

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.
 выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
 Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
 «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РЦНИ (Белый список), РИНЦ, RSCI, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения (технические науки), 2.1.2. Основания и фундаменты, подземные сооружения (технические науки), 2.1.9. Строительная механика (технические науки).

Международный научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.



Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Адилходжаев А.И., д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан

Базаров Д.Р., д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

Варум У., д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

Войцкицкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

Волосухин В.А., д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия

Галишников В.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Дуцев М.В., д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия

Евкин А.Ю., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

Какоев С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Козлов Д.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Кудрявцев С.А., чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия

Курбацкий Е.Н., д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия

Лазарев Ю.Г., д-р техн. наук, проф., СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюдпелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

Перькова М.В., д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Федюк Р.С., д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия

Якупов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

Tyurina V.S., Cherpurnenko A.S., Yazyev B.M. Prediction of Thermal Stress in Hardening Mass Concrete Structures Using Temperature Monitoring Data (Прогнозирование температурных напряжений в твердеющих массивных монолитных конструкциях по данным мониторинга температур) 93

Хакимов А.Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж 105

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Гайджуров П.П., Царитова Н.Г., Исхакова Э.Р., Корчагин Н.А. Численный анализ напряженно-деформированного состояния пространственной стержневой конструкции с учетом податливости узловых соединений 115

Горкина М.Р. Деформирование балки, лежащей на упругом основании, при различных вариантах коэффициента податливости основания 129

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Ivanov V.N., Tupikova E.M., Rynkovskaya M.I. Comparative Analysis of Calculation of a Plate of Curvilinear Trapezoidal Plan Using Numerical Methods (Сравнительный анализ расчета пластины на криволинейно-трапециевидном плане численными методами) 138

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Суханов А.В. Способы испытания и устройство для исследования механических свойств фибры, бетона и фибробетонных элементов 152

Qais Q.A.A., Okolnikova G.E., Yazyev S.B., Obeid M.A.A. Optimizing the Composition of Fiber-Reinforced Concrete Airfield Pavements to Improve Performance and Prevent Cracking (Оптимизация состава фибробетонных аэродромных покрытий для повышения эксплуатационных характеристик и предотвращения образования трещин) 166

Редактор И.Л. Панкратова
 Редактор англоязычных текстов С.Л. Шамбина
 Дизайн обложки Ю.Н. Ефремовой
 Компьютерная верстка Н.В. Маркеловой

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
 Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stj@rudn.ru

Подписано в печать 24.04.2026. Выход в свет 27.04.2026. Формат 60x84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 10,46. Тираж 250 экз. Заказ № 564. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
 Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
 Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026 VOLUME 22 No. 2

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-2

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by White List of RCSI, Russian Index of Science Citation, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.



The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatın, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dusev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

Tyurina V.S., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Prediction of Thermal Stress in Hardening Mass Concrete Structures Using Temperature Monitoring Data 93

Khakimov A.G. Modeling the Stress-Strain State of Concrete Coated Pipeline During Laying from Pipe-Laying Barges 105

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

Gaydzhurov P.P., Tsaritova N.G., Iskhakova E.R., Korchagin N.A. Numerical Analysis of the Stress-Strain State of a Spatial Core Structure, Taking into Account the Malleability of Nodal Joints 115

Gorkina M.R. Deformation of a Beam Lying on an Elastic Foundation with Different Variants of the Foundation Flexibility Coefficient 129

ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

Ivanov V.N., Tupikova E.M., Rynkovskaya M.I. Comparative Analysis of Calculation of a Plate of Curvilinear Trapezoidal Plan Using Numerical Methods 138

EXPERIMENTAL RESEARCH

Sukhanov A.V. Test Methods and Device for Studying the Mechanical Properties of Fiber, Concrete and Fiber-Reinforced Concrete Elements.... 152

Qais Q.A.A., Okolnikova G.E., Yazyev S.B., Obeid M.A.A. Optimizing the Composition of Fiber-Reinforced Concrete Airfield Pavements to Improve Performance and Prevent Cracking 166

Copy Editor I.L. Pankratova

English Texts' Editor S.L. Shambina

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-2-93-104

EDN: JZQSKW

Research article / Научная статья

Prediction of Thermal Stress in Hardening Mass Concrete Structures Using Temperature Monitoring Data

Vasilina S. Tyurina^{ID}, Anton S. Chepurnenko^{✉ ID}, Batyr M. Yazyev^{ID}

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ anton_chepurnenk@mail.ru

Received: January 30, 2026

Revised: March 13, 2026

Accepted: March 20, 2026

Abstract. Thermal stress during the hardening of mass concrete structures is a significant risk factor for early cracking, which directly impacts the durability and load-bearing capacity of buildings and structures. Simplified calculation methods based on hypotheses about the pattern of temperature and stress distributions often demonstrate low accuracy, necessitating the search for more advanced approaches to stress state prediction. This paper proposes a method for predicting the thermal stress in mass concrete foundation slabs based on artificial neural networks (ANNs) using real-time temperature monitoring data. Three ANN architectures were investigated: recurrent, feedforward, and cascade. A comprehensive dataset, including 499,800 records obtained from parametric finite element calculations, was compiled for training. The models demonstrated high prediction accuracy, with the feedforward neural network achieving the best result, with a mean-square error of 0.025 MPa². Verification using experimental data confirmed the practical applicability of the approach, including the ability to predict the timing of crack formation. The developed method enables efficient and less computationally expensive analysis of temperature monitoring data in real time compared to traditional modeling, thereby improving the reliability of building structures.

Keywords: mass concrete structures, foundation slab, thermal stresses, machine learning, monitoring, early crack formation

Authors' contribution: Tyurina V.S. — investigation, data processing, graphic design, text writing; Chepurnenko A.S. — software, text draft, review and editing; Yazyev B.M. — supervision, conceptualization. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

A statement about data availability. The training dataset is available for download at: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.33439.62880/>

Funding. The study was supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 25-19-00164, <https://rscf.ru/project/25-19-00164/>

For citation: Tyurina VS, Chepurnenko AS, Yazyev BM. Prediction of thermal stress in hardening mass concrete structures using temperature monitoring data. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):93–104. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-93-104> EDN: JZQSKW

Vasilina S. Tyurina, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8808-2687, ORCID: 0009-0001-6399-401X; e-mail: vasilina.93@mail.ru

Anton S. Chepurnenko, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7149-7981, ORCID: 0000-0002-9133-8546; e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru

Batyr M. Yazyev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5970-5350, ORCID: 0000-0002-5205-1446; e-mail: ps62@yandex.ru

© Tyurina V.S., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Прогнозирование температурных напряжений в твердеющих массивных монолитных конструкциях по данным мониторинга температур

В.С. Тюрина[✉], А.С. Чепурненко[✉], Б.М. Языев[✉]

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ anton_chepurnenk@mail.ru

Поступила в редакцию: 30 января 2026 г.

Доработана: 13 марта 2026 г.

Принята к публикации: 20 марта 2026 г.

Аннотация. Температурные напряжения в процессе твердения массивных монолитных конструкций являются значимым фактором риска раннего трещинообразования, что напрямую влияет на долговечность и несущую способность зданий и сооружений. Упрощенные методы расчета, основанные на гипотезах о характере распределения температур и напряжений, часто демонстрируют невысокую точность, что актуализирует поиск более совершенных подходов к прогнозированию напряжённого состояния. Авторами предложен метод прогнозирования температурных напряжений в массивных монолитных фундаментных плитах на основе искусственных нейронных сетей (ИНС) с использованием данных мониторинга температур в режиме реального времени. Для этого были исследованы три архитектуры ИНС — рекуррентная, прямого распространения и каскадная. В целях обучения сформирован обширный датасет, включающий 499 800 записей, полученных на основе параметрических конечно-элементных расчётов. Модели продемонстрировали высокую точность предсказания, при этом наилучший результат показала нейросеть прямого распространения со среднеквадратической ошибкой 0,025 МПа². Верификация на экспериментальных данных подтвердила практическую применимость подхода, включая способность прогнозировать момент образования трещин. Разработанный метод позволяет эффективно и с меньшими вычислительными затратами, по сравнению с традиционным моделированием, анализировать данные мониторинга температур в реальном времени, что способствует повышению надёжности строительных конструкций.

Ключевые слова: массивные монолитные конструкции, фундаментная плита, температурные напряжения, машинное обучение, мониторинг, раннее трещинообразование

Вклад авторов: Тюрина В.С. — проведение исследования, обработка данных, графическое оформление, написание текста; Чепурненко А.С. — программное обеспечение, подготовка текста статьи, рецензирование и редактирование; Языев Б.М. — общее научное руководство, формулировка концепции исследования. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление о доступности данных. Обучающий датасет доступен для скачивания по ссылке: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.33439.62880>

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-19-00164, <https://rscf.ru/project/25-19-00164/>

Для цитирования: Тюрина В.С., Чепурненко А.С., Языев Б.М. Прогнозирование температурных напряжений в твердеющих массивных конструкциях по данным мониторинга температур // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 93–104. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-93-104> EDN: JZQSKW

1. Introduction

A widespread problem for mass concrete and reinforced concrete structures is the formation of temperature cracks during the early stages of hardening. During cement hydration, a large amount of heat is released, causing uneven temperature rise: the core of the structure develops much more heat than the surface. During subsequent cooling, tensile stress that exceeds the strength of early age concrete arises, leading to cracking [1; 2]. This reduces the strength, durability, and aesthetics of structures and increases the risk of corrosion [3].

The most common tool for assessing the risk of early cracking is finite element modeling. It allows to analyse the evolution of temperature distributions and stresses, taking into account changes in the key properties of concrete over time. It is critical to account for the dependence of concrete strength and deformation characteristics on time and hardening conditions, since ignoring this factor leads to an incorrect evaluation of the stress state [4–6].

A limitation of finite element modeling is the inability to account for uncertainties in input data, including ambient and foundation temperatures, wind speed, variations in concrete heat release when using

cements from different manufacturers, etc. Variability in input data can lead to significant deviations of the actual temperature and stress values in the structure from the expected. In existing monitoring systems for mass structures (Maturix¹, Giatec SmartRock²), only temperature measurements are typically taken, not stress [7]. Stress can be determined indirectly from strain; however, sensors for measuring strain are highly complex and expensive, as they must be capable of compensating their readings with respect to temperature [8]. Therefore, the problem of quickly assessing the actual stress in the structure based on real-time temperature monitoring data is of great relevance. Such an assessment allows for timely measures to be taken to prevent early cracking, including additional thermal insulation of surfaces to reduce temperature gradients when the stress approaches a dangerous level [9].

In [10], a simplified method for estimating thermal stress in mass concrete foundation slabs was proposed. Instead of the traditional approach based on the temperature difference between the center and the surface [11–14], the proposed method uses temperature data at three characteristic points along the slab thickness (bottom, middle, and top). The formulas were verified using numerical simulation and demonstrated high accuracy for slabs up to 2 meters thick. Significant errors for slab thickness values of 2 meters and greater are associated with the assumption of a parabolic distribution of temperature and stress along the slab thickness. This article aims to overcome this limitation using machine learning methods. It should be noted that previously, machine learning methods were used only to predict the heat release of concrete [15], its thermal conductivity coefficient [16], and strength characteristics [17–18], estimating the temperature difference between the center and the surface of the structure [19], determining the maximum stress level for fixed input data [20], and designing an optimal concrete mix composition [21–24].

Unlike previous studies, the aim of this article is to develop and validate a method for predicting thermal stress in mass concrete foundation slabs based on limited temperature monitoring data collected at characteristic points along the slab thickness, using artificial neural networks. To achieve this objective, the following tasks were addressed:

1. Create a representative training dataset based on parametric finite element calculations, covering variations in geometric, strength, and thermophysical parameters.
2. Develop and train three artificial neural network architectures (recurrent, feedforward, and cascade) for stress prediction based on temperature monitoring data.
3. Evaluate the accuracy and comparative performance of the proposed models based on training quality metrics and regression curve analysis.
4. Verify the developed models using experimental data for a real foundation slab.

2. Methods

MATLAB R2021a (Neural Network Toolbox) serves as the environment for implementing machine learning models. Seven variables were selected as input parameters for the machine learning models: temperatures at three points along the slab thickness (T_{bot} at the bottom surface, T_{mid} in the middle of the slab, and T_{up} at the top surface), time t in days, concrete compressive strength class B according to the Russian Federal Standard GOST 18105-2018³, slab thickness h , and hardening rate (*rate*). The output parameters of the models are three values: stress σ_{bot} at the bottom surface, σ_{mid} in the middle surface, and σ_{up} at the top surface (MPa). Three artificial neural network (ANN) architectures are considered:

1. Layer recurrent neural network (Figure 1);
2. Feedforward neural network (Figure 2);
3. Cascade forward neural network (Figure 3).

¹ Maturix — Concrete temperature, strength and maturity monitoring. Available from: <https://maturix.com/> (accessed: 27.01.2026).

² Giatec Scientific Inc — Smart Construction Testing Technologies. Available from: <https://www.giatecscientific.com/> (accessed: 27.01.2026).

³ GOST 18105-2018. Concretes. Rules for control and assessment of strength. 2019. Available from: <https://www.mos.ru/upload/documents/files/2071/GOST18105-2018.pdf> (accessed: 27.01.2026)

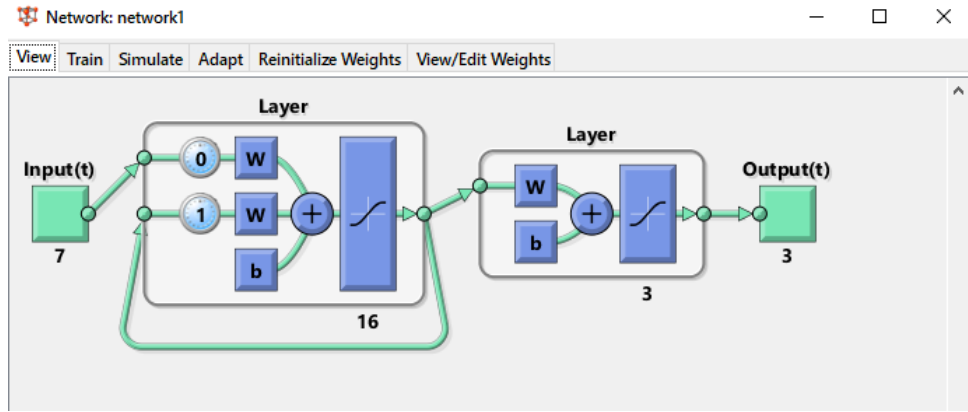


Figure 1. Recurrent neural network (screenshot from MATLAB)

Source: made by V.S. Tyurina.

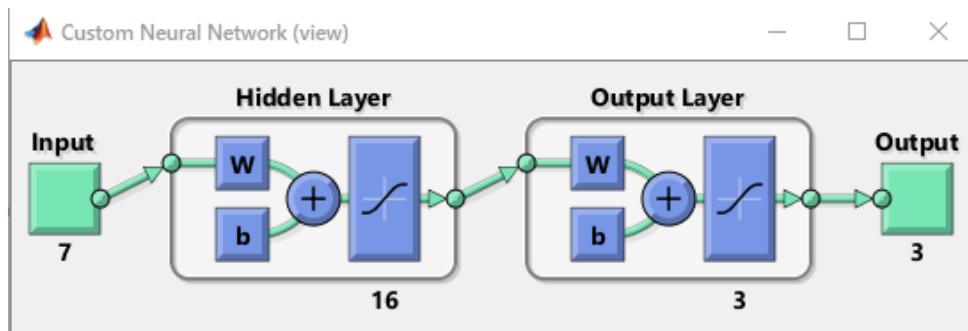


Figure 2. Feedforward neural network (screenshot from MATLAB)

Source: made by V.S. Tyurina.

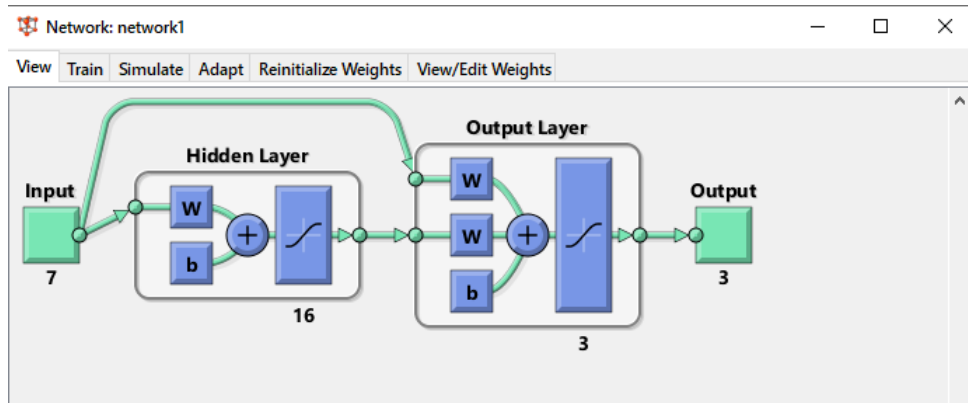


Figure 3. Cascade forward neural network (screenshot from MATLAB)

Source: made by V.S. Tyurina.

For all ANN architectures, a single hidden layer with sixteen neurons was used. When forming the training dataset, the slab thickness varied from 1 to 3 m in 0.5 m increments, the heat transfer coefficient on the upper surface ranged from 2 to 30 $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ in 4 $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ increments, and the concrete class ranged from B25 to B45 in 5 MPa increments. The ambient temperature varied from 5 to 35 $^\circ C$ in 5 $^\circ C$ increments. Three integer values were introduced for the hardening rate: 1, 2, and 3, corresponding to high-early-strength, regular, and low-early-strength concrete. The selected ranges of input parameter variations cover the most common parameters for concrete placement and the geometry of mass concrete foundation slabs.

The heat release function was defined by equation [25]:

$$Q(t) = Q_{28} \exp \left(k \left(1 - \left(\frac{28}{t-b} \right)^x \right) \right), \quad (1)$$

where Q_{28} is the total heat release per 1 m³ of concrete at 28 days, k and x are coefficients determining the kinetics of heat release, and b is the induction period.

The heat release parameters are listed in Table 1.

For each set of values [B h h_{up} T_{∞} $rate$], the temperature distribution and stress state were calculated, with temperature and stress values determined at three characteristic points (bottom, middle, top) for 119 time points ranging from 0.5 to 30 days, with a step size of 0.25 days. The temperature distribution was calculated using the finite element method (FEM) in a simplified one-dimensional formulation according to the method described in [26]. The stress state was calculated using the method presented in [27].

Table 1. Parameters in the heat release equation

Parameter	k	x	Q_{28} , MJ/m ³	b , days
High-early-strength (1)	0.14	0.4	130 + 3·(B – 25)	0.167
Regular (2)	0.19	0.51		
Low-early-strength (3)	0.24	0.62		

Source: made by V.S. Tyurina.

The thermophysical properties of the soil were assumed to be constant and equal to: thermal conductivity coefficient $\lambda_g = 0.9$ W/(m·°C), specific heat capacity $c_g = 750$ J/(kg·°C), and density $\rho_g = 1800$ kg/m³. The following values of thermophysical properties of concrete were assumed: $\lambda = 2.67$ W/(m·°C), $c = 1000$ J/(kg·°C), $\rho = 2400$ kg/m³. The function describing the change in concrete compressive strength was defined by equation [28]:

$$R = R_{28} \exp \left(s \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t_{eq} - b}} \right) \right), \quad (2)$$

where $R_{28} = B + 12$ is the compressive strength of concrete at 28 days, s is a coefficient dependent on the hardening kinetics of concrete, $t_{eq} = DM / 20$ is the equivalent age of concrete, expressed in terms of its degree of maturity DM :

$$DM = \int_0^t T(\tau) d\tau, \quad (3)$$

where $T(\tau)$ is the temperature at a point at age τ .

Coefficient s was taken to be 0.2 for high-early-strength concrete, 0.35 for regular concrete, and 0.5 for low-early-strength concrete. The modulus of elasticity of concrete was determined as a function of compressive strength using formula [28]:

$$E(R) = 22265 \left(\frac{R}{10} \right)^{0.28}, \text{ MPa}. \quad (4)$$

The value of R in Equation (4) should be substituted in MPa. Poisson's ratio of concrete was assumed to be independent of time and hardening temperature ($\nu = 0.2$). Up to an equivalent age of 12 hours, the modulus of elasticity of concrete was assumed to be zero (it was assumed that the concrete was not yet a solid and contained no stress). The layering of the concrete mix was not taken into account in the calculation. The initial soil temperature was assumed to be equal to the ambient temperature.

The calculated temperature values T_{bot} , T_{mid} , T_{up} were placed in the input parameter array along with the values $[B, h, rate]$ and time t . Stress values σ_{bot} , σ_{mid} , σ_{up} were placed in the target values array of the output variables. The total volume of the training dataset consisted of 4200 numerical experiments ($4200 \times 119 = 499800$ rows). A sample of the generated training dataset is presented in Table 2.

Table 2. A fragment of the training dataset

No.	Input parameters							Output parameters		
	$T_{bot}, ^\circ C$	$T_{mid}, ^\circ C$	$T_{up}, ^\circ C$	$t, days$	B, MPa	h, m	rate	σ_{bot}, MPa	σ_{mid}, MPa	σ_{up}, MPa
1	23.97	31.98	29.18	0.5	25	1	1	0.000	0.000	0.000
2	27.31	35.90	32.27	0.75	25	1	1	-0.002	-0.088	0.094
3	29.31	37.68	33.69	1	25	1	1	-0.095	-0.116	0.178
4	30.67	38.54	34.33	1.25	25	1	1	-0.248	-0.108	0.256
5	31.63	38.91	34.53	1.5	25	1	1	-0.424	-0.087	0.335
6	32.33	39.01	34.46	1.75	25	1	1	-0.606	-0.062	0.415
7	32.84	38.93	34.24	2	25	1	1	-0.784	-0.036	0.492
8	33.20	38.73	33.91	2.25	25	1	1	-0.954	-0.010	0.565
9	33.44	38.46	33.52	2.5	25	1	1	-1.114	0.014	0.631
10	33.58	38.14	33.10	2.75	25	1	1	-1.262	0.037	0.691
11	33.66	37.77	32.65	3	25	1	1	-1.399	0.059	0.743
12	33.67	37.39	32.20	3.25	25	1	1	-1.525	0.080	0.789
13	33.62	36.98	31.74	3.5	25	1	1	-1.640	0.100	0.828
14	33.54	36.56	31.28	3.75	25	1	1	-1.745	0.118	0.861
15	33.42	36.14	30.83	4	25	1	1	-1.842	0.136	0.889
...
499786	76.22	70.58	37.56	26.5	45	3	3	-5.600	-1.337	8.696
499787	76.08	70.38	37.54	26.75	45	3	3	-5.609	-1.317	8.631
499788	75.94	70.18	37.52	27	45	3	3	-5.617	-1.297	8.566
499789	75.80	69.99	37.50	27.25	45	3	3	-5.624	-1.278	8.501
499790	75.66	69.79	37.49	27.5	45	3	3	-5.630	-1.258	8.436
499791	75.51	69.60	37.47	27.75	45	3	3	-5.636	-1.239	8.372
499792	75.37	69.41	37.45	28	45	3	3	-5.642	-1.220	8.307
499793	75.23	69.22	37.44	28.25	45	3	3	-5.647	-1.202	8.243
499794	75.09	69.03	37.42	28.5	45	3	3	-5.651	-1.184	8.179
499795	74.94	68.84	37.40	28.75	45	3	3	-5.654	-1.166	8.116
499796	74.80	68.65	37.39	29	45	3	3	-5.657	-1.148	8.053
499797	74.65	68.46	37.37	29.25	45	3	3	-5.660	-1.130	7.990
499798	74.51	68.28	37.36	29.5	45	3	3	-5.662	-1.113	7.927
499799	74.37	68.10	37.34	29.75	45	3	3	-5.663	-1.095	7.864
499800	74.22	67.91	37.32	30	45	3	3	-5.664	-1.078	7.802

Source: made by V.S. Tyurina.

The artificial neural network models were trained using the Levenberg — Marquardt algorithm. The training dataset was randomly divided into three parts: “Training,” “Validation” and “Test,” which were used for training, validation, and testing, respectively. The split ratio was 75:15:15%. The mean squared error (MSE) was used as the training quality metric:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (T_j - Y_j)^2, \tag{5}$$

where n is the training sample size, Y_j are the stress values predicted by the neural network, T_j are the target stress values.

3. Results and Discussion

The statistical characteristics of the generated dataset are presented in Table 3. The model operates reliably only within the ranges between min and max for the input parameters, since using artificial neural networks for extrapolation can lead to unpredictable results.

Table 3. Statistical characteristics of the training dataset

Characteristic	Input variables							Output variables		
	T_{bot}	T_{mid}	T_{up}	t	B	h	rate	σ_{bot}	σ_{mid}	σ_{up}
mean	46.35	46.16	27.78	15.25	35	2	2	-2.98	-0.52	2.42
std. dev.	15.08	16.77	12.71	8.59	7.07	0.71	0.82	2.10	0.97	3.36
min	6.21	6.32	5.23	0.50	25	1	1	-9.21	-4.53	-9.95
25%	35.96	34.20	17.64	7.75	30	1.5	1	-4.41	-1.12	0.27
50%	46.57	45.92	27.39	15.25	35	2	2	-2.94	-0.39	2.45
75%	57.40	58.05	36.59	22.75	40	2.5	3	-1.51	0.18	4.71
max	85.57	99.69	79.89	30.00	45	3	3	3.11	2.27	12.55

Source: made by V.S. Tyurina.

The correlation coefficient matrix is shown in Table 4. Table 4 indicates that a very strong positive correlation (correlation coefficient R_{XY} greater than 0.9) is observed between parameters T_{bot} and T_{mid} . A strong positive correlation ($0.7 \leq R_{XY} < 0.9$) is also observed between parameters T_{up} and T_{bot} , σ_{up} and T_{bot} , σ_{mid} and T_{bot} , σ_{mid} and T_{mid} . Correlation between the temperatures at the bottom surface, in the middle of the slab, and at the top surface is explained by the fact that the heating of the structure due to hydration is accompanied by the rise in temperature at all points. Strong correlation between the temperature and stress parameters also fully corresponds to the physics of the process.

A strong negative correlation is observed between parameters σ_{up} and σ_{mid} . This is consistent with the results of [29], where it was shown that, assuming a parabolic temperature distribution along the thickness and symmetric heat transfer conditions, the following relationship holds between the increments of stresses σ_{up} and σ_{mid} :

$$2\Delta\sigma_{mid} = -\Delta\sigma_{up}. \quad (6)$$

Under asymmetric heat exchange conditions (heat exchange with the ground and the atmosphere), this relationship is disrupted, but a strong negative correlation between σ_{up} and σ_{mid} persists.

Moderate positive correlation ($0.5 \leq R_{XY} < 0.7$) is observed between parameters h and T_{bot} , h and T_{mid} , h and σ_{up} . It is evident that as the slab thickness increases, the maximum temperature at the center of the structure also increases. Since most of the heat is dissipated through the top surface of the slab, the temperature at the bottom surface also increases as the thickness increases.

Moderate positive correlation ($0.3 \leq R_{XY} < 0.49$) is observed between parameters T_{up} and σ_{up} , t and σ_{mid} , the hardening rate and the value of σ_{bot} . Parameters h and t , B and t , in the training dataset are completely independent.

The training process for the recurrent neural network, feedforward neural network, and cascade neural network is shown in Figures 4–6, respectively. The training process was limited to 1000 iterations. The best mean square error value at the 1000th iteration was achieved for the feedforward neural network and amounted to 0.025 MPa².

Figures 7–9 show the regression plots for the three machine learning models. The x-axis plots the target stress values T , and the y-axis plots the values Y predicted by the neural networks. The shape of the graphs for the models under consideration is similar; all points lie a short distance from the line $Y = T$. The correlation coefficients between the target and predicted values are close to one.

Table 4. Correlation coefficient matrix

Parameter	T_{bot}	T_{mid}	T_{up}	t	B	h	$rate$	σ_{bot}	σ_{mid}	σ_{up}
T_{bot}	1.00	0.96	0.73	-0.18	0.23	0.53	-0.06	-0.21	-0.72	0.79
T_{mid}	0.96	1.00	0.76	-0.36	0.21	0.55	-0.04	0.02	-0.83	0.84
T_{up}	0.73	0.76	1.00	-0.20	0.08	0.10	-0.01	0.26	-0.36	0.44
t	-0.18	-0.36	-0.20	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.46	0.48	-0.34
B	0.23	0.21	0.08	0.00	1.00	0.00	0.00	-0.25	-0.11	0.15
h	0.53	0.55	0.10	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.24	-0.68	0.63
$rate$	-0.06	-0.04	-0.01	0.00	0.00	0.00	1.00	0.47	-0.09	0.26
σ_{bot}	-0.21	0.02	0.26	-0.46	-0.25	-0.24	0.47	1.00	-0.10	0.02
σ_{mid}	-0.72	-0.83	-0.36	0.48	-0.11	-0.68	-0.09	-0.10	1.00	-0.91
σ_{up}	0.79	0.84	0.44	-0.34	0.15	0.63	0.26	0.02	-0.91	1.00

Source: made by V.S. Tyurina.

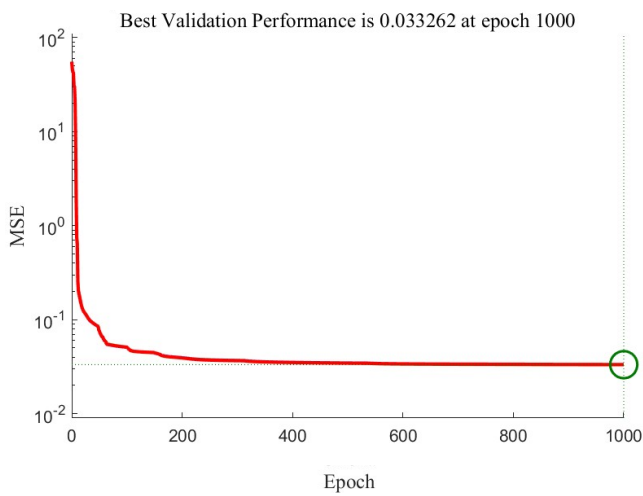


Figure 4. The training process for the recurrent neural network. Source: made by V.S. Tyurina.

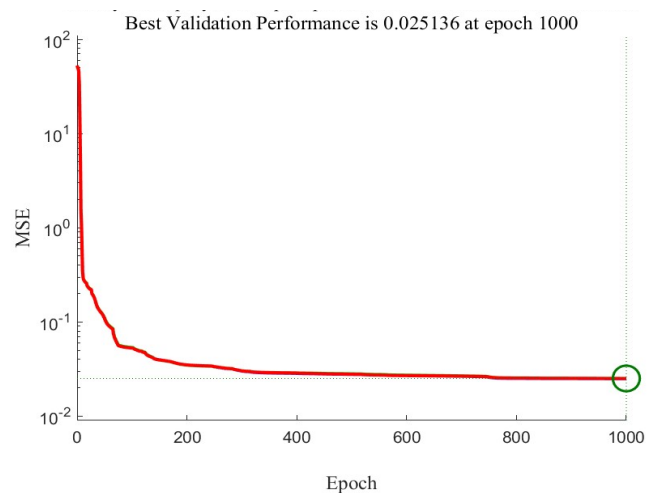


Figure 5. The training process for the feedforward neural network. Source: made by V.S. Tyurina.

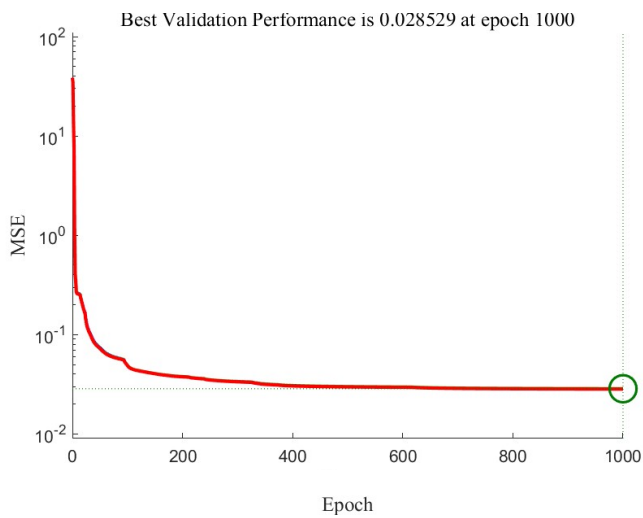


Figure 6. The training process for the cascade neural network. Source: made by V.S. Tyurina.

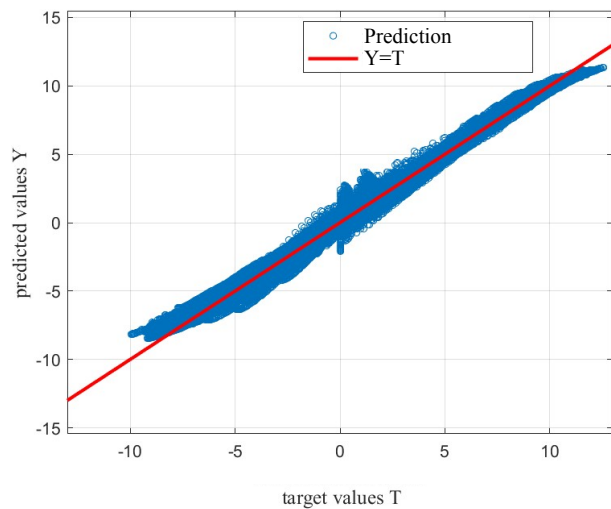


Figure 7. Regression plot for the recurrent neural network. Source: made by V.S. Tyurina.

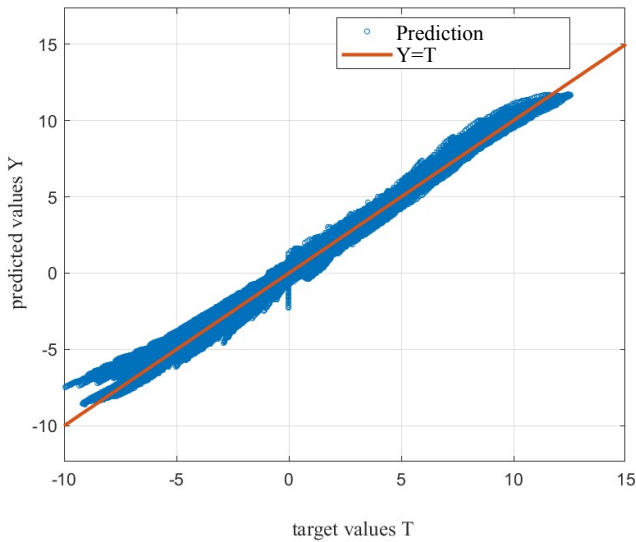


Figure 8. Regression plot for the feedforward neural network
Source: made by V.S. Tyurina.

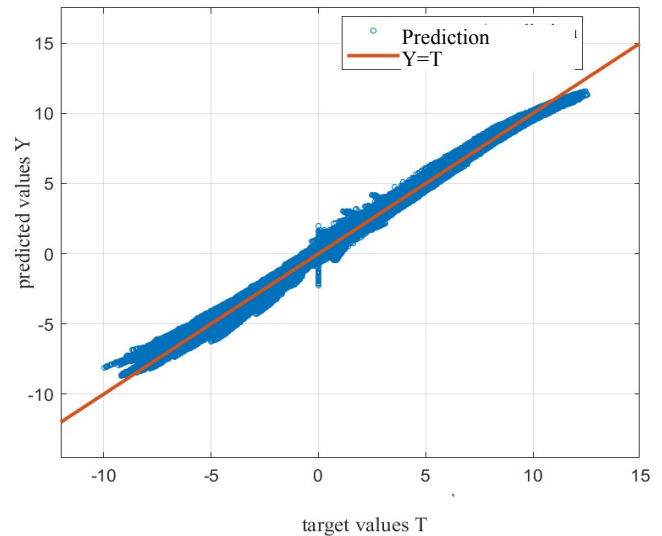


Figure 9. Regression plot for the cascade neural network
Source: made by V.S. Tyurina.

The trained models were also validated using experimental data for a mass concrete foundation slab 2 m thick, as reported in [30]. Stress predictions were performed based on experimental temperature values. The prediction results were then compared with the field measurements. Since the temperature on the top surface exhibited significant daily fluctuations, preliminary smoothing of the experimental data was applied (Figure 10). For the bottom surface and the middle of the slab, the experimental temperature values are given in Table 5.

According to the classification used in this study, the concrete used in the slab is a high-early-strength concrete with a strength class of approximately B22.5. Figure 11 shows a comparison of the predictions made by the artificial neural networks with experimental data for the center of the foundation slab. For comparison, the results of finite element modeling using relationships (2)–(4) are also presented. The heat release function in the finite element calculation was selected to ensure the best possible agreement between the calculated and experimental temperatures.

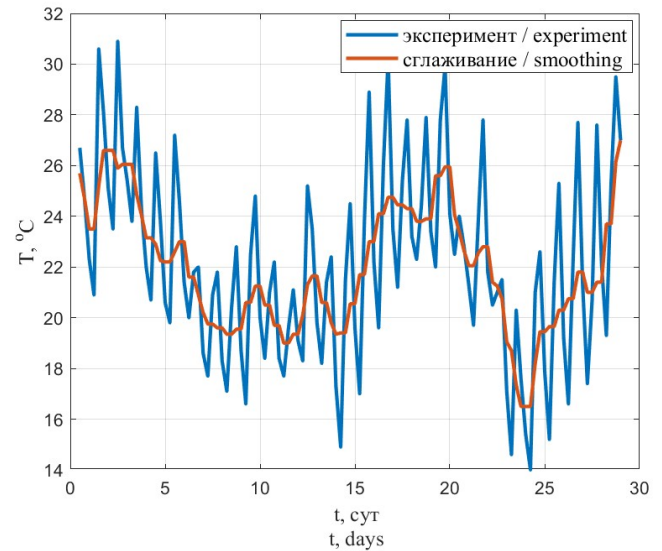


Figure 10. Graph of temperature change on the upper surface of the slab before and after smoothing
Source: made by V.S. Tyurina.

Table 5. Experimental temperature values in the middle of the thickness and at the lower surface

t , days	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T_{mid} , °C	23.1	28.8	41.8	44.3	42.6	40	37.3	35.3	33.3	31.5	30.2	29.2	28.3	27.4	26.9
T_{bot} , °C	23	25.7	32	35	36.3	36.4	35.9	35.1	34.2	33.3	32.4	31.5	30.7	29.9	29.2
t , days	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
T_{mid} , °C	26.1	25.8	25.7	25.8	25.9	25.8	25.7	25.5	25.3	24.4	23.5	23.1	23	23	23.1
T_{bot} , °C	28.6	28.1	27.6	27.2	26.8	26.6	26.3	26.1	26	25.7	25.4	25.1	24.7	24.4	24.2

Source: made by V.S. Tyurina.

The graphs show that the three machine learning models and the FEM produce roughly the same results, with the exception of the initial time point. The feedforward neural network provides a more accurate prediction at the initial time point, exhibiting the lowest mean square error among all the models considered. At the 16-day mark during the experiment, a crack was observed in the slab, corresponding to a spike in the experimental graph. At this point in time, the neural networks predict the tensile stress value with sufficient accuracy. Deviations of the experimental results from the finite element analysis and the neural network predictions are observed in the time interval from 3 to 11 days. These can be explained by deviation of the actual time-dependent elastic modulus of concrete from that assumed in the model.

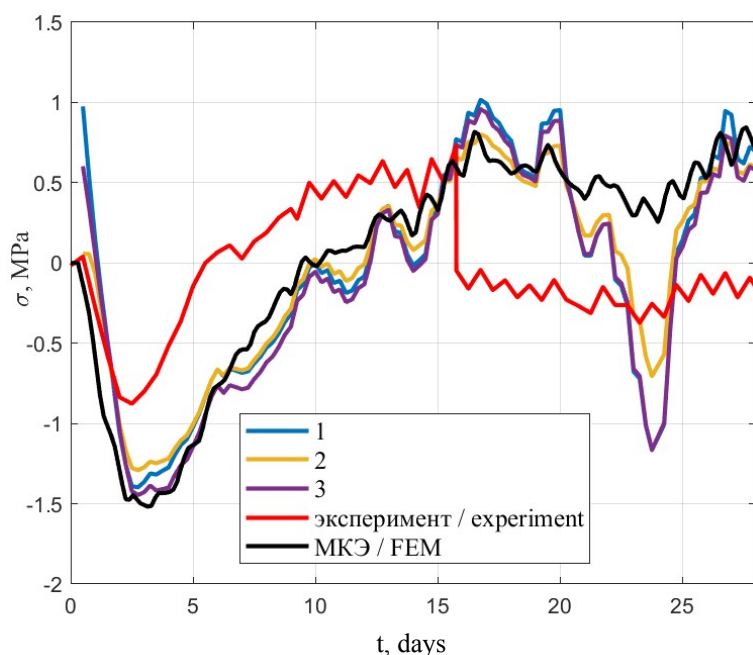


Figure 11. Comparison of neural network predictions with experimental data and finite element analysis results:

1 — recurrent neural network; 2 — feedforward neural network; 3 — cascade neural network

Source: made by V.S. Tyurina.

4. Conclusion

As part of this study, an approach for predicting thermal stress in mass concrete foundation slabs based on temperature monitoring data using machine learning methods was developed and validated. Three artificial neural network architectures were considered as models: a recurrent neural network, a feedforward neural network, and a cascade neural network. Training was conducted using a dataset of 499,800 rows, generated from 4200 numerical experiments and covering a wide range of variations in geometric, strength, and thermophysical parameters.

The feedforward neural network model yielded the best results, achieving a mean square error in the stress prediction of 0.025 MPa². All three models demonstrated high prediction accuracy, as confirmed by regression plots with correlation coefficients between the target and predicted values close to one. Verification of the developed ANN models using experimental data for a 2-m-thick slab demonstrated their adequacy and practical applicability. With particular accuracy, the models predicted the emergence of tensile stress corresponding to the crack formation observed in the experiment on the 16th day.

The proposed approach overcomes the limitations of existing methods based on the assumption of a parabolic distribution of temperature and stress, and provides accurate predictions for structures thicker than 2 m. The use of ANN significantly reduces computational costs compared to direct finite element modeling, making the method an effective tool for quick analysis of monitoring data in real-time.

Thus, the application of machine learning methods to predict thermal stress in hardening mass concrete structures is a promising area of research that helps to improve the accuracy of stress state evaluation and prevent early cracking.

References

1. Safiuddin M, Kaish ABM, Woon C-O, Raman SN. Early-age cracking in concrete: causes, consequences, remedial measures, and recommendations. *Applied Sciences*. 2018;8(10):1730. <https://doi.org/10.3390/app8101730>.
2. Klemczak B, Batog M, Pilch M, Żmij A. Analysis of cracking risk in early age mass concrete with different aggregate types. *Procedia engineering*. 2017;193:234–241. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.06.209>
3. Mazzoli A, Monosi S, Plescia ES. Evaluation of the early-age-shrinkage of fiber reinforced concrete (FRC) using image analysis methods. *Construction and Building Materials*. 2015;101:596–601. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.10.090>
4. Waller V, d'Aloia L, Cussigh F, Lecrux S. Using the maturity method in concrete cracking control at early ages. *Cement and Concrete Composites*. 2004;26(5):589–599. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(03\)00080-5](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(03)00080-5)
5. Alos Shepherd D, Dehn F. Experimental study into the mechanical properties of plastic concrete: Compressive strength development over time, tensile strength and elastic modulus. *Case Studies in Construction Materials*. 2023;19:e02521. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2023.e02521> EDN: DAARVN
6. Xu J, Shen Z, Yang S, Xie X, Yang Z. Finite element simulation of prevention thermal cracking in mass concrete. *International Journal of Computing Science and Mathematics*. 2019;10(4):327–339. <https://doi.org/10.1504/IJCSM.2019.102691>
7. Julia R, Agrela F, Rosales M, López-Alonso M, Cuenca-Moyano G. Execution of large-scale sustainable pavement with recycled materials and eco-hybrid additions to cement. Assessment of Mechanical Behaviour and Life Cycle. *Construction and Building Materials*. 2025;453:139558. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2025.139967> EDN: GOCOWJ
8. Namatēvs I, Gaigals G, Ozols K. ConMonity: An IoT-Enabled LoRa/LTE-M platform for multimodal, real-time monitoring of concrete curing in construction environments. *Sensors*. 2026;26:14. <https://doi.org/10.3390/s26010014> EDN: CNKAJT
9. Aniskin NA, Chuc NT, Khanh PK. The use of surface thermal insulation to regulate the temperature regime of a mass concrete during construction. *Power Technology and Engineering*. 2021;55(1):1–7. <https://doi.org/10.1007/s10749-021-01310-6> EDN: TSLLPN
10. Tyurina V, Chepurnenko A, Tkachev D. A simplified method for assessing thermal stresses during the construction of massive monolithic foundation slabs based on temperatures at three points. *Buildings*. 2026;16(1):188. <https://doi.org/10.3390/buildings16010188>
11. Liu L, Zhao S, Xin J, Wang Z. Simplified analysis of thermal cracks in low-heat Portland cement concrete. *Advances in Civil Engineering*. 2022;2022:7630568. <https://doi.org/10.1155/2022/7630568> EDN: IQXPLS
12. Aniskin NA, Nguyen TC. Predictive model of temperature regimes of a concrete gravity dam during construction: Reducing cracking risks. *Buildings*. 2023;13(8):1954. <https://doi.org/10.3390/buildings13081954> EDN: LFAQTEG
13. Nguyen CT, Luu X.B. Reducing temperature difference in mass concrete by surface insulation. *Magazine of Civil Engineering*. 2019;4(88):70–79. <https://doi.org/10.18720/MCE.88.7> EDN: HHFAQQ
14. Van Lam T, Nguen CC, Bulgakov BI, Anh PN. Composition calculation and cracking estimation of concrete at early ages. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;82:13. <https://doi.org/10.18720/MCE.82.13> EDN: YZNUZV
15. Van Tran M, La H, Nguyen T. Hybrid machine learning for predicting hydration heat in pipe-cooled mass concrete structures. *Construction and Building Materials*. 2025;481:141558. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2025.141558> EDN: OTLQKB
16. Sargam Y, Wang K, Cho I.H. Machine learning based prediction model for thermal conductivity of concrete. *Journal of Building Engineering*. 2021;34:101956. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2020.101956> EDN: RIIQZE
17. Tuvayanond W, Kamchoom V, Prasittisopin L. Efficient machine learning for strength prediction of ready-mix concrete production (prolonged mixing). *Construction innovation*. 2026;26(2):369–394. <https://doi.org/10.1108/CI-09-2023-0240> EDN: TEFJHH
18. Chou JS, Tsai CF, Pham AD, Lu YH. Machine learning in concrete strength simulations: Multi-nation data analytics. *Construction and Building materials*. 2014;73:771–780. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.09.054>
19. Klemczak B, Bąba D, Siddique R. Machine Learning-Based Prediction of Heat Transfer and Hydration-Induced Temperature Rise in Mass Concrete. *Energies*. 2025;18(17):4673. <https://doi.org/10.3390/en18174673> EDN: ZVWFTY
20. Do TA, Le BA. Machine learning approach for predicting early-age thermal cracking potential in concrete bridge piers. *Forces in Mechanics*. 2024;17:100297. <https://doi.org/10.1016/j.finmec.2024.100297> EDN: STXYTP
21. Shahrokhishahraki M, Malekpour M, Mirvalad S, Faraone G. Machine learning predictions for optimal cement content in sustainable concrete constructions. *Journal of Building Engineering*. 2024;82:108160. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2023.108160> EDN: THDUVM

22. Sun G, Du M, Shan B, Shi J, Qu Y. Ultra-high performance concrete design method based on machine learning model and steel slag powder. *Case Studies in Construction Materials*. 2022;17:e01682. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e01682> EDN: PNYATB
23. Forsdyke JC, Zviazhynski B, Lees JM, Conduit GJ. Probabilistic selection and design of concrete using machine learning. *Data-Centric Engineering*. 2023;4:e9. <https://doi.org/10.1017/dce.2023.5> EDN: VLTCTA
24. Li Z, Yoon J, Zhang R, Rajabipour F, Srubar III WV, Dabo I, Radlińska A. Machine learning in concrete science: applications, challenges, and best practices. *npj Computational Materials*. 2022;8(1):127. <https://doi.org/10.1038/s41524-022-00810-x> EDN: BSEOLV
25. Nesvetaev GV, Koryanova YuI. Forecasting the strength gaining kinetics of the concrete hardening in the abnormal conditions. *Modern Trends in Construction, Urban and Territorial Planning*. 2023;2(4):59–68. (In Russ.) <https://doi.org/10.23947/2949-1835-2023-2-4-59-68> EDN: UAIZPO
Несветаев Г.В., Корянова Ю.И. Прогноз кинетики прочности бетона при твердении в условиях, отличных от нормальных // Современные тенденции в строительстве, градостроительстве и планировке территорий. 2023. Т. 2. № 4. С. 59–68. <https://doi.org/10.23947/2949-1835-2023-2-4-59-68> EDN: UAIZPO
26. Chepurnenko A, Nesvetaev G, Koryanova Y. Modeling non-stationary temperature fields when constructing mass cast-in-situ reinforced-concrete foundation slabs. *Architecture and Engineering*. 2022;7(2):66–78. <https://doi.org/10.23968/2500-0055-2022-7-2-66-78> EDN: AKGXYN
27. Chepurnenko AS, Nesvetaev GV, Koryanova YI, Yazyev BM. Simplified model for determining the stress-strain state in massive monolithic foundation slabs during construction. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2022;18(3):126–136. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-3-126-136> EDN: RQQYSK
28. Chepurnenko AS, Nesvetaev GV, Koryanova YuI, Shut VV, Tyurina VS. Experience of concreting a massive monolithic foundation slab. *Construction Materials and Products*. 2025;8(5):2. <https://doi.org/10.58224/2618-7183-2025-8-5-2> EDN: ECAUPO
29. Chepurnenko A, Tyurina V. Simplified Method for Determining Thermal Stresses during the Construction of Massive Monolithic Foundation Slabs. *CivilEng*. 2023;4(3):740–752. <https://doi.org/10.3390/civileng4030042> EDN: PBHJUB
30. Smolana A, Klemczak B, Azenha M, Schlicke D. Thermo-mechanical analysis of mass concrete foundation slabs at early age — essential aspects and experiences from the FE modelling. *Materials*. 2022;15(5):1815. <https://doi.org/10.3390/ma15051815> EDN: SNFMFC

Моделирование напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж

А.Г. Хакимов 

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Российская Федерация

✉ hakimov@anrb.ru

Поступила в редакцию: 2 февраля 2026 г.

Доработана: 2 апреля 2026 г.

Принята к публикации: 12 апреля 2026 г.

Аннотация. Проведено моделирование напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж в водоем. Удлинение трубопровода под действием растягивающей силы не учитывается. Учитывается действие нормальной распределенной силы, которая возникает вследствие изменения кривизны средней линии трубопровода и зависит от давления внутри и вне трубопровода. Условия равновесия трубопровода описаны уравнениями в проекциях на касательную и нормаль и зависимостью перерезывающей силы от изгибающего момента. Его статическое равновесие определяется действием собственного веса трубопровода, подъемной силы Архимеда и нормальной распределенной силы. С учетом большого отношения длины трубопровода к его диаметру используется нелинейное уравнение изгиба. Исследуется геометрически нелинейная задача равновесия трубопровода. Задача Коши для системы из семи дифференциальных уравнений сформулирована в размерном и безразмерном виде и записана в конечно-разностной форме. Проведены численные расчеты без учета и с учетом нормальной распределенной силы. Определяются форма, усилие натяжения, перерезывающая сила и изгибающий момент в трубопроводе, а также напряженно-деформированное состояние обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж. Результаты моделирования, полученные интегрированием задачи Коши методом Рунге — Кутты, полностью совпадают с расчетами по конечно-разностным формулам.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Ключевые слова: трубопровод, усилие натяжения, перерезывающая сила, изгибающий момент, форма, задача Коши

Благодарности. Работа выполнена в соответствии с государственным заданием (FMRS-2023-0015).

Для цитирования: Хакимов А.Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 105–114. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-105-114> EDN: JZZMQT

Modeling the Stress-Strain State of Concrete Coated Pipeline During Laying from Pipe-Laying Barges

Akim G. Khakimov 

Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS, Ufa, Russian Federation

✉ hakimov@anrb.ru

Received: February 2, 2026

Revised: April 2, 2026

Accepted: April 12, 2026

Abstract. The stress-strain state of a concrete coated pipeline during laying from pipelaying barges into a reservoir is modeled. Pipeline elongation under tensile force is ignored. The action of the normal distributed force, which arises due to the change in the curvature of the pipeline centerline and depends on the pressure inside and outside the pipeline, is taken into account. The pipeline

Хакимов Аким Гайфуллинович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории механики твердого тела, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Российская Федерация, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71; eLIBRARY SPIN-код: 4759-4504, ORCID: 0000-0003-4093-5380; e-mail: hakimov@anrb.ru

© Хакимов А.Г., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

equilibrium conditions are described by equations in projections onto the tangent and normal lines and by the dependence of the shear force on the bending moment. Its static equilibrium is determined by the action of the pipeline self-weight, the Archimedes buoyant force, and the action of the normal distributed force. Given the large ratio of the pipeline length to its diameter, a nonlinear bending equation is used. A geometrically nonlinear pipeline equilibrium problem is investigated. The Cauchy problem for a system of seven differential equations is formulated in dimensional and dimensionless form and is written in finite difference form. Numerical calculations are performed with and without the normal distributed force. The shape, tensile force, shear force, and bending moment in the pipeline are determined. The stress-strain state of a concrete coated pipeline during installation from pipelaying barges is determined. The modeling results obtained by integrating the Cauchy problem using the Runge-Kutta method are completely consistent with calculations using finite-difference formulas.

Keywords: pipeline, tensile force, shear force, bending moment, shape, Cauchy problem

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

The work was performed in accordance with the state assignment (FMRS-2023-0015).

For citation: Khakimov AG. Modeling the stress-strain state of concrete coated pipeline during laying from pipe-laying barges. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):105–114. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-105-114> EDN: JZMQT

1. Введение

Общая теория статического и динамического поведения труб, шлангов, кабелей содержится в монографии [1]. Обзор исследований по напряженно-деформированному состоянию труб дается в [2]. Изгиб, всплытие, моделирование подъема глубоководного трубопровода большой длины рассматривается в [3–21], где дается обзор исследований по данной теме. В [3] приведен алгоритм нахождения формы равновесия кабеля и трубопровода, находящегося между дном водоема и баржей-трубоукладчиком. Учитываются изменения изгибной жесткости, веса и плавучести, а также силы, вызванные океанским течением. Нелинейная краевая задача преобразуется в безразмерную форму таким образом, что неизвестная длина подвешенного трубопровода или кабеля выступает в качестве масштабного параметра. Численное решение затем основывается на последовательном интегрировании. Применение метода иллюстрируется анализом кривых равновесия и напряжений в трубопроводах, проложенных с использованием барж или без них, а также во время операций по спуску и подъему. В [6] исследуется линейный изгиб трубопровода, для подъема которого приложена сосредоточенная сила, а в [7] представлен линейный и нелинейный изгиб подводного трубопровода. Задачи решены с учетом веса трубопровода вместе со средой в трубопроводе, выталкивающей силы Архимеда, нормальных боковых распределенных сил, зависящих от давлений на внутреннюю и внешнюю поверхности. В [8] дан анализ подъемно-спусковых операций трубопровода в зависимости от эффективного веса и изгибной жесткости трубы, давлений на ее стенки, глубины водоема, сосредоточенной подъемной силы. В [9] рассматривается изгиб обетонированного трубопровода большой длины при подъеме его участка до свободной поверхности водоема. Проведен анализ подъема двухслойного длинного трубопровода со свободным концом в [10]. Концевое сечение закрыто заглушкой, что предотвращает проникновение воды во внутреннюю полость трубы. Изгиб двухслойного трубопровода в процессе его укладки с борта судна рассмотрен в статье [11]. Учитывается влияние упругой нелинейности. Граничные условия записаны для закрепленной границы и свободного края. Создание боковых изгибов в подводных трубопроводах для обеспечения распределения теплового расширения по нескольким изгибам рассматривается в [12]. Для контроля бокового изгиба используются методы инициирования изгиба, такие как распределенные плавучие секции, которые вызывают боковой изгиб в запланированных местах [13]. В [14] рассмотрены подводные трубопроводы, работающие в условиях высокого давления и высоких температур, что может привести к накоплению осевой силы вдоль трубопровода по сравнению с условиями укладки. Статическая устойчивость и определение параметров трубопровода при образовании арки выброса рассмотрены в [15; 16]. Работа [17] посвящена экспериментальному исследованию. Инициирование контролируемого бокового выпучивания

Akim G. Khakimov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, Laboratory of Solid Mechanics, Mavlyutov Institute of Mechanics, URFS RAS, 71 Oktyabrskaya Avenue, Ufa, 450054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4759-4504, ORCID: 0000-0003-4093-5380; e-mail: hakimov@anrb.ru

распределенным плавучим участком в заранее заданных местах для снятия осевой силы, вызванной высокой температурой и высоким давлением в подводных трубопроводах рассмотрено в [18]. Обнаружение и онлайн-мониторинг напряжений в трубопроводах на нефтяных и газовых станциях рассматривается в [19]. Моделирование напряженно-деформированного состояния подводного морского газопровода с учетом разжижения грунта и параметров эксплуатации рассматривается в [20; 21]. Подъем трубопроводов является важным этапом в проектировании морских трубопроводов [22]. Разработан эффективный аналитический метод исследования механических свойств трубопровода на основе механических, физических и геометрических соотношений. С помощью методов стрельбы и секущих, преобразующих краевую задачу в задачу с начальными условиями и решающих ее методом Рунге — Кутты, рассчитываются деформация и механические свойства трубопровода. Взаимодействие неустойчивостей трубопровода под действием внутреннего и внешнего давления, силы сжатия и жидкости, протекающей вдоль трубопровода, рассматривается в [23]. Нелинейный изгиб длинного трубопровода под действием сосредоточенной силы рассмотрен в [24]. В [25] излагается нелинейная теория больших перемещений при плоском изгибе тонких упругих стержней. Вводится в рассмотрение три класса задач:

- 1) основной класс;
- 2) класс задач, сводимых к основному;
- 3) класс задач, не сводимых к основному.

К последнему классу относятся задачи с распределенными нагрузками. В вышеприведенных работах используются допущения: поперечное сечение остается круговым, плоскость сечения при деформации плоская и перпендикулярна к осевой линии, трубопровод нерастяжим. Наиболее близкими являются работы [11; 22], где рассматриваются нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки и подъема. В этих работах не учитывается влияние нормальной распределенной силы.

Цель исследования — моделирование напряженно-деформированного состояния трубопровода при укладке с трубоукладочных барж в водоем; исследование геометрически нелинейной задачи равновесия трубопровода; постановка и решение задачи Коши для системы из семи дифференциальных уравнений в размерном, безразмерном виде, а также в конечно-разностной форме; определение формы, усилия натяжения, перерезывающей силы и изгибающего момента в трубопроводе; исследование влияния нормальной распределенной силы, учитывающей действие внешнего давления. Сравнение результатов моделирования, полученных интегрированием задачи Коши методом Рунге — Кутта с расчетами по конечно-разностным формулам. Работа может представлять интерес для конструкторов, инженеров, технологов трубопроводного транспорта.

2. Постановка задачи

Рассматривается геометрически нелинейная задача равновесия участка трубопровода при монтаже с трубоукладочных барж (рис. 1, *а, б*). Задача состоит в определении формы, сил и моментов в трубопроводе. Принято, что при изгибе поперечное сечение трубопровода остается круговым, плоскость сечения при деформации плоская и перпендикулярна к осевой линии. Удлинение трубопровода под действием растягивающей силы не учитывается. Изгиб трубопровода описывается уравнениями равновесия [26]:

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} + q_z \cos \theta = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} + q_z \sin \theta - q_n = 0; \quad (2)$$

$$Q = \frac{dM}{ds}, \quad (3)$$

где T , Q , M — сила натяжения, сила сдвига и изгибающий момент; R , s — радиус кривизны и длина дуги средней линии изогнутого трубопровода; q_z — распределенная сила, учитывающая силу тяжести и выталкивающую силу Архимеда; q_n — нормальная распределенная сила, учитывающая действие внешнего давления, которые определяются по формулам

$$q_z = (\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 + \rho_3 F_3 + \rho_i F_i - \rho_e F_e) g, \quad q_n = (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g z \frac{1}{R}, \quad (4)$$

где q_z — вес единицы длины трубопровода, состоящего из трех концентрических слоев с площадями поперечных сечений F_k и плотностями материалов ρ_k , $k = 1, 2, 3$, с плотностями сред внутри и вне трубопровода ρ_i , ρ_e и площадями поперечных сечений F_i , F_e :

$$F_i = \pi R_i^2, \quad F_e = \pi R_e^2.$$

Здесь R_i , R_e — радиусы внутренней и внешней окружностей поперечного сечения трубопровода, x , z — прямоугольные координаты; g — ускорение свободного падения.

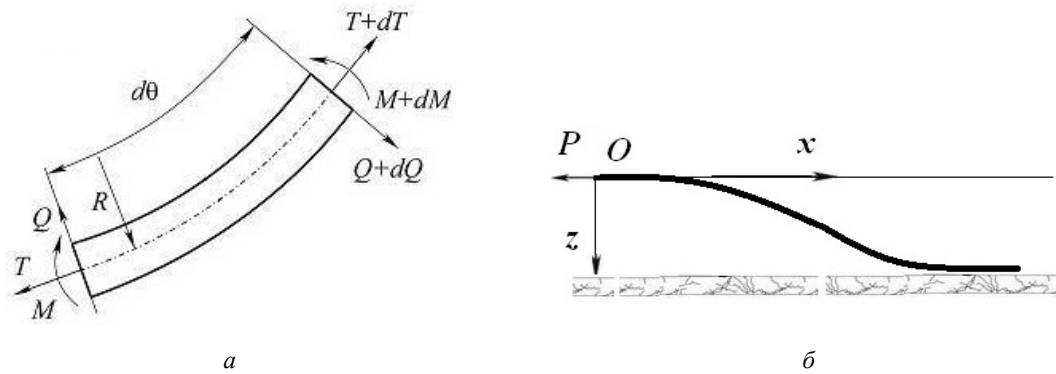


Рис. 1. Участок трубопровода при монтаже с трубоукладочных барж:

a — силы, действующие по средней линии; *б* — расчетная схема

Источники: выполнено А.Г. Хакимовым.

Figure 1. Pipeline section during installation from pipe-laying barges:

a — forces acting along the centerline; *б* — calculation model

Source: made by A.G. Khakimov.

Изгибная жесткость трубопровода равна [9]:

$$D = E_1 J_1 + E_2 J_2 + E_3 J_3, \quad 4J_1 = F_1 \left((R_i + h_1)^2 + R_i^2 \right),$$

$$4J_2 = F_2 \left((R_i + h_1 + h_2)^2 + (R_i + h_1)^2 \right), \quad 4J_3 = F_3 \left(R_e^2 + (R_e - h_3)^2 \right). \quad (5)$$

Причем нормальная распределенная сила возникает вследствие изменения кривизны средней линии трубопровода. Площади поперечных сечений слоев трубопровода равны

$$F_1 = \pi \left((R_i + h_1)^2 - R_i^2 \right), \quad F_2 = \pi \left((R_i + h_1 + h_2)^2 - (R_i + h_1)^2 \right),$$

$$F_3 = \pi \left(R_e^2 + (R_e - h_3)^2 \right), \quad (6)$$

где h_k — толщины слоев, $k = 1, 2, 3$.

Изгибающий момент определяется как

$$M = D \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_n} \right), \quad (7)$$

где R_n — радиус кривизны средней линии трубопровода в недеформированном исходном состоянии. Для трубопровода $R_n \rightarrow \infty$. Из (7) с учетом (3) следует

$$M = \frac{D}{R}. \quad (8)$$

Выражения для кривизны средней линии трубопровода и изгибающего момента записываются как

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \frac{d}{ds} \frac{1}{R} = \frac{Q}{D}, \quad (9)$$

где θ — угол между касательной к средней линии изогнутого трубопровода и осью z .

Форма изогнутого трубопровода определяется из уравнений

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta. \quad (10)$$

Горизонтальная P_1 и вертикальная P_2 составляющие усилия натяжения троса P , с помощью которого производится подъем участка трубопровода в начале координат в точке O , определяются интегрированием

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^L q_n \cos \theta ds = (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z \frac{1}{R} \cos \theta ds, \\ P_2 &= q_z L - \int_0^L q_n \sin \theta ds = q_z L - (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z \frac{1}{R} \sin \theta ds, \end{aligned} \quad (11)$$

где L — длина поднимаемой части трубопровода.

Усилие натяжения T_O , перерезывающая сила Q_O , сумма моментов всех сил относительно начала координат M_O относительно начала координат точки O определяются

$$\begin{aligned} T_O &= \int_0^L q_n \cos \theta ds = (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z \frac{1}{R} \cos \theta ds, \\ Q_O &= q_z L - \int_0^L q_n \sin \theta ds = q_z L - (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z \frac{1}{R} \sin \theta ds, \\ M_O &= (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z^2 \frac{1}{R} \cos \theta ds - (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L xz \frac{1}{R} \sin \theta ds - \int_0^L q_z x ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Условия в точке O в начале координат следующие: $s = 0, x = 0, z = 0, \theta = \pi/2, T = T_O, Q = Q_O, M = M_O, 1/R = 1/R_O$.

Используя соотношения

$$\begin{aligned} u &= \frac{L}{R}, \quad \xi = \frac{s}{L}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad t = \frac{T}{q_z L}, \quad q = \frac{Q}{q_z L}, \quad m = \frac{M}{q_z L^2}, \\ p_1 &= \frac{P_1}{q_z L}, \quad p_2 = \frac{P_2}{q_z L}, \quad p = \frac{P}{q_z L}, \quad \beta = \frac{(\rho_e F_e - \rho_i F_i) g}{q_z}, \quad \gamma = \frac{q_z L^3}{D}, \end{aligned}$$

уравнения (1), (2), (3), (9), (10) и соотношения (11), (12) примут вид (черточки над обозначениями координат опущены):

$$\frac{dt}{d\xi} + uq + \cos \theta = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dq}{d\xi} - tu + \sin \theta - \beta zu = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dm}{d\xi} = q, \quad \frac{du}{d\xi} = \gamma q, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = u, \quad (15)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{d\xi} = \cos \theta, \quad (16)$$

$$p_1 = \beta \int_0^1 zu \cos \theta d\xi, \quad p_2 = 1 - \beta \int_0^1 zu \sin \theta d\xi, \quad (17)$$

$$t_O = \beta \int_0^1 zu \cos \theta ds, \quad q_O = 1 - \beta \int_0^1 zu \sin \theta ds,$$

$$m_O = \beta \int_0^1 z^2 u \cos \theta d\xi - \int_0^1 x d\xi + \beta \int_0^1 x zu \sin \theta d\xi = 0. \quad (18)$$

Условия в точке O в начале координат в безразмерном виде следующие: $\xi = 0, x = 0, z = 0, \theta = \pi/2, t = t_O, q = q_O, m = m_O, u = u_O$.

Уравнения (13) – (16) запишем в конечно-разностном виде:

$$t_{i+1} = t_i - (q_i u_i + \cos \theta_i) \Delta \xi, \quad q_{i+1} = q_i + (t_i u_i - \sin \theta_i + \beta z u) \Delta \xi,$$

$$m_{i+1} = m_i + q_i \Delta \xi, \quad u_{i+1} = u_i + \gamma q_i \Delta \xi, \quad \theta_{i+1} = \theta_i + u_i \Delta \xi,$$

$$x_{i+1} = x_i + \sin(\theta_i) \Delta \xi, \quad z_{i+1} = z_i + \cos(\theta_i) \Delta \xi,$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta \xi, \quad i = 1..N, \quad \Delta \xi = \frac{1}{N-1}. \quad (19)$$

Для численного интегрирования необходимо использование конечно-разностных соотношений, которые следуют из (17), (18):

$$p_{1,i+1} = p_{1,i} + \beta z_i u_i \cos \theta_i \Delta \xi, \quad i = 1..N, \quad \Delta \xi = \frac{1}{N-1},$$

$$p_{2,i+1} = p_{2,i} + (1 - \beta u z_i \sin \theta_i) \Delta \xi,$$

$$t_{O,i+1} = t_{O,i} + \beta z_i u_i \cos \theta_i \Delta \xi, \quad q_{O,i+1} = q_{O,i} + (1 - \beta z_i u_i \sin \theta_i) \Delta \xi,$$

$$m_{O,i+1} = m_{O,i} + (\beta z_i^2 u_i \cos \theta_i - x_i + \beta x_i z_i u_i \sin \theta_i) \Delta \xi. \quad (20)$$

Условия в точке O в начале координат в конечно-разностном виде следующие: $\xi_1 = 0, t_1 = t_O, q_1 = q_O, m_1 = m_O, u_1 = u_O, \theta_1 = \pi/2, x_1 = 0, z_1 = 0$.

3. Результаты и обсуждение

Рассматриваемый участок трубопровода выполнен из стальных труб размером 620×10 мм, с модулем упругости $E_1 = 2,07 \cdot 10^5$ МПа, плотностью 7850 kg/m^3 , внутренним радиусом $R_i = 300$ мм, внешним радиусом $R_i + h_1 = 310$ мм, толщиной стенки $h_1 = 10$ мм, среднего бетонного слоя толщиной $h_2 = 40$ мм, модулем упругости $E_2 = 0,3 \times 10^5$ МПа, плотностью 3044 kg/m^3 , внешнего защитного слоя модулем упругости $E_3 = 0,1 \cdot 10^4$ МПа, плотностью 800 kg/m^3 , толщиной $h_3 = 10$ мм, плотностью окружающей морской воды $\rho_e = 1025 \text{ kg/m}^3$, плотностью воздуха в трубопроводе $\rho_i = 1,25 \text{ kg/m}^3$, длина участка трубопровода $L = 150$ м, $\gamma = 10,31$.

3.1. Нормальная боковая распределенная сила равна нулю

В этом случае $\beta = 0$ и второе конечно-разностное соотношение из (19) и соотношения (20) примут вид:

$$q_{i+1} = q_i + (t_i u_i - \sin \theta_i) \Delta \xi;$$

$$p_{1,i+1} = p_{1,i}, \quad p_{2,i+1} = p_{2,i} + \Delta \xi;$$

$$t_{O,i+1} = t_{O,i}, \quad q_{O,i+1} = q_{O,i} + \Delta \xi;$$

$$m_{O,i+1} = m_{O,i} - x_i \Delta \xi, \quad i = 1..N, \quad \Delta \xi = 1/(N-1).$$

Условия в начале координат в точке O : $x_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/2$, $t_0 = 0,1$, $q_0 = 0,5$, $m_0 = -0,12$, $u_0 = -1,245$. Сила натяжения троса, с помощью которого производится удерживание трубопровода $P = 14,75$ кН. Результаты вычислений, полученные численным интегрированием задачи Коши (13)–(16) по конечно-разностным формулам (19), полностью совпадают с расчетами методом Рунге — Кутты.

На рис. 2, а приводятся зависимости усилия натяжения t , перерезывающей силы q , изгибающего момента m от координаты ξ . На рис. 2, б приводится форма изогнутого трубопровода. Видно, что упругая линия трубопровода имеет точку перегиба.

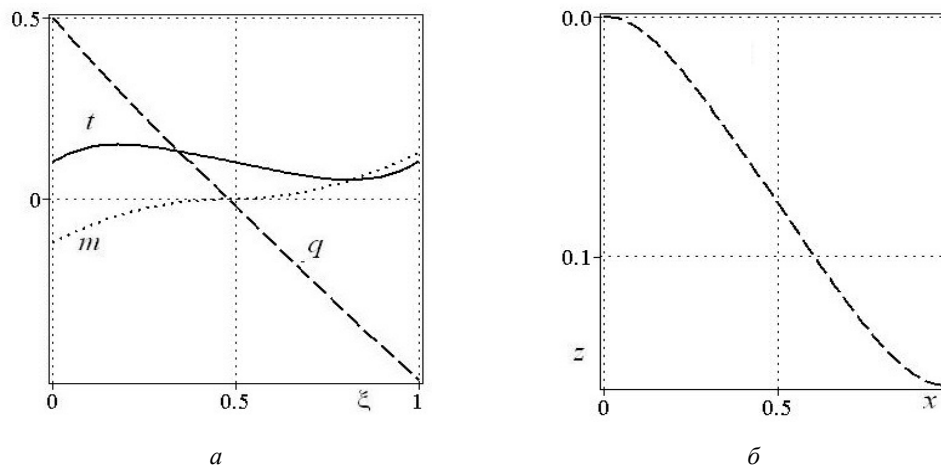


Рис. 2. Зависимости усилия натяжения t , перерезывающей силы q , изгибающего момента m от координаты ξ (сплошная, штриховая, пунктирная линии соответственно) (а); форма трубопровода (б)

Источники: выполнено А.Г. Хакимовым.

Figure 2. Tensile force t , shear force q , and bending moment m as functions of coordinate ξ (solid, dashed, and dotted lines, respectively) (а); pipeline shape (б)

Source: made by A.G. Khakimov.

3.2. Учет нормальной боковой распределенной силы

В этом случае $\beta = 4,15$. Условия в начале координат в точке O : $x_0 = 0, z_0 = 0, \theta_0 = \pi/2, t_0 = 0,109, q_0 = 0,5, m_0 = -0,1178, u_0 = -1,23$. Сила натяжения троса, с помощью которого производится удерживание трубопровода, $P = 16,08$ кН. Результаты вычислений, полученные численным интегрированием задачи Коши (13)–(16) по конечно-разностным формулам (19), полностью совпадают с расчетами методом Рунге — Кутты.

На рис. 3, а, приводятся зависимости усилия натяжения t , перерезывающей силы q , изгибающего момента m от координаты ξ . На рис. 3, б, приводится форма изогнутого трубопровода.

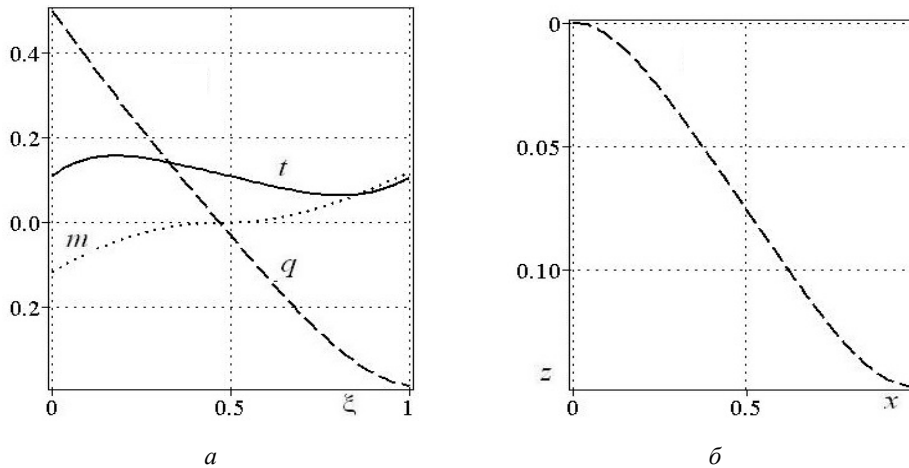


Рис. 3. Зависимости усилия натяжения t , перерезывающей силы q , изгибающего момента m от координаты ξ (сплошная, штриховая, пунктирная линии соответственно) (а); форма трубопровода (б)

Источник: выполнено А.Г. Хакимовым.

Figure 3. Tensile force t , shear force q , and bending moment m as functions of coordinate ξ (solid, dashed, and dotted lines, respectively) (а); pipeline shape (б)

Source: made by A.G. Khakimov.

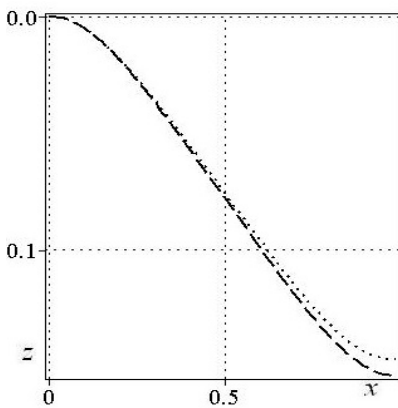


Рис. 4. Формы трубопровода

Источник: выполнено А.Г. Хакимовым.

Figure 4. Pipeline shapes

Source: made by A.G. Khakimov.

На рис. 4 приводятся формы трубопровода без учета и с учетом действия нормальной распределенной силы (штриховая, пунктирная линии соответственно). Учет действия нормальной распределенной силы приводит к незначительному изменению формы трубопровода.

4. Заключение

1. Получен численный метод решения задачи с учетом распределенной силы тяжести, выталкивающей силы Архимеда и нормальной распределенной силы внешнего давления при моделировании напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж.

2. Приведены формулы для определения формы, усилия натяжения, перерезывающей силы и изгибающего момента в трубопроводе. Учет действия нормальной распределенной силы приводит к незначительному изменению формы трубопровода.

3. Результаты вычислений, полученные численным интегрированием задачи Коши по конечно-разностным формулам, полностью совпадают с расчетами методом Рунге — Кутты. Работа может представлять интерес для конструкторов, инженеров, технологов трубопроводного транспорта.

Список литературы

1. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. Москва : Машиностроение, 1982. 280 с.
2. Li S., Karney B.W., Liu G. FSI research in pipeline systems — a review of the literature // J. Fluids and Structures. 2015. Vol. 57. P. 277–297. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020> EDN: VFWJWP
3. Pedersen R.T. Equilibrium of offshore cables and pipelines during laying // Int. Shipbuild Prog. 1975. Vol. 22. P. 399–408. <https://doi.org/10.3233/ISP-1975-2225601>
4. Guarracino F., Mallardo V. A refined analytical analysis of submerged pipelines in seabed laying // Applied Ocean Research. 1999. Vol. 21. Issue 6. P. 281–293. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(99\)00020-6](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(99)00020-6) EDN: LNKCZN
5. Gu H.L., Guo H.Y., Li X.M., Li F.H. Static behaviours and collision onset criterion of two adjacent vertical risers // Ships Offshore Struct. 2023. Vol. 18. P. 263–271. <https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2035569> EDN: TFUYEC
6. Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600487> EDN: SDVLSY
7. Ильгамов М.А. Всплытие подводного газового трубопровода // Известия РАН. Механика твердого тела. 2023. № 2. С. 147–159. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600487> EDN: DGBKTM
8. Ильгамов М.А. Подъем подводного трубопровода сосредоточенной силой // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2024. Т. 517. № 1. С. 65–70. <https://doi.org/10.31857/S2686740024040108> EDN: JONDQX
9. Ильгамов М.А. Изгиб подводного трубопровода при подъеме // Известия РАН. Механика твердого тела. 2025. № 3. С. 23–37. <https://doi.org/10.31857/S1026351925030023> EDN: EZHMCB
10. Wang Z., Chen Y., Gao Q., Li F. An analytical method for mechanical analysis of offshore pipelines during lifting operation // Materials. 2023. Vol. 16. No. 20. Article no. 6685. <https://doi.org/10.3390/ma16206685> EDN: GWUAXF
11. Елисейев В.В., Зиновьева Т.В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. № 1. С. 70–78. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.1.9> EDN: OWGKCF
12. Peek R., Yun H. Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed // Journal of Engineering Mechanics. 2007. Vol. 4. P. 442–451. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:4\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442))
13. Wang Z., Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines // Ocean Engineering. 2020. Vol. 216. P. 105–110. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019> EDN: KQPFAA
14. Chee J., Walker A., White D. Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation // Ocean Engineering. 2018. Vol. 151. P. 170–190. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.024>
15. Хакимов А.Г. К статической устойчивости трубопровода // Журнал технической физики. 2020. Т. 90. № 4. С. 612–617. <https://doi.org/10.3103/s0025654423700188> EDN: AEKWWDK
16. Khakimov A.G. Determining pipeline parameters during the formation of arched ejection // 15th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 40. P. 214–222. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.029> EDN: WHHIYU
17. Liang Y., Zhao Y., Yue Q.J. Experimental study on dynamic interaction between pipe and rollers in deep S-lay // Ocean Engineering. 2019. Vol. 175. P. 188–196. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.01.030> EDN: TQGVJA
18. Wang Z., Tang Y., Guedes S.C. Imperfection study on lateral thermal buckling of subsea pipeline triggered by a distributed buoyancy sections // Marine Structures. 2021. Vol. 76. P. 10–29. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2020.10291>
19. Zhao J.H., Liao K.X., Li X.X., He G.X., Xia F., Zeng Q. Collaborative detection and online monitoring of pipeline stress in oil and gas stations // Meas. Sci. Technol. 2022. Vol. 33. Article no. 105001. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac73dc> EDN: AERAMF
20. Зарипов Р.М., Масалимов Р.Б. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния подводного морского газопровода с учетом разжижения грунта и параметров эксплуатации // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 4. С. 152–166. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600700> EDN: QWSFJU
21. Zaripov R.M., Bakhtizin R.N., Masalimov R. B. Computer modeling of the stress-strain state of a concrete gas pipeline in a swamp // SOCAR Proceedings. 2025. No. 3. P. 105–112. <http://dx.doi.org/10.5510/OGP20250301103>
22. Wang Z., Chen Y., Gao Q., Li F. An analytical method for mechanical analysis of offshore pipelines during lifting operation // Materials. 2023. Vol. 16. Article no. 6685. <https://doi.org/10.3390/ma16206685> EDN: GWUAXF
23. Khakimov A. G. Interaction of Pipeline Instabilities // Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2018). AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2053. Iss. 1. Article no. 030025. <https://doi.org/10.1063/1.5084386> EDN: EVGOWQ
24. Ильгамов М.А., Якупов Р.Г. Сильный изгиб трубопровода // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 109–117. EDN: ONXFOF
25. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 296 с. EDN: WIWUQV
26. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. Москва, 1969. 695 с.

References

1. Svetlitskii VA. *Mechanics of pipelines and hoses*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1982. (In Russ.)
2. Li S, Karney BW, Liu G. FSI research in pipeline systems – a review of the literature. *J. Fluids and Structures*. 2015;57:277–297. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020> EDN: VFWJWP
3. Pedersen RT. Equilibrium of offshore cables and pipelines during laying. *Int. Shipbuild Prog.* 1975;22:399–408. <https://doi.org/10.3233/ISP-1975-2225601>
4. Guarracino F, Mallardo V. A refined analytical analysis of submerged pipelines in seabed laying. *Applied Ocean Research*. 1999;21(6):281–293. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(99\)00020-6](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(99)00020-6) EDN: LNKCZN
5. Gu HL, Guo HY, Li XM, Li FH. Static behaviours and collision onset criterion of two adjacent vertical risers. *Ships Offshore Struct.* 2023;18:263–271. <https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2035569> EDN: TFUYEC
6. Ilgamov MA. Model of underwater pipeline flotation. *Doklady Physics*. 2022;67:123–127. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S1028335822050020> EDN: SDVLSY
7. Ilgamov MA. Subsea gas pipeline flotation. *Mechanics of Solids*. 2023;58(2):501–510. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/s0025654422600842> EDN: DGBKTM
8. Ilgamov MA. Lifting an underwater pipeline by concentrated force. *Reports of the Russian Academy of Sciences. Physics, Technical Sciences*. 2024;517(1):65–70. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S2686740024040108> EDN: JONDQX
9. Ilgamov MA. Bending of underwater pipeline during lifting. *Mechanics of Solids*. 2025;(3):23–37. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0025654424605950> EDN: AYZOUD
10. Wang Z, Chen Y, Gao Q, Li F. An analytical method for mechanical analysis of offshore pipelines during lifting operation. *Materials*. 2023;16(20):6685. <https://doi.org/10.3390/ma16206685> EDN: GWUAXF
11. Yeliseyev VV, Zinovieva TV. Nonlinear-elastic strain of underwater pipeline in laying process. *Computational Continuum Mechanics*. 2012;5(1):70–78. (In Russ.) <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.1.9> EDN: OWGKCF
12. Peek R, Yun H. Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed. *Journal of Engineering Mechanics*. 2007;4:442–451. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:4\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442))
13. Wang Z, Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines. *Ocean Engineering*. 2020;216:105–110. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019> EDN: KQPFAA
14. Chee J, Walker A, White D. Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation. *Ocean Engineering*. 2018;151:170–190. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.024>
15. Khakimov AG. Static stability of a pipeline. *Technical Physics*. 2020;65(4):587–592. <https://doi.org/10.1134/S106378422004012X> EDN: SIKFFG
16. Khakimov AG. Determining pipeline parameters during the formation of arched ejection. *15th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, Procedia Structural Integrity*. 2022;40:214–222. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.029> EDN: WHHIYU
17. Liang Y, Zhao Y, Yue QJ. Experimental study on dynamic interaction between pipe and rollers in deep S-lay. *Ocean Engineering*. 2019;175:188–196. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.01.030> EDN: TQGVJA
18. Wang Z, Tang Y, Guedes SC. Imperfection study on lateral thermal buckling of subsea pipeline triggered by a distributed buoyancy sections. *Marine Structures*. 2021;76:10–29. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2020.10291>
19. Zhao JH, Liao KX, Li XX, He GX, Xia F, Zeng Q. Collaborative detection and online monitoring of pipeline stress in oil and gas stations. *Meas. Sci. Technol.* 2022;33:105001. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac73dc> EDN: AERAMF
20. Zaripov RM, Masalimov RB. Numerical modeling of the stress-strain state of an underwater gas pipeline taking into account soil liquefaction and operating parameters. *Mechanics of Solids*. 2023;58(4):1171–1183. <https://doi.org/10.3103/s0025654423700188> EDN: QWSFJU
21. Zaripov RM, Bakhtizin RN, Masalimov RB. Computer modeling of the stress-strain state of a concrete gas pipeline in a swamp. *SOCAR Proceedings*. 2025;(3):105–112. <http://doi.org/10.5510/OGP20250301103>
22. Wang Z, Chen Y, Gao Q, Li F. An analytical method for mechanical analysis of offshore pipelines during lifting operation. *Materials*. 2023;16:6685. <https://doi.org/10.3390/ma16206685> EDN: GWUAXF
23. Khakimov AG. Interaction of Pipeline Instabilities. *Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2018). AIP Conf. Proc.* 2018;2053(1):030025. <https://doi.org/10.1063/1.5084386> EDN: EVGOWQ
24. Ilgamov MA, Yakubov RG. Strong bending of a pipeline. *Bulletin of the Academy of Sciences. Solid Body Mechanics*. 2003;(6):109–117. (In Russ.) EDN: ONXFOF
25. Popov EP. *Theory and calculation of flexible elastic rods*. Moscow: Nauka Publ.; 1986. (In Russ.) EDN: WIWUQV
26. Ogibalov PM, Koltunov MA. *Shells and plates*. Moscow: Moscow University Publ.; 1969. (In Russ.)

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-2-115-128

EDN: KAKRSK

Научная статья / Research article

Численный анализ напряженно-деформированного состояния пространственной стержневой конструкции с учетом податливости узловых соединений

П.П. Гайджуров¹, Н.Г. Царитова², Э.Р. Исакова², Н.А. Корчагин²¹ Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация² Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова, Новочеркасск, Российская Федерация

✉ gpp-161@yandex.ru

Поступила в редакцию: 4 февраля 2026 г.

Доработана: 2 апреля 2026 г.

Принята к публикации: 10 апреля 2026 г.

Аннотация. Объектом исследования являлась составная пространственная стержневая конструкция цилиндрической формы с покрытием в форме усеченного конуса. Цилиндрическая часть данной конструкции представляла собой регулярно упорядоченную стержневую решетку, образованную из плоских правильных шестиугольников. Для соединения стержней шестиугольников использовались блоки, включающие линейные и поворотные пружины. Коническое покрытие представляло собой обычную рамно-ферменную конструкцию. Цель исследования — численный анализ напряженно-деформированного состояния пространственной стержневой конструкции при динамическом воздействии с учетом податливости узловых связей. В качестве математического аппарата использован метод конечных элементов в форме метода перемещений. Вычислительные эксперименты позволили спроектировать конструкцию блока узлового соединения стержней решетки. С помощью натурной модели, включавшей три секции решетки, выполнено исследование кинематических параметров спроектированного блока узлового соединения стержней.

Ключевые слова: пространственная регулярная стержневая решетка, метод конечных элементов, модальный анализ, сейсмограмма, анализ напряженно-деформированного состояния

Гайджуров Пётр Павлович, советник РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики и теории сооружений, Донской государственный технический университет, Российская Федерация, 344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; eLIBRARY SPIN-код: 6812-9718, ORCID: 0000-0003-3913-9694; e-mail: gpp-161@yandex.ru

Царитова Надежда Геннадьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры градостроительства, проектирования зданий и сооружений, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, 346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, д. 132; eLIBRARY SPIN-код: 7374-9225, ORCID: 0000-0002-0923-5848; e-mail: ncaritova@yandex.ru

Исакова Эльвира Рашидовна, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры градостроительства, проектирования зданий и сооружений, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, 346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, д. 132; eLIBRARY SPIN-код: 3641-8092, ORCID: 0009-0006-3654-6728; e-mail: elvira.ishakova@yandex.ru

Корчагин Никита Аркадьевич, аспирант кафедры градостроительства, проектирования зданий и сооружений, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, 346428, Ростовская обл., г. Новочеркасск, ул. Просвещения, д. 132; ORCID: 0009-0005-0426-5748; e-mail: nik.korchagin@mail.ru

© Гайджуров П.П., Царитова Н.Г., Исакова Э.Р., Корчагин Н.А., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Вклад авторов: *Гайджуrow П.П.* — научное руководство, формализация математической модели, написание исходного текста статьи, формулировка выводов; *Царитова Н.Г.* — обзор литературы по теме исследования, практические рекомендации по расчетам; *Исхакова Э.Р.* — выполнение вычислительных экспериментов, натурное макетирование решетки, обсуждение результатов; *Корчагин Н.А.* — обзор литературы, подготовка исходных данных, обработка результатов моделирования, проектирование узла, оформление рисунков. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: *Гайджуrow П.П., Царитова Н.Г., Исхакова Э.Р., Корчагин Н.А.* Численный анализ напряженно-деформированного состояния пространственной стержневой конструкции с учетом податливости узловых соединений // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2026. Т. 22. № 2. С. 115–128. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-115-128> EDN:KAKRSK

Numerical Analysis of the Stress-Strain State of a Spatial Core Structure, Taking into Account the Malleability of Nodal Joints

Peter P. Gaydzhurov¹, Nadezhda G. Tsaritova², Elvira R. Iskhakova², Nikita A. Korchagin²

¹ Don State Technical University, Rostov-on-Don, Moscow, Russian Federation

² South Russian State Polytechnic University (NPI), named after M. I. Platov, Novochoerkassk, Russian Federation

✉ gpp-161@yandex.ru

Received: February 4, 2026

Revised: April 2, 2026

Accepted: April 10, 2026

Abstract. The object of the study was a composite spatial rod structure of cylindrical shape with a coating in the form of a truncated cone. The cylindrical part of this structure was a regularly ordered rod lattice formed of flat regular hexagons. Blocks including linear and rotary springs were used to connect the rods of the polygons. The conical cover was a conventional frame-truss structure. The purpose of the study was to numerically analyze the stress-strain state of a spatial core structure under dynamic influence, taking into account the malleability of nodal connections. The finite element method in the form of a displacement method is used as a mathematical apparatus. Computational experiments have made it possible to design the design of the block for the nodal connection of the lattice rods. Using a full-scale model that included three sections of the grid, the kinematic parameters of the designed block of the nodal connection of the rods were studied.

Keywords: spatial regular rod lattice, finite element method, modal analysis, seismogram, stress-strain state analysis

Authors' contribution: *Gaydzhurov P.P.* — scientific guidance, formalization of the mathematical model, writing the source text of the article, formulation of conclusions; *Tsaritova N.G.* — review of the literature on the research topic, practical recommendations on calculations; *Iskhakova E.R.* — performing computational experiments; full-scale modeling of the grid; discussion of the results; *Korchagin N.A.* — literature review; preparation of initial data; processing of modeling results; node design; design of drawings. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

For citation: Gaydzhurov PP, Tsaritova NG, Iskhakova ER, Korchagin NA. Numerical analysis of the stress-strain state of a spatial core structure, taking into account the malleability of nodal joints. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):115–128. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-115-128> EDN:KAKRSK

Peter P. Gaydzhurov, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University, 1 Gagarin Sq, Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 6812-9718, ORCID: 0000-0003-3913-9694; e-mail: gpp-161@yandex.ru

Nadezhda G. Tsaritova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Urban Planning, Design of Buildings and Structures; M.I. Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI); 132 Prosveshcheniya St, Novochoerkassk, 346428, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7374-9225, ORCID: 0000-0002-0923-5848; e-mail: ncaritova@yandex.ru

Elvira R. Iskhakova, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Urban Planning, Design of Buildings and Structures, Platov South Russian State Polytechnic University (NPI); 132 Prosveshcheniya St, Novochoerkassk, 346428, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 3641-8092, ORCID: 0009-0006-3654-6728; e-mail: elvira.ishakova@yandex.ru

Nikita A. Korchagin, Postgraduate Student of the Department of Urban Planning, Design of Buildings and Structures, Platov South Russian State Polytechnic University (NPI); 132 Prosveshcheniya St, Novochoerkassk, 346428, Russian Federation; ORCID: 0009-0005-0426-5748; e-mail: nik.korchagin@mail.ru

1. Введение

В настоящее время трудно представить проектирование большепролетных покрытий спортивных и культурно-массовых сооружений без применения пространственных стержневых конструкций (ПСК). К основным преимуществам конструкций данного типа относятся следующие положительные качества [1–7]:

1) механизм распределения внешней нагрузки, обуславливающий работу стержней исключительно на растяжение/сжатие. Это позволяет снизить массу конструкции за счет использования стержней трубчатого поперечного сечения, в том числе из алюминиевого сплава;

2) универсальность комплектующих деталей, что делает процесс их изготовления высокотехнологичным, обеспечивает простоту хранения и транспортировки заготовок;

3) жесткостные характеристики узловых соединений стержней, обеспечивающие при монтаже и эксплуатации эффект самонесущей конструкции.

Как отмечается в [8], решение проблемы конструктивной безопасности зданий и сооружений в связи с появлением новых видов и ростом интенсивности техногенных, природных и других проектных и так называемых запроектных воздействий требует расширения спектра методов защиты зданий и сооружений от этих воздействий. В этой связи ПСК, предназначенные для эксплуатации в районах с повышенной сейсмической активностью, выполняют с применением болтовых соединений несущих элементов. Исследования [9; 10] показали, что податливость болтовых соединений позволяет стержневой конструкции при знакопеременном квазистатическом воздействии воспринимать остаточные смещения без ущерба общей несущей способности. Наиболее полный обзор и критический анализ конструкторских разработок, выполненных отечественными и зарубежными авторами в направлении сопряжения стержней ПСК, приведен в [11–14].

Узловые блоки для ПСК, как правило, изготавливают с применением довольно материалоемких способов, что увеличивает общий вес конструкции. Развитие технологий аддитивного производства привело к росту интереса к 3D-печати, позволяющей обеспечить снижение материалоемкости и повысить точность изготовления блоков узловых соединений ПСК.

В [15] предложена методика 3D-моделирования узла ПСК в виде полрой оболочечной сетки. При этом толщины стенок блока узлового соединения уточняются путем численного прочностного анализа. Полученные в [15] блоки узловых соединений ПСК футуристической формы, ориентированные исключительно на применение 3D-печати, показаны на рис. 1.

В [16; 17] выполнено конечно-элементное моделирование распределения внутренних напряжений в узловом соединении типа МАРХИ [10], позволившее на 10 % снизить материалоемкость изделия. Для численного моделирования использовались объемные конечные элементы (КЭ) (рис. 2). О важности выбора и обоснования расчетной схемы узлового соединения пространственной стержневой системы при анализе сценария отказа металлоконструкции говорится в [18]. На рис. 3. приведена схема разбивки соединения стержневых элементов структурного покрытия на объемные КЭ.

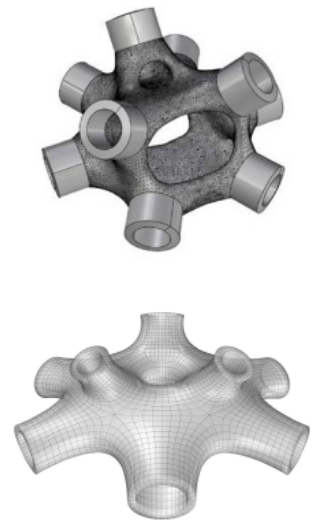


Рис. 1. 3D-блоки узловых соединений ПСК

Источник: выполнено F. Aishc и др. [15].

Figure 1. 3D blocks of UCS nodal junctions

Source: performed by F. Aishc et al. [15].

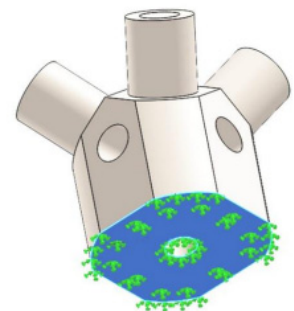


Рис. 2. Твердотельная модель узла типа МАРХИ

Источник: выполнено В.Ю. Алпатовым [17].

Figure 2. Solid-state model of a MIACE type node

Source: performed by V.Yu. Alpatov et al. [17].

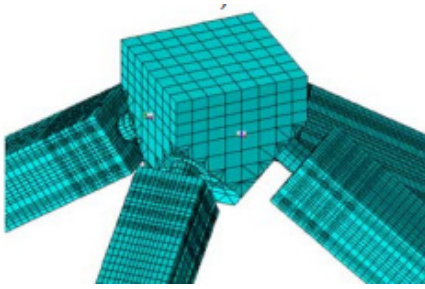


Рис. 3. Конечно-элементная модель узлового соединения стержней
Источник: выполнено В.Ф. Мушанов и др. [18].

Figure 3. Finite element model of the nodal connection of rods

Source: performed by V.F. Muschanov et al. [18].

Особое место в практике применения пространственных стержневых конструкций занимают так называемые строительные леса (Layher Allround), базирующиеся на трех вариантах закрепления ригелей на стойках: шарнирное; упругоподатливое; жесткое [19].

Методология конструктивно-технологического формообразования сферических оболочек на основе радиально-кольцевой сети разработана в [20; 21]. Авторами исследован и реализован метод формирования регулярных топологических групп в виде треугольных сетей на сфере. Аналогичные исследования выполнены в [22], где авторами выполнена разработка математического и программного обеспечения для создания геометрических моделей ПСК с регулярной структурой.

Следует отметить, что одним из перспективных направлений развития вычислительных методов строительной механики является разработка методики численного моделирования поведения ПСК с учетом податливости узловых соединений. Данный подход базируется на комбинированной конечно-элементной модели, образованной стержневыми и пружинными КЭ [23; 24]. Результаты конечно-элементного моделирования ПСК в форме двухконтурного геодезического купола с учетом податливости узловых соединений при сейсмическом воздействии приведены в [25].

В качестве объекта настоящего исследования рассмотрена ПСК цилиндрической формы с покрытием в виде усеченного конуса. Цель исследования — разработка методики численного моделирования динамического отклика ПСК с учетом податливости узловых соединений стержневых КЭ. В задачи исследования входило построение балочно-пружинной механической модели ПСК цилиндрической формы; написание и отладка макроса на языке APDL программного комплекса ANSYS Mechanical¹ для анализа переходного процесса; разработка и изготовление с помощью 3D-печати блока узловых соединений стержней; макетирование гексагональных стержневых секций.

2. Метод исследования

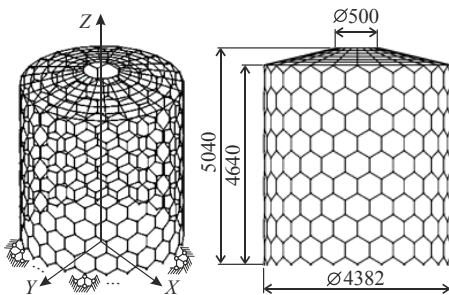


Рис. 4. Стержневая модель
Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 4. The core model

Source: performed by N.A. Korchagin.

В качестве примера рассмотрена конечно-элементная модель конструкции цилиндрической формы с покрытием в виде усеченного конуса (рис. 4). Цилиндрическая часть данной конструкции представляла собой регулярно упорядоченную стержневую (решетчатую) структуру, образованную из плоских правильных шестиугольников и блоков узловых соединений стержней решетки (БУССР). На рис. 5 показана схема БУССР, состоящая из треугольной площадки s , в углах которой расположено по два узла. Причем узел i принадлежит пластине s , а узел j стержню шестиугольника. В основании цилиндрической решетки введены стержневые элементы, на свободные узлы которых наложены связи, запрещающие линейные перемещения вдоль глобальных осей X , Y , Z (рис. 4).

Совместное перемещение узлов i и j обеспечивалось с помощью комбинированных КЭ пружинного типа. Жесткости данных элементов имели следующие значения: линейные пружины $k_x = k_y = k_z = 10^9$ Н/м; поворотные пружины $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^5$ Н·м/рад. Значения жесткостей ли-

¹ ANSYS Mechanical APDL Tutorials. URL: https://ijmer.com/papers/Vol2_Issue5/CK2535173521.pdf (дата обращения: 22.12.2025).

нейных пружин назначались такого же порядка, как и у величины модуля упругости материала БУССР. Значения жесткостей поворотных пружин варьировались в диапазоне $10^3 \dots 10^5$ Н·м/рад. Было установлено, что при значениях $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$ менее 10^3 Н·м/рад модель решетчатой конструкции становится геометрически изменяемой. Величины $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$, равные 10^5 Н·м/рад, априори соответствуют фиксации Т-образного наконечника стержня в БУССР до момента исчезновения способности его относительно свободного поворота в цилиндрической опоре.

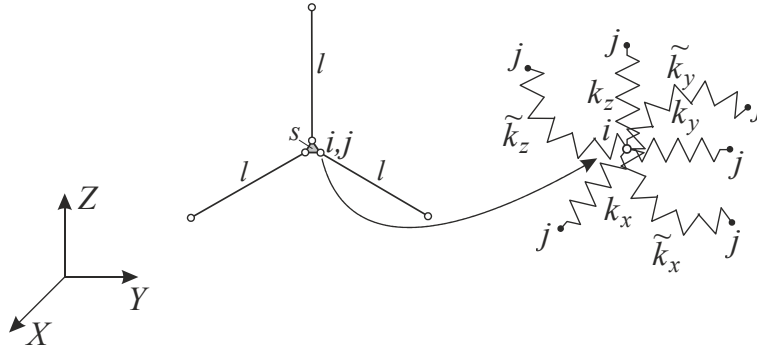


Рис. 5. Схема блока узловых соединений стержней решетки

Источники: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 5. Diagram of the block of nodal connections of the grid rods

Source: performed by N.A. Korchagin.

Стержни цилиндрической решетки моделировались пространственными балочными КЭ с шестью степенями свободы в узле. Механические константы материала стержней (алюминиевый сплав): модуль упругости $E = 6,8 \cdot 10^{10}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0,32$; плотность $\rho = 2885$ кг/м³. Стержни решетки имели трубчатое поперечное сечение с наружным диаметром 18 мм и толщиной стенки 1,5 мм. Длина стержней $l = 285$ мм.

Покрытие цилиндрической решетки (см. рис. 4) моделировалось регулярной пространственной стержневой сеткой без БУССР. Материал и форма сечения КЭ покрытия принимались такими же, как и для стержней цилиндрической решетки. Площадки s БУССР (рис. 5) моделировались стержневыми КЭ квадратного поперечного сечения 20×20 мм. Материал стержней блока пластик (полиэфирэфиркетон (РЕЕК)). Упругие константы материала стержней БУССР: $E = 2,2 \cdot 10^9$ Н/м²; $\nu = 0,37$; $\rho = 1250$ кг/м³. Механические константы стержневых КЭ, введенных в основании цилиндрической решетки для моделирования статических граничных условий: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu = 0,28$. Собственный вес стержней основания не учитывался.

Эскиз нижней пластины БУССР показан на рис. 6. В комплект узла БУССР входило две одинаковые пластины, три Т-образных наконечника с цилиндрическими головками и три болтовых крепления.

Фотографии макета БУССР, выполненного с помощью 3D-печати, показаны на рис. 7, а, б.

Фотографии макета секций гексагональной стержневой решетки с БУССР в исходном и трансформированном состояниях представлены на рис. 8. Как видно, разработанная конструкция БУССР обладает кинематическими степенями свободы, позволяющими создавать стержневые композиции с сопряжениями секций под прямыми углами, а также трансформировать отдельную секцию на такой же угол.

Детализация форм возможной трансформации стержневых секций гексагональной формы показана на рис. 9. Физическое макетирование показало, что в предельном случае секции можно плотно упоковать, сложив в стопку (рис. 9, б).

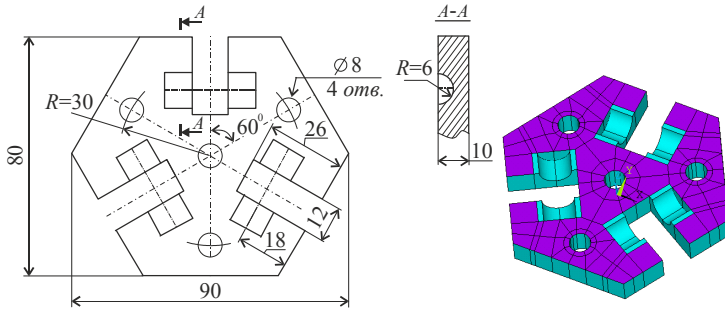
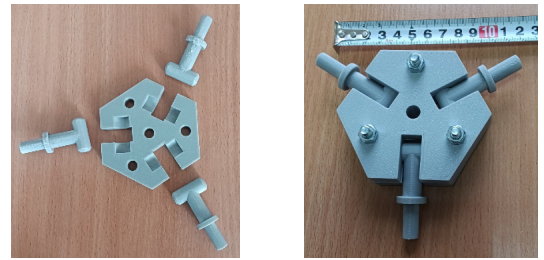


Рис. 6. Эскиз и 3D-модель нижней пластины БУССР

Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 6. Sketch and 3D model of the bottom plate of the BNCGR

Source: performed by N.A. Korchagin.



a

b

Рис. 7. БУССР выполненный с помощью 3D печати:

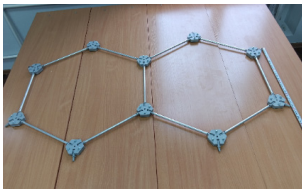
a — детали узла; *b* — соединительный узел

Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

Figure 7. BNCGR made using 3D printing:

a — node details; *b* — connecting node

Source: performed by N.G. Tsaritova and E.R. Iskhakova.



a



b



c

Рис. 8. Фотографии стержневых секций в исходном и трансформированном состояниях:

a — исходное положение двух секций; *b* — трансформация двух секций 90° ; *c* — трансформация трех секций 90°

Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

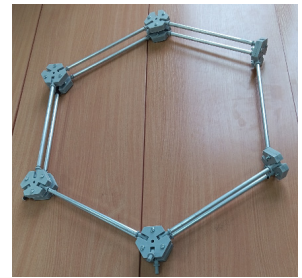
Figure 8. Photographs of the core sections in their original and transformed states:

a — starting position of the two sections; *b* — transformation of two sections 90° ; *c* — transformation of three sections 90°

Source: performed by N.G. Tsaritova and E.R. Iskhakova.



a



b

Рис. 9. Фотографии форм возможной трансформации стержневых секций:

a — трансформация 90° ; *b* — трансформация 180°

Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

Figure 9. Photographs of forms of possible transformation of the core sections:

a — transformation 90° ; *b* — transformation 180°

Source: performed by N.G. Tsaritova and E.R. Iskhakova.

Таким образом, предлагаемая конструкция БУССР позволяет осуществлять сборку самонесущих регулярных гексагональных стержневых решеток с любыми углами сопряжения секций.

3. Результаты и обсуждение

Результаты модального анализа для конечно-элементной модели с БУССР и аналогичной модели без податливых связей для первых четырех собственных пар представлены на рис. 10, *a*, *b*. Здесь в скобках приведены значения собственных частот для модели без БУССР. Как и следовало ожидать, в силу симметрии геометрии рассматриваемая решетчатая конструкция имеет парные собственные частоты.

На рис. 11 приведены картины распределения перемещений w_z и продольных сил N в стержнях цилиндрической решетки для модели с БУССР, полученные в результате статического расчета от действия только собственного веса. Максимальные по модулю значения прогибов покрытия для моделей с БУССР и без БУССР составили 1,62 и 1,56 мм соответственно. Значения $|N|_{\max}$ для обеих моделей одинаковые.

Анализ динамического отклика рассматриваемой конечно-элементной модели на динамическое воздействие выполнен с помощью синтезированной сейсмограммы, описываемой формулой

$$\tilde{w}(t) = Ate^{-Bt} \sin(\theta t), \quad (1)$$

где t — время в секундах; параметры: $\theta = 5 \text{ с}^{-1}$; $A = 0,01553 \text{ м/с}$; $B = 0,7143 \text{ с}^{-1}$.

График функции $\tilde{w}(t)$ приведен на рис. 12. Как видно из графика (рис. 12) максимальное смещение для принятого закона вынужденных колебаний при $t = 1,6 \text{ с}$ составляет 8 мм.

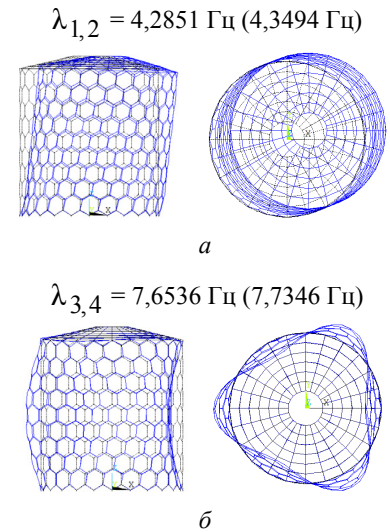


Рис. 10. Результаты модального анализа: *a* — первая форма; *б* — вторая форма
Источник: выполнено Н.Г. Царитовой.
Figure 10. The results of the modal analysis: *a* — the first form; *б* — the second form
Source: performed by N.G. Tsaritova.

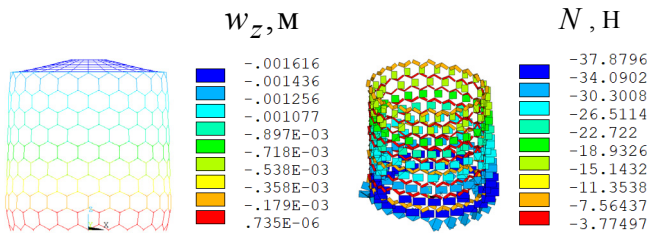


Рис. 11. Визуализация распределения w_z и N в модели с БУССР (статика)
Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исаковой.

Figure 11. Visualization of the distribution and N in the BNCGR model (static)
Source: performed by N.G. Tsaritova and E.R. Iskhakova.

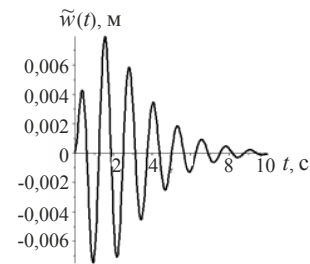


Рис. 12. График синтезированной сейсмограммы $w \sim t$
Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.
Figure 12. Graph of the synthesized seismogram $w \sim t$
Source: performed by N.A. Korchagin.

Расчетная схема для динамического анализа приведена на рис. 13. В данном случае нестационарное кинематическое воздействие $\tilde{w}_x(t)$, $\tilde{w}_y(t)$, $\tilde{w}_z(t)$, задаваемое формулой (1), прикладывалось к узлам стержневых КЭ, соединенных с основанием цилиндрической решетки. Для построения графиков колебаний использовались значения перемещений в точках b_1 и b_2 , расположенных на верхней плоскости конического покрытия (рис. 14).

Для прямого интегрирования уравнения движения применялась неявная схема метода Ньюмарка. Коэффициенты демпфирования матриц масс и жесткости принимались соответственно равными 0,1 и 0,01. Шаг по временной координате принимался равным 0,01 с.

Результаты динамического расчета в виде графиков колебаний $w_z(t)$ и $w_x(t)$, $w_y(t)$ для решетчатой конструкции с учетом податливости узловых соединений стержней приведены на рис. 15 и 16. Амплитудные значения перемещений в направлении оси Z в момент времени $t = 0,99 \text{ с}$ в точках b_1 и b_2 составили: $-0,01149 \text{ м}$; $-0,006092 \text{ м}$ (рис. 15). Соответствующие амплитудные значения перемещений $w_x(t) = w_y(t) = -0,02382 \text{ м}$ (рис. 16). Установлено, что графики $w_x(t)$, $w_y(t)$, $w_z(t)$ для моделей с БУССР и без БУССР совпадают.

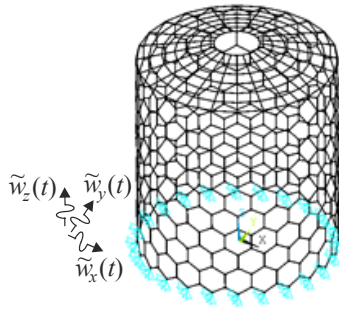


Рис. 13. Схема возбуждения колебаний
Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 13. Oscillation excitation scheme
Source: performed by N.A. Korchagin.

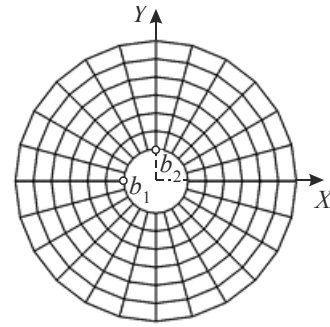


Рис. 14. Расположение точек b_1 и b_2
Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 14. Location of points b_1 and b_2
Source: performed by N.A. Korchagin.

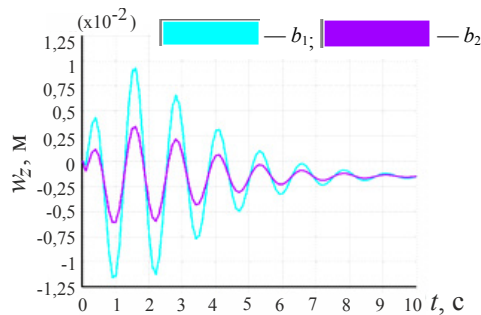


Рис. 15. Графики колебаний $w_x(t)$ в точках b_1 и b_2
Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 15. Graphs of fluctuations $w_y(t)$ in points b_1 and b_2
Source: performed by N.A. Korchagin.

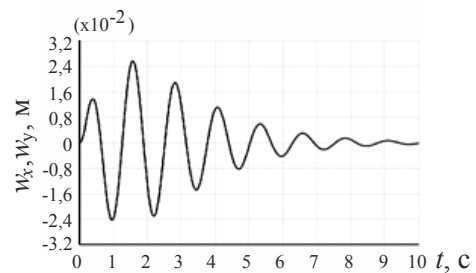


Рис. 16. Графики $w_x(t)$, $w_y(t)$
Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 16. Graphs $w_x(t)$, $w_y(t)$
Source: performed by N.A. Korchagin.

Графики колебаний $w_z(t)$ и $w_x(t)$, $w_y(t)$ для решетчатой конструкции с учетом податливости узловых соединений при значениях $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^3$ Н·м/рад представлены на рис. 17 и 18. В данном случае амплитудные значения перемещений в направлении оси Z в момент времени $t = 0,99$ с в точках b_1 и b_2 составили: $-0,01628$ м; $-0,007902$ м (рис. 17). Соответствующие амплитудные значения перемещений $w_x(t) = w_y(t) = -0,05586$ м (рис. 18).

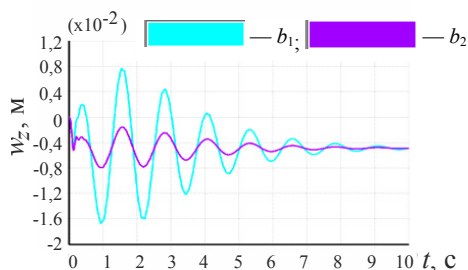


Рис. 17. Графики колебаний $w_z(t)$ в точках b_1 и b_2
Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 17. Graphs of fluctuations $w_z(t)$ in points b_1 and b_2
Source: performed by N.A. Korchagin.

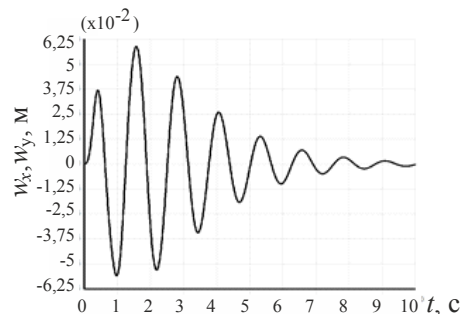


Рис. 18. Графики $w_x(t)$, $w_y(t)$
Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 18. Graphs $w_x(t)$, $w_y(t)$
Source: performed by N.A. Korchagin.

Сравнивая амплитудные значения перемещений на рис. 15 и 17, приходим к выводу, что уменьшение жесткости поворотных пружин на два порядка приводит к увеличению перемещения W_z в точке b_1 в 1,4 раза и в 1,3 раза в точке b_2 . Соответствующие величины W_x и W_y возрастают в 2,3 раза.

Покадровая визуализация результирующего (суммарного) перемещения w_Σ для моделей решетки со значениями $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$, равными 10^5 и 10^3 Н·м/рад, в моменты времени 0,98 с и 1,6 с показана на рис. 19, 20 и рис. 21, 22 соответственно.

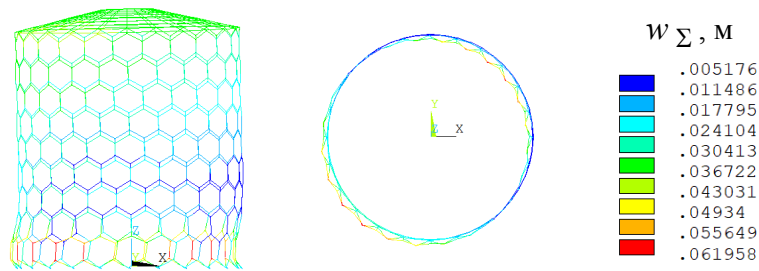


Рис. 19. Картина распределения W_Σ при $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^5$ Н·м/рад и $t = 0,98$ с

Источники: выполнено Н.Г. Царитовой, Э.Р. Исаковой.

Figure 19. Distribution pattern W_Σ at $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^5$ N·m/rad and $t = 0.98$ s

Source: performed by N.G. Tsaritova, E.R. Iskhakova.

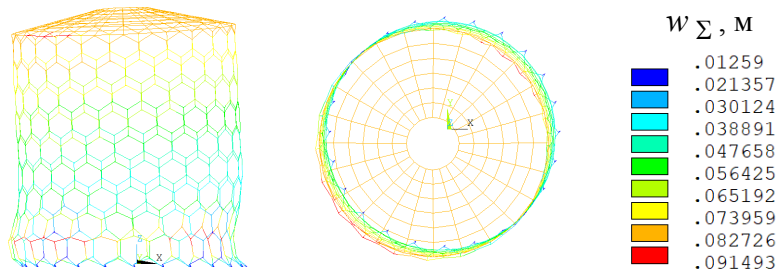


Рис. 20. Картина распределения W_Σ при $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^3$ Н·м/рад и $t = 0,98$ с

Источники: выполнено Н.Г. Царитовой, Э.Р. Исаковой.

Figure 20. Distribution pattern W_Σ at $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^3$ N·m/rad and $t = 0.98$ s

Source: performed by N.G. Tsaritova, E.R. Iskhakova.

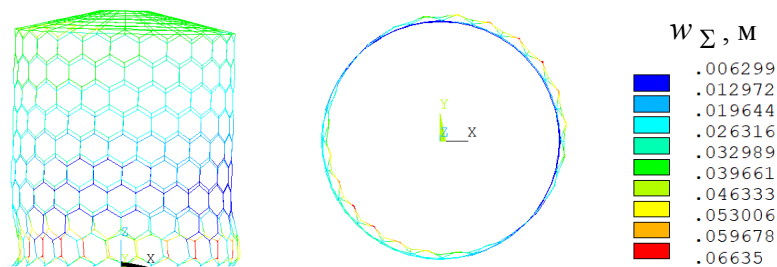


Рис. 21. Картина распределения W_Σ при $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^5$ Н·м/рад и $t = 1,6$ с

Источники: выполнено Н.Г. Царитовой, Э.Р. Исаковой.

Figure 21. Distribution pattern W_Σ at $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^5$ N·m/rad and $t = 1.6$ s

Source: performed by N.G. Tsaritova, E.R. Iskhakova.

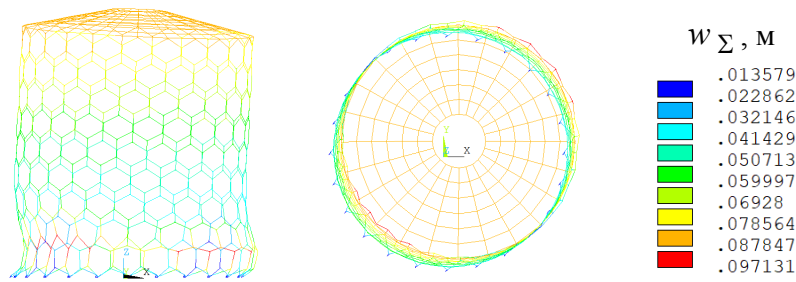


Рис. 22. Картина распределения w_Σ при $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$ и $t = 1,6 \text{ с}$
 Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

Figure 22. Distribution pattern w_Σ at $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ and $t = 1.6 \text{ s}$
 Source: performed by N.G. Tsaritova, E.R. Iskhakova.

Из приведенных данных видно, что деформирование рассматриваемой решетчатой конструкции носит объемный характер. Наибольшие смещения в колебательном процессе наблюдаются в секциях, расположенных в первом ряду от основания цилиндрической решетки. Эпюры продольных сил N в стержнях первой секции для вариантов расчетов с наличием БУССР и без БУССР для момента времени $t = 0,98 \text{ с}$ приведены на рис. 23–25. Наибольшие по модулю значения продольных сил равны:

$$|N|_{\max} = 1385 \text{ Н при } \tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; |N|_{\max} = 1526 \text{ Н без БУССР};$$

$$|N|_{\max} = 656,8 \text{ Н при } \tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}.$$

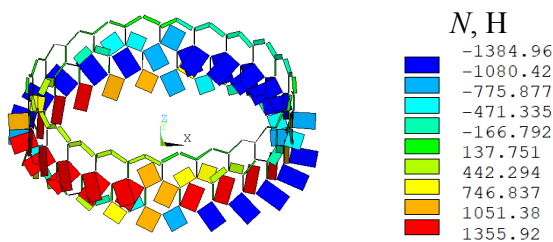


Рис. 23. Эпюра N при $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$
 Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

Figure 23. Plot N at $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
 Source: performed by N.G. Tsaritova, E.R. Iskhakova.

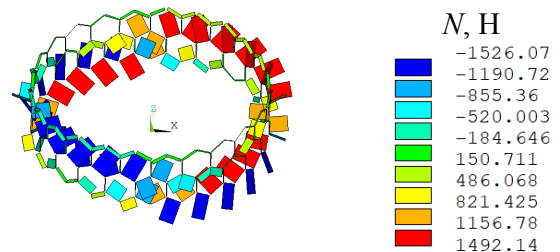


Рис. 24. Эпюра N без БУССР
 Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

Figure 24. Plot N without BNCGR
 Source: performed by N.G. Tsaritova, E.R. Iskhakova.

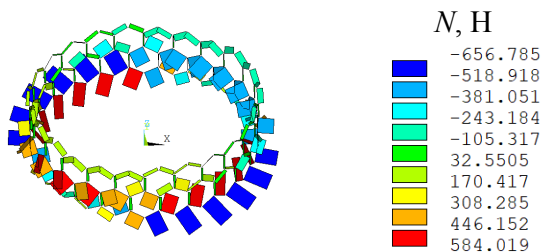


Рис. 25. Эпюра N при $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$
 Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

Figure 25. Plot N at $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$
 Source: performed by N.G. Tsaritova, E.R. Iskhakova.

Как следует из рис. 23 и 25, при уменьшении значений $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$ на два порядка максимальные сжимающие усилия в стержнях цилиндрической решетки снижаются в 2,4 раза. На основании полученных данных для решетки с БУССР была построена схема наиболее нагруженного узлового соединения (рис. 26), в котором на два стержня действуют сжимающее и растягивающие усилия (рис. 23). При этом считалось, что третий стержень данного узлового соединения не нагружен.

Отметим, что при заданном динамическом воздействии максимальное по модулю значение продольного усилия в 36 раз превышает аналогичное значение, полученное при статическом расчете стержневой решетки (рис. 11).

На рис. 27 показана 3D-модель нижней пластины БУССР с указанием направления и значениями прикладываемых сосредоточенных сил. Конечно-элементная модель БУССР представлена на рис. 28. Для построения моделей пластин и болтовых соединений блока были применены восьмиузловые объемные КЭ. Для моделирования контактного взаимодействия между пластинами блока использовались комбинированные КЭ. Материал болтовых соединений — сталь. На узлы нижней пластины ($z = 0$) с координатами: $y = 0, x = \pm 0,004$ м — накладывались связи, запрещающие смещения в направлении глобальных осей Y, Z , а на узлы $x = 0, y = \pm 0,004$ м — связи, запрещающие смещения в направлении глобальных осей X, Z . Схема нагружения БУССР статически эквивалентным давлением p показана на рис. 29.

Результаты моделирования напряженного состояния пластины БУССР в виде картины распределения поля интенсивности напряжений σ_i приведены на рис. 30. Установлено, что зоны концентрации напряжений сосредоточены в крайних узлах областей приложения давления. Механическая прочность полиэфирэфиркетона на растяжение 89 МПа, на сжатие 200 МПа. Как видно из рис. 30, при заданном динамическом воздействии возникающее в пластинах БУССР максимальное значение σ_i не превышает предела прочности полиэфирэфиркетона на растяжение.

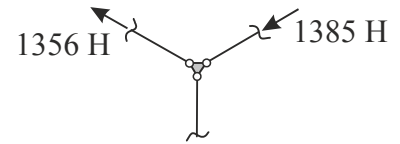


Рис. 26. Схема наиболее нагруженного узлового соединения

Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 26. Diagram of the most loaded nodal connection

Source: performed by N.A. Korchagin.

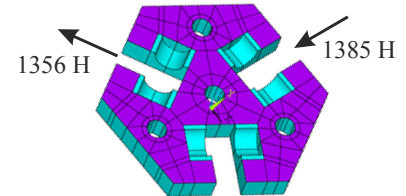


Рис. 27. Схема нагружения 3D-модели БУССР

Источник: выполнено Н.А. Корчагиным.

Figure 27. Loading scheme of the 3D BNCGR model

Source: performed by N.A. Korchagin.

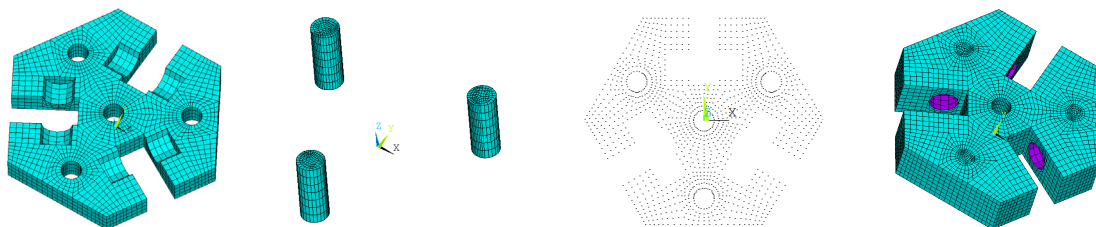


Рис. 28. Конечно-элементная модель БУССР / Figure 28. The finite element model of the BNCGR

Источник: выполнено Н.А. Корчагиным. / Source: performed by N.A. Korchagin.

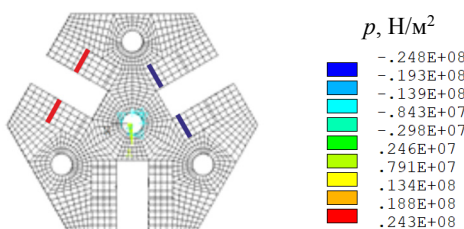


Рис. 29. Визуализация p и граничных условий

Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

Figure 29. Visualization of p and boundary conditions

Source: performed by N.G. Tsaritova and E.R. Iskhakova.

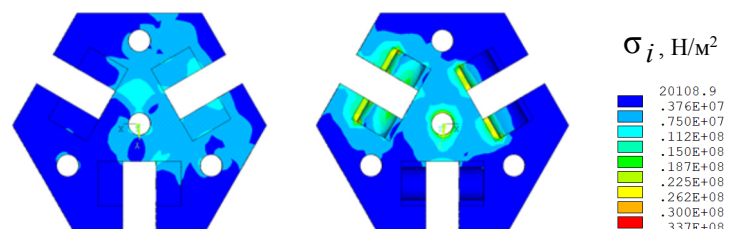


Рис. 30. Визуализация картины распределения поля σ_i в пластине БУССР

Источник: выполнено Н.Г. Царитовой и Э.Р. Исхаковой.

Figure 30. Vaccination of the field distribution pattern σ_i in the BNCGR plate

Source: performed by N.G. Tsaritova and E.R. Iskhakova.

Анализ контактного взаимодействия пластин БУССР выполнен на базе данных о распределении компонент относительных смещений Δ_x , Δ_y , Δ_z в плоскости разъема. При экстремальном нагружении получены следующие величины: $\Delta_{x \max} = 0,22$ мм; $\Delta_{y \max} = 0,16$ мм; $\Delta_{z \max} = 0,14$ мм. Из приведенных данных следует, что при динамическом нагружении на границе разъема БУССР возникают знакопеременные смещения, обуславливающие раскрытие стыка пластин. Поэтому для обеспечения надежности соединений пластин БУССР необходимо обеспечить затяжку болтовых соединений в сочетании с установкой демпфирующих шайб.

4. Заключение

1. Выполнен конечно-элементный анализ динамического поведения стержневой конструкции цилиндрической формы, представляющей собой регулярно упорядоченную решетчатую структуру, образованную из плоских правильных шестиугольников и упруго податливых блоков узловых соединений. Установлено, что амплитудные значения суммарных перемещений конструкции при заданном законе нестационарного кинематического воздействия в зависимости от поворотных жесткостей блока узловых соединений стержней лежат в диапазоне 6,6...9,7 см.

2. На основании данных динамического расчета установлено, что при уменьшении поворотных жесткостей блоков узловых соединений стержней на два порядка амплитудные значения сжимающих усилий в стержнях цилиндрической решетки снижаются в 2,4 раза.

3. Разработана и изготовлена с помощью 3D-печати физическая модель блока узловых соединений стержней решетчатой конструкции. Приведены фотоматериалы, демонстрирующие способность трансформации сопряженных гексагональных стержневых секций.

4. Представлены результаты численного моделирования блока узловых соединений стержней с учетом контактного взаимодействия на стыке пластин. Показано, что при динамическом воздействии на границе разъема возникают знакопеременные смещения, влияющие на раскрытие стыка пластин.

5. Предлагаемая структурная концепция сборно-разборных узловых соединений стержней решетки с гексагональной формой секций позволяет выполнить ремонтно-восстановительные работы даже в случае больших необратимых искажений формы конструкции.

6. Перспективы дальнейших исследований будут направлены на тарировку поворотных жесткостей блока узловых соединений стержней.

Список литературы

1. Гасий Г.М. Особенности конструктивных решений и проектирования пространственных стержневых систем // Наука и техника. 2017. Т. 16. № 6. С. 475–484. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2017-16-6-475-484> EDN: OTKKIN
2. Канчели Н.В. Строительные пространственные конструкции. Москва : АСВ, 2003. 112 с. ISBN 5-93093-206-9 EDN: QNKFNR
3. Ружанский И.Л. Развитие конструктивных форм пространственных и легких конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2010. № 5. С. 12–15. EDN: MCIQLZ
4. Zhao X.L., Tong L.W. New development in steel tubular joints // Advances in structural engineering. 2011. Vol. 14. P. 699–716. <https://doi.org/10.1260/1369-4332.14.4.699>
5. Ramaswamy G.S., Eekhout M., Suresh G.R. Steel Space Frames, Analysis, Design and Construction. London, Thomas Telford Publ.; 2002. 242 p. ISBN-10 0727730142
6. Chilton J. Space grid structures. Woburn, MA : Butterworth-Heinemann Linacre House, 2000. 191 p. ISBN 0 7506 3275 5
7. Ashtul S.A., Patil S.N. Review on study of space frame structure system // International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET). 2020. Vol. 7. Issue 4. P. 667–672. URL: www.irjet.net (дата обращения: 16.12.2025).
8. Травуш В.И., Колчунов В.И., Клюева Н.В. Некоторые направления развития теории живучести конструктивных систем зданий и сооружений // Промышленное и гражданское строительство. 2015. № 3. С. 4–11. EDN: TOBVVD

9. Adam J.M., Parisi F., Sagaseta J., Lu X. Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century // *Engineering Structures*. 2018. Vol. 173. P. 122–149. <https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2018.06.082>
10. Kulak G.L., Fisher J.W., Struik J.H.A. Guide to design criteria for bolted and riveted joints. Second Edition. Wiley Publ.; 1987. 352 p. ISBN 0471837911, 9780471837916
11. Klimke H. The envelopes of the Arts centre in Singapore // *IABSE Symposium: Towards a Better Built Environment — Innovation, Sustainability, Information Technology*, 11–13 September 2002, Melbourne, Australia, 2002. Vol. 86. No. 15. P. 9–20. <https://doi.org/10.2749/222137802796336036>
12. Afshana S., Theofanousb M., Wangc J., Gkantoud M., Gardner L. Testing, numerical simulation and design of prestressed high strength steel arched trusses // *Engineering Structure*. 2019. Vol. 183. P. 510–522. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.01.007>
13. Babu S.S., Sreekumar S. A study on the ductility of bolted beam-column connections // *International Journal of Modern Engineering Research*. 2012. Vol. 2. Issue. 5. P. 3517–3521. URL: https://ijmer.com/papers/Vol2_Issue5/CK2535173521.pdf (дата обращения: 17.12.2025).
14. Инжуртов И.С., Дмитриев П.А., Георгиев С.В., Захарюта В.В. Анализ существующих узлов сопряжения пространственных конструкций и разработка сборно-разборного узлового элемента // *Вестник МГСУ*. 2013. № 3. С. 61–71. EDN: PXOISL
15. Aishc F., Andera M., Hryhab E., Olsson J., Tsigkaric M., Williams C.J.K. Form finding nodal connections in grid structures // *Proceedings of the IASS Symposium 2018 Creativity in Structural Design*. July 16-20, MIT, Boston, USA, 2018. p. 1–8. ISSN 2518-6582
16. Алпатов В.Ю., Жученко Д.И., Лукин А.О. Исследование узлового коннектора пространственной конструкции, выполненного из массивной детали // *Вестник МГСУ*. 2017. Т. 12. № 2. С. 142–149. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2017.2.142-149> EDN: YGJDWP
17. Alpatov V. Numerical Studies of the Nodal Connections of Metal Spatial Frames // *International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern technologies. Series: Materials Science and Engineering*. 2018. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/3/032103> EDN: NDAFRY
18. Муцанов В.Ф., Оржеховский А.Н., Цепляев М.Н., Муцанов А.В. Особенности формирования уточненных расчетных схем при анализе напряженно-деформированного состояния, оценке устойчивости и надежности элементов пространственных металлических конструкций // *Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: Тезисы VII Международного симпозиума*. 17–21 мая, Россия, Тамбов, 2023. С. 238–239. EDN: WMYIOS
19. Хайдаров Л.И., Шмелев Г.Н., Зиятдин Э.К. Построение расчетных схем мобильных пространственных стержневых конструкций, моделирующих их действительную работу // *Известия КГАСУ*. 2017. № 2 (40). С. 139–145. EDN: YQQQON
20. Трапуш В.И., Антошкин В.Д., Ерофеев В.Т., Гудожников С.С. Современные конструктивно-технологические решения сферических оболочек // *Строительство и реконструкция*. 2012. № 6 (44). С. 45–55. EDN: PVFYOZ
21. Антошкин В.Д. Конструкционно-технологическое формообразование оболочек из сборных плоских шестиугольных и треугольных панелей, размещенных в повторяющихся секторах сфер // *Строительство и реконструкция*. 2017. № 4 (72). С. 3–8. EDN: ZHHHGH
22. Лебедь Е.В., Аткин А.В. Геометрический расчет пространственных стержневых систем // *Вестник МГСУ*. 2009. № 4. 317–329. EDN: KZHCFP
23. Wang T. A numerical study of elastic using constrained optimization method // *A Thesis Submitted for the Degree of Master of Engineering Department of Civil Engineering National University of Singapore* 2004. URI: <https://scholarbank.nus.edu.sg/handle/10635/14131> (дата обращения: 17.12.2025).
24. Гайджуров П.П., Даник Н.Б., Климух А.В. Численное моделирование формоизменения гибких стержней // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2025. Т. 21. № 5. С. 462–473. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-462-473> EDN: DFDCNF
25. Гайджуров П.П., Царитова Н.Г. Моделирование сейсмического воздействия на двухконтурный геодезический купол с учетом податливости узловых соединений // *Вестник МГСУ*. 2026. Т. 21. № 1. С. 24–34. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2026.1.24-34> EDN: XHEL VH

References

1. Gasiy GM. Features of constructive solutions and design of spatial core systems. *Science and Technology*. 2017; 16(6):475–484. (In Russ.) <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2017-16-6-475-484> EDN: OTKKIN
2. Kancheli NV. *Spatial building structures*. Moscow: DIA Publ.; 2003. (In Russ.) ISBN 5-93093-206-9. EDN: QNKFNR
3. Ruzhansky IL. The development of constructive forms of spatial and lightweight structures. *Industrial and Civil Engineering*. 2010;(5):12–15. (In Russ.) EDN: MCIQLZ

4. Zhao XL, Tong LW. New development in steel tubular joints. *Advances in structural engineering*. 2011;14:699–716. <https://doi.org/10.1260/1369-4332.14.4.699>
5. Ramaswamy GS, Eekhout M, Suresh GR. *Steel space frames, analysis, design and construction*. London, Thomas Telford Publ.; 2002. ISBN-10 0727730142
6. Chilton J. *Space grid structures*. Woburn, MA: Butterworth-Heinemann Linacre House, 2000. ISBN 0 7506 3275 5
7. Ashtul SA, Patil SN. Review on study of space frame structure system. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*. 2020;07(04):667–672. Available from: www.irjet.net (accessed: 16.12.2025).
8. Travush VI, Kolchunov VI, Klyueva NV. Some directions in the development of the theory of survivability of structural systems of buildings and structures. *Industrial and Civil Engineering*. 2015;(3):4–11. (In Russ.) EDN: TOBVVD
9. Adam JM, Parisi F, Sagasetta J, Lu X. Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century. *Engineering Structures*. 2018;173:122–149. <https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2018.06.082>
10. Kulak GL, Fisher JW, Struik JHA. *Guide to design criteria for bolted and riveted joints*. Second Edition. Wiley Publ.; 1987. ISBN 0471837911, 9780471837916
11. Klimke H. The envelopes of the Arts centre in Singapore. *LABSE Symposium: Towards a Better Built Environment – Innovation, Sustainability, Information Technology*. Melbourne, Australia, 2002. Vol. 86. No. 15. P. 9–20. <https://doi.org/10.2749/222137802796336036>
12. Afshana S, Theofanousb M, Wang J, Gkantoud M, Gardner L. Testing, numerical simulation and design of pre-stressed high strength steel arched trusses. *Engineering Structure*. 2019;183:510–522. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.01.007>
13. Babu SS, Sreekumar S. A study on the ductility of bolted beam-column connections. *International Journal of Modern Engineering Research*. 2012;2(5):3517–3521. Available from: https://ijmer.com/papers/Vol2_Issue5/CK2535173521.pdf (accessed: 17.12.2025).
14. Injutov IS, Dmitriev PA, Deordiev SV, Zakharyuta VV. Analysis of existing spatial structure coupling links and development of a collapsible nodal element. *Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2013;3:61–71. (In Russ.) EDN: PXOISL
15. Aishc F, Andera M, Hryhab E, Olsson J, Tsigkaric M, Williams CJK. Form finding nodal connections in grid structures. In: *Proceedings of the IASS Symposium 2018 Creativity in Structural Design*. International Association for Shell and Spatial Structures. 2018. p. 1–8. ISSN 2518-6582
16. Alpatov VYu, Zhuchenko DI, Lukin AO. Investigation of a nodal connector of spatial construction made of a massive part. *Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2017;12(2):142–149. (In Russ.). <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2017.2.142-149> EDN: YGJDWP
17. Alpatov VYu. Numerical studies of the nodal connections of metal spatial frames. In: *International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies. Series: Materials Science and Engineering*. Vladivostok, 2018:032103. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/3/032103> EDN: NDAFRY
18. Muschanov VF, Orzhekhovskiy AN, Tseplyaev MN, Muschanov AV. Features of the formation of refined design schemes in the analysis of stress-strain state, assessment of stability and reliability of elements of spatial metal structures. In: *Actual problems of computer modeling of structures and structures: Abstracts of the VII International Symposium*. May 17–21, Russia, Tambov, 2023. p. 238–239. (In Russ.) EDN: WMYIOS
19. Khaidarov LI, Shmelev GN, Ziyatdin EK. Construction of computational schemes of mobile spatial rod structures modeling their actual work. *From the News of KGASU*. 2017;2(40):139–145. (In Russ.) EDN: YQQQON
20. Travush VI, Antoshkin VD, Yerofeev VT, Gudozhnikov SS. Mode constructive and technological solutions of spherical shells. *Construction and Reconstruction*. 2012;(6):45–55. (In Russ.) EDN: PVFYOZ
21. Antoshkin VD. Structural and technological forming of shells on the basis of flats regular hexagon and triangle panels placed in the repeated sphere sectors. *Construction and Reconstruction*. 2017;(4):3–8. (In Russ.) EDN: ZHHHGH
22. Lebed EV, Atkin AV. Geometric calculation of spatial rod systems. *Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2009;(4):317–329. (In Russ.) EDN: KZHCFP
23. Wang T.A Numerical Study of Elastic Using Constrained Optimization Method [master’s thesis]. National University of Singapore; 2004. Available from: <https://scholarbank.nus.edu.sg/handle/10635/14131> (accessed: 17.12.2025).
24. Gaidzhurov PP, Danik NB, Klimukh AV. Numerical modeling of change of shape of flexible bars. *Construction Mechanics of Engineering Structures and Structures*. 2025;21(5):462–473. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-462-473> EDN: DFDCNF
25. Gaidzhurov PP, Tsaritova NG. Modeling of seismic effects on a two-contour geodesic dome, taking into account the ductility of nodal connections. *Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2026;21(1):24–34. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2026.1.24-34> EDN: XHEL VH

Деформирование балки, лежащей на упругом основании, при различных вариантах коэффициента податливости основания

М.Р. Горкина 

ООО «АйДи Инжиниринг», Санкт-Петербург, Российская Федерация

✉ maria-gorkina@mail.ru

Поступила в редакцию: 7 декабря 2025 г.

Доработана: 27 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 5 марта 2026 г.

Аннотация. Исследованы особенности деформирования балки, опирающейся на упругое основание, при различных вариантах коэффициента податливости основания. Проанализированы классические модели, такие как модель Винклера и модель Пастернака, а также нелинейные зависимости коэффициента постели от прогиба. Для решения задачи применены численные методы, включая метод Ритца и метод продолжения решения по параметру, что позволило исследовать влияние нагрузки и условий закрепления на величину прогиба балки. Полученные результаты демонстрируют влияние выбранной модели основания на величину прогиба и необходимость учета нелинейных эффектов для точного прогнозирования деформаций конструкций, взаимодействующих с грунтовым массивом. Дополнительно показано, что использование линейных моделей упругого основания дает удовлетворительные результаты лишь при малых деформациях и однородной структуре грунта. В условиях повышенной податливости или неоднородности грунтового массива необходимо применять модели, учитывающие изменение коэффициента постели в зависимости от величины прогиба. Это позволяет корректно описывать перераспределение напряжений и формирование зон оседания. Представленные зависимости и расчетные схемы могут быть использованы при проектировании фундаментов, плит и протяженных инженерных сооружений, где требуется обеспечить надежность и устойчивость системы конструкция — основание.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Ключевые слова: балка на упругом основании, коэффициенты постели, прогиб балки, модель Пастернака, метод Ритца, нелинейная деформация, метод продолжения решения по параметру

Для цитирования: Горкина М.Р. Деформирование балки, лежащей на упругом основании, при различных вариантах коэффициента податливости основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 129–137. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-129-137> EDN: KBDQNJ

Deformation of a Beam Lying on an Elastic Foundation with Different Variants of the Foundation Flexibility Coefficient

Maria R. Gorkina 

Engineering LLC, Saint Petersburg, Russian Federation

✉ maria-gorkina@mail.ru

Received: December 7, 2025

Revised: February 27, 2026

Accepted: March 5, 2026

Abstract. This article examines the deformation characteristics of a beam supported on an elastic foundation for various foundation compliance factors. Classic models, such as the Winkler and Pasternak models, are analyzed, as are nonlinear dependences of the bedding factor on deflection. Numerical methods, including the Ritz method and the parameter continuation method, were used to solve the problem, allowing us to study the influence of load and anchorage conditions on the beam deflection. The obtained

Горкина Мария Руслановна, ведущий инженер-конструктор, архитектурно-строительный отдел, ООО «АйДи Инжиниринг», Российская Федерация, 197136 г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д.37Щ, оф. 305, пом. 1-Н; eLIBRARY SPIN-код: 9433-1388, ORCID: 0000-0002-1036-6554; e-mail: maria-gorkina@mail.ru

© Горкина М.Р., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

results demonstrate the influence of the selected foundation model on the deflection magnitude and the need to consider nonlinear effects to accurately predict the deformations of structures interacting with the soil mass. It is also shown that the use of linear elastic foundation models yields satisfactory results only for small deformations and a homogeneous soil structure. In conditions of increased soil compliance or heterogeneity, it is necessary to use models that take into account the change in the bedding factor depending on the deflection magnitude. This allows for the correct description of stress redistribution and the formation of subsidence zones. The presented relationships and calculation models can be used in the design of foundations, slabs, and extended engineering structures where the reliability and stability of the structure-foundation system must be ensured.

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

Keywords: beam on an elastic foundation, bedding coefficients, beam deflection, Pasternak model, Ritz method, nonlinear deformation, method of continuation of the solution by parameter

For citation: Gorkina MR. Deformation of a beam lying on an elastic foundation with different variants of the foundation flexibility coefficient. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):129–137. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-129-137> EDN: KBDQNJ

1. Введение

Тема расчета балок на упругом основании, которой начали заниматься еще в XIX в., остается актуальной для строительной механики и геотехники и по сей день. Главными исследователями теории упругого основания считаются выдающиеся ученые и инженеры, которые внесли значительный вклад в развитие и применение теории расчетов. К числу наиболее значимых специалистов в этой области относятся Э. Винклер, М. Хетеньи, П.Л. Пастернак, А.А. Ильюшин, Э.Л. Олговер, К. Георг, А.Н. Крылов, А. Сельвадурай, Г. Гладуэлл, А.Б. Фадеев, А.Г. Шашкин, В.Н. Парамонов. Классические подходы к расчету балок на упругом основании связаны с моделью Винклера [1], в которой основание представляется как набор независимых упругих пружин, где реакция основания пропорциональна прогибу балки. Данная модель получила развитие в зарубежных работах, где были предложены методы решения дифференциальных уравнений равновесия для балок с различными граничными условиями. Однако ограниченность линейного подхода Винклера для описания реальных грунтов стимулировала исследования нелинейных моделей. Для устранения указанных ограничений П.Л. Пастернак предложил усовершенствованную модель, учитывая сдвиговую жесткость основания [2]. Для решения вышеперечисленных задач традиционно применялись итерационные методы, включая метод упругих решений А.А. Ильюшина [3], а также метод малого параметра, требующие значительных вычислительных ресурсов. А.Б. Фадеев в своих работах акцентирует внимание на применении современных численных методов для решения сложных задач о балках на упругом основании. Его вклад включает использование метода итераций для анализа балок на нелинейных и неоднородных основаниях [4–5]. А.Г. Шашкин в своих работах уделяет внимание как аналитическим, так и численным методам решения задач о балках на упругом основании [6]. В работе В.Н. Парамонова приводятся модели грунта и методы расчета конечных деформаций основания. Рассмотрены физические нелинейные задачи механики грунтов, также построены модели грунтов для условий больших деформаций [7]. Существующие работы фокусируются на линейных постановках или сложных итерационных методах, что затрудняет анализ нелинейных систем [9; 10]. Современные исследования показывают, что для более точного описания системы «балка — основание» активно развиваются обобщенные постановки с переменными свойствами основания, нелинейной контактной работой, неоднородностью и динамическими воздействиями [13–18].

Таким образом, учет реальных свойств основания и корректное определение коэффициента постели являются ключевыми факторами точного расчета балок, фундаментов и протяженных конструкций, взаимодействующих с грунтовым основанием.

2. Различные виды коэффициентов постели

Коэффициент податливости основания (или коэффициент постели) характеризует способность грунтового основания деформироваться под действием приложенной нагрузки. Он связывает давление, передаваемое конструкции на грунт, с возникающей деформацией (осадкой) основания. В ин-

женерной практике этот параметр широко используется в расчетах оснований и фундаментов для оценки их устойчивости и прогнозирования осадок [11; 12].

В классическом виде зависимость между прогибом балки и реакцией основания представлена в модели Винклера, где реакция основания пропорциональна местному прогибу. Однако такая модель описывает грунт как набор независимых упругих элементов, что не отражает реального распределения деформаций, поскольку нагрузка, приложенная в одной точке, вызывает осадку в зоне, распространяющейся на значительное расстояние.

Для повышения точности описания был предложен ряд усовершенствованных моделей, в том числе модель Пастернака. Зависимость между давлением, передаваемым на грунт, и возникающей деформацией (осадкой) П.Л. Пастернак [2] предложил учитывать двумя коэффициентами постели c_1 и c_2 , где c_1 — коэффициент сжатия, а c_2 — коэффициент сдвига.

Для описания этих коэффициентов, можно принять формулы

$$c_1 = \frac{E_{гр}}{H_c (1 - 2m_{гр}^2)};$$

$$c_2 = \frac{c_1 H_c^2 (1 - 2m_{гр}^2)}{6(1 + m_{гр})}, \quad (1)$$

где $E_{гр}$ — модуль деформации грунта; H_c — толщина массива слоев; $m_{гр}$ — усредненный коэффициент Пуассона.

В [8] отмечается, что c_2 должен быть больше c_1 .

Например, для пылевато-глинистого грунта $H_c = 18,1$ м; $E_{гр} = 9806,65$ кН/м², $m_{гр} = 0,35$ и тогда $c_1 = 0,717$ МПа/м, $c_2 = 29$ МПа·м.

Для грунтов с нелинейным поведением (например, слабых или водонасыщенных) рекомендуется использовать нелинейные модели или численные методы (например, метод конечных элементов), чтобы учесть изменение коэффициента податливости в зависимости от прогиба. Аналогичные задачи для нелинейных и неоднородных оснований в современных работах решаются с использованием конечно-элементных, вариационных и редуцированных подходов [16–18].

Теперь рассмотрим случай, когда $k(x)$ зависит нелинейно от w :

$$k(x) = \left(R - \frac{R^2 w}{P + R w} \right) = R - \frac{R^2 w + P R - P R}{P + R w} = R - R + \frac{P R}{P + R w} = \frac{P R}{P + R w}, \quad (2)$$

где R — начальное значение коэффициента податливости грунта; P — асимптотическое давление под подошвой фундамента.

3. Деформирование балки, лежащей на упругом основании при различных вариантах коэффициента постели

3.1. Вариант коэффициента постели Винклера

Рассмотрим решение практических задач геомеханики. Рассмотрим балку, лежащую на упругом основании и находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки q . Функционал полной потенциальной энергии деформации балки имеет вид

$$E_s = \frac{1}{2} \int [EI(w'')^2 + k(x)w^2 - 2qw] dx. \quad (3)$$

Важным частным случаем является равенство $k(x) = \text{const}$, но в ряде задач требуется рассматривать общий случай, когда $k(x)$ нелинейно зависит от $w(x)$.

Примем коэффициент податливости основания $k(x) = 1$.

Реальные размеры толщины и длины балки могут принимать разнообразные значения. Идеальной толщиной балки будет считаться та толщина, которая будет больше или равной $1/20$ части ее размеров в длину. Нагрузка q может также принимать различные значения.

Рассмотрим железобетонную балку толщиной $h = 0,1$ м, длиной $l = 10$ м, жестко закрепленная на концах, находящаяся под действием равномерно распределенной нагрузки $q = 0,1$ МПа.

К функционалу

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^l [EI(w'')^2 + 1w^2 - 2qw] dx, \quad (4)$$

применим метод Ритца при аппроксимации

$$w(x) = w_1 f(x),$$

где при жестком защемлении аппроксимирующая функция при $x = 0$ и $x = 10$

$$f(x) = (10 - x)^2 x^2.$$

В соответствии с методом Ритца для нахождения w_1 имеем уравнение

$$\frac{dE_s}{dw_1} = \int_0^l [EIw_1(f'')^2 + w_1 f^2 - qf] dx = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$a_1 = \int_0^l [EI(f'')^2 + f^2] dx, a_2 = \int_0^l f dx, \quad (6)$$

заготовим коэффициенты

$$\int_0^{10} (f'')^2 dx = 10^5 \cdot 0,8, \quad \int_0^{10} f dx = \frac{10^5}{30}, \quad \int_0^{10} f^2 dx = 10^5 \cdot 15,8.$$

В данном случае, когда $k(x) = 1$, уравнение примет вид

$$a_1 w_1 - a_2 q = 0, \quad (7)$$

где $q = 0,1$ МПа

$$a_1 = 10^5 \cdot 17,8, \quad a_2 q = 10^5 \cdot 3,3333 \cdot 10^{-3}.$$

Следовательно, $w_1 = 0,183 \cdot 10^{-3}$, и $w(5) = 0,117$ м.

Подстановка выбранной аппроксимации в функционал приводят к алгебраическому уравнению, позволяющему определить величину максимального прогиба балки.

3.2. Вариант двух коэффициентов постели

Рассмотрим случай, когда податливость грунта нагрузкам характеризуется двумя коэффициентами постели c_1 и c_2 . В этом случае функционал полной потенциальной энергии деформации системы будет иметь вид

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(w'')^2 + c_2(w')^2 + c_1w^2 - 2qw] dx, \quad (8)$$

где $c_1 = 0,717$ МПа/м, $c_2 = 29$ МПа·м.

В качестве примера рассмотрим железобетонную балку ($E = 3 \cdot 10^4$ МПа) длиной $L = 10$ м, толщиной $h = 0,1$ м, жестко закрепленную на концах и находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = 0,1$ МПа.

К функционалу (8) применим метод Рунца при аппроксимации $w(x)$ в виде

$$w(x) = w_1 f(x),$$

где при жестком защемлении при $x = 0$ и $x = 10$

$$f(x) = (10 - x)^2 x^2.$$

В соответствии с методом Рунца для нахождения w_1 получим одно алгебраическое уравнение

$$\frac{dE_s}{dw_1} = \frac{1}{2} \int_0^L [2EIw_1(f'')^2 + 2c_2w_1(f')^2 + 2c_1w_1f^2 - 2qf] dx = 0. \quad (9)$$

Введем обозначения

$$a_1 = \int_0^{10} w_1(f'')^2 dx; \quad a_2 = \int_0^{10} f^2 dx;$$

$$a_3 = \int_0^{10} (f')^2 dx; \quad a_4 = \int_0^{10} f dx.$$

Теперь уравнение примет вид

$$w_1(EIa_1 + c_1a_2 + c_2a_3) = qa_4, \quad (10)$$

в данном случае

$$a_1 = 0,8 \cdot 10^5, \quad a_2 = 15,8 \cdot 10^5,$$

$$a_3 = 1,9 \cdot 10^5, \quad a_4 = \frac{10^5}{30}.$$

Следовательно,

$$w_1 = 0,0487 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad w(5) = 0,03 \text{ м}.$$

Сравнение результатов расчета по моделям Винклера и Пастернака показывает, что учет сдвиговых деформаций приводит к меньшим значениям прогиба и более плавному распределению реакций по длине балки.

Теперь рассмотрим случай, когда балка при $x = 0$ закреплена жестко, а при $x = 10$ м свободно. В этом случае аппроксимирующая функция будет иметь вид

$$f_1(x) = \frac{x^4}{1200} - \frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{2}.$$

Посчитаем необходимые коэффициенты для дальнейшего удобства:

$$a_1 = \int_0^{10} (f_1'')^2 dx = 2; \quad a_2 = \int_0^{10} f_1'^2 dx = 1604,938;$$

$$a_3 = \int_0^{10} (f_1')^2 dx = 71,429; \quad a_4 = \int_0^{10} f_1 dx = 100.$$

Уравнение (10) примет вид

$$w_1 3227,1815 = 10,$$

откуда $w_1 = 0,0030986$, $w(5) = 0,0274$ м, $w(10) = 0,0775$ м.

Прогиб $w(10)$ больше допустимого значения, соответственно необходимо увеличить толщину балки, применяя метод продолжения решения по параметру H .

3.3. Вариант коэффициента постели, нелинейно зависящий от прогиба

Рассмотрим вариант коэффициента постели, нелинейно зависящий от прогиба $w(x)$, который будет учитывать нелинейно-упругие деформации грунта. В этом случае функционал полной потенциальной энергии деформации балки примет вид

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI(w'')^2 + \frac{PR}{P+Rw} w^2 - 2qw \right] dx. \quad (11)$$

Приведем, используя метод продолжения решения по параметру q , функционал к квадратичному, т.е. проведем линейризацию задачи на уровне функционала:

$$\overline{E}_s = \frac{\partial E_s}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial E_s}{\partial q} \Delta q = \frac{1}{2} \int_0^L \left[2EIw'' \Delta w'' + \frac{2PRw(P+Rw-PR^2w^2)}{(P+Rw)^2} \Delta w - 2q\Delta w - 2\Delta qw \right] dx.$$

Введем обозначения:

$$2\phi_1(w)\Delta w = 2 \left(\frac{PRw}{P+Rw} - \frac{0,5PR^2w}{(P+Rw)^2} \right) \Delta w. \quad (12)$$

Квадратичный функционал запишем в виде

$$\overline{E}_s = \int_0^L [EIw'' \Delta w'' + \phi_1(w)\Delta w - q\Delta w - \Delta qw] dx. \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим железобетонную балку ($E = 3 \cdot 10^4$ МПа), длиной $L = 10$ м, толщиной $h = 0,1$ м, жестко закрепленную на концах, и находящуюся под действием равномерно-распределенной нагрузки интенсивностью $q = 0,1$ МПа.

Применим для минимизации функционала (12) метод Ритца:

$$w(x) = w_1 f(x), \quad \Delta w = \Delta w_1 f(x),$$

где при жестком защемлении при $x = 0$ и $x = 10$:

$$f(x) = (10-x)^2 x^2.$$

В соответствии с методом Ритца для нахождения w_1 получим уравнение

$$\frac{dE_s}{dw_1} = \int_0^L \left[EI \Delta w_1 (f(x))''^2 + \frac{d\phi_1(w_1)}{dw_1} \Delta w_1 f(x) - \Delta q f(x) \right] dx = 0. \quad (14)$$

$$\frac{d\phi_1(w_1)}{dw_1} = \frac{PRf(x)}{P + R w_1 f(x)} - \frac{2PR^2 w_1 f^2(x)}{(P + R w_1 f(x))^2} + \frac{PR^3 w_1^2 f^3(x)}{(P + R w_1 f(x))^3}.$$

Введем обозначения:

$$a_1 = \int_0^{10} (f(x))''^2 dx; \quad a_{21} = \int_0^{10} \frac{PRf(x)^2}{P + R w_1 f(x)} dx;$$

$$a_{22} = \int_0^{10} \frac{2PR^2 w_1 f(x)^3}{(P + R w_1 f(x))^2} dx; \quad a_{23} = \int_0^{10} \frac{PR^3 w_1^2 f(x)^4}{(P + R w_1 f(x))^3} dx;$$

$$a_2 = a_{21} - a_{22} + a_{23}; \quad a_3 = \int_0^{10} f(x) dx.$$

Уравнение (13) теперь можно записать в виде $EI a_1 \Delta w_1 + \Delta w_1 a_2 - \Delta q a_3 = 0$ при $q = 0,1$ МПа, $\Delta q = 0,01$ МПа, $w_{1,0} = 0$ и $a_{22} = a_{23} = 0$, $a_{21} = \int_0^{10} \frac{PRf^2(x)}{P} dx$.

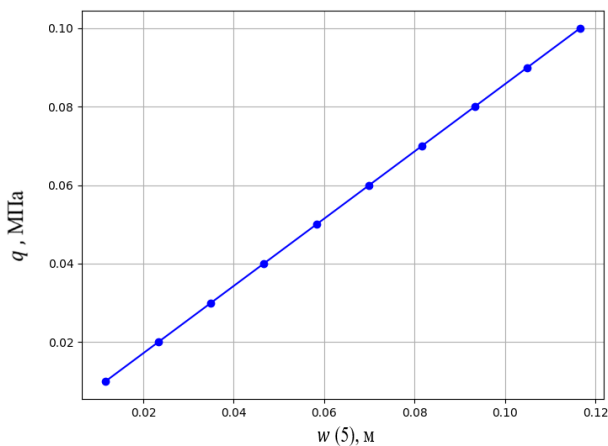
Далее $w_{1i} = w_{1i-1} + \Delta w_{1i}$, $q_i = q_{i-1} + \Delta q$, $\Delta w_{1i} = \frac{\Delta q a_3}{EI a_1 + a_2}$, $R = 0,3$ МПа, $P = 0,2$ МПа·м.

Результаты расчетов показывают, что с ростом нагрузки прогибы увеличиваются нелинейно, что особенно заметно при приближении к пределу несущей способности основания.

Ниже представлены графики прогиба $w(5)$ в зависимости от нагрузки q (рис.).

Экспериментально рассчитанные прогибы (табл.) подтверждают этот вывод: при увеличении нагрузки более чем в 5–6 раз рост прогибов становится значительно ускоренным, что необходимо учитывать при проектировании.

Таким образом, при $q = 0,1$ МПа наибольший прогиб составит $w(5) = 0,442$ м, что превышает допустимый предел для железобетонной балки.



Зависимость коэффициента w_{max} от значения нагружения q
Источник: выполнено М.Р. Горкиной.

Dependence of the coefficient w_{max} on the loading value q
Source: made by M.R. Gorkina.

Значения прогибов для балки, лежащей на упругом основании, при нелинейно-упругом деформировании
Deflection values for a beam lying on an elastic foundation under nonlinear elastic deformation

q , МПа / МПа	$\Delta w_1 \cdot 10^{-3}$	$w_1 \cdot 10^{-3}$	$w(5)$, м
0,01	0,049	0,049	0,049
0,02	0,053	0,103	0,065
0,03	0,058	0,160	0,099
0,04	0,062	0,223	0,139
0,05	0,067	0,289	0,181
0,06	0,072	0,362	0,226
0,07	0,078	0,440	0,275
0,08	0,083	0,524	0,327
0,09	0,089	0,613	0,383
0,1	0,095	0,708	0,442

Источник: выполнено М.Р. Горкиной / Source: made by M. R. Gorkina.

4. Заключение

1. Установлено влияние расчетной модели упругого основания на деформированное состояние балки. Показано, что линейная модель Винклера обладает ограниченной точностью и может применяться преимущественно при малых деформациях и однородном основании. Модель Пастернака обеспечивает более адекватное описание работы грунтового массива, поскольку учитывает не только вертикальную податливость, но и сдвиговую жесткость основания, что позволяет получить более корректную оценку прогибов балки.

2. Показана необходимость учета нелинейной работы основания при расчете балок на слабых и повышенно податливых грунтах. Установлено, что при увеличении нагрузки прогибы балки возрастают нелинейно и в отдельных случаях могут превышать допустимые значения. Это подтверждает необходимость применения моделей с переменным коэффициентом постели, зависящим от прогиба, а также использования численных методов решения для более точного описания взаимодействия системы «балка — основание».

3. Обоснована практическая значимость предложенного подхода для расчета конструкций, взаимодействующих с грунтовым основанием. Полученные результаты показывают, что корректный выбор модели основания и учет условий закрепления балки позволяют более достоверно оценивать ее прогибы и своевременно принимать конструктивные решения, например увеличивать толщину балки или изменять параметры расчетной схемы. Дальнейшее развитие исследования может быть связано с учетом неоднородности основания, динамических воздействий и оптимизацией геометрических параметров конструкции.

Работа вносит вклад в развитие методов расчета балок на упругом основании и может быть полезна для инженерных приложений в области строительства и механики грунтов.

Список литературы

1. Винклер Э. Теория упругости и сопротивления материалов / пер. Н.А. Сыкалова. СПб. : Тип. ИАН, 1885. 348 с.
2. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании. Москва : Госстройиздат, 1954. 56 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. 1 : Упруго-пластические деформации. Москва : ОГИЗ, 1948. 376 с.
4. Карташов Ю.М., Матвеев Б.В., Михеев Г.В., Фадеев А.Б. Прочность и деформируемость горных пород / под общ. ред. А.Б. Фадеева. Москва : Недра, 1979. 269 с.
5. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. Москва : Недра, 1987. 221 с. URL: <https://djvu.online/file/lesqTrp1ajTS3> (accessed: 13.09.2025)
6. Шашкин А.Г. Вязко-упругопластическая модель поведения глинистого грунта // Развитие городов и геотехническое строительство. 2011. № 2. С. 1–32. URL: <http://urban-development.ru/2011/7.pdf> (дата обращения: 13.09.2025)
7. Парамонов В.Н. Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники. СПб. : Геореконструкция, 2012. 262 с. ISBN 978-5-9902005-4-8 EDN: AGFUXX
8. Улицкий В.М., Шашкин А.Г., Шашкин К.Г. Гид по геотехнике (путеводитель по основаниям, фундаментам и подземным сооружениям). СПб : Геореконструкция, 2012. 284 с. ISBN 978-5-9902005-3-1 EDN: TDIORF
9. Lamprea-Pineda A.C., Connolly D.P., Hussein M.F.M. Beams on elastic foundations — A review of railway applications and solutions // *Transportation Geotechnics*. 2022. Vol. 33. Article no. 100696. <https://doi.org/10.1016/j.trgeo.2021.100696> EDN: TDIORF
10. Мангушев Р.А. Применение современных конструктивных и технологических методов для устройства подземного пространства в г. Санкт-Петербурге // *Геотехника*. 2010. № 2. С. 58–67. EDN: OWFRMJ
11. Terzaghi K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction // *Géotechnique*. 1955. Vol. 5. No. 4. P. 297–326. <https://doi.org/10.1680/geot.1955.5.4.297>
12. Daloglu A.T., Vallabhan C.V.G. Values of k for slab on Winkler foundation // *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2000. Vol. 126. No. 5. P. 463–471. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2000\)126:5\(463\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2000)126:5(463))
13. Wstawska I., Magnucki K., Kędzia P. Stability of three-layered beam on elastic foundation // *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 175. Article no. 109208. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109208> EDN: XGKUBX
14. Karagiozova D., Yu T.X. Long beam on Winkler-type elastic foundation under a localized rectangular pressure pulse // *International Journal of Impact Engineering*. 2024. Vol. 187. Article no. 104921. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2024.104921> EDN: QHXTNW

15. Chen Z., Cheng Q., Jin X., Borodich F.M. Dynamic stiffness for a Levinson beam embedded within a Pasternak medium subjected to axial load at both ends // *Buildings*. 2024. Vol. 14. No. 12. Article no. 4008. <https://doi.org/10.3390/buildings14124008> EDN: EMCBQF
16. Previati G., Ballo F., Stabile P. Beams on elastic foundation: A variable reduction approach for nonlinear contact problems // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2025. Vol. 111. Article no. 105514. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105514> EDN: LOAQTP
17. Previati G., Stabile P., Ballo F. A variable reduction approach for microbeams on elastic foundation // *Sensors*. 2025. Vol. 25. No. 10. Article no. 3034. <https://doi.org/10.3390/s25103034> EDN: MEAYSN
18. Marinca V., Herisanu N., Marinca B. Approximate solution to nonlinear dynamics of a piezoelectric energy harvesting device subject to mechanical impact and Winkler-Pasternak foundation // *Materials*. 2025. Vol. 18. No. 7. Article no. 1502. <https://doi.org/10.3390/ma18071502> EDN: FWOOVA

References

1. Winkler E. *Theory of elasticity and strength of materials*. Prague; 1867.
2. Pasternak PL. *Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic base*. Moscow: Gosstroyizdat Publ.; 1954. (In Russ.)
3. Ilyushin AA. *Plasticity. Part 1: Elastic-plastic deformations*. Moscow: OGIZ Publ.; 1948. (In Russ.)
4. Kartashov YuM, Matveev BV, Mikheev GV, Fadeev AB. *Strength and deformability of rock masses*. Fadeev AB, editor. Moscow: Nedra Publ.; 1979. (In Russ.)
5. Fadeev AB. *Finite element method in geomechanics*. Moscow: Nedra; 1987. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/lesqTpflajTS3> (accessed: 13.09.2025).
6. Shashkin AG. Visco-elastoplastic model of clay soil behavior. *Urban Development and Geotechnical Construction*. 2011;(2):32. (In Russ.) Available from: <http://urban-development.ru/2011/7.pdf> (accessed: 13.09.2025)
7. Paramonov VN. *Finite element method for solving nonlinear problems in geotechnics*. Saint Petersburg: Georeconstruction Publ.; 2012. (In Russ.) ISBN 978-5-9902005-4-8 EDN: AGFUXX
8. Ulitsky VM, Shashkin AG, Shashkin KG. *Geotechnical guide (guide to soils, foundations and underground structures)*. Saint Petersburg: Georeconstruction Publ.; 2010. (In Russ.) ISBN 978-5-9902005-3-1 EDN: TDIORF
9. Lamprea-Pineda AC, Connolly DP, Hussein MFM. Beams on elastic foundations — A review of railway applications and solutions. *Transportation Geotechnics*. 2022;33:100696. <https://doi.org/10.1016/j.trgeo.2021.100696> EDN: TDIORF
10. Mangushev RA. Use of modern constructional and technological methods for development of the underground space in St. Petersburg. *Geotechnics*. 2010;(2):58–67. (In Russ.) EDN: OWFRMJ
11. Terzaghi K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Géotechnique*. 1955;5(4):297–326. <https://doi.org/10.1680/geot.1955.5.4.297>
12. Daloglu AT, Vallabhan CVG. Values of k for slab on Winkler foundation. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2000;126(5):463–471. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2000\)126:5\(463\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2000)126:5(463))
13. Wstawska I, Magnucki K, Kędzia P. Stability of three-layered beam on elastic foundation. *Thin-Walled Structures*. 2022;175:109208. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109208> EDN: XGKUBX
14. Karagiozova D, Yu TX. Long beam on Winkler-type elastic foundation under a localized rectangular pressure pulse. *International Journal of Impact Engineering*. 2024;187:104921. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2024.104921> EDN: QHXTNW
15. Chen Z, Cheng Q, Jin X, Borodich FM. Dynamic stiffness for a Levinson beam embedded within a Pasternak medium subjected to axial load at both ends. *Buildings*. 2024;14(12):4008. <https://doi.org/10.3390/buildings14124008> EDN: EMCBQF
16. Previati G, Ballo F, Stabile P. Beams on elastic foundation: A variable reduction approach for nonlinear contact problems. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2025;111:105514. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105514> EDN: LOAQTP
17. Previati G, Stabile P, Ballo F. A variable reduction approach for microbeams on elastic foundation. *Sensors*. 2025;25(10):3034. <https://doi.org/10.3390/s25103034> EDN: MEAYSN
18. Marinca V, Herisanu N, Marinca B. Approximate solution to nonlinear dynamics of a piezoelectric energy harvesting device subject to mechanical impact and Winkler-Pasternak foundation. *Materials*. 2025;18(7):1502. <https://doi.org/10.3390/ma18071502> EDN: FWOOVA

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-2-138-151

EDN: KCJJXB

Research article / Научная статья

Comparative Analysis of Calculation of a Plate of Curvilinear Trapezoidal Plan using Numerical Methods

Vyacheslav N. Ivanov^{ID}, Evgenia M. Tupikova^{ID}, Marina I. Rynkovskaya^{✉ID}

RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ rynkovskaya-mi@rudn.ru

Received: November 30, 2025

Revised: February 12, 2026

Accepted: February 25, 2026

Abstract. Roofs in the form of plates and shells of complex curvilinear plan are common structural solutions in architecture. Such structures have a number of advantages. The mid-surface of shells and plates of curvilinear trapezoidal plan is constructed using parametric and vector equations and has a number of special aspects to consider when calculating their stress-strain state. For structures of this shape, no exact analytical solution has been obtained, but it is possible to obtain a numerical solution, for example, by the finite element method and the variational-difference method. In such a situation, for verification of calculations, comparing the results obtained using different numerical procedures is useful and relevant. A comparative analysis of the results of calculating the stress-strain state of a plate curvilinear in plan, obtained by the methods mentioned above, was conducted. In the literature, the topic of calculating plates and shells of curvilinear trapezoidal plan is insufficiently developed. The aim of the study is to obtain data on the calculation of the stress-strain state of a plate of curvilinear trapezoidal plan, as well as to assess the applicability and specifics of the two methods in calculating such structures. To accomplish the tasks, the following software was used: ANSYS APDL software for calculation by the finite element method, and the author-developed SHELLVRM program for calculation by the variational-difference method. The parameters of the stress-strain state of a plate of curvilinear trapezoidal plan have been obtained and analyzed, verification of the obtained results has been carried out, recommendations for implementing both calculation methods in the practice of structural analysis have been given, and computational difficulties and special aspects of both methods have been identified.

Keywords: thin elastic plate, node mesh, VDM, FEM, stress parameters, displacements

Authors' contribution: *Ivanov V.N.* — supervision, conceptualization, validation; *Tupikova E.M.* — software, visualization, text draft; *Rynkovskaya M.I.* — study management, data processing, text writing, review and editing. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

For citation: Ivanov VN, Tupikova EM, Rynkovskaya MI. Comparative analysis of calculation of a plate of curvilinear trapezoidal plan using numerical methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):138–151. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-138-151> EDN: KCJJXB

Vyacheslav N. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Engineering Academy, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 3110-9909, ORCID: 0000-0003-4023-156X; e-mail: i.v.ivn@mail.ru

Evgenia M. Tupikova, PhD, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5501-6984, ORCID: 0000-0001-8742-3521; e-mail: emelian-off@yandex.ru

Marina I. Rynkovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9184-7432; ORCID: 0000-0003-2206-2563; e-mail: rynkovskaya-mi@rudn.ru

© Ivanov V.N., Tupikova E.M., Rynkovskaya M.I., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Сравнительный анализ расчета пластины на криволинейно-трапециевидном плане численными методами

В.Н. Иванов[✉], Е.М. Тупикова[✉], М.И. Рынковская[✉]

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация
✉ gupkovskaya-mi@rudn.ru

Поступила в редакцию: 30 ноября 2025 г.

Доработана: 12 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 25 февраля 2026 г.

Аннотация. Покрытия в виде пластин и оболочек на сложных криволинейных планах являются распространенными конструктивными решениями в архитектуре. Такие конструкции имеют ряд преимуществ. Срединные поверхности оболочек и пластин на криволинейно-трапециевидных планах строятся при помощи параметрических и векторных уравнений и имеют ряд особенностей при расчете их напряженно-деформированного состояния. Для конструкций такой формы не получено аналитического точного решения, но возможно получить численное решение, например, методом конечных элементов и вариационно-разностным методом. В такой ситуации для верификации расчетов сравнение результатов, полученных при помощи разных численных процедур, полезно и актуально. Проведен сравнительный анализ результатов расчета напряженно-деформированного состояния пластины на криволинейном плане, полученных перечисленными методами. В литературе недостаточно разработана тема расчета пластин и оболочек на криволинейно-трапециевидном плане. Цель исследования — получить данные расчета напряженно-деформированного состояния пластины на криволинейно-трапециевидном плане, а также оценить применимость и особенности двух методов при расчете подобных конструкций. Для выполнения поставленных задач применено программное обеспечение: программный пакет ANSYS APDL для расчета методом конечных элементов, авторская программа SHELLVRM для расчета вариационно-разностным. Получены и проанализированы параметры напряженно-деформированного состояния пластины на криволинейно-трапециевидном плане, произведена верификация полученных результатов, даны рекомендации по внедрению обоих способов расчета в практику анализа конструкций, выявлены вычислительные трудности и особенности обоих методов.

Ключевые слова: тонкая упругая пластина, сетка узлов, ВРМ, МКЭ, внутренние силовые факторы, перемещения

Вклад авторов: *Иванов В.Н.* — научное руководство, концепция, валидация; *Тупикова Е.М.* — программное обеспечение, графическое оформление, подготовка текста статьи; *Рынковская М.И.* — проведение исследования, обработка данных, написание текста, рецензирование и редактирование. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: *Иванов В.Н., Тупикова Е.М., Рынковская М.И.* Сравнительный анализ расчета пластины на криволинейно-трапециевидном плане численными методами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 138–151. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-138-151> EDN: KСJХВ

1. Introduction

In architecture, shell structures in the form of various analytical surfaces are often used to cover large spans and complex ground plans [1]. The diversity of analytical surface shapes is illustrated, for example, in encyclopedia [2]. The book presents basic equations for defining surfaces, as well as a brief overview of their distinctive characteristics. S.N. Krivoschapko authored a series of seminal works on the systematization of analytical surfaces [1–3]. This topic also attracts the attention of researchers of thin-walled structures [4; 5]. Among all analytical surfaces, researchers identify certain classes that are particularly important for practical use, such as ruled and developable surfaces [6–8], umbrella surfaces [9], and a number of other surface types for application in construction [10–14]. Studies [15; 16] are devoted to the selection of optimal surface shapes of building structures in terms of strength properties. Modeling of surfaces based on two-dimensional curves is discussed in [17; 18]. Studies [19–21] are devoted to geometric modeling, while the specific area of the geometry and modeling of ellipsoidal ring surfaces has been developed by author V.N. Ivanov in [22; 23]. In most cases, such structures are analyzed using the finite element method [5; 24–27]; however, there are also studies based on other structural analysis methods, such as analytical or semi-analytical [28–31], variational difference [32–33], or a combination of methods [34–38]. Interest in the analysis of plates of ellipsoidal ring shape in plan remains strong in the studies of international authors as

well. A. Merneedi et al. examined free vibrations of an elliptical plate [39], S. Çeribaşı performed static and dynamic analyses of thin plates made of functionally graded materials subjected to a uniformly distributed load [40]. However, most of the research is conducted using software based on the finite element method, such as Comsol [41].

It should be noted that no classical analytical solution has been obtained for an ellipsoidal ring plate. An analytical solution to the problem of an ellipsoidal plate in bending was derived by V.I. Pogorelov,¹ while a solution for a circular ring plate was obtained by S.P. Timoshenko [42]. Ellipsoidal ring plates and shells can be constructed in a curvilinear coordinate system to best represent their internal geometry.

To obtain an orthogonal curvilinear coordinate system, an arbitrary plane base curve of the form $\mathbf{r}_n(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j}$ and a system of lines orthogonal to it are adopted [22] (Figure 1). Then, the equation of the coordinate system can then be written as:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_n(u) + v\mathbf{e}(u), \quad (1)$$

where $\mathbf{e}(u) = -\mathbf{v}$; \mathbf{v} is the normal line to the base curve; v is the coordinate of the generator lines along the normal to the base curve.

```
/*AFUN,DEG
*SET,a,3
*SET,b,2
*SET,dt,1
*DO,t,0,90,dt
k,(t*100+1),a*sin(t),b*cos(t),0
k,(t*200+2),(a+2)*sin(t),(b+2)*cos(t),0
l,(t*100+1),(t*200+2)
*Enddo
/
```

Listing 1. Macro for creating guide points and lines

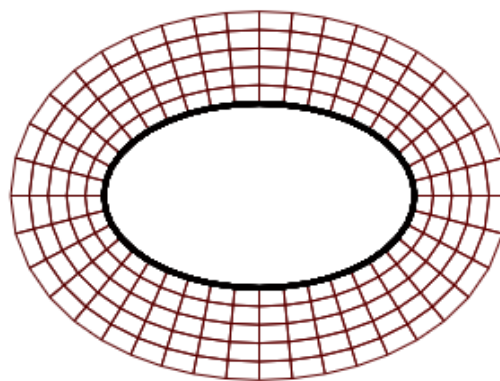


Figure 1. Ellipsoidal ring plate

Source: made by E.M. Tupikova.

The considered orthogonal curvilinear coordinate system will consist of a system of equidistant curves, i.e., curves parallel to the base curve, and a system of lines orthogonal to them, and may be referred to as pseudo-polar. If an open curve is chosen as the base curve, the result is a curvilinear trapezoidal region. If the base curve is closed, e.g., an ellipse, the result is a closed oval region.

From the perspective of coordinate system geometry, the following characteristics can be identified [22]:

$$\mathbf{r}_u = s'(1 - k_n v)\boldsymbol{\tau} = A\boldsymbol{\tau};$$

$$A = s'(1 - k_n v);$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{v};$$

$$B = 1, \quad (2)$$

where s' is the coefficient of the length of the base curve; k_o is the curvature of the base curve.

¹ Pogorelov VI. *Strength and stability of thin-walled structures*. Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature; 1963. 635 p.

If the vertical coordinate function $z(u, v)$ is defined, the equation of the surface of curvilinear trapezoidal plan can be obtained in the following form [22]:

$$\rho(u, v) = r_n(u) + v e(u) + Z(u, v) k. \quad (3)$$

If the vertical coordinate function $Z(u, v)$ is arbitrary, then the coordinate system of surfaces of curvilinear trapezoidal plan will not coincide with the lines of curvature of the surface, except when $Z = z(v)$, that is, the case when a constant curve moves in the normal plane of the base curve, and the surface will belong to the class of Monge surfaces [20; 33].

The coefficients of the first quadratic form of the coordinate system under consideration can be taken to be equal to the coefficients of the first quadratic form of the orthogonal coordinate system (2) [22; 23]. Then, the values of the curvatures of the surface system can be obtained from the formulas of differential geometry:

$$k_u = \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} - \frac{s' k_n}{A} \frac{\partial Z}{\partial v},$$

$$k_v = \frac{1}{A} \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}. \quad (4)$$

2. Materials and Methods

In the field of structural mechanics, the finite element method (FEM) is the predominant approach. It often serves as the uncontested foundation for all calculations of complex structures performed using certified software. Finite-element-based software such as SCAD, LIRA, ANSYS, SolidWorks, as well as their freely available alternatives, are universal tools for analyzing structures of virtually any shape designed by an architect. Such programs require significant computer resources and license support, and they present a number of challenges regarding usage, overcoming computational difficulties, and implementing the assumptions of the model. Most importantly, when using such software tools, the finite element mesh is critical, as the obtained results depend heavily on the generation of this mesh. Obviously, more accurate results can be obtained by using smaller finite elements (FEs), however, when dealing with complex shapes, the configuration of the finite elements (triangular or quadrilateral), the base points and lines on which the program constructs the nodes of the mesh, and the correspondence between the internal geometry of the structure or its element and the automatically generated mesh of FE nodes are also important.

Analyzing results in finite-element-based software for surfaces of complex geometry can be somewhat difficult or limited by the standard functionality available in the software for displaying displacements, strains, and stresses, for example, by the presence or absence of coordinate systems other than Cartesian, spherical, and cylindrical, the ability to use local systems, and the calculation of stresses or forces in directions characteristic of certain non-classical surfaces.

This paper presents a comparative analysis of the results obtained by two calculation methods applied to a plate of curvilinear trapezoidal plan — an ellipsoidal ring plate. The finite element analysis was performed using the ANSYS APDL software. Isoperimetric shell63 finite elements were employed.

It is assumed that the inner director ellipse of the considered ellipsoidal ring plate has dimensions $a = 3$ m, $b = 2$ m, and the width of the plate is 2 m (Figure 1). The plate is fixed along the outer contour. The plate is analysed under uniformly distributed load such as self-weight: $q = 1$ kN/m². The thickness of the plate $h = 0.1$ m, Young's modulus of the material $E = 3.5 \times 10^7$ kPa, Poisson's ratio $\nu = 0.15$.

To model the geometry of the structure, a macro is used that involves creating guide points and lines, followed by the generation of a surface based on the line frame (see Figure 1, Listing 1).

The model was then divided into finite elements (Figure 2). The ANSYS software supports both free automatic meshing and meshing mapped to guide points using quadrilateral elements. The latter approach was chosen, with the finite element size specified manually.

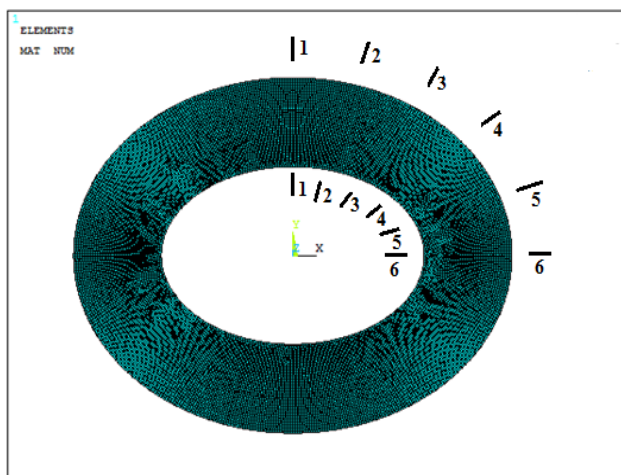


Figure 2. Model of the plate in ANSYS with characteristic cross-sections
Source: made by E.M. Tupikova.

When using automatic meshing with quadrilateral and triangular elements with element size of 0.05 m, the results show areas of questionable sharp stress jumps. However, when meshing with larger elements, up to 0.2 m, but with mapping to key points and constructed surface guide lines, the results appear more reliable.

For comparison with the finite-element solution, this study uses the solution presented in [43], obtained using the author-developed SHELLVRM program, which is based on the variational difference method (VDM). The program is compact and does not require significant computer resources, while the results exhibit accuracy comparable to that of multifunctional commercial software, as has already been demonstrated, for example, in [34–36].

3. Results and Discussion

This section of the article presents the results of the finite element analysis of the plate, as well as a comparison of these results with those obtained by the variational difference method; some of the data and figures are cited from [22]. The finite element analysis was performed in accordance with the linear Kirchhoff — Love theory, using the shell63 finite element type (four-node, quadrilateral shape) with the size of 0.2 m. The material properties are specified as linearly elastic, with Young's modulus $E = 3.5 \times 10^7$ kPa and Poisson's ratio $\nu = 0.15$. Boundary conditions: fixed outer contour; loading: self-weight $q = 1$ kN/m². Contour plots were obtained using the standard POST1 post-processor, diagrams along the specified cross-sections were constructed using the PATH function. Deflection, bending moment, and equivalent stress values were obtained. Figure 3 shows the combined deflection diagrams in the characteristic cross-sections of the plate.

The results are also presented in detail in the form of deflection graphs for characteristic sections 1–1 (Figure 4) and 6–6 (Figure 5) and contour plots of displacement (Figure 6) along the z-axis, as well as equivalent stress graphs in characteristic sections 1–1 (Figure 7) and 6–6 (Figure 8) and contour plots of equivalent stress (Figure 9). Figure 10 shows the deflections of the ellipsoidal ring plate obtained using the variational difference method of analysis in [43].

The graph of deflection in the cross-section along the major axis of the ellipse (Figure 4) has a shape similar to a parabola. The maximum deflection was 5 mm, which is in good agreement with the results obtained using VDM in [43].

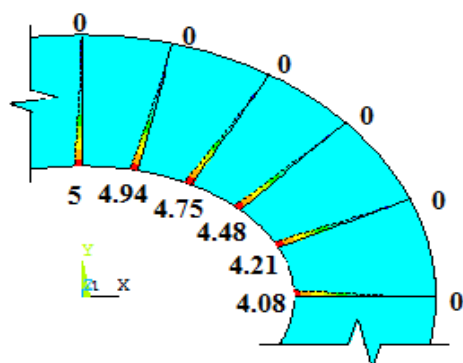


Figure 3. Combined deflection diagrams at characteristic cross-sections, mm
Source: made by E.M. Tupikova.

The graph of deflection in the cross-section along the minor axis of the ellipse (Figure 5) shows a maximum deflection of 4.2 mm, which also indicates close agreement with the calculation results from [43].

In Figure 6, which illustrates the deflection contour plot, it can be seen that, for this support arrangement (fixed outer edge), the largest deflections occur in the cross-sections passing through the minor axis of the ellipse.

The graphs of equivalent stress in characteristic sections 1–1 (Figure 7) and 6–6 (Figure 8) along the major and minor axes of the ellipse, respectively, indicate that the maximum stress values occur at the outer edge, and the minimum values

are at the inner edge of the long side of the plate, and the maximum difference in equivalent stress values occurs in the cross-section along the long side of the plate. At the same time, the zone of minimum equivalent stresses in the cross-section along the short side of the plate is shifted away from the inner edge compared to the zone of minimum stresses in the cross-section along the long side of the plate.

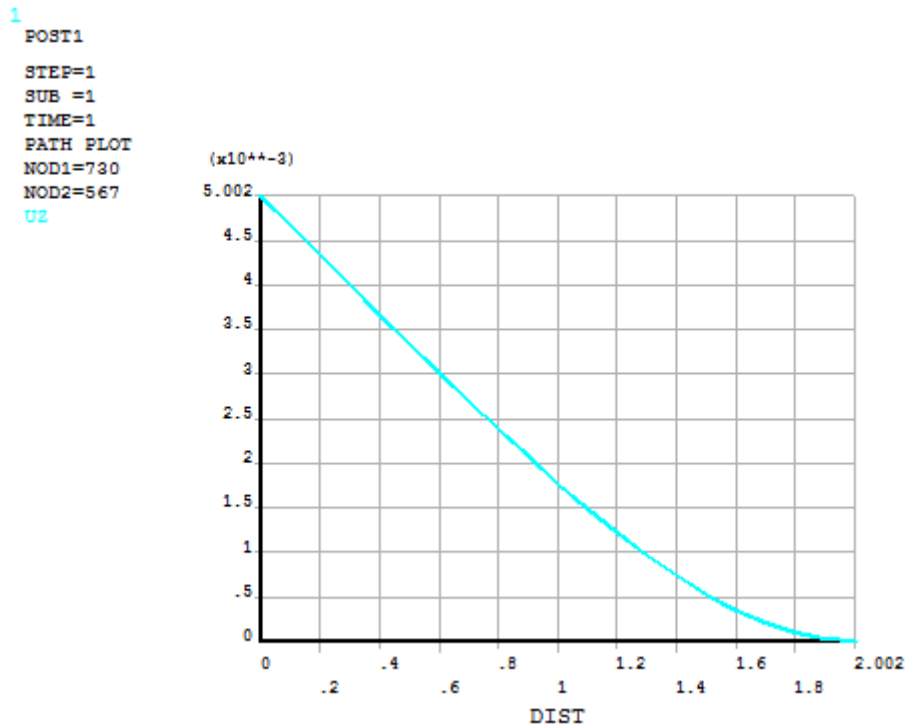


Figure 4. Graph of deflection u_z in characteristic section 1–1, m
Source: made by E.M. Tupikova.

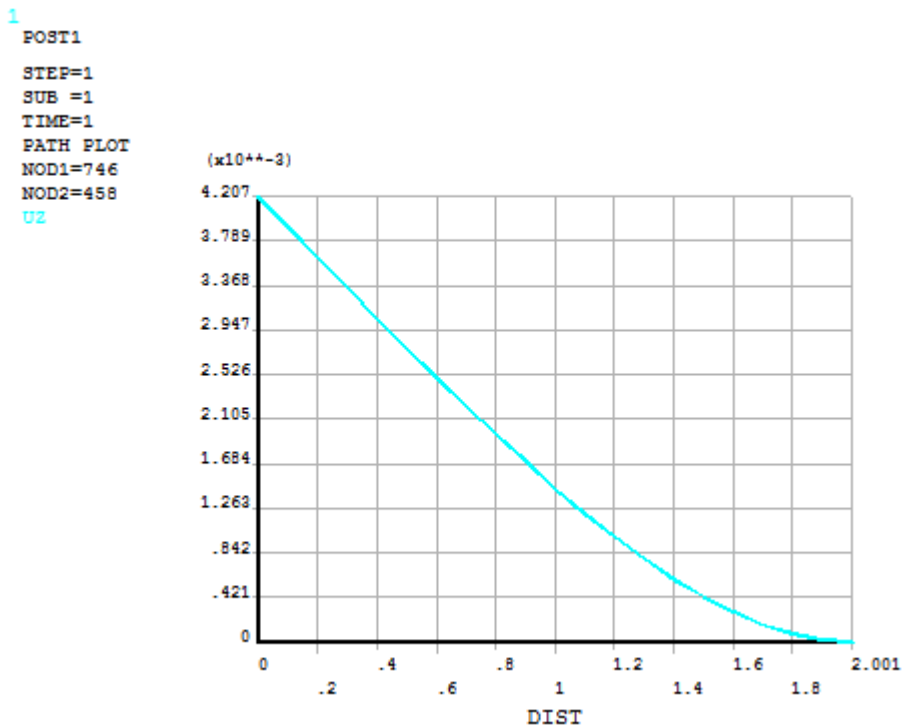


Figure 5. Graph of deflection u_z in characteristic section 6–6, m
Source: made by E.M. Tupikova.

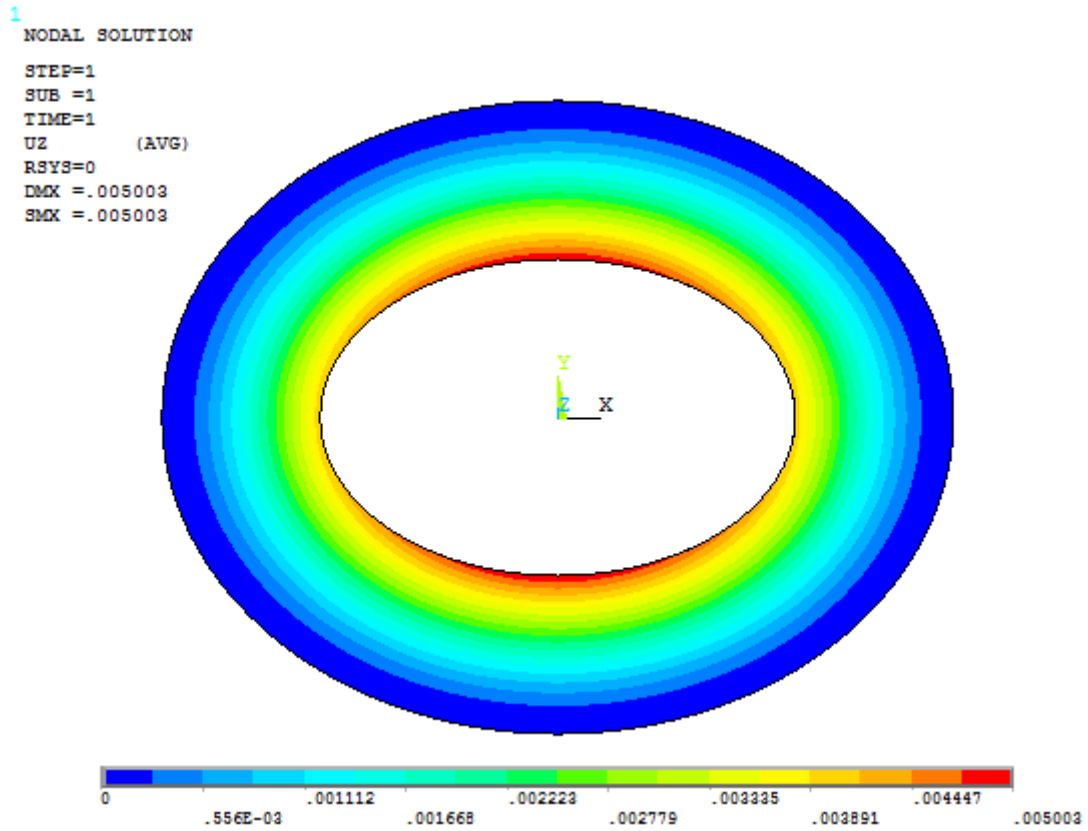


Figure 6. Contour plot of deflection u_z , m

Source: made by E.M. Tupikova.

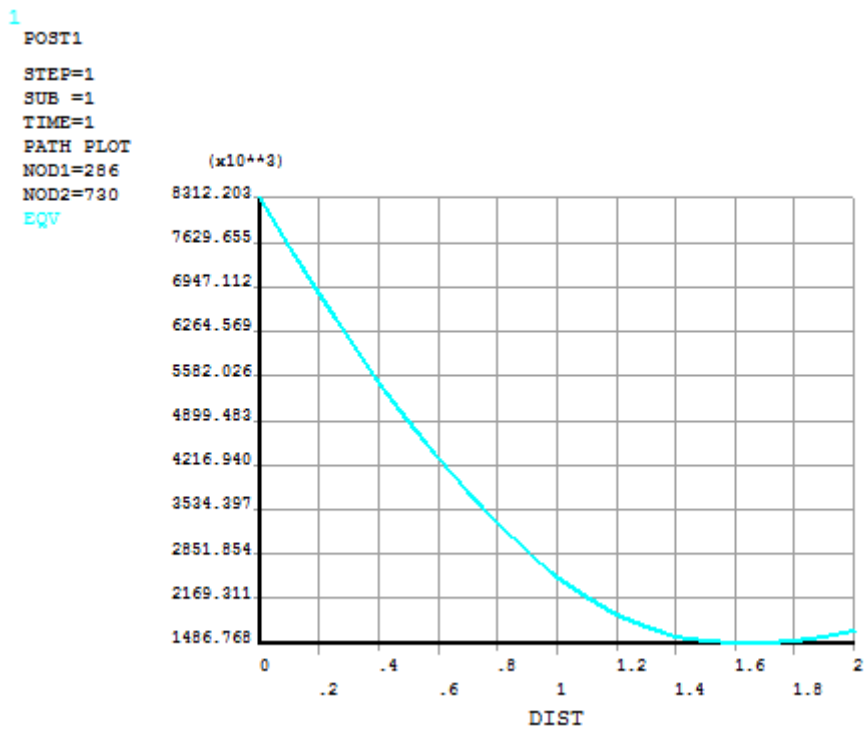


Figure 7. Graph of equivalent stress in section 1-1, N/m²

Source: made by E.M. Tupikova.

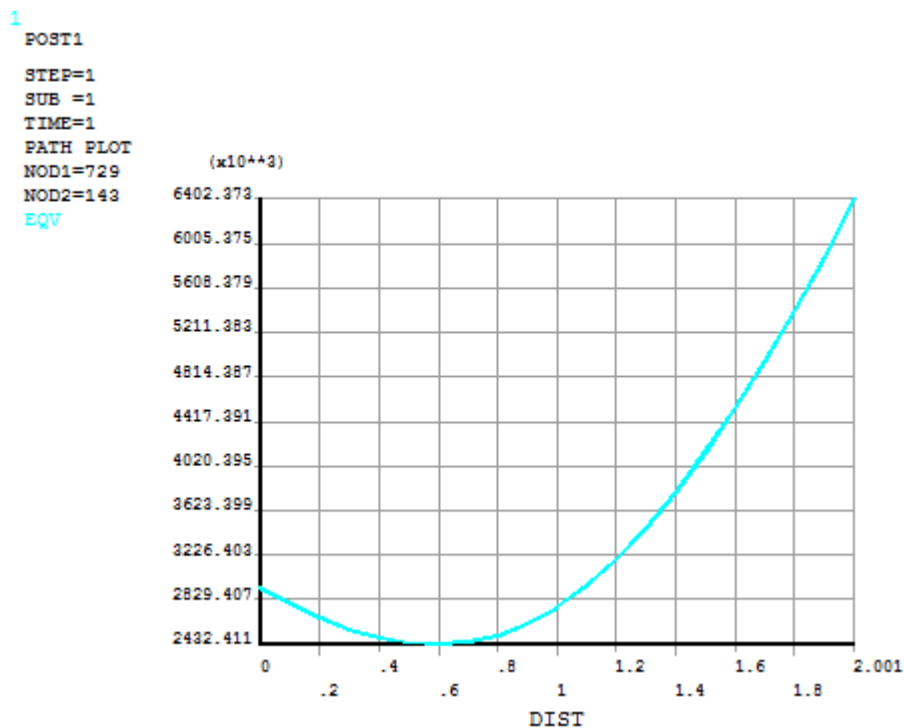


Figure 8. Graph of equivalent stress in section 6-6, N/m²

Source: made by E.M. Tupikova.

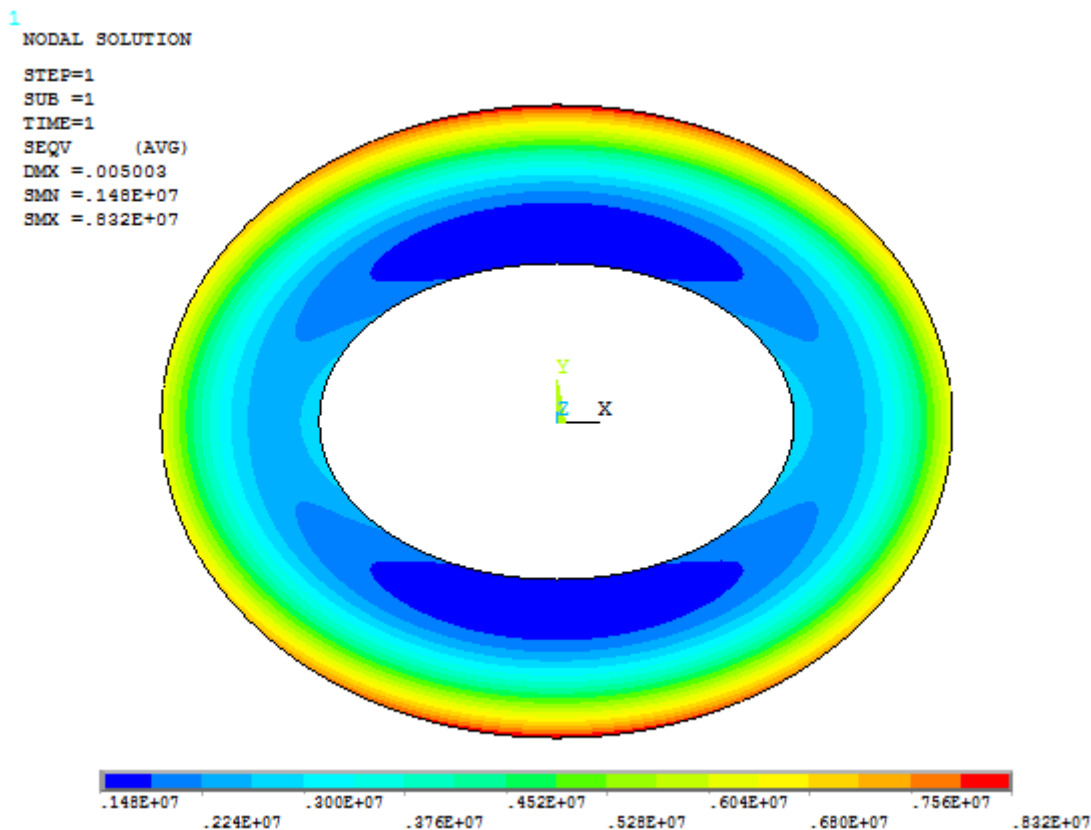


Figure 9. Contour plot of equivalent stress, N/m²

Source: made by E.M. Tupikova.

The von Mises equivalent stress (Figure 9) is calculated using standard tools of the software and characterizes the material behavior within the structure. Such data can be useful for preliminary assessment and selection of reinforcement. One can clearly see the areas of lowest stress (blue), the average background stress level (light blue and green), and the most heavily loaded, fixed outer edges (red and yellow). The model is analyzed for arbitrary reinforced concrete with linearly elastic characteristics. For a more detailed reinforcement design, these zones can serve as a rough guide.

The deflection values at characteristic cross-sections, obtained using the finite element method and the variational difference method, are presented in Table 1.

The bending moments at cross-sections 1–1 and 6–6, which are most suitable for the Cartesian coordinate system used in FEM programs, calculated using the two methods, are shown in Table 2.

Table 1. Deflections in characteristic cross-sections according to FEM and VDM

Section ID and analysis method	1–1	2–2	3–3	4–4	5–5	6–6
Deflection according to FEM (mm)	5.00	4.94	4.75	4.48	4.21	4.08
Deflection according to VDM (mm)	5.1	5.0	4.7	4.5	4.3	4.2

Source: made by E.M. Tupikova, M.I. Rynkovskaya.

Table 2. Bending moments in characteristic cross-sections according to FEM and VDM

Section ID and compared parameters	Section 1–1		Section 6–6	
	M_x , (N·m/m)	M_y , (N·m/m)	M_x , (N·m/m)	M_y , (N·m/m)
FEM	14660	2170	11255	1168
VDM	15100	1800	11700	2300

Source: made by E.M. Tupikova, M.I. Rynkovskaya.

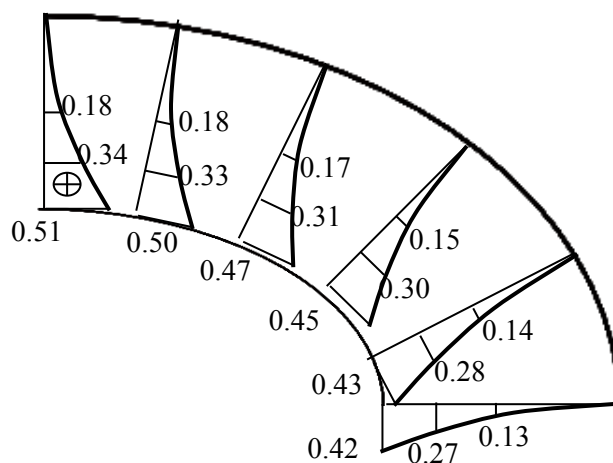


Figure 10. Deflection u_z (cm) of the ellipsoidal ring plate according to VDM

Source: made by V.N. Ivanov [43].

The bending moment diagrams for the characteristic cross-sections, obtained using the finite element method, are shown in Figures 11–14. For comparison, Figure 15 shows the corresponding results of the calculation of bending moments using the variational difference method.

The diagrams (Figures 11–14) show that bending moment M_x is the primary parameter determining the stress state of the plate, while the values of bending moment M_y are an order of magnitude smaller.

1
PATH= 1
VALUE= M2

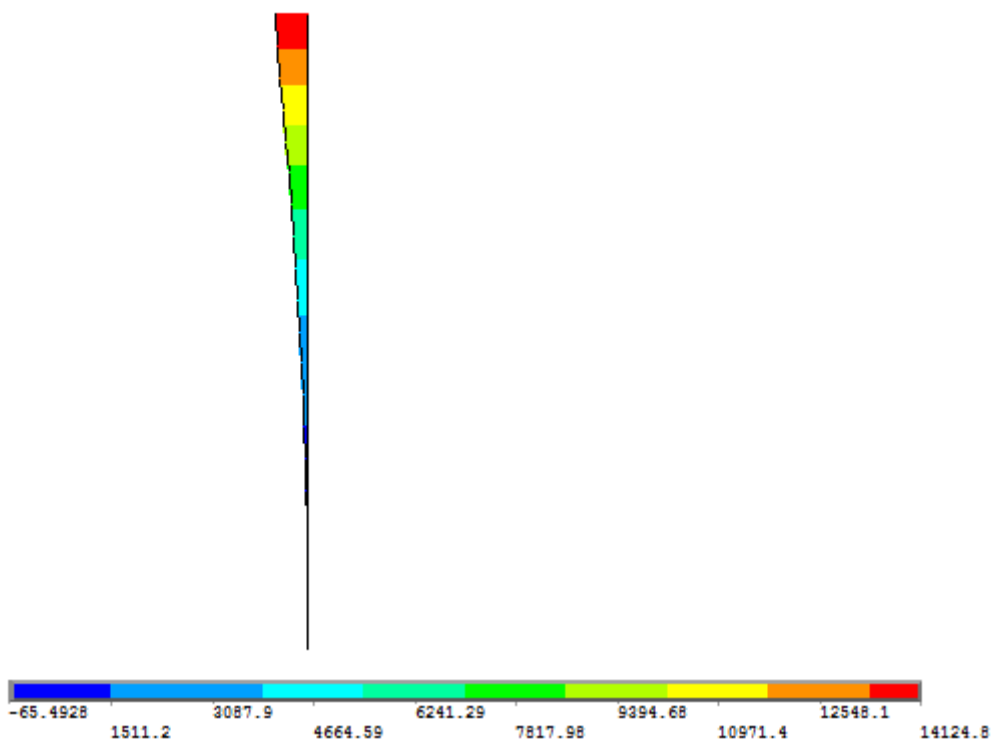


Figure 11. Diagram of bending moment M_x in characteristic section 1-1, N·m/m
Source: made by E.M. Tupikova.

1
PATH= 1
VALUE= M1

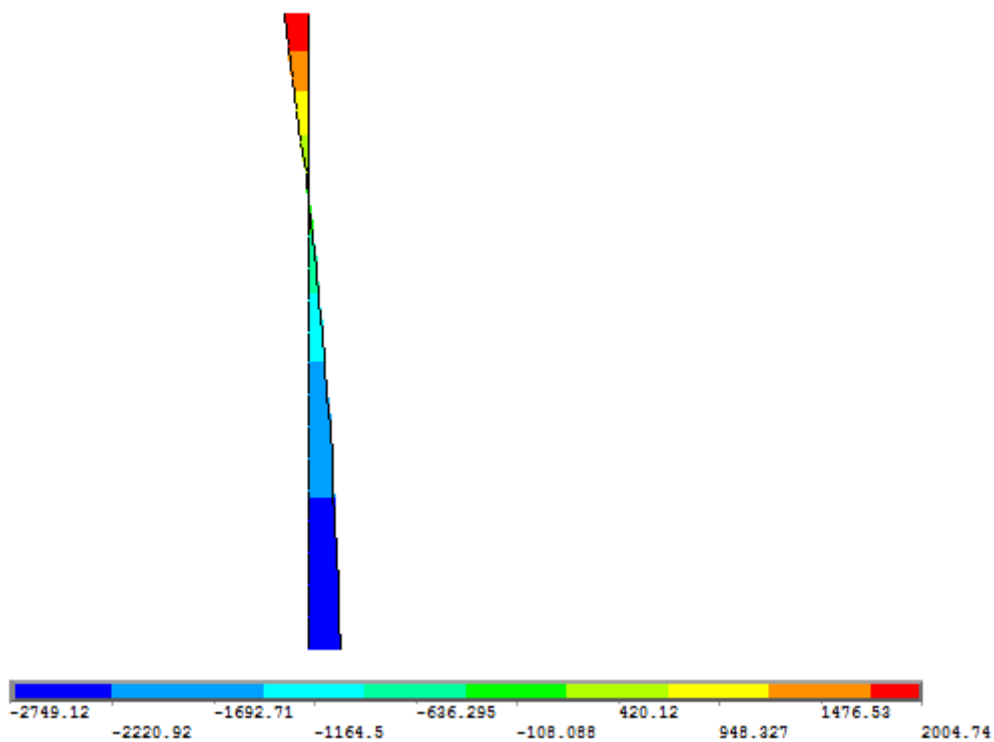


Figure 12. Diagram of bending moment M_y in characteristic section 1-1, N·m/m
Source: made by E.M. Tupikova.

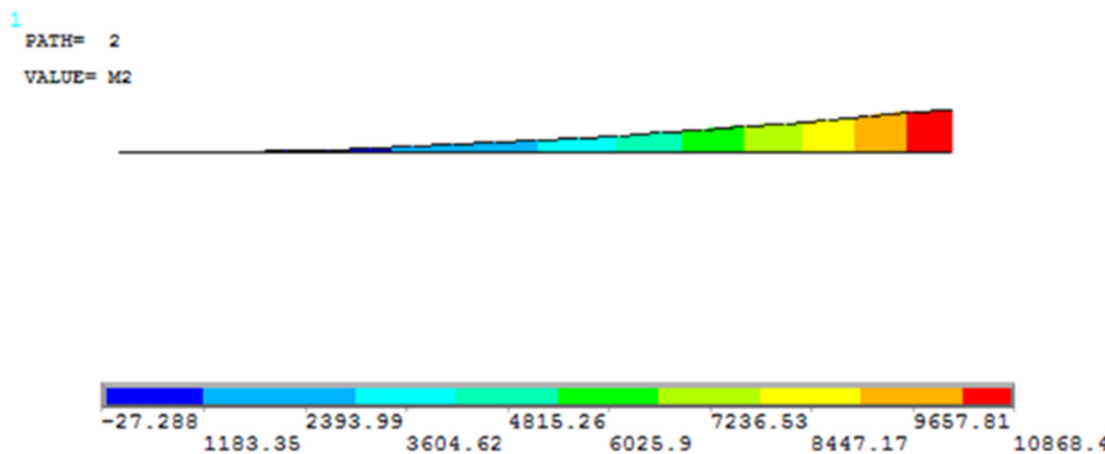


Figure 13. Diagram of bending moment M_x in characteristic section 6-6, N·m/m
 Source: made by E.M. Tupikova.

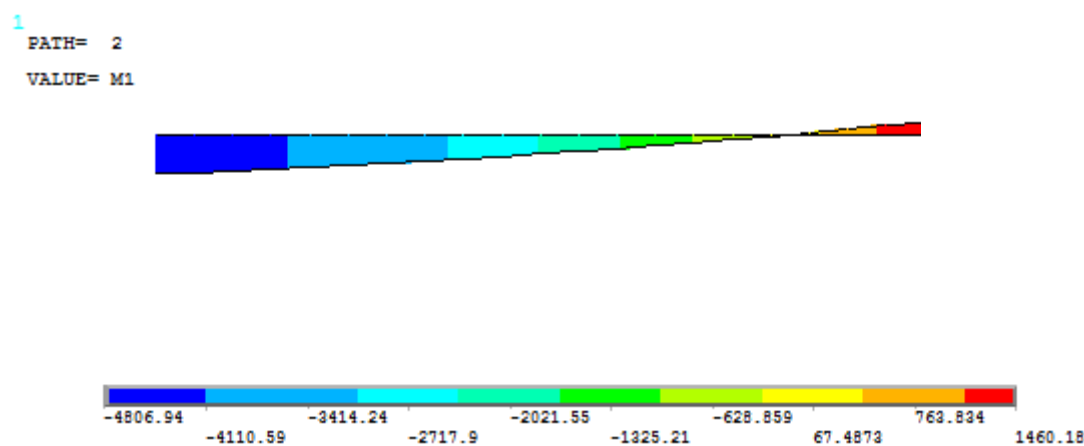


Figure 14. Diagram of bending moment M_y in characteristic section 6-6, N·m/m
 Source: made by E.M. Tupikova.

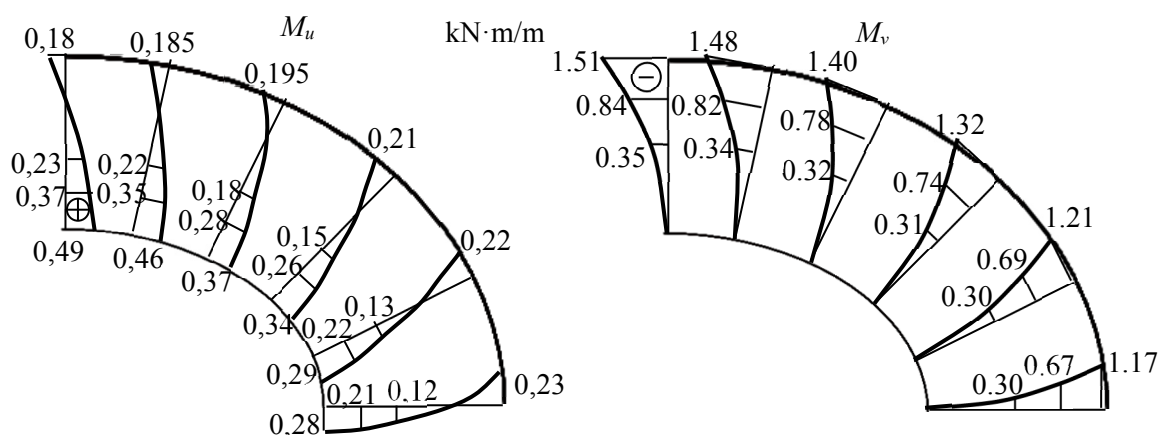


Figure 15. Diagrams of bending moments M_x and M_y (M_u and M_v , respectively, in the curvilinear coordinate system of VDM), kN·m/m

Source: made by V.N. Ivanov [43].

The maximum moments, equal to 1.47 kN·m/m, occur in the cross-section along the minor axis of the ellipse at the fixed support.

The comparison of the results obtained using the two methods shows that they are quite similar.

4. Conclusion

This study examines the stress state of an ellipsoidal ring plate under a uniformly distributed load and compares the results obtained using the finite element method and the variational difference method. The necessary calculation procedures were performed for each method. To ensure the validity of the comparison, model parameters, such as mesh size, were set to be identical. The values of internal stresses, moments, and displacements at the nodes in identical cross-sections were obtained and analyzed. The obtained results allow the following conclusions to be drawn:

1. Analysis of the ring plate of ellipsoidal plan using the variational difference method, implemented in the author-developed program, and the finite element method in the ANSYS software yielded comparable results for deflections and bending moments in characteristic cross-sections.

2. Since the results of analyzing a relatively simple object such as a plate depend significantly on its internal geometry, it is essential to construct a finite element mesh, the key nodes of which are aligned with the director lines. Often, meshing algorithms in commercial software do not fully ensure this alignment, which negatively affects the results. When using author-developed software, this problem can be eliminated for objects with complex geometry by employing a custom node generation algorithm in case of finite element analysis.

3. When applying the variational difference method, the equation is solved by the variational method with discretization of the solution domain, which allows the problem to be solved approximately using mesh functions, and the integrals to be approximated by sums, while the derivatives are approximated by differences. When using the variational difference method, it is possible to obtain results at significant points and interpolate them.

4. Compared to the finite element method, the implementation of the variational difference method requires fewer computational resources and yields results of sufficient accuracy. Software based on the variational difference method has the potential to perform verification calculations for complex structures.

This article presents the results of the first stage of the study — plates of ellipsoidal ring plan. In the future, it is planned to perform a comparative analysis of shells of ellipsoidal ring plan. It is anticipated that differences in the FEM and VDM may have a significant impact on the analysis results of such shells.

References

1. Krivoshapko SN, Mamieva IA. *Analytical surfaces in the architecture of buildings, structures and products*. Moscow: URSS; 2025. (In Russ.) EDN: QJZEGJ
2. Krivoshapko SN, Ivanov VN. *Encyclopedia of analytical surfaces*. Moscow: URSS; 2023. (In Russ.)
3. Krivoshapko SN. Analytical ruled surfaces and their complete classification. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):131–138. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-131-138> EDN: ILRHGX
4. Vekariya MS, Makwana EAH. A Review on thin-shell structures: Advances and trends. *International Journal of Research Publication and Reviews*. 2021;2(12):1593–1608.
5. Ganendra B, Prabowo AR, Muttaqie T, Adiputra R, Ridwan R, Fajri A, Thang Do Q, Carvalho H, Baek SJu. Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response. *Curved and Layered Structures*. 2023;10(1). <https://doi.org/10.1515/cls-2022-0202> EDN: XYJUCO
6. Krivoshapko SN. Prospects and advantages of torsional surfaces in modeling mechanical engineering and building structures. *Bulletin of Civil Engineers*. 2019;1(72):20–30. <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-20-30> EDN: KQGSFJ
7. Chen M, Tang K. A fully geometric approach for developable cloth deformation simulation. *Visual Computer*. 2010;26(6–8):853–863. <https://doi.org/10.1007/s00371-010-0467-5>
8. Aleshina OO. Research on the geometry and calculation of torsional shells of the same slope. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2019;3(284):63–70. (In Russ.)
9. Krivoshapko SN. The opportunities of umbrella-type shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):271–278. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-271-278> EDN: VCQAWD
10. Alborova L, Mamieva I. Curvilinear forms in the architecture of buildings and structures until the 21st century. *Academia. Architecture and Construction*. 2023;3:154–164. (In Russ.) <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2023-3-154-164> EDN: JEEOY

11. Mamieva IA. Analytical surfaces for parametric architecture in contemporary buildings and structures. *Academia. Architecture and construction*. 2020;1:150–165. (In Russ.) EDN: KNYKTY
12. Gil-Oulbe M, Daou T, Mariko O. Analytical surfaces for architecture and engineering. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(5):458–466. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-458-466> EDN: EPDITE
13. Strashnov S, Rynkovskaya M. To the Question of the classification for analytical surfaces. *Geometry & Graphics*. 2022;1:36–43. (In Russ.) <https://doi.org/10.12737/2308-4898-2022-10-1-36-43> EDN: YPILOJ
14. Gil-Oulbe M. Reserve of analytical surfaces for architecture and construction. *Building and Reconstruction*. 2021;6:63–72. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-98-6-63-72> EDN: BCWXIS
15. Krivoshapko SN. Kinematic surfaces with congruent generatrix curves. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2023;24(2):166–176. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2023-24-2-166-176> EDN: BNFZFA
16. Ivanov VN, Aleshina OO, Larionov EA. Determination of optimal cylindrical shells in the form of second-order surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(1):37–47. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-1-37-47> EDN: IQCXLS
17. Ivanov V. Geometry of the normal ruled surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):562–575. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-562-575> EDN: DBVHZU
18. Konopatskiy EV, Voronova OS, Rotkov SI, Lagunova MV, Bezdityni AA. Modeling of the 2nd order curves and surfaces of engineering structures shells based on their basis. *Construction and industrial safety*. 2021;22(74):101–110. (In Russ.) <https://doi.org/10.37279/2413-1873-2021-22-101-110> EDN: SPNBPW
19. Ivanov VN. Constructing shells and their visualization in system “MathCad” on basis of vector equations of surfaces. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019;456:012018. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012018> EDN: VVVFHR
20. Gil-Oulbé M, Ndomilep AJI. Geometry and classification of carved Monge surfaces. *Journal of Physics Conference Series*. 2021;1687:012002. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1687/1/012002>
21. Mamieva IA., Gbaguidi-Aisse GL. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures. *Building and Reconstruction*. 2019;5(85):23–34. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-85-5-23-34> EDN: UAKPPP
22. Ivanov VN, Imomnazarov TS, Farhan IT. Orthogonal curved coordinate system and forming the surfaces on trapezium-curved plans. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2017;18(4):518–527. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2017-18-4-518-527> EDN: YPSROF
23. Ivanov V.N. Geometric characteristics of surfaces with curved trapezoidal plan. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(2):134–145. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-2-134-145> EDN: GPVKGU
24. Sabat L, Kundu CK. History of finite element method: a review. In: *Lecture Notes in Civil Engineering: Recent Developments in Sustainable Infrastructure*. 2021;75:395–404. https://doi.org/10.1007/978-981-15-4577-1_32
25. Wang P, Niu Q, Liu M, Li Z, Cao X, Zhang H. Numerical analysis on natural vibration of cylindrical shell with different cross-section. *MATEC Web of Conferences*. 2023;380:01015. <https://doi.org/10.1051/mateconf/202338001015> EDN: DAQCOH
26. Al-Yacoub AM, Hao LJ, Liew MS, Ratnayake RMC, Samarakoon SMK. Thin-walled cylindrical shell storage tank under blast impacts: Finite element analysis. *Materials*. 2021;14:7100. <https://doi.org/10.3390/ma14227100> EDN: DBXXOD
27. Trushin S, Goryachkin D. Numerical evaluation of stress-strain state of bending plates based on various models. *Procedia Engineering*. 2016;153:781–784. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.242> EDN: YUWKVR
28. Rynkovskaya MI. Calculation and application of helical shells. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia*. Series: Engineering research. 2009;3:113–116. EDN: KVUYQX
29. Rynkovskaya MI. On the issue of strength calculation of thin ruled helical shells. *Structural Mechanics of Engineering Structures and Buildings*. 2015;6:13–15. EDN: UMQHQN
30. Rynkovskaya M. Plastic deformations occurring in shells with developable middle surfaces during bending. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018;371:012054. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/371/1/012054> EDN: VBQVQK
31. Tupikova EM, Rynkovskaya MI. Analytical approach to stress-strain analysis of right and oblique helicoid structures. *Magazine of Civil Engineering*. 2021;106(6):10609. <https://doi.org/10.34910/MCE.106.9> EDN: MHSSFD
32. Maksimyuk VA, Storozhuk EA, Chernyshenko IS. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells. *International Applied Mechanics*. 2012;48(6):613–87. <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8> EDN: XMGQZR
33. Ivanov V, Rynkovskaya M. Analysis of thin walled wavy shell of monge type surface with parabola and sinusoid curves by variational-difference method. *MATEC Web of Conferences*. 2017;95:12007. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20179512007> EDN: YVFNSX

34. Ivanov VN, Alyoshina OO. Comparative analysis of the results of determining the parameters of the stress-strain state of equal slope shell. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):374–83. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383> EDN: LZSVVI
35. Ivanov VN, Aleshina OO. Comparative analysis of the parameters of the stress-strain state of a torso with a guiding ellipse using three calculation methods. *Structural Mechanics and Analysis of Structures*. 2020;3(290):37–46. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.3.37.46> EDN: STKBFX
36. Aleshina OO, Ivanov VN, Grinko EA. Investigation of the equal slope shell stress state by analytical and two numerical methods. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2020;6:2–13. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.6.2.13> EDN: YXWWNT
37. Govind PL. Complicated features and their solution in analysis of thin shell and plate structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(6):509–515. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-6-509-515> EDN: YUZVSP
38. Aleshina OO, Ivanov VN, Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021; 17(1):51–62. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62> EDN: TSDXQW
39. Merneedi A, Nalluri MR, Vissakodeti VSR. Free vibration analysis of an elliptical plate with cut-out. *J Vibroeng*. 2017;19(4):2341–2353. <https://doi.org/10.21595/jve.2016.17575>
40. Çeribaşı S. Static and Dynamic Analyses of Thin Uniformly Loaded Super Elliptical FGM Plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2012;19(5):323–335. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.528160>
41. Sharma P, Khinchi A, Singh R. Modal Study on FGM Elliptical Plate Under Thermal Environment. In: Maiti DK, et al., editors. *Recent Advances in Computational and Experimental Mechanics, Vol II*. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Singapore: Springer; 2022. https://doi.org/10.1007/978-981-16-6490-8_8
42. Timoshenko S, Voinovsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. 2nd ed. New York Toronto London: McGraw-Hill Book Company INC, 1959. ISBN 978-0-07-085820-6
43. Ivanov VN. Design and calculation of plates and shallow shells on curvilinear-trapezoidal plans. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2025;(5):72–82. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2025.5.72.78> EDN: EIVYNT

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ EXPERIMENTAL RESEARCH

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-2-152-165

EDN: KEOWYA

Научная статья / Research article

Способы испытания и устройство для исследования механических свойств фибры, бетона и фибробетонных элементов

А.В. Суханов 

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Российская Федерация

✉ suhanov_av@stu.lipetsk.ru

Поступила в редакцию: 2 февраля 2026 г.

Доработана: 4 апреля 2026 г.

Принята к публикации: 15 апреля 2026 г.

Аннотация. Исследование направлено на совершенствование способов испытания стальных фибр, бетона и фибробетонных элементов на растяжение, изгиб и на совместное действие усилий растяжения, среза и изгиба. Разработка новых и улучшение существующих экспериментальных методов подготовки исходных данных для проектирования конструкций на основе фибробетона стала сегодня актуальной задачей, поскольку темпы появления на рынке новых видов стальных фибр опережают темпы исследования механических свойств фибробетонов, созданных на основе этих видов фибр, которые необходимы для создания полноценной расчетной модели работы фибробетонных конструкций в эксплуатационных условиях. Предложен и рассмотрен способ испытания и устройство для исследования механических свойств фибры, бетона и фибробетонных элементов, описан принцип работы созданного экспериментального устройства и особенности регистрирующего оборудования. Подробно описана апробация созданной экспериментальной установки, даны ссылки на результаты, полученные с применением описанного в статье способа испытания. Комплекс исследований, проведенных с применением созданной экспериментальной установки, позволил получить новые и уточнить существующие данные о диаграммах, характеризующих работу стальных фибр в бетоне. Такие диаграммы применили для построения математической модели анализа напряженно-деформированного состояния нормального сечения изгибаемых фибробетонных элементов и для оценки прочности и надежности фибробетонных конструкций, работающих на изгиб.

Ключевые слова: испытание на растяжение, испытание на изгиб, стальная фибра, статико-динамические испытания, циклическое нагружение, срез, экспериментальная установка

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Суханов А.В. Способы испытания и устройство для исследования механических свойств бетонных и фибробетонных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 152–165. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-152-165> EDN: KEOWYA

Суханов Андрей Владимирович, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры общей механики, Липецкий государственный технический университет, Российская Федерация, 398055, г. Липецк, ул. Московская, д. 30, корпус Б; eLIBRARY SPIN-код: 6143-5881, ORCID: 0000-0003-1329-3984; e-mail: suhanov_av@stu.lipetsk.ru

© Суханов А.В., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Test Methods and Device for Studying the Mechanical Properties of Fiber, Concrete and Fiber-Reinforced Concrete Elements

Andrey V. Sukhanov 

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

✉ suhanov_av@stu.lipetsk.ru

Received: February 2, 2026

Revised: April 4, 2026

Accepted: April 15, 2026

Abstract. This research aims to improve methods for testing steel fibers, concrete, and fiber-reinforced concrete elements in tension, bending, and under the combined action of tensile, shear, and bending forces. The development of new and the improvement of existing experimental methods of preparing initial data for the design of fiber-reinforced concrete structures has become a relevant issue today, as the rate at which new types of steel fibers enter the market outpaces the research into the mechanical properties of fiber-reinforced concrete created using these types of fibers, which is necessary for creating a comprehensive calculation model for the behavior of fiber-reinforced concrete structures under service conditions. This article discusses the author's proposed testing method and the device for studying the mechanical properties of fibers, concrete, and fiber-reinforced concrete elements, describing the operating principle of the developed experimental device and the features of the recording equipment. A detailed description of practical evaluation of the developed experimental setup is provided, along with references to the results obtained using the test method described in the article. A series of studies conducted using the developed experimental setup allowed to obtain new data and refine existing data on the diagrams characterizing the behavior of steel fibers in concrete. Such diagrams were used to construct a mathematical model for the stress analysis of normal cross-sections of flexural fiber-reinforced concrete elements and to assess the strength and reliability of fiber-reinforced concrete structures in bending.

Keywords: tensile test, bending test, steel fiber, static-dynamic testing, cyclic loading, shear, experimental device

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Sukhanov AV. Test methods and device for studying the mechanical properties of fiber, concrete and fiber-reinforced concrete elements. *Structural Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):152–165. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-152-165> EDN: KEOWYA

1. Введение

Важнейшими задачами технического прогресса в строительном производстве являются повышение уровня автоматизации и заводской готовности строительных конструкций, расширение применения новых эффективных материалов, снижение энергоемкости и материалоемкости изготовления конструкций. Отечественными и зарубежными исследователями подтверждено, что для решения задач эффективного противодействия разрушающим деформациям в различных эксплуатационных условиях весьма перспективными являются конструкции из дисперсно-армированных бетонов — фибробетонов (ФБ) и сталефибробетонов (СФБ) [1–6].

Поскольку СФБ является композитным материалом, его свойства можно контролировать путем выбора механических характеристик бетона, вида фибр и параметров дисперсного армирования. На сегодняшний день ассортимент стальных волокон для армирования бетона представлен весьма широко как на внутреннем, так и на внешнем рынках. Однако несмотря на то, что стальные фибры обладают различными физико-механическими и геометрическими характеристиками, российские нормативные документы не содержат данных об их рациональном выборе. Отсутствуют спецификации правил выбора параметров армирования волокнами, которые соответствовали бы эксплуатационным требованиям проектируемой конструкции [7]. В связи с этим до настоящего времени исследователями предпринимаются попытки повышения информативности экспериментальных данных, решаются задачи поиска оптимального армирования бетонов волокнами и повешения точности расчетных формул.

Andrey V. Sukhanov, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of General Mechanics, Lipetsk State Technical University, 30 Moskovskaya St, Building B, Lipetsk, 398055, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 6143-5881, ORCID: 0000-0003-1329-3984; e-mail: suhanov_av@stu.lipetsk.ru

Для обеспечения наилучших характеристик фибробетонов при минимальных затратах необходимо разработать методы подготовки исходных данных для проектирования конструкций на основе фибробетона. Решение этой проблемы можно разделить на три этапа: численный анализ свойств фибробетона, оптимизация расхода волокон и разработка программного обеспечения для подготовки исходных проектных данных в рамках принятой базы данных [6; 8]. Для полноценного выполнения задач на каждом из перечисленных этапов необходимо предварительно произвести комплексные экспериментальные исследования фибробетонных образцов на растяжение, сжатие, изгиб и другие виды деформаций.

Научно-исследовательским, проектно-конструкторским и технологическим институтом бетона и железобетона «НИИЖБ» (филиалом ФГУП «НИЦ «Строительство», Москва) разработаны стандарты и рекомендации, описывающие методы определения прочности бетона и сталефибробетона на растяжение: СП 360.1325800.2017¹, Приложение Б, ГОСТ 10180-2012², Приложение В. Нормативное значение прочности СФБ на растяжение в данных документах предлагается определять на образцах-балках 550×150×150 мм с надрезом высотой 25 мм. Такой подход можно отнести к методам расчета СФБ элементов на основе интегрированного учета работы бетона и фибр, поскольку в документе СП 360.1325800.2017 термин «фибра» определен как «стальные короткие волокна, резанные из листа, фрезерованные из сляба или рубленые из проволоки», о геометрических характеристиках фибр и влиянии ее размеров на прочность СФБ элементов сказано немного и в основном в качестве геометрической характеристики стальных волокон принимается отношение длины фибры к ее диаметру: l_f/d_f .

В настоящее время отечественными и зарубежными исследователями предлагаются методы расчета фибробетонных элементов на основе дифференцированного подхода, когда деформации бетона-матрицы и фибры рассматриваются отдельно с учетом адгезии между ними, а геометрические параметры фибры и ее ориентация учитываются в расчетных формулах [9–13]. Задача повышения точности расчета прочности сталефибробетонных конструкций на основе дифференцированного учета сопротивления бетона и фибр актуализируется высокими темпами развития как технологий производства фибробетонов, так и появлением новых видов фибр с разнообразными прочностными свойствами и геометрическими параметрами.

Вывод аналитических зависимостей и уточнение расчетных формул основывается на эмпирических диаграммах, характеризующих работу бетона-матрицы и работу стальной фибры в бетоне [9; 14–16]. Для получения таких диаграмм разработана специальная универсальная экспериментальная установка, позволяющая производить исследования работы фибры и фибробетонных образцов при осевом растяжении и при изгибе.

2. Оригинальная методика экспериментальных исследований прочности стальных фибр и фибробетонных элементов

С целью проведения испытаний бетонных образцов, стальной фибры и фибробетонных элементов на растяжение, определения прочности фибр, а также исследования работы фибр в бетоне-матрице разработана специальная экспериментальная установка, схема которой представлена на рис. 1. Фотоиллюстрации экспериментальной установки представлены на рис. 2.

Разработанная установка является универсальной и позволяет проводить испытания на статические однократные, циклические и динамические импульсные нагружения, а также одновременное действие среза и растяжения.

Основная цель создания данной экспериментальной установки заключается в повышении информативности получаемых в ходе испытаний данных, а именно регистрации информации о нисходящей ветви диаграммы «нагрузка — деформация» для бетонов при осевом растяжении.

¹ СП 360.1325800.2017. Конструкции сталефибробетонные. Правила проектирования. Москва : Стандартинформ, 2018. 74 с. URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293736/4293736334.pdf> (дата обращения: 17.12.2025).

² ГОСТ 10180-2012. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам. Москва : Стандартинформ, 2018. 36 с. URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293782/4293782275.pdf> (дата обращения: 17.12.2025).

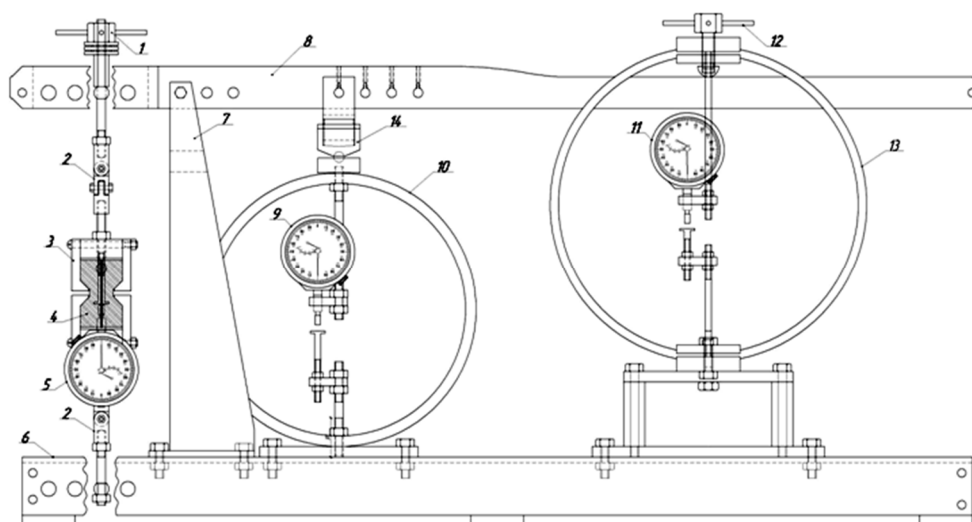


Рис. 1. Схема разработанной оригинальной экспериментальной установки:

- 1 — винт для создания преднапряжения; 2 — шарнир Гука; 3 — захваты; 4 — испытуемый образец; 5, 9, 11 — индикаторы часового типа; 6 — станина; 7 — неподвижная стойка; 8 — рычаг; 10, 13 — динамометрические кольца; 12 — винт, поворотом которого осуществляют нагрузку; 14 — регулятор перераспределения нагрузки между компенсатором 10 и рычагом 8

Источник: выполнено А.В. Сухановым в программе КОМПАС-3D.

Figure 1. Diagram of the developed original experimental device:

- 1 — screw for creating pre-stress; 2 — Hooke's joint; 3 — grips; 4 — test sample; 5, 9, 11 — dial indicators; 6 — frame; 7 — fixed stand; 8 — lever; 10, 13 — proving rings; 12 — screw, by turning which the load is applied; 14 — regulator for redistributing the load between compensator 10 and lever 8

Source: made by A.V. Sukhanov in the КОМПАС-3D.

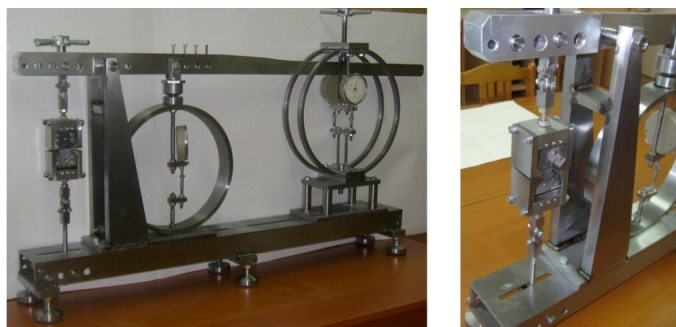


Рис. 2. Фотоиллюстрации экспериментальной установки

Источник: выполнено А.В. Сухановым в программе КОМПАС-3D.

Figure 2. Photos of the experimental device

Source: made by A.V. Sukhanov.

Известно техническое решение для испытания образцов материала на растяжение, осуществляемое путем деформирования образца равными ступенями деформации с изменением соответствующих им величин растягивающих нагрузок. После достижения величины нагрузки, соответствующей пределу прочности материала, нагрузку на образец снижают до достижения предыдущей ступени деформации. После этого догружают образец, деформируя его на предыдущую и следующие ступени. Порядок деформирования образца повторяют, вплоть до его разрыва. Способ обеспечивает получение нисходящей ветви «нагрузка — деформация» для всех видов материалов [17].

Недостатком этого способа является прерывистость прикладываемой нагрузки, что влияет на точность построения диаграммы «нагрузка — деформация». Кроме того, для построения диаграммы в данном способе осуществляется ручная регулировка фиксирующих винтов на каждой стадии наг-

ружения, что усложняет процесс испытания, а также уменьшает информативность получаемых в ходе испытаний данных, — диаграмма «нагрузка — деформация» имеет кусочно-линейный вид. Более того, в данном способе повышение точности построения диаграммы (уменьшение шага перемещений фиксирующего винта) приводит к повышению времени испытания и усложнению процесса испытания.

С целью устранения указанных недостатков была создана универсальная экспериментальная установка, представленная на рис. 2. Методика испытания образцов на осевое растяжение, технически реализованная с помощью созданной экспериментальной установки, заключается в том, что испытание проводится с помощью нагружающего устройства, в котором усилие определяется по величине деформирования упругого элемента. Для построения ниспадающей ветви диаграммы «нагрузка — деформация» используется компенсатор, также представляющий собой упругий элемент, с помощью которого перераспределяется нагрузка между образцом и нагружающим устройством [18].

Для построения диаграммы «нагрузка — деформация» в реализуемом способе осуществляется регулировка значения осевой силы на каждой стадии нагружения, что упрощает процесс испытания и увеличивает информативность получаемых в ходе испытаний данных. Испытание образца осуществляют с помощью нагружающего устройства, в котором усилие определяется по величине деформирования упругих динамометрических колец.

Для построения ниспадающей ветви диаграммы «нагрузка — деформация» используется компенсатор — упругий элемент, перераспределяющий нагрузку между собой, образцом и нагружающим устройством.

Установка для испытания образца (см. рис. 1) содержит захваты для образца 3, закрепленные к станине 6 и рычагу 8, который через неподвижную стойку 7 также соединен со станиной 6. Для нагружения образца 4 к станине 6 прикреплено устройство, состоящее из стойки, упругого элемента 13 и винта 12. Для получения нисходящей ветви диаграммы к станине 6 прикреплено устройство, состоящее из стойки 7 и упругого элемента — компенсатора 10.

Испытание на осевое растяжение осуществляется следующим образом. Образец 4 материала зажимают в захватах 3, затем деформируют образец на заданную величину деформации путем приложения через захваты 3 растягивающих усилий, для чего нагружают упругий элемент 13, действующий на рычаг 8, путем перемещения винта 12. При этом часть нагрузки приходится на компенсатор 10, который в процессе всего испытания всегда сжат.

В процессе испытания нагрузка, действующая на образец, вычисляется по формуле

$$N = \frac{P(l-a) - Kb}{a},$$

где $P = c_1 \Delta_1$ — приложенная нагрузка (c_1 — жесткость упругого элемента 13, определяемая тарировкой, Δ_1 — деформация упругого элемента 13, замеряемая при нагружении); $K = c_2 \Delta_2$ — усилие в компенсаторе 10 (c_2 — жесткость упругого элемента 10, определяемая тарировкой, Δ_2 — деформация упругого элемента 10, замеряемая при нагружении); a, b — расстояния от стойки 7 до оси усилия на образец 4 и до оси усилия на компенсатор 10 соответственно (рис. 3).

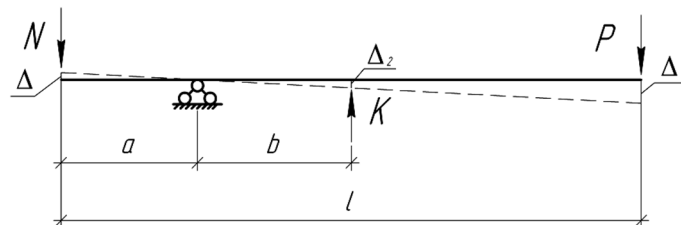


Рис. 3. Схема нагрузок на рычаг экспериментальной установки
И с т о ч н и к: выполнено А.В. Сухановым в программе КОМПАС-3D.

Figure 3. Loading scheme for the lever in the experimental device
S o u r c e: made by A.V. Sukhanov.

Деформации в образцах и нагрузка на динамометрические кольца определялись индикаторами 5, 9, 11 с ценой деления 0,001 мм. На компенсатор 10 устанавливается один, а на динамометрические кольца 13 — два индикатора часового типа.

Применение упругого элемента 10, перераспределяющего нагрузку между образцом и нагружающим устройством, позволяет увеличить информативность регистрируемых данных и построить нисходящую ветвь диаграммы растяжения. Повышение точности получаемых данных обусловлено тем, что значение деформации образца можно измерить при любом усилии, т. е. получить любую точку диаграммы. Самостоятельное перераспределение нагрузки между упругими элементами нагружающего устройства и компенсатора упрощает процесс проведения эксперимента [18].

Для проверки работоспособности экспериментальной установки была создана ее 3D-модель в программе Autodesk Inventor 2021 (рис. 4). Модули САЕ системы Autodesk Inventor позволили смоделировать нагрузку на основные узлы установки: соединение рычага 8 и шарнира Гука 2, регулятор перераспределения нагрузки между компенсатором 10 и рычагом 8. Моделирование позволило определить максимальные допустимые напряжения в компенсаторах 10 и 13. На рис. 4 показана 3D-модель экспериментальной установки, выполненная в соответствии со схемой на рис. 1. В данной модели захваты экспериментальной установки, соединенные с шарниром Гука, предназначены для выполнения исследований работы на трехточечный изгиб балок-призм размером $40 \times 40 \times 160$ мм. В зависимости от вида захватов, закрепленных в экспериментальной установке, возможны испытания фибр и фибробетонных элементов на различные виды нагружений.

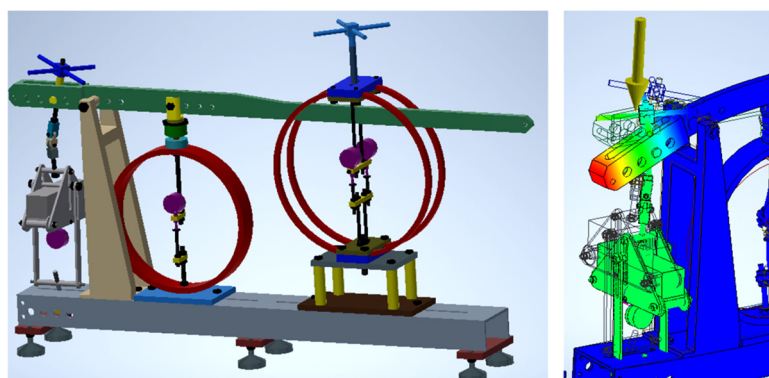


Рис. 4. Моделирование нагрузки и проверка работоспособности основных узлов экспериментальной установки

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Сухановым в программе Autodesk Inventor 2021.

Figure 4. Load modeling and operability testing of the main components of the experimental device

S o u r c e: made by A.V. Sukhanov in the Autodesk Inventor 2021.

Помимо испытаний на осевое растяжение, экспериментальная установка обладает функциональной возможностью нагружения образца до разрушения совместным действием усилий растяжения, среза и изгиба при фиксированном соотношении между величиной усилия при растяжении, величиной усилия при срезе и величиной изгибающего момента [19]. Возможность проводить такие эксперименты достигается тем, что к устройству прикрепляют специальные соосные захваты для фиксации образца, дугообразные рычаги, соединенные с захватами, и платформы, опирающиеся на стенки захватов, дугообразные рычаги выполнены в виде коромысел с отверстиями, центры которых лежат на одной окружности. Рычаги с помощью болтов соединены с захватами образца и с платформами, опирающимися на стенки захватов (рис. 5). Созданные захваты могут также использоваться для испытания прочности анкеровки стальных фибр, расположенных в бетоне под разными углами к оси нагрузки [20].

Разработаны специальные захваты, позволяющие проводить испытания фибробетонных балок-призм размером $160 \times 40 \times 40$ мм на изгиб. Схема закрепления таких образцов в захватах и схема их нагружения показаны на рис. 6.

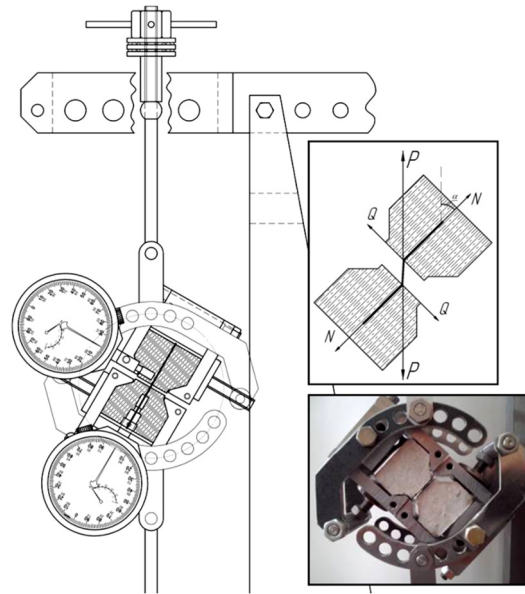


Рис. 5. Схема крепления захватов для образцов при испытании прочности анкеровки
Источник: выполнено А.В. Сухановым в программе КОМПАС-3D.

Figure 5. Mounting configuration of the grips for samples during anchorage strength testing
Source: made by A.V. Sukhanov in the КОМПАС-3D.

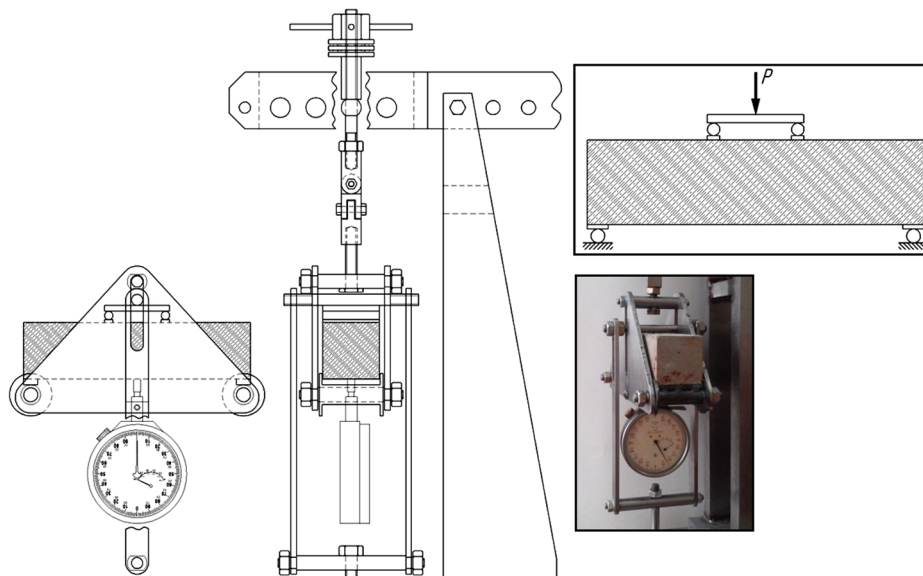


Рис. 6. Схема крепления захватов для образцов при испытании балок-призм на изгиб
Источник: выполнено А.В. Сухановым в программе КОМПАС-3D.

Figure 6. Mounting configuration of the grips for specimens during bending tests of prismatic beams
Source: made by A.V. Sukhanov in the КОМПАС-3D.

Разработаны специальные захваты, позволяющие проводить испытания фибробетонных образцов в виде «восьмерок» на осевое растяжение до разрушения. Схема закрепления таких образцов в захватах и схема их нагружения показаны на рис. 7. Стальные захваты выполнены так, что повторяют форму экспериментальных образцов и обеспечивают их статическое положение во время испытания.

Универсальность установки заключается в дополнительном функционале, реализующем возможность производить испытания фибробетонных образцов на статико-динамические нагрузки [21]. Предложен простой способ испытания, расширяющий возможности экспериментального определения

статико-динамических характеристик бетона и заключающийся в возможности заранее задавать перемещение в компенсирующем элементе при динамическом нагружении и разгрузении. Здесь опытный бетонный образец в виде призмы или «восьмерки» также закрепляется в зажимах экспериментальной установки с использованием центрирующего устройства, обеспечивающего центральное приложение нагрузки в процессе нагружения; регистрация усилия и деформаций во времени осуществляется с использованием динамометра и тензостанции. Нагружение осуществляют через рычажную систему в два этапа: на первом — ступенчатое статическое нагружение образца до заданного уровня, на втором — мгновенное или ступенчатое динамическое догружение или разгрузение посредством кратковременного изменения диаметра оси в месте соединения рычага и компенсирующего элемента (рис. 8).

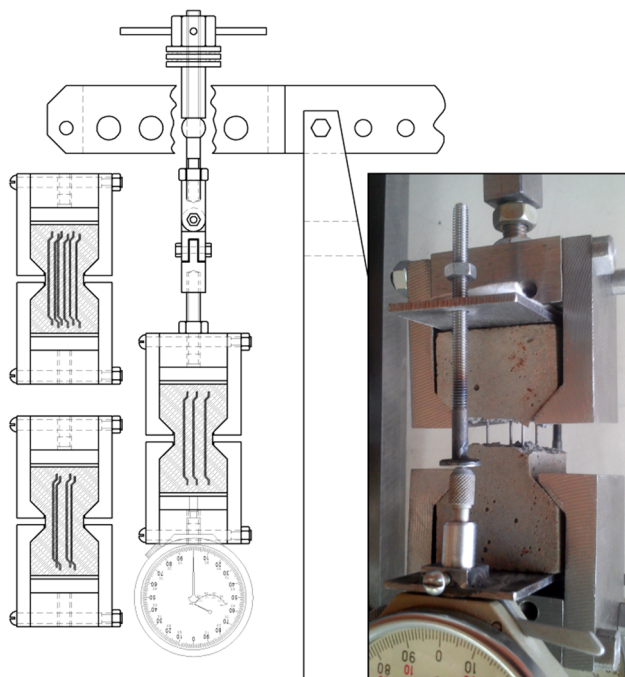


Рис. 7. Схема крепления захватов для образцов при испытании фибробетонных элементов на осевое растяжение

Источник: выполнено А.В. Сухановым в программе КОМПАС-3D.

Figure 7. Mounting configuration of the grips for specimens during tensile testing of fiber-reinforced concrete elements

Source: made by A.V. Sukhanov in the КОМПАС-3D.

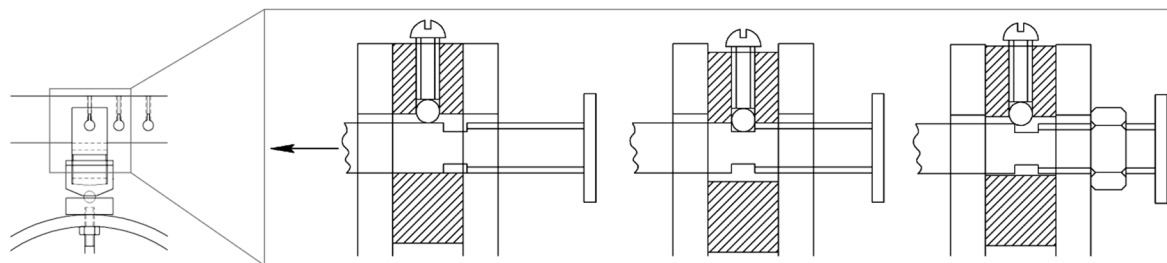


Рис. 8. Схема механизма ступенчатого динамического догружения и разгрузения посредством кратковременного изменения диаметра оси в месте соединения рычага и компенсирующего элемента

Источник: выполнено А.В. Сухановым в программе КОМПАС-3D.

Figure 8. Diagram of the mechanism for stepwise additional dynamic loading and unloading by means of a short-term change in the diameter of the axis at the connection point of the lever and the compensating element

Source: made by A.V. Sukhanov in the КОМПАС-3D.

Для осуществления многократного мгновенного или ступенчатого динамического нагружения создана специальная ось, размещающаяся над компенсатором. Испытание образцов бетона и фибробетонных элементов на циклические нагружения реализуется посредством вращения и кратковременного изменения диаметра оси в месте соединения рычага и компенсирующего элемента, а чередование динамических и статических циклических нагрузок можно осуществлять посредством смещения оси [22]. Схема предложенной оси с различными сечениями и принцип работы показан на рис. 9.

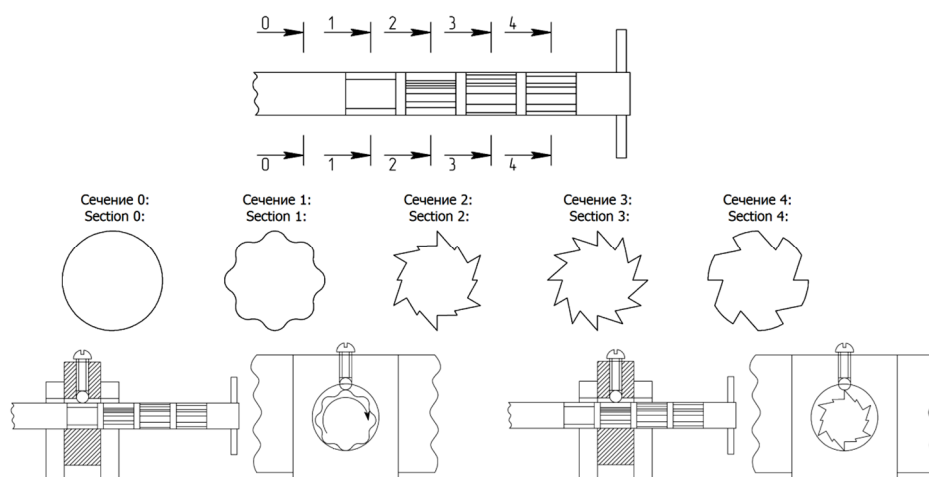


Рис. 9. Схема оси с различными сечениями и принцип ее работы при реализации многократных динамических нагружений на бетонный образец

Источники: выполнено А.В. Сухановым.

Figure 9. Diagram of a shaft with different sections and the principle of its operation when implementing multiple dynamic loads on a concrete sample

Source: made by A.V. Sukhanov.

В процессе проведения испытаний динамометром измеряют усилие, действующее на образец, а параметры деформирования самого образца при статическом или динамическом нагружении в условиях циклических нагрузок измеряются при помощи тензостанции, оборудованной встроенным тензоусилителем, позволяющим подключать тензодатчики без использования промежуточных усилителей, и имеющей возможность при подключении к компьютеру и использовании специализированного программного обеспечения записывать и отображать преобразованные сигналы нескольких входных каналов в зависимости от времени.

3. Применение созданной универсальной экспериментальной установки для исследования механических свойств бетонов и фибробетонных элементов

Развитие исследований о прочности композитов, армированных дискретными волокнами, происходило по пути изучения напряженного состояния фибробетона от упругой стадии до стадии образования и роста трещин, когда работа фибры постепенно переходит от сопротивления разрушению матрицы к сопротивлению раскрытию трещины. Для этого необходимо было проведение экспериментов, результаты которых позволили бы оценить вклад отдельного волокна в работу композита по сопротивлению росту трещины, то есть эксперименты по выдергиванию фибры из бетона. Важные шаги в этом направлении предприняты исследователями F. Laranjeira, C. Molins, A. Aguado [9; 23], A. Pupurs [6; 24, 25], Y. Zhan [26], I. Löfgren [27], S. Ahmadvashaghbash, M. Mehdikhani, Y. Swolfs [28], J.M. Alwan, A.E. Naaman, P. Guerrero [29], C. Sujivorakul [30], Ye Ma, Hongbo Xiao [31] и др. Работы этих и других исследователей значительно расширили возможности использования деформационной модели и диаграммного метода расчета по прочности линейных элементов конструкций из фибробетона на действие изгибающих моментов и продольных сил.

Многие современные исследователи концентрируют свою работу над повышением точности описания диаграмм «нагрузка — смещение» фибр в матрице композитов, для чего используют различные методики испытаний [32–34]. Преимущество описанного здесь устройства заключается в том, что оно позволяет с высокой точностью измерять деформации бетона, фибры и фибробетонных элементов, получать данные о нисходящей ветви диаграмм «нагрузка — смещение» фибр при их разрыве и при смещении их из бетона. Устройство также повышает информативность экспериментальных данных, поскольку конструкция экспериментальной установки предусматривает режим плавного разрушения образца или фибры, создавая условия, приближенные к условиям разрыва фибробетона в растянутой зоне изгибаемого линейного элемента.

Созданное устройство прошло апробацию в ходе научно-исследовательской работы по изучению механических свойств стальных фибр и фибробетонных образцов.

Первые испытания позволили уточнить предельную прочность стальной фибры, используемой при дисперсном армировании фибробетонных конструкций [15]. Дальнейшие испытания были посвящены исследованию анкеровки стальных фибр в бетонах различной прочности и состава. Экспериментальные данные, полученные с применением созданного устройства, позволили уточнить аналитические зависимости для вычисления значений координат характеристических точек диаграммы «нагрузка — смещение» гладкой стальной фибры и анкерной фибры с одним отгибом на концах [15; 16].

Полезные результаты были получены при испытании на установке фибробетонных элементов в виде «восьмерок», армированных стальными фибрами. Фибры в опытных образцах размещались параллельно друг другу вдоль оси приложения растягивающей нагрузки (см. рис. 7). Полученные данные позволили уточнить влияние коэффициента фибрового армирования на предельную прочность фибробетона при осевом растяжении и получить аналитические зависимости для описания диаграмм « $\sigma_{fbt} — \varepsilon_{fbt}$ » растяжения бетона с ориентированным фибровым армированием [35].

С применением созданной экспериментальной установки проведены исследования работы стальных анкерных фибр с одиночными отгибами на концах в мелкозернистом шлакобетоне и получены эмпирические зависимости, описывающие смещения фибр из бетона-матрицы. На основе полученных данных выведена математическая зависимость для определения коэффициента, характеризующего изменение величины вклада в работу фиброармированного элемента каждого волокна в зависимости от длины заделки этого волокна и соседних волокон в бетоне с учетом их ориентации в бетоне-матрице. Полученные в результате исследования данные позволили рассчитывать напряжения в центральном сечении изгибаемых фибробетонных конструкций на стадии трещинообразования [20].

Данные, полученные в ходе испытаний, позволили уточнить расчетные зависимости для построения диаграмм «нагрузка — смещение» фибр, заделанных в бетон-матрицу с различной длиной анкеровки. Такие диаграммы применяются для построения математической модели анализа напряженно-деформированного состояния нормального сечения изгибаемых фибробетонных элементов и для оценки прочности и надежности фибробетонных конструкций, работающих на изгиб [36–40].

4. Заключение

Для исследований работы фибр и фибробетонных элементов специально разработана и создана универсальная экспериментальная установка, на устройство которой и способы испытаний получены четыре патента РФ на изобретение.

1. Предложена оригинальная методика экспериментальных исследований анкеровки одиночных и групп фибр, а также бетона при растяжении, произведена модификация разработанной универсальной испытательной установки для их осуществления, получен.

2. Разработана оригинальная методика экспериментальных исследований фибробетонных изгибаемых элементов, предложены оригинальные приспособления для универсальной испытательной установки для их осуществления, на способ испытаний получен патент на изобретения РФ.

3. Проведены пионерные экспериментальные исследования работы фибр в бетоне при различных углах их расположения и приложения нагрузки на разработанной универсальной испытательной установке, доказана ее универсальность и применимость для широкого круга задач исследования.

4. Данные, полученные в ходе испытаний, позволили уточнить расчетные зависимости для построения диаграмм «нагрузка — смещение» фибр, заделанных в бетон-матрицу с различной ориентацией и длиной анкеровки.

5. Комплекс исследований, проведенных с применением созданной экспериментальной установки, позволил получить новые и уточнить существующие данные о диаграммах, характеризующих работу стальных фибр в бетоне. Такие диаграммы были применены для построения математической модели анализа напряженно-деформированного состояния нормального сечения изгибаемых фибробетонных элементов и для оценки прочности и надежности фибробетонных конструкций, работающих на изгиб.

Список литературы

1. *Маилян Л.Р., Шилов П.А.* Технология изготовления фибробетона с агрегированным ориентированным фибровым армированием и исследование его характеристик // Эксперт: теория и практика. 2023. № 2 (21). С. 53–59. https://doi.org/10.51608/26867818_2023_2_53 EDN: HIBUFH
2. *Stelmakh S.A., Shcherban E.M., Beskopylny A., Mailyan L.R., Meskhi B., Varavka V.* Quantitative and qualitative aspects of composite action of concrete and dispersion-reinforcing fiber // *Polymers*. 2022. Vol. 14. No. 4. Article no. 682. <https://doi.org/10.3390/polym14040682> EDN: OOSUAM
3. *Zeyad A.M.* Effect of fiber types on fresh properties and flexural toughness of self-compacting concrete // *J. Mater. Res. Technol.* 2020. Vol. 9. P. 4147–4158. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.02.042> EDN: FJOKKD
4. *Bentur A., Mindess S.* Fibre reinforced cementitious composites. Second edition. New York, USA. Taylor & Francis Publ., 2007. 604 p. ISBN 041525048X, 9780415250481
5. *Талантова К.В.* Сталефибробетон. Конструкции. Терминология // Вестник Евразийской науки. 2020. № 4 (12). С. 69–71. <https://doi.org/10.15862/69SAVN420> EDN: NEGDOF
6. *Pupurs A., Varna J.* Fracture mechanics analysis of debond growth in a single-fiber composite under cyclic loading // *Mechanics of Composite Materials*. 2011. No. 47. P. 109–124. <https://doi.org/10.1007/s11029-011-9190-1>
7. *Talantova K.V.* Developing Basic Data for Designing Steel Fiber Concrete Based Structures // *Indian Journal of Science and Technology*. 2016. Vol. 9. No. 42. Article no. 104305. <https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i42/104305> EDN: XFKNJT
8. *Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В.* Программный комплекс имитационного моделирования процесса изменения напряженно-деформированного состояния неоднородных анизотропных объектов // Современные наукоемкие технологии. 2017. № 1. С. 41–45. EDN: XVBWVB
9. *Laranjeira F., Molins C., Aguado A.* Predicting the pullout response of inclined hooked steel fibers // *Cement and concrete research*. 2010. Vol. 40. Issue 10. P. 1471–1487. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2010.05.005>
10. *Пухаренко Ю.В., Пантелеев Д.А., Жаворонков М.И.* Влияние вида фибры и состава матрицы на их сцепление в фибробетоне // Вестник Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета. 2022. Т. 19. № 3. С. 436–445. <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2022-19-3-436-445> EDN: OZZCHD
11. *Medeghini F., Tiberti G., Guhathakurta J., Simon S., Plizzari G.A., Mark P.* Fiber orientation and orientation factors in steel fiber-reinforced concrete beams with hybrid fibers: A critical review // *Structural Concrete*. 2025. Vol. 26. Iss. 1. P. 481–500. <https://doi.org/10.1002/suco.202400461> EDN: SFKKMS
12. *Суханов А.В., Шилов А.А., Маилян Л.Р.* Вероятностное моделирование распределения и ориентации фибр в сечениях железобетонных элементов // Эксперт: Теория и практика. 2024. № 3 (26). С. 103–111. https://doi.org/10.51608/26867818_2024_3_103 EDN: EMFHES
13. *Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В.* Детерминированная математическая модель и алгоритм анализа напряженно-деформированного состояния изгибаемых элементов с дискретными волокнами // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 9 (1). С. 57–62. EDN: UBWJID
14. *Abdallah S., Rees D.W.A.* Analysis of pull-out behaviour of straight and hooked end steel fibres // *Engineering*. 2019. Vol. 11. No. 6. P. 332–341. <https://doi.org/10.4236/eng.2019.116025>.
15. *Черноусов Н.Н., Черноусов Р.Н., Суханов А.В.* Исследование анкеровки стальной фибры в цементно-песчаном бетоне // Известия вузов. Строительство и архитектура. 2014. № 2. С. 96–103.
16. *Черноусов Н.Н., Черноусов Р.Н., Суханов А.В.* Исследование анкеровки стальной фибры в мелкозернистом шлакобетоне // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2015. № 5. С. 117–126.
17. *Ладыженский И.Г.* Способ испытания образцов строительных материалов на растяжение. Патент на изобретение RU 2001383 С1, кл. G 01 N 3/08, 1992.
18. *Черноусов Н.Н., Черноусов Р.Н., Суханов А.В., Прокофьев А.Н.* Способ испытания образцов строительных материалов на растяжение. Патент на изобретение RU 2544299 С2, заявл. 23.07.2013; опубл. 20.03.15. Бюл. № 8. № 2013134589/28.

19. Черноусов Н.Н., Черноусов Р.Н., Суханов А.В., Прокофьев А.Н. Устройство для испытания образцов материалов на совместное действие усилий растяжения, среза и изгиба. Патент на изобретение RU 2548391 С1, заявл. 19.12.13; опубл. 20.04.15. Бюл. № 11. № 2013156559/28.
20. Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В., Шипулин И.А. Математическое моделирование процесса взаимовлияния стальных фибр в сечении изгибаемого элемента из сталефиброшлакобетона // *Фундаментальные исследования*. 2016. № 4 (3). С. 506–511.
21. Черноусов Н.Н., Черноусов Р.Н., Суханов А.В., Прокофьев А.Н., Ливенцева В.А. Способ экспериментального определения статико-динамических характеристик бетона. Патент на изобретение RU 2545781 С1, заявл. 17.09.13; опубл. 10.04.15. Бюл. № 10. № 2013142518/15.
22. Черноусов Н.Н., Черноусов Р.Н., Суханов А.В., Прокофьев А.Н., Ливенцева В.А. Способ экспериментального определения статико-динамических характеристик бетона в условиях циклических нагружений. Патент на изобретение RU 2547348 С1, заявл. 19.11.13; опубл. 10.04.15. Бюл. № 10. № 2013151500/28.
23. Grünwald S., Laranjeira F., Walraven J., Aguado A., Molins C. Improved tensile performance with fiber reinforced self-compacting concrete // *High Performance Fiber Reinforced Cement Composites*. 2012. Vol. 6. P. 51–58.
24. Pupurs A. Load bearing capacity prediction of steel fiber reinforced concrete elements subjected to bending loads. Doctoral Thesis. Riga : Institute of Structural Engineering and Reconstruction, 2011.
25. Pupurs A., Varna J. 3-D FEM modeling of fiber/matrix interface debonding in UD composites including surface effects // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2012. Vol. 31. Article no. 012001. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/31/1/012001>
26. Zhan Y. Multilevel modeling of fiber-reinforced concrete and application to numerical simulations of tunnel lining segments. Doctoral Thesis. Germany : Ruhr University Bochum, 2016.
27. Löfgren I. Fibre-reinforced concrete for industrial construction. Doctoral Thesis. Chalmers University of technology, Göteborg. Sweden, 2005. 275 p. URL: <https://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/8627/8627.pdf> (accessed: 10.12.2025).
28. Ahmadvashghbash S., Mehdikhani M., Swolfs Y. Methods and models for fibre-matrix interface characterisation in fibre-reinforced polymers: a review // *International Materials Reviews*. 2023. Vol. 68. No. 8. P. 1245–1319. <https://doi.org/10.1080/09506608.2023.2265701> EDN: APWAZW
29. Alwan J.M., Naaman A.E., Guerrero P. Effect of mechanical clamping on the pull-out response of hooked steel fibers embedded in cementitious matrices // *Concrete science and engineering*. 1999. Vol. 1. No. 1. P. 15–25. ISSN 1295-2826
30. Sujivorakul C. Model of hooked steel fibers reinforced concrete under tension // Parra-Montesinos G.J., Reinhardt H.W., Naaman A.E. (eds). *High Performance Fiber Reinforced Cement Composites 6*. RILEM State of the Art Reports. Springer, Dordrecht, 2012. Vol. 2. P. 19–26. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2436-5_3
31. Ma Y., Xiao H., Lin Yu., Yang G., Li Ya., Wu J. Pull-out behavior of steel fiber in reinforced concrete with different fiber shapes, embedment depths and matrix composition // *Journal of Building Engineering*. 2025. No. 113. Article no. 114141. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2025.114141> EDN: HVUOXV
32. Poveda E., Yu R. C., Tarifa M., Ruiz G., Cunha V.M.C.F., Barros J.A.O. Rate effect in inclined fibre pull-out for smooth and hooked-end fibres: a numerical study // *International Journal of Fracture*. 2020. Vol. 223. No. 1. P. 135–149. <https://doi.org/10.1007/s10704-019-00404-7> EDN: XLACCG
33. Georgiadi-Stefanidia K., Panagouli O., Kapatsina A. Numerical modelling of the pull-out response of inclined hooked steel fibres // *Advances in Concrete Construction*. 2015. Vol. 3. No. 2. P. 127–143. <http://doi.org/10.12989/acc.2015.3.2.127>.
34. Katouzian M., Vlase S. A Review of the methods used in the study of creep behavior of fiber-reinforced composites and future developments // *Applied Sciences*. 2025. Vol. 15. No. 13. Article no. 7265. <https://doi.org/10.3390/app15137265> EDN: LWEXRJ
35. Korneev A.M., Buzina O.P., Sukhanov A.V., Shipulin I.A., Shipulin N.A. Mathematical modeling of stress-strain state of composites reinforced with discrete fibers in tension and compression, taking into account physical nonlinearity // *Theoretical & Applied Science*. 2016. No. 6. P. 124–130. <https://doi.org/10.15863/TAS.2016.06.38.26> EDN: WCNLXX
36. Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В. Математическое моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния неоднородных сред с непрерывными и дискретными волокнами // *Фундаментальные исследования*. 2016. № 8-1. С. 39–44. EDN: WHOECZ
37. Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В., Шипулин И.А. Вероятностная математическая модель оценки начальной надежности изгибаемых элементов, дисперсно-армированных дискретными волокнами // *Фундаментальные исследования*. 2016. № 9–3. С. 489–494. EDN: WMSOSF
38. Kochkarev D., Galinska T., Tkachuk O. Normal sections calculation of bending reinforced concrete and fiber concrete elements // *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. Vol. 7. No. 3. P. 176–182. <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.14399> EDN: SFKRQY
39. Löfgren I. Beräkningsmetod för fiberbetong i bärande konstruktioner // *ByggTeknik*. 2007. Vol. 96. No. 7. P. 32–40. URL: https://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/9240/local_9240.pdf (дата обращения: 10.12.2025).

40. Abid A., Franzen K.B. Design of fibre reinforced concrete beams and slabs. Chalmers University of Technology. Göteborg, Sweden, 2011. p. 112. URL: <https://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/146607.pdf> (дата обращения: 10.12.2025).

References

1. Mailyan LR, Shilov PA. Technology of making fiber concrete with aggregated oriented fiber reinforcement and the analysis of its characteristics. *Expert: Theory and Practice*. 2023;2(21):53–59. (In Russ.) https://doi.org/10.51608/26867818_2023_2_53 EDN: HIBUFH
2. Stelmakh SA, Shcherban EM, Beskopylny A, Mailyan LR, Meskhi B, Varavka V. Quantitative and qualitative aspects of composite action of concrete and dispersion-reinforcing fiber. *Polymers*. 2022;14(4):682. <https://doi.org/10.3390/polym14040682> EDN: OOSUAM
3. Zeyad AM. Effect of fiber types on fresh properties and flexural toughness of self-compacting concrete. *Journal of Materials Research and Technology*. 2020;9:4147–4158. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.02.042> EDN: FJOKKD
4. Bentur A, Mindess S. *Fibre reinforced cementitious composites*. 2nd ed. New York, USA: Taylor & Francis Publ.; 2007. ISBN 041525048X, 9780415250481
5. Talantova KV. Steel fiber concrete. Carcass. Terminology. *Bulletin of Eurasian Science*. 2020;4(12):69–71. (In Russ.) <https://doi.org/10.15862/69SAVN420> EDN: NEGDOF
6. Pupurs A, Varna J. Fracture mechanics analysis of debond growth in a single-fiber composite under cyclic loading. *Mech Compos Mater*. 2011;47:109–124. <https://doi.org/10.1007/s11029-011-9190-1>
7. Talantova KV. Developing basic data for designing steel fiber concrete based structures. *Indian J Sci Technol*. 2016;9(42):104305. <https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i42/104305> EDN: XFKNJT
8. Korneev AM, Buzina OP, Sukhanov AV. Software simulation of changes stress-strain state of an inhomogeneous anisotropic objects. *Modern Advanced Technologies*. 2017;(1):41–45. (In Russ.) EDN: XVBWVB
9. Laranjeira F, Molins C, Aguado A. Predicting the pullout response of inclined hooked steel fibers. *Cement and Concrete Research*. 2010;40:1471–1487. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2010.05.005>
10. Pukharenyo YV, Panteleev DA, Zhavoronkov MI. Influence of fiber type and matrix composition on adhesive strength in fiber reinforced concrete. *The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. 2022;19(3):436–445. (In Russ.) <https://doi.org/10.26518/2071-7296-2022-19-3-436-445> EDN: OZZCHD
11. Medeghini F, Tiberti G, Guhathakurta J, et al. Fiber orientation and orientation factors in steel fiber-reinforced concrete beams with hybrid fibers: A critical review. *Structural Concrete*. 2025;26(1):481–500. <https://doi.org/10.1002/suco.202400461> EDN: SFKKMS
12. Sukhanov AV, Shilov AA, Mailyan LR. Robabilistic modeling of distribution and orientation of fibers in sections of fiber-reinforced concrete elements. *Expert: Theory and Practice*. 2024;3(26):103–111. (In Russ.) https://doi.org/10.51608/26867818_2024_3_103 EDN: EMFHEC
13. Korneev AM, Buzina OP, Sukhanov AV. Deterministic mathematical model and algorithm analysis of stress-strain state bent elements with discontinuous fibers. *Modern Advanced Technologies*. 2016;(9-1):57–62. (In Russ.) EDN: UBWJID
14. Abdallah S, Rees DWA. Analysis of pull-out behaviour of straight and hooked end steel fibres. *Engineering*. 2019;11(6):332–341. <https://doi.org/10.4236/eng.2019.116025>
15. Chernousov NN, Chernousov RN, Sukhanov AV. Study of steel fiber anchorage in cement-sand concrete. *News of Universities: Construction and Architecture*. 2014;(2):96–103. (In Russ.)
16. Chernousov NN., Chernousov RN, Sukhanov AV. Study of steel fiber anchorage in fine-grained cinder concrete. *Bulletin of Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering*. 2015;(5):117–126. (In Russ.)
17. Ladyzhensky IG. *Method for testing samples of building materials for tension*. Patent for invention RU 2001383 C1, cl. G 01 N 3/08, 1992. (In Russ.)
18. Chernousov NN, Chernousov RN, Sukhanov AV, Prokofiev AN. *Method for testing samples of building materials for tension*. Patent for invention RU 2544299 C2. 20 Mar 2015;(8). Application No. 2013134589/28. (In Russ.)
19. Chernousov NN, Chernousov RN, Sukhanov AV, Prokofiev AN. *Device for testing material samples for the combined action of tensile, shear, and bending forces*. Patent for invention RU 2548391 C1. 20 Apr 2015;(11). Application No. 2013156559/28. (In Russ.)
20. Korneev AM, Buzina OP, Sukhanov AV, Shipulin IA. Mathematical modeling of process mutual influence of steel fibers in the cross section in the bending steel fiber reinforced slag concrete element. *Fundamental Research*. 2016;4(3):506–511. (In Russ.)
21. Chernousov NN, Chernousov RN, Sukhanov AV, Prokofiev AN, Liventseva VA. *Method for experimental determination of static-dynamic characteristics of concrete*. Patent for invention RU 2545781 C1. 10 Apr 2015;(10). Application no. 2013142518/15. (In Russ.)

22. Chernousov NN, Chernousov RN, Sukhanov AV, Prokofiev AN, Liventseva VA. *Method for experimental determination of static-dynamic characteristics of concrete under cyclic loading*. Patent for invention RU 2547348 C1. 10 Apr 2015;(10). Application no. 2013151500/28. (In Russ.)
23. Grünwald S, Laranjeira F, Walraven J, Aguado A, Molins C. Improved tensile performance with fiber reinforced self-compacting concrete. In: *High Performance Fiber Reinforced Cement Composites 6*. 2012:51–58.
24. Pupurs A. *Load bearing capacity prediction of steel fiber reinforced concrete elements subjected to bending loads*. Riga: Institute of Structural Engineering and Reconstruction; 2011.
25. Pupurs A, Varna J. 3-D FEM modeling of fiber/matrix interface debonding in UD composites including surface effects. *IOP Conf Ser: Mater Sci Eng*. 2012;31:012001. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/31/1/012001>
26. Zhan Y. *Multilevel modeling of fiber-reinforced concrete and application to numerical simulations of tunnel lining segments*. Doctoral Thesis. Bochum: Department of Civil and Environmental Engineering Ruhr University Bochum, Germany; 2016.
27. Löfgren I. *Febre-reinforced concrete for industrial construction*. Doctoral Thesis. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden; 2005. Available from: <https://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/8627/8627.pdf> (accessed: 10.12.2025).
28. Ahmadvashghbash S, Mehdikhani M, Swolfs Y. Methods and models for fibre-matrix interface characterisation in fibre-reinforced polymers: a review. *International Materials Reviews*. 2023;68(8):1245–1319. <https://doi.org/10.1080/09506608.2023.2265701>
29. Alwan JM, Naaman AE, Guerrero P. Effect of mechanical clamping on the pull-out response of hooked steel fibers embedded in cementitious matrices. *Concrete Science and Engineering*. 1999;1(1):15–25. ISSN 1295-2826
30. Sujivorakul C. Model of hooked steel fibers reinforced concrete under tension. In: Parra-Montesinos G.J., Reinhardt H.W., Naaman A.E. (eds). *High Performance Fiber Reinforced Cement Composites 6. RILEM State of the Art Reports*. Springer, Dordrecht, 2012;2:19–26. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2436-5_3
31. Ma Y, Xiao H, Lin Yu, Yang G, Li Ya, Wu J. Pull-out behavior of steel fiber in reinforced concrete with different fiber shapes, embedment depths and matrix composition. *Journal of Building Engineering*. 2025;113:114141. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2025.114141> EDN: HVUOXV
32. Poveda E, Yu R, Tarifa M, et al. Rate effect in inclined fibre pull-out for smooth and hooked-end fibres: a numerical study. *Int J Fract*. 2020;223(1–2):135–149. <https://doi.org/10.1007/s10704-019-00404-7> EDN: XLACCG
33. Georgiadi-Stefanidia K, Panagouli O, Kapatsina A. Numerical modelling of the pull-out response of inclined hooked steel fibres. *Advances in concrete construction*. 2015;3(2):127–143. <http://doi.org/10.12989/ACC.2015.3.2.127>
34. Katouzian M, Vlase S. A Review of the methods used in the study of creep behavior of fiber-reinforced composites and future developments. *Applied Sciences*. 2025;15:7265. <https://doi.org/10.3390/app15137265> EDN: LWEXRJ
35. Korneev AM, Buzina OP, Sukhanov AV, Shipulin IA, Shipulin NA. Mathematical modeling of stress-strain state of composites reinforced with discrete fibers in tension and compression, taking into account physical nonlinearity. *Theoretical & Applied Science*. 2016;(6):124–130. <https://doi.org/10.15863/TAS.2016.06.38.26> EDN: WCNLXX
36. Korneev AM, Buzina OP, Sukhanov AV. Deterministic mathematical model of matrix's stress-strain state of with continuous and discontinuous fibers. *Fundamental Research*. 2016;(8-1):39–44. (In Russ.) EDN: WHOECZ
37. Korneev AM, Buzina OP, Sukhanov AV, Shipulin IA. Probability mathematical model of initial reliability assessment of bent elements, reinforced discontinuous fibers. *Fundamental Research*. 2016;(9-3):489–494. (In Russ.) EDN: WMSOSF
38. Kochkarev D, Galinska T, Tkachuk O. Normal sections calculation of bending reinforced concrete and fiber concrete elements. *International Journal of Engineering and Technology (UAE)*. 2018;7(3):176–182. <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.14399> EDN: SFKRQY
39. Löfgren I. Beräkningsmetod för fiberbetong i bärande konstruktioner. *ByggTeknik*. 2007;96(7):32–40. Available from: https://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/9240/local_9240.pdf (accessed: 10.12.2025).
40. Abid A, Franzen KB. *Design of fibre reinforced concrete beams and slabs*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden; 2011. p. 112. Available from: <https://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/146607.pdf> (accessed: 10.12.2025).

Optimizing the Composition of Fiber-Reinforced Concrete Airfield Pavements to Improve Performance and Prevent Cracking

Qais A.A. Qais¹, Galina E. Okolnikova^{1,2}, Serdar B. Yazyev¹, Mahmoud A. A. Obeid¹

¹RUDN University, Moscow, Russian Federation

² Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ qaiseng@gmail.com

Received: January 12, 2026

Revised: March 27, 2026

Accepted: April 5, 2026

Abstract. Concrete airfield pavements often experience premature failure due to extensive cracking under repeated loading and environmental exposure. Traditional single-scale fiber reinforcement methods have proven inadequate in controlling both micro- and macro-cracks, prompting the need for hybrid solutions. This study investigates the mechanical and durability performance of concrete reinforced with hybrid combinations of micro basalt and macro basalt fibers. The main objectives were to evaluate the synergistic effects of dual-scale fiber reinforcement on crack resistance, elasticity, density, and water-related durability properties, and to determine the optimal fiber combination for high-performance pavement concrete. A comprehensive experimental program was conducted involving 25 concrete mixes with varying proportions of micro basalt and macro basalt fibers. Parameters such as elastic modulus, dry and saturated density, water absorption, and moisture content were measured and analyzed. The methodology employed standard mechanical testing protocols and statistical comparisons to identify trends and correlations. Results revealed that combinations such as 1.5A1.5B and 1.5A0.5B achieved superior elasticity (up to 53.65 GPa) and optimal balance across densities and water absorption. While fiber inclusion had minimal influence on compressive strength, basalt fibers significantly improved tensile and flexural behavior, toughness, and resistance to environmental degradation. The hybrid mixes demonstrated reduced porosity and water absorption, enhancing long-term durability. In conclusion, dual-scale hybrid fiber reinforcement offers a viable strategy for enhancing crack control, elasticity, and durability in concrete airfield pavements. It is recommended that future pavement designs incorporate optimized micro basalt and macro basalt fibers combinations to extend service life, reduce maintenance, and promote sustainable infrastructure development.

Keywords: basalt fiber, fiber reinforced concrete pavement, concrete airfield pavements concrete, moisture resistance, concrete crack mitigation, concrete properties, single-scale fiber reinforcement, dual-scale hybrid fiber reinforcement

Authors' contribution: Qais Q.A.A. — laboratory experiments, writing, conceptualization, literature review and editing; Okolnikova G.E. — supervision, conceptualization and validation; Yazyev S.B. — literature review, writing and peer review; Obeid M. A. A. — laboratory experiments. All authors read and approved the final version of the article.

Qais Abdulrahman Ali Qais, Assistant and postgraduate student, Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2820-3305; ORCID: 0009-0003-0245-2086; e-mail: qaiseng@gmail.com

Galina Erikovna Okolnikova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor the Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye shosse, Moscow, 129337, Russian Federation, Moscow; eLIBRARY SPIN-code: 8731-8713, ORCID: 0000-0002-8143-4614; e-mail: okolnikova_ge@mail.ru

Serdar B. Yazyev, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 6065-1733, ORCID: 0000-0002-7839-7381; e-mail: yazyev-sb@rudn.ru

Mahmoud Abdelsalam Aref Obeid, postgraduate student, Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 6256-2788; ORCID: 0000-0001-7562-5652; e-mail: mahmoud.obeid@yandex.com

© Qais Q.A.A., Okolnikova G.E., Yazyev S.B., Obeid M.A.A., 2026







This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

For citation: Qais QAA, Okolnikova GE, Yazyev SB, Obeid MAA. Optimizing the composition of fiber-reinforced concrete airfield pavements to improve performance and prevent cracking. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):166–179. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-166-179> EDN: KMPHUQ

Оптимизация состава фибробетонных аэродромных покрытий для повышения эксплуатационных характеристик и предотвращения образования трещин

К.А.А. Кайс¹, Г.Э. Окольникова^{1,2}, С.Б. Языев¹, М.А.А. Обейд¹

¹ Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва, Российская Федерация

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ qaiseng@gmail.com

Поступила в редакцию: 12 января 2026 г.

Доработана: 27 марта 2026 г.

Принята к публикации: 5 апреля 2026 г.

Аннотация. Изучены механические свойства и долговечность бетона, армированного гибридными комбинациями микробазальтовых и макробазальтовых волокон. Цель исследования – оценка эффективности двухмасштабного гибридного армирования бетона микробазальтовыми и макробазальтовыми волокнами для повышения трещиностойкости, эластичности, плотности и водостойкости, а также определение оптимальной комбинации волокон для применения в аэродромных покрытиях. Проведена всесторонняя экспериментальная программа, включающая 25 бетонных смесей с различным соотношением микробазальтовых и макробазальтовых волокон. Измерялись и анализировались такие параметры, как модуль упругости, плотность в сухом и насыщенном состоянии, водопоглощение и влажность. В качестве методов исследования использовались стандартные протоколы механических испытаний и статистические сравнения для выявления тенденций и корреляций. Результаты показали, что такие комбинации, как 1,5A1,5B и 1,5A0,5B, обеспечивают превосходную эластичность (до 53,65 ГПа) и оптимальный баланс плотности и водопоглощения. Добавление волокон оказывало минимальное влияние на прочность при сжатии, базальтовые волокна значительно улучшали прочностные характеристики при растяжении и изгибе, ударную вязкость и устойчивость к воздействию окружающей среды. Гибридные смеси характеризовались снижением пористости и водопоглощения, что способствовало увеличению долговечности. Двухмасштабное гибридное армирование волокнами является эффективной технологией для повышения эксплуатационных характеристик и долговечности бетонных покрытий. Рекомендуется использование оптимизированных комбинаций микробазальтовых и макробазальтовых волокон для продления срока службы конструкций и снижения затрат на обслуживание.

Ключевые слова: базальтовое волокно, фибробетонное покрытие, влагостойкость бетона, предотвращение образования трещин в бетоне, свойства бетона, одномасштабное дисперсное армирование, двухмасштабное гибридное армирование

Вклад авторов: Кайс К.А.А. — выполнение лабораторных экспериментов, написание текста, концепция исследования, обзор литературы, и редактирование; Окольникова Г.Э. — научное руководство, концепция исследования, валидация; Языев С.Б. — обзор литературы, написание текста и научное рецензирование; Обейд М.А.А. — выполнение лабораторных экспериментов. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Qais Q.A.A., Okolnikova G.E., Yazyev S.B., Obeid M.A.A. Optimizing the composition of fiber-reinforced concrete airfield pavements to improve performance and prevent cracking // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 166–179. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-166-179> EDN: KMPHUQ

Кайс Абдурахман Али Кайс, аспирант, ассистент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2820-3305; ORCID: 0009-0003-0245-2086; e-mail: qaiseng@gmail.com

Галина Эриковна Окольникова, кандидат технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций, Московский государственный строительный университет (Национальный исследовательский университет), 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 8731-8713, ORCID: 0000-0002-8143-4614; e-mail: okolnikova_ge@mail.ru

Языев Сердар Батырович, доктор технических наук, заведующий кафедрой технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код 6065-1733, ORCID: 0000-0002-7839-7381; e-mail: yazyev-sb@rudn.ru

Махмуд Абдельсалам Ареф Обейд, аспирант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 6256-2788; ORCID: 0000-0001-7562-5652; e-mail: mahmoud.obeid@yandex.com

1. Introduction

Fibers are added to concrete to improve its natural weakness and brittleness in tension [1]. Corrugated steel fibers with large diameters are commonly used because they are affordable, spread well in the mix, and do not greatly affect workability. However, their large size often makes them less efficient, and they do not improve the toughness of fiber-reinforced concrete (FRC) very much [2]. Natural fibers offer some clear benefits over synthetic ones, like being biodegradable, lighter in weight, and cheaper. But using them in composites is still difficult due to inconsistent quality, lower strength, high water absorption, and poor resistance to heat [3]. Steel fibers, while helpful in improving strength, can reduce concrete workability and increase shrinkage during hardening. Hybrid fiber combinations, such as mixing long hooked-end steel fibers with others, have shown the ability to improve compressive strength more effectively than mono fibers [4]. In another study, combining steel, palm, and synthetic fibers led to better flexural toughness and tensile strength in high-strength flowing concrete [5]. Changing the fiber layering pattern also gives engineers more freedom to design composites with better performance. Additionally, modifying the concrete matrix with nanoparticles is gaining attention because it can add extra features and improve durability [6].

1.1. Concrete in Pavement Construction

Concrete has become increasingly prominent in road construction over the past decade, largely due to its inherent durability. Nonetheless, conventional concrete is limited by its low tensile strength, poor ductility, and insufficient energy dissipation capacity [7]. It is widely recognized that unreinforced concrete tends to fail abruptly when subjected to tensile or flexural stresses, necessitating the use of larger structural dimensions in such scenarios. The introduction of discrete fibers into plain concrete significantly enhances its ductility and tensile capacity. As a result, fiber-reinforced concrete (FRC) allows for reduced cross-sectional dimensions under the same tensile loads compared to plain concrete [8].

In pavement applications, high early-strength concrete is frequently selected, particularly for replacement work. However, such mixes are often susceptible to premature cracking due to the high heat of hydration, which contributes to plastic shrinkage. FRC has demonstrated excellent resistance to plastic shrinkage and has been effectively employed in construction, especially in slab-on-grade systems [9]. To enhance the overall performance of rigid pavements, materials must possess adequate resistance to cracking, a predominant mode of structural failure. Incorporating fibers into concrete to produce a pseudo-ductile matrix has shown great promise in meeting these performance demands. Despite the established effectiveness of FRC in pavement systems, its broader adoption is hindered by inconsistent standards regarding design practices and field implementation [10].

1.2. Crack Detection and Rehabilitation

Crack detection plays a foundational role in highway maintenance strategies, with cracking being the most visible form of surface distress. In recent years, digital image processing techniques have become increasingly prevalent for the identification and classification of pavement cracks [11].

Typical crack types observed in pavements include fatigue, longitudinal, transverse, block, slippage, reflective, and edge cracks [12]. One widely adopted rehabilitation technique involves overlaying deteriorated Portland cement concrete (PCC) pavements with asphalt concrete (AC). While cost-effective, this approach often leads to the rapid emergence of reflective cracks due to pre-existing joints or fissures within the PCC substrate [13].

Advanced computational modeling techniques have gained traction in recent years, particularly the phase field method for analyzing fatigue crack growth. Within this domain, the phase field cohesive zone method (PF-CZM) has emerged as a robust framework for simulating fracture mechanisms in quasi-brittle materials like concrete. Recent work has further extended the utility of PF-CZM to encompass fatigue-induced crack propagation scenarios [14].

1.3. Use of Basalt Fibers in Concrete

Basalt fiber–reinforced concrete (BFRC) has emerged as a promising alternative to conventional concrete reinforcement methods, particularly due to its enhanced toughness index, energy absorption capacity, and superior tensile and bond strength. These improvements are especially notable when basalt fibers are utilized in chopped or minibar forms, allowing for more effective load distribution and crack control within the concrete matrix [15]. Experimental studies have shown that the incorporation of basalt fibers produces varied effects across different mechanical properties. In [16], it was observed that while the inclusion of basalt fibers did not significantly influence the compressive strength or elastic modulus of concrete, it considerably improved the splitting tensile and flexural strengths. Notably, the enhancement in tensile strength increased proportionally with fiber dosage, a trend not equally mirrored by glass fiber–reinforced concrete (GFRC), which showed limited improvements beyond a 0.5% dosage. Furthermore, fracture energy for both basalt and glass fiber–reinforced specimens saw substantial increases with fiber contents exceeding 0.25%, indicating that even small additions of basalt fiber can significantly enhance crack energy dissipation.

In study [17], the effect of various types of polydisperse basalt reinforcement on increasing the strength and frost resistance of high-strength basalt concrete with coarse aggregate modified with the “Embelit 8-100” additive was experimentally studied. It was found that the addition of soft basalt fiber to the composition of high-strength concrete increases its frost resistance.

Basalt fibers are also praised for their eco-friendly production processes and mechanical robustness, contributing to their growing popularity. In [18], two basalt fiber forms were compared, bundle dispersion fibers and minibars, and their mechanical performance through flexural testing and drop-weight impact methods was evaluated. While both fiber types were effective in improving pre-cracking strength, minibars proved particularly beneficial in enhancing post-cracking behavior, likely due to the polymer coating that improves their durability and anchorage within the matrix. This distinction underlines the importance of fiber form and surface treatment in determining mechanical performance outcomes. The authors of [19] proposed a correlation coefficient-based model to predict the mechanical behavior of BFRC. Their findings supported the assertion that basalt fiber primarily enhances the toughness and crack resistance of concrete, with a more pronounced effect on tensile and flexural strength than on compressive strength. Optimum improvements were noted at fiber contents between 0.3 and 0.4%, suggesting a threshold beyond which further gains may plateau or diminish. In another investigation, the authors of [20] analyzed BFRC within a volume fraction range of 0–2%, assessing key mechanical parameters such as compressive strength, tensile strength, and modulus of rupture. Their findings corroborated earlier studies, revealing that while compressive strength saw minimal gains, tensile properties and rupture modulus improved significantly. At a fiber volume fraction of 1.5%, increases of 4.45, 22, and 57% were recorded for compressive strength, tensile strength, and modulus of rupture, respectively, when compared to unreinforced concrete. These studies collectively affirm that basalt fibers, particularly in optimized dosages and appropriate physical forms, substantially improve the mechanical performance of concrete, especially in terms of crack resistance, toughness, and tensile strength. As such, basalt fibers stand out as an ideal material for enhancing the performance of concrete airfield pavements subjected to high stress and frequent crack initiation. The incorporation of short discrete fibers into concrete — especially in low volume fractions (typically below 2–3%) — has proven effective in enhancing the fracture toughness of the composite material. This increase in toughness contributes significantly to controlling crack width and preventing crack propagation under stress [21].

Microfibers, generally characterized by lengths under 10 mm and diameters ranging from 25 to 40 μm , possess exceptionally high specific surface areas (exceeding 200 cm^2/g). This trait results in a high fiber density within the concrete matrix, enabling more robust crack-bridging mechanisms at the micro-level. Consequently, these fibers effectively counteract microcracking induced by thermal and mechanical shrinkage, thus contributing to enhanced durability and crack resistance [22]. Despite their mechanical benefits, certain fibers negatively impact the workability of concrete. For instance, study [23] reported substantial reductions in slump when using glass and nylon fibers — by 37.5% and 68.7%, respectively —

indicating decreased workability due to increased internal friction and reduced flowability. Recent developments in hybrid fiber-reinforced concrete (HyFRC) further demonstrate the synergistic effect of combining fibers of different sizes and properties. In [24], it was shown that HyFRC slabs offer improved load-carrying capacity, reduced reinforcement stress, enhanced crack resistance, and minimized deflection compared to conventional concrete slabs. These improvements are attributed to the integration of both micro and macro fibers, which create a multi-scale reinforcement network within the matrix.

Macro synthetic fibers such as polypropylene (PP), polyethylene (PE), and polyvinyl alcohol (PVA) are widely adopted in structural applications including pavements, tunnels, and industrial floors. While their general application is well established, their specific role in controlling crack widths in pavement systems remains underexplored [25]. These fibers serve as reinforcing meshes within the concrete, bridging cracks and enhancing post-cracking strength, toughness, and ductility. The strategic inclusion of such fibers has been shown to reduce crack widths and frequency, thereby increasing the lifespan of concrete structures under dynamic loads and aggressive environmental conditions. Study [26] further compared macro fibers to bundled multifilament microfibers within strain-hardening cementitious composites. Results showed that microfibers at higher dosages (1–4%) outperformed macro fibers significantly, achieving up to 200% higher tensile strength and over 400% increased post-cracking stiffness. Notably, microfibers at a 4% volume fraction improved crack strength and ultimate strength by 51 and 30%, respectively, leading to finer crack distributions and enhanced ductility — key attributes for lightweight and durable construction. Similarly, study [27] demonstrated the use of hardwood pulp fibers in mitigating early-age cracking. At a dosage of 0.75%, these bio-based fibers delayed cracking through internal curing and stress reduction mechanisms, reducing crack widths by 88% while also improving toughness and tensile capacity. This suggests a potential for self-healing capabilities in cementitious materials reinforced with natural fibers.

Collectively, these findings highlight the pivotal role of both micro and macro fibers in enhancing concrete's mechanical performance. Their combined use in hybrid configurations allows engineers to optimize strength, crack resistance, and service life in concrete airfield pavements and other structural applications, making fiber-reinforced concrete a more resilient and sustainable choice for modern infrastructure. The increasing emphasis on sustainability in material science has propelled the adoption of natural fibers in composite development, driven by the need to create eco-friendly, cost-effective, and high-performance building materials. Both academic researchers and industry practitioners are increasingly turning to natural fiber-reinforced composites as viable alternatives to traditional synthetic fiber [28]. Among the various natural fibers — categorized broadly into plant-based, animal-based, and mineral-based — basalt fibers (BFs) stand out due to their superior mechanical properties, thermal stability, and resistance to environmental degradation [29].

Recent experimental studies have demonstrated the performance-enhancing potential of basalt fibers in concrete, particularly when used in combination with other materials. Study [30] explored the mechanical and durability characteristics of hybrid fiber-reinforced concrete (HFRC) incorporating basalt fibers, polypropylene fibers (PPF), and rubber particles. Using an orthogonal design method, they assessed the contribution of each component to mechanical strength and carbonation resistance. Results indicated that when basalt fiber content was optimized at 0.2% and PPF at 0.15%, the HFRC exhibited significantly improved mechanical properties and resistance to environmental degradation.

Similarly, the authors of [31] evaluated the performance of basalt fiber-reinforced cement mortar subjected to unilateral salt-freezing conditions. Their results confirmed that even a modest inclusion of basalt fibers could dramatically enhance the durability of the mortar. At an optimal dosage of 1.2 kg/m³, the specimens displayed improved compressive and flexural strength, with significantly reduced internal porosity compared to the control specimens. This affirms the role of basalt fiber in reducing permeability and improving freeze-thaw resistance, which is critical for infrastructure exposed to harsh environmental cycles. The versatility of basalt fibers has also been demonstrated in combination with supplementary cementitious materials. In study [32], lightweight aggregate concrete (LWAC) was developed using ultrafine ground granulated blast furnace slag (UGGBS) and its mechanical properties had a substantial enhancement when

BF and coconut shells were incorporated. As a significant finding of this research, a grade 30 LWAC with a demolded density of 1864 kg/m³ containing only 284 kg/m³ cement was developed. Despite extensive studies on fiber-reinforced concrete, most research has focused primarily on mechanical properties with other kinds of fibers like glass, carbon, steel, and natural fibers, there is also limited attention to how other key properties, such as stiffness (elastic modulus), density, and moisture resistance, contribute to crack mitigation in pavement applications. Moreover, while basalt fibers have shown promise as a sustainable and high-performance reinforcement material, the effects of combining micro and macro basalt fibers in optimized ratios remain vague, particularly in relation to their influence on both early-age microcrack control and long-term macrocrack resistance. There is a clear need for studies that link improvements in elastic modulus, densification, and water-related durability to the mechanisms of multi-scale crack mitigation in pavement-grade concrete.

Crack formation is a critical mode of failure in pavement concrete, especially under high mechanical stress and environmental exposure. Traditional reinforcement strategies often fail to address both early-age shrinkage and service-load cracking. Basalt fibers, with their superior tensile strength and chemical stability, present a sustainable alternative to synthetic and steel fibers. However, existing studies have predominantly focused on single-scale fiber inclusion. This study is therefore justified by the need to explore hybrid micro–macro basalt fiber systems, aiming to harness the benefits of multi-scale crack control. By linking fiber configuration to mechanical performance, density, and water permeability, this research fills a vital gap in the design of high-performance, durable pavement concrete.

1.4. Aim and Objectives

This study aims to investigate the synergistic effects of hybridized basalt microfibers and macro fibers on the mechanical strength, densification, and moisture resistance of concrete developed for high-stress pavement applications. By varying the ratios of micro to macro basalt fibers, the research seeks to identify optimal combinations that can simultaneously mitigate both micro- and macro-scale cracking, while maintaining structural integrity and durability under repetitive loading conditions. The objectives of this study are:

- 1) to assess the individual and combined effects of basalt microfibers and macro fibers on the mechanical properties of concrete, including compressive strength, flexural strength, and elastic modulus;
- 2) to evaluate the influence of fiber hybridization on concrete densification by measuring dry, saturated, and air-dried densities;
- 3) to examine the water absorption characteristics of different fiber-reinforced mixes using both air-drying and oven-drying methods as indicators of durability;
- 4) to determine the most effective micro–macro fiber ratio for dual crack mitigation, balancing early-age microcrack control with post-crack load transfer performance.

2. Materials and Methods

2.1. Materials for Experiment

The quality and performance of concrete are significantly influenced by the physical and chemical characteristics of its constituent materials. In this study, a tailored selection of materials was made to meet the mechanical, durability, and crack control demands of pavement-grade concrete.

2.1.1. Cement

The binder used was Portland Cement M600, sourced from Akkermann Cement, which conforms to the CEM I 52.5 classification under GOST 31108-2020.¹ This type of cement is recognized for its rapid early strength development, making it ideal for rigid pavements subjected to heavy loads and early traffic reopening. Its fast-setting nature also minimizes construction time, enhancing productivity on-site while ensuring durability and long-term performance under cyclic stress.

¹ GOST 31108 2020. *Cements for general construction. Specifications*. Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. 2020.

2.1.2. Water

Potable (drinking) water was used for mixing to ensure that it was compatible with cement hydration and durability standards. The water used for mixing fiber concrete mixture met the requirements of GOST 23732-79.² Since drinking water per GOST 2874-82³ is deemed suitable for mixing without additional quality checks, it guarantees a consistent hydration process essential for strength development and long-term durability.

2.1.3. Superplasticizer

To enhance workability at a low water-cement ratio, Polyplast Target was incorporated at 0.7% of the cement weight. This polycarboxylate-based admixture comes in two types. Type 1 integrates air-entraining agents, improving freeze–thaw resistance and rheology. Type 2 includes accelerators and structural modifiers that enhance early strength gain and cohesiveness. Both types comply with GOST 30459-2008⁴ and TU 5745-081-58042865-2015, providing reliable performance in high-strength fiber-reinforced concrete applications. The plasticizer aids in uniform fiber distribution and matrix cohesion, supporting resistance to crack initiation and propagation.

2.1.4. Aggregates

The concrete incorporated locally sourced fine and coarse aggregates. Fine aggregates consisted of natural medium sands which met GOST 8736-93,⁵ with a fineness modulus of 2.0–2.5 and fractions predominantly between 0.63 to 1.25 mm. Coarse aggregates consisted of 20 mm crushed stone from igneous and metamorphic rocks, conforming to GOST 8267-93⁶ and GOST 26633-91,⁷ with a minimum crushability index of 1200. In addition, vein quartz was used for its high purity and rough surface texture, enhancing mechanical bonding. This quartz features a high specific surface area and minimal clay or organic contaminants, contributing to superior packing density and paste-aggregate adhesion.

2.1.5. Basalt Fibers

Basalt, a naturally occurring igneous rock formed from cooled volcanic lava, has gained prominence as a safer alternative to asbestos in composite reinforcement. Its transformation into fibers yields a material with excellent heat resistance and high mechanical performance. These basalt fibers are increasingly used in advanced engineering applications due to their strength, durability, and stability under extreme temperatures [33]. The basalt fibers are divided into two types, micro and macro, discussed in the following sections.

2.1.5.1. Microfibers

Basalt microfibers were utilized for early-age crack control. These fine filaments are derived from molten basalt processed at 2200°C, resulting in super thin fibers 17 μm diameter with amorphous, high-strength structures. The resultant product, known commercially as “Micro Basalt,” has lengths ranging from 18.2 μm and a bulk density of 1.5–2 g/cm³. Their ultrafine nature offers excellent dispersion and a large

² GOST 23732 79 (later revised as GOST 23732 2011). *Water for concrete and mortars. Technical Conditions*. Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. 1979.

³ GOST 2874-82. *Drinking water: Hygienic requirements and quality control*. 1982.

⁴ GOST 30459-2008. *Admixtures for concretes and mortars: Determination and estimate of the efficiency*. Moscow: Standartinfo Publ.; 2009. (In Russ.) Available from: <https://files.stroyinf.ru/Data/498/49803.pdf> (accessed: 17.12.2025).

⁵ GOST 8736-93. *Sand for construction works: Specifications*. Moscow: Standartinfo Publ.; 2009. (In Russ.) Available from: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4294853/4294853079.pdf> (accessed: 17.12.2025).

⁶ GOST 8267-93. *Crushed stone and gravel of solid rocks for construction works: Specifications*. Moscow: Standartinfo Publ.; 2005. (In Russ.) Available from: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4294853/4294853082.pdf> (accessed: 17.12.2025).

⁷ GOST 26633-91. *Heavy-weight and fine concrete: Specifications*. Moscow: Standartinfo Publ.; 2005. (In Russ.) Available from: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4294853/4294853091.pdf> (accessed: 17.12.2025).

specific surface area, ideal for mitigating plastic shrinkage and microcracking in early curing stages. They also exhibit greater chemical and thermal stability than E-glass fibers, making them suitable for aggressive environments.⁸

2.1.5.2. Macrofibers

Basalt macro fibers are coarse, elongated fibers designed to enhance post-cracking load-bearing capacity and flexural resistance. With lengths of 50 mm, diameters of 1 mm, and a tensile strength of up to 1650 MPa, these fibers provide robust crack-bridging action in hardened concrete. Their mechanical interlock with the cement matrix improves ductility and toughness, essential for pavements and slabs under dynamic loads. Their use in industrial floors, basements, and foundations underscores their utility in demanding applications. Basalt macro fibers also boast high corrosion resistance and sustainability benefits compared to synthetic alternatives.⁹

2.2. Experimental Procedure

The experimental variable central to this study was the hybridization of basalt fibers. Two categories of basalt fibers were used: microfibers and macro fibers. Micro basalt fibers, due to their fine diameters, were incorporated primarily for their ability to control early-age and plastic shrinkage cracks. In contrast, macro basalt fibers, which possess larger dimensions and higher pull-out resistance, were added to bridge wider cracks and enhance post-crack flexural performance. These fibers were combined in different ratios to form hybrid mixes, with the total fiber volume fraction kept constant across all specimens. Ratios ranged from 2:0 (pure microfibers) to 0:2 (pure macro fibers), including intermediate hybrid combinations such as 1.5:0.5, 1:1, and 0.5:1.5.

All materials were measured by weight and batched accordingly. Mixing was carried out in a pan mixer, where dry components were first blended, followed by the gradual addition of water mixed with the superplasticizer. Fibers were then slowly introduced to ensure uniform dispersion and prevent clumping. Concrete samples were cast in standard molds and compacted using a vibrating table to minimize entrapped air. The specimens were demolded after 24 hours and subjected to moist curing under controlled laboratory conditions until the testing ages of 7, 14, and 28 days.

A comprehensive suite of mechanical and durability tests was conducted to evaluate the influence of fiber hybridization. While compressive and flexural strengths were assessed according to standard procedures, additional properties were also examined to capture the broader performance profile of the fiber-reinforced concrete. These included the elastic modulus (GPa) as a measure of stiffness, and three density states—dry, saturated, and air-dried—to assess the compactness and internal cohesion of the matrix. Water absorption was measured using both air drying and oven drying cabinet methods to evaluate porosity and water permeability, while moisture content was recorded to understand residual hydration behavior and its impact on shrinkage-induced cracking.

3. Results and Discussion

The experimental procedure yielded valid results in regards to the density, stiffness and water absorption.

3.1. Densities

One of the key indicators of a well-compacted mix is the material density. In this study, three density parameters were evaluated across various hybrid fiber combinations: dry density, saturated density, and air-dried density. These metrics provide insight into the porosity, and overall compaction quality of the concrete matrix, a critical determinant of its durability and resistance to crack propagation as represented by the relationship between the values of the three different densities and the hybrid fiber combination in Figure 1.

⁸ Micro Basalt Innovations Corp. n.d. Basalt Microfiber — 3D Reinforced Composite Material Filler. MicroBasalt. Available from: <http://microbasalt.com/microfiber.html> (accessed: 31.07.2025).

⁹ FIS. n.d. Macro Basalt Fiber in Moscow. FIS–MOSKVA. Available from: <https://moskva.fis.ru/product/35965035> (accessed: 31.07.2025).

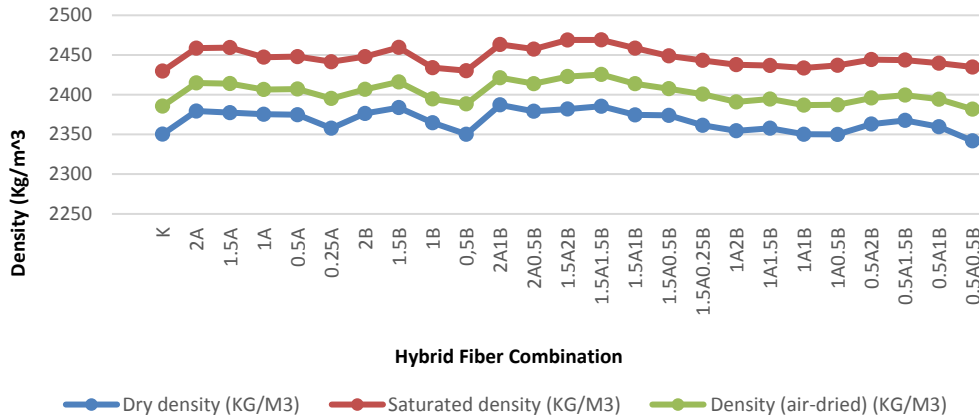


Figure 1. Varying densities against hybrid fiber combination

Source: made by Qais A.A. Qais.

The dry density of the concrete, measured after complete dehydration, revealed values ranging from 2341.85 kg/m³ to 2387.24 kg/m³. These variations indicate how fiber addition influences the packing density of the concrete. For combinations incorporating only macro basalt fibers (designated as A-series), the dry density remained relatively stable, with minor fluctuations observed across varying dosages (2A to 0.25A). This is in line with study [34], which states that due to the fact that BFs were the lightest element in the concrete mixes, there were some unit weight drops when BFs were added. This suggests that macro fibers do not significantly disrupt the packing structure of the mix, allowing for relatively uniform compaction.

In contrast, mixes containing solely microfiber reinforcement (B-series) showed a slight decrease in dry density as the fiber dosage increased, as seen in Figure 1. The lower densities observed in higher B-content mixes (e.g., 2B, 1.5B) could be attributed to the increased surface area of microfibers, which may trap more air and result in a slightly more porous matrix. Nevertheless, the overall decline in density remained marginal, indicating that the inclusion of microfibers alone does not drastically compromise compactness.

More significant effects were observed in hybrid fiber combinations, where both macro and micro basalt fibers were used in tandem. Combinations such as 2A1B, 1.5A2B, and 1.5A1.5B consistently recorded the highest density values across all three categories — dry, saturated, and air-dried. For instance, the 1.5A2B combination achieved a dry density of 2381.89 kg/m³, a saturated density of 2468.83 kg/m³, and an air-dried density of 2422.8 kg/m³. These elevated values suggest enhanced fiber interlocking and void-filling behavior, where microfibers bridge internal pores while macro fibers reinforce the matrix skeleton. This synergy appears to improve internal cohesion and reduce void content, which is crucial for resisting both micro- and macro-scale cracking.

Conversely, hybrid mixes with lower fiber contents, such as 0.5A0.5B, showed noticeably lower density values, especially in the dry and air-dried states. The reduction in density in these mixes could signal insufficient internal reinforcement and suboptimal fiber distribution, potentially increasing the susceptibility of the concrete to shrinkage, permeability, and premature cracking. The results affirm that fiber hybridization, particularly in balanced ratios (e.g., 1.5A1B, 1A1B), yields superior densification properties compared to single-scale fiber systems.

In aerodrome pavements, high-density concrete is important because it ensures that the pavement can withstand repeated aircraft wheel loads and resist external environmental impacts such as jet blast, chemical spills, and heavy rainfall. A denser concrete matrix usually has fewer pores and voids, which makes it more resistant to wear and degradation. The results showed that the addition of basalt fibers, especially in hybrid form (micro and macro), increases the density of the concrete. This improved compaction and internal packing helps the pavement maintain its strength over time. In real-world applications, this means longer service life, less surface damage, and better load transfer across joints and slabs.

3.2. Water Absorption

High water absorption generally corresponds with increased permeability, reduced durability, and susceptibility to shrinkage and cracking, especially under fluctuating environmental conditions. In this study, the water absorption behavior of concrete incorporating varying ratios of macro and micro basalt fibers was evaluated using two methods: oven-drying and air-drying. This dual approach offers insight into both laboratory-controlled and in-service environmental conditions.

Across all mixes in Figure 2, the water absorption ranged from 2.93 to 3.97% (oven-dried) and 1.65 to 2.23% (air-dried). The control sample (K) exhibited relatively high absorption (3.38 and 1.85%), reflecting the baseline porosity of conventional concrete. Interestingly, several fiber-reinforced mixes, particularly those using hybrid fiber combinations, demonstrated improved performance with slightly reduced water absorption, indicating enhanced pore refinement and improved matrix densification.

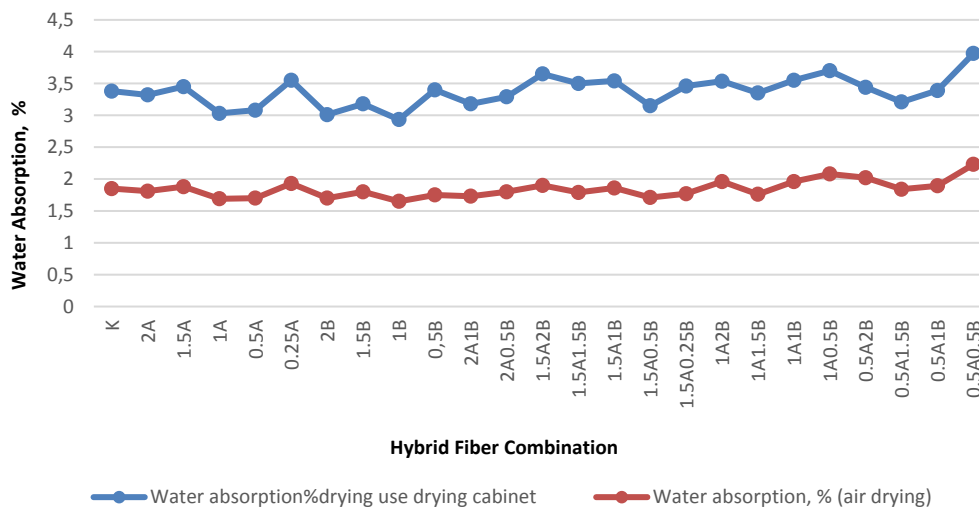


Figure 2. Water absorption (%) against hybrid fiber combination

Source: made by Qais A.A. Qais.

For mixes incorporating only macro basalt fibers (A-series), water absorption remained fairly consistent. The 1A and 0.5A combinations yielded some of the lowest values (3.03 and 3.08% for oven-dried absorption), suggesting that macro fibers may aid in reducing bulk water uptake by restricting crack development and improving internal structure. However, at very low fiber contents (e.g., 0.25A), absorption increased slightly, possibly due to insufficient bridging and ineffective crack resistance. Similarly, microfiber-only mixes (B-series) such as 2B and 1.5B maintained oven-dried water absorption below 3.2%, and air-dried values near 1.7–1.8%. Microfibers help fill voids and limit capillary networks; however, when used alone, their crack-arresting capacity for wider macrocracks is limited, possibly explaining the modest reduction in water absorption. This can also be realized from study [35], where adding 0.05% basalt fibers to self-compacting concrete reduced water absorption by 27.6%, while higher dosages (0.1%–0.2%) increased it by up to 21.2%. The reduced absorption at low content is due to improved pore structure from evenly dispersed fibers, whereas higher contents caused fiber clustering, leading to increased voids and water absorption.

The most compelling results in Figure 2 were observed in hybrid fiber combinations, especially those with balanced proportions of macro and microfibers. For instance, the 1A1B, 1.5A1B, and 2A0.5B mixes recorded some of the lowest absorption values — ranging from 3.15 to 3.29% (oven-dried) and 1.71 to 1.8% (air-dried). This suggests that the synergy between fiber scales enhances the matrix packing, limits capillary pores, and resists moisture ingress. These improvements are vital for preventing shrinkage-induced cracking and reducing freeze–thaw damage in pavement applications. Conversely, fiber blends with excessively high

total fiber content, such as 0.5A2B and 0.5A1.5B, showed elevated absorption (up to 3.97 and 3.7%), likely due to poor fiber dispersion or clustering during mixing, which can introduce micro voids and weaken the homogeneity of the concrete. The highest air-dried absorption value (2.23%) was recorded for the 0.5A0.5B mix, suggesting that very low total fiber volume may be inadequate to produce meaningful improvements in moisture resistance. Low water absorption is a key requirement for airfield pavements. Water entering the concrete can cause internal cracking, freeze–thaw damage in cold climates, and accelerate deterioration due to chemicals like aviation fuel and de-icing agents. When concrete absorbs too much water, it becomes vulnerable to cracking, scaling, and corrosion of embedded materials.

3.3. Elastic Modulus (Stiffness)

In high-stress pavement environments, a higher elastic modulus is generally desirable as it contributes to greater load-bearing capacity and reduced deformation under repetitive traffic loads. However, excessive stiffness without adequate ductility can lead to brittle failure. Thus, an optimal balance is critical, particularly in fiber-reinforced concrete designed for dual crack mitigation.

In Figure 3, the elastic modulus values for 25 different mixes — including single-scale and hybrid fiber combinations — ranged from 49.3 to 53.65 GPa. The control mix (K) recorded a value of 51.5 GPa, serving as a baseline for assessing the effect of fiber inclusion on concrete stiffness.

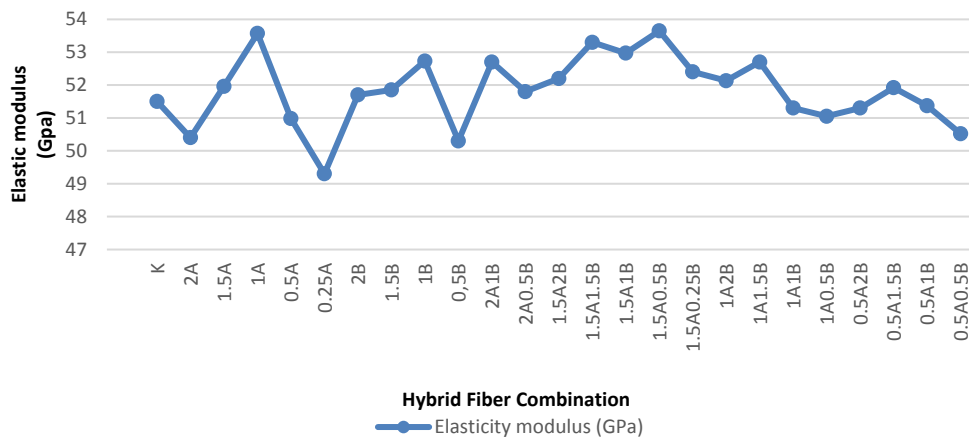


Figure 3. Elastic modulus (GPa) against hybrid fiber combination

Source: made by Qais A.A. Qais.

For the macro basalt fiber (A-series) mixes, a varied trend was observed. The 1A mix achieved the highest elastic modulus in this group (53.65 GPa), suggesting that a moderate inclusion of macro fibers improves stiffness due to their ability to restrict crack propagation and transfer stress across micro-defects. In contrast, both higher and lower fiber contents (2A, 0.5A, 0.25A) recorded lower values ranging from 49.3 to 51 GPa, indicating that suboptimal fiber ratios may reduce matrix uniformity or compromise compaction quality. This is in line with study [36], which demonstrated that the addition of basalt fibers had minimal effect on the modulus of elasticity.

The microfiber-only mixes (B-series) demonstrated moderately high elastic moduli as well, with 1B and 1.5B achieving values above 52 GPa. Microfibers, though primarily known for controlling early-age microcracking, also contribute to matrix continuity and densification, thus supporting higher stiffness values. However, very low microfiber content (e.g., 0.5B) resulted in a reduced modulus of 50.3 GPa, reinforcing the idea that microfibers alone may not sufficiently enhance load resistance in pavement concrete.

The most significant performance gains in Figure 3 were realized in the hybrid fiber combinations, particularly those with balanced macro and micro basalt fibers. Mixes such as 1.5A1.5B (53.3 GPa), 1.5A1B

(52.97 GPa), and 1.5A0.5B (53.65 GPa) recorded the highest elastic modulus values overall. This illustrates the synergistic effect of hybrid reinforcement: macrofibers resist wide crack opening and structural deformation, while microfibers fill pores and control early shrinkage, resulting in a stiffer and more crack-resistant composite. This is fairly similar to study [37], in which an experiment was conducted using different BF's ratios of 0.1–0.3% was claimed to considerably boost the modulus of elasticity. It was discovered that fiber addition increases the elastic modulus of concrete by 23% compared to the reference concrete

Notably, the 1A2B and 1A1.5B mixes also maintained high values above 52 GPa, indicating that a microfiber-dominant content can still yield strong stiffness performance when supported by a foundational macro fiber presence. Conversely, combinations with either low total fiber volume or unbalanced proportions (e.g., 0.5A0.5B at 50.52 GPa) tended to have lower stiffness, but this is in contrast with study [38], where it was found that the addition of 0.2% fiber would yield the optimum value on the stress-strain curve. The stiffness results in Figure 3 confirm that fiber hybridization is a viable pathway for enhancing structural stiffness in high-stress concrete like aerodrome pavement concrete. An optimized mix of macro–micro basalt fiber ratios yield superior mechanical synergy, increasing the ability of the aerodrome concrete to withstand loads while minimizing crack initiation and propagation. In airport pavements, this property affects how the pavement distributes aircraft loads. A pavement that is too flexible will deform excessively, leading to surface wear and rutting. On the other hand, a pavement that is too stiff may crack easily under stress.

4. Conclusion

The experimental results affirm that optimizing the ratio of micro and macro basalt fibers in concrete significantly influences key performance parameters relevant to dual-scale crack mitigation in high-stress pavement applications.

The inclusion of basalt fibers improved the concrete's resistance to both micro- and macro-cracking by enhancing its elastic modulus, densities, and reducing water absorption, which collectively support durability and dimensional stability. Hybrid fiber combinations, particularly those involving balanced proportions such as 1.5A1.5B, 1.5A0.5B, and 1.5A1B, demonstrated a consistent increase in elastic modulus (above 52 GPa), indicating improved stiffness and greater resistance to tensile-induced deformation under high stress.

These combinations promote synergistic interactions between long macro fibers (for bridging larger cracks) and short micro fibers (for dispersing micro-cracks), which is vital for pavement concrete subjected to heavy traffic loads and thermal gradients. In terms of density, hybrid fiber concretes showed higher saturated, dry, and air-dried densities compared to control mixes. This densification is indicative of improved particle packing and fiber-matrix integration, which limits porosity and enhances mechanical interlocking. The highest densities were observed in combinations like 1.5A2B and 1.5A1.5B, reinforcing the value of dual-scale fiber inclusion.

Moreover, water absorption, a key indicator of pore connectivity and durability, was notably lower in optimized hybrid mixes. For example, combinations like 1B, 1.5B, and 1.5A0.5B exhibited reduced water uptake (air-drying absorption below 1.75%), suggesting improved resistance to moisture ingress. Overall, the study demonstrates that optimized micro–macro basalt fiber ratios not only enhance the structural stiffness but also reduce permeability and improve material density, all of which are central to resisting crack initiation and propagation in pavement environments.

Recommendations:

1. Dual-scale basalt fiber reinforcement should be adopted in high-stress pavement concretes to simultaneously mitigate micro-cracking (via microfibers) and control macro-crack widening (via macro fibers).
2. Mixes within the range of 1.5A0.5B to 1.5A1.5B are recommended for their consistent performance across elastic modulus, density, and water absorption metrics. These combinations offer a strong balance between mechanical performance and durability.
3. High-density, low-absorption mixes reflect better matrix consolidation and pore refinement. These parameters should be included in quality control checks when designing fiber-reinforced pavement concrete.

4. Avoid single-scale systems for critical pavements because, while mono-fiber mixes provide some benefits, they fall short of the performance gains offered by hybrid systems, particularly in stiffness and moisture resistance.

5. Promote the use of basalt fibers in concrete mixes.

References

1. Chasioti SG, Vecchio FJ. Effect of fiber hybridization on basic mechanical properties of concrete. *ACI Materials Journal*. 2017;114(3):375–384. <https://doi.org/10.14359/51689479>
2. Banthia N, Sappakittipakorn M. Toughness Enhancement in Steel Fiber Reinforced Concrete through Fiber Hybridization. *Cement and Concrete Research*. 2007;37(9):1366–1372. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2007.05.005>
3. Prem Kumar R, Muthukrishnan M, Felix Sahayaraj A. Effect of hybridization on natural fiber reinforced polymer composite materials — A review. *Polymer composites*. 2023;44(8):4459–4479. <https://doi.org/10.1002/pc.27489> EDN: VIQGEV
4. He F, Biolzi L, Carvelli V. Effect of Fiber Hybridization on Mechanical Properties of Concrete. *Materials and Structures*. 2022;55(7):195. <https://doi.org/10.1617/s11527-022-02020-9> EDN: HZSFNV
5. Dawood ET, Ramli M. Mechanical properties of high strength flowing concrete with hybrid fibers. *Construction and Building Materials*. 2012;28(1):193–200. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2011.08.057>
6. Demir O, Yar A, Eskizeybek V, Avcı A. Combined effect of fiber hybridization and matrix modification on mechanical properties of polymer composites. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. 2023;237(9):1935–1951. <https://doi.org/10.1177/14644207231162547> EDN: RHAKFD
7. Suksiripattanapong C, Phetprapai T, Singsang W, Phetchuay C, Thumrongvut J, Tabyang W. Utilization of recycled plastic waste in fiber reinforced concrete for eco-friendly footpath and pavement applications. *Sustainability*. 2022;14(11):6839. <https://doi.org/10.3390/su14116839> EDN: JOFWLT
8. Ali B, Ahmed H, Hafez H, Brahmia A, Ouni MHE, Raza A. Life cycle impact assessment (Cradle-to-Gate) of fiber-reinforced concrete application for pavement use: A case study of Islamabad city. *International Journal of Pavement Research and Technology*. 2023;16(2):247–263. <https://doi.org/10.1007/s42947-021-00129-8> EDN: PANZBK
9. Suksawang N, Mirmiran A, Yohannes D. *Use of Fiber Reinforced Concrete for Concrete Pavement Slab Replacement*. BDK80 TWO 977-27. Florida Department of Transportation Research Center.
10. Nayar SK, Gettu R. A Comprehensive methodology for the design of fibre reinforced concrete pavements. *FRC* 2014;453.
11. Liu F, Xu G, Yang Y, Niu X, Pan Y. Novel Approach to pavement cracking automatic detection based on segment extending. In *2008 International Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling*. IEEE.; 2008:610–614. <https://doi.org/10.1109/KAM.2008.29>
12. Adlinge SS, Gupta AK. Pavement deterioration and its causes. *International Journal of Innovative Research and Development*. 2013;2(4):437–450. ISSN 2278 –0211
13. Zhu Z, Al-Qadi IL. Development of a full-scale approach to predict overlay reflective crack. *International Journal of Pavement Engineering*. 2024;25(1):2310095. <https://doi.org/10.1080/10298436.2024.2310095> EDN: KHTTZO
14. Baktheer A, Martínez-Pañeda E, Aldakheel F. Phase field cohesive zone modeling for fatigue crack propagation in quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2024;422:116834. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.116834> EDN: AMKKYE
15. John VJ, Dharmar B. Influence of basalt fibers on the mechanical behavior of concrete — A review. *Structural Concrete*. 2021;22(1):491–502. <https://doi.org/10.1002/suco.201900086>
16. Kizilkanat AB, Kabay N, Akyüncü V, Chowdhury S, Akça AH. Mechanical properties and fracture behavior of basalt and glass fiber reinforced concrete: an experimental study. *Construction and Building Materials*. 2015;100:218–224. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.10.006>
17. Okolnikova G, Zagorodnii S, Ivanova P. Influence of dispersed reinforcement on frost resistance of high-strength basalt concrete. *E3S Web of Conferences*. 2023;457:01009. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202345701009> EDN: YUYUYEN
18. Branston J, Das S, Kenno SY, Taylor C. Mechanical Behaviour of Basalt Fibre Reinforced Concrete. *Construction and Building Materials*. 2016;124:878–886. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.08.009> EDN: XUAOGB
19. Zhou H, Jia B, Huang H, Mou Y. Experimental study on basic mechanical properties of basalt fiber reinforced concrete. *Materials*. 2020;13(6):1362. <https://doi.org/10.3390/ma13061362> EDN: XHONKB
20. Ramesh B, Eswari S. Mechanical behaviour of basalt fibre reinforced concrete: An experimental study. *Materials Today: Proceedings*. 2021;43:2317–2322. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.01.071> EDN: PPUZSW
21. Raoufi K, Weiss J. The role of fiber reinforcement in mitigating shrinkage cracks in concrete. In: *Fibrous and Composite Materials for Civil Engineering Applications*. Woodhead Publ.; 2011:168–188. <https://doi.org/10.1533/9780857095583.2.168>

22. Sharma SK, Kumar AA, Ransinchung GDRN, Kumar P. Micro fiber reinforced cement paste and mortar overlays — A review. *International Journal of Pavement Research and Technology*. 2013;6(6):765. [https://doi.org/10.6135/ijprt.org.tw/2013.6\(6\).765](https://doi.org/10.6135/ijprt.org.tw/2013.6(6).765)
23. Khan M, Ali M. Use of glass and nylon fibers in concrete for controlling early age micro cracking in bridge decks. *Construction and Building Materials*. 2016;125:800–808. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.08.111>
24. Zainal SIS, Hejazi F, Mafaileh AM. Strengthening of reinforced concrete slabs using macro and micro synthetic fibers. *Structures*. 2023;51:1579–1590. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.03.120> EDN: PNVFLI
25. Cho S, Bordelon AC, Kim MO. Effects of macro fibers on crack opening reduction in fiber reinforced concrete overlays. *Polymers*. 2024;16(16):2282. <https://doi.org/10.3390/polym16162282> EDN: DVLNSR
26. Mobasher B, Dey V, Bauchmoyer J, Mehre H, Schaef S. Reinforcing efficiency of micro and macro continuous polypropylene fibers in cementitious composites. *Applied Sciences*. 2019;9(11):2189. <https://doi.org/10.3390/app9112189>
27. Jongvisuttisun P., Kurtis K.E. The role of hardwood pulp fibers in mitigation of early-age cracking. *Cement and Concrete Composites*. 2015;57:84–93. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2014.12.008>
28. Al-Kharabsheh BN, Arbili MM, Majdi A, Alogla SM, Hakamy A, Ahmad Ja, Deifalla AF. Basalt fiber reinforced concrete: a compressive review on durability aspects. *Materials*. 2023;16(1):429. <https://doi.org/10.3390/ma16010429> EDN: DUWHVF
29. Jagadeesh P, Rangappa SM, Siengchin S. Basalt fibers: An environmentally acceptable and sustainable green material for polymer composites. *Construction and Building Materials*. 2024;436:136834. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.136834> EDN: PQIBNN
30. Kun L, Xin LH, Bei LB, Nan LYa. Mechanical performance and carbonation resistance of basalt fiber–polypropylene fiber rubber concrete. *Frontiers in Materials*. 2023;10:1229629. <https://doi.org/10.3389/fmats.2023.1229629> EDN: EVOTMU
31. Zhou J, Wang G, Zhu G. The durability of basalt-fiber-reinforced cement mortar under exposure to unilateral salt freezing cycles. *Frontiers in Materials*. 2023;10:1202889. <https://doi.org/10.3389/fmats.2023.1202889> EDN: HKRRKR
32. Ünal MT, Bin Hashim H, Gökçe HS, Ayough P, Köksal F, El-Shafie A, Şimşek O, Pordesari A. Development and characterization of basalt fiber-reinforced green concrete utilizing coconut shell aggregates. *Sustainability*. 2024;16(17):7306. <https://doi.org/10.3390/su16177306> EDN: ELKNAW
33. Jamshaid H, Mishra R A green material from rock: basalt fiber — A review. *The Journal of the Textile Institute*. 2016;107(7):923–937. <https://doi.org/10.1080/00405000.2015.1071940> EDN: WOBXTZ
34. Yakhlaf M. Fresh and mechanical properties of basalt fiber reinforced concrete. In: *International Civil Engineering and Architecture Symposium Academic*, 2015:50–55. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3585.2888>
35. Niu D, Su L, Luo Y, Huang D, Luo D. Experimental Study on Mechanical Properties and Durability of Basalt Fiber Reinforced Coral Aggregate Concrete. *Construction and Building Materials*. 2020;237:117628. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117628> EDN: WBPZIK
36. Ayub T, Shafiq N, Nuruddin MF. Mechanical properties of high-performance concrete reinforced with basalt fibers. *Procedia Engineering*. 2014;77:131–139. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.07.029> EDN: UVIYVZ
37. Kumar V, Sinha AK, Prasad MM. Static modulus of elasticity of steel fiber reinforced concrete. In: *Cement Combinations for Durable Concrete*. Thomas Telford Publ.; 2005:527–536.
38. Palme J. *Investigation of the addition of basalt fibers into cement*. Masters Theses & Specialist Projects. 2014. Paper 1361. Available from: <https://digitalcommons.wku.edu/theses/1361> (accessed: 17.12.2025).

