omega_3 k_2 sh P_2 x \right\} \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \sin\lambda y ;$$

$$Q_x = -\left(D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{s^2 n} \left\{ \left[P_2 sh P_1 (x-c) + P_1 sh P_2 (x-c) \right] \eta(x-c) - \right.$$

$$\left. - \left[P_2 sh P_1 (x-c-\tau) + P_1 sh P_2 (x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - P_2 k_1 ch P_1 x - P_1 k_2 ch P_2 x \right\} \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \sin\lambda y ;$$

$$Q_y = -\left(D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\lambda n} \left\{ \left[-2 + ch P_1 (x-c) + ch P_2 (x-c) \right] \eta(x-c) - \right.$$

$$= -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\lambda n} \left\{ \left[-2 + ch P_1 (x-c) + ch P_2 (x-c) \right] \eta(x-c) - \right.$$

$$\left. - \left[-2 + ch P_1 (x-c-\tau) + ch P_2 (x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - k_1 sh P_1 x - k_2 sh P_2 x \right\} \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \cos\lambda y ;$$

$$H_{xy} = -2 D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma \lambda n} \left(\frac{r^2}{s^2} - \mu_1 \frac{s^2}{\lambda^2} \right) \left\{ \left[P_2 sh P_1 (x-c) - P_1 sh P_2 (x-c) \right] \eta(x-c) - \right.$$

$$- \left[P_2 sh P_1 (x-c-\tau) - P_1 sh P_2 (x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) -$$

$$\left. - P_2 k_1 ch P_1 x + P_1 k_2 ch P_2 x \right\} \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \cos\lambda y. \qquad (10)$$

■ **При** $r = s$:

$$w(x,y) = \frac{q_0}{D_1} \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{r^4 n} \left\{ \left[1 - chr(x-c) + \frac{1}{2} r(x-c) shr(x-c) \right] \eta(x-c) - \right.$$

$$- \left[1 - chr(x-c-\tau) + \frac{1}{2} r(x-c-\tau) shr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) +$$

$$\left. + k_3 shr x + k_4 r x chr x \right\} \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \sin\lambda y ;$$

$$M_x = -q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{r^2 n}\Bigg\{\Bigg[-\mu_1\frac{r^2}{\lambda^2}\big(1-chr(x-c)\big)+\frac{1}{2}\Omega_5 r(x-c)shr(x-c)\Bigg]\eta(x-c)-$$

$$-\Bigg[-\mu_1\frac{r^2}{\lambda^2}\big(1-chr(x-c-\tau)\big)+\frac{1}{2}\Omega_5 r(x-c-\tau)shr(x-c-\tau)\Bigg]\eta(x-c-\tau)+$$

$$+\Omega_5 k_3 sh\,rx+\big(2\,sh\,rx+\Omega_5 r\,x\,ch\,rx\big)k_4\Big\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda y;$$

$$M_y = q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2 n}\Bigg\{\Bigg[1-chr(x-c)+\frac{1}{2}\Omega_5 r(x-c)sh\,r(x-c)\Bigg]\eta(x-c)-$$

$$-\Bigg[1-ch\,r(x-c-\tau)+\frac{1}{2}\Omega_5 r(x-c-\tau)shr(x-c-\tau)\Bigg]\eta(x-c-\tau)+$$

$$+\Omega_5 k_3 shrx-\left(2\mu_1\frac{r^2}{\lambda^2}shrx-\Omega_5 r\,x\,chrx\right)k_4\Big\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda y;$$

$$Q_x = -q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{r\,n}\Big\{\big[\,sh\,r(x-c)\,\big]\eta(x-c)-\big[\,sh\,r(x-c-\tau)\,\big]\eta(x-c-\tau)+$$

$$+2k_4 ch\,rx\Big\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda y;$$

$$Q_y = q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{\lambda n}\Big\{\big[\,1-ch\,r(x-c)\,\big]\eta(x-c)-\big[\,1-ch\,r(x-c-\tau)\,\big]\eta(x-c-\tau)-$$

$$-2k_4 sh\,rx\Big\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\cos\lambda y;$$

$$H_{xy} = -q_0\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{r\lambda n}\Omega_5\Bigg\{\frac{1}{2}\big[-sh\,r(x-c)+r(x-c)chr(x-c)\big]\eta(x-c)-$$

$$-\frac{1}{2}\big[-sh\,r(x-c-\tau)+r(x-c-\tau)chr(x-c-\tau)\,\big]\eta(x-c-\tau)+$$

$$+k_3 ch\,rx+\big(ch\,rx+r\,x\,sh\,rx\big)k_4\Big\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\,\lambda\xi_1\cos\lambda y. \qquad (11)$$

■ **При** $r < s$:

$$w(x,y)=\frac{q_0}{D_2}\frac{4a^4}{\pi^5}\left(\frac{b}{a}\right)^4\sum_{1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^5}\big[\,(1-Y_1+\Omega Y_4)\,\eta(x-c)-\big(1-\overline{Y_1}+\Omega\overline{Y_4}\big)\,\eta(x-c-\tau)+(-\Omega\eta_1+\eta_2)X_2+$$

$$+(\Omega\,\eta_2+\eta_1)X_3\,\big]\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda\,y;$$

$$M_x = -q_0\frac{4a^2}{\pi^3\gamma_3}\left(\frac{b}{a}\right)^2\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{n^3}\Big\{\big[-\Omega_6(1-Y_1)+\Omega_5 Y_4\,\big]\eta(x-c)-$$

$$-\Big[-\Omega_6\big(1-\overline{Y_1}\big)+\Omega_5\overline{Y_4}\Big]\eta(x-c-\tau)-\Omega_5(\eta_1 X_2-\eta_2 X_3)-\Omega_6(\eta_2 X_2+\eta_1 X_3)\Big\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda y;$$

$$M_y = -q_0 \frac{4a^2}{\pi^3 \gamma_3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left\{ \left[-\Omega_7 \left(1 - Y_1\right) + \Omega_8 Y_4 \right] \eta\left(x - c\right) - \right.$$
$$- \left[-\Omega_7 \left(1 - \overline{Y_1}\right) + \Omega_8 \overline{Y_4} \right] \eta\left(x - c - \tau\right) - \Omega_8 \left(\eta_1 X_2 - \eta_2 X_3\right) -$$
$$\left. - \Omega_7 \left(\eta_2 X_2 + \eta_1 X_3\right) \right\} \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \sin\lambda y ;$$

$$Q_x = -q_0 \frac{4a}{\pi^2 \gamma_3}\left(\frac{b}{a}\right) \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \left[\Omega_9 \zeta_1 Y_2 + \Omega_{10} \zeta_2 Y_3 \right] \eta\left(x - c\right) - \right.$$
$$- \left[\Omega_9 \zeta_1 \overline{Y_2} + \Omega_{10} \zeta_2 \overline{Y_3} \right] \eta\left(x - c - \tau\right) + \Omega_9 \zeta_1 \left(\eta_2 X_1 - \eta_1 X_4\right) -$$
$$\left. - \Omega_{10} \zeta_2 \left(\eta_1 X_1 + \eta_2 X_4\right) \right\} \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \sin\lambda y ;$$

$$Q_y = q_0 \frac{4a}{\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right) \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - Y_1\right) \eta\left(x - c\right) - \left(1 - \overline{Y_1}\right) \eta\left(x - c - \tau\right) + \eta_2 X_2 + \eta_1 X_3 \right] \times \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \cos\lambda y ;$$

$$H_{xy} = q_0 \frac{4a^2}{\pi^3 \gamma_3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\gamma_8}{\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[\left(\zeta_1 Y_2 - \zeta_2 Y_3\right) \eta\left(x - c\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\zeta_1 \overline{Y_2} - \zeta_2 \overline{Y_3}\right) \eta\left(x - c - \tau\right) + \left(\zeta_2 \eta_1 + \zeta_1 \eta_2\right) X_1 - \left(\zeta_1 \eta_1 - \zeta_2 \eta_2\right) X_4 \right] \times \sin\lambda \frac{\xi}{2} \sin\lambda\xi_1 \cos\lambda y, \qquad (12)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(s^2 + r^2\right)} = \lambda\gamma_4$; $\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(s^2 - r^2\right)} = \lambda\gamma_5$; $\gamma_3 = \sqrt{\frac{E_2}{E_1} - \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2}$; $\gamma_4 = \sqrt{\frac{1}{2}\Omega_{16}}$; $\gamma_5 = \sqrt{-\frac{1}{2}\Omega_{15}}$;

$$\Omega = \frac{r^2}{2\gamma_1\gamma_2} = \frac{\frac{D_3}{D_1}}{\gamma_3}; \quad \Omega_5 = 1 - \mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2} = 1 - \mu_1 \frac{D_3}{D_1}; \quad \Omega_6 = \mu_1 \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\lambda^2} = \mu_1\gamma_3;$$

$$\Omega_7 = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\lambda^2} = \gamma_3; \quad \Omega_8 = \mu_2 - \frac{r^2}{\lambda^2} = \mu_2 - \frac{D_3}{D_1};$$

$$\Omega_9 = 1 - \frac{r^2}{s^2} = 1 - \frac{\frac{D_3}{D_1}}{\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}; \quad \Omega_{10} = 1 + \frac{r^2}{s^2} = 1 + \frac{\frac{D_3}{D_1}}{\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}; \quad \Omega_{15} = \frac{D_3}{D_1} - \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}; \quad \Omega_{16} = \frac{D_3}{D_1} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}};$$

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} + \frac{D_3}{D_1}\right)}; \quad \zeta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} - \frac{D_3}{D_1}\right)}; \quad \frac{D_3}{D_1} = \mu_2 + 2\left(1 - \mu_1\mu_2\right)\frac{G}{E_1}.$$

При больших значениях необходимо перейти от гиперболических функций к показательным.

Решения (10–12) получены в общем виде. Они позволяют рассчитать ортотропную прямоугольную пластинку, свободно опертую по всем сторонам, при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0, равномерно распределенной по прямоугольной области при разных размерах площадки нагружения, при любом расположении площадки нагружения на поверхности пластинки, при разных размерах прямоугольной пластинки, при разных упругих характеристиках материала пластинки.

3. Результаты и обсуждение

В качестве примера для исследования напряженно-деформированного состояния пластинки рассмотрена ортотропная прямоугольная пластинка со следующими геометрическими параметрами: отношение сторон пластинки $\frac{b}{a}=1{,}5$.

Нагрузка интенсивностью q_0 равномерно распределена по прямоугольнику со сторонами $\tau=0{,}2a$ и $\xi=0{,}2a$ Центр площадки нагружения совпадал с серединой пластинки.

Материал пластинки — углепластик, имеющий следующие характеристики [24]:

$$E_1=1{,}4\cdot10^4\ \text{кН/см}^2;\ E_2=0{,}097\cdot10^4\ \text{кН/см}^2;$$
$$G=0{,}55\cdot10^3\ \text{кН/см}^2;\ \mu_1=0{,}29;\ \mu_2=0{,}02. \qquad (13)$$

Главные направления упругости совпадали с направлениями сторон пластинки.

Таблица 1. **Результаты расчета ортотропной пластинки при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0, равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами τ и ξ**

Table 1. **The results of the calculation of an orthotropic plate under the action of a continuous load with an intensity q_0 evenly distributed over a rectangle with sides τ and ξ**

x	$w\left(x,\frac{b}{2}\right)$	$M_x\left(x,\frac{b}{2}\right)$	$M_y\left(x,\frac{b}{2}\right)$	$Q_x\left(x,\frac{b}{2}\right)$	$Q_y\left(x,\frac{b}{2}\right)$	$H_{x,y}\left(x,\frac{b}{2}\right)$
0	0	0	0	0,0331649	0	0
0,1a	0,0000285	0,0027625	0,00061233	0,0349372	0	0
0,2a	0,0000550	0,0058880	0,00125763	0,0410292	0	0
0,3a	0,0000774	0,0098894	0,00195391	0,0540592	0	0
0,4a	0,0000931	0,0156032	0,00264889	0,0788915	0	0
0,5a	0,0000989	0,0190189	0,00298238	0	0	0
0,6a	0,0000931	0,0156032	0,00264889	–0,0788915	0	0
0,7a	0,0000774	0,0098894	0,00195391	–0,0540592	0	0
0,8a	0,0000550	0,0058880	0,00125763	–0,0410292	0	0
0,9a	0,0000285	0,0027625	0,00061233	–0,0349372	0	0
a	0	0	0	–0,0331649	0	0

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным / S o u r c e: made by D.A. Surnin.

Таблица 2. **Максимальные значения перемещения, моментов и перерезывающей силы в ортотропной пластинке при разном числе удерживающих членов ряда**

Table 2. **Maximum values of displacement, moments and shear force in an orthotropic plate for different numbers of holding row members**

Число членов ряда / Number of row members	$w_{\max}$	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(Q_x)_{\max}$	$Q_y\left(x,\frac{b}{2}\right)$	$H_{x,y}\left(x,\frac{b}{2}\right)$
1	0,0000682	0,0110209	0,00051772	0,025891	0	0
3	0,0000930	0,0159260	0,00159281	0,045363	0	0
5	0,0000989	0,0177488	0,00226380	0,059084	0	0
7	0,0001006	0,0186042	0,00257293	0,068530	0	0
9	0,0001013	0,0190189	0,00284236	0,074444	0	0
11	0,0001013	0,0192012	0,00294444	0,077631	0	0
13	0,0001013	0,0192605	0,00298238	0,078891	0	0

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным / S o u r c e: made by D.A. Surnin.

Результаты расчета показали (см. табл. 2), что при вычислении прогиба достаточно взять 5 членов ряда; при вычислении M_x — 6 членов ряда; при вычислении M_y и Q_x — 7 членов ряда.

Был выполнен расчет ортотропной прямоугольной пластинки с исходными параметрами по формуле, приведенной в работе [20] (с применением двойного тригонометрического ряда). Максимальный прогиб $w_{\max} = 0{,}0001119 q_0 \frac{a^4}{D_2}$. При вычислении было взято 10 членов ряда. Расхождение составило 9,5 %. Максимальное значение $M_{\max} = 0{,}0186623 q_0 a^2$. При вычислении было взято 32 члена ряда. Расхождение составило 3,1 %.

Положив во всех приведенных выражениях $E_1 = E_2 = E$ $(D_1 = D_2 = D_3 = D)$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, получили решения для изотропной пластинки $(r = s = \lambda)$.

$$w(x,y) = \frac{q_0}{D}\frac{4b^4}{\pi^5}\sum_{1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left\{\left[1 - ch\lambda(x-c) + \frac{1}{2}\lambda(x-c)sh\lambda(x-c)\right]\eta(x-c) - \right.$$
$$-\left[1 - ch\lambda(x-c-\tau) + \frac{1}{2}\lambda(x-c-\tau)sh\lambda(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau) +$$
$$\left. + \overline{k_3} sh\lambda x + \overline{k_4}\lambda x ch\lambda x\right\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda y;$$

$$M_x = -q_0\frac{4b^2}{\pi^3}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\left[-\mu\left(1 - ch\lambda(x-c)\right) + \frac{1}{2}\overline{\Omega_5}\lambda(x-c)sh\lambda(x-c)\right]\eta(x-c) - \right.$$
$$-\left[-\mu\left(1 - ch\lambda(x-c-\tau)\right) + \frac{1}{2}\overline{\Omega_5}\lambda(x-c-\tau)sh\lambda(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau) +$$
$$\left. + \overline{\Omega_5}\,\overline{k_3} sh\lambda x + \overline{k_4}\left(2 sh\lambda x + \overline{\Omega_5}\lambda x ch\lambda x\right)\right\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda y;$$

$$M_y = q_0\frac{4b^2}{\pi^3}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\left[1 - ch\lambda(x-c) + \frac{1}{2}\overline{\Omega_5}\lambda(x-c)sh\lambda(x-c)\right]\eta(x-c) - \right.$$
$$-\left[1 - ch\lambda(x-c-\tau) + \frac{1}{2}\overline{\Omega_5}\lambda(x-c-\tau)sh\lambda(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau) +$$
$$\left. + \overline{\Omega_5}\,\overline{k_3} sh\lambda x - \overline{k_4}\left(2\mu sh\lambda x - \overline{\Omega_5}\lambda x ch\lambda x\right)\right\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda y;$$

$$Q_x = -q_0\frac{4b}{\pi^2}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\left[sh\lambda(x-c)\right]\eta(x-c) - \left[sh\lambda(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau) + \right.$$
$$\left. + 2\overline{k_4} ch\lambda x\right\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\sin\lambda y;$$

$$Q_y = q_0\frac{4b}{\pi^2}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\left[1 - ch\lambda(x-c)\right]\eta(x-c) - \left[1 - ch\lambda(x-c-\tau)\right]\eta(x-c-\tau) - \right.$$
$$\left. - 2\overline{k_4} sh\lambda x\right\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\cos\lambda y;$$

$$H_{xy}=-q_0\frac{4b^2}{\pi^3}\sum_{1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{n^3}\overline{\Omega_5}\Big\{\frac{1}{2}\Big[-sh\,\lambda(x-c)+\lambda(x-c)ch\lambda(x-c)\Big]\eta(x-c)-$$

$$-\frac{1}{2}\Big[-sh\,\lambda(x-c-\tau)+\lambda(x-c-\tau)ch\,\lambda(x-c-\tau)\Big]\eta(x-c-\tau)+$$

$$+\overline{k_3}ch\,\lambda x+\overline{k_4}(ch\,\lambda x+\lambda x\,sh\,\lambda x)\Big\}\sin\lambda\frac{\xi}{2}\sin\lambda\xi_1\cos\lambda y, \qquad (14)$$

где

$$\overline{k_3}=\frac{1}{2\,sh^2\lambda a}\Big\{(2\,sh\,\lambda a+\lambda a\,ch\,\lambda a)\Big[ch\,\lambda(a-c)-ch\,\lambda(a-c-\tau)\Big]-$$

$$-\lambda\,sh\,\lambda a\Big[(a-c)sh\,\lambda(a-c)-(a-c-\tau)sh\,\lambda(a-c-\tau)\Big]\Big\};$$

$$\overline{k_4}=-\frac{1}{2sh\lambda a}\Big[ch\lambda(a-c)-ch\lambda(a-c-\tau)\Big];\quad \overline{\Omega_5}=1-\mu.$$

По полученным в данной работе выражениям был выполнен расчет изотропной прямоугольной пластинки с исходными геометрическими параметрами и $\mu=0{,}3$.

Результаты расчета представлены в табл. 3.

Таблица 3. **Максимальные значения перемещения, моментов и перерезывающей силы в изотропной пластинке при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0 равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами τ и ξ**

Table 3. **Maximum values of displacement, moments and shearing force in an isotropic plate under the action of a continuous load with an intensity q_0 uniformly distributed over a rectangle with sides τ and ξ**

Число членов ряда / Number of row members	$w_{\max}$	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(Q_x)_{\max}$	$Q_y\left(x,\frac{b}{2}\right)$	$H_{x,y}\left(x,\frac{b}{2}\right)$
1	0,0005163	0,0070022	0,0041930	0,0228609	0	0
3	0,0005614	0,0086516	0,0063553	0,0371292	0	0
5	0,0005791	0,0093023	0,0074014	0,0463640	0	0
7	0,0005815	0,0095962	0,0079490	0,0522046	0	0
9	0,0005822	0,0097304	0,0082323	0,0556913	0	0
11	0,0005825	0,0097873	0,0083651	0,0575396	0	0
13	0,0005825	0,0098057	0,0084120	0,0582680	0	0

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным / S o u r c e: made by D.A. Surnin.

Значения, приведенные в табл. 3, необходимо умножить: для w на $q_0\frac{a^4}{D_2}$; для M_x на q_0a^2; для M_y на q_0a^2; для Q_x на q_0a.

Результаты расчета табл. 3 полностью совпадают с данными, приведенными в работе [25, с. 163–164].

Анализ результатов выполненных расчетов показал, что при расчетах ортотропной прямоугольной пластинки по полученным формулам при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0, равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами τ и ξ, получается более быстрая сходимость решений и значительно уменьшается вычислительная работа по сравнению с ранее применяемыми методами.

4. Выводы

1. Получены аналитические решения изгиба ортотропных прямоугольных тонких пластин, шарнирно опертых по всему контуру и находящихся под действием полосовой нагрузки и нагрузки, действующей по прямоугольной области.

2. Исследовано напряженно-деформированное состояние пластины при действии нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольной области.

3. Представленные результаты показывают, что при расчетах ортотропной прямоугольной пластинки по полученным формулам при действии нормально приложенной нагрузки по прямоугольной области получается более быстрая сходимость решений и значительно уменьшается вычислительная работа по сравнению с ранее применяемыми методами.

4. Полученные результаты, как ожидается, послужат точным решением для проверки численных (приближенных) решений.

Список литературы

1. *Петраков И.Е., Садовский В.М., Садовский О.В.* Анализ изгиба композитных пластин с учетом различия сопротивлений растяжению и сжатию // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 5 (369). С. 172–183. https://doi.org/10.15372/PMTF20210517 EDN: XIVALM

2. *Eshmatov B.Kh., Abdikarimov R.A.* Bending of fiber-reinforced composite wing-like plates // AIP Conference Proceedings. Ensuring Seismic Safety and Seismic Stability of Buildings and Structures, Applied Problems of Mechanics. 2025. Vol. 3265. Issue 1. https://doi.org/10.1063/5.0265306

3. *Уварова Н.Б., Филатов В.В., Чубарова А.А.* Расчет ортотропных пластин с применением обобщенных уравнений метода конечных разностей // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 2. С. 48–52. EDN: VZQJKH

4. *Великанов П.Г.* Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений и систем в частных производных для изо- и ортотропных материалов. Часть II // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22. № 2. С. 15–30. https://doi.org/10.31429/vestnik-22-2-15-30 EDN: SBDBCP

5. *Markous N.A.* Boundary mesh free method with distributed sources for Kirchhoff plate bending problems Author links open overlay panel // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 94. P. 139–151. https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.015 EDN: ROHSCY

6. *Thai Y.-T., Kim S.-E.* Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates // International Journal of Mechanical Sciences. 2012. Vol. 54. No. 1. P. 269–276. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.007

7. *Bhaskar K., Sivaram A.* Untruncated infinite series superposition method for accurate flexural analysis of isotropic/orthotropic rectangular plates with arbitrary edge conditions // Composite Structures. 2008. Vol. 83. No. 1. P. 83–92. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.04.001 EDN: KULAKN

8. *Shi W., Li X., Wang C.* Bending of a rectangular plate with rotationally restrained edges under a concentrated force // Applied Mathematics and Computation. 2016. Vol. 286. P. 265–278. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.04.029 EDN: XZEWBT

9. *Yao W.A., Hu X., Xiao F.* Symplectic system based analytical solution for bending of rectangular orthotropic plates on winkler elastic foundation // Acta Mechanica Sinica. 2011. Vol. 27. No. 6. P. 929–37. https://doi.org/10.1007/s10409-011-0532-y EDN: ISEUUZ

10. *Li R., Wang B., Li P.* Hamiltonian system-based benchmark bending solutions of rectangular thin plates with a corner point-supported // International Journal of Mechanical Sciences. 2014. Vol. 85. P. 212–218. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.004

11. *Голоскоков Д.П., Матросов А.В.* Изгиб защемленной тонкой ортотропной пластины методом Канторовича // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21. Вып. 3. С. 345–360. https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.303 EDN: PLHUYS

12. *Hassan A.H.A., Kurgan N., Can N.* The correct derivation of the buckling equations of the sheardeformable FGM plates for the extended Kantorovich method // Meccanica. 2022. Vol. 57. P. 441–456. https://doi.org/10.1007/s11012-021-01441-0 EDN: EIRFCW

13. *Li R., Tian B., Zhong Y.* Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading // Meccanica. 2013. Vol. 48. No. 10. P. 2497–2510. https://doi.org/10.1007/s11012-013-9764-1 EDN: DFLXOX

14. *He Y., Duan M., Su J.* Bending of rectangular orthotropic plates with rotationally restrained and free edges: Generalized integral transform solutions // Engineering Structures. 2021. Vol. 247. Article no. 113129. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113129 EDN: LHNYSM

15. *Xu Q., Yang Z., Ullah S., Zhang J., Gao Y.* Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method // Advances in Civil Engineering. 2020. Vol. 2020. Article no. 8848879. https://doi.org/10.1155/2020/8848879 EDN: JUIHRI

16. *He Y., An C., Su J.* Bending of orthotropic rectangular thin plates with two opposite edges clamped // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2020. Vol. 234. No. 6. P. 1220–1230. https://doi.org/10.1177/0954406219889082 EDN: LAHOZS

17. *Zhang J., Zhou C., Ullah S., Zhong Y., Li R.* Two-dimensional generalized finite integral transform method for new analytic bending solutions of orthotropic rectangular thin foundation plates // Applied Mathematics Letters. 2019. Vol. 92. P. 8–14. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.12.019

18. *Fu G., Tuo Y., Su, B., Shi C., Su J.* Bending of variable thickness rectangular thin plates resting on a double-parameter foundation: integral transform solution // Engineering Computations. 2022. Vol. 39. No. 7. P. 2689–2704. https://doi.org/10.1108/EC-11-2021-0692 EDN: OVLSIK

19. *Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К.* Напряженно-деформированное состояние ортотропной прямоугольной пластинки, свободно опертой по всем сторонам // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 4. С. 307–320. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-307-320 EDN: CFFLUI

20. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М., Л. : Гостехиздат, 1947. 355 с.

21. *Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Копнов В.А., Поспелов А.Д., Синюков А.М.* Пластинки и оболочки из стеклопластиков / под ред. И.И. Гольденблата. Москва : Высшая школа, 1970. 407 с.

22. *Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Москва : Наука, 1968. 416 с.

23. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1 : Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Москва : Наука, 1969. 343 с.

24. *Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В.* Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. № 8. С. 70–77. EDN: PBJFXB

25. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Москва : Наука, 1966. 635 с.

References

1. Petrakov IE, Sadovskii VM, Sadovskaya OV. Analysis of bending of composite plates with account for the difference in resistance to tension and compression. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2021;62(5):851–860. https://doi.org/10.1134/S0021894421050175 EDN: MDADLW

2. Eshmatov BKh, Abdikarimov RA. Bending of fiber-reinforced composite wing-like plates. *AIP Conference Proceedings. Ensuring Seismic Safety and Seismic Stability of Buildings and Structures, Applied Problems of Mechanics*. 2025;3265(1). https://doi.org/10.1063/5.0265306

3. Uvarova NB, Filatov VV, Chubarova AA. The use of generalized equations of finite difference method for calculation of orthotropic plates. *Industrial and Civil Engineering*. 2018;(2):48–52. (In Russ.) EDN: VZQJKH

4. Velikanov PG. Alternative methods for obtaining fundamental solutions of differential equations and partial differential systems for isotropic and orthotropic materials. Part II. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation.* 2025:22(2):15–30. (In Russ.) https://doi.org/10.31429/vestnik-22-2-15-30 EDN: SBDBCP

5. Markous NA. Boundary mesh free method with distributed sources for Kirchhoff plate bending problems Author links open overlay panel. *Applied Mathematical Modelling*. 2021;94:139–151. https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.015 EDN: ROHSCY

6. Thai Y-T, Kim S-E. Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012;54(1):269–276. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.007

7. Bhaskar K, Sivaram A. Untruncated infinite series superposition method for accurate flexural analysis of isotropic/orthotropic rectangular plates with arbitrary edge conditions. *Composite Structures*. 2008;83(1):83–92. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.04.001 EDN: KULAKN

8. Shi W, Li X, Wang C. Bending of a rectangular plate with rotationally restrained edges under a concentrated force. *Applied Mathematics and Computation*. 2016;286:265–278. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.04.029 EDN: XZEWBT

9. Yao WA, Hu X, Xiao F. Symplectic system based analytical solution for bending of rectan-gular orthotropic plates on winkler elastic foundation. *Acta Mechanica Sinica*. 2011;27(6):929–37. https://doi.org/10.1007/s10409-011-0532-y EDN: ISEUUZ

10. Li R, Wang B, Li P. Hamiltonian system-based benchmark bending solutions of rectangular thin plates with a corner point-supported. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014;85:212–218. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.004

11. Goloskokov DP, Matrosov AV. Bending of a clamped thin orthotropic plate by the Kantorovich method. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2025;21(3):345–360. (In Russ.) https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.303 EDN: PLHUYS

12. Hassan AHA, Kurgan N, Can N. The correct derivation of the buckling equations of the sheardeformable FGM plates for the extended Kantorovich method. *Meccanica*. 2022;57:441–456. https://doi.org/10.1007/s11012-021-01441-0 EDN: EIRFCW

13. Li R, Tian B, Zhong Y. Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading. *Meccanica*. 2013;48(10):2497–2510. https://doi.org/10.1007/s11012-013-9764-1 EDN: DFLXOX

14. He Y, Duan M, Su J. Bending of rectangular orthotropic plates with rotationally restrained and free edges: Generalized integral transform solutions. *Engineering Structures.* 2021;247:113129. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113129 EDN: LHNYSM

15. Xu Q, Yang Z, Ullah S, Zhang J, Gao Y. Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method. *Advances in Civil Engineering. Adv. Civ. Eng.* 2020;2020:8848879. https://doi.org/10.1155/2020/8848879 EDN: JUIHRI

16. He Y, An C, Su J. Bending of orthotropic rectangular thin plates with two opposite edges clamped. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2020;234(6):1220–30. https://doi.org/10.1177/0954406219889082 EDN: LAHOZS

17. Zhang J, Zhou C, Ullah S, Zhong Y, Li R. Two-dimensional generalized finite integral transform method for new analytic bending solutions of orthotropic rectangular thin foundation plates. *Applied Mathematics Letters*. 2019;92:8–14. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.12.019

18. Fu G, Tuo Y, Su B, Shi C, Su J. Bending of variable thickness rectangular thin plates rest-ing on a double-parameter foundation: integral transform solution. *Engineering Computations*. 2022;39(7):2689-2704. https://doi.org/10.1108/EC-11-2021-0692 EDN: OVLSIK

19. Shagivaleev KF, Surnin DA, Surnina EK. Stress-strain state of an orthotropic rectangular plate simply supported on all sides. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(4):307–320. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-307-320 EDN: CFFLUI

20. Lekhnitsky SG. *Anisotropic plates*. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat Publ.; 1947. (In Russ.)

21. Bazhanov VL, Goldenblat II, Kopnov VA, Pospelov AD, Sinyukov AM. *Fiberglass Plates and Shells*. Edited by I.I. Goldenblat. Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1970. (In Russ.)

22. Aramanovich IG, Lunts GL, Elsgolts LE. *Functions of a complex variable. Operational calculus. Stability theory.* Moscow: Nauka Publ.; 1968. (In Russ.)

23. Bateman G, Erdelyi A. *Tables of integral transforms.* Vol. 1. Fourier, Laplace, Mellin transforms. Moscow: Nauka Publ.; 1969. (In Russ.)

24. Smerdov AA, Buyanov IA, Chudnov IV. Analysis of optimal combinations of requirements to developed CFRP for large space-rocket designs. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2012;8:70–77. (In Russ.) EDN: PBJFXB

25. Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York; 1959. ISBN 0070858209, 9780070858206

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 253–266

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-253-266
EDN: LGPSQE

Research article / Научная статья

Rational Reinforcement of Continuous Three-Span Timber Beams

Vladimir A. Repin, Vladislav A. Martinov, Marina V. Popova, Danila A. Chibrikin✉

[1]Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, *Vladimir, Russian Federation*
✉ fkpud92z7b2n@mail.ru

Received: February 4, 2026
Revised: March 15, 2026
Accepted: March 20, 2026

Abstract. Reinforced timber structures, particularly continuous beams, offer a number of advantages that contribute to their widespread use. The economic benefits of rational reinforcement of the cross-section of multi-span reinforced timber beams in terms of material consumption, as well as the lack of similar known contemporary works, determine the relevance of the research topic. The object of the study is a three-span reinforced timber beam with equal spans, loaded with a uniformly distributed load. To achieve the goal of the study, the following tasks were solved: a review of existing methods for calculating flexural reinforced timber elements and the selection of a calculation methodology for the studied structure; an analysis of the distribution of bending moments along the beam length and the development of design solutions; and the selection of a rational option, with the relative consumption of reinforcement serving as the efficiency criterion. Design solutions with symmetrical and asymmetrical reinforcement with the placement of bars along the entire length of the beam and part of its length were considered. It was found that the difference in bending moments in the middle span and the design moments at the supports allows to have no reinforcement in a part of the middle span. Furthermore, it is possible to reduce the cross-section dimensions. The most efficient reinforcement option for a three-span beam is symmetrical reinforcement, with the reinforcement placed along part of the beam's length.

Keywords: continuous timber beams, reinforced timber structures, increased strength and rigidity, rational reinforcement

Authors' contribution: *Repin V.A.* — conceptualization and methodology; *Martinov V.A.* — text draft, review and editing; *Popova M.V.* — literature review and interpretation of results; *Chibrikin D.A.* — calculations and analysis of results. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Funding. The study was conducted under the state assignment in the field of scientific activity of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic FZUN-2024-0004, state assignment of the All-Russian State University).

Vladimir A. Repin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolay Grigorievich Stoletovs, 87 Gorky St, Vladimir, 600000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8650-1055, ORCID: 0000-0001-9107-6606; e-mail: skia2000@mail.ru

Vladislav A. Martinov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolay Grigorievich Stoletovs, 87 Gorky St, Vladimir, 600000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1232-5835, ORCID: 0000-0002-6570-0265; e-mail: martinov3369@gmail.com

Marina V. Popova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolay Grigorievich Stoletovs, 87 Gorky St, Vladimir, 600000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8129-0924, ORCID: 0000-0002-2495-5819; e-mail: popovamv@bk.ru

Danila A. Chibrikin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolay Grigorievich Stoletovs, 87 Gorky St, Vladimir, 600000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code:1809-6997, ORCID: 0000-0001-9278-4559; e-mail: fkpud92z7b2n@mail.ru

© Repin V.A., Martinov V.A., Popova M.V., Chibrikin D.A., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Repin VA, Martinov VA, Popova MV, Chibrikin DA. Rational reinforcement of continuous three-span timber beams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(3):253–266. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-253-266 EDN: LGPSQE

Рациональное армирование неразрезных трехпролетных деревянных балок

В.А. Репин, В.А. Мартынов, М.В. Попова, Д.А. Чибрикин✉

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, *Владимир, Российская Федерация*

✉ fkpud92z7b2n@mail.ru

Поступила в редакцию: 4 февраля 2026 г.
Доработана: 15 марта 2026 г.
Принята к публикации: 20 марта 2026 г.

Аннотация. Армированные деревянные конструкции, в частности неразрезные балки, обладают рядом достоинств, способствующих их широкому применению. Экономический эффект от рационального армирования сечения многопролетных армированных деревянных балок с точки зрения материалоемкости, а также отсутствие аналогичных современных известных работ обуславливают актуальность тематики исследования. Объектом исследования является трехпролетная армированная деревянная балка с равными пролетами, загруженная равномерно распределенной нагрузкой. Для достижения цели исследования решены следующие задачи: обзор существующих методов расчета изгибаемых армированных деревянных элементов и выбор методики расчета исследуемой конструкции; анализ характера распределения изгибающих усилий по длине балки и формирование вариантов конструктивных решений; выбор рационального варианта, критерием эффективности при этом являлся относительный расход арматуры. Были рассмотрены конструктивные решения с симметричным и несимметричным армированием с размещением стержней по всей длине балки и на части ее длины. Установлено, что разница изгибающих усилий в среднем пролете и расчетных усилий на опорах позволяет выполнять часть среднего пролета без армирования. Кроме того, существует возможность уменьшать габариты сечения. Наиболее рациональный вариант армирования трехпролетной балки — симметричное армирование с размещением арматуры на части длины балки.

Ключевые слова: неразрезные деревянные балки, армированные деревянные конструкции, повышение прочности и жесткости, рациональное проектирование

Вклад авторов: *Репин В.А.* — концепция исследования и разработка методики расчета; *Мартынов В.А.* — подготовка, редактирование и оформление текста статьи; *Попова М.В.* — анализ литературы и интерпретация результатов; *Чибрикин Д.А.* — выполнение расчетов и анализ результатов. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема FZUN-2024-0004, госзадание ВлГУ).

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: *Репин В.А.*, *Мартынов В.А.*, *Попова М.В.*, *Чибрикин Д.А.* Рациональное армирование неразрезных трехпролетных деревянных балок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 253–266. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-253-266 EDN: LGPSQE

1. Introduction

Load-bearing timber structures are widely used in buildings due to their unique physical and mechanical properties [1; 2].

Continuous multi-span beams have more economical cross-sections compared to single-span beams [3; 4]. In most cases, the cross-section of a multi-span beam is determined by ultimate limit states, and checking such structures against serviceability limit states is not considered relevant.

Due to their substantial dimensions, continuous structures should be divided into pre-fabricated elements in accordance with transportability requirements, and then assembled on-site into a single unit [5]. The connection between the elements can be either rigid or hinged, depending on the nature of the forces acting on it [6].

In the study by Kliger R. et al. [7], when considering the history of development of strengthening methods for timber beams, it is noted that one of the first solutions in this area was the application of steel bars glued into wood at different angles by H. Granholm in 1944. Research conducted in South Korea (Jung H.J. et al.) demonstrated the high effectiveness of using high-strength fiberglass plates in the reconstruction of damaged load-bearing timber elements [8]. In the work by Italian scientists [9], it was established that steel-reinforced timber beams require special measures to ensure flexibility in bending, because irregularities in the material cause brittle fracture of the wood in tension before the steel bars can deform. The article by Polish researchers [10] presented the results of tests conducted on solid timber beams made of new and old wood, which were subjected to bending after being reinforced with steel plates and epoxy glue. Scientists from China [11] describe an experimental testing program and theoretical analysis examining the reinforcement of glued-laminated timber beams in bending using fiber-reinforced polymer and steel materials. The focus of this study was to evaluate the influence of reinforcing materials, reinforcement ratio, and arrangement on the bending behavior.

Currently, there are numerous design solutions for beam splices using various types of joints [12]. In Russia, the development of this concept has proceeded along two lines of research. The first is the work of S.B. Turkovsky on methods and technologies for gluing inclined bars, which ensured the combined resistance of the layers of glued beam elements in building structures (TsNIISK system) [13; 14]. Currently, this system is widely used in prefabricated long-span timber structures. The technology progressed further in [15] through the development of methods for increasing the shear strength of timber structures using inclined glued connections. The second line of research, implemented in the works of V.Yu. Shchuko and S.I. Roschina [16; 17], is related to the application of longitudinal reinforcement bars in wood [18; 19] by the creation of grooves in the tension and compression zones of beams, followed by gluing of hot-rolled ribbed steel rebars into them [20; 21]. In their patent, V.I. Skribo, G.M. Shutova, and E.B. Shalkevich propose a design solution for a timber beam with reinforcement of glued laminated timber, the longitudinal grain of which is oriented perpendicular to the beam axis; this approach allows for the use of low-grade timber in load-bearing structures [22]. E.N. Aleksashkin, V.V. Veselov, and V.V. Egorov examined a repair method and a design solution for a timber beam, in which the rebars are arranged along a path corresponding to the principal normal stresses in the beam [23; 24]. Due to the placement of the reinforcement deep within the body of the timber beam, this technology is used in strengthening and fabrication of glued-laminated structures. No particular difficulties arise with the large-scale assembly of such structures.

The aim of this study is to determine the rational reinforcement arrangement for a three-span timber beam, such that the rigidity and strength of the structure are increased, while the amount of reinforcement used is minimized [25; 26]. This will ensure the most efficient utilization of the strength properties of reinforcement material [27–29].

To achieve this aim, the following objectives were addressed:

– develop design options for beams based on the arrangement of reinforcement, taking into account the distribution of bending moments along the length of the structure;

– define a criterion for evaluating the effectiveness of the considered options;

– identify the most effective options based on the bending strength condition by solving the problem in a general parametric form.

The following assumptions have been made:

– all options have the same strength;

– the cross-sectional dimensions and strength properties of timber (wood species, grade) are assumed to be the same for all options;

– reinforcement break in asymmetrically reinforced structures is assumed without accounting for the length of anchorage zones, i.e., without overlap of compression and tension bars at their break point.

The use of reinforcement in timber results in savings in the base structural material, increased strength and rigidity of the beams, and improved operational reliability. The economic benefits of rational cross-sectional reinforcement in terms of material consumption, as well as the lack of similar contemporary studies on this topic, determine the relevance of this research [30; 31].

2. Methods

The research process was conducted according to standard methodology. The first stage involved a review of existing methods for calculating flexural reinforced timber members, based on which a calculation method for the structure under study was selected. The next stage involved analyzing the distribution of bending moments along the length of the beam and developing various layout options for the structure. The third stage involved selecting the rational option.

The intensive development of experimental reinforced timber beams and their application in pilot construction projects [32–34], as well as further research into their stress-strain behavior, necessitates the refinement of design methods for such structures [35; 36].

Currently, the following analysis methods are primarily used in the design of reinforced timber elements in bending [37]:

– based on transformed geometric characteristics of the cross-sections;

– taking into account the elastic compliance of the adhesive bond between the reinforcement and the wood;

– taking into account the elastic properties of the materials and the compliance of the steel-wood adhesive bond.

The first method is based on the idealized diagram of elastic-plastic behavior of wood, assuming the hypothesis of plane sections and that the steel-wood adhesive bond ensures joint action ($\varepsilon_w = \varepsilon_r$) throughout the entire service life of the structure, up to failure.

The second method is a modification of the transformed-section analysis method. The following basic design assumptions were adopted in developing the method:

– the wood subjected to tensile and compressive forces along the grain is treated as an isotropic material;

– anisotropy and flexural rigidity of the reinforcement are not taken into account;

– the materials of the composite structure operate within elastic limit, assuming the plane-sections hypothesis;

– the compliance of the adhesive bond between the reinforcement and the wood is expressed by the difference in displacements B_r and B_w.

The third method is based on the following premises and assumptions:

– all materials in the composite structure, including the adhesive, obey Hooke's law;

– Poisson's ratio of the rebars is zero;

– flexural rigidity of the rebars is not taken into account;

– the rebars are placed strictly along the axes of the channels;

– in the base material (wood), the law of plane sections is not violated, with the exception of the zones surrounding the rebars;

– shearing angles γ_a for the adhesive layer and γ_b for the base material in the zones adjacent to the rebars in the section under consideration are assumed to be constant;

– the zones of warping of the wood cylinders must not intersect.

A common shortcoming of the considered analysis methods is the assumption that the influence of shear forces on the strength and deformability of timber structures is not taken into account. An attempt was

made to account for the combined effect of normal and shear stresses on the stress state of structures; however, the accepted theory did not account for the strength anisotropy of glued laminated timber, which affects the stress state of flexural timber elements [38; 39].

The object of this study is a three-span reinforced timber beam with equal spans, subjected to a uniformly distributed load. The model of the structure is shown in Fig. 1. The cross-section is assumed to be rectangular. The reinforcement is to be provided by steel bars of grades A400 and A500.

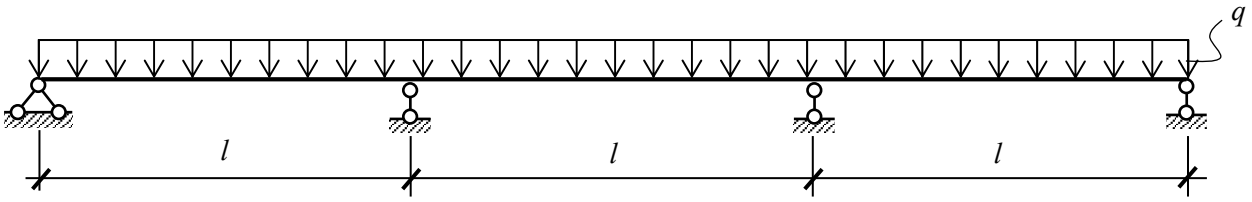


Figure 1. Model of the studied structure

S o u r c e: made by V.A. Repin.

To calculate the three-span continuous beam under study, the analysis method based on transformed geometric characteristics will be applied. The transformation factor for the reinforcement material relative to the base material is defined as the ratio of the moduli of elasticity of the reinforcement (E_r) to that of the wood (E_w). It is a constant value:

$$n = \frac{E_r}{E_w} = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ MPa}}{10^5 \text{ MPa}} = 20. \quad (1)$$

Thus, the geometric characteristics of the transformed cross-section will take the form:

- area:

$$F_{tr} = F_w + nF_r; \quad (2)$$

- moment of inertia:

$$I_{tr} = I_w^2 + nI_r; \quad (3)$$

- first moment of area:

$$S_{tr} = S_w + nS_r. \quad (4)$$

Expression (2) can be written as follows:

$$F_{tr} = F_w(1 + nF_r / F_w) = F_w(1 + n\mu), \quad (5)$$

where $\mu = \frac{F_r}{F_w}$ is the reinforcement ratio; $F_w = bh$ is the unreinforced cross-section area of the element;

$F_r = n_r \cdot \pi d_r^2/4$ is the cross-sectional area of the reinforcement (n_r is the number of rebars; d_r is the rebar diameter); I_w is the moment of inertia of the unreinforced cross-section; I_r is the moment of inertia of the reinforcement; S_w is the first moment of area of the unreinforced cross-section; S_r is the first moment of area of the reinforcement.

Reinforcement of timber members is typically placed in the tensile zone of the wood fibers. This approach is commonly referred to as asymmetric reinforcement (Figure 2, *a*). However, symmetric reinforcement of the cross-section (Figure 2, *b*), in which reinforcement is also placed in the compression zone, is equally effective.

The geometric characteristics of an asymmetrically reinforced cross-section (see Figure 2, *a*) are determined taking into account the fact that the neutral axis does not coincide with the axis of symmetry of the cross-section, and the position of the cross-sectional center of gravity relative to an arbitrary axis *z'* is calculated using the following formula:

$$y_{\text{c.g.}} = \frac{F_w y_w + nF_r y_r}{F_w + nF_r} = \frac{bh\left(-\frac{h}{2}\right) + nF_r\left(-h_o\right)}{bh\left(1+n\mu\right)} = -\frac{h+2n\mu h_{\text{o}}}{2(1+n\mu)}. \tag{6}$$

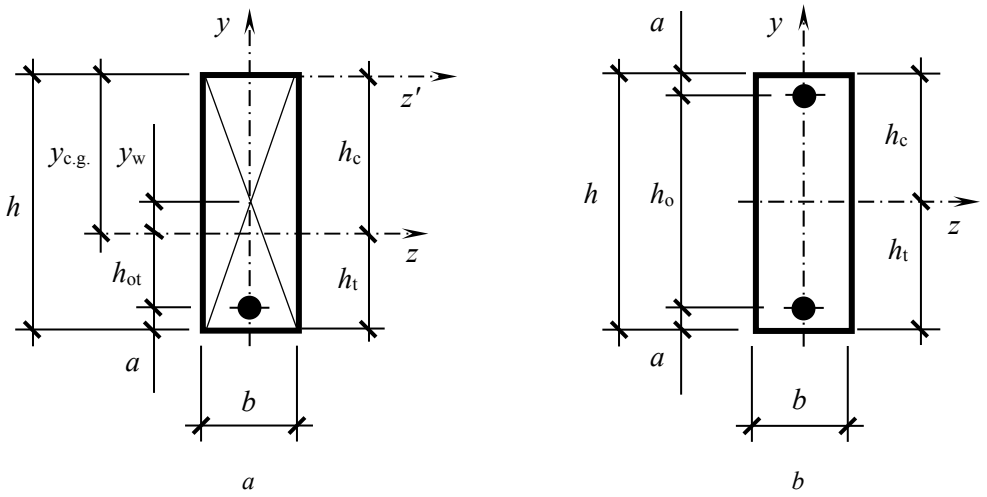


Figure 2. Cross-sections of reinforced timber beams:
a — with asymmetric reinforcement; *b* — with symmetric reinforcement
S o u r c e: made by V.A. Repin.

From this, the dimensions of the compression and tension zones of the section, h_c and h_t respectively, can be determined:

$$h_c = \left|y_{\text{c.g.}}\right| = \frac{h+2n\mu h_{\text{o}}}{2(1+n\mu)}; \quad h_p = h - h_c = \frac{h+2n\mu a}{2(1+n\mu)}. \tag{7}$$

The coordinates of the centers of gravity of the unreinforced cross-section and the cross-section of the reinforcement:

$$y_w = \frac{h}{2} - h_p = \frac{n\mu(h_{\text{o}}-a)}{2(1+n\mu)}; \quad h_{ot} = h_p - a = \frac{h_{\text{o}}-a}{2(1+n\mu)}. \tag{8}$$

The transformed moment of inertia of the asymmetrically reinforced cross-section relative to the neutral axis:

$$I_{tr}^n = I_w^{'} + F_w y_{\text{w}}^2 + nF_r h_{\text{ot}}^2 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{n\mu(h_{\text{o}}-a)}{2(1+n\mu)}\right)^2 + nF_r\left(\frac{h_{\text{o}}-a}{2(1+n\mu)}\right) = \frac{bh^3}{12}\left[1+\frac{3n\mu}{1+n\mu}\left(\frac{2h_{\text{o}}}{h}-1\right)^2\right], \tag{9}$$

where I_{tr} is the transformed moment of inertia of the asymmetrically reinforced cross-section relative to the neutral axis.

The transformed section modulus of the asymmetrically reinforced cross-section relative to the neutral axis:

$$W_{tr} = I_{tr} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}\left[1 + \frac{3n\mu}{1+n\mu}\left(\frac{2h_o}{h} - 1\right)^2\right]. \tag{10}$$

The transformed first moment of area of the sheared part of the asymmetrically reinforced cross-section relative to the neutral axis at $h_{trunc} = h_c$: where h_{trunc} is the height of the truncated part of the section from the top edge of the element to the neutral axis.

$$S_{tr}^{n} = \frac{bh_c^2}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h + 2n\mu h_o}{2(1+n\mu)}\right)^2 = \frac{bh^2}{8}\left(\frac{1 + 2n\mu(h_o / h)}{1+n\mu}\right)^2; \tag{11}$$

$$S_{tr}^{r} = nF_r h_{ot} = \frac{(h_o - a)nF_r}{2(1+n\mu)} = \frac{bh^2}{8}\left(\frac{4n\mu}{(1+n\mu)}\left(\frac{2h_o}{h} - 1\right)\right), \tag{12}$$

where S_{tr}^{n} is the transformed first moment of area of the sheared part of the asymmetrically reinforced cross-section relative to the neutral axis; S_{tr}^{r} is the transformed first moment of area of the reinforcement of the asymmetrically reinforced cross-section relative to the neutral axis.

The symmetrically reinforced cross-section (see Fig. 2, *b*) is characterized by the fact that its center of gravity coincides with the center of gravity of the unreinforced cross-section. In this case, its geometric characteristics are as follows:

- transformed moment of inertia:

$$I_{tr} = I_w^{'} + nF_r\left(\frac{h_o}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}\left[1 + 3n\mu\left(\frac{h_o}{h}\right)^2\right]; \tag{13}$$

- transformed section modulus:

$$W_{tr} = I_{tr} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}\left[1 + 3n\mu\left(\frac{h_o}{h}\right)^2\right]; \tag{14}$$

- transformed first moment of area of the sheared part of the cross-section:

$$S_{tr} = S_w^{'} + nF_r\frac{h_o}{4} = \frac{bh^2}{8}\left(1 + 2n\mu\frac{h_o}{h}\right). \tag{15}$$

- transformed first moment of area of the reinforcement:

$$S_{tr}^{r} = nF_r\frac{h_o}{4} = \frac{bh^2}{8}\left(2n\mu\frac{h_o}{h}\right), \tag{16}$$

where n is the transformation coefficient of the reinforcement material to the base material (1); h_o is the distance between the centers of the cross-sections of the rebars in the tension and compression zones; b is the width of the cross-section; μ is the reinforcement ratio; $I_w = \frac{bh^3}{12}$ is the moment of inertia of the unreinforced section; $S_w = \frac{bh^2}{8}$ is the first moment of area of the unreinforced section; F_r is the total cross-sectional area of the reinforcement.

For timber structural members, including beams, the reinforcement ratio is generally determined as follows:

– for asymmetric reinforcement μ = 0.012…0.025 (1.2…2.5 %);

– for symmetric reinforcement μ = 0.012…0.035 (1.2…3.5 %).

The expressions in formulas (9) and (13) enclosed in square brackets can be denoted as:

$$\beta_{\text{bear}} = 1 + \frac{3n\mu}{1+n\mu}\left(\frac{2h_{\text{o}}}{h} - 1\right)^2; \tag{17}$$

$$\beta_{\text{sym}} = 1 + 3n\mu\left(\frac{h_{\text{o}}}{h}\right)^2. \tag{18}$$

Expressions (17) and (18) reflect the increase in rigidity and strength of the flexural element, which is achieved by the reinforcement.

In that case, the geometric characteristics of the cross-section of the reinforced timber structure can be expressed as follows:

$$I_{tr} = \beta \cdot I_w;\ W_{tr} = \beta \cdot W_w, \tag{19}$$

where I_{tr}, I_w are the moments of inertia of the reinforced and unreinforced sections, respectively;

W_{tr}, W_w are the section moduli of the reinforced and unreinforced sections, respectively.

Based on the results of the calculations, the increase in the beam rigidity due to reinforcement will be approximately:

– for asymmetric reinforcement — by a factor of 1.3…1.9;

– for symmetric reinforcement — by a factor of 1.5…2.8.

It should be noted that, in some cases, the rigidity and strength of the reinforced beam can be up to twice that of the unreinforced beam; this holds true for reinforcement ratio μ = 2%. This fact determines the rationality of reinforcing timber structures.

Since the reinforcing bars essentially serve as the primary load-bearing fibers located in the most stressed areas of the cross-section, it is possible to use 3rd-grade timber in the construction of reinforced timber structures instead of the more expensive 1st- and 2nd-grade timber without compromising structural performance.

The analysis of such structures subjected to normal stresses in the reinforcement and wood, and shear stresses in the wood and adhesive joint, as well as the check for deformability, is performed in accordance with the requirements of SP 64.13330.2017[1] using the formulas of strength of materials.

The bending moment diagram shown in Fig. 3, *a*, demonstrates that:

– the maximum moments are observed at the intermediate supports ($M_{\text{sup}} = 0.1ql^2$);

– in the end spans, the moments are close in magnitude to the support moments ($M_{\text{end}} = 0.08ql^2$);

– in the middle span, the moment is one-fourth that of the end spans ($M_{\text{mid}} = 0.025ql^2$).

Based on this, it is necessary to identify characteristic regions within which the moments act in the same direction, which allows to assign a specific type of reinforcement to each individual region.

The boundaries of these regions are defined by points where the moments are zero. It is reasonable to design reinforcement breaks and longitudinal joints of pre-fabricated structural elements at these specific points.

The minimum bending moment (four times lower than the design value) occurs in region III, which allows to consider a scenario without reinforcement in that region.

[1] SP 64.13330.2017. *Timber structures. Revised edition of SNiP II-25-80.* Scientific Research Center “Stroitelstvo” — V.A. Kucherenko Central Scientific Research Institute for Building Structures. Moscow, 2017.

In this regard, the following beam reinforcement options have been developed:

– symmetric along the entire length (see Figure 3, *b*);

– symmetric along part of the length (see Figure 3, *c*);

– asymmetric along the entire length in tension zones (see Figure 3, *d*);

– asymmetric along part of the length (see Figure 3, *e*).

The criterion for effectiveness when selecting the most efficient option is the relative consumption of reinforcement:

$$\mu_L = \mu \cdot L_{\text{reinf}}/L_{\text{beam}}, \tag{20}$$

where $\mu = \frac{F_a}{F_o}$ is the reinforcement ratio; L_{reinf} is the total length of regions with reinforcement (I, II, IV and V); $L_{\text{beam}} = 3l$ is the total beam length.

The shape and dimensions of the cross-section, as well as load q, are specified to be the same for all options.

In the first step, the required reinforcement ratio is determined based on the bending strength condition. Parameter β, which characterizes the increase in rigidity and strength, is expressed as:

$$\beta \geq \frac{M_{\max}}{W_w R_b}. \tag{21}$$

Next, by substituting expressions (17) and (18) into expression (21), the formulas for the required reinforcement ratios for asymmetrically and symmetrically reinforced cross-sections, at which they will have equal strength and rigidity, are obtained:

$$\mu_{\text{req}}^{\text{bear}} \geq \frac{\frac{M_{\max}}{W_w R_b} - 1}{3n\left(\frac{2h_{\text{o}}}{h} - 1\right)^2 - n\left(\frac{M_{\max}}{W_w R_b} - 1\right)}; \tag{22}$$

$$\mu_{\text{req}}^{\text{sym}} \geq \frac{\frac{M_{\max}}{W_w R_b} - 1}{3n\left(\frac{h_{\text{o}}}{h}\right)^2}, \tag{23}$$

where $M_{\max}$ is the design value of the bending moment (in this case $M_{\max} = M_{\text{sup}} = 0.1ql^2$); $W_w = \frac{bh^2}{6}$ is the section modulus of the unreinforced section; R_{b} is the design bending strength of timber; n is the transformation coefficient (1).

Expressions (22) and (23) can be written in more compact form:

$$\mu_{\text{req}}^{\text{bear}} \geq \frac{\psi}{n\left(3\Delta h_{\text{bear}}^2 - \psi\right)}; \tag{24}$$

$$\mu_{\text{req}}^{\text{sym}} \geq \frac{\psi}{3n\Delta h_{\text{sym}}^2}, \tag{25}$$

where: $\psi = \frac{M_{\max}}{W_w R_b} - 1$; $\Delta h_{\text{bear}} = \frac{2h_o^{\text{bear}}}{h} - 1$; $\Delta h_{\text{sym}} = \frac{h_o^{\text{sym}}}{h}$; $h_{\text{o}}^{\text{bear}} = h - a$; $h_{\text{o}}^{\text{sym}} = h - 2a$; $a = d_{\text{a}}/2 - 25\,\text{mm}$.

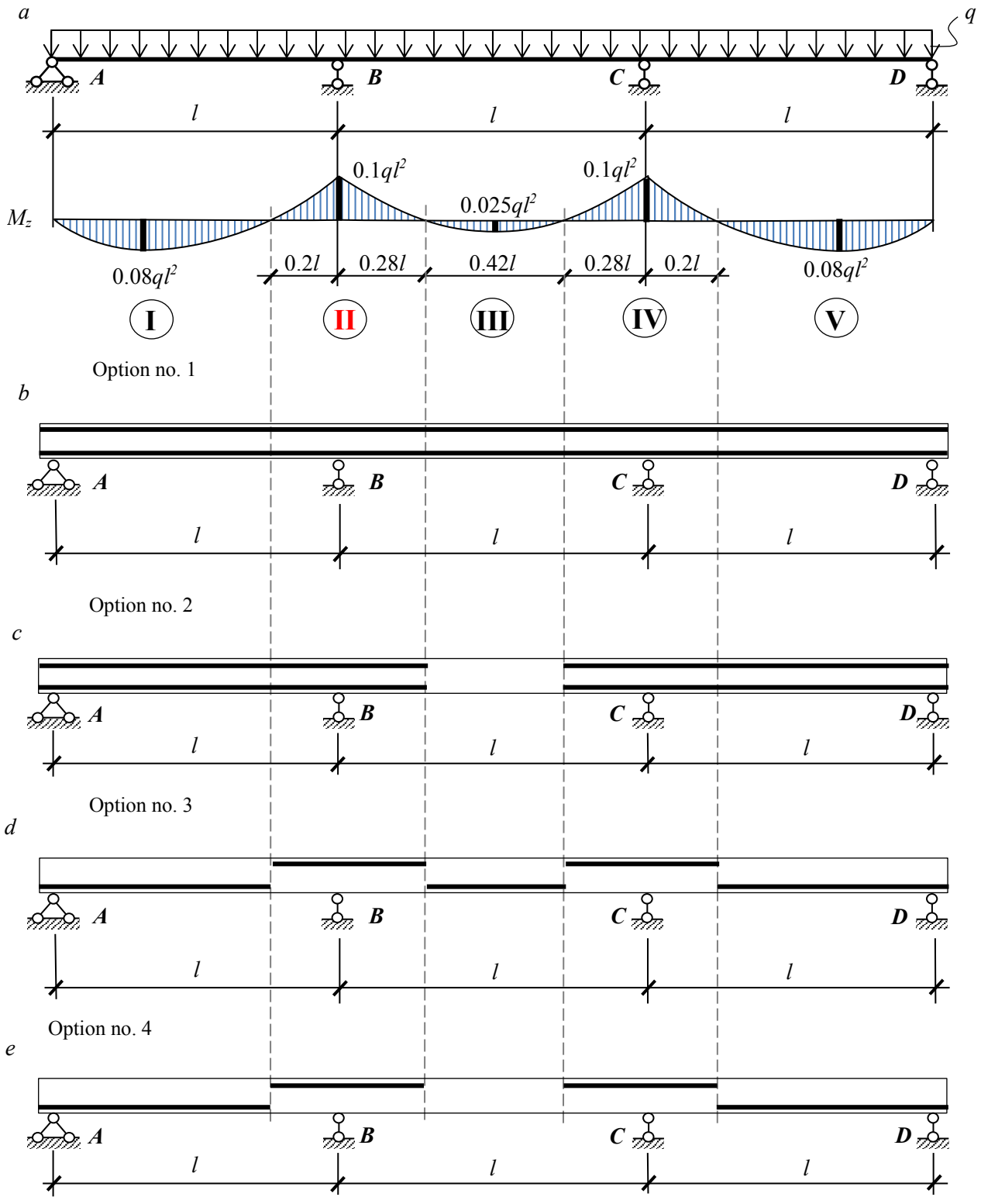


Figure 3. Calculated model and reinforcement options for a continuous three-span timber beam:

a — calculated model; *b* — symmetrical reinforcement of the section along the entire length;
c — symmetrical reinforcement of the section along part of the length; *d* — asymmetrical reinforcement of the section along the entire length;
e — asymmetrical reinforcement of the section along part of the length

S o u r c e: made by V.A. Repin.

3. Results and Discussion

The expression for the relative reinforcement consumption for the options with asymmetric and symmetric reinforcement along part of the length (options No. 2 and No. 4) takes the form:

$$\mu_L^{\text{bear}} = \mu_{\text{req}}^{\text{bear}} L_{\text{reinf}} / L_{\text{beam}};\ \ \mu_L^{\text{sym}} = \mu_{\text{req}}^{\text{sym}} L_{\text{reinf}} / L_{\text{beam}}. \tag{26}$$

For cases with reinforcement along the entire length of the beam (options No. 1 and No. 3), the value of μ_L will be numerically equal to the corresponding reinforcement ratios:

$$\mu_L^{\text{bear}} = \mu_{\text{req}}^{\text{bear}}; \mu_L^{\text{sym}} = \mu_{\text{req}}^{\text{sym}}\ \ \mu_L^{\text{сим}} = \mu_{\text{тр}}^{\text{сим}}. \tag{27}$$

It follows that the options with partial-length reinforcement (No. 2 and No. 4) are more economical, since in these cases the ratio $L_{\text{reinf}}/L_{\text{beam}}$ is less than one; more precisely: $L_{\text{reinf}}/L_{\text{beam}} = (3l - 0.42l)/(3l) = 0.86$. That is, the effect of this option is approximately 14%.

If necessary, the cross-sectional dimensions in the middle span can be reduced, as the safety factor is automatically at least 25% ($M_{\text{sup}} > M_{\text{mid}}$ by a factor of 4, and $\beta < 3$). This further enhances the efficiency of this design solution.

Since the total length of the reinforced regions L_{reinf} is the same in options No. 2 and No. 4, their effectiveness will be determined by the value of the reinforcement ratio. This fact can be established from the relationship between these values:

$$\frac{\mu_{\text{req}}^{\text{sym}}}{\mu_{\text{req}}^{\text{bear}}} = \frac{\psi n\left(3\Delta h_{\text{bear}}^2 - \psi\right)}{3n\Delta h_{\text{sym}}^2 \psi} = \frac{3\Delta h_{\text{bear}}^2 - \psi}{3\Delta h_{\text{sym}}^2}. \tag{28}$$

The expressions for Δh_{bear} and Δh_{sym} can be written as:

$$\Delta h_{\text{bear}} = \frac{2h_o^{\text{bear}}}{h} - 1 = \frac{2(h-a)}{h} - 1 = 1 - \frac{2a}{h}; \tag{29}$$

$$\Delta h_{\text{sym}} = \frac{h_o^{\text{sym}}}{h} = \frac{h-2a}{h} = 1 - \frac{2a}{h}. \tag{30}$$

It follows from expressions (29) and (30) that the values of Δh_{bear} and Δh_{sym} are equal, and a single parameter Δh can be used in their place in expressions (24) and (25):

$$\Delta h = 1 - \frac{2a}{h}. \tag{31}$$

Then, expression (28) will take the following form:

$$\frac{\mu_{\text{req}}^{\text{sym}}}{\mu_{\text{req}}^{\text{bear}}} = \frac{3\Delta h^2 - \psi}{3\Delta h^2} = 1 - \frac{\psi}{3\Delta h^2}. \tag{32}$$

By analyzing expression (32), it is clear that the result of the calculation must be non-negative; otherwise, it would be meaningless. A positive result, however, will be less than one or will approach zero:

$$0 < \frac{\mu_{\text{req}}^{\text{sym}}}{\mu_{\text{req}}^{\text{bear}}} < 1. \tag{33}$$

This means that, in any case, the value of coefficient μ_{req}^{sym} will not exceed the value of μ_{req}^{bear}, i.e., the option with symmetric reinforcement will require either less rebar than the asymmetric option or virtually the same amount:

$$\mu_L^{sym} \le \mu_L^{bear}. \quad (34)$$

It follows that the most rational option is No. 2 (see Figure 3, *c*), which features symmetric reinforcement of the cross-section — with reinforcement placed along part of the beam length, or more precisely, along its entire length except for region III. The exact value of the efficiency factor is determined by calculation, as it depends on a number of variables. However, this index does not account for the influence of shear stresses on the load-bearing capacity of the beams; therefore, when designing three-span reinforced timber beams, it is necessary to check the support sections against shear forces using formulas (21).

4. Conclusion

1. Theoretical study of continuous three-span reinforced timber beams, focusing on identifying the most rational reinforcement arrangement, was conducted. The criterion for efficiency was the relative reinforcement consumption, defined as the product of the reinforcement ratio of the section and the ratio of the total length of the reinforced regions of the beam to the total beam length: $\mu_L = \mu L_{reinf} / L_{beam}$.

2. It has been determined that the difference between the bending moments in the middle span and the design moments at the supports allows part of the middle span to be constructed without reinforcement. In addition, it is possible to reduce the cross-sectional dimensions, since the minimum safety factor for the unreinforced regions is more than 25% — at the maximum reinforcement ratio.

3. The savings in steel when using partial-length reinforcement of the beams (i.e., with an unreinforced region in the middle span) amount to approximately 14% compared to structures with reinforcement along their entire length.

4. The most rational way to reinforce a three-span beam is to use symmetric reinforcement, placing the rebar along a part of the beam length.

5. The results of the study showed that the grade and species of timber do not affect the performance of the design options, as performance depends solely on the reinforcement ratio of symmetric and asymmetric cross-sections. However, more accurate performance indices for the best option can be estimated by analysing the structures using only specific parameter values.

6. A future direction for this line of research is the study of three-span reinforced timber beams subjected to various loading schemes that may occur over the service life of structure.

References

1. Bukauskas A, Mayencourt P, Shepherd P. et al. Whole timber construction: A state of the art review. *Construction and Building Materials*. 2019;213:748–769. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.03.043

2. Chen C, Kuang Y, Zhu S. et al. Structure — property — function relationships of natural and engineered wood. *Nature Reviews Materials.* 2020;5:642–666. https://doi.org/10.1038/s41578-020-0195-z EDN: FHZYBZ

3. Donaldson LA. Wood cell wall ultrastructure: the key to understanding wood properties and behaviour. *IAWA Journal.* 2019;40(4):645–672. https://doi.org/10.1163/22941932-40190258

4. Walsh-Korb Z, Avérous L. Recent developments in the conservation of materials properties of historical wood. *Progress in Materials Science.* 2019;102:167–221. https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2018.12.001 EDN: WXTETJ

5. Tanasa F, Teacă C-A, Zănoagă M. Protective coatings for wood. In: Handbook of Modern Coating Technologies. Elsevier; 2021:175–267. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63237-1.00006-1

6. Bokarev SA, Murovannyi IYu. Utility model patent RU 176996 U1. Glued beam. (In Russ.) EDN: QWKJZT

7. Kliger R, Haghani R, Brunner M, Harte AM, Schober K-U. Wood-based beams strengthened with FRP laminates: improved performance with pre-stressed systems. *European Journal of Wood and Wood Products.* 2016;74(3):319–330. https://doi.org/10.1007/s00107-015-0970-5 EDN: KNCKNE

8. Jung HJ, Song YJ, Lee IH, Hong SI. Moment resistance performance evaluation of larch glulam joints using GFRP-Reinforced laminated plate and GFRP Rod. *Journal of the Korean Wood Science and Technology.* 2016;44(1):40–47. https://doi.org/10.5658/WOOD.2016.44.1.40

9. Tomasi R, Parisi MA, Piazza M. Ductile design of glued-laminated timber beams. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*. 2009;14(3):113–122. https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0680(2009)14:3(113)

10. Jasieńko J, Nowak TP. Solid timber beams strengthened with steel plates – Experimental studies. *Construction and Building Materials*. 2014;63:81–88. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.04.020

11. Yang H, Liu W, Lu W, Zhu S, Geng Q. Flexural behavior of FRP and steel reinforced glulam beams: Experimental and theoretical evaluation. *Construction and Building Materials.* 2016;106:550–563. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.12.135

12. Nowak T, Jasieńko J, Kotwica E, Krzosek S. Strength enhancement of timber beams using steel plates — Review and experimental tests. *Drewno.* 2015;58(196):75–90. https://doi.org/10.12841/wood.1644-3985.150.06

13. Turkovskii SB, Pogoreltsev AA, Nikolaev VG. The sports-and-health establishments in Moscow with timber roofing systems. *Construction Materials, Equipment, Technologies of the 21st Century.* 2008;(8):70–72. (In Russ.) EDN: JUOXKX

14. Turkovskii SB, Pogoreltsev AA, Nazarov YuP. Efficiency of load-bearing glued laminated timber structures in seismic regions of construction. *Industrial and Civil Engineering.* 2009;(10):10–13. (In Russ.) EDN: KWNHMP

15. Pogoreltsev AA, Pyatikrestovskii KP. Substantiation of rated values of elasticity modules for calculation of timber structures. *Industrial and Civil Engineering*. 2013;(10):33–35. (In Russ.) EDN: RIUMSJ

16. Roshchina SI, Shchuko VYu. Influence of long-term loading on deformability of reinforced glulam timber beams. *Industrial and Civil Engineering.* 2006;(5):40–41. (In Russ.) EDN: DZUNJR

17. Roschina S, Gribanov A, Lukin M., et al. Calculation of wooden beams reinforced with polymeric composites with modification of the wood compression area. *MATEC Web of Conferences.* 2018;251:04029. https://doi.org/10.1051/matecconf/201825104029 EDN: RVVCYW

18. Koshcheev AA, Roshchina SI, Lukin MV, Lisyatnikov MS. Wooden beams with reinforcement along a curvilinear trajectory. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;5(81):193–201. https://doi.org/10.18720/MCE.81.19 EDN: YLSZAD

19. Roshchina SI, Lisyatnikov MS, Gribanov AS. et al. Development of the field of application of glass compounds in wooden construction. *BST: Byulleten' stroitel'noi tekhniki*. 2017;5(993):50–51. (In Russ.) EDN: YLLYZJ

20. Lisyatnikov MS. Improvement of manufacturing technology for glued wooden structures with strengthening of support zones. *Forestry Engineering Journal.* 2015;5(2):137–148. (In Russ.) https://doi.org/10.12737/111988 EDN: TZCARL

21. Lisyatnikov MS, Glebova T, Rusak K, Ivaniuk A. Strength and deformability of reinforced wooden beams of variable stiffness. *Lecture Notes in Civil Engineering.* 2022;182:549–561. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_48 EDN: FRREOA

22. Skribo VI, Shutov GM, Shalkevich EB. Author's certificate USSR 958612 A1. *Wooden beam.* 1982. (In Russ.) EDN: GOMCKF

23. Aleksashkin EN, Egorov VV, Veselov VV. Patent RF 2595026 C1. *Method of prosthetic repair of a wooden beam.* 2016. (In Russ.) EDN: ZEWVFJ

24. Aleksashkin EN, Veselov VV, Egorov VV. Utility model patent RU 168412 U1. *Wooden beam.* 2017. (In Russ.) EDN: EIQNPN

25. Boitemirov FA. Study of the performance of reinforced timber beams in Chukotka conditions. *Natural and Technical Sciences.* 2015;4(82):243–244. (In Russ.) EDN: TXUSHH

26. Rykunin SN, Zvyagina GI. *Method for manufacturing a reinforced wooden beam.* Author's certificate USSR SU 1224140 A1. 1986. (In Russ.) EDN: UNWCMG

27. Bai VF, Erenchinov SA, Gach EA. Study of the operation of a wooden beam reinforced with steel plates. *Architecture, Construction, Transport.* 2023;(2):46–53. (In Russ.) https://doi.org/10.31660/2782-232X-2023-2-46-53 EDN: SNWMFN

28. Esipov AV, Sal'nyi IS, Vorob'ev YaV. Calculation of strength of normal sections of reinforced wooden beams. *Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering.* 2017;49:5–15. (In Russ.) EDN: ZGRUDD

29. De Luca V, Marano C. Prestressed glulam timbers reinforced with steel bars. *Construction and Building Materials.* 2012;30:206–217. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2011.11.016

30. Lisyatnikov MS, Glebova TO, Ageev SP, Ivaniuk AM. Strength of wood reinforced with a polymer composite for crumpling across the fibers*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;896:012062. https://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012062 EDN: WVTLOR

31. Roshchina SI, Lisyatnikov MS, Gribanov AS, Glebova TO. Calculation and strengthening of highly stressed support zones of high glued laminated timber beam structures. *Forestry Engineering Journal.* 2015;5(1):187–197. (In Russ.) https://doi.org/10.12737/11276 EDN: TVXUFV

32. Ustarkhanov OM, Kalieva MKh. Experimental studies of reinforced glulam timber beams. *Current Problems of Humanities and Natural Sciences.* 2015;(12-2):218–223. (In Russ.) EDN: VHHLSZ

33. Gravit MV, Serdjuks D, Vatin N, Lazarev YG, Yuminova MO. Single burning item test for timber with fire protection. *Magazine of Civil Engineering*. 2020;3(95):19–30. https://doi.org/10.18720/MCE.95.2 EDN: EAOGQE

34. Labudin BV, Popov EV, Nikitina TA. Notes for calculated resistance to tension for laminated wood. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019;687:033028. https://doi.org/10.1088/1757-899X/687/3/033028 EDN: UGAUQA

35. Labudin BV, Popov EV, Oshchepkova ES, Sopilov VV, Ruslanova AV, Fukalov AA. Influence of gaps (joints) in sheathing on the stress-strain state of ribbed wood-composite panels. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):439–451. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-439-451 EDN: WQVROM

36. Markovich AS. On the stress state of joints of wooden elements with frontal notches. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(4):21–25. (In Russ.) EDN: WCEXBR

37. Kirsanov MN. Analytical calculation of the deflection of a beam truss with double diagonals. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(2):105–111. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111 EDN: XQIAXZ

38. Peixoto LS, Soriano J, Mascia NT, Pellis BP. Bending behavior of steel bars reinforced glulam beams considering the homogenized cross section. *Wood Material Science and Engineering*. 2021;17:1–7. https://doi.org/10.1080/17480272.2021.1900392 EDN: JENJXN

39. Kreher K, Natterer J, Natterer J. Timber-glass-composite girders for a hotel in Switzerland. *Structural Engineering International*. 2004;14(2):149–151. https://doi.org/10.2749/101686604777963964

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 267–282

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-267-282
EDN: LJBKAD

Научная статья / Research article

Влияние степени детализации расчетной модели на напряженно-деформированное состояние антенно-мачтового сооружения

Ю.Д. Маркина

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, *Нижний Новгород, Российская Федерация*
✉ poluektoff@bk.ru

Поступила в редакцию: 2 мая 2026 г.
Доработана: 4 июня 2026 г.
Принята к публикации: 5 июня 2026 г.

Аннотация. Антенно-мачтовые сооружения широко применяются для размещения телекоммуникационного оборудования. При проектировании таких сооружений существенное влияние на результаты расчета может оказывать состав расчетной модели и способ учета конструктивных элементов, в частности рабочих площадок. Особую сложность представляет анализ конструкций с выраженной геометрической асимметрией. Цель исследования — изучение влияния способа учета рабочих площадок на напряженно-деформированное состояние и динамические характеристики антенно-мачтового сооружения, а также оценка области применимости упрощенной расчетной модели. Численное моделирование выполнено методом конечных элементов в программном комплексе SCAD Office. Рассмотрены три расчетные модели мачты, различающиеся способом учета рабочих площадок: с явным моделированием площадок, с учетом нагрузок от площадок и без учета площадок. Дополнительно проанализированы башенные сооружения со сходным асимметричным расположением площадок. Выполнен сравнительный анализ распределения продольных усилий и изгибающих моментов по высоте мачты, горизонтальных перемещений, а также частот и форм собственных колебаний конструкции. Показано, что способ моделирования площадок в наименьшей степени влияет на продольные усилия у основания и нагрузки на фундамент, однако оказывает существенное влияние на изгибающие моменты и перемещения верхней части сооружения, где расположены площадки. Для отдельных параметров расхождение между моделями превышает 20 %. Полученные результаты подтверждают необходимость корректного учета асимметрично расположенных площадок при расчете антенно-мачтовых сооружений.

Ключевые слова: антенно-мачтовое сооружение, численное моделирование, метод конечных элементов, динамические характеристики, ветровая нагрузка, асимметрия конструкции

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Благодарности. Автор выражает благодарность директору общества с ограниченной ответственностью «СВЯЗЬСТРОЙРЕГИОН» Петухову Сергею Александровичу (г. Ижевск, Российская Федерация) за предоставление технической документации по объекту исследования.

Для цитирования: *Маркина Ю.Д.* Влияние степени детализации расчетной модели на напряженно-деформированное состояние антенно-мачтового сооружения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 267–282. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-267-282 EDN: LJBKAD

Маркина Юлия Дмитриевна, кандидат технических наук, доцент кафедры теории сооружений и технической механики, Инженерно-строительный факультет, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет (ННГАСУ), Российская Федерация, 603000, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, д. 65; eLIBRARY SPIN-код: 4203-4240, ORCID: 0009-0006-7167-0652; e-mail: poluektoff@bk.ru

© Маркина Ю.Д., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Influence of the Level of Detail of the Computational Model on the Stress State of a Guyed Mast

Yulia D. Markina

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, *Nizhny Novgorod, Russian Federation*
✉ poluektoff@bk.ru

Received: April 2, 2026
Revised: June 4, 2026
Accepted: June 5, 2026

Abstract. Guyed masts are widely used for telecommunication equipment installation. In the structural analysis of such structures, the composition of the computational model and the method of incorporating structural elements, including service platforms, may significantly influence the calculation results. The analysis becomes more complicated for masts with pronounced geometric asymmetry caused by the one-sided arrangement of service platforms. The aim of this study is to investigate the influence of different methods of modeling service platforms on the stress state and dynamic characteristics of a guyed mast. Numerical analysis was performed using the finite element method in the SCAD Office software. Three computational models were considered: with explicit modeling of platforms, with equivalent loads from platforms, and without considering the platforms. In addition, mast structures with similar asymmetrical arrangement of the platforms are analyzed. A comparative analysis of axial forces, bending moments along the mast height, horizontal displacements, and natural vibration frequencies was carried out. The results show that the method of platform modeling has a minor effect on axial forces, but significantly influences bending moments and horizontal displacements of the upper part of the mast, where the platforms are located. For some parameters, the difference between models reaches 20–22%. The results demonstrate the importance of proper consideration of asymmetrically arranged platforms in the structural analysis of guyed masts.

Keywords: guyed mast, numerical modeling, finite element method, dynamic characteristics, wind load, structural asymmetry

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Acknowledgements. The author expresses gratitude to Sergey A. Petukhov, Director of OOO “SVYAZSTROYREGION” (company in Izhevsk, Russian Federation), for providing the technical documentation for the object of the study.

For citation: Markina YuD. Influence of the level of detail of the computational model on the stress state of a guyed mast. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2026;22(3):267–282. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-267-282 EDN: LJBKAD

1. Введение

Методы численного анализа позволяют выполнять расчет сложных инженерных сооружений с высокой степенью детализации и учитывать широкий спектр факторов, влияющих на их работу [1; 2]. Вычислительная техника и программные комплексы конечно-элементного анализа существенно расширяют возможности моделирования пространственных конструкций. Однако получение достоверных результатов численного анализа напрямую зависит от соответствия принятой расчетной схемы реальной работе сооружения [3; 4].

Одним из наиболее сложных этапов подготовки исходных данных для численного анализа является выбор расчетной схемы и определение состава элементов, включаемых в расчетную модель. Программные комплексы позволяют создавать высокодетализированные модели конструкций, однако чрезмерная детализация приводит к увеличению вычислительных затрат, усложняет интерпретацию результатов и может увеличивать погрешности, связанные с неопределенностью исходных параметров [5; 6].

Yulia D. Markina, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Theory of Structures and Technical Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering (NNGASU), 68 Il’inskaya St, Nizhny Novgorod, 603000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4203-4240, ORCID: 0009-0006-7167-0652; e-mail: poluektoff@bk.ru

В инженерной практике отсутствуют универсальные рекомендации относительно степени детализации расчетных моделей и способов учета отдельных конструктивных элементов. Задача инженера заключается не в создании максимально подробной модели, а в рациональном выборе факторов, оказывающих существенное влияние на работу конструкции, с исключением второстепенных элементов, не оказывающих значимого влияния на результаты расчета [7; 8]. Особенно актуальным выбор состава расчетной схемы является при расчете уникальных и высотных сооружений [9; 10], к которым относятся антенно-мачтовые сооружения. Такие конструкции характеризуются значительной гибкостью, высокой чувствительностью к ветровым воздействиям и сложным пространственным взаимодействием элементов. Особенности компоновки оборудования и вспомогательных конструкций могут существенно влиять на распределение нагрузок [11; 12], жесткость системы и динамические характеристики сооружения [13–15].

Одним из неоднозначных аспектов формирования расчетных моделей антенно-мачтовых сооружений является способ учета в расчетной схеме вспомогательных конструктивных элементов: лестниц, площадок обслуживания и технологического оборудования. Чаще всего данные элементы заменяются эквивалентными нагрузками, приложенными к основной несущей системе [16–18], что позволяет упростить расчетную модель и снизить трудоемкость численного анализа. Однако пространственное расположение вспомогательных конструкций может оказывать существенное влияние на распределение масс и жесткости системы, аэродинамические характеристики и динамическое поведение сооружения [19–21]. В наибольшей степени это влияние проявляется в случаях расположения элементов асимметрично относительно оси сооружения и формирует выраженную геометрическую асимметрию конструкции.

Несмотря на значительное количество исследований, посвященных численному анализу башенных и мачтовых сооружений, влияние степени детализации расчетной модели, то есть различий между явным моделированием вспомогательных конструкций, их заменой эквивалентными нагрузками и исключением из расчетной схемы, изучено в меньшей степени. В частности, в литературе практически отсутствуют исследования, направленные на количественную оценку влияния различных способов учета рабочих площадок на силовые, деформационные и динамические характеристики антенно-мачтовых сооружений.

Цель исследования — количественная оценка влияния различных способов учета асимметрично расположенных рабочих площадок на силовые, деформационные и динамические характеристики антенно-мачтового сооружения, а также определение области допустимого применения упрощенной расчетной модели с эквивалентными нагрузками.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

– разработать несколько расчетных моделей антенно-мачтового сооружения с различным способом учета рабочих площадок;

– выполнить нелинейный расчет пространственной системы методом конечных элементов;

– провести сравнительный анализ распределения усилий в стволе мачты;

– оценить влияние способа моделирования площадок на горизонтальные перемещения конструкции;

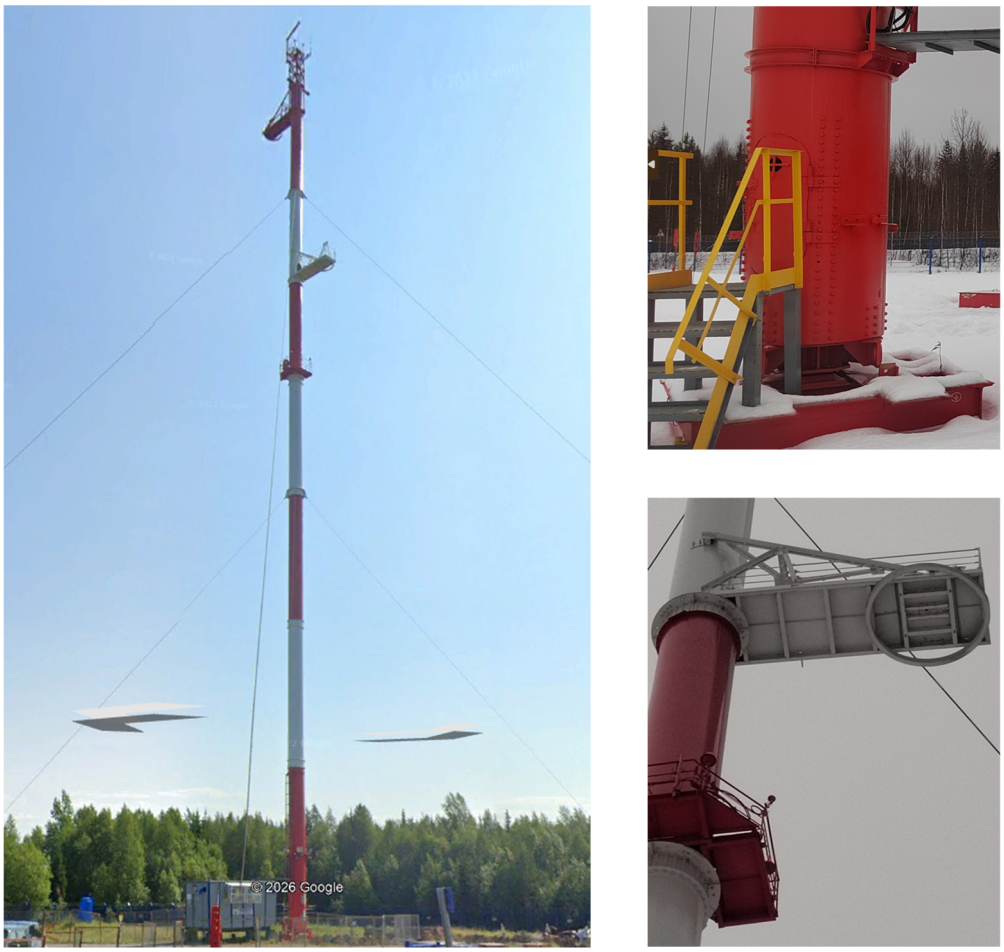
– исследовать изменение динамических характеристик сооружения, включая частоты и формы собственных колебаний;

– проанализировать влияние расчетной схемы на нагрузки, передаваемые на фундамент.

2. Методы

В качестве основного объекта исследования принята металлическая мачта высотой 86,625 м, расположенная в Республике Коми Российской Федерации (рис. 1). Ствол мачты представляет собой оболочку диаметром 1220 мм толщиной 12 мм с длиной секций 11,0 м по осям стыков для промежуточных и оттяжечных секций и длиной 4 м для верхней секции. Стыковка секций между собой,

крепление лацменов и других элементов выполнены на высокопрочных болтовых соединениях. Внутри ствола мачты проходит по всей высоте лестница-стремянка с площадками для отдыха. Опирание ствола мачты на фундамент выполнено шарнирным методом. Мачта по высоте раскреплена двумя ярусами оттяжек, расположенными по четырем направлениям в плане. Оттяжки, выполненные из оцинкованного стального каната с металлическим сердечником, крепятся к стволу и анкерным фундаментам с помощью механических деталей. Оболочка ствола выполнена из стали 17Г1С.



а *б*

Рис. 1. Объект исследования:
а — общий вид; *б* — опорный узел и площадки
И с т о ч н и к: выполнено А.А. Маркиным.

Figure 1. Object of research:
а — general view of the mast; *б* — service platforms
S o u r c e: made by A.A. Markin.

В 2003 г. была произведена реконструкция мачты за счет наращивания ее ствола с помощью двух секций длиной 2,5 м в виде четырехгранных решетчатых призм с базой 1,1 м, соединенных между собой при помощи фланцев на болтах. Внутри дополнительных секций для обслуживания антенн предусмотрена лестница-стремянка. На верхней секции было установлено эксплуатационное грузоподъемное устройство Q = 0,5 т. Существующие и проектируемые кабели от антенно-фидерных устройств до аппаратной идут внутри ствола мачты по существующим планкам. Первый и второй ярусы оттяжек расположены на отметках 33,385 и 66,385 м, рабочие площадки — на отметках 55,385 и 77,385 м.

Рабочие площадки формируют выраженную геометрическую асимметрию конструкции, что при их некорректном учете может приводить к погрешностям при определении усилий и перемещений. Нагрузки от площадок определялись с использованием алгоритма расчета нагрузок от рабочих площадок антенно-мачтовых сооружений [22]. Расчетная нагрузка от собственного веса каждой площадки составила 1062,6 кг. Ветровая нагрузка от элементов площадки на отметке +55,385 м составила 266,98 кг, а для площадки на отметке +77,385 м — 295,12 кг.

Численное исследование выполнено в программном комплексе SCAD Office 21, лицензия № 17203, разработчик SCAD Soft. SCAD Office представляет собой программный комплекс конечно-элементного анализа строительных конструкций, предназначенный для расчета сооружений на статические и динамические воздействия. Программный комплекс содержит библиотеку стержневых, пластинчатых, объемных и специальных конечных элементов, а также модули расчета усилий, перемещений, устойчивости и динамических характеристик конструкций. Англоязычное описание программы приведено на официальном сайте разработчика[1]. Расчетная схема мачты сформирована как пространственная конечно-элементная модель. Ствол мачты, элементы рабочих площадок и решетчатой надстройки задавались стержневыми конечными элементами типа 5. Тип элемента 5 «Пространственный стержень» обладает шестью степенями свободы в узле (UX, UY, UZ, RX, RY, RZ), основан на аппроксимации изгиба по модели Эйлера — Бернулли с учетом сдвига по теории Тимошенко и обеспечивает корректное представление изгибных, продольных и крутильных деформаций тонкостенных элементов. Использование стержневых элементов позволяет достигать требуемой точности расчета при существенно меньшей вычислительной размерности модели по сравнению с пластинчатыми и объемными конечными элементами, что делает данный подход наиболее рациональным для антенно-мачтовых сооружений [23]. Стержневые элементы также соответствуют нормативной методике расчета антенно-мачтовых сооружений[2]. Примыкание площадок и надстройки к стволу моделировались с использованием абсолютно твердых тел, связывающих перемещения ведомых узлов с перемещениями ведущего узла по законам кинематики абсолютно твердого тела, что позволяет передавать усилия от площадок в основную несущую систему с учетом эксцентриситета соединения и без искусственной податливости в зоне примыкания. Оттяжки задавались специальными конечными элементами вантового типа 308 с учетом геометрической нелинейности их работы и начального натяжения, принятого в соответствии с технической документацией по объекту. Расчетной моделью элемента типа 308 является гибкая нить с малой стрелой провисания, работающая только на растяжение и учитывающая начальное натяжение, собственный вес, изменение длины хорды и геометрически нелинейный характер работы каната. При выполнении динамического анализа работа вант учитывается в линеаризованной постановке относительно предварительно найденного равновесного состояния конструкции. Опирание ствола мачты задавалось запретом линейных перемещений опорного узла по направлениям X, Y и Z при свободных угловых перемещениях. Анкерные узлы оттяжек моделировались как неподвижные точки крепления: в них запрещались линейные перемещения по направлениям X, Y и Z. Передача усилий от оттяжек осуществлялась через осевое натяжение вантового элемента типа 308. Угловые степени свободы в анкерных узлах не использовались для передачи усилий от вантовых элементов, поскольку элемент типа 308 передает в расчетную схему только осевое усилие растяжения. Расчет выполнялся шагово-итерационным методом в геометрически нелинейной постановке, что обусловлено наличием вантовых элементов и необходимостью учета изменения их жесткости в процессе нагружения. Нелинейные загружения включали собственный вес конструкции и ветровые воздействия в различных направлениях относительно системы оттяжек. Нагрузка прикладывалась поэтапно; на каждом шаге уточнялось равновесное состояние конструкции и пересчитывалась жесткость вантовых элементов с учетом достигнутого уровня натяжения, что позволило учесть геометрически нелинейную работу оттяжек при определении усилий, перемещений и динамических характеристик мачты. Для основных нелинейных загружений использовалось

[1] Интегрированная система прочностного анализа и проектирования конструкций. URL: scad-soft.ru (дата обращения: 28.12.2025).

десять шагов роста нагрузки и не более десяти итерационных уточнений на шаге. По протоколу расчета требуемая точность достигалась не более чем за семь итераций, что свидетельствует о сходимости нелинейного решения. Нагрузки и расчетные сочетания назначались по требованиям Свода правил Российской Федерации СП 20.13330.2016[2], а расчет стальных элементов выполнялся с учетом требований Свода правил Российской Федерации СП 16.13330.2017[2]. Корректность результатов подтверждается сопоставимостью с результатами более ранних поверочных расчетов несущей способности мачты, выполненных в рамках экспертизы. Наиболее неблагоприятным для ствола является ветровое нагружение в плоскости, перпендикулярной расположению рабочих площадок.

Для оценки влияния способа учета площадок были сформированы три расчетные модели, различающиеся степенью детализации конструкции:

Модель 1: с моделированием рабочих площадок в расчетной схеме (рис. 2);

Модель 2: без моделирования площадок, но с учетом нагрузок от их собственного веса и ветрового воздействия;

Модель 3: без учета площадок.

Для повышения воспроизводимости расчета основные параметры конечно-элементных моделей приведены в табл. 1.

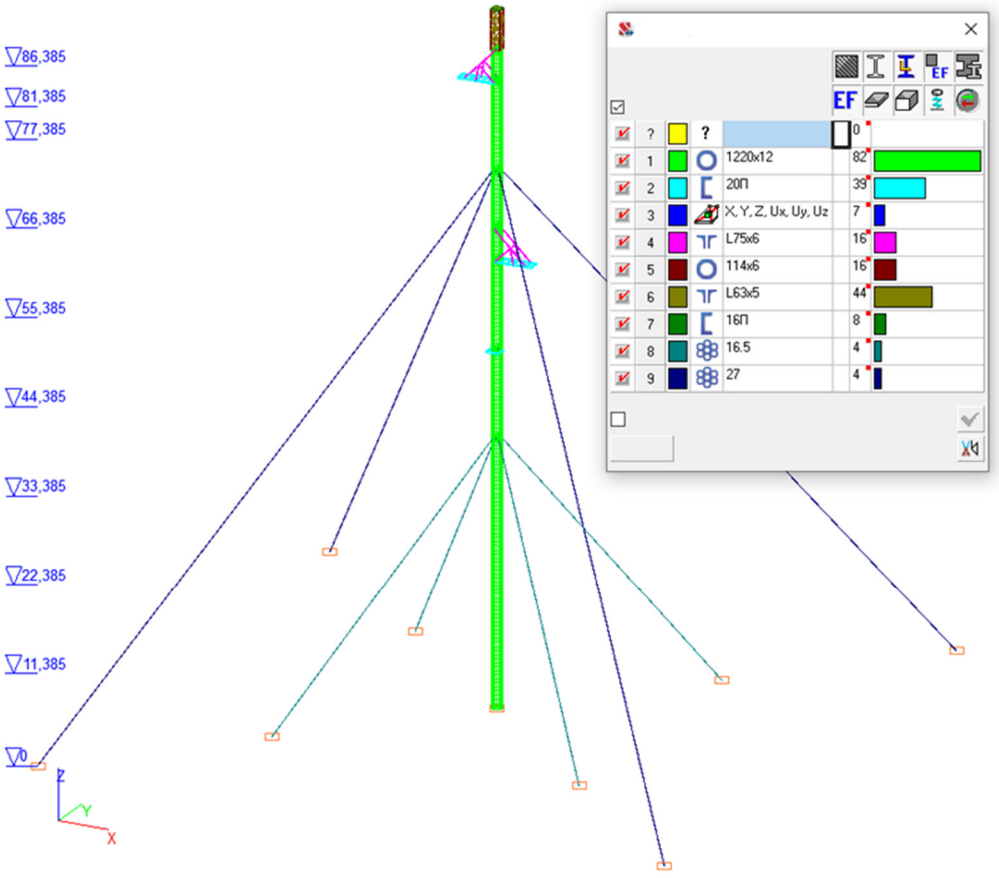


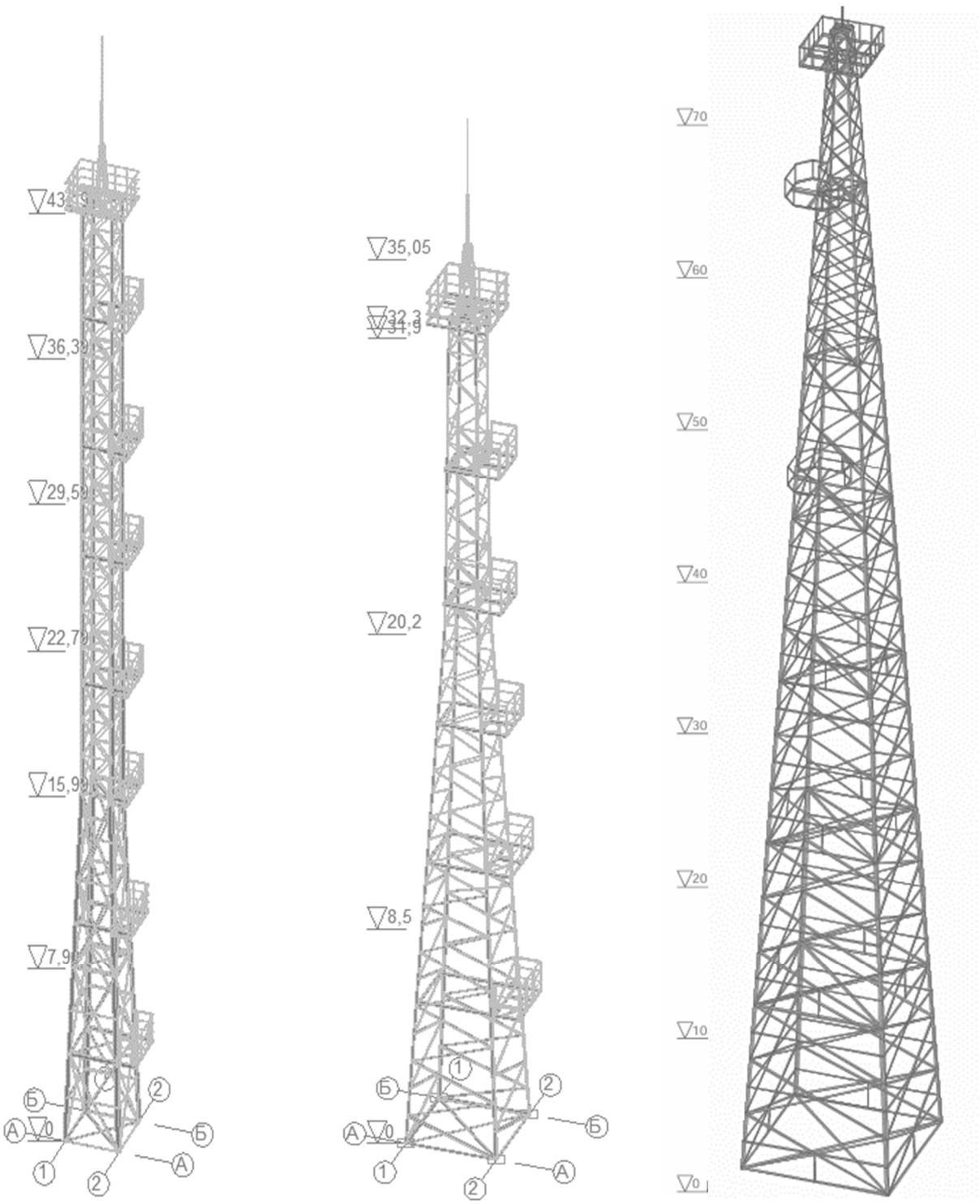
Рис. 2. Визуализация расчетной схемы мачты с обозначением жесткостей

И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 2. Visualization of the computational model of the mast with the designation of stiffness values

S o u r c e: made by Yu.D. Markina.

[2] СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. Москва : Стандартинформ, 2018. 154 с. URL: https://docs.cntd.ru/document/456044318 (дата обращения: 28.12.2025); СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. Москва, 2017. 286 с. URL: https://docs.cntd.ru/document/456069588 (дата обращения: 28.12.2025).



а *б* *в*

Рис. 3. Визуализация расчетной схемы башен:
а — прожекторная башня высотой 45,93 м; *б* — прожекторная башня высотой 35,05 м;
в — башня сотовой связи высотой 70 м
И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 3. Visualization of the computational model of towers:
а — searchlight tower with a height of 45.93 m; *б* — searchlight tower with a height of 35.05 m;
в — cellular tower with a height of 70 m
S o u r c e: made by Yu.D. Markina.

Таблица 1. **Основные параметры конечно-элементных моделей**
Table 1. **Basic parameters of finite element models**

Параметр / Parameter	Модель 1 / Model 1	Модель 2 / Model 2	Модель 3 / Model 3
Число узлов / Number of nodes	167	131	131
Число конечных элементов / Number of finite elements	220	165	165
Способ учета рабочих площадок / Method of platform modeling	Явное моделирование площадок / Explicit platform modeling	Эквивалентные нагрузки от площадок / Equivalent platform loads	Без учета площадок / Platforms excluded
Тип элементов ствола мачты / Finite element type for the mast shaft	КЭ 5 / FE 5		
Тип элементов рабочих площадок / Finite element type for service platforms	КЭ 5 / FE 5	Не моделируются / Not modeled	Не моделируются / Not modeled
Тип элементов решетчатой надстройки / Finite element type for lattice superstructure	КЭ 5 / FE 5		
Тип элементов оттяжек / Finite element type for guys	КЭ 308 / FE 308		
Способ передачи нагрузок от площадок / Method of platform load transfer	Через элементы площадок и абсолютно твердые тела / Through platform elements and rigid bodies	В виде эквивалентных нагрузок в узлы ствола / As equivalent loads applied to mast nodes	Не учитываются / Not included

И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной / S o u r c e: made by Yu.D. Markina.

Сравнение результатов проводилось по распределению усилий в стволе мачты, горизонтальным перемещениям конструкции, частотам собственных колебаний и нагрузкам на фундамент.

Для оценки возможности обобщения результатов дополнительно рассмотрены металлические прожекторные башни высотой 45,93 и 35,05 м, расположенные в Ямало-Ненецком автономном округе, металлическая башня сотовой связи высотой 70 м, расположенная в Нижегородской области (рис. 3). Анализ этих объектов показал аналогичный характер расчетной проблемы: асимметрично расположенные площадки формируют локальный эксцентриситет массы и ветровой нагрузки, поэтому их исключение из расчетной схемы может искажать результаты анализа. Основной объект рассматривается в статье как детальный расчетный пример, а дополнительные сооружения подтверждают, что исследуемая ситуация не является особенностью одного антенно-мачтового сооружения.

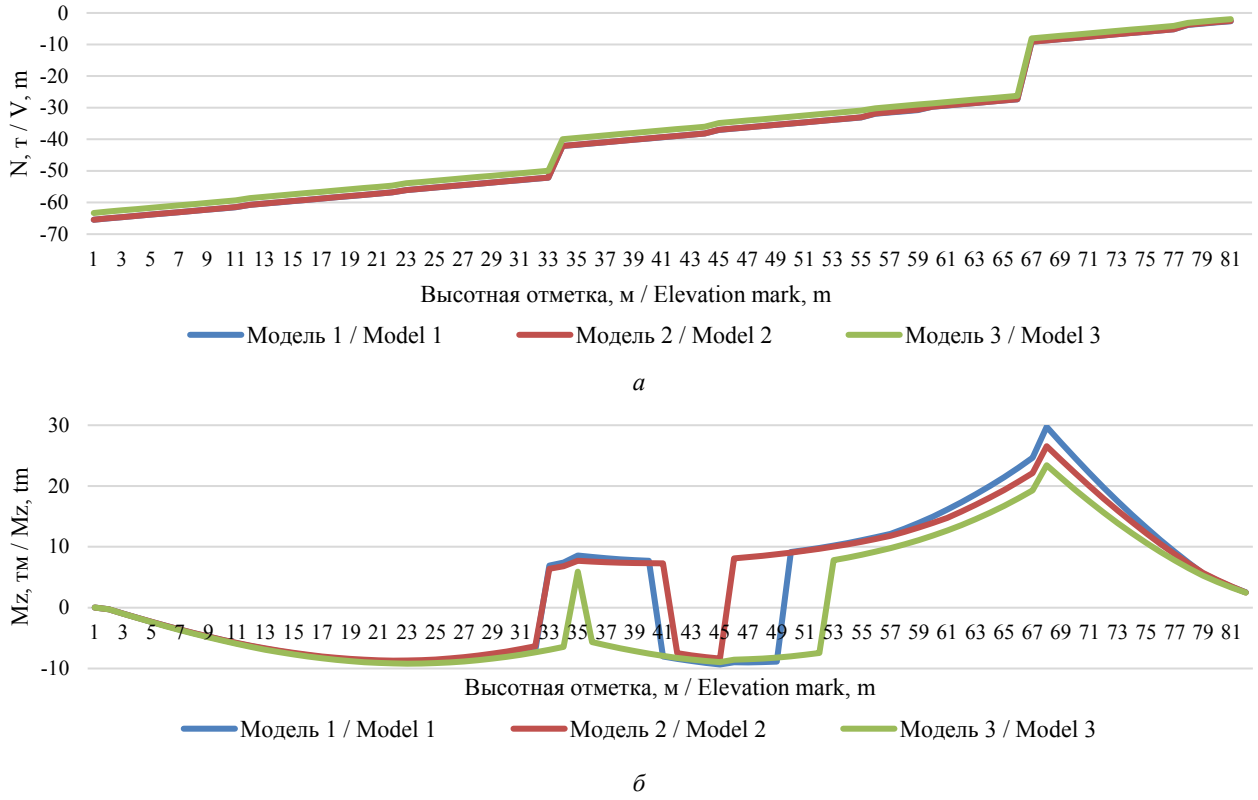
3. Результаты и обсуждение

Анализ распределения усилий (рис. 4) показал, что уровни крепления оттяжек определяют основные переломы эпюр продольных сил и изгибающих моментов. Влияние площадок обслуживания проявляется преимущественно в верхней части сооружения.

Распределение продольной силы по высоте для всех трех расчетных моделей имеет одинаковый общий характер (рис. 4, *а*): максимальное сжатие наблюдается у основания мачты, после чего продольное усилие монотонно уменьшается к вершине. На уровнях крепления оттяжек фиксируются выраженные скачки продольной силы. Максимальные значения продольных сил в стволе мачты для моделей 1 и 2 практически совпадают. Относительное отличие между результатами моделей 1 и 3 возрастает по высоте ствола: от 3 % в основании до 24 % в верхней части сооружения. Однако абсолютная величина продольных усилий в этой зоне существенно меньше, чем у основания мачты, вследствие чего влияние различий между моделями на оценку несущей способности конструкции оказывается ограниченным.

На уровне крепления оттяжек наблюдается перелом эпюры момента (рис. 4, *б*) и смена его знака, что отражает изменение характера работы ствола мачты. В верхней половине сооружения, где

расположены рабочие площадки, различия между моделями становятся значительно более выраженными. Вблизи нижней площадки на отметке 55,385 м расхождение между моделью 1 и моделью 3 достигает 15–20 %. Максимальное отличие наблюдается в зоне второго яруса оттяжек, где изгибающий момент для модели с площадками составляет около 29,8 т·м, а для модели без площадок составляет около 23,4 т·м, то есть отличается более чем на 20 %. Таким образом, исключение площадок из расчетной схемы приводит к занижению изгибающих моментов в верхней части ствола до 22 % (в том числе максимальных значений), что может существенно повлиять на оценку прочности конструкции. Асимметрично расположенные площадки изменяют распределение массы и ветровой нагрузки относительно оси сооружения, вызывая дополнительный изгиб ствола мачты. Модель 2 также не дает полного совпадения результатов с моделью 1. Максимальная погрешность 11 % возникает в зонах первого и второго ярусов оттяжек.



а

б

Рис. 4. Распределение усилий в стволе мачты по высоте:
а — продольная сила; *б* — изгибающий момент
И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 4. Distribution of internal forces along the mast height:
а — axial force; *б* — bending moment
S o u r c e: made by Yu.D. Markina.

Анализ горизонтальных перемещений (рис. 5) показал, что учет площадок оказывает заметное влияние на общую деформативность сооружения. Перемещения монотонно возрастают по высоте мачты и достигают максимальных значений в ее верхней части. Максимальное горизонтальное перемещение вершины составляет 181 мм для модели 1, 159 мм для модели 2, 142 мм для модели 3. Разница между моделями 1 и 2 достигает 12 %, между моделями 1 и 3 достигает 22 %. Явное моделирование площадок увеличивает гибкость системы и приводит к росту горизонтальных перемещений мачты. Учитывая, что высотные антенно-мачтовые сооружения характеризуются повышенной чувствительностью к горизонтальным деформациям, такое расхождение может существенно влиять на оценку эксплуатационной надежности сооружения.

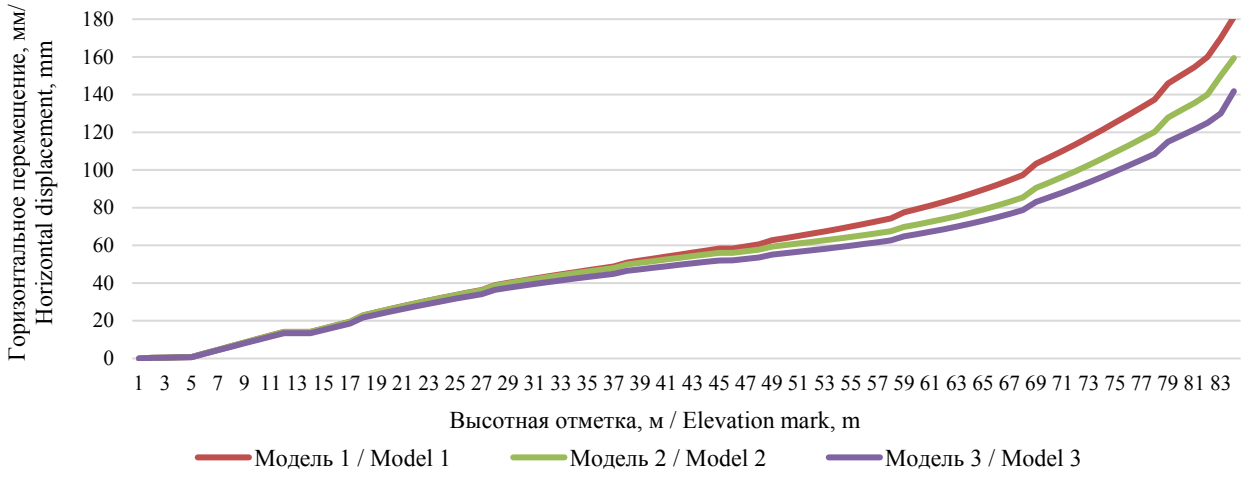
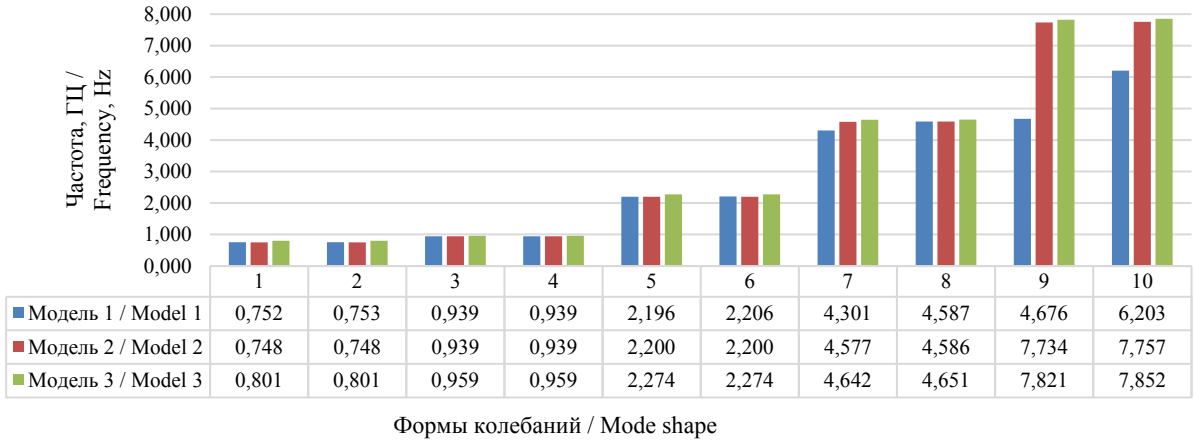


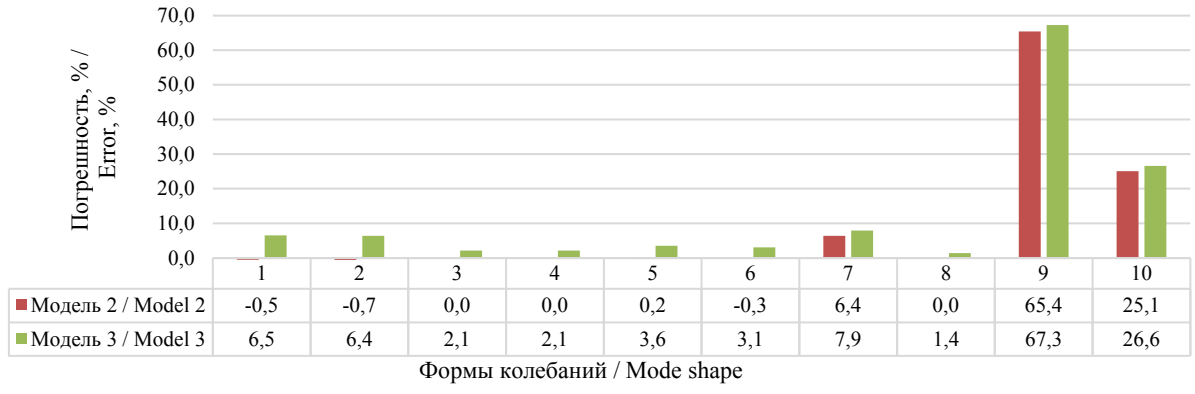
Рис. 5. Горизонтальные перемещения мачты по высоте
И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 5. Horizontal displacements along the mast height
S o u r c e: made by Yu.D. Markina.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Модель 1 / Model 1	0,752	0,753	0,939	0,939	2,196	2,206	4,301	4,587	4,676	6,203
Модель 2 / Model 2	0,748	0,748	0,939	0,939	2,200	2,200	4,577	4,586	7,734	7,757
Модель 3 / Model 3	0,801	0,801	0,959	0,959	2,274	2,274	4,642	4,651	7,821	7,852

а



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Модель 2 / Model 2	-0,5	-0,7	0,0	0,0	0,2	-0,3	6,4	0,0	65,4	25,1
Модель 3 / Model 3	6,5	6,4	2,1	2,1	3,6	3,1	7,9	1,4	67,3	26,6

б

Рис. 6. Сравнение частот собственных колебаний расчетных моделей:
а — значения частот; *б* — относительная погрешность
И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 6. Comparison of natural frequencies of the computational models:
а — frequency values; *б* — relative error
S o u r c e: made by Yu.D. Markina

В результате анализа частот собственных колебаний (рис. 6) выявлено, что влияние способа учета площадок на первые формы колебаний относительно невелико. Различие между моделями 1 и 2 не доходит до 1%, различие между моделями 1 и 3 — до 7 %. Более высокие формы колебаний демонстрируют существенно большую чувствительность к способу моделирования площадок. Для девятой формы локальных колебаний (рис. 7) разница частот между моделями достигает 65–67 %, что объясняется перераспределением масс и жесткости в зоне размещения площадок. Наличие дополнительных масс, вынесенных от оси мачты, приводит к изменению инерционных характеристик системы и повышенной чувствительности высших форм колебаний к способу моделирования конструктивных элементов.

Анализ первых десяти форм собственных колебаний (рис. 7) позволил выявить, что динамическое поведение сооружения определяется преимущественно изгибными формами колебаний ствола мачты. Первые две формы соответствуют глобальным изгибным колебаниям конструкции, а максимальные перемещения наблюдаются в верхней части мачты. Формы 3–4 характеризуются появлением точки перегиба в средней части ствола, формы 5–6 связаны с локальными колебаниями верхних участков конструкции и оборудования. Формы 7–10 имеют комбинированный характер деформаций, включая локальные колебания площадок, наблюдается частичное смешение изгибных и крутильных составляющих колебаний, что обусловлено асимметричным расположением площадок относительно оси мачты.

Анализ реакций в основании мачты и анкерных узлах оттяжек (табл. 2) показал, что влияние способа учета площадок на силовые факторы в опорных узлах незначительно. Различие вертикальных и горизонтальных реакций в основании не превышает 6 %.

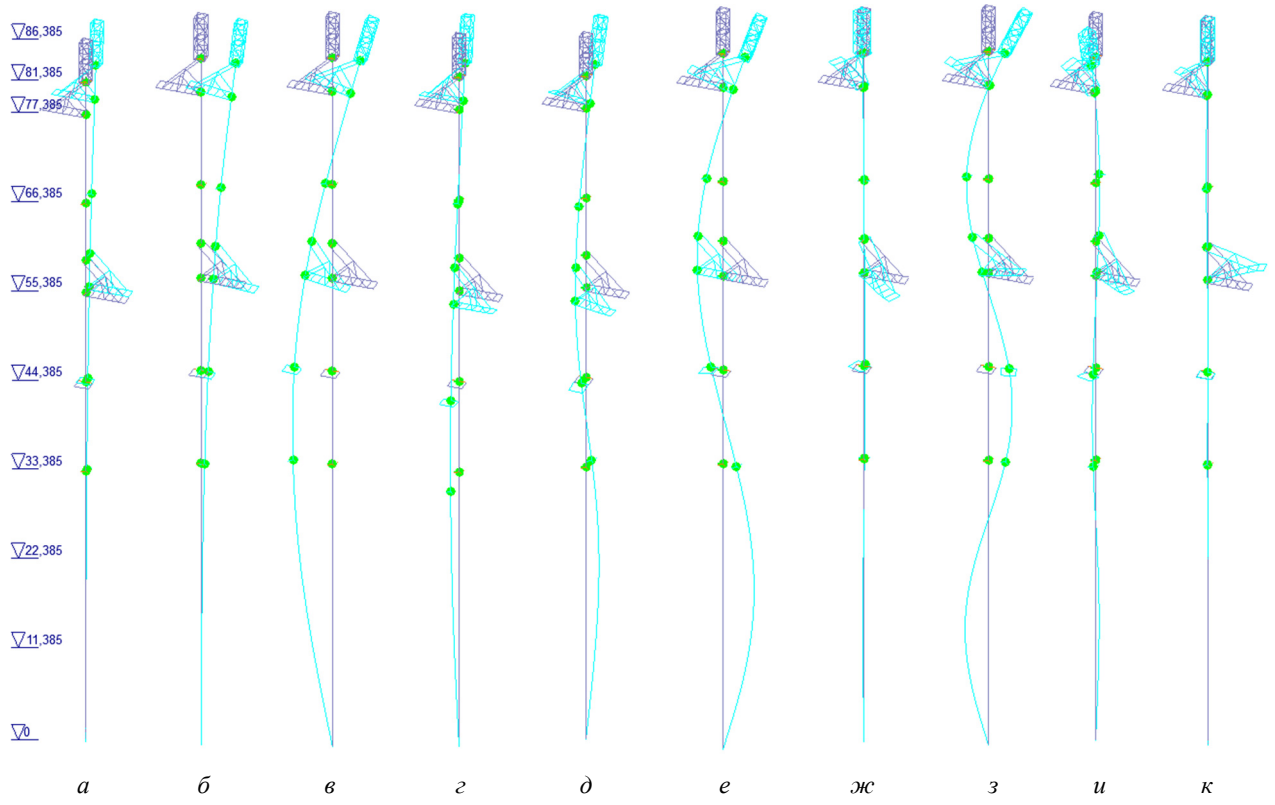


Рис. 7. Первые десять форм собственных колебаний мачты:
а, *б* — изгибные формы; *в*, *г* — изгибные с точкой перегиба в средней части ствола; *д*, *е* — локальные; *ж*–*к* — комбинированные
И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 7. First ten natural vibration modes of the guyed mast:
а, *б* — curved shapes; *в*, *г* — curved shapes with a inflection point in the middle of the shaft; *д*, *е* — local; *ж*–*к* — combined
S o u r c e: made by Yu.D. Markina.

Таблица 2. **Реакции в основании мачты и опорных узлах оттяжек**
Table 2. **Support reactions at the mast base and guy anchor nodes**

Узел / Node	Реакция, т / Reaction, *t*								
	Модель 1 / Model 1			Модель 2 / Model 2			Модель 3 / Model 3		
	RX	RY	RZ	RX	RY	RZ	RX	RY	RZ
1	0,00	–0,73	65,60	0,00	–0,72	65,58	0,00	–0,74	63,44
152	1,24	1,23	–2,13	1,24	1,23	–2,13	1,25	1,24	–2,14
153	1,75	–1,76	–3,01	1,74	–1,75	–3,00	1,72	–1,73	–2,95
154	–1,75	–1,76	–3,02	–1,74	–1,75	–3,00	–1,72	–1,73	–2,95
155	–1,24	1,23	–2,13	–1,24	1,23	–2,14	–1,25	1,24	–2,14
156	2,36	2,32	–3,81	2,20	2,16	–3,56	2,40	2,36	–3,88
157	3,74	–3,78	–6,12	3,59	–3,63	–5,88	3,51	–3,55	–5,73
158	–3,74	–3,78	–6,12	–3,59	–3,63	–5,87	–3,51	–3,55	–5,73
159	–2,36	2,32	–3,81	–2,20	2,16	–3,55	–2,40	2,36	–3,88

Узел 1 — опорный узел ствола мачты; узлы 152–159 — опорные узлы оттяжек /
Node 1 — support node at the mast base; nodes 152–159 — support nodes of the guy anchors

И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной / S o u r c e: made by Yu.D. Markina.

Дополнительное рассмотрение прожекторных башен и башни сотовой связи показало, что выявленная закономерность характерна не только для исследуемой мачты, но и для других антенно-мачтовых сооружений с асимметричным расположением площадок обслуживания. Количественные значения расхождений между расчетными моделями нельзя автоматически распространять на все сооружения, при необходимости они должны уточняться для каждого объекта с учетом его конструктивной схемы и характера асимметрии.

Полученные результаты согласуются с общей тенденцией, отмеченной в исследованиях ветровой работы телекоммуникационных башен с навесными элементами. В [11] показано, что лестницы, кабели и антенны, установленные на решетчатой телекоммуникационной башне, изменяют аэродинамические коэффициенты и распределение ветровой нагрузки на сооружение, что подтверждает исходное положение настоящей работы: площадки обслуживания и технологическое оборудование следует рассматривать не только как дополнительную массу, но и как элементы, изменяющие пространственную работу сооружения. Результаты [13; 21] показывают, что угол ветра, взаимное расположение антенн и эффект экранирования существенно влияют на ветровые нагрузки, действующие на решетчатые башни связи, что согласуется с полученными в настоящей работе данными, по которым основные различия между расчетными моделями проявляются в изгибающих моментах, горизонтальных перемещениях и высших формах колебаний, то есть в параметрах, чувствительных к пространственному перераспределению нагрузки. В [24] численно показано, что форма и равномерность размещения антенн влияют на чувствительность ветровой нагрузки к направлению ветра. При симметричном расположении антенн поперечная сила и изгибающий момент становятся менее чувствительными к изменению направления ветра. Этот вывод близок к результатам настоящего исследования: асимметричное расположение площадок обслуживания приводит к их более выраженному влиянию на изгибную работу и перемещению мачты. Khazaali и др. [25] отмечают, что точная оценка ветровых нагрузок на телекоммуникационные башни требует учета коэффициентов сопротивления и интерференционных факторов, а численное моделирование может применяться для оценки различных конфигураций башен и антенн. В данной работе аналогичная проблема рассматривается на уровне конечно-элементной модели: замена площадок эквивалентными нагрузками хорошо воспроизводит часть общих параметров, но не полностью отражает влияние пространственного расположения площадок на локальную работу и динамические характеристики сооружения. Таким образом, результаты настоящего исследования не противоречат данным других авторов, а дополняют их.

В большинстве рассмотренных работ основное внимание уделено аэродинамическим коэффициентам, ветровым нагрузкам и взаимодействию башни с антеннами, в данной статье акцент сделан на расчетной стороне задачи: сравнении детализированного и упрощенного способа передачи нагрузок от асимметрично расположенных площадок в конечно-элементную модель, что позволяет уточнить область применения упрощенных расчетных схем при анализе антенно-мачтовых сооружений.

4. Заключение

1. Способ учета площадок обслуживания по-разному влияет на расчетные параметры антенно-мачтового сооружения. Наименее чувствительны к детализации модели продольные усилия в стволе и реакции в опорных узлах. Для этих параметров замена площадок эквивалентными нагрузками может рассматриваться как допустимое инженерное упрощение, поскольку она сохраняет общий характер передачи вертикальных усилий в несущей системе.

2. Наиболее чувствительными к способу учета площадок являются параметры, связанные с пространственной изгибной работой и деформативностью верхней части сооружения. При асимметричном расположении площадок их явное моделирование позволяет учитывать не только дополнительную нагрузку, но и изменение геометрии и локальной жесткости расчетной схемы. Поэтому при поверочном расчете эксплуатируемых сооружений и оценке работы верхних участков ствола предпочтительно применять детализированную модель.

3. В результате сравнения горизонтальных перемещений выявлено, что упрощенная модель с эквивалентными нагрузками не полностью воспроизводит изменение деформативности сооружения, вызванное наличием площадок. Поэтому для предварительной оценки общей работы сооружения такая модель может быть использована, однако для уточненного анализа перемещений и оценки эксплуатационной пригодности всех элементов предпочтительно явное моделирование площадок.

4. Динамические характеристики также имеют различную чувствительность к составу расчетной модели. Низшие формы собственных колебаний, характеризующие глобальную работу сооружения, в меньшей степени зависят от способа учета площадок. Высшие и локальные формы оказываются более чувствительными к распределению массы и геометрической конфигурации вспомогательных элементов. Это ограничивает применение упрощенной модели при анализе динамического поведения верхних участков конструкции.

5. Реакции в основании антенно-мачтового сооружения и анкерных узлах оттяжек могут использоваться как параметры контроля общей согласованности расчетных моделей, однако они недостаточны для оценки влияния асимметрично расположенных площадок на локальную работу сооружения. Основные различия между моделями проявляются не на уровне опорных реакций, а в изгибной работе, перемещениях и локальных динамических характеристиках.

Полученные результаты показывают, что степень детализации расчетной модели следует выбирать с учетом цели расчета и особенностей конструктивного решения объекта. Для общей оценки работы антенно-мачтового сооружения и предварительного анализа допускается использование модели с эквивалентными нагрузками от асимметрично расположенных площадок. Для проверки прочности и деформативности элементов в зонах размещения площадок, а также для анализа высших форм собственных колебаний необходимо применять более детализированную расчетную схему.

Научная новизна работы заключается в количественной оценке влияния различных способов учета элементов, формирующих выраженную геометрическую асимметрию конструкции, на статические и динамические параметры антенно-мачтового сооружения, а также в выявлении различной чувствительности силовых, деформационных и динамических характеристик конструкции к степени детализации расчетной модели.

Теоретическая значимость работы состоит в уточнении представлений о влиянии асимметрично расположенных вспомогательных конструктивных элементов на пространственную работу и динамическое поведение антенно-мачтовых сооружений.

Практическая значимость результатов заключается в обосновании рационального подхода к формированию расчетных моделей антенно-мачтовых сооружений. Показано, что использование упрощенных расчетных схем с учетом площадок, формирующих выраженную геометрическую асимметрию конструкции, в виде эквивалентных нагрузок может быть допустимо при оценке продольных усилий и глобальных динамических характеристик сооружения. Однако для корректного анализа изгибающих моментов, горизонтальных перемещений и локальных форм колебаний предпочтительно применять расчетные модели с явным моделированием площадок обслуживания.

Список литературы

1. *He B., Zhao M., Feng W., Xiu Y., Wang Y., Feng L., Qin Y., Wang C.* A method for analyzing stability of tower-line system under strong winds // Advances in Engineering Software. 2019. Vol. 127. P. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.10.004

2. *Kassem M.M., Yang M., Liu S., Liu J., Gao G., Yang Z.* Quantification of the seismic behavior of a steel transmission tower subjected to single and repeated seismic excitations // Applied Sciences. 2022. Vol. 12. No. 4. Article no.1984. https://doi.org/10.3390/app12041984 EDN: UNGRWA

3. *Кашеварова Г.Г.* Синергия численных методов и интеллектуальных технологий в диагностике строительных объектов // Academia. Архитектура и строительство. 2025. № 3. С. 140–145. https://doi.org/10.22337/2077-9038-2025-3-140-145 EDN: PJOBAI

4. *Чемодуров В.Т., Ажермачев С.Г., Пшеничная-Ажермачёва К.С.* Проблемы обеспечения соответствия расчетных схем строительных конструкций реальной работе сооружений при эксплуатации // Экономика строительства и природопользования. 2018. № 3 (68). С. 5–8. EDN: YWMMHJ

5. *Zhang Y., Hao R., Niiranen J., Yang Y., Brühwiler E., Su D., Nagayama T.* Computational engine for finite element digital twins of structural dynamics via motion data // Engineering Structures. 2024. Vol. 316. Article no. 118630. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118630 EDN: HZKXOI

6. *Xu Y., Chen B., Wang J., Li Z.* Model updating of complex civil engineering structures using hybrid optimization algorithms // Engineering Structures. 2022. Vol. 252. Article no. 113657. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113657

7. *Sun H., Betti R.* System identification and finite element model updating for structural health monitoring: A review // Mechanical Systems and Signal Processing. 2022. Vol. 167. Article no. 108472. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108472

8. *Sun Z. Jayasinghe S., Sidiq A., Setunge S.* Approach towards the development of digital twin for structural health monitoring of civil infrastructure: A Comprehensive Review // Sensors. 2025. Vol. 25. No. 1. Article no. 59. https://doi.org/10.3390/s25010059 EDN: QVPELT

9. *Poddaeva O., Fedosova A*. Computational and experimental simulation of wind impacts on a lattice structure // Energy Reports. 2023. Vol. 9. P. 355–361. https://doi.org/10.1016/j.egyr.2023.05.274

10. *Haidarpour A., Fah Tee K.* Finite element model updating for structural health monitoring // Structural Durability and Health Monitoring. 2020. Vol. 14. No. 1. P. 1–17. https://doi.org/10.32604/sdhm.2020.08792 EDN: BGZSUK

11. *Calotescu I., Torre S., Freda A., Solari G.* Wind tunnel testing of telecommunication lattice towers equipped with ancillaries // Engineering Structures. 2021. Vol. 241. Article no. 112526. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112526 EDN: RQNDJA

12. *Li H.-N., Liu H.-J., Fu X., Zhao K., Yang X.-L., Wen Z.-F.* Failure criteria and wind-induced vibration analysis for an offshore platform jacking system // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2021. Article no. 2150105. https://doi.org/10.1142/S0219455421501054 EDN: GQYSUL

13. *Martin P., Elena V.B., Loredo-Souza A.M., Camaño E.B*. Experimental study of the effects of dish antennas on the wind loading of telecommunication towers // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2016. Vol. 149. P. 40–47. https://doi.org/10.1016/j.jweia.2015.11.010

14. *Wu P., Chen G., Feng R., He F.* Research on wind load characteristics on the surface of a towering precast television tower with a grid structure based on large eddy simulation // Buildings. 2022. Vol. 12. No. 9. Article no. 428. https://doi.org/10.3390/buildings12091428 EDN: FJSQVE

15. *Fernández Lorenzo I., Clavelo Elena B., Martín Rodríguez P., Elena Parnás V.B.* Dynamic analysis of self-supported tower under hurricane wind conditions // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2020. Vol. 197. Article no. 104078. https://doi.org/10.1016/j.jweia.2019.104078 EDN: MEZHDB

16. *Маркина Ю.Д.* Расчетные направления ветра при экспертизе несущей способности трехгранных антенно-мачтовых сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 4. С. 334–345. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-334-345 EDN: CIVXMF

17. *Zhang W., Xiao Y., Li C., Zheng Q., Tang Y.* Wind load investigation of self-supported lattice transmission tower based on wind tunnel tests // Engineering Structures. 2022. Vol. 252. Article no. 113575. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113575 EDN: LJNXDT

18. *Kenéz Á., Joó A.L.* Performance-based wind engineering assessment of a telecommunication mast utilizing Bayesian extreme wind velocity model // Stochastic Environmental Research and Risk Assessment. 2024. Vol. 38. P. 727–749. https://doi.org/10.1007/s00477-023-02596-w EDN: QXLUJQ

19. *Маркина Ю.Д.* Влияние расположения технологического оборудования на результаты расчета цифровой модели башни сотовой связи // Омский научный вестник. 2025. № 4 (196). С. 26–34. https://doi.org/10.25206/1813-8225-2025-196-26-34 EDN: UGRPYB

20. *Li M., Li H., Wen Y.* Design and Performance Study of a Six-Leg Lattice Tower for Wind Turbines // Buildings. 2024. Vol. 14. No. 4. Article no. 965. https://doi.org/10.3390/buildings14040965 EDN: PDHMCM

21. *Carril C.F., Isyumov N., Brasil R.M.L.R.F.* Experimental study of the wind forces on rectangular latticed communication towers with antennas // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2003. Vol. 91. No. 8. P. 1007–1022. https://doi.org/10.1016/S0167-6105(03)00049-7

22. *Маркина Ю.Д.* Алгоритм оценки ветровой нагрузки на рабочие площадки антенно-мачтовых сооружений в условиях цифровизации расчетов // Омский научный вестник. 2026. № 2 (198). С. 60–68. https://doi.org/10.25206/1813-8225-2026-198-60-68

23. *Langlois S., Prud'homme S., Légeron F., Pourshargh F.* Review of advanced modelling methods for lattice steel towers // CIGRE-IEC Colloquium on Overhead Lines. 2016. P. 1–8. URL: https://www.academia.edu/108286712/Review_of_advanced_modelling_methods_for_lattice_steel_towers (accessed: 27.02.2026).

24. *Jia Y., Huang J., Liu Q., Zhao Z., Dong M.* Analysis of the Influence of antenna arrangement parameters on the aerodynamic performance of telecommunication towers // Applied Sciences. 2024. Vol. 14. No. 6. Article no. 2538. https://doi.org/10.3390/app14062538 EDN: YXAMSN

25. *Khazaali M., Ma L., Rokneddin K., Mazzotti M., Bocchini P.* A robust protocol to compute wind load coefficients of telecommunication towers and antennas using numerical simulation for risk and resilience assessment // Resilient Cities and Structures. 2024. Vol. 3. No. 1. P. 66–83. https://doi.org/10.1016/j.rcns.2024.02.001 EDN: LYXCFY

References

1. He B, Zhao M, Feng W, Xiu Y, Wang Y, Feng L, Qin Y, Wang C. A method for analyzing stability of tower-line system under strong winds. *Advances in Engineering Software*. 2019;127:1–7. https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.10.004

2. Kassem MM, Yang M, Liu S, Liu J, Gao G, Yang Z. Quantification of the seismic behavior of a steel transmission tower subjected to single and repeated seismic excitations. *Applied Sciences*. 2022;12(4):1984. https://doi.org/10.3390/app12041984 EDN: UNGRWA

3. Kashevarova GG. Synergy of numerical methods and intelligent technologies in diagnostics of construction sites. *Academia. Architecture and Construction*. 2025;(3):140–145. (In Russ.) https://doi.org/10.22337/2077-9038-2025-3-140-145 EDN: PJOBAI

4. Chemodurov VT, Azhermachev SG, Pshenichnaya-Azhermacheva KS. Problems of ensuring the correspondence between computational schemes of building structures and the real behavior of structures during operation. *Economics of Construction and Environmental Management*. 2018;(3):5–8. (In Russ.) EDN: YWMMHJ

5. Zhang Y, Hao R, Niiranen J, Yang Y, Brühwiler E, Su D, Nagayama T. Computational engine for finite element digital twins of structural dynamics via motion data. *Engineering Structures*. 2024;316:118630. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118630 EDN: HZKXOI

6. Xu Y, Chen B, Wang J, Li Z. Model updating of complex civil engineering structures using hybrid optimization algorithms. *Engineering Structures*. 2022;252:113657. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113657

7. Sun H, Betti R. System identification and finite element model updating for structural health monitoring: a review. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2022;167:108472. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108472

8. Sun Z, Jayasinghe S, Sidiq A, Setunge S. Approach towards the development of digital twin for structural health monitoring of civil infrastructure: a comprehensive review. *Sensors*. 2025;25(1):59. https://doi.org/10.3390/s25010059 EDN: QVPELT

9. Poddaeva O, Fedosova A. Computational and experimental simulation of wind impacts on a lattice structure. *Energy Reports*. 2023;9:355–361. https://doi.org/10.1016/j.egyr.2023.05.274

10. Haidarpour A, Fah Tee K. Finite element model updating for structural health monitoring. *Structural Structural Durability and Health Monitoring*. 2020;14(1):1–17. https://doi.org/10.32604/sdhm.2020.08792 EDN: BGZSUK

11. Calotescu I, Torre S, Freda A, Solari G. Wind tunnel testing of telecommunication lattice towers equipped with ancillaries. *Engineering Structures*. 2021;241:112526 https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112526 EDN: RQNDJA

12. Li HN, Liu HJ, Fu X, Zhao K, Yang XL, Wen ZF. Failure criteria and wind-induced vibration analysis for an offshore platform jacking system. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2021;21(5):2150105. https://doi.org/10.1142/S0219455421501054 EDN: GQYSUL

13. Martin P, Elena VB, Loredo-Souza AM, Camaño EB. Experimental study of the effects of dish antennas on the wind loading of telecommunication towers. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2016;149:40–47. https://doi.org/10.1016/j.jweia.2015.11.010

14. Wu P, Chen G, Feng R, He F. Research on wind load characteristics on the surface of a towering precast television tower with a grid structure based on large eddy simulation. *Buildings*. 2022;12(9):428. https://doi.org/10.3390/buildings12091428 EDN: FJSQVE

15. Fernández Lorenzo I, Clavelo Elena B, Martín Rodríguez P, Elena Parnás VB. Dynamic analysis of self-supported tower under hurricane wind conditions. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2020;197:104078. https://doi.org/10.1016/j.jweia.2019.104078 EDN: MEZHDB

16. Markina YuD. Design wind directions in structural assessment of triangular antenna-mast structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(4):334–345. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-334-345 EDN: CIVXMF

17. Zhang W, Xiao Y, Li C, Zheng Q, Tang Y. Wind load investigation of self-supported lattice transmission tower based on wind tunnel tests. *Engineering Structures*. 2022;252:113575. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113575 EDN: LJNXDT

18. Kenéz Á, Joó AL. Performance-based wind engineering assessment of a telecommunication mast utilizing Bayesian extreme wind velocity model. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 2024;38:727–749. https://doi.org/10.1007/s00477-023-02596-w EDN: QXLUJQ

19. Markina YuD. Influence of technological equipment placement on the results of numerical simulation of a cellular communication tower. *Omsk Scientific Bulletin*. 2025;4(196):26–34. (In Russ.) https://doi.org/10.25206/1813-8225-2025-196-26-34 EDN: UGRPYB

20. Li M, Li H, Wen Y. Design and performance study of a six-leg lattice tower for wind turbines. *Buildings*. 2024;14(4):965. https://doi.org/10.3390/buildings14040965 EDN: PDHMCM

21. Carril CF, Isyumov N, Brasil RMLRF. Experimental study of the wind forces on rectangular latticed communication towers with antennas. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2003;91(8):1007–1022. https://doi.org/10.1016/S0167-6105(03)00049-7

22. Markina YuD. Algorithm for assessing wind loads on working platforms of antenna-mast structures under conditions of digitalized engineering analysis. *Omsk Scientific Bulletin*. 2026;2(198):32–39. (In Russ.) https://doi.org/10.25206/1813-8225-2026-198-32-39 EDN: SSZCZD

23. Langlois S, Prud'homme S, Légeron F, Pourshargh F. Review of advanced modelling methods for lattice steel towers. *CIGRE-IEC Colloquium on Overhead Lines*. 2016:1–8. Available from: https://www.academia.edu/108286712/Review_of_advanced_modelling_methods_for_lattice_steel_towers (accessed: 27.02.2026).

24. Jia Y, Huang J, Liu Q, Zhao Z, Dong M. Analysis of the influence of antenna arrangement parameters on the aerodynamic performance of telecommunication towers. *Applied Sciences*. 2024;14(6):2538. https://doi.org/10.3390/app14062538 EDN: YXAMSN

25. Khazaali M, Ma L, Rokneddin K, Mazzotti M, Bocchini P. A robust protocol to compute wind load coefficients of telecommunication towers and antennas using numerical simulation for risk and resilience assessment. *Resilient Cities and Structures*. 2024;3(1):66–83. https://doi.org/10.1016/j.rcns.2024.02.001 EDN: LYXCFY

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 283–292

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-283-292
EDN: LJRNOJ

Научная статья / Research article

Оценка размеров фрагмента грунтового массива при численном моделировании тройникового соединения цилиндрических оболочек

С.Б. Косицын, В.Ю. Акулич✉, Л.Н. Осетинский

Российский университет транспорта, *Москва, Российская Федерация*
✉ vladimir.akulich@gmail.com

Поступила в редакцию: 22 марта 2026 г.
Доработана: 28 мая 2026 г.
Принята к публикации: 3 июня 2026 г.

Аннотация. Выполнено численное моделирование пространственной системы «оболочка – грунтовый массив», включающей тройниковое соединение цилиндрических оболочек и прилегающий грунтовый массив, с использованием контактных элементов для описания зазора между конструкцией и грунтом. Исследование проведено для фрагментов массива различной ширины с целью оценки их влияния на величину и форму мульды осадки земной поверхности. Рассмотрены восемь расчетных моделей, в которых расстояние L от краев основной и примыкающей оболочек до боковых торцов массива изменялось в диапазоне от $1D$ до $8D$ с шагом D, где D — диаметр основной оболочки. Окружающий массив моделировался трехмерными конечными элементами (SOLID186, SOLID187), цилиндрическая оболочка моделировалась оболочечными элементами (SHELL181); поведение грунта описано упругопластической моделью Мора — Кулона. Получены семейства кривых мульд осадок поверхности массива в поперечном и продольном направлениях к оси примыкающей оболочки. Установлено, что при ширине расчетного массива от $1D$ до $5D$ заметно изменяются как величины осадок, так и форма мульды оседания, а при дальнейшем увеличении размеров расчетной области ($L \geq 5D$) изменение формы и глубины мульды становится незначительным. На основе анализа напряженно-деформированного состояния системы для инженерных расчетов рекомендовано принимать ширину массива $L \geq 5D$, при этом предпочтительным является значение $L = 5D$, обеспечивающее достаточную точность прогнозирования осадки без чрезмерного увеличения числа конечных элементов. Полученные результаты позволяют поддерживать баланс между скоростью расчета и достоверностью математического моделирования, что особенно важно при многовариантном анализе.

Ключевые слова: строительная механика, метод конечных элементов, осадка поверхности, подземные сооружения

Вклад авторов: *Косицын С.Б.* — научное руководство, концепция исследования, развитие методологии, итоговые выводы; *Акулич В.Ю.* — концепция исследования, развитие методологии, реализация численных моделей; *Осетинский Л.Н.* — развитие методологии, написание статьи, визуализация. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания номер 103-00001-26-00 от 15.01.2026 г.

Для цитирования: *Косицын С.Б., Акулич В.Ю., Осетинский Л.Н.* Оценка размеров фрагмента грунтового массива при численном моделировании тройникового соединения цилиндрических оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 283–292. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-283-292 EDN: LJRNOJ

Косицын Сергей Борисович, советник РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики, Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, ГСП-4, Москва, ул. Образцова, д. 9; eLIBRARY SPIN-код: 9390-7610, ORCID: 0000-0002-3241-0683; e-mail: kositsyn-s@yandex.ru
Акулич Владимир Юрьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, ГСП-4, Москва, ул. Образцова, д. 9; eLIBRARY SPIN-код: 8428-4636, ORCID: 0000-0002-9467-5791; e-mail: vladimir.akulich@gmail.com
Осетинский Леонид Николаевич, студент, техник научно-исследовательского центра «Тепло- и массообмен в строительстве», Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, ГСП-4, Москва, ул. Образцова, д. 9; ORCID: 0009-0003-8268-7482; e-mail: leonid.osetinsckij@yandex.ru

© Косицын С.Б., Акулич В.Ю., Осетинский Л.Н., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Estimation of Dimensions of the Soil Body Fragment in Numerical Modeling of a T-Connection of Cylindrical Shells

Sergey B. Kosytsyn, Vladimir Yu. Akulich✉, Leonid N. Osetinskii

Russian University of Transport, *Moscow*, *Russian Federation*
✉ vladimir.akulich@gmail.com

Received: March 22, 2026
Revised: May 28, 2026
Accepted: June 3, 2026

Abstract. A numerical simulation of the three-dimensional "shell — soil" system was performed, comprising a T-connection of cylindrical shells and the surrounding soil body, using contact elements to describe the gap between the structure and the soil. The study was carried out for soil fragments of various widths in order to evaluate their influence on the magnitude and shape of the surface settlement trough. Eight models were considered, in which the distance L from the edges of the main and adjoining shells to the lateral faces of the soil body varied from $1D$ to $8D$ in steps of D, where D is the diameter of the main shell. The surrounding soil body was modeled with three-dimensional finite elements (SOLID186, SOLID187), the cylindrical shell — with shell elements (SHELL181); the soil behavior was described by the elastic-plastic Mohr–Coulomb model. Families of surface settlement trough curves were obtained in the transverse and longitudinal directions relative to the axis of the adjoining shell. It was established that for the soil body width from $1D$ to $5D$ both the settlement magnitudes and the shape of the settlement trough change noticeably, whereas with a further increase of the model domain ($L \geq 5D$) the change in the shape and depth of the trough becomes insignificant. Based on the stress analysis of the system, it is recommended for engineering calculations to adopt a soil body width of $L \geq 5D$, with $L = 5D$ being preferable, providing sufficient accuracy of settlement prediction without an excessive increase in the number of finite elements. The obtained results help maintain a balance between computational speed and reliability of the mathematical modeling, which is especially important in multivariate analysis.

Keywords: structural mechanics, finite element method, surface settlement, underground structures

Authors' contribution. *Kosytsyn S.B.* — supervision, conceptualization, methodology, conclusions; *Akulich V.Yu.* — conceptualization, methodology, numerical models; *Osetinskii L.N.* — methodology, writing, visualization. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

Funding. The work was performed within the framework of the state assignment number 103-00001-26-00 dated 01/15/2026.

For citation: Kosytsyn SB, Akulich VYu, Osetinskii LN. Estimation of dimensions the soil body fragment in numerical modeling of a T-connection of cylindrical shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2026;22(3):283–292. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-283-292 EDN: LJRNOJ

1. Введение

Создание и строительство подземных объектов в инженерно-строительной практике предполагает использование интегрированного подхода, основанного на точных вычислениях и детальном анализе работы несущих элементов во взаимодействии с грунтовой средой. Существенное место в проектном процессе занимают расчетные методы, в особенности метод конечных элементов (МКЭ), обеспечивающие моделирование строительных конструкций при разнообразных видах нагрузок с учетом нелинейных свойств грунтового массива [1–7].

Sergey B. Kosytsyn, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (RAASN), Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, 15 Obraztsova St, GSP-4, Moscow, 127994, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9390-7610, ORCID: 0000-0002-3241-0683; e-mail: kositsyn-s@yandex.ru
Vladimir Yu. Akulich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, 15 Obraztsova St, GSP-4, Moscow, 127994, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8428-4636, ORCID: 0000-0002-9467-5791; e-mail: vladimir.akulich@gmail.com
Leonid N. Osetinskii, Student, Technician at the "Heat and Mass Transfer in Construction" Scientific Research Center, Russian University of Transport, 15 Obraztsova St, GSP-4, Moscow, 127994, Russian Federation; ORCID: 0009-0003-8268-7482; e-mail: leonid.osetinsckij@yandex.ru

Среди наиболее ответственных объектов подземного строительства — станции метрополитена, перегонные и эскалаторные тоннели, транспортные узлы, а также вспомогательные сооружения, такие как тоннельные сбойки и камеры съездов. Места пересечения тоннелей образуют тройниковые соединения цилиндрических оболочек, в которых формируется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние, требующее детального анализа. Ранее авторами был выполнен численный анализ напряженно-деформированного состояния ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с грунтовым основанием [8–9]; настоящая работа продолжает это исследование в части обоснования размеров расчетной области.

При численном моделировании системы «оболочка — грунтовый массив» одним из ключевых вопросов является выбор размеров фрагмента грунтового массива, включаемого в расчетную модель. С одной стороны, массив должен быть достаточно большим, чтобы граничные условия на его торцах не искажали напряженно-деформированное состояние и прогнозируемую осадку поверхности. С другой стороны, чрезмерное увеличение расчетной области ведет к существенному росту числа конечных элементов и вычислительной трудоемкости, что особенно критично при многовариантном анализе. Несмотря на значительное число работ, посвященных прогнозу осадок земной поверхности при проходке одиночных и параллельных тоннелей [3–5], вопрос обоснованного выбора размеров расчетной области для тройникового соединения цилиндрических оболочек, взаимодействующего с грунтовым массивом, ранее систематически не исследовался, что определяет научную новизну настоящей работы. Объект исследования — пространственная система «оболочка — грунтовый массив», включающая тройниковое соединение цилиндрических оболочек и окружающее основание. *Цель исследования* — оценить влияние ширины фрагмента грунтового массива на величину и форму осадки поверхности в поперечном и продольном направлениях к оси примыкающей оболочки и определить размеры расчетной области, обеспечивающие приемлемую точность прогноза осадки при минимальных вычислительных затратах. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи: построение серии конечно-элементных моделей с шириной массива от *1D* до *8D*; анализ напряженно-деформированного состояния системы и мульд осадок поверхности; обоснование рекомендуемого размера фрагмента массива.

2. Метод расчета

Выполнено моделирование пространственной системы, включающей тройниковое соединение цилиндрических оболочек и прилегающий грунтовый массив, с использованием контактных элементов для описания зазора между конструкцией и грунтом [8–9]. Окружающий массив задан трехмерными конечными элементами: SOLID186 — высокоуровневый изопараметрический объемный элемент с квадратичной аппроксимацией для моделирования трехмерных твердых тел и SOLID187 — изопараметрический тетраэдрический объемный элемент. Цилиндрическая оболочка задана двумерными элементами SHELL181 — четырехузловым оболочечным конечным элементом, предназначенным для моделирования тонких и умеренно толстых оболочек в структурных анализах и широко используемым благодаря своей универсальности и возможности учета сложных физических эффектов. Вопросы конечно-элементного моделирования цилиндрических оболочек, пластин и пространственных конструкций при статических и динамических воздействиях рассматривались в работах [10–17].

Основная цилиндрическая оболочка имеет диаметр D_1 = 5,50 м и толщину t_1 = 0,25 м; примыкающая оболочка — диаметр D_2 = 3,85 м и толщину t_2 = 0,20 м. Материал оболочек задан идеально упругой моделью со следующими параметрами: модуль упругости E_{sh} = 30 000 МПа, коэффициент Пуассона μ_{sh} = 0,2, плотность ρ_{sh} = 2300 кг/ м^3. Материал основания задан упругопластической моделью Мора — Кулона (O. Mohr, C.A. Coulomb) со следующими параметрами: модуль деформации E_{soil} = 30 МПа, коэффициент поперечной деформации μ_{soil} = 0,3, плотность ρ_{soil} = 2000 кг/м^3, сцепление C_{soil} = 10 кПа, угол внутреннего трения φ_{soil} = 25°. Ось оболочек расположена на глубине 30 м от

дневной поверхности. Физико-механические характеристики основания приняты по справочным данным для дисперсных грунтов и соответствуют диапазону значений, используемых в инженерной практике при проектировании подземных сооружений.

Упругопластическая модель Мора — Кулона выбрана как наиболее распространенная в инженерных расчетах модель грунта, требуя минимального числа определяемых параметров. Следует отметить, что модель Мора — Кулона с постоянным модулем деформации может несколько завышать осадки поверхности по сравнению с моделями, учитывающими модуль упругости при повторном нагружении (например, модель упрочняющегося грунта Hardening Soil); вместе с тем для целей настоящего исследования, направленного на оценку относительного влияния размеров расчетной области, такой выбор является приемлемым.

В рассмотренных восьми расчетных моделях тройникового соединения оболочек расстояние L от краев основной и примыкающей оболочек до боковых торцов массива принималось в диапазоне от $L = 1D$ до $L = 8D$ с шагом D, где D — диаметр основной оболочки. Граничные условия заданы следующим образом: на нижней грани массива запрещены перемещения по всем трем координатным направлениям, на боковых (вертикальных) гранях запрещены перемещения в направлении нормали к соответствующей грани при сохранении свободы вертикальных перемещений. Нагрузка на систему приложена от собственного веса конструкций и грунтового массива. Общий вид конечно-элементной сетки модели и тройникового соединения при $L = 5D$ приведен на рис. 1 и 2.

Численное решение выполнено в программном комплексе ANSYS Mechanical 2025 R2. Расчет является физически и конструктивно нелинейным (нелинейность обусловлена упруго-пластической моделью грунта и контактным взаимодействием тел) и выполнен в статической постановке с использованием неявного решателя. Нагрузка от собственного веса прикладывалась пошагово; на каждом шаге равновесие достигалось итерационным методом Ньютона — Рафсона с критериями сходимости по силам и перемещениям.

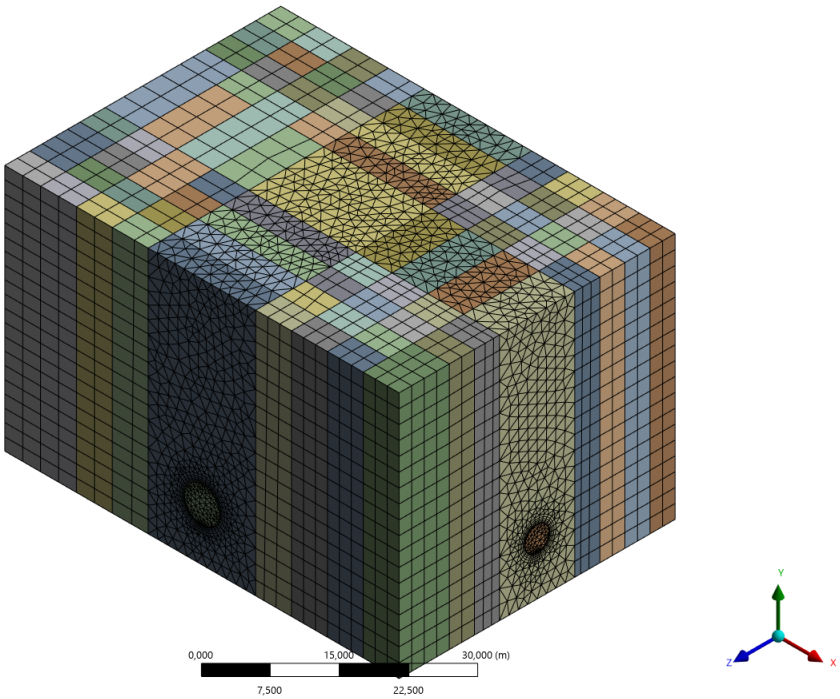


Рис. 1. Общий вид конечно-элементной сетки модели «оболочка — массив» при $L = 5D$

И с т о ч н и к: выполнено авторами в программном комплексе ANSYS Mechanical 2025 R2.

Figure 1. General view of the finite element mesh of the «shell — soil» model at $L = 5D$

S o u r c e: made by the authors in ANSYS Mechanical 2025 R2 software package.

Характерный размер элемента цилиндрических оболочек имеет величину 0,15 м. Для модели с $L = 5D$ общее число конечных элементов составляло порядка 5×10^5, число узлов — порядка 8×10^5. Предварительно выполнена проверка сходимости решения по сетке: измельчение элементов прекращалось при условии, что изменение максимальной осадки поверхности не превышает 2 % по сравнению с более грубой сеткой, что подтверждает независимость представленных результатов от плотности дискретизации.

Контактное взаимодействие между внешней поверхностью оболочек и грунтом задано парами контактных элементов CONTA174 — TARGE170 в постановке «поверхность — поверхность». Использован метод множителей Лагранжа, где возможно раскрытие зазора при растяжении. Касательное взаимодействие описано моделью трения Кулона с коэффициентом трения 0,3.

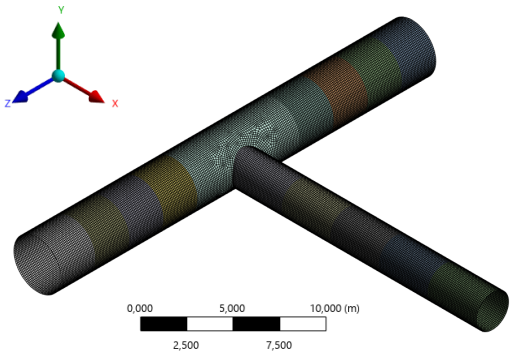


Рис. 2. Общий вид конечно-элементной сетки тройникового соединения оболочек при $L = 5D$

И с т о ч н и к: выполнено авторами в программном комплексе ANSYS Mechanical 2025 R2.

Figure 2. General view of the finite element mesh of the T-connection of the shells at $L = 5D$

S o u r c e: made by the authors in ANSYS Mechanical 2025 R2 software package.

3. Результаты и обсуждение

По результатам расчета для каждой модели получены поля вертикальных перемещений грунтового массива и эквивалентных напряжений по Мизесу в теле оболочек тройникового соединения. Изополя вертикальных перемещений массива (вид сверху) и максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу по внешней стороне стенок оболочек при $L = 5D$ приведены на рис. 3 и 4.

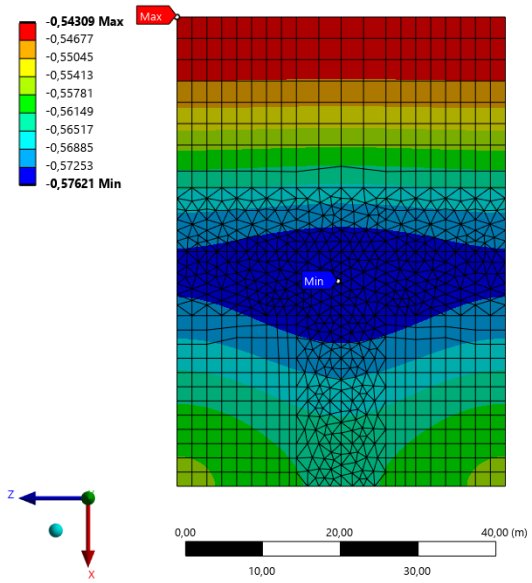


Рис. 3. Изополя вертикальных перемещений массива при $L = 5D$ (вид сверху)

И с т о ч н и к: выполнено авторами в программном комплексе ANSYS Mechanical 2025 R2.

Figure 3. Contour plot of vertical displacements of the soil body at $L = 5D$ (top view)

S o u r c e: made by the authors in ANSYS Mechanical 2025 R2 software package.

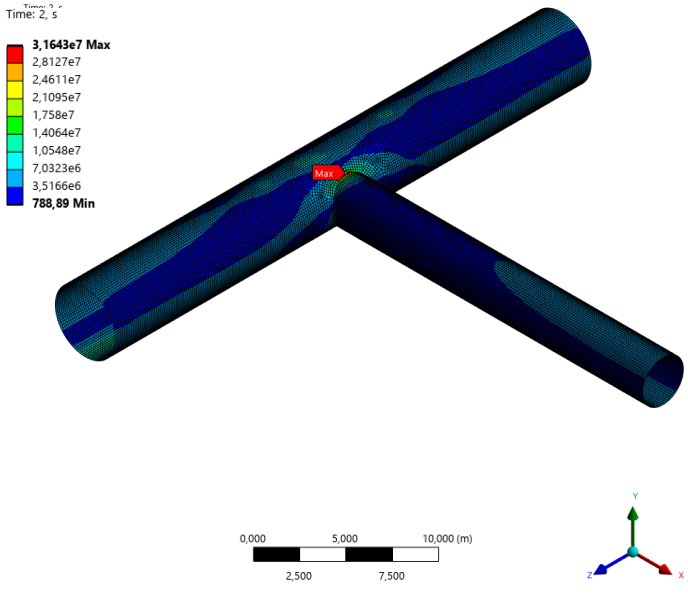


Рис. 4. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу по внешней стороне стенок оболочек тройникового соединения при $L = 5D$

И с т о ч н и к: выполнено авторами в программном комплексе ANSYS Mechanical 2025 R2.

Figure 4. Maximum equivalent stresses (von Mises) on the outer side of the walls of the T-connected shells at $L = 5D$

S o u r c e: made by the authors in ANSYS Mechanical 2025 R2 software package.

Эквивалентные напряжения по Мизесу σ_e найдены по формуле

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения.

Анализ полей эквивалентных напряжений показывает, что наибольшие значения напряжений по Мизесу локализуются в зоне сопряжения основной и примыкающей оболочек, в то время как в остальном теле оболочек уровень напряжений существенно ниже. Такой характер распределения типичен для тройниковых соединений и качественно согласуется с результатами, полученными ранее для ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с основанием [8–9]. Это подтверждает, что именно область сопряжения оболочек является наиболее ответственным участком конструкции и требует особого внимания при назначении сетки конечных элементов и интерпретации результатов расчета.

Для оценки влияния ширины фрагмента массива построены семейства кривых мульд осадок верхней поверхности массива в поперечном и продольном направлениях к оси примыкающей цилиндрической оболочки, полученные в результате восьми расчетных случаев при L от $1D$ до $8D$ (рис. 5 и 6). Следует обратить внимание, что максимум осадок расположен не над осью основного тоннеля, а смещен в сторону примыкающей оболочки.

Из представленных графиков следует, что при ширине расчетного массива от $L = 1D$ до $5D$ заметны изменения как в величинах осадок, так и в форме мульды оседания. Это связано с тем, что при малой ширине массива влияние оболочки не может свободно распространяться в стороны, что приводит к увеличению осадок. При дальнейшем увеличении размеров расчетной области ($L \geq 5D$) изменение формы и глубины мульды становится незначительным.

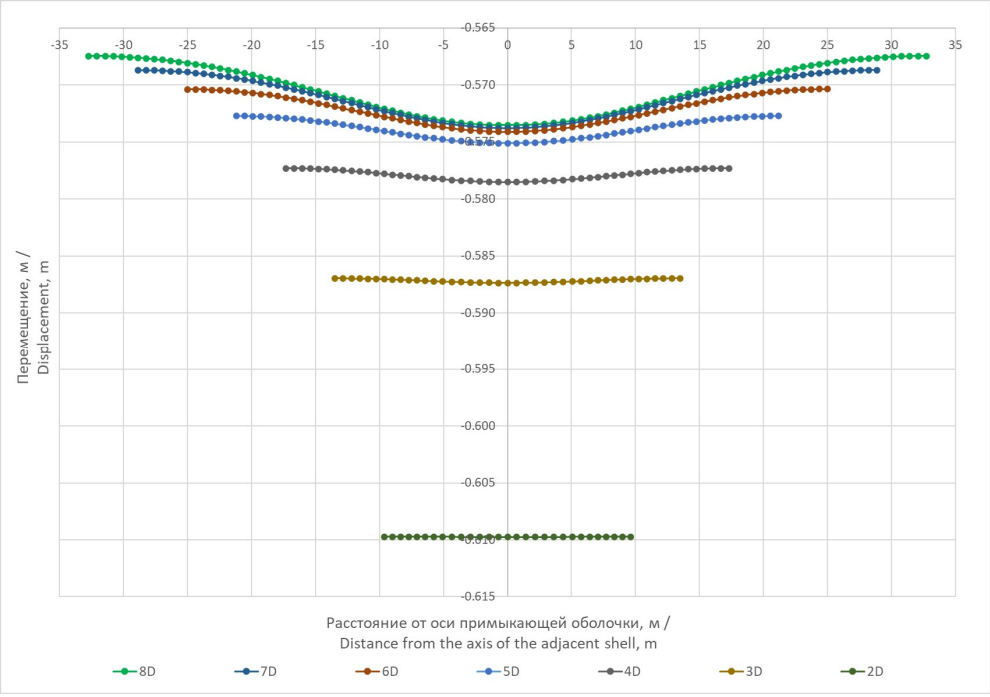


Рис. 5. Набор кривых мульд осадок на поверхности массива в поперечном направлении к оси примыкающей оболочки при L от $2D$ до $8D$

И с т о ч н и к: выполнено авторами в программном комплексе ANSYS Mechanical 2025 R2.

Figure 5. Family of surface settlement trough curves in the transverse direction relative to the axis of the adjoining shell at L from $2D$ to $8D$

S o u r c e: made by the authors in ANSYS Mechanical 2025 R2 software package.

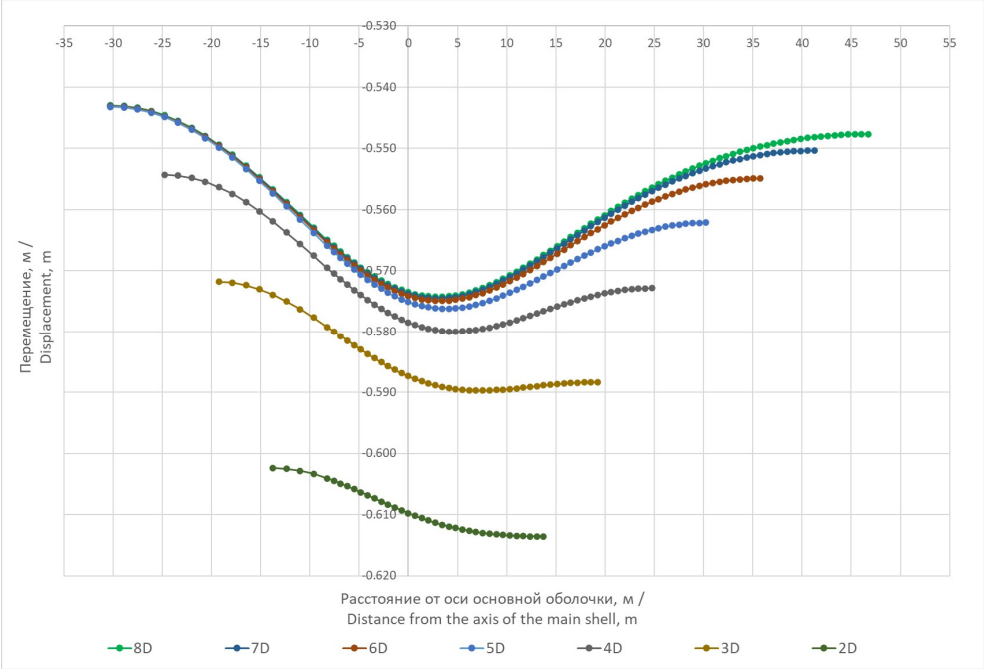


Рис. 6. Набор кривых мульд осадок на поверхности массива в продольном направлении к оси примыкающей оболочки при L от $2D$ до $8D$

И с т о ч н и к: выполнено авторами в программном комплексе ANSYS Mechanical 2025 R2.

Figure 6. Family of surface settlement trough curves in the longitudinal direction relative to the axis of the adjoining shell at L from $2D$ to $8D$

S o u r c e: made by the authors in ANSYS Mechanical 2025 R2 software package.

С физической точки зрения данный эффект объясняется тем, что при недостаточной ширине расчетной области жесткие граничные условия на боковых торцах массива попадают в зону активного влияния конструкции и стесняют свободное развитие поля перемещений грунта. В результате формируется искусственно завышенная и более «зажатая» мульда оседания, не отражающая действительную работу неограниченного в плане массива. По мере удаления боковых границ от оболочек их влияние на напряженно-деформированное состояние грунта в окрестности тройникового соединения ослабевает и получаемое решение приближается к решению для полупространства.

Сопоставление кривых, полученных для последовательно увеличивающихся значений L, показывает, что разница между соседними расчетными случаями монотонно уменьшается: наибольшие отличия наблюдаются для моделей малой ширины, тогда как кривые, соответствующие значениям $L = 5D$ и более, практически совпадают как по глубине, так и по форме мульды. Это свидетельствует о сходимости решения по размеру расчетной области и позволяет считать результат, получаемый при $L \geq 5D$, устойчивым по отношению к дальнейшему расширению фрагмента массива.

Для количественной оценки сходимости решения по размеру расчетной области использован относительный показатель — изменение максимальной осадки поверхности δ при переходе от модели шириной L к модели шириной $L + D$ (в процентах). Результаты приведены в таблице. Относительное изменение максимальной осадки монотонно убывает с ростом L и при $L \geq 5D$ не превышает 2 %, что принято в качестве критерия достаточности размеров расчетной области.

Сравнение мульд осадок в поперечном и продольном направлениях к оси примыкающей оболочки показывает качественно схожую тенденцию затухания влияния границ при увеличении размеров расчетной области. При этом в продольном направлении более выраженно проявляется асимметрия мульды: ее максимум смещен в сторону примыкающей оболочки, что обусловлено несимметричной геометрией тройникового соединения и дополнительным догружением массива со стороны примыкающего тоннеля. Данную особенность необходимо учитывать при назначении контрольных

точек геотехнического мониторинга осадок земной поверхности над подобными узлами подземных сооружений.

Полученные результаты качественно согласуются с данными исследований осадок земной поверхности [3–5].

Сходимость максимальной осадки поверхности по размеру расчетной области (поперечное направление к оси примыкающей оболочки)
Convergence of the maximum surface settlement with the model domain width (transverse direction relative to the axis of the adjoining shell)

Ширина массива *L* / Model domain width *L*	**Максимальная осадка, м / Maximum vertical movement, cm**	**Относительное изменение δ, % / Relative change δ, %**
1*D*	–0,6799	–
2*D*	–0,6098	10,3
3*D*	–0,5884	3,5
4*D*	–0,5765	2,0
5*D*	–0,5751	< 1,0
6*D*	–0,5741	< 1,0
7*D*	–0,5738	< 1,0
8*D*	–0,5735	< 1,0

И с т о ч н и к: выполнено авторами в программном комплексе ANSYS Mechanical 2025 R2 /
S o u r c e: made by the authors in ANSYS Mechanical 2025 R2 software package.

4. Заключение

1. На основе анализа напряженно-деформированного состояния системы «оболочка – грунтовый массив» рекомендовано для инженерных расчетов принимать ширину массива $L \geq 5D$, что обеспечивает достаточную точность прогнозирования осадки без чрезмерного увеличения числа элементов конечно-элементной модели. Хотя дальнейшее увеличение размеров расчетного фрагмента способно лишь незначительно повысить точность, оно существенно повышает вычислительную трудоемкость, поэтому значение $L = 5D$ является предпочтительным.

2. Установлено, что максимум осадки поверхности расположен не над осью основного тоннеля, а смещен в сторону примыкающей оболочки, что необходимо учитывать при оценке деформаций земной поверхности над тройниковыми соединениями.

3. Выбор размера расчетной области особенно важен при многовариантном анализе, так как позволяет поддерживать баланс между скоростью расчета и достоверностью математического моделирования.

4. Полученные количественные результаты и рекомендуемое значение $L = 5D$ справедливы для рассмотренного варианта системы (соотношение диаметров оболочек, глубина заложения, заданные характеристики грунта) и принятой упругопластической модели Мора – Кулона. При существенном изменении геометрии узла, глубины заложения или жесткости грунта значение порога может отличаться, что требует дополнительной проверки.

5. Установленный критерий $L \geq 5D$ может использоваться как первое приближение при назначении размеров расчетной области для аналогичных пересечений подземных сооружений. Уточнение критерия для других конфигураций, а также применение других моделей грунта составляют направление дальнейших исследований.

Список литературы

1. *Li J., Shi Z., Liu L.* A scaled boundary finite element method for static and dynamic analyses of cylindrical shells // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2019. Vol. 98. P. 217–231. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.10.024

2. *Zang Q., Liu J., Ye W., Yang F., Pang R., Lin G.* High-performance bending and buckling analyses of cylindrical shells resting on elastic foundation using isogeometric scaled boundary finite element method // European Journal of Mechanics — A/Solids. 2023. Vol. 100. Article no. 105013. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105013 EDN: YHVYJC

3. *Niu G., He X., Xu H., Dai S.* Tunnelling-induced ground surface settlement: A comprehensive review with particular attention to artificial intelligence technologies // Natural Hazards Research. 2024. Vol. 4. No. 1. P. 148–168. https://doi.org/10.1016/j.nhres.2023.11.002 EDN: SFZQPC

4. *Huat Ch.Yu., Armaghani D.Ja., Lai S.H., Motaghedi H., Asteris P.G., Fakharin P.* Analyzing surface settlement factors in single and twin tunnels: A review study // Journal of Engineering Research. 2025. Vol. 13. Issue 3. P. 2096–2108. https://doi.org/10.1016/j.jer.2024.05.009 EDN: QHYEWN

5. *Ahmed K.S., Sharmin J., Ansary M.A.* Numerical investigation of tunneling induced surface movement: A case study of MRT line 1, Dhaka // Underground Space. 2023. Vol. 12. P. 116–136. https://doi.org/10.1016/j.undsp.2023.02.008 EDN: VOOZJH

6. *Wang X., Wang Yu., Yang Yi., Fang Y., Zhuo B.* Distribution characteristics and spatial correlation analysis of defects in in-service metro shield tunnels: A case study // Tunnelling and Underground Space Technology. 2025. https://doi.org/10.1016/j.tust.2025.107397 EDN: KIWCMI

7. *Yao Y., Fang Y., He C., Xu G., Yao Z., Hu X.* Spatial motion patterns and force transmission characteristics of muck particles in EPB shield tunneling: An FDM–DEM coupling analysis // Underground Space. 2025. https://doi.org/10.1016/j.undsp.2025.05.005 EDN: HECKIX

8. *Косицын С.Б., Акулич В.Ю.* Численный анализ НДС ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 4. С. 303–310. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310 EDN: TVXXYV

9. *Косицын С.Б., Акулич В.Ю.* Пространственный расчет тройниковых соединений цилиндрических оболочек с учетом изменения расчетной модели во времени // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 3. С. 181–191. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-3 EDN: SSMRFB

10. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов на основе B-сплайнов для локального решения двумерной задачи теории упругости // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. № 1. С. 32–41. https://doi.org/10.22227/1997-0935.2022.1.32-41 EDN: IYPOKW

11. *Мангушев Р.А., Дьяконов И.П., Полунин В.М., Башмаков И.Б., Паскачева Д.А.* Математическое моделирование работы плитных элементов при совместной работе с грунтовым основанием в условиях плоской деформации // Жилищное строительство. 2024. № 11. С. 37–46. https://doi.org/10.31659/0044-4472-2024-11-37-46 EDN: BYRBSC

12. *Клочков Ю.В., Джабраилов А.Ш., Ищанов Т.Р., Марченко С.С., Андреев А.С., Клочков М.Ю.* Конечно-элементный расчет эллиптического цилиндра в геометрически нелинейной постановке при использовании векторной формы интерполяционной процедуры // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 1. С. 58–71. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.1.06 EDN: MYVJBF

13. *Лалин В.В., Ле Т.К.Ч.* Расчет строительных конструкций на несколько динамических воздействий со статическим учетом высших форм колебаний // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 3. С. 171–178. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-171-178 EDN: VSEGWP

14. *Mozgaleva M.L., Akimov P.A.* Localization of solution of the problem for Poisson's equation with the use of B-spline discrete-continual finite element method // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021. Vol. 17. No. 3. P. 157–172. https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-3-157-172 EDN: MFCJOI

15. *Янковский А.П.* Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования армированных цилиндрических оболочек // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 138–149. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.11. EDN: GEUKCU

16. *Зверяев Е.М., Пыхтин А.В., Хоа В.Д.* Пространственная задача для прямоугольной упругой пластины // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 4 (297). С. 2–11. https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.4.2.11 EDN: SUBZUM

17. *Бакулин В.Н.* Модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек с прямоугольными вырезами // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 122–132. https://doi.org/10.31857/S0572329922010032 EDN: UFTFXV

References

1. Li J, Shi Z, Liu L. A scaled boundary finite element method for static and dynamic analyses of cylindrical shells. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2019;98:217–231. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.10.024

2. Zang Q, Liu J, Ye W, Yang F, Pang R, Lin G. High-performance bending and buckling analyses of cylindrical shells resting on elastic foundation using isogeometric scaled boundary finite element method. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2023;100:105013. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105013 EDN: YHVYJC

3. Niu G, He X, Xu H, Dai S. Tunnelling-induced ground surface settlement: A comprehensive review with particular attention to artificial intelligence technologies. *Natural Hazards Research*. 2024;4(1):148–168. https://doi.org/10.1016/j.nhres.2023.11.002 EDN: SFZQPC

4. Huat Ch.Yu, Armaghani D.Ja, Lai SH, Motaghedi H, Asteris PG, Fakharin P. Analyzing surface settlement factors in single and twin tunnels: A review study. *Journal of Engineering Research*. 2025;13(3):2096–2108. https://doi.org/10.1016/j.jer.2024.05.009 EDN: QHYEWN

5. Ahmed KS, Sharmin J, Ansary MA. Numerical investigation of tunneling induced surface movement: A case study of MRT line 1, Dhaka. *Underground Space*. 2023;12:116–136. https://doi.org/10.1016/j.undsp.2023.02.008

6. Wang X, Wang Y, Yang Y, Fang Y, Zhuo B. Distribution characteristics and spatial correlation analysis of defects in in-service metro shield tunnels: A case study. *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2025. https://doi.org/10.1016/j.tust.2025.107397

7. Yao Y, Fang Y, He C, Xu G, Yao Z, Hu X. *Spatial motion patterns and force transmission characteristics of muck particles in EPB shield tunneling: An FDM–DEM coupling analysis*. Underground Space. 2025. https://doi.org/10.1016/j.undsp.2025.05.005

8. Kosytsyn SB, Akulich VYu. Numerical stress analysis of orthogonally intersecting cylindrical shells interacting with soil considering stages of construction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(4):303–310. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310 EDN: TVXXYV

9. Kosytsyn SB, Akulich VYu. Three-dimensional analysis of t-connections of cylindrical shells considering stages of construction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. (In Russ.) 2025;21(3):181–191. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-3 EDN: SSMRFB

10. Akimov PA, Mozgaleva ML. B-spline wavelet discrete-continual finite element method for the local solution to the two-dimensional problem of the theory of elasticity. *Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2022;17(1):32–41. (In Russ.) https://doi.org/10.22227/1997-0935.2022.1.32-41 EDN: IYPOKW

11. Mangushev RA, Dyakonov IP, Polunin VM, Bashmakov IB, Paskacheva DA. Mathematical modeling of the operation of plate elements when working together with a soil base in conditions of flat deformation. *Housing Construction.* 2024;(11):37–46. (In Russ.) https://doi.org/10.31659/0044-4472-2024-11-37-46 EDN: BYRBSC

12. Klochkov YuV, Dzhabrailov ASh, Ishchanov TR, Marchenko SS, Andreev AS, Klochkov MYu. Finite element calculation of an elliptical cylinder in a geometrically nonlinear formulation using the vector form of the interpolation procedure. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2022;(1):58–71. (In Russ.) https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.1.06 EDN: MYVJBF

13. Lalin VV, Le TKCh. Calculation of building structures for several dynamic effects with a static accounting of higher forms of oscillation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(3):171–178. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-171-178 EDN: VSEGWP

14. Mozgaleva ML, Akimov PA. Localization of solution of the problem for Poisson's equation with the use of B-spline discrete-continual finite element method. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021;17(3):157–172. https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-3-157-172 EDN: MFCJOI

15. Yankovsky AP. The refined model of viscoelastic-plastic deformation of reinforced cylindrical shells. *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2020;(1):138–149. (In Russ.) https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.11 EDN: GEUKCU

16. Zveryaev EM, Pyhtyn AV, Hoa VD. Spatial problem for rectangular elastic plate. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions.* 2021;4(297):2–11. (In Russ.) https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.4.2.11 EDN: SUBZUM

17. Bakulin V.N. Model for analysis of the stress-strain state of three-layer cylindrical shells with rectangular cutouts. *Mechanics of Solids*. 2022;57(1):102–110. https://doi.org/10.3103/S0025654422010095 EDN: EDN: KXXBKL

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 293–312

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
EXPERIMENTAL RESEARCH

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-293-312
EDN: LJWWRA

Research article / Научная статья

Comparative Analysis of the Stiffness Characteristics of Masonry Wall Based on Experimental Data and an Orthotropic Model

Omar M.D. Shakarneh

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), *Novosibirsk, Russian Federation*
✉ Oshakarneh@gmail.com

Received: August 25, 2025
Revised: March 15, 2026
Accepted: March 30, 2026

Abstract. This study presents a comparative analysis of the stiffness characteristics of brick masonry based on experimental data and an orthotropic model. The main focus is on the influence of mortar joint strength on the anisotropy of the elastic properties of masonry. For three series of samples KRO-1, KRO-2, KRO-3 with different mortar strengths, experimental compression tests were conducted, along with numerical modeling in the Abaqus software, including micro-modeling and macro-modeling based on an orthotropic model. The results demonstrate that the ratio of the elastic moduli of brick and mortar E_b/E_m significantly affects the distribution of strains and stresses in the masonry. An asymmetry in the stiffness matrix $D_{12} \neq D_{21}$ was observed, indicating the need to account for micromechanical effects in the "brick — mortar" contact zones. The highest anisotropy was found in samples with low-strength mortar series KRO-3, where the anisotropy coefficient D_{11}/D_{22} reached 1.253. The study confirms the validity of using an orthotropic model to describe the stiffness characteristics of masonry but highlights the necessity of its modification to account for structural heterogeneity and edge effects. The obtained results have practical significance for the design of masonry structures under complex stress conditions.

Keywords: brick masonry, orthotropic model, stiffness anisotropy, mortar strength, finite element modeling

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

Author Contributions: The author confirms sole responsibility for study conception, design, data collection, analysis, interpretation, and manuscript preparation.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Shakarneh OMD. Comparative analysis of the stiffness characteristics of masonry wall based on experimental data and an orthotropic model. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2026;22(3):293–312. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-293-312 EDN: LJWWRA

Omar M.D. Shakarneh, Postgraduate student of the Department of Reinforced Concrete Structures, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), 113 Leningradskaya St, Novosibirsk, 630008, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8794-4659, ORCID: 0009-0005-8683-5731; e-mail: Oshakarneh@gmail.com

© Shakarneh O.M.D., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Сравнительный анализ жесткостных характеристик стены из каменной кладки на основе экспериментальных данных и ортотропной модели

О.М.Д. Шакарнех

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), *Новосибирск, Российская Федерация*
✉ Oshakarneh@gmail.com

Поступила в редакцию: 25.08.2025
Доработана: 15.03.2026
Принята к публикации: 30.03.2026

Аннотация. Представлен сравнительный анализ жесткостных характеристик кирпичной кладки на основе экспериментальных данных и ортотропной модели. Основное внимание уделено влиянию прочности растворного шва на анизотропию упругих свойств кладки. Для трех серий образцов (KRO-1, KRO-2, KRO-3) с различной прочностью раствора были проведены экспериментальные испытания на сжатие, а также численное моделирование в программном комплексе Abaqus, включающее микромоделирование и макромоделирование на основе ортотропной модели. Результаты показывают, что отношение модулей упругости кирпича и раствора E_b/E_m существенно влияет на распределение деформаций и напряжений в кладке. Обнаружена асимметрия матрицы жёсткости $D_{12} \neq D_{21}$, что указывает на необходимость учёта микромеханических эффектов в контактных зонах «кирпич — раствор». Наибольшая степень анизотропии выявлена в образцах с низкопрочным раствором серия KRO-3, где коэффициент анизотропии D_{11}/D_{22} достиг значения 1,253. Исследование подтверждает применимость ортотропной модели для описания жесткостных характеристик кладки, но подчёркивает необходимость её модификации с учётом структурной неоднородности и краевых эффектов. Полученные результаты имеют практическое значение для проектирования каменных конструкций при сложных напряжённых состояниях.

Ключевые слова: кирпичная кладка, ортотропная модель, анизотропия жёсткости, прочность раствора, конечно-элементное моделирование, Abaqus

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора. Автор подтверждает личную ответственность за концепцию исследования, методологию, сбор данных, анализ, интерпретацию и подготовку рукописи.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: *Shakarneh O.M.D.* Comparative analysis of the stiffness characteristics of masonry wall based on experimental data and an orthotropic model // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 293–312. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-293-312 EDN: LJWWRA

1. Introduction

A critical challenge in designing composite materials lies in predicting their elastic properties. Various methods exist for predicting the elastic properties of composites [1–6], which can be broadly categorized into analytical and numerical approaches. Analytical methods, primarily represented by micromechanical models [7–9], provide explicit or semi-explicit solutions and thus require relatively low computational effort. However, these methods often rely on specific assumptions and simplifications. On the other hand, numerical methods, predominantly based on finite element analysis of representative volume elements [10–13], do not require special assumptions to obtain solutions but typically demand significant computational resources. A reliable analytical method is highly desirable in composite material design, as the design process usually involves iterative evaluations of numerous intermediate configurations before achieving the desired properties [14; 15].

Consequently, predicting the mechanical behavior of macro-heterogeneous materials—accounting for their constituent properties and spatial arrangement — is of paramount importance. When designing structural elements using such materials, simple and robust computational methods are needed to determine their physico-mechanical properties, stress-strain conditions, and strength estimates. The problem of assessing the stress-strain state of structural elements made of heterogeneous materials [16; 17] is addressed through

Шакарнех Омар Мухаммед Дауд, аспирант кафедры железобетонных конструкций, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Российская Федерация, 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, д. 113; eLIBRARY SPIN-код: 8794-4659, ORCID: 0009-0005-8683-5731; e-mail: Oshakarneh@gmail.com

solid mechanics, which often requires complex mathematical formulations. While extensive literature exists on composite material strength [18; 19], a unified theory for formulating constitutive laws of structurally heterogeneous media remains lacking.

Research on the mechanical properties of brick masonry is crucial for reliable structural design and simulation. The work of Galyalyuk and Demchuk [20] presents both experimental and numerical data for three series of masonry specimens subjected to compressive loading. In this study, these data are reproduced and utilized to construct the stiffness matrix D_{ij} based on an orthotropic model, identifying patterns and differences between the specimen series.

Recent studies on masonry mechanics, including works presented in [21–25], highlight the importance of accounting for anisotropy and structural heterogeneity. As demonstrated in [22], proper consideration of boundary conditions in masonry modeling is essential for accurately describing its anisotropic properties: weak mortars require an increased number of courses in the model to mitigate edge effects. For reinforced masonry [24], it has been established that mesh reinforcement compensates for anisotropy, reducing the required number of modeled courses. Study [21] proposes a homogenization method based on numerical simulations of 9-course masonry fragments in Abaqus [22], enabling the identification of a representative volume element (RVE) and revealing the stiffness matrix asymmetry $D_{12} \neq D_{21}$.

Study [25] demonstrates that the stiffness ratio between brick and mortar (E_b/E_m) significantly influences strain distribution in masonry (Figure 1). This is corroborated by calculations of the stiffness matrix D_{ij} (Table 2) and aligns with experimental data for the KPO-1–KPO-3 series. The results illustrate how E_b/E_m affects strain distribution: for KRO-1 ($E_b/E_m = 1.12$), the difference $\Delta_1 - \Delta_2$ is minimal, whereas for KRO-3 ($E_b/E_m = 2.58$), maximum strain divergence is observed. This is quantitatively confirmed by the increase in the anisotropy coefficient D_{11}/D_{22} from 1.13 to 1.25 (Tables 1, 2).

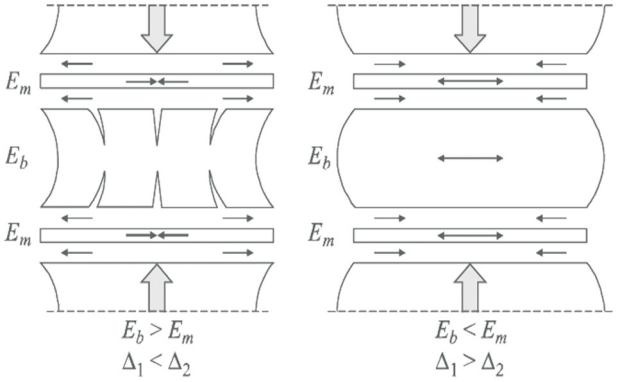


Figure 1. Distribution pattern of horizontal stresses in brick and mortar joint for different stiffness ratios E_b/E_m

S o u r c e: made by V.V. Adishchev, O.M.D. Shakarneh [22].

Table 1. **Initial mechanical characteristics of materials for calculating contact stiffness in Abaqus**

Series	Contact stiffness in Abaqus							
	E_b, MPa	E_m, MPa	G_b, MPa	G_m, MPa	μ_b	μ_m	k_{nn}, MPa/mm	k_{ss}, MPa /mm
KRO-1	11850	10580	4740	4232	0.113	0.17	987.2	394.9
KRO-2		9210		3684		0.19	413.4	165.4
KRO-3		4600		1840		0.23	75.2	30.1

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

Table 2. **Stiffness characteristics of masonry**

Series	Experimental values from work [20]						
	E_b/E_m	E_x, MPa	E_y, MPa	μ_{xy}	μ_{yx}	G_{xy}, MPa	E_x / E_y
KRO-1	1.12	11150	9830	0.165	0.22	4786.5	1.134
KRO-2	1.28	10680	8450	0.23	0.30	4341.5	1.264
KRO-3	2.57	6450	5150	0.32	0.35	2443.2	1.252
Series	Results of calculation of the stiffness matrix μ_{ij}						
	E_b/E_m	D_{11}, MPa	D_{12}, MPa	D_{21}, MPa	D_{22}, MPa	D_{33}, MPa	D_{11}/D_{22}
KRO-1	1.12	11568.3	2545.0	1684.2	10201.4	4786.5	1.134
KRO-2	1.28	11473.7	3442.1	2085.9	9074.1	4341.5	1.264
KRO -3	2.57	7264.9	2542.8	1856.1	5799.5	2443.2	1.253

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

This study aims to develop the stiffness matrix D_{ij} for three distinct series of brick masonry specimens and validate the computational results against experimental data. A complementary objective involves evaluating the applicability of the Abaqus finite element analysis system for simulating the structural performance of masonry, which is critical for predicting its mechanical behavior under various loading conditions.

2. Masonry Materials

2.1. Brick

The study utilized solid ceramic bricks with dimensions of 250×65×120 mm. The brick material exhibited the following mechanical properties:

a. Elastic modulus, E_b = 11850 MPa;
b. Shear modulus, G_b = 4740 MPa;
c. Poisson's ratio, μ_b = 0.113.

The compressive strength of the bricks, determined according to EN 772-1 standard, was f_b = 44.1 MPa.

2.2. Mortar

Three types of masonry mortar with different strength characteristics were employed in the study:

1. Series KRO-1:
   a. Mortar strength, f_m = 10.9MPa;
   b. Elastic modulus, E_m = 10580 MPa;
   c. Shear modulus, G_m = 4232 MPa;
   d. Poisson's ratio, μ_m = 0.17.
2. Series KRO-2:
   a. Mortar strength, f_m = 7.9 MPa;
   b. Elastic modulus, E_m = 9210 MPa;
   c. Shear modulus, G_m = 3684 MPa;
   d. Poisson's ratio, μ_m = 0.19.
3. Series KRO-3:
   a. Mortar strength, f_m = 3.1 MPa;
   b. Elastic modulus, E_m = 4600 MPa;
   c. Shear modulus, G_m = 1840 MPa;
   d. Poisson's ratio, μ_m = 0.23.

The mortar was prepared using dry mix No. 111/11 M100, with adjusted proportions to achieve the required strength. The thickness of mortar joints was maintained at 10 mm for all series.

3. Research Methodology

3.1. Masonry Specimens

Figure 2 shows the experimental setup for compression testing of brick masonry specimens. The tests were conducted using a **P-125 hydraulic press** in compliance with the **EN 1052-1** standard [27]. The specimens were subjected to **stepwise loading** applied perpendicular to the horizontal mortar joints. Displacements and strains were measured using **mechanical dial gauges** and **strain gauges**.

Figure 2, *a* — diagram of the arrangement of devices (I1–I4 — clock-type movement indicators IGP-1 with a division value of 0.001 mm; h_s = 515 mm; l_s = 510 mm; t_s = 120 mm)

Figure 2, *b* — diagram of the arrangement of devices (I1–I4 — clock-type movement indicators IGP-1 with a division value of 0.001 mm; h_s = 780 mm; l_s = 305 mm; t_s = 120 mm)

The current study employs the following methods:

■ ***Experimental Investigations.*** Compression tests were conducted on masonry specimens of series KRO-1, KRO-2 and KRO-3 (Figure 2), determining the following mechanical properties: elastic modulus E_i, Poisson's ratios μ_{xy}, μ_{yx} and shear modulus G_{xy}, calculated using the formulas:

$$E_i = \frac{F_{i,\max}}{3A_i\varepsilon_i},\ \mu_{xy} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y},\ \mu_{yx} = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x},\ G_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}, \quad (1)$$

where: $F_{i,\max}$ — the ultimate failure load; A_i — the cross-sectional area of the specimen; ε_i — the relative longitudinal strain.“3” is the load equal to one-third of the ultimate failure load; ε_x — the transverse strain; ε_y — the longitudinal strain.

■ ***Analytical method for determining the stiffness matrix of anisotropic brick masonry.*** This study employs an orthotropic model to construct the stiffness matrix D_{ij} based on the known elastic moduli E_x, E_y and Poisson’s ratios μ_{xy}, μ_{yx} obtained from references [20; 23]. The masonry behavior is assumed to follow a linear orthotropic model under plane stress conditions, where the stress-strain relationship is expressed through the compliance matrix:

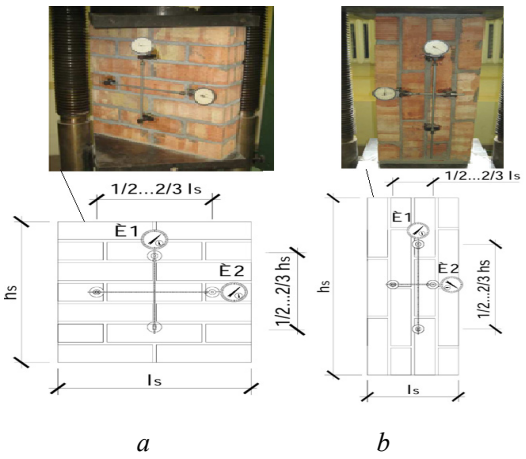


Figure 2. Scheme of testing prototypes:
a — perpendicular to horizontal mortar joints;
b — parallel to horizontal mortar joints
S o u r c e: made by A.V. Galalyuk, I.E. Demchuk [23].

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E_x} - \dfrac{\mu_{yx}}{E_y}\sigma_y \\ \varepsilon_y = \dfrac{-\mu_{xy}}{E_x}\sigma_x + \dfrac{\sigma_y}{E_y}. \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{G_{xy}} \end{cases} \quad (2)$$

To determine the components of the stiffness matrix D, the following system of equations is solved for stresses:

$$\begin{cases} \sigma_x = D_{11}\varepsilon_x + D_{12}\varepsilon_y \\ \sigma_y = D_{21}\varepsilon_x + D_{22}\varepsilon_y \\ \sigma_{xy} = D_{33}\varepsilon_{xy} \end{cases}. \quad (3)$$

Two independent loading cases are examined:

C a s e 1: Axial Loading in *x*-direction

$$\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0 = \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E_x}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{-\mu_{xy}}{E_x}\sigma_x. \end{cases} \quad (4)$$

C a s e 1: Axial Loading in *y*-direction

$$\sigma_y \neq 0, \sigma_x = 0 = \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{-\mu_{yx}}{E_y}\sigma_y; \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E_y}. \end{cases} \quad (5)$$

By applying the boundary conditions to the governing equations, the following is obtained:
Case 2: Axial Loading Along the *y*-Direction ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$)

$$\sigma_x = D_{11}\frac{\sigma_x}{E_x} + D_{12}\left(\frac{-\mu_{xy}}{E_x}\sigma_x\right), \quad 0 = D_{21}\frac{\sigma_x}{E_x} + D_{22}\left(\frac{-\mu_{xy}}{E_x}\sigma_x\right). \tag{6}$$

Case 2: Axial Loading Along the y-Direction ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y \neq 0$, $\tau_{xy} = 0$)

$$0 = D_{11}\left(\frac{-\mu_{yx}}{E_x}\sigma_x\right) + D_{12}\frac{\sigma_x}{E_y}, \quad \sigma_y = D_{21}\left(\frac{-\mu_{yx}}{E_y}\sigma_y\right) + D_{22}\frac{\sigma_y}{E_y}. \tag{7}$$

Solution for the Stiffness Matrix Components D_{ij}

$$D_{11} = \frac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}, \quad D_{12} = \frac{\mu_{yx}E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}, \quad D_{22} = \frac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}, \quad D_{21} = \frac{\mu_{xy}E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}. \tag{8}$$

The stiffness matrix D is obtained in the following form:

$$Dij = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}} & \frac{\mu_{yx}E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}} & 0 \\ \frac{\mu_{xy}E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

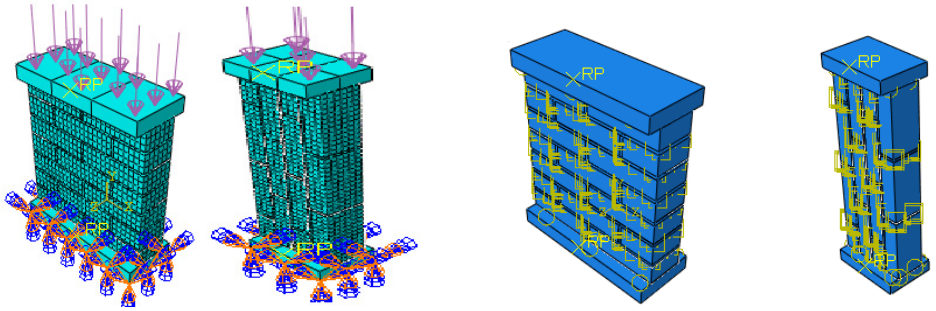
■ ***Numerical Modeling.*** Finite element modeling of a 7-course unreinforced masonry fragment was performed in Abaqus (micromodeling) using C3D20R elements, with a mesh size of 10 mm for bricks and 5 mm for mortar joints, including local refinement in stress concentration zones. The contact interaction was defined using surface-based cohesive behavior, while boundary conditions consisted of full fixation at the bottom rigid beam and uniformly distributed compressive loading on the top plate, applied incrementally with energy convergence control (ETOL < 1×10^{-6}) perpendicular to 10 mm thick horizontal mortar joints. For macromodeling, an orthotropic material model with Tie constraints between rigid beams and masonry was implemented using a 20 mm mesh, followed by experimental validation (Figure. 3).

Two elastic-domain computational models were sequentially implemented: (1) an Engineering Constants model (Formula 1) with parameters derived from experimental elastic characteristics, and (2) an orthotropic model with stiffness matrix D_{ij} (Formula 9). However, elastic-domain simulations failed to reproduce the experimentally observed stiffness matrix asymmetry $D_{12} \neq D_{21}$. Accurate elastic-domain representation of this effect would require a fully anisotropic model with 36 independent stiffness components, whereas the experimental study only determined five key parameters E_x, E_y, μ_{xy}, μ_{yx}, G_{xy}, making complete anisotropic characterization unachievable within the existing experimental dataset limited to elastic behavior.

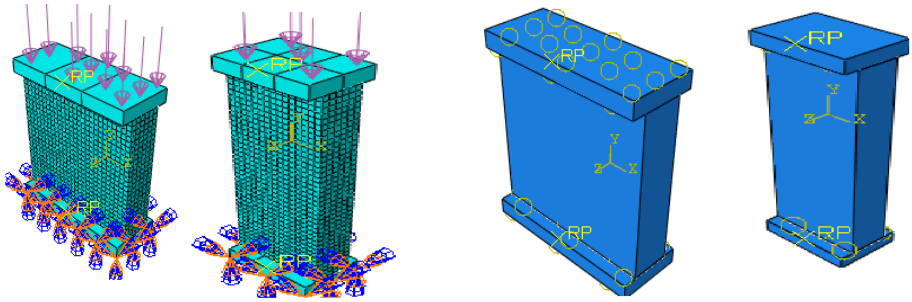
The presented orthotropic model describes only the linear-elastic behavior of masonry, which is its main limitation; as experiments [20; 23] show, in masonry with low-strength mortar (KRO-3), microcracks develop under loads exceeding 30–50% of the ultimate, leading to progressive stiffness degradation, and future studies are proposed to address this by introducing scalar damage parameters or employing multistage homogenization that accounts for the crack formation stage.

Finite element modeling in Abaqus was conducted using two approaches: (1) micromodeling of a 7-course masonry fragment (510×515×120 mm for loading perpendicular to joints and 305×780×120 mm for loading parallel to joints) with explicit brick/mortar representation, and (2) macromodeling of equivalent dimensions using an orthotropic material model. This resulted in four distinct models: two micromodels (one per loading direction) and two macromodels (one per loading direction), maintaining geometric consistency with experimental specimens.

Two types of macromodels were used in this study: 1) Macromodel EXP — a homogenized model based on experimentally measured elastic properties (Young's moduli E_x, E_y, Poisson's ratios μ_{xy}, μ_{yx} and shear modulus G_{xy}) from reference [20]; 2) Macromodel D_{ij} — a refined model incorporating the asymmetric stiffness matrix (calculated via Eqs. 8–9), where $D_{12} \neq D_{21}$.



a



b

Figure 3. FE models of masonry samples:
a — Micromodel; *b* — Macromodel
S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh

In Abaqus, the contact is modeled using Cohesive Behavior with separation into normal K_{nn} and shear K_{ss} stiffnesses. The elastic stage is defined by the interface stiffness matrix (10), which relates normal and shear stresses to relative displacements [28]:

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} t_n \\ t_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{bmatrix}, \tag{10}$$

where t_n, t_s are the normal and shear stresses at the interface, δ_n, δ_s are the relative displacements (normal and shear), K_{nn}, K_{ss} are the stiffness coefficients for tearing/compression and shear, respectively. To describe the behavior of "brick-mortar" contact surfaces, a micro-model approach is used that takes into account the equivalent stiffness of the interfaces. The stiffness characteristics of the contact surfaces are determined through the mechanical properties of the materials and the geometric parameters of the weld according to formula (11):

$$k_{nn} = \frac{E_b E_m}{h_m \left(E_b - E_m \right)}, k_{tt} = k_{ss} = \frac{G_b G_m}{h_m \left(G_b - G_m \right)} \ , \tag{11}$$

where h_m is the mortar thickness of 10 mm.

For the studied series of masonry (KRO-1, KRO-2, KRO-3), the rigidity parameters were calculated on the basis of experimental data.

4. Results and Discussion

4.1. Results

The results of calculating the stiffness matrix D_{ij}, presented in Table 2, were obtained on the basis of experimental data and shear moduli using the orthotropic model.

The shear modulus G_{xy} in the xy plane is calculated according to the data of [20], E_x, E_y: Elastic moduli in principal material directions, D_{11}, D_{22}: Diagonal components of the stiffness matrix.

Key Observations:

1. *Model Validation:* The ratios E_x/E_y and D_{11}/D_{22} are nearly identical for each series (difference < 0.001), confirming the validity of the orthotropic model.

2. *Anisotropy Trends:*

   a. Maximum anisotropy occurs in KRO-2 ($E_x/E_y = 1.264$)

   b. Minimum anisotropy is observed in KRO-1 ($E_x/E_y = 1.134$)

3. *Unexpected Stiffness Behavior:* for KRO-3, both E_x/E_y and D_{11}/D_{22} exhibit a slight decrease compared to KRO-2, despite a more pronounced difference between E_x and E_y.

The discrepancy between experimental stiffness values and the orthotropic model (Eqs. 8–9) arises due to directional loading effects in experiments (measuring deformation modulus along load axes) versus the model's comprehensive strain-stress coupling (including Poisson's ratios μ_{xy}, μ_{yx}. Additionally, micro-mechanical heterogeneity at brick-mortar interfaces induces stiffness matrix asymmetry $D_{12} \neq D_{21}$, unaccounted for in classical orthotropy, necessitating modified homogenization approaches with asymmetry correction factors (e.g., $\alpha = D_{12}/ D_{21}$) and representative volume element (RVE) upscaling to mitigate edge effects.

Analysis and Comparison of Data in Table 2.

The analysis of data in Table 2 revealed that KRO-1 specimens exhibited the highest stiffness characteristics in both X and Y directions, attributable to the use of high-strength mortar (grade M109). KRO-2 demonstrated intermediate values, while KRO-3 showed the lowest performance, consistent with experimental findings.

The D_{33} shear stiffness component progressively decreased from KRO-1 to KRO-3, indicating degradation of brick-mortar interfacial mechanical behavior with reduced mortar strength. Comparative analysis confirmed the correlation between stiffness matrix components D_{11}, D_{22} and elastic moduli E_x, E_y from reference [23], demonstrating a consistent trend: mortar strength reduction directly diminishes masonry stiffness. This effect was particularly pronounced for D_{33}, highlighting the critical role of material bonding in structural performance.

Using Table 2 data, anisotropy coefficients k, n, parameter m, and averaged symmetric model D_{sym} were calculated through relationships (12, 13) from [26]:

$$k_{nn} = \frac{E_b E_m}{h_m \left(E_b - E_m \right)}, k_{tt} = k_{ss} = \frac{G_b G_m}{h_m \left(G_b - G_m \right)} . \tag{12}$$

Parameters k and n, related to m through the equation $m = n^2 - 2k$, represent independent characteristics of an orthotropic plate. Their introduction simplifies stress calculations in formula (10) and generalizes results for plane strain problems through reduced coefficients, where:

a. k quantifies the degree of stiffness anisotropy between orthogonal directions (x — along mortar joints, y — across joints), with $k = 1$ indicating isotropic material $E_x = E_y$ and $k \neq 1$ confirming anisotropy;

b. m reflects the combined influence of shear stiffness G_{xy} and transverse deformations on anisotropy, where $m = 0$ for isotropic materials and $m > 0$ for masonry due to low shear stiffness of mortar joints;

c. n serves as a comprehensive parameter combining longitudinal and shear anisotropy effects, with $n = 2$ for isotropic cases and $n \neq 2$ demonstrating anisotropy.

Formula (13) introduces the averaged symmetric stiffness matrix D_{sym} that approximates the asymmetric components D_{12} and D_{21} of the classical orthotropic model through their arithmetic mean:

$$D_{\text{sym}} = \frac{D_{12} + D_{21}}{2}. \tag{13}$$

For an asymmetric stiffness matrix $D_{12} \neq D_{21}$, a correction factor α is introduced, reflecting the degree of asymmetry:

$$a = \frac{D_{12}}{D_{21}}\ , \tag{14}$$

where a — characterizes the degree of deviation from the classical orthotropic model.

Modified parameters (15) are introduced to account for the stiffness matrix asymmetry $D_{12} \neq D_{21}$:

$$k_{\text{mod}} = \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}a, m_{\text{mod}} = \frac{D_{11}}{G} - \left(\mu_{xy} + \mu_{yx}\right), n_{\text{mod}} = \sqrt{2k_{\text{mod}} + m_{\text{mod}}}\ . \tag{15}$$

Table 3. **Anisotropy coefficients for the KRO-1, KRO-2, KRO-3 series**

Series	**Accounting for Symmetry in Anisotropy Coefficients**			
	D_{sym}, MPa	k	m	n
KRO-1	2114.6	1.065	2	2.03
KRO-2	2764	1.126	2	2.06
KRO-3	2199.45	1.118	2	2.06
Series	**Accounting for an Asymmetry in Anisotropy Coefficients**			
	a	k_{mod}	m_{mod}	n_{mod}
KRO-1	1.51	1.61	1.945	2.27
KRO-2	1.65	1.86	1.93	2.38
KRO-3	1.37	1.53	1.97	2.24

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

Analysis of the data presented in Table 3 leads to the following conclusions:

1. *Effect of stiffness matrix asymmetry:* the consideration of asymmetric stiffness matrix components $D_{12} \neq D_{21}$ results in a significant 30–65% increase in anisotropy coefficients compared to the symmetric model.

2. *Critical case for KRO-2 series:* the most substantial deviations were observed for KRO-2 specimens, where the asymmetry coefficient α reaches 1.65 and the modified parameter n_{mod} attains a value of 2.38.

3. *Theoretical implications:* the obtained results demonstrate the necessity to modify the classical Lekhnitsky approach [26] through the introduction of a correction factor α, which is particularly relevant for materials with pronounced structural heterogeneity (Figure 4).

4. The error is calculated as:

$$\text{error} = \frac{D_{ij} - D_{\text{sym}}}{D_{\text{sym}}} \times 100\%. \tag{16}$$

For α, the error is not specified, since the symmetric model by definition assumes $\alpha = 1$.

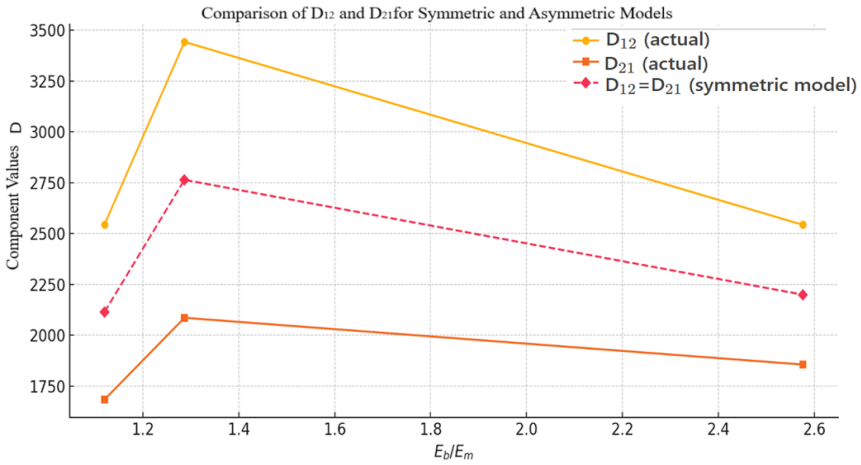


Figure 4. Comparison of real asymmetry with an idealized symmetric model

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

Table 4 clearly demonstrates that the asymmetric model $D_{12} \neq D_{21}$ more accurately captures masonry behavior, particularly for parameter k where symmetric model errors reach 65%, confirming the necessity of accounting for anisotropy in stiffness calculations; while differences are less critical for parameter n, simplifying its estimation in engineering applications (Figure 5), with series KRO-2 showing critical error levels (65%) that mandate asymmetric model implementation, as derived from stiffness matrix D_{ij} analysis.

Table 4. **Comparison of parameters of symmetric and asymmetric models**

Series	Parameters	D_{sym}	$D_{12} \neq D_{21}$	error, %
KRO-1	k	1.065	1.61	51%
	n	2.03	2.27	12%
KRO-2	k	1.126	1.86	65%
	n	2.06	2.38	15%
KRO-3	k	1.118	1.53	37%
	n	2.06	2.24	9%

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

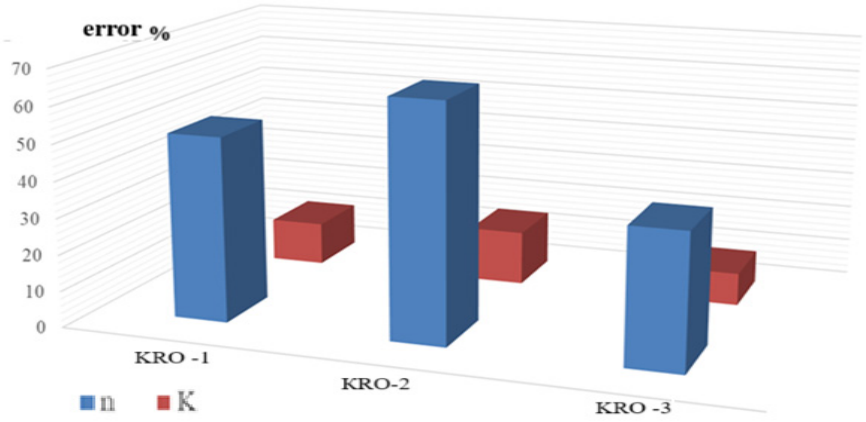


Figure 5. Error analysis of the symmetric model for the anisotropy coefficients (n and k)

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

The numerical simulation results presented in Figures 6–11 demonstrate the distribution of vertical compressive stresses and horizontal strains in perpendicular and horizontal mortar joints for three experimental series KRO-1, KRO-2, KRO-3, obtained through: (1) micro-modeling, (2) EXP macro-modeling of a homogeneous anisotropic medium (based on experimental values from [20]), and (3) *D* macro-modeling of a homogeneous anisotropic medium (using the calculated stiffness matrix D_{ij}), conclusively demonstrating the significant influence of mortar joint strength on the formation of structural stress states.

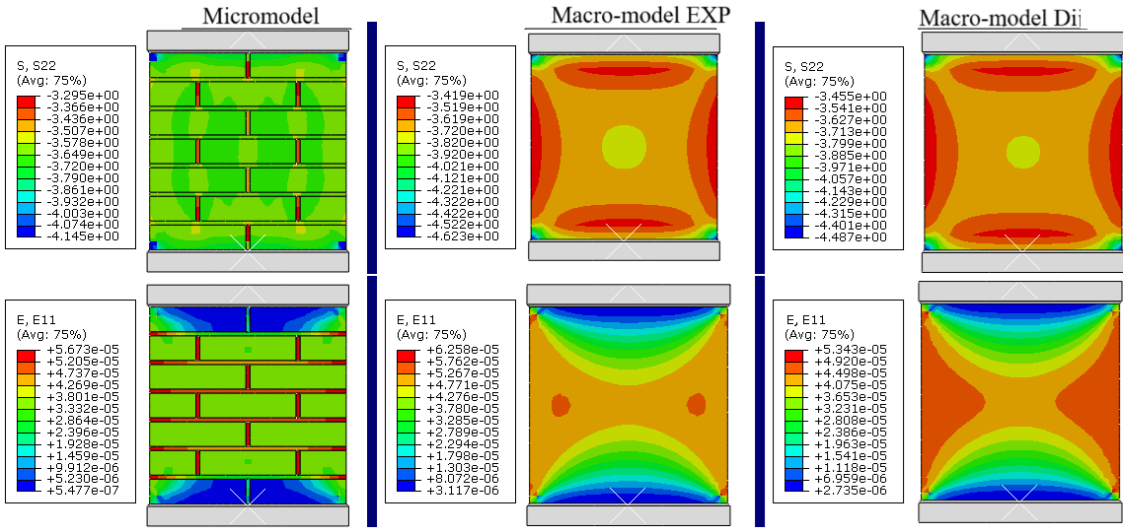


Figure 6. Contour plots of compressive stresses σ_y and horizontal strain distributions under loading perpendicular to mortar joints for KRO-1 masonry

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

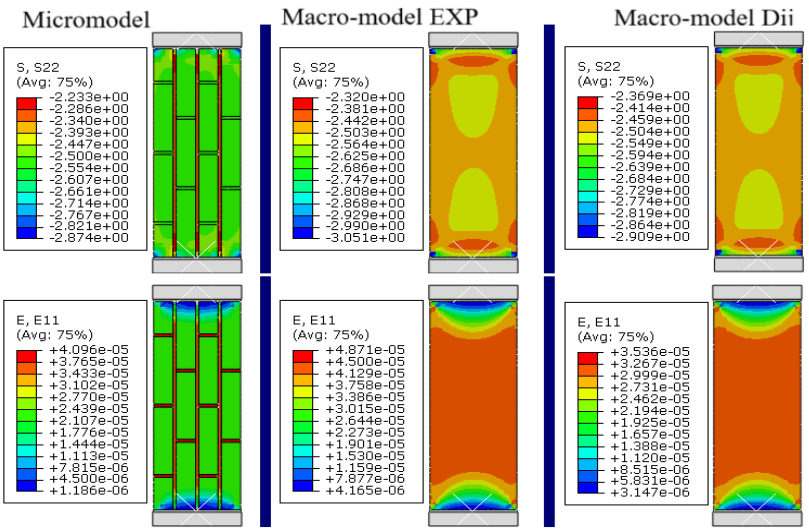


Figure 7. Contour plots of compressive stresses σ_y and horizontal strain distributions under loading parallel to mortar joints for KRO-1 masonry

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

In Figure 6 (loading perpendicular to the joints), a uniform distribution of vertical stresses and horizontal deformations is observed in the KRO-1 series masonry, which is attributed to the high strength of the mortar $E_b > / E_m = 1.12$, whereas in Figure 7 (loading parallel to the joints), the stress and strain distribution is less uniform but remains stable, confirming the anisotropy of the masonry. At the same time,

as demonstrated in [22], to fully eliminate edge effects, modeling of masonry fragments with at least 9 vertical rows and 4 bricks in length is required, highlighting the importance of accounting for edge effects and the micromechanics of "brick-mortar" interactions for accurate prediction of masonry behavior, especially under complex loading conditions.

Tables 5–7 present calculated errors in vertical stress and horizontal strain determinations for KRO-1, KRO-2, and KRO-3 masonry under different load orientations relative to mortar joints, with the strain error (ε) calculation formula for each macromodel versus the micromodel given by:

$$\text{error}(\%) = \frac{\varepsilon_{\text{macro}} - \varepsilon_{\text{micro}}}{\varepsilon_{\text{micro}}} \ . \tag{17}$$

Stress error (σ):

$$\text{error}(\%) = \frac{\sigma_{\text{macro}} - \sigma_{\text{micro}}}{\sigma_{\text{micro}}}. \tag{18}$$

The error quantification methodology employs: $\varepsilon_{\text{macro}}$ (macromodel-calculated strain), $\varepsilon_{\text{micro}}$ (micromodel reference strain), σ_{macro} (macromodel stress), and σ_{micro} (reference micromodel stress), with percentage deviation calculated analogously for both stress and strain components using the unified formula (17, 18). For the analysis, control isopoles 2, 6, and 10 were selected, uniformly distributed along the specimen height, to: (1) eliminate local edge effects in contact zones with support plates, (2) cover all characteristic stress state regions (bottom, middle, and top), and (3) ensure data representativeness by analyzing zones with established stress fields.

Table 5. **Calculation of errors in horizontal deformations and vertical stresses under load parallel and perpendicular to the joints for KRO-1 masonry**

№	σ_{micro} **, MPa**	σ_{macro} **–EXP, MPa**	**errors EXP, %**	σ_{macro} **–*D*, MPa**	**error *D*, %**
Calculation of errors for vertical stresses under load perpendicular to the joints					
2	–3.36	–3.51	4.46	–3.54	5.36
6	–3.64	–3.92	7.69	–3.88	6.59
10	–3.93	–4.32	9.92	–4.22	7.38
№	$\varepsilon_{\text{micro}}$	$\varepsilon_{\text{macro}}$ –EXP	errors EXP, %	$\varepsilon_{\text{macro}}$ –*D* (*E*11)	errors *D*, %
Calculation of errors of horizontal deformations under load perpendicular to the joints					
2	0.000052	0.000057	9.62	0.000049	5.77
6	0.000033	0.000037	12.12	0.000032	3.03
10	0.000014	0.000017	21.43	0.000015	7.14
№	σ_{micro} , MPa	σ_{macro} –EXP, MPa	errors EXP, %	σ_{macro} –*D*, MPa	errors *D*, %
Calculation of errors for vertical stresses under load parallel to joints					
2	–2.28	–2.38	4.39	–2.41	5.70
6	–2.50	–2.62	4.80	–2.19	12.40
10	–2.71	–2.86	5.54	–2.77	2.21
№	$\varepsilon_{\text{micro}}$	$\varepsilon_{\text{macro}}$ –EXP	errors EXP, %	$\varepsilon_{\text{macro}}$ –*D* (*E*11)	errors *D*, %
Calculation of errors of horizontal deformations under load parallel to joints					
2	0.000037	0.000045	21.62	0.000032	13.51
6	0.000024	0.00003	25	0.000021	12.50
10	0.000011	0.000015	36.36	0.000011	0.00

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

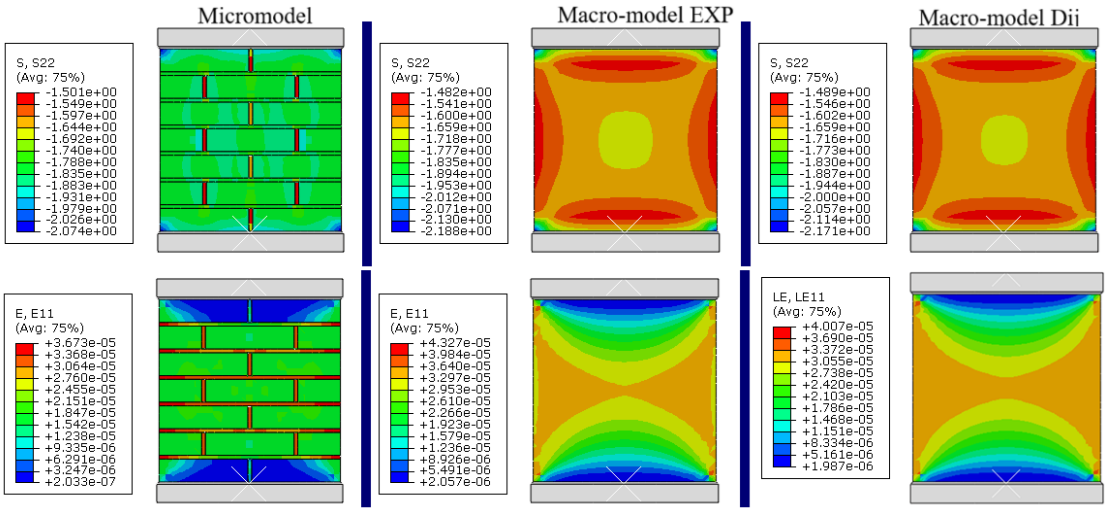


Figure 8. Contour plots of compressive stresses σ_y and horizontal strain distributions under loading perpendicular to mortar joints for masonry KRO-2

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

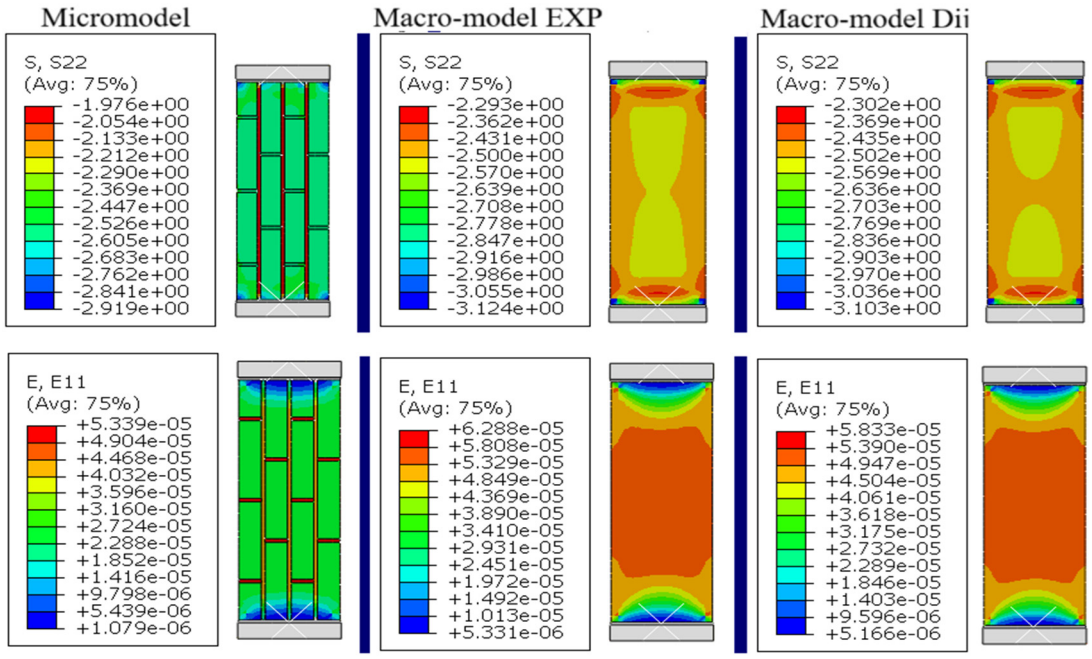


Figure 9. Contour plots of compressive stresses σ_y and horizontal strain distributions under loading parallel to mortar joints for KRO-2 masonry

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

In Figure 8 (loading perpendicular to joints, KRO-2): a uniform distribution of vertical stresses (σ_y) is observed, with localized concentrations (up to 15%) in edge zones, while horizontal strains (ε_x) exhibit elevated values near boundaries (EXP errors: up to 29%, *D*-model: up to 18.3%), confirming the influence of edge effects, partially mitigated by the orthotropic model.

In Figure 9 (loading parallel to joints, KRO-2): stress distribution is less uniform, with pronounced concentrations near vertical joints (σ_y errors up to 15.1%), and strains (ε_x) in edge zones show significant deviations (EXP errors: up to 35.7%, *D*-model: up to 28.6%), highlighting the critical role of brick-mortar contact micromechanics and the need for larger RVEs to minimize inaccuracies.

Table 6. **Calculation of errors in horizontal deformations and vertical stresses under load parallel and perpendicular to the joints for KRO-2 masonry**

№	σ_{micro}, MPa	σ_{macro} –EXP, MPa	errors EXP, %	σ_{macro} –*D*, MPa	errors *D*, %
Calculation of errors for vertical stresses under load perpendicular to the joints					
1	–1.501	–1.482	1.27	–1.489	0.8
5	–1.692	–1.718	1.54	–1.716	1.42
10	–1.931	–2.012	4.19	–2	3.57
№	ε_{micro}	ε_{macro} –EXP	errors EXP, %	ε_{macro} –*D*	errors *D*, %
Calculation of errors of horizontal deformations under load perpendicular to the joints					
2	0.000036	0.000039	8.3	0.000036	0
6	0.000021	0.000026	23.8	0.000024	14.3
10	0.0000093	0.000012	29.0	0.000011	18.3
№	σ_{micro}, MPa	σ_{macro} –EXP, MPa	errors EXP, %	σ_{macro} –*D*, MPa	errors *D*, %
Calculation of errors for vertical stresses under load parallel to joints					
2	–2.05	–2.36	15.1	–2.36	15.1
6	–2.36	–2.63	11.4	–2.63	11.4
10	–2.68	–2.91	8.6	–2.9	8.2
№	ε_{micro}	ε_{macro} –EXP	errors EXP, %	ε_{macro} –*D*	errors *D*, %
Calculation of errors of horizontal deformations under load parallel to joints					
2	0.000049	0.000058	18.4	0.000053	8.2
6	0.000031	0.000038	22.6	0.000036	16.1
10	0.000014	0.000019	35.7	0.000018	28.6

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

As seen in Figures 10–11, masonry with low-strength mortar (KRO-3) exhibits significant stress heterogeneity, which correlates with high macro-modeling errors (Table 7), confirming the need to account for the micromechanics of contacts in computational models; moreover, as shown in [22], accurate description of edge effects requires modeling masonry fragments with a minimum of nine rows, which is particularly important for specimens with low mortar strength.

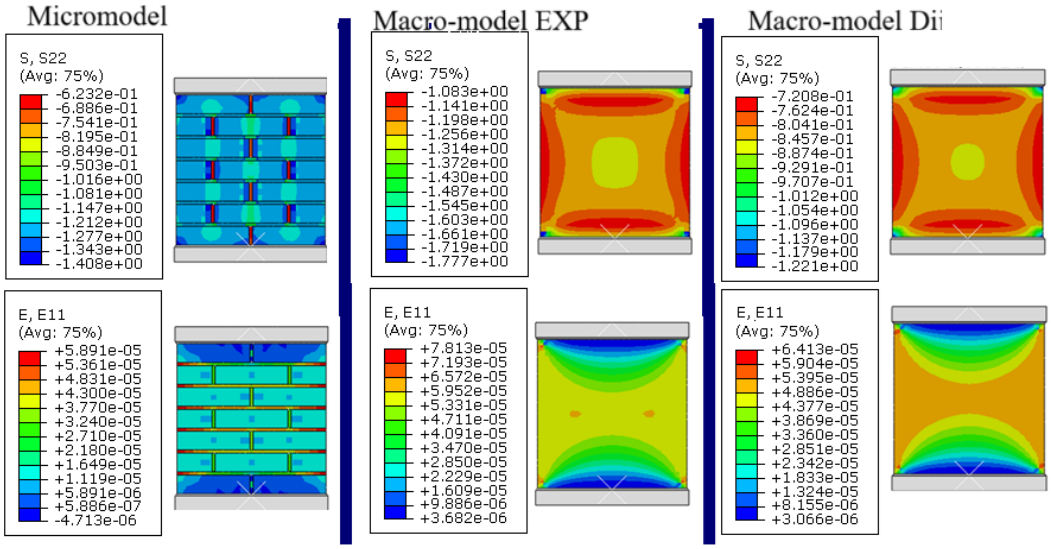


Figure 10. Contour plots of compressive stresses σ_y and horizontal strain distributions under loading perpendicular to mortar joints for masonry KRO-3

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

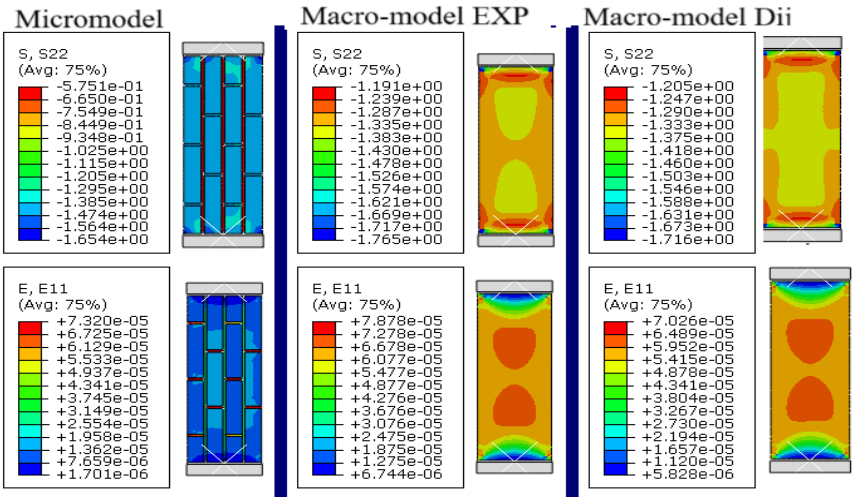


Figure 11. Contour plots of compressive stresses σ_y and horizontal strain distributions under loading parallel to mortar joints for KRO-3 masonry

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

Table 7. **Calculation of errors in horizontal deformations and vertical stresses under load parallel and perpendicular to the joints for KRO-3 masonry**

№	σ_{micro} , MPa	σ_{macro} -EXP, MPa	errors EXP, %	σ_{macro} -*D*, MPa	errors *D*, %
Calculation of errors for vertical stresses under load perpendicular to the joints					
2	–0.68	–1.14	67.65	–0.76	11.76
6	–0.95	–1.37	44.21	–0.92	3.16
10	–1.2	–1.6	33.33	–1.01	15.83
№	ε_{micro}	ε_{macro} -EXP	errors EXP, %	ε_{macro} -*D*	errors *D*, %
Calculation of errors of horizontal deformations under load perpendicular to the joints					
2	0.000053	0.000071	33.96	0.000059	11.32
6	0.000032	0.000047	46.88	0.000038	18.75
10	0.000011	0.000022	100	0.000018	63.64
№	σ_{micro} , MPa	σ_{macro} -EXP, MPa	errors EXP, %	σ_{macro} -*D*, MPa	errors *D*, %
Calculation of errors for vertical stresses under load parallel to joints					
2	–0.66	–1.2	81.82	–1.2	81.82
6	–1	–1.4	40	–1.4	40
10	–1.3	–1.6	23.08	–1.5	15.38
№	ε_{micro}	ε_{macro} -EXP	errors EXP, %	ε_{macro} -*D*	errors *D*, %
Calculation of errors of horizontal deformations under load parallel to joints					
2	0.000067	0.000072	7.46	0.000064	4.48
6	0.000043	0.000048	11.63	0.000043	0
10	0.000019	0.000024	26.32	0.000021	10.53

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

Stress-strain visualization (Figures 6–11) reveals pronounced masonry anisotropy, evidenced by fundamentally different mechanical responses under loading perpendicular (Figures 6–7) versus parallel (Figures 7–11) to mortar joints, with KRO-1 (high-strength mortar) exhibiting uniform stress distribution (≤ 15% variation) while KRO-3 (low-strength mortar) shows acute stress concentrations (local peaks ≤ 40%) and marked strain field heterogeneity.

Comparative experimental-calculated data analysis (Tables 5–7) demonstrates satisfactory agreement (≤7% error) for KRO-1 using orthotropic modeling, whereas KRO-3 displays significant discrepancies (≤65%) due to unaccounted microstrains in weak joints, substantiating the need for modified orthotropic models incorporating stiffness matrix asymmetry and edge effect correction factors.

4.2. Discussion

Experimental investigations revealed significant stiffness matrix asymmetry $D_{12} \neq D_{21}$ [21; 24], demonstrating the necessity to account for micromechanical effects, including localized brick-mortar interfacial deformation processes and structurally-induced anisotropy. The classical orthotropic model's assumption of elastic symmetry $D_{12} = D_{21}$) produced statistically significant deviations from experimental data, particularly pronounced in specimens with weak mortar joints (KRO-3), where joints acted as stress-concentrating weak links. While macromodeling (orthotropic approach) simplified computations, it failed to capture microstructural influences on joint stress distribution.

To enhance predictive accuracy, we propose a modified anisotropic model incorporating asymmetry corrections through an anisotropy coefficient $\alpha = D_{12}/D_{21}$ (Formula 14) for masonry series KRO-1, KRO-2, KRO-3, with optimal E_b/E_m ratios identified for edge effect mitigation.

The proposed orthotropic model with asymmetry correction provides accurate predictions for uniaxial compression of unreinforced brick masonry with medium-to-high mortar strength (series KRO-1–KRO-3). However, its applicability is limited by:

a) **Material and geometric constraints**: the model requires validation for reinforced masonry, thin-bed joints, or alternative brickwork patterns (e.g., English bond).

b) **Loading scenarios**: nonlinear effects (cracking, creep) and multidirectional stresses were not considered.

c) **Scale effects**: the RVE size (4 courses for vertical loading) may not capture behavior in full-scale structures under complex boundary conditions.

5. Comparison of Voigt and Reuss Methods for Masonry Stiffness Assessment Considering RVE

In this section, a comparative analysis is presented of methods for evaluating masonry stiffness based on the classical Voigt and Reuss approaches, taking into account the determination of the representative volume element (RVE). These methods are widely used for predicting the effective mechanical properties of heterogeneous materials; however, their applicability to anisotropic structures such as brick masonry requires further investigation [29–32].

The conducted analysis demonstrates that classical methods based on the assumption of isotropy or symmetry of properties can lead to significant errors in masonry stiffness evaluation, particularly for specimens with low-strength mortar (KRO-3). To improve calculation accuracy, a modification of the orthotropic model has been proposed through the introduction of an asymmetry coefficient $\alpha = D_{12}/D_{21}$, which enables accounting for micromechanical effects at the “brick-mortar” interfaces.

5.1. RVE Determination via Indicator Zones

The Representative Volume Element (RVE) was established using experimental indicator zone data (Figure 2). For brickwork with brick dimensions 250×65×120 mm and 10 mm joint thickness, RVE selection followed:

a) Y-axis loading (vertical, perpendicular to joints): RVE encompasses 4 brick courses (indicator zones);

b) X-axis loading (horizontal, parallel to joints): RVE comprises 2 brick rows (indicator zones).

5.2. Stiffness Evaluation Methods

Two classical approaches were applied for effective stiffness calculation:

1. **Voigt Method:** assumes uniform strain across components, computing stiffness as volume-weighted average:

$$D^v = A_m D_m + A_b D_b \ , \tag{19}$$

where A_m and A_b represent the volume fractions of mortar and brick, and D_m, D_b denote the stiffness tensors of the isotropic mortar and brick materials, respectively. The area fractions within the RVE were determined for two loading directions:

a. *Y*-axis (perpendicular to joints): $A_b = 86.7\%$, $A_m = 13.3\%$;

b. *X*-axis (parallel to joints): $A_b = 86.7\%$, $A_m = 13.3\%$;

with calculations based on cross-sectional area ratios in the RVE according to the formula:

$$R_i = \frac{A_i}{A_{\text{total}}}, \ i = \text{brick, mortar}, \tag{20}$$

where A_i is the cross-sectional area of component in RVE, $A_{\text{total}} = A_b + A_m$ is the total cross-sectional area.

2. **Method Reuss.** Assumes uniform stress across components, calculating compliance as:

$$S^R = R_m S^m + R_b S^b, \ D^R = \frac{1}{S^R}; \tag{21}$$

$$\text{error} = \frac{D_{ij} - D_{\text{sym}}}{D_{\text{sym}}} \times 100\%, \tag{22}$$

where S^m, S^b is the compliance tensors for mortar and brick.

Stiffness tensors for isotropic materials are defined via Young's modulus (E) and Poisson's ratio (μ):

$$D_m = \frac{E_m}{(1+\mu_m)(1-2\mu_m)} \begin{bmatrix} 1-\mu_m & \mu_m & 0 \\ \mu_m & 1-\mu_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu_m}{2} \end{bmatrix}; \tag{23}$$

$$D_b = \frac{E_b}{(1+\mu_b)(1-2\mu_b)} \begin{bmatrix} 1-\mu_b & \mu_b & 0 \\ \mu_b & 1-\mu_b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu_b}{2} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Table 8 compares two classical methods for evaluating masonry stiffness — the **Voigt method** and the **Reuss method** — against the calculated stiffness matrix components D_{ij} derived from experimental data and the orthotropic model. The goal is to assess the accuracy of these methods for different sample series KRO-1, KRO-2, KRO-3 and identify their limitations.

The error for each method was calculated as the percentage deviation from the experimental D_{ij} values:

$$\text{error} = \frac{D_{\text{method}} - D_{ij}}{D_{ij}} \times 100\% . \quad (25)$$

Table 8. **Comparison of methods for assessing the stiffness of masonry**

Series	Parameter	Calculation by D_{ij}, MPa	Voigt Method, MPa	Voigt errors, %	Reuss Method, MPa	Reuss errors, %
KRO-1	D_{11}	11568.3	11980	3.6	10500	9.2
	D_{12}	2545.0	1600	37.1	1200	52.8
	D_{21}	1684.2	1600	5.0	1200	28.7
	D_{22}	10201.4	10500	2.9	9200	9.8
	D_{33}	4786.5	4650	2.9	3900	18.5
KRO-2	D_{11}	11473.7	11500	0.2	9800	14.6
	D_{12}	3442.1	1700	50.6	1300	62.2
	D_{21}	2085.9	1700	18.5	1300	37.7
	D_{22}	9074.1	9500	4.7	8000	11.8
	D_{33}	4341.5	4100	5.6	3500	19.4
KRO-3	D_{11}	7264.9	9800	34.9	7500	3.2
	D_{12}	2542.8	1800	29.2	1400	44.9
	D_{21}	1856.1	1800	29.2	1400	44.9
	D_{22}	5799.5	6500	12.1	5000	13.8
	D_{33}	2443.2	4100	67.8	3500	43.2

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

Analysis of Table 8 reveals that the Voigt method demonstrates lower error for diagonal stiffness matrix components D_{11}, D_{33}, particularly for KRO-1 and KRO-2 series (error $\leq$ 5.6%), while the Reuss method shows better accuracy for off-diagonal terms (D_{12}, D_{21}) in KRO-3 series (error $\leq$ 44.9%). Both methods, however, significantly underestimate the matrix asymmetry (D_{12}, D_{21}), confirming the necessity to modify classical approaches to account for masonry anisotropy and micromechanical effects.

Figure 12 shows a graphical comparison of the errors obtained using two classical methods for estimating masonry stiffness — the Voigt method and the Reuss method — relative to the orthotropic model, with the errors calculated for the components of the stiffness matrix D_{ij} (Table 8) and expressed as percentage deviations.

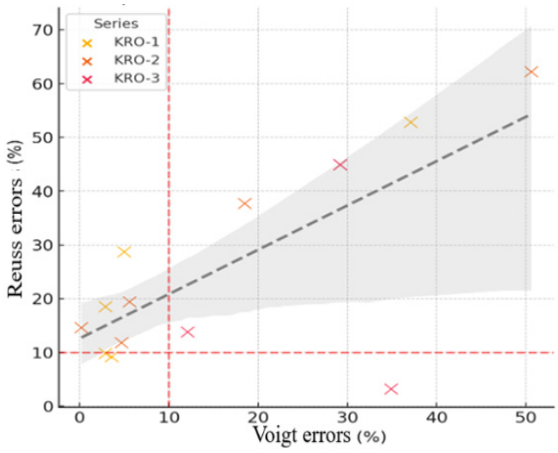


Figure 12. Comparison of Voigt and Reuss error
S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

Although the Voigt and Reuss estimates provide reasonable results for isotropic composites, their underlying assumptions of (*a*) uniform stress/strain fields and (*b*) material symmetry make them fundamentally unsuitable for modeling the orthotropic behavior of masonry, particularly the experimentally observed stiffness matrix asymmetry ($D_{12}/D_{21} > 1.3$) arising from the micromechanics of interfacial boundaries.

Figure 13 illustrates the dependence of the effective elastic moduli on the stiffness ratio E_b/E_m for the three series of specimens (KRO-1, KRO-2, KRO-3).

Both E_x and E_y decrease significantly as (E_b/E_m) increases, reflecting the progressive weakening of mortar relative to brick. Specifically, E_x decreases from approximately 11.2 to 6.5 GPa, while E_y decreases from about 9.8 to 5.1 GPa.

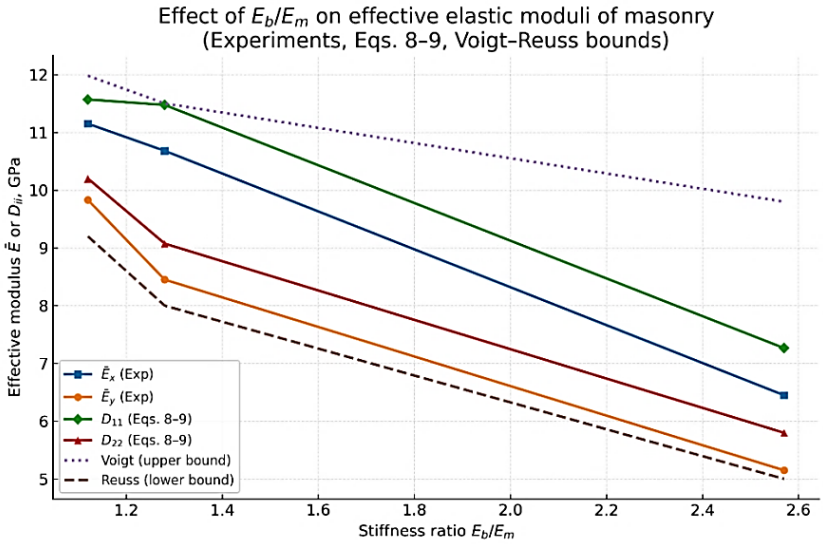


Figure 13. Effect of the brick-to-mortar stiffness ratio on the effective elastic moduli of masonry: comparison of experimental results, stiffness matrix components from Eqs. (8–9), and Voigt–Reuss bounds

S o u r c e: made by O.M.D. Shakarneh.

The stiffness matrix components obtained from Eqs. (8–9) (D_{11}, D_{22}) closely follow the experimental trends and remain consistently bounded by the classical Voigt and Reuss estimates. The Voigt method provides an upper bound that slightly overestimates stiffness, while the Reuss method gives a lower bound that underestimates it. The widening gap between the bounds with increasing (E_b/E_m) indicates a stronger influence of structural heterogeneity when weaker mortar is used, accompanied by a marked increase in anisotropy between the *x*-and *y*-directions.

Thus, the comparison confirms that the orthotropic model derived from Eqs. (8–9) accurately captures masonry behavior. Moreover, mortar stiffness is identified as a governing factor controlling both the magnitude of effective moduli and the degree of anisotropy.

These findings support the applicability of the modified orthotropic model for numerical calibration (e.g., finite element simulations) and for predicting the in-plane mechanical response of masonry walls under compressive loading.

6. Conclusion

This study established fundamental relationships between mortar joint mechanical properties and anisotropic behavior of unreinforced brick masonry. Experimental and numerical results (including micro- and macro-modeling using orthotropic formulation) demonstrated significant stress distribution dependence on the brick-to-mortar elastic modulus ratio (E_b/E_m). The identified stiffness matrix asymmetry ($D_{12} \neq D_{21}$) necessitates accounting for structural heterogeneity and micromechanical processes at brick-mortar interfaces in computational models.

The highest anisotropy occurred in low-strength mortar specimens (KRO-3 series) with anisotropy coefficient D_{11}/D_{22} reaching 1.253. KRO-1 series (high-strength mortar) exhibited more uniform stress distribution, indicating reduced anisotropy effects. Nevertheless, even in this case, classical orthotropic models assuming matrix symmetry showed statistically significant deviations from experimental data.

The research results highlight the critical need to account for the following factors to enhance masonry behavior prediction accuracy:

a) Material anisotropy driven by brick-mortar stiffness disparity;

b) Edge effects, particularly pronounced in low-strength mortar specimens;

c) Elastic property asymmetry, necessitating classical orthotropic model modifications;

d) Real service conditions, including loading direction and masonry component interactions.

The stiffness matrix asymmetry represents a fundamental physical characteristic of masonry rather than an artifact, demanding model refinements. While the correction factor α can currently be employed for engineering calculations, comprehensive understanding requires additional experimental and numerical investigations.

Future work should address:

1. Extension to reinforced masonry and non-standard geometries;
2. Incorporation of nonlinear material models for damage analysis;
3. Experimental validation under shear and combined loading.

References

1. Pindera M-J, Khatam H, Drago AS, Bansal Y. Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: A critical review and emerging approaches. *Composites Part B: Engineering*. 2009;(5):349–378. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.03.007

2. Armbrister OI, Okoli CEE, Shanbhag S. Micromechanics predictions for two-phased nanocomposites and three-phased multiscale composites: A review. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2015;34(8):605–623. https://doi.org/10.1177/0731684415574297 EDN: XOPLQZ

3. Buryachenko VA. Multiparticle effective field and related methods in micromechanics of composite materials. *Applied Mechanics Reviews*. 2001;54(1):1–47. https://doi.org/10.1115/1.3097287 EDN: GTOXZR

4. Raju B, Hiremath SR, Mahapatra DR. A review of micromechanics-based models for effective elastic properties of reinforced polymer matrix composites. *Composite Structures*. 2018;204:607–619. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.125

5. Wang Y, Huang Z. A review of analytical micromechanics models on composite elastoplastic behaviour. *Procedia Engineering*. 2017;173:1283–1290. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.12.159

6. Christensen RM. A critical evaluation for a class of micromechanics models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1990;38(3):379–404. https://doi.org/10.1016/0022-5096(90)90005-O

7. Muzel SD, Bonhin EP, Guimarães NM, Guidi ES. Application of the finite element method in the analysis of composite materials: A review. *Polymers*. 2020;12(4):818. https://doi.org/10.3390/polym12040818 EDN: BIGDZS

8. Bargmann S, Klusemann B, Markmann J, Schnabel JE, Schneider K, Soyarslan C, Wilmers J. Generation of 3D representative volume elements for heterogeneous materials: A review. *Progress in Materials Science*. 2018;96:322–384. https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2018.02.003 EDN: YFOPHN

9. Yim SO, Lee WJ, Cho DH, Park IM. Finite element analysis of compressive behavior of hybrid short fiber/particle/Mg metal matrix composites using RVE model. *Metals and Materials International*. 2015;21(2):408–414. https://doi.org/10.1007/s12540-015-4306-0

10. Singh IV, Shedbale AS, Mishra BK. Material property evaluation of particle reinforced composites using finite element approach. *Journal of Composite Materials*. 2016;50(20):2757–2771. https://doi.org/10.1177/0021998315612539

11. Li V. Integrated structures and materials design. *Materials and Structures*. 2007;40(4):387–396. https://doi.org/10.1617/s11527-006-9156-z EDN: MULCHO

12. Nellippallil AB, Allen JK, Gautham BP, Singh AK, Mistree F. Integrated design of materials, products, and associated manufacturing processes. In: *Architecting Robust Co-Design of Materials, Products, and Manufacturing Processes*. Cham: Springer; 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-45324-4_1

13. Reznikov BS, Nikitenko AF, Kucherenko IV. Determination technique of macroscopic properties of structurally nonhomogeneous environments. Information 1. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2008;(2):10–17. (In Russ.) EDN: ISFKVH

Резников Б.С., Никитенко А.Ф., Кучеренко И.В. Прогнозирование макроскопических свойств структурно-неоднородных сред. Сообщение 1 // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2008. № 2. С. 10–17. EDN: ISFKVH