



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Адилходжаев А.И., д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан

Базаров Д.Р., д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

Варум У., д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

Войццкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

Волосухин В.А., д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия

Галишишникова В.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Дуцев М.В., д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия

Евкин А.Ю., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

Какоев С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Козлов Д.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Кудрявцев С.А., чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия

Курбацкий Е.Н., д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия

Лазарев Ю.Г., д-р техн. наук, проф., СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюдпелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

Перькова М.В., д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Федюк Р.С., д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия

Якупов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

Kamenskikh A.A., Bogdanova A.P., Nosov Yu.O., Kuznetsova Yu.S. Analysis of Viscoelastic Behavior of Antifriction Layer Materials in Bridge Spherical Bearings under Thermomechanical Loading (Анализ вязкоупругого поведения материалов антифрикционной прослойки сферической опорной части моста при термосиловом нагружении) 3

Azakov V.P., Markovich A.S., Jazsan M., Pshеарom K. Расчет на вынужденные колебания с учетом нелинейности деформирования: теория и реализация 16

Isakov E.A. Параметры модели Concrete Damage Plasticity для расчета железобетонных конструкций 28

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Lisyatnikov M.S., Repin A.V., Terentyev K.M., Roshchina S.I. Rational Outline of Timber Beams (Рациональное очертание деревянных балок) 39

Маркина Ю.Д. Влияние асимметрии геометрии на пространственную работу башенных конструкций 53

СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Воскресенский М.Н., Курданова А.А., Косоротова Е.А., Михайлов В.С. Сопоставление экспериментальных и расчетных динамических характеристик здания 67

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Qais Q.A.A., Kotlyarevskaya A.V., Okolnikova G.E. Compressive Properties of Hybrid Basalt Reinforced Concrete for Aerodrome Pavement (Прочностные свойства гибридного базальтобетона для аэродромных покрытий) 81

Редактор И.Л. Панкратова
Редактор англоязычных текстов С.Л. Шамбина
Дизайн обложки Ю.Н. Ефремовой
Компьютерная верстка Н.В. Маркеловой

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru

Подписано в печать 24.02.2026. Выход в свет 27.02.2026. Формат 60x84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 10,46. Тираж 250 экз. Заказ № 24. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026 VOLUME 22 No. 1

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-1

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by White List of RCSI, Russian Index of Science Citation, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.



The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatin, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dusev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIIF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

- Kamenskikh A.A., Bogdanova A.P., Nosov Yu.O., Kuznetsova Yu.S.* Analysis of Viscoelastic Behavior of Antifriction Layer Materials in Bridge Spherical Bearings under Thermomechanical Loading 3
- Agapov V.P., Markovich A.S., Jazzan M., Phearom K.* Analysis of Forced Vibrations Taking into Account Nonlinear Deformation: Theory and Implementation 16
- Isakov E.A.* Concrete Damage Plasticity Parameters for the Analysis of Reinforced Concrete Structures 28

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

- Lisyatnikov M.S., Repin A.V., Terentyev K.M., Roshchina S.I.* Rational Outline of Timber Beams 39
- Markina Yu.D.* Influence of Geometric Asymmetry on the Spatial Behavior of Tower Structures 53

SEISMIC RESISTENCE

- Voskresenskiy M.N., Kurdanova A.A., Kosorotova E.A., Mikhailov V.S.* Comparison of Experimental and Numerical Dynamic Characteristics of a Building 67

EXPERIMENTAL RESEARCH

- Qais Q.A.A., Kothiyarevskaya A.V., Okolnikova G.E.* Compressive Properties of Hybrid Basalt Reinforced Concrete for Aerodrome Pavement 81

Copy Editor I.L. Pankratova

English Texts' Editor S.L. Shambina

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 2026

© Alborova L.A., photo on the cover of the journal ("Volgograd Arena" Stadium, Volgograd, Russia), 2026

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-22-1-3-15

EDN: ICI GST

Research article / Научная статья

Analysis of Viscoelastic Behavior of Antifriction Layer Materials in Bridge Spherical Bearings under Thermomechanical Loading

Anna A. Kamenskikh[✉]^{ID}, Anastasia P. Bogdanova^{ID}, Yuriy O. Nosov^{ID}, Yulia S. Kuznetsova^{ID}

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

✉ anna_kamenskikh@mail.ru

Received: November 18, 2025

Revised: January 27, 2026

Accepted: February 5, 2026

Abstract. Thermoplastic polymeric materials have found wide application as protective and antifriction coatings and interlayers of friction units. Spherical bearings include relatively thin sliding layers made of antifriction materials. Polytetrafluoroethylene (PTFE) is widely used as a material for sliding layers. However, at present, there are modern composite and modified materials with improved physical and mechanical properties that can be used as sliding layers. Antifriction materials are often modeled in terms of elasticity theory or elastoplasticity theory. However, it has been established that these materials exhibit viscoelastic properties. A series of experiments to determine the thermomechanical properties of the materials is performed in the current work. PTFE, a metal composite based on PTFE with bronze inclusions (MAK (F4BR40M2)) and structurally modified Arflon AR-200 PTFE were investigated using dynamic mechanical analysis. The temperature change range $[-40; +80]$ °C was considered, it corresponds to the operating temperatures of bridge structures. Temperature dependencies of the storage modulus, loss modulus and loss tangent were obtained. Viscoelastic models of material behavior, such as Maxwell bodies using Prony series and temperature-time analogy, were constructed based on experimental data. Viscoelastic behavior of materials was analyzed in terms of deformation of a bridge spherical bearing under static and periodic loads, taking into account the ambient temperature. The relationships for the effect of temperature on the stress-strain response and contact parameters were obtained. The influence of the thermal expansion coefficient of materials on the structure behavior was considered. It was found that the sliding layer made of MAK allows for a more favorable stress-strain state compared to the structure including a sliding layer made of PTFE: the maximum stress intensity is less by $\sim 3\%$; the maximum strain intensity is less by $\sim 20\%$; displacements along the normal to the sliding layer are less by $\sim 17.2\%$.

Keywords: bridge structure, bearing, modeling, viscoelasticity, polymer, composite, Maxwell's model, Prony, finite element method, contact, friction

Anna A. Kamenskikh, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky avenue, Perm, 614990, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4748-1891, ORCID: 0000-0002-3012-2418; e-mail: anna_kamenskikh@mail.ru

Anastasia P. Bogdanova, postgraduate student, Researcher of the Digital Engineering of Mechanical Engineering Processes and Production, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky avenue, Perm, 614990, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5496-7620, ORCID: 0000-0001-7426-1287; e-mail: anastasia_pankova@mail.ru

Yuriy O. Nosov, Researcher of the Digital Engineering of Mechanical Engineering Processes and Production, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky avenue, Perm, 614990, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4209-2760, ORCID: 0000-0002-5736-8645; e-mail: ura.4132@yandex.ru

Yulia S. Kuznetsova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky avenue, Perm, 614990, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2878-0214, ORCID: 0009-0001-6608-8987; e-mail: suhodolchik@mail.ru

© Kamenskikh A.A., Bogdanova A.P., Nosov Yu.O., Kuznetsova Yu.S., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Authors' contribution: *Kamenskikh A.A.* — supervision, conceptualization, numerical modeling, visualization, writing; *Bogdanova A.P.* — conceptualization, numerical modeling, visualization, writing; *Nosov Yu.O.* — conceptualization, numerical modeling, visualization, writing; *Kuznetsova Yu.S.* — numerical modeling, visualization, literature overview, review and editing. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Funding. The research was funded by the grant of the Russian Science Foundation No. 25-29-00638, <https://rscf.ru/project/25-29-00638/>.

For citation: Kamenskikh A.A., Bogdanova A.P., Nosov Yu.O., Kuznetsova Yu.S. Analysis of viscoelastic behavior of antifriction layer materials in bridge spherical bearings under thermomechanical loading. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):3–15. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-3-15> EDN: ICIGST

Анализ вязкоупругого поведения материалов антифрикционной прослойки сферической опорной части моста при термосиловом нагружении

А.А. Каменских[✉], А.П. Богданова^{id}, Ю.О. Носов^{id}, Ю.С. Кузнецова^{id}

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация
*anna_kamenskikh@mail.ru

Поступила в редакцию: 18 ноября 2025 г.

Доработана: 27 января 2026 г.

Принята к публикации: 5 февраля 2026 г.

Аннотация. Термопластические полимерные материалы нашли широкое применение в качестве защитных и антифрикционных покрытий и прослоек узлов трения. Сферические опорные части включают относительно тонкие слои скольжения из антифрикционных материалов. Политетрафторэтилен (ПТФЭ) широко используется в качестве материала слоев скольжения. Однако существуют современные композиционные и модифицированные материалы с улучшенными физико-механическими свойствами, которые могут применяться в качестве слоев скольжения. Антифрикционные материалы часто моделируются в рамках теории упругости или теории упругопластичности. Но установлено, что данные материалы проявляют вязкоупругие свойства. В текущей работе выполнен цикл экспериментов для определения термомеханических свойств материалов. ПТФЭ, металлокомпозит на основе ПТФЭ с бронзовыми включениями (МАК (Ф4БР40М2)) и структурно-модифицированный ПТФЭ Арфлон AR-200 были исследованы в рамках динамического механического анализа. Рассматривался диапазон изменения температур $[-40; +80]$ °С, он соответствует температурам эксплуатации мостовых сооружений. Получены температурные зависимости модуля накопления, модуля потерь и тангенса угла механических потерь. На основе экспериментальных данных построены вязкоупругие модели поведения материалов, такие как тела Максвелла, с использованием рядов Прони и температурно-временной аналогии. Вязкоупругое поведение материалов было проанализировано в рамках деформирования сферической опорной части мостовых сооружений при статической и периодической нагрузке с учетом температуры окружающей среды. Получены зависимости параметров напряженно-деформированного состояния и контакта от температуры. Рассмотрено влияние коэффициента термического расширения материалов на поведение конструкции. Установлено, что слой скольжения из МАК позволяет получить более благоприятное напряженно деформированное состояние по сравнению с конструкцией, включающей слой скольжения из ПТФЭ: максимальная интенсивность напряжений меньше ~ на 3%; максимальная интенсивность деформаций меньше ~ на 20%; перемещения по нормали слоя скольжения меньше ~ на 17,2%.

Ключевые слова: мостовое сооружение, опорная часть, моделирование, вязкоупругость, полимер, композит, модель Максвелла, Прони, метод конечных элементов, контакт, трение

Вклад авторов: *Каменских А.А.* — научное руководство, концепция исследования, численное моделирование, визуализация, написание текста; *Богданова А.П.* — концепция исследования, численное моделирование, визуализация, написание текста; *Носов Ю.О.* — концепция исследования, численное моделирование, визуализация, написание текста; *Кузнецова Ю.С.* — численное моделирование, визуализация, обзор, научное рецензирование и редактирование. Авторы озвучены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-00638, <https://rscf.ru/project/25-29-00638/>.

Для цитирования: *Каменских А.А., Богданова А.П., Носов Ю.О., Кузнецова Ю.С.* Анализ вязкоупругого поведения материалов антифрикционной прослойки сферической опорной части моста при термосиловом нагружении // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2026. Т. 22. № 1. С. 3–15. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-3-15> EDN: ICIGST

1. Introduction

Polytetrafluoroethylene (PTFE) was first synthesized in 1938 by Roy Plunkett and is still considered the “king of plastics” [1]. The chemical structure of PTFE consists of a carbon skeleton surrounded by a protective layer of fluorine atoms [2]. The material exhibits high structural regularity, which can initiate a high degree of microstructure crystallization, which is enhanced when exposed to negative temperatures. After a melting point of $370\pm 5^\circ\text{C}$, the material does not become viscous, but becomes amorphous with high viscosity [3]. In the temperature range from 10 to 30°C , the material undergoes a β -transition associated with the transition from a glassy state to a highly elastic state [4]. Chemical inertness, hydrophobicity, resistance to thermal, biological, and oxidative degradation, high strength, and low friction coefficient have earned PTFE the title of “king of plastics.” PTFE accounts for about 60% of the global thermoplastics market [5]. The material is widely used as sliding layers in bearings, expansion joints, and turning mechanisms of bridge structures [6–8]. When in contact with harder bodies, the material exhibits plastic flow and severe abrasion, as well as viscous properties [9; 10]. Creep of the material under certain deformation conditions is also observed [10]. It has been established that even after the manufacturing process, various surface microdefects in the form of pores, cracks, and splits may be present [11]. Poor thermal stability and a high coefficient of thermal expansion of PTFE are also noted [12]. The disadvantages of PTFE include: structural rearrangement at a temperature of $+20^\circ\text{C}$, a tendency to deform at constant temperatures in an unloaded state, low radiation resistance, and significant, in some cases irreversible, expansion when heated [3].

Advances in materials science have led to the development of a fairly large set of alternatives to the “king of plastics” [3; 13; 14]. Arflon materials (OOO NPP Arflon, company in Moscow, Russia) are noted as an alternative to pure PTFE with improved physical and mechanical properties without loss of functionality [3]. Arflon materials stand out as promising protective coatings and interlayers for the Arctic conditions, as well as areas with severe temperature fluctuations [15]. Other Russian and international alternatives to PTFE are also being considered [3]. For example, Superfluvis, a material with increased wear resistance, is a composite material with a PTFE matrix ($\sim 83\%$ of the total mass) and modified crushed carbon fiber with a fluoropolymer nano-coating up to 40 nm thick (17% of the specific weight) [16]. Its application as coatings and interlayers for friction units, as well as a material for bone tissue implants is considered [16; 17]. Improved strength and physical characteristics compared to pure PTFE are noted in a large set of modern anti-friction polymers and composites [3; 13; 18–20]. However, data on the behavior of modern anti-friction polymers and composites are often limited to a narrow range of physical, mechanical, and tribological characteristics.

A number of scientists have noted the lack of data on the thermomechanical properties of the materials [9; 21; 22]. This hinders the evaluation of the deformed state of friction units, structures, and systems in which they are used within the operating temperature range, as well as the analysis of the possibility of replacing the materials with modern alternatives. Structural and mechanical modeling of material behavior, including contact mechanics and wear problems, is important for creating digital models of structures in terms of predictive analysis and is an effective tool at the design or optimization stages [9]. The construction of digital models of anti-friction materials, taking into account the temperature factor, is a relevant task for predicting their behavior during the manufacturing process, as well as during the operation of structures and systems in which they are used [23].

In this work, a series of experimental studies were conducted on PTFE-based materials modified or filled with metal nano-inclusions, as well as pure PTFE, to determine the relationship between the thermo-mechanical parameters and temperature. Models of material behavior in terms of thermo-viscoelasticity have been constructed. An analysis of the behavior of a spherical bearing with a sliding layer made of three different anti-friction materials has been performed over a wide range of ambient temperatures under static and periodic loads.

2. Materials and Methods

The thermomechanical behavior of a spherical bearing of a bridge structure is analyzed using the case of the L-100 design manufactured by OOO AlfaTech (company in Perm, Russia). The model of the contact unit of the spherical bearing is shown in Figure 1 and includes a spherical steel rocker (1), a lower steel plate with a spherical cutout (2), interacting through a spherical polymer/composite sliding layer (3). The behavior of the structure is considered to be axisymmetric, therefore, the spherical sliding layer does not take into account the depressions for lubricant, which can be formed as spherical holes or annular grooves [24].

The maximum height of the structure is 54 mm, with a height ratio of 20 mm for the spherical rocker, 30 mm for the lower steel plate, and 4 mm for the sliding layer along the central section of the bearing. The maximum width and depth of the structure is $B = 2b = 155$ mm. The standard angle of inclination of the end face of the sliding layer α_p is 30° . The sliding layer protrudes $h_l \approx 2$ mm relative to the lower steel plate to prevent metal-to-metal contact.

At the interface between the interlayer and the steel structural elements, frictional contact is implemented with an pre-unknown distribution of contact states (sticking, slipping, no contact) [14]. The friction coefficient is assumed to be constant and equal to 0.04. The mathematical formulation of the problem and the analysis of the influence of the degree of system discretization on the numerical solution were previously described in [25]. The sliding layer was divided into 16 elements along the height. The size of the finite elements on the interface surfaces $S_{K_1} - S_{K_3}$ corresponds to the partitioning of the sliding layer, and increases gradually with increasing distance from $S_{K_1} - S_{K_3}$. The characteristics of the finite element mesh, finite elements, and other aspects of the problem modeling are presented and described in more detail in [14].

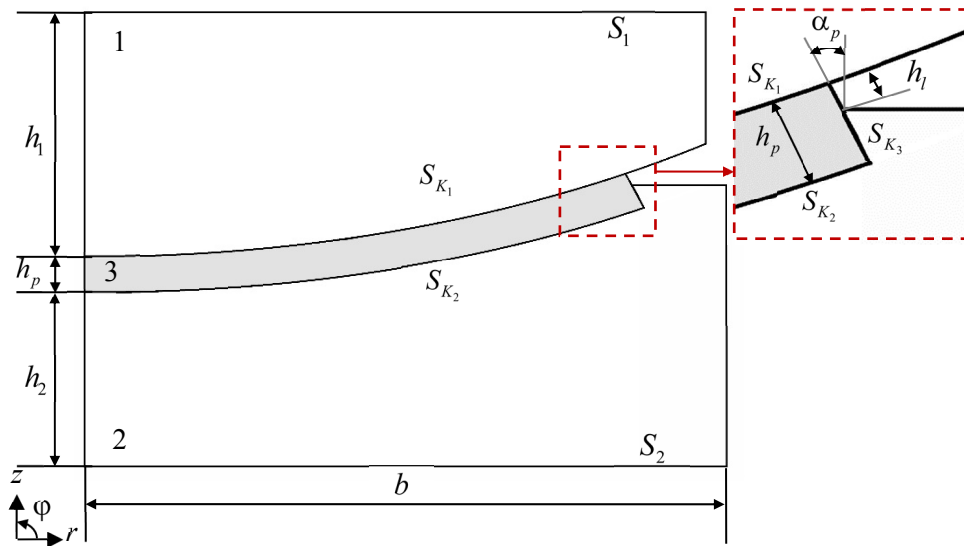


Figure 1. Model of the spherical bridge bearing

Source: made by A.P. Bogdanova.

The problem of thermomechanical deformation of the bearing was implemented using the finite element method in the ANSYS Mechanical APDL 2021R2 (Liverpool, USA) engineering analysis software. The procedures for constructing a numerical model of the structure, finite element meshing, thermo-mechanical loading, and processing of results are fully automated using the APDL parametric programming language.

Two loading schemes for the bearing are considered: static and periodic loading, taking into account the temperature field. Static loading was performed at a nominal vertical load of 1000 kN on the bearing. Periodic loading was modeled as a sinusoidal load varying from 500 to 1000 kN, with and without a 60-second hold at 500 and 1000 kN. Different numbers of cycles were considered. Static and periodic loads were applied to surface S_1 of the spherical rocker. The structure was subjected to a constant ambient temperature ranging from -40 to $+80$ °C. The bearing is assumed to be fixed, therefore normal displacement on surface S_2 of the lower steel plate is restrained. At the same time, the structure is compliant in other directions and has the ability to expand/contract thermally.

The steel structural elements are made of high-strength alloy steel and are modeled in terms of elasticity theory with a Young's modulus of 2×10^{11} and a Poisson's ratio of 0.3. The following materials are considered for the sliding layer: polytetrafluoroethylene (PTFE); PTFE-based metal composite with dendritic bronze inclusions and molybdenum disulfide (MAK (F4BR40M2)); structurally modified PTFE without fillers AR-200 (OOO NPP Arflon, Moscow, Russia). To develop a model of material behavior in terms of viscoelasticity theory, a series of empirical studies were conducted using dynamic mechanical analysis (DMA) based on a three-point bending test of rectangular samples with average dimensions of $60 \times 12 \times 3$ mm made from commercially available polymer blanks of sliding layers. The samples were provided by OOO AlfaTech. The samples were subjected to an oscillating load with an impact frequency of 1 Hz in a temperature range from -40 to $+80$ °C. The research covered only the area of conventional bridge structures, which corresponds to the design minimum air temperature of up to -40 °C inclusive, according to the GOST R 59623-2021¹ National Standard of the Russian Federation. To ensure the statistical significance of the results, at least four tests were performed on the samples for each type of thermo-mechanical loading. A more complete description of the experimental conditions is given in [14].

As a result of a series of experiments, temperature dependencies of the storage modulus and loss modulus were obtained in the temperature range $[-40; +80]$ °C. The arithmetic mean plots of the thermomechanical characteristics of the materials are shown in Figure 2 and characterize the glassy and highly elastic state of the material at $T \in [-40; +80]$ °C.

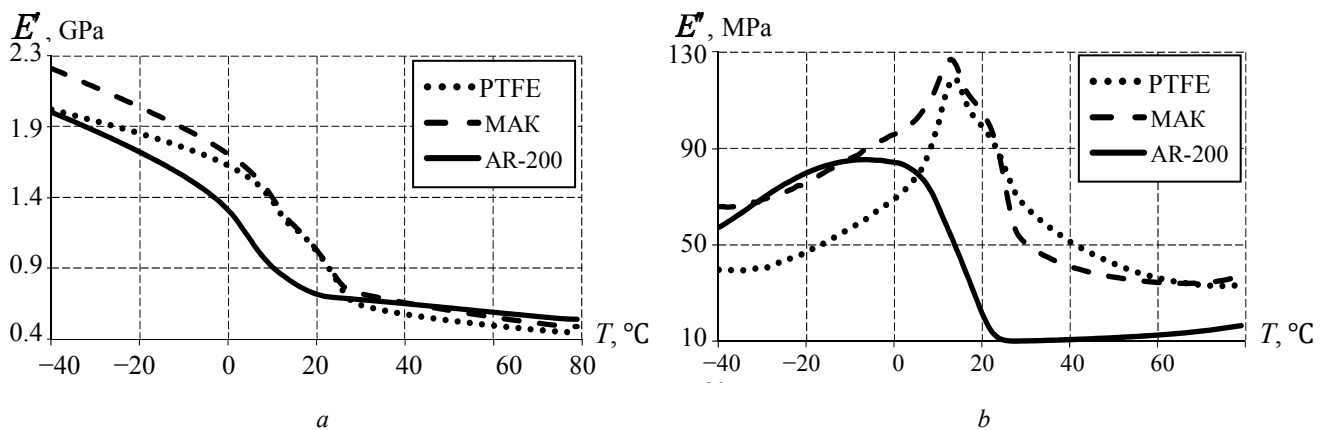


Figure 2. Thermomechanical properties of antifriction interlayer materials:
a — storage modulus; *b* — loss modulus

Source: made by A.P. Bogdanova.

The β -transition temperature of the sliding layer materials has been established, which is considered to be the vitrification/softening temperature of the material according to the GOST R 56753-2015² National Standard of the Russian Federation. The vitrification/softening temperature of PTFE and MAK is

¹ GOST R 59623-2021. *Automobile roads of general use. Bridge constructions. Design of steel elements*. Moscow: Russian Standardization Institute; 2022.

² GOST R 56753-2015. *Plastics. Determination of dynamic mechanical properties*. Moscow: Standartinform; 2016.

approximately 14°C, and that of AR-200 is 8°C. The results of the experiments are consistent with the data from the DMA analysis of PTFE [4].

Based on experimental research data, Maxwell’s model was chosen as a first approximation for phenomenological constitutive relationships describing the viscoelastic behavior of materials. The model is based on Prony series, taking into account the Williams-Landel-Ferry (WLF) temperature-time analogy. To determine the parameters of the vector of unknowns in the Maxwell and WLF models, a user procedure for numerical identification based on the Nelder-Mead multiparametric optimization algorithm was used; the mathematical manipulations and problem statement were described earlier in [26].

The parameters of the viscoelastic model and WLF are presented in Table, and the relationships between the relative shear moduli and the relaxation time are shown in Figure 3.

Parameters of the temperature-time analogy and viscoelastic behavior model of materials

Material	C_1	C_2	$T_r, \text{°K}$	E_0, MPa	E_∞, MPa
PTFE	203.91	849.00	270.21	2021.39	446.32
MAK	299.10	1069.37	263.79	2313.68	489.78
AR-200	103.24	419.18	266.80	2006.57	541.68

Source: made by A.P. Bogdanova, Y.O. Nosov.

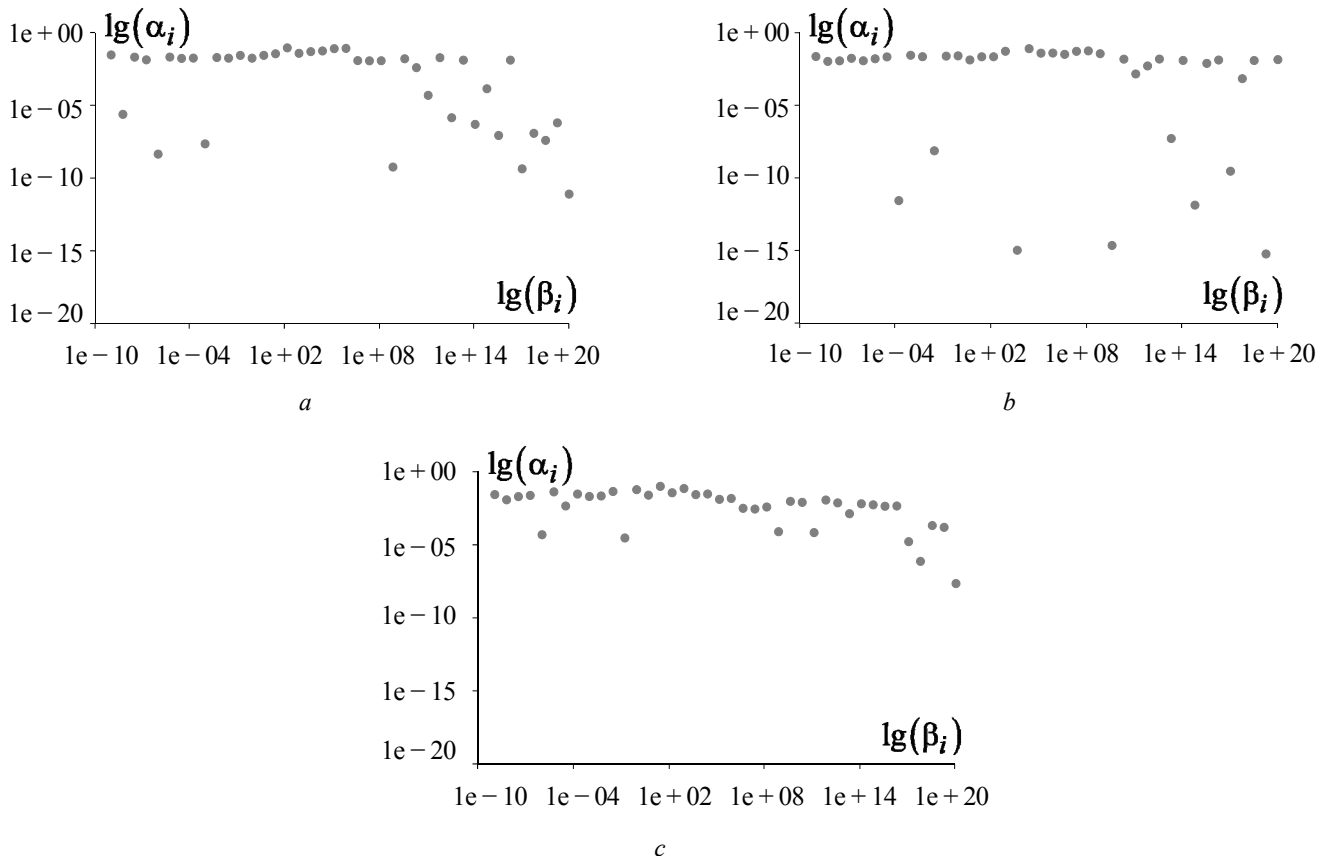


Figure 3. Relationship between the weighting coefficients of the Prony series and the relaxation time:

a — PTFE; *b* — MAK; *c* — AR-200

Source: made by A.A. Kamenskikh, A.P. Bogdanova, Y.O. Nosov.

The model parameters were obtained based on simulation modeling of a three-point bending test, with the results of the numerical experiment deviating from the experimental data by less than 5%. Material behavior models were implemented in ANSYS.

The model takes into account the coefficients of thermal expansion (CTE) of the materials. Independent studies to determine changes in the CTE of materials depending on temperature were not conducted. Literature sources indicate variation ranges of CTE from 8 to $32 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ for PTFE and from 8 to $24\text{--}25 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ for AR-200 [3; 27]. The CTE of materials depends on temperature, but to construct a numerical model that takes into account the temperature variation of the parameter, data on the relationship between thermal deformation and temperature are needed. No data on the CTE for the MAK (F4BR40M2) material was found in the literature. As a first approximation, it was decided to analyze the deformation of the bearing with a constant CTE $\alpha = 8 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, the same for all materials under consideration. It was also decided to investigate the effect of variation of $\alpha(T)$ on the stress-strain response of the bearing with a PTFE sliding layer. The CTE of steel elements was also assumed to be constant $\alpha = 1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ [28].

3. Results and Discussion

3.1. Static Load

Data on the distribution of the stress-strain response parameters and contact parameters of spherical bearings with sliding layers made of different anti-friction materials for the ambient temperature range of $[-40; +80] \text{ }^\circ\text{C}$ were obtained. The relationships between the maximum parameter values and temperature are shown in Figure 4.

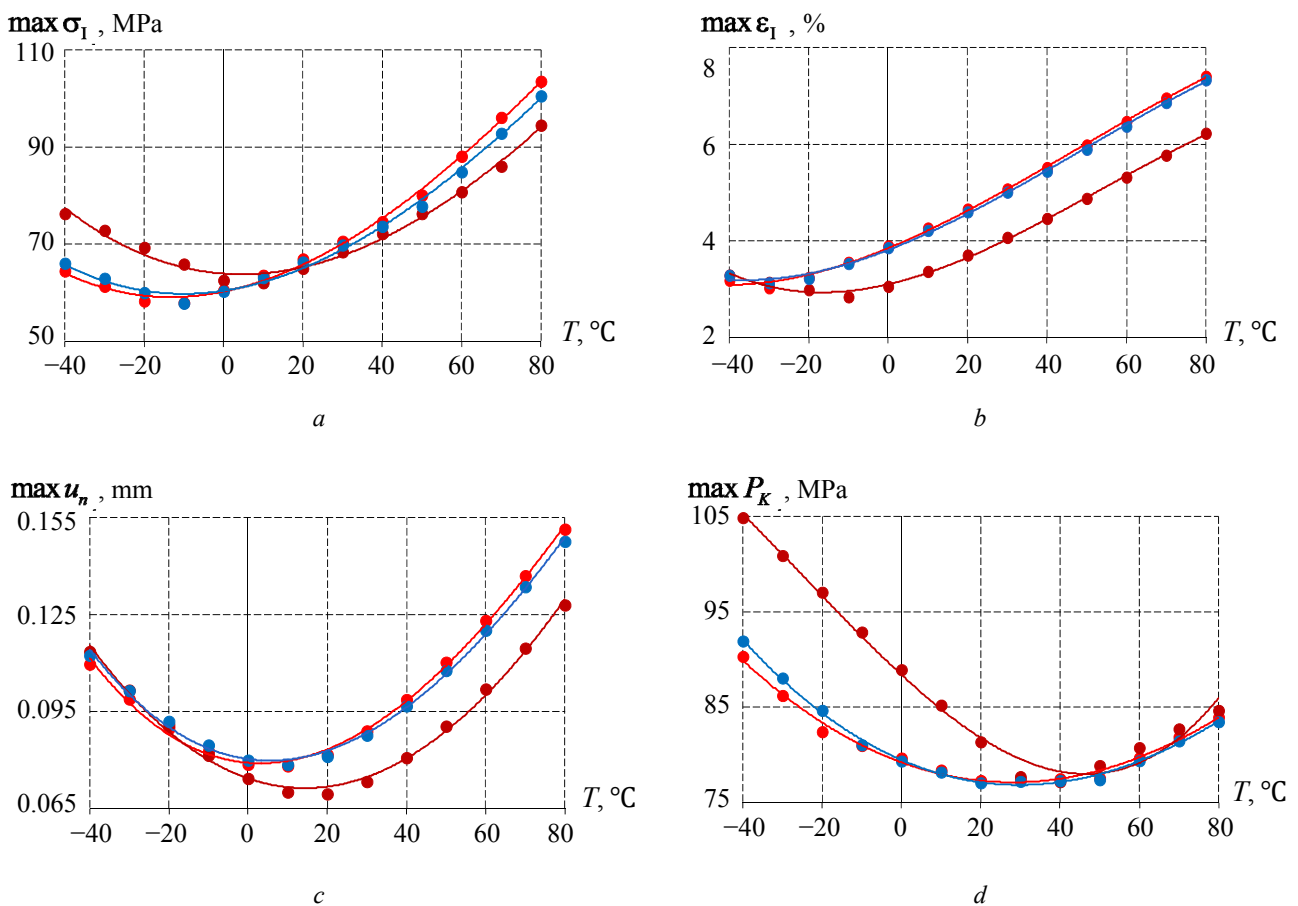


Figure 4. Maximum stress-strain response parameters as a function of temperature:

a — stress intensity; *b* — strain intensity; *c* — normal displacement with respect to the end face; *d* — contact pressure at the interface between the interlayer and the spherical segment; light red is PTFE; dark red is MAK; blue is AR-200

Source: made by A.P. Bogdanova.

The data is described by a third-degree polynomial, with an error of no more than 2%. The maximum stress intensity value decreases until a temperature of -10°C (PTFE, AR-200) and 0°C (MAK), then begins to increase. The maximum strain intensity value changes little at negative temperatures and increases in the positive temperature range. The maximum displacements of the sliding layer end decrease until a temperature of 10°C (PTFE, AR-200) and 20°C (MAK), then begin to increase. This is due to the transition of materials from a glassy state to a highly elastic state. At the same time, the maximum contact pressure on surface S_{K_1} , along which the spherical segment can rotate, decreases until an ambient temperature of 40°C , with a further increase in the parameter. In the temperature range from -40 to $30-40^{\circ}\text{C}$, a detachment zone is observed near the edge of the sliding layer, which is absent at higher temperatures. A redistribution of the zones of complete adhesion and slippage is also observed. The sliding layer made of composite material (MAK) has the smallest values of strain intensity and normal displacements of the sliding layer end. The stress-strain response of the bearings with a sliding layer made of PTFE and AR-200 has insignificant differences. Structural modification of PTFE by radiation as part of the AR-200 manufacturing process allowed to slightly reduce the maximum stress-strain response and contact parameters at temperatures above the vitrification/softening temperature (by no more than 3%). This effect is also due to the fact that at temperatures above room temperature, the material exhibits a greater elastic response compared to PTFE. Similarly, a greater elastic response at $T > 23^{\circ}\text{C}$ compared to PTFE is observed in MAK.

The distribution of the stress-strain response parameters near the edge of the sliding layer is shown in Figure 5 for the case of the structure with a PTFE interlayer at a temperature of 30°C . Normal displacements are shown with a deformation magnification factor to reflect the change in geometry.

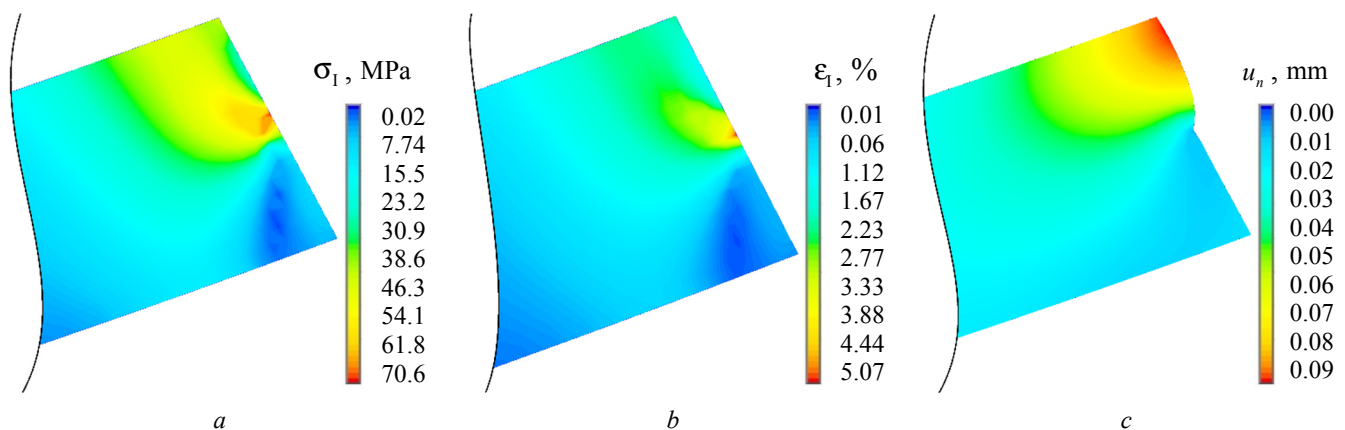


Figure 5. Distribution of the stress-strain response parameters near the edge of the PTFE anti-friction interlayer:
a — stress intensity; b — strain intensity; c — normal displacement with respect to the end face

Source: made by A.A. Kamenskikh.

It should be noted that the maximum stress and strain intensities are observed near the concentrator (the metal rim of the lower steel plate). In the main volume of the sliding layer, the stress intensity value does not exceed the strength limit of the materials. The maximum strain intensity value does not exceed 10% for all the considered materials of the sliding layer and ambient temperatures. The maximum displacements of the sliding layer end are observed near the interface of the interlayer and the upper rocker; for all the considered materials, they do not exceed 0.16 mm.

An analysis of the influence of CTE on the stress-strain response parameters in the case of a PTFE sliding layer is shown in Figure 6.

It should be noted that the CTE of the material has a significant effect on the behavior of the sliding layer of the bearing. Experimental studies aimed at obtaining the relationship between the CTE and temperature for the entire set of materials under consideration need to be performed as part of the

development of a model describing its behavior. The relationship of the effect of CTE on the stress-strain response and contact parameters when the ambient temperature changes is non-linear. The maximum values of the stress-strain response parameters are observed at high positive temperatures, which is associated with the softening of the material and its significant deformation near the rim of the lower steel plate. The maximum value of contact pressure is observed at negative temperatures, which is associated with the crystallization of the material and greater stiffness.

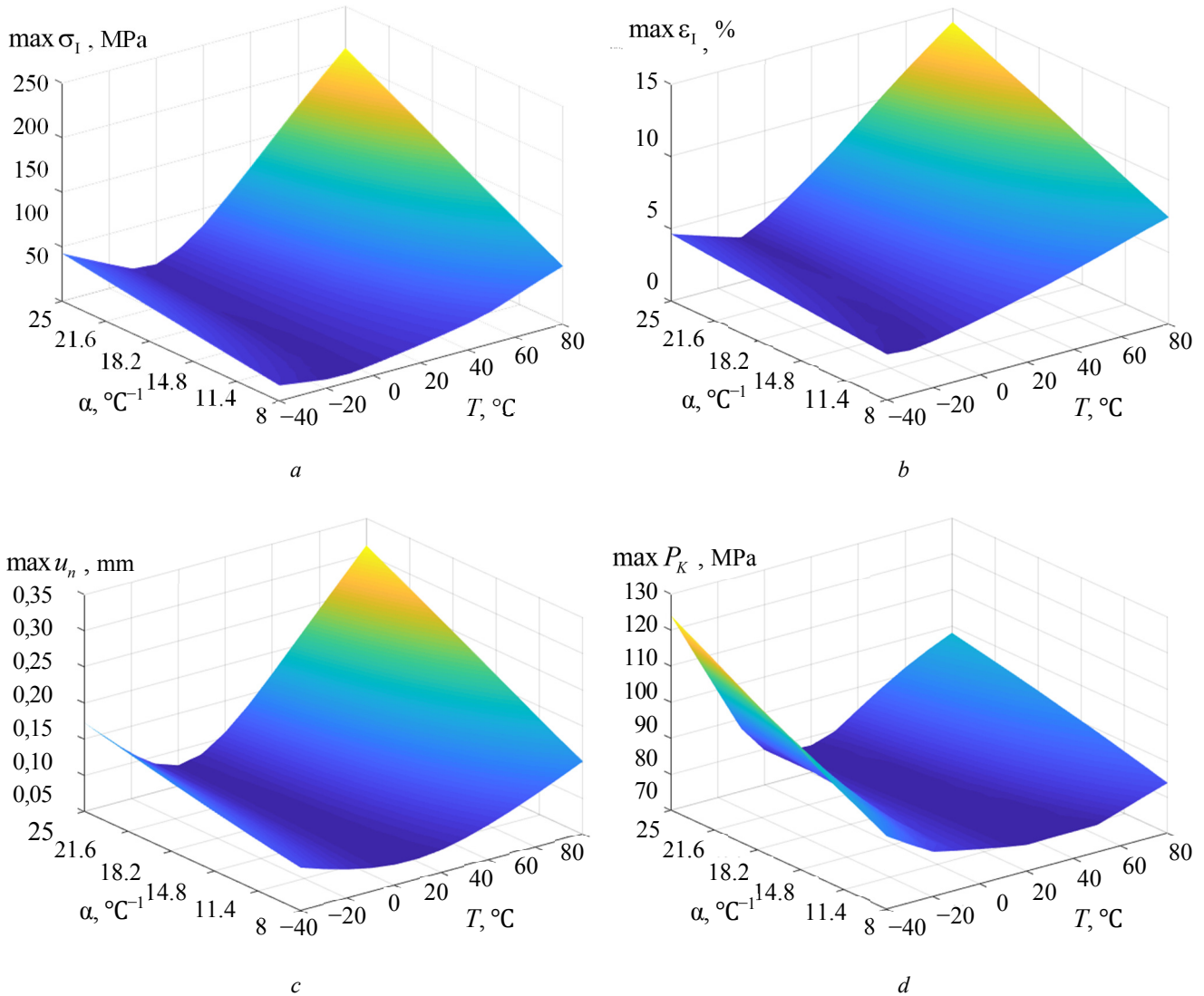


Figure 6. Stress-strain response parameters as functions of temperature and thermal expansion coefficient:

a — stress intensity; *b* — strain intensity; *c* — normal displacement with respect to the end face;
d — contact pressure at the interface between the interlayer and the spherical segment

Source: made by Y.S. Kuznetsova.

The numerical modeling results of the bearing deformation are in good agreement with the data from numerical and field studies [29; 30]. The nature of the stress distribution over the volume of the anti-friction layer and the zone of localization of the maximum values are consistent with the data obtained in [30]. The maximum stress and displacement values are also comparable to the data obtained in [29]. The relationships between temperature and the stress-strain response parameters in the small operating temperature range from -10 to 20°C were obtained in [30] for different load levels on the bearing; the relationships are nonlinear, and it was observed that the parameters decrease with increasing temperature. The results are

partially consistent with the current study, but cannot be quantitatively compared due to the geometric configuration of the structures and different manufacturers of the sliding layer materials. PTFE obtained from different powders, even using relatively similar molding technologies, have different mechanical properties and reactions to external thermomechanical impact [31].

3.2. Periodic Load

As part of the analysis of the effect of periodic loading, it was established that load exposure does not have a strong influence on the stress-strain response and contact parameters. This is due to the fact that the exposure time is significantly less than the relaxation time of the materials.

The relationship between the maximum stress intensity value and the contact pressure on S_{K_1} for 1, 3, and 15 iterations of the loading cycle is shown in Figure 7. The results are presented for a maximum load on the bearing of 1000 kN.

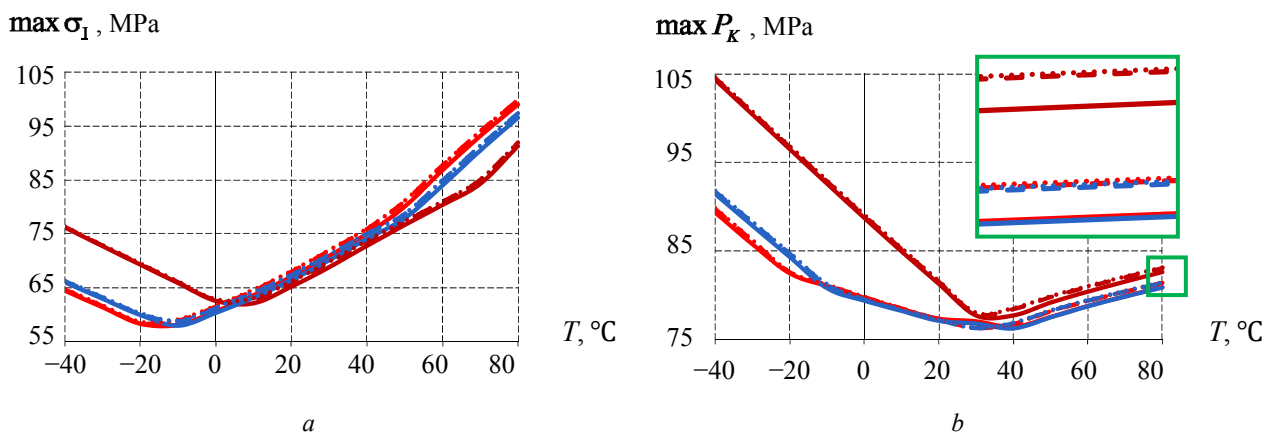


Figure 7. Relationship between the stress-strain response parameters and temperature under periodic loading:

a — stress intensity; b — contact pressure at S_{K_1} ; light red is PTFE; dark red is MAK; blue is AR-200 solid is 1st loading cycle; dashed is 3rd loading cycle; dotted is 15th loading cycle

Source: made by A.P. Bogdanova.

It can be noted that there is an increase in the values of the parameters as the number of periodic load cycles increases. The nature of the change does not depend on the number of load cycles.

Two-parameter relationships $\max \sigma_I(T, N)$ and $\max P_K(T, N)$ are shown in Figure 8. With a small number of periodic load iterations, a smooth, insignificant increase in the parameters is observed across the entire range of ambient temperatures. It was decided to increase the number of periodic load iterations to 50 and 100 cycles. The results are shown in Figure 9 at an ambient temperature of 30°C.

The maximum change in the parameters is observed during the first 5-8 loading cycles, after which the parameters change slowly and reach an asymptote after 25 (PTFE), 54 (MAK), and 46 (AR-200) loading cycles. It can be noted that the maximum stress intensity value is observed in the bearing with a PTFE interlayer, and the minimum — with a MAK interlayer. The relationship between the maximum contact stress value and the number of loading cycles of structures with layers made of different materials differs: with PTFE and AR-200, a decrease in the contact pressure level is observed during the initial loading cycles; with MAK, on the contrary, an increase is observed. The maximum contact pressure value is observed with a MAK interlayer, and the minimum — with AR-200. The differences in the stress-strain response and contact parameters of the structures with PTFE and AR-200 interlayers are insignificant, less than 1.5%. The stress-strain response parameters of the structure with a MAK interlayer compared to PTFE are: $\max \sigma_I$ is ~3% lower; $\max \varepsilon_I$ is ~20% lower; $\max u_n$ is ~17.2% lower.

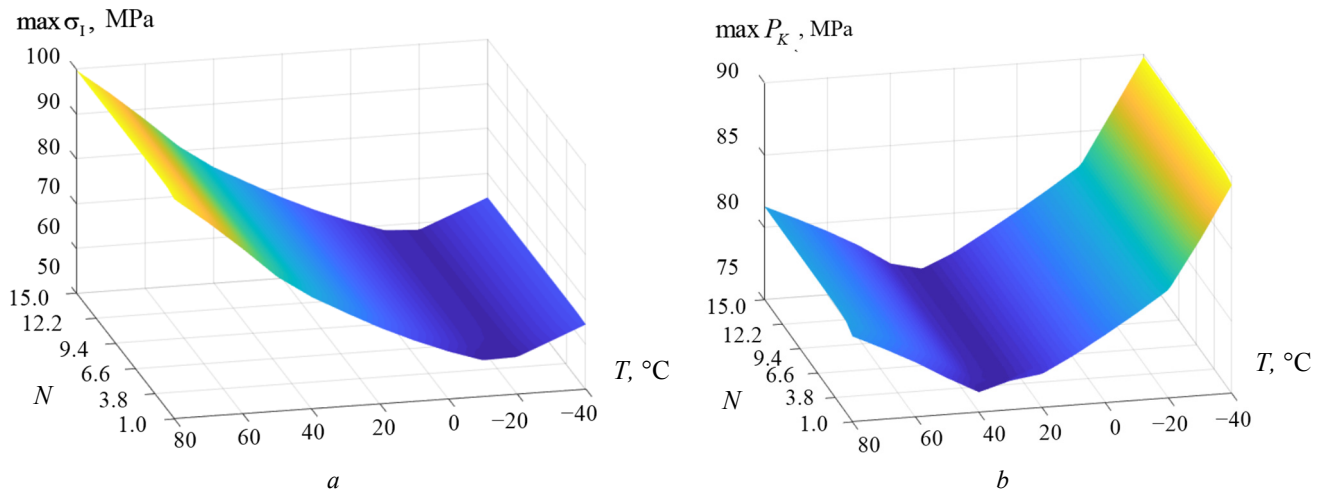


Figure 8. Relationship between the stress-strain response parameters, temperature and periodic load cycle number, PTFE:
 a — stress intensity; b — contact pressure at S_{K_1}

Source: made by Y.S. Kuznetsova.

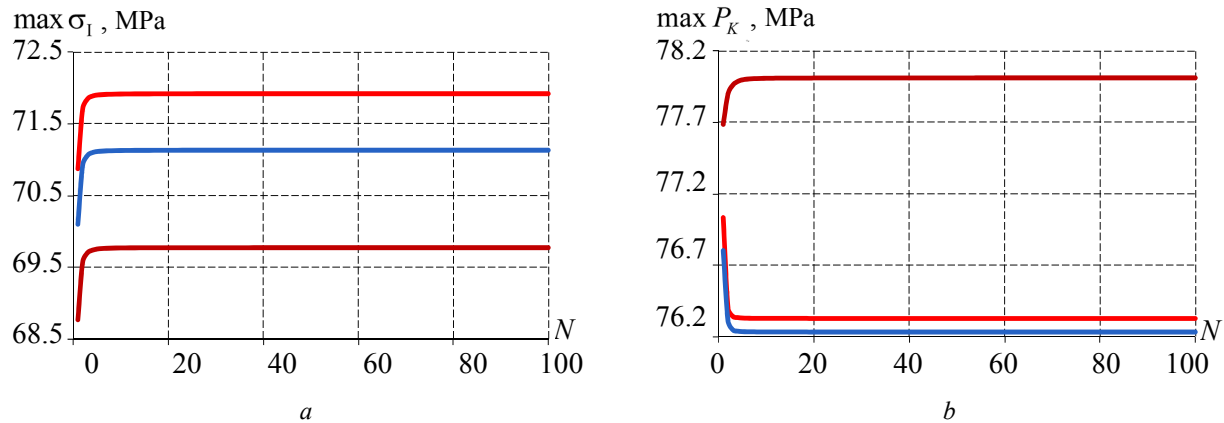


Figure 9. Relationship between the stress-strain response parameters and the periodic load iteration, at $T = 30^\circ\text{C}$:

a — stress intensity; b — contact pressure at S_{K_1} ; light red is PTFE; dark red is MAK; blue is AR-200

Source: made by A.P. Bogdanova.

The maximum change in the parameters is observed during the first 5-8 loading cycles, after which the parameters change slowly and reach an asymptote after 25 (PTFE), 54 (MAK), and 46 (AR-200) loading cycles. It can be noted that the maximum stress intensity value is observed in the bearing with a PTFE interlayer, and the minimum — with a MAK interlayer. The relationship between the maximum contact stress value and the number of loading cycles of structures with layers made of different materials differs: with PTFE and AR-200, a decrease in the contact pressure level is observed during the initial loading cycles; with MAK, on the contrary, an increase is observed. The maximum contact pressure value is observed with a MAK interlayer, and the minimum — with AR-200. The differences in the stress-strain response and contact parameters of the structures with PTFE and AR-200 interlayers are insignificant, less than 1.5%. The stress-strain response parameters of the structure with a MAK interlayer compared to PTFE are: $\max \sigma_1$ is $\sim 3\%$ lower; $\max \varepsilon_1$ is $\sim 20\%$ lower; $\max u_n$ is $\sim 17.2\%$ lower.

The relationships for the stress-strain response parameters of the bearing obtained in the analysis under periodic loading are consistent with the results of [32]. The deformed state of the bearing reaches an asymptote after a certain number of loading cycles, which depends on the materials of the sliding layer, external loads, and environmental conditions.

To minimize the deviation of the material behavior model from the actual object under study, it is necessary to take into account the plastic deformation that has been established experimentally [4; 9; 22]. The construction of Anand's elastic-viscoplastic model for a set of anti-friction materials is one of the areas of development, including taking into account the effect of temperature on activation energy, initial deformation resistance and sensitivity to deformation rate [33].

4. Conclusion

As part of the study, a numerical and experimental analysis of the behavior of three PTFE-based materials, that can be used to varying degrees as relatively thin sliding layers of bridge bearing structures, was conducted. The experimental studies included a dynamic mechanical analysis over a wide temperature range. Numerical studies included an analysis of the behavior of materials described by viscoelasticity theory under static and periodic loading, taking into account the ambient temperature ranging from -40 to $+80$ °C.

The following results were obtained in the course of the study:





1. The temperature dependencies of the storage modulus, loss modulus, and mechanical loss tangent were determined for a set of anti-friction materials.
2. Models of the viscoelastic behavior of materials over a wide temperature range were constructed in terms of the Maxwell model using Prony series and temperature-time analogy based on experimental data.
3. The deformed state of the sliding layers of the bridge bearing was investigated, taking into account the viscoelastic behavior of materials under static and periodic loads in the operating temperature range. It was found that structural modification of PTFE has a negligible effect on the behavior of the material within the friction unit, while the design with a composite material (MAK) interlayer has improved the stress-strain response parameters with a commensurate increase in the contact parameters at temperatures below the vitrification/softening temperature.

References

1. Liang X., Wu P., Lan L., Wang Y., Ning Y., Wang Y., Qin Y. Effect of polytetrafluoroethylene (PTFE) content on the properties of Ni-Cu-P-PTFE Composite Coatings. *Materials*. 2023;16:1966. <https://doi.org/10.3390/ma16051966> EDN: DDKHGZ
2. Bosq N., Guigo N., Persello J., Sbirrazzuoli N. Crystallization of polytetrafluoroethylene in a wide range of cooling rates: nucleation and diffusion in the presence of nanosilica clusters. *Molecules*. 2019;24:1797. <https://doi.org/10.3390/molecules2409179> EDN: QPHYKO
3. Prokimov A., Dzhurinsky K., Smirnova Yu. Promising insulating materials for radio frequency cables and connectors. *Components and technologies*. 2017;2(187):105–113. (In Russ.) EDN: XYEVGL
4. Henri V., Dantras E., Lacabanne C., Dieudonne A., Koliatene F. Thermal ageing of PTFE in the melted state: Influence of interdiffusion on the physicochemical structure. *Polymer Degradation and Stability*. 2020;171:109053. <https://doi.org/10.1016/j.polymdegradstab.2019.10905> EDN: RGQHYD
5. Alaraby M., Abass D., Velázquez A., Hernández A., Marcos R. Polytetrafluoroethylene microplastic properties, pollution, toxicity and analysis: a review. *Environmental Chemistry Letters*. 2025;24:27–59. <https://doi.org/10.1007/s10311-025-01885-w>
6. Li Y., Guo W., Huang X., Chen Z., Gao Y. Friction characteristics and lubrication properties of spherical hinge structure of swivel bridge. *Lubricants*. 2024;12(4):130. <https://doi.org/10.3390/lubricants12040130> EDN: BHWEZL
7. Hu Q., Pei Q., Li P. Reducing the Friction Coefficient of Heavy-Load Spherical Bearings in Bridges Using Surface Texturing — A Numerical Study. *Lubricants*. 2025;13:180. <https://doi.org/10.3390/lubricants13040180>
8. Deng Y., Li A. *Structural health monitoring for suspension bridges*. Singapore: Springer Publ.; 2019. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-3347-7>
9. Maculotti G., Goti E., Genta G., Mazza L., Galetto M. Comprehensive mechanical and tribological characterization of metal-polymer PTFE+Pb/Bronze coating by in-situ electrical contact resistance measurement augmented tribo-mechanical tests. *Tribology International*. 2024;193:109397. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2024.109397> EDN: WUJCPF
10. Calaf-Chica J., Bravo-Díez P.-M., Preciado-Calzada M., García-Tárrago M.-J. Application of the Small Punch Creep-Recovery Test (SPCRT) for the estimation of large-amplitude viscoelastic properties of polymers. *Materials*. 2023;16:1179. <https://doi.org/10.3390/ma16031179> EDN: OEQJSG
11. Kong Y., Liu Z., Meng Y., Sui X., Chen R., Chen Y., Guo S. Fabrication and the film-forming mechanism of thin polytetrafluoroethylene films with enhanced dielectric and mechanical properties. *Polymer*. 2023;281:126118. <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2023.126118> EDN: VQUPRC

12. Liu F., Jin Y., Li J., Jiang W., Zhao W. Improved coefficient thermal expansion and mechanical properties of PTFE composites for high-frequency communication. *Composites Science and Technology*. 2023;241:110142. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2023.110142> EDN: SFBOEX
13. Yi X., Du S., Zhang L. *Composite materials engineering, volume 1: fundamentals of composite materials*. Singapore: Springer Publ.; 2018. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5696-3>
14. Kamenskikh A.A., Bogdanova A.P., Nosov Y.O., Kuznetsova Y.S. Influence of the pattern of coupling of elements and antifriction interlayer thickness of a spherical bearing on structural behavior. *Designs*. 2025;9:117. <https://doi.org/10.3390/designs9050117>
15. Morozova Z.V., Salnikov A.V. Development of a protective coating for structures with increased corrosion resistance and icing resistance. *Resources of the European North. Exploration Technologies and Economics*. 2018;3(13): 18–30. (In Russ.) EDN: VREWWQ
16. Shelestova V.A., Grakovich P.N., Danchenko S.G. “Superfluvis” composite and its use in friction joints. *Inorganic Materials: Applied Research*. 2012;4(72):210–216. (In Russ.) EDN: PLCTUH
17. Dovnar A., Zhuk I., Luchko A., Grakovich P. Morphological features of osteointegration of the implant made of the composite material Superfluvis in cranioplastic operations. *Neurology and Neurosurgery Eastern Europe*. 2022;12(2): 176–185. (In Russ.) <https://doi.org/10.34883/PI.2022.12.2.045>
18. Vinogradov E., Valko N. Effect of X-ray radiation on the mechanical properties of fluoroplast. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*. 2025; 15(2):104–111. (In Russ.) EDN: ZTLWCS
19. Adamov A.A., Kamenskikh A.A., Pankova A.P., Strukova V.I. Comparative analysis of the work of bridge spherical bearing at different antifriction layer locations. *Lubricants*. 2022;10(9):207. <https://doi.org/10.3390/lubricants10090207> EDN: XRYZSQ
20. Wang Q.J., Chung Y.W. *Encyclopedia of tribology*. Boston: Springer Publ.; 2013. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-92897-5>
21. Ahmad J., Niasar M.G. Aging behavior of PEEK, PTFE, and PI insulation materials under thermal oxidative and humid conditions for aerospace applications. *Journal of Applied Polymer Science*. 2025;142:e56858. <https://doi.org/10.1002/app.56858>
22. Adamov A.A., Keller I.E., Ostrer S.G., Seletkov D.V. Evaluation of the performance of antifriction PTFE composites at a pressure over 60 MPa. I. Comparison of their hardness and deformation properties under free and constrained compression. *Mechanics of Composite Materials*. 2022;58(5):673–688. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10058-7> EDN: GWMXZY
23. Than V.-T., Wang C.-C., Ngo T.-T., Lin C.-H. Thermal behavior of polytetrafluoroethylene in the sintering process. *Thermal Science and Engineering Progress*. 2022;30:101247. <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2022.101247> EDN: NGPRIU
24. Nosov Y.O., Kamenskikh A.A. Influence analysis of lubricant recesses on the working capacity of the bridge span spherical bearing. *Lubricants*. 2022;10:283. <https://doi.org/10.3390/lubricants10110283> EDN: BHIFOC
25. Kamenskikh A.A., Trufanov N.A. Regularities of interactions between elements of a spherical contact unit with an antifriction polymeric interlayer. *Journal of Friction and Wear*. 2015;36:170–176. <https://doi.org/10.3103/S1068366615020075> EDN: UFUXDX
26. Kamenskikh A.A., Nosov Y.O., Bogdanova A.P. The study influence analysis of the mathematical model choice for describing polymer behavior. *Polymers*. 2023;15:3630. <https://doi.org/10.3390/polym15173630> EDN: GIKSXV
27. Barsukov V.G., Dal Yu.M., Lubovskaya R.A., Barsukov V.V. Estimation of thermoelastic stresses in the vicinity of fibrous and particulate fillers in composite materials based on fluoropolymers. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 6. Engineering Science*. 2015;2(204):6–13. (In Russ.) EDN: YQPGGR
28. Ashmarin A.A., Betsofen S.Ya., Lozovan A.A., Lukin E.I., Gordeeva M.I., Mitrofanov A.L., Bykadorov A.N. Thermal Expansion of TRIP Steels and Composite Coatings. *Russian Metallurgy (Metally)*. 2024;2024(2):379–386. <https://doi.org/10.1134/S0036029524700691> EDN: FMEWNN
29. Yan L., Gou XY., Zhang X., Jiang Y., Ran X.W., Zhang P. Experimental and numerical investigations on the spherical steel bearing capacity of new anti-separation design. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2024;28(2):889–903. <https://doi.org/10.1007/s12205-023-1172-z> EDN: JMOPYL
30. Deng N., He M., Gu N., Liang H. Design and performance research of a new type of spherical force-measuring bearing of bridges based on button type microsensor. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2024;28:5066–5076. <https://doi.org/10.1007/s12205-024-2646-3> EDN: YDQVSO
31. Shindalkar S.S., Humbe S.S., Joshi G.M., Kumar C.R. Engineering properties of Teflon derived blends and composites: a review. *Polymer-Plastics Technology and Materials*. 2022;61(18):1973–1987. <https://doi.org/10.1080/25740881.2022.2086815> EDN: UHTTSF
32. Kang X., Zhang M., Qin H., Zeng L., Peng L., Wang X., Deng L., Hu J., Li Zh., Shao G., Lin Q. Experimental and numerical study on the earthquake damage of spherical bearings for chinese high-speed railway bridge. *Shock and Vibration*. 2022;2022:8304408. <https://doi.org/10.1155/2022/8304408> EDN: YDNQXA
33. Nosov Y.O., Kamenskikh A.A., Bogdanova A.P. Description of the lubricant behavior based on the theory of elasto-viscoplastic. *Materials*. 2025;18:1360. <https://doi.org/10.3390/ma18061360> EDN: OYHTVP

Расчет на вынужденные колебания с учетом нелинейности деформирования: теория и реализация

В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{1,2}, М. Жаззан¹, К. Пхеаром¹

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ markovich-as@rudn.ru

Поступила в редакцию: 19 декабря 2025 г.

Доработана: 10 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 15 февраля 2026 г.

Аннотация. Описана процедура конечно-элементного расчета конструкций на вынужденные колебания в линейной и нелинейной постановке с использованием метода прямого интегрирования дифференциальных уравнений движения. Данная программа реализована в вычислительном комплексе ПРИНС, разрабатываемом авторами для использования в инженерно-технических и научных целях. Процедура предусматривает возможность учета силовых воздействий на надземную часть конструкций как непосредственно, так и вследствие землетрясений. Определенный класс конструкций работает в режиме меняющихся во времени нагрузок, для которых возникающие при этом нелинейные эффекты могут существенным образом сказаться на их напряженно-деформированном состоянии. Динамический расчет таких конструкций должен выполняться методами прямого интегрирования с учетом нелинейности деформирования. Следовательно, разработка методов расчета конструкций на вынужденные колебания с учетом физической и геометрической нелинейности является приоритетной задачей вычислительной механики в таких областях, как космонавтика, авиа- и автомобилестроение, машиностроение и строительство. Цель исследования — разработка алгоритма и программы нелинейного динамического расчета конструкций методом конечных элементов. Для решения дифференциальных уравнений использован метод Ньюмарка. При этом учет нелинейности деформирования выполняется на основании ранее предложенных авторами методик. Разработанная методика расчета конструкций на вынужденные колебания в нелинейной постановке адаптирована к программе ПРИНС. Приведен пример тестового расчета консольного стержня на действие импульса силы как с учетом, так и без учета нелинейности деформирования. Проанализированы полученные результаты. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения инженерных задач, связанных с расчетом конструкций на вынужденные колебания.

Ключевые слова: метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, строительные конструкции, массивные железобетонные сооружения, физическая нелинейность, пластичность, теория течения, механика деформируемых тел

Вклад авторов: Агапов В.П. — концепция исследования, научное руководство, написание текста, визуализация, валидация; Маркович А.С. — концепция исследования, написание текста, визуализация, верификация, валидация; Жаззан М., Пхеаром К. — подбор и форматирование списка литературы. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, доктор технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434; ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Жаззан Муханнад, аспирант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0009-0008-1185-5166; e-mail: jazzan.m@mail.ru

Пхеаром Квенг, аспирант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0009-0002-1287-9430; e-mail: 1042215172@rudn.ru

© Агапов В.П., Маркович А.С., Жаззан М., Пхеаром К., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Агапов В.П., Маркович А.С., Жаззан М., Пхеаром К. Расчет на вынужденные колебания с учетом нелинейности деформирования: теория и реализация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 1. С. 16–27. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-16-27> EDN: IDQWOZ

Analysis of Forced Vibrations Taking into Account Nonlinear Deformation: Theory and Implementation

Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich^{1,2}, Muhannad Jazzan¹, Kweng Phearom¹

¹RUDN University, Moscow, Russian Federation

²Moscow State University Of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ markovich-as@rudn.ru

Received: December 19, 2025

Revised: February 10, 2026

Accepted: February 15, 2026

Abstract. The research describes the procedure for finite element analysis of structures under forced vibration in a linear and nonlinear setting using the method of direct integration of differential equations of motion. This program is implemented in the PRINS FEM software, developed by the authors for engineering, technical and scientific purposes. The procedure allows to take into account the action of forces on the above-ground part of structures due to earthquakes. A certain class of structures operates under time-varying loads, for which the resulting nonlinear effects can affect their stress-strain state. Dynamic analysis of such structures should be performed using direct integration methods, taking into account the nonlinearity of deformation. Consequently, the development of methods for forced vibration analysis of structures taking into account physical and geometric nonlinearity is a priority task in such areas as astronautics, aircraft and automobile manufacturing, mechanical engineering and construction. The purpose of this study is to develop an algorithm and a program for nonlinear dynamic analysis of structures using FEM. The direct dynamic calculation is based on the Newmark's method. Nonlinear deformation is accounted for using the authors' proposed methods. The developed method of forced vibration analysis of structures in a nonlinear setting has been adapted to the PRINS FEM program. An example of a test calculation of a cantilever bar subjected to a force impulse is provided. The obtained results are analyzed. *Conclusions.* The PRINS FEM program can be effectively used by engineers in design and scientific organizations to solve engineering problems related to the analysis of structures under forced vibrations.

Keywords: finite element method, PRINS computational software, building structures, mass concrete structures, physical nonlinearity, plasticity, flow theory, structural mechanics

Authors' contribution: Agapov V.P. — general research concept, scientific guidance, writing, visualization, verification, validation; Markovich A.S. — general research concept, scientific guidance, writing, visualization, verification, validation; Jazzan M., Phearom K. — selection and formatting of the list of references. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

For citation: Agapov V.P., Markovich A.S., Jazzan M., Phearom K. Analysis of forced vibrations taking into account nonlinear deformation: theory and implementation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):16–27. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-16-27> EDN: IDQWOZ

1. Введение

Предпосылки для динамического расчета конструкций в нелинейной постановке обусловлены развитием компьютерных технологий, с одной стороны, и развитием численных методов строительной механики, в первую очередь метода конечных элементов [1; 2] — с другой. Для решения уравне-

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Metal and Timber Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Muhannad Jazzan, PhD student of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0009-0008-1185-5166; e-mail: jazzan.m@mail.ru

Kweng Phearom, PhD student of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0009-0002-1287-9430; e-mail: 1042215172@rudn.ru

ний движения используются явные и неявные методы прямого интегрирования. Эти методы изложены во многих работах, например [3–6]. Кроме того, широко известны алгоритмы и принципы статического расчета конструкций методом конечных элементов с учетом физической (трещинообразование, пластичность, ползучесть) и геометрической (большие перемещения и повороты) нелинейности [7; 8]. Эти принципы реализованы в ряде иностранных программ (ANSYS, ABAQUS, DYNA и др.).

Однако ряд конструкций работает в режиме меняющихся во времени нагрузок. Возникающие при этом нелинейные эффекты могут существенным образом оказать влияние на конечное напряженно-деформированное состояние. Динамический расчет таких конструкций следует вести методами прямого интегрирования с учетом нелинейности деформирования, что предполагает выполнение некоторых итерационных процедур на каждом шаге интегрирования. Так как при расчете сложных систем количество временных шагов может измеряться десятками тысяч, такой расчет требует значительных вычислительных ресурсов и временных затрат и с наибольшей эффективностью может быть реализован на компьютерах с высокой производительностью.

Несмотря на это, на сегодняшний день разработка методов динамического расчета конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности является приоритетной задачей вычислительной механики в таких областях, как космонавтика, авиа- и автомобилестроение, машиностроение и строительство.

Методика такого расчета разработана авторами настоящей статьи и реализована в программе ПРИНС. В основу динамического расчета положен метод Ньюмарка [3]. При этом основные положения учета нелинейности деформирования сформулированы авторами в работах [9–12].

2. Метод

Уравнение для расчета конструкций на вынужденные колебания методом конечных элементов в форме метода перемещений в приращениях получено в [13] в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{nl_1} + \mathbf{K}_{nl_2}] \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t), \quad (1)$$

где \mathbf{M} — матрица масс; \mathbf{D} — матрица демпфирования; \mathbf{K}_0 , \mathbf{K}_{nl_1} и \mathbf{K}_{nl_2} — матрицы жесткости нулевого, первого и второго порядков; \mathbf{K}_σ — матрица начальных напряжений (геометрическая матрица жесткости); \mathbf{u} — вектор перемещений; $\Delta \mathbf{P}$ и $\Delta \mathbf{u}$ — векторы приращений нагрузки и перемещений при переходе конструкции из состояния в момент времени t в состояние в момент времени $t + \Delta t$.

Способы формирования матриц \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K}_0 и \mathbf{K}_σ широко известны и описаны многими авторами (например, [1; 2]). Методика построения нелинейных матриц жесткости \mathbf{K}_{nl_1} и \mathbf{K}_{nl_2} приведена в [13].

Выражение

$$\Delta \mathbf{P} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{P}_{ext}, \quad (2)$$

стоящее в правой части уравнения (1), представляет собой внешнюю нагрузку для шага нагружения. Согласно условиям равновесия, равнодействующая внутренних сил \mathbf{P}_{int} в момент времени $t + \Delta t$, приведенная к узлам конструкции, должна быть равна внешним силам, т.е. должно соблюдаться равенство

$$\mathbf{P}_{ext} = \mathbf{P}_{int}. \quad (3)$$

Равнодействующая внутренних сил \mathbf{P}_{int} определяется силами упруго-пластического сопротивления, демпфирующими и инерционными силами. Таким образом,

$$\mathbf{P}_{int} = \mathbf{P}_\sigma + \mathbf{P}_{damp} + \mathbf{P}_{iner}, \quad (4)$$

где слагаемые, стоящие в правой части уравнения (4), соответствуют перечисленным выше внутренним силам и определяются следующим образом:

$$\mathbf{P}_\sigma = \sum \mathbf{p}_{\sigma,el}, \mathbf{P}_{damp} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t), \quad \mathbf{P}_{iner} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t). \quad (5)$$

При этом

$$\mathbf{p}_{\sigma,el} = -\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (6)$$

где \mathbf{B} — матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений (геометрическая матрица).

При учете нелинейности деформирования напряжения на каждом шаге должны корректироваться с учетом принятых моделей деформирования материалов, что может привести к нарушению условий равновесия. Возникающая при этом невязка может быть минимизирована с помощью итерационного процесса, который представляется в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{K}\Delta\mathbf{u}_i = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t), \quad (7)$$

где i — номер итерации.

Вектор невязки $\mathbf{P}_{err,i-1}$ в момент времени $t + \Delta t$ находится как разность между текущим значением нагрузки \mathbf{P} и статическим эквивалентом внутренних сил, т.е.

$$\mathbf{P}_{err,i-1} = \mathbf{P}(t + \Delta t) - [\mathbf{P}_\sigma(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]. \quad (8)$$

Этот процесс следует продолжать до достижения заданной точности, которую можно оценить сравнением полных значений шаговых перемещений для двух соседних итераций. Погрешность решения можно оценить, в частности, по формуле

$$rtol = \frac{\|\Delta\mathbf{u}_{i+1}\| - \|\Delta\mathbf{u}_i\|}{\|\Delta\mathbf{u}_{i+1}\|}, \quad (9)$$

где $\|\Delta\mathbf{u}\|$ — норма шаговых значений перемещений.

Полные значения перемещений и напряжений будут равны

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}(t + \Delta t) \quad (10)$$

и

$$\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\sigma}(t) + \Delta\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) \quad (11)$$

соответственно.

Для решения уравнения (7) используется метод Ньюмарка, основанный на представлении скоростей и перемещений при переходе конструкции из состояния t в состояние $t + \Delta t$ в виде

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + [(1 - \beta)\ddot{\mathbf{u}}(t) + \beta\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]\Delta t \quad (12)$$

и

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t)\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}(t) + \alpha\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2. \quad (13)$$

Решая уравнение(13) относительно $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$ и подставляя полученное значение в (12), получаем следующие соотношения:

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = \frac{\Delta u}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\dot{u}(t)}{\alpha \Delta t} + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \ddot{u}(t) \quad (14)$$

и

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + [(1 - \beta)\ddot{u}(t) + \beta\ddot{u}(t + \Delta t)]\Delta t = \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \Delta u + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \dot{u}(t) + \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \ddot{u}(t). \quad (15)$$

Введем обозначения:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\beta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = 1 - \frac{1}{2\alpha}, \quad a_4 = 1 - \frac{\beta}{\alpha},$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\beta}{\alpha}\right), \quad a_6 = \Delta t(1 - \beta), \quad a_7 = \beta \Delta t. \quad (16)$$

С учетом выражений (16) функции (14) и (15) принимают вид

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t),$$

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + a_6 \ddot{u}(t) + a_7 \ddot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + a_6 \ddot{u}(t) + a_7 [a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)]. \quad (17)$$

Обозначая $[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{nl_1} + \mathbf{K}_{nl_2}] = \mathbf{K}$, подставим полученные выражения для $\dot{u}(t + \Delta t)$ и $\ddot{u}(t + \Delta t)$ в уравнение (7). При этом имеем

$$\mathbf{M} [a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)]_i + \mathbf{D} [\dot{u}(t) + a_6 \ddot{u}(t) + a_7 \ddot{u}(t + \Delta t)]_i + \mathbf{K} \Delta u_i =$$

$$= \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M} \ddot{u}(t) + \mathbf{D} \dot{u}(t), \quad (18)$$

или

$$\mathbf{M} [a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)]_i + \mathbf{D} [a_0 a_7 \Delta u + \dot{u}(t)(1 - a_2 a_7) + \ddot{u}(t)(a_6 + a_3 a_7)]_i +$$

$$+ \mathbf{K} \Delta u_i = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M} \ddot{u}(t) + \mathbf{D} \dot{u}(t). \quad (19)$$

Учитывая, что

$$a_1 = a_7 a_0 = \frac{\beta}{\alpha \Delta t}, \quad a_4 = 1 - a_7 a_2 = 1 - \frac{\beta}{\alpha}, \quad a_5 = a_6 + a_7 a_3 = \left(1 - \frac{\beta}{2\alpha}\right) \Delta t \quad (20)$$

формула (19) представляется в виде

$$\mathbf{M} [a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)]_i + \mathbf{D} [a_1 \Delta u + a_4 \dot{u}(t) + a_5 \ddot{u}(t)]_i +$$

$$+ \mathbf{K} \Delta u_i = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M} \ddot{u}(t) + \mathbf{D} \dot{u}(t). \quad (21)$$

В уравнении (21) перенесем все известные величины из левой части в правую. При этом получим

$$\mathbf{M} (a_0 \Delta u)_i + \mathbf{D} (a_1 \Delta u)_i + \mathbf{K} \Delta u_i =$$

$$= \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{f} + \mathbf{M} \ddot{u}(t) - \mathbf{M} [a_3 \ddot{u}(t) - a_2 \dot{u}(t)]_i + \mathbf{D} \dot{u}(t) - \mathbf{D} [a_4 \dot{u}(t) + a_5 \ddot{u}(t)]_i =$$

$$= \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{f} + \mathbf{M} [a_2 \dot{u}(t) + (1 - a_3) \ddot{u}(t)]_i + \mathbf{D} [(1 - a_4) \dot{u}(t) - a_5 \ddot{u}(t)]_i. \quad (22)$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{K}_{eq}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{P}_{eq}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eq} &= \mathbf{M}a_0 + \mathbf{D}a_1 + \mathbf{K}, \\ \mathbf{P}_{eq} &= \Delta\mathbf{P} + \mathbf{P}_{err} + \mathbf{M}[a_2\dot{\mathbf{u}}(t) + (1-a_3)\ddot{\mathbf{u}}(t)]_i + \mathbf{D}[(1-a_4)\dot{\mathbf{u}}(t) - a_5\ddot{\mathbf{u}}(t)]_i. \end{aligned} \quad (24)$$

В формуле для \mathbf{P}_{eq} можно выделить часть, которая на шаге нагружения остается постоянной, а именно:

$$\mathbf{P}_{eq}^{const} = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{M}[a_2\dot{\mathbf{u}}(t) + (1-a_3)\ddot{\mathbf{u}}(t)]_i + \mathbf{D}[(1-a_4)\dot{\mathbf{u}}(t) - a_5\ddot{\mathbf{u}}(t)]_i. \quad (25)$$

Тогда полное значение эквивалентной нагрузки примет вид

$$\mathbf{P}_{eq} = \mathbf{P}_{eq}^{const} + \mathbf{P}_{err}. \quad (26)$$

Метод Ньюмарка является, безусловно, устойчивым при $\alpha = 0,25$ и $\beta = 0,5$, а при $\alpha = 0$ и $\beta = 0,5$ образует центрально разностную схему.

Решив систему алгебраических уравнений (23) относительно приращений перемещений $\Delta\mathbf{u}$ на временном шаге, скорости и ускорения в конце шага интегрирования можно найти по формулам (17).

Описанный алгоритм расчета конструкций на вынужденные колебания реализован в вычислительном комплексе ПРИНС [14], разрабатываемом авторами данной статьи. При этом принята концепция сосредоточенных масс, а матрица демпфирования вычисляется либо в зависимости от модальных коэффициентов демпфирования по методике, описанной в работе [5], либо по известной формуле Релея [15]. Возможен также учет сосредоточенных демпферов. В расчетах по предложенной методике могут быть использованы все типы конечных элементов и материалов, входящие в соответствующие библиотеки программы ПРИНС (см., например, [9] и [14]).

3. Результаты и обсуждение

Разработанная программа протестирована на отладочном примере, описанном ниже. Пример выбран исходя из наличия в литературе известных результатов теоретического расчета для рассматриваемого класса задач. Так, за основу был взят пример 6.1, приведенный в книге Клафа и Пензиена [5].

Рассчитывалась стойка, несущая сосредоточенную массу и нагруженная треугольным импульсом силы, как показано на рис. 1.

Конструкция рассчитывалась при следующих исходных данных: $m = 43817$ кг; $d = 9,611$ см; $\Delta t = 0,005$ с; число шагов интегрирования $n = 100$.

Стойка моделировалась балочными конечными элементами. При этом по высоте стойка была разбита на 10 элементов (рис. 1, в). Собственный вес стойки не учитывался. Найденная по программе ПРИНС частота собственных колебаний составила $\omega = 30$ рад/с, соответствующий ей период равен $T = 0,209$ с.

В процессе отладки выполнялись как линейный динамический расчет, так и динамический расчет с учетом геометрической нелинейности конструкции.

Результаты линейного и нелинейного расчетов по программе ПРИНС без учета демпфирования приведены на рис. 2 и рис. 3 в виде зависимости горизонтального перемещения и ускорения точки приложения силы от времени. Результаты линейного расчета, полученные по программе ПРИНС, практически совпали с результатами аналитического решения, приведенного в работе [5].

Аналогичные результаты с учетом демпфирования, также полученные по программе ПРИНС, представлены на рис. 4–7. Демпфирование принималось равным 5 и 10 % от критического соответственно.

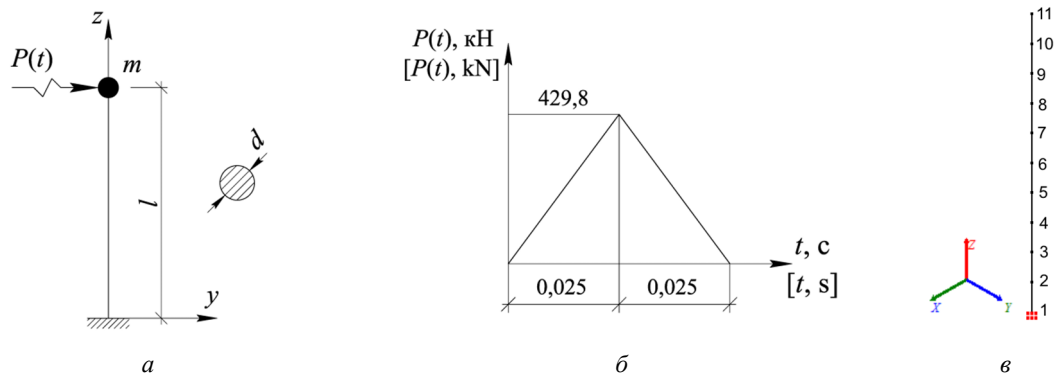


Рис. 1. Рассчитываемая конструкция:
a — расчетная схема; *б* — импульсное воздействие
 Источник: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 1. Analysed structure:
a — model; *б* — impulse excitation
 Source: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

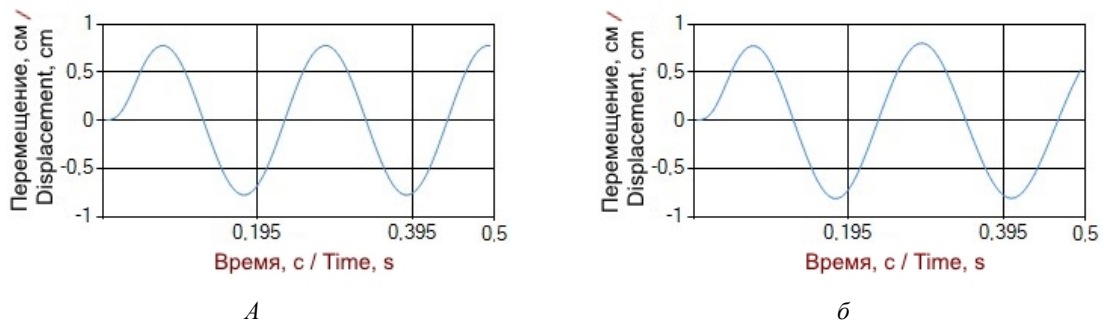


Рис. 2. Горизонтальное перемещение узла № 11 без учета демпфирования:
a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете
 Источник: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 2. Horizontal displacement of node No. 11 of the structure without damping:
a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis
 Source: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

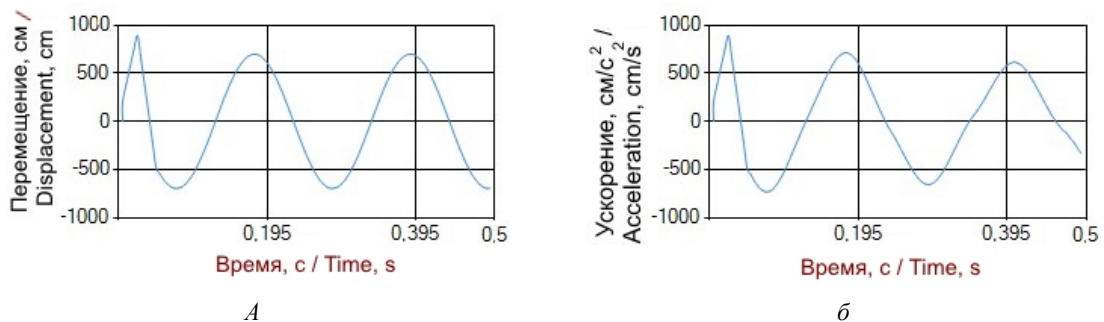


Рис. 3. Горизонтальное ускорение узла № 11 без учета демпфирования:
a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете
 Источник: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 3. Horizontal acceleration of node No. 11 of the structure without damping:
a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis
 Source: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

Соответствующие указанным зависимостям (рис. 2–7) деформированные схемы стойки на характерных шагах интегрирования приведены на рис. 8–10.

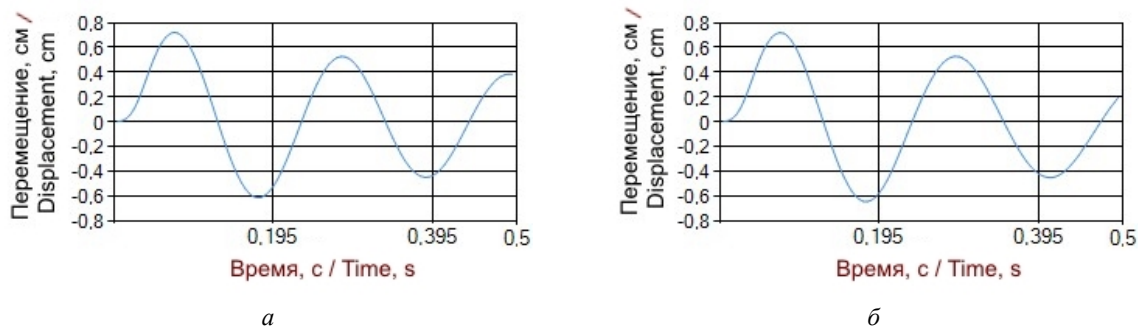


Рис. 4. Горизонтальное перемещение узла № 11 при демпфировании 5 % от критического:

a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 4. Horizontal displacement of node No. 11 of the structure with damping at 5% of the critical:

a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

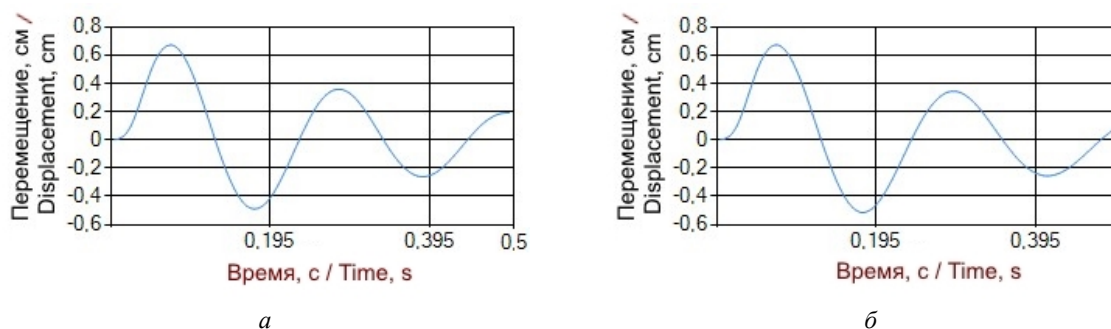


Рис. 5. Горизонтальное перемещение узла № 11 при демпфировании 10 % от критического:

a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 5. Horizontal displacement of node No. 11 of the structure with damping at 10% of the critical:

a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

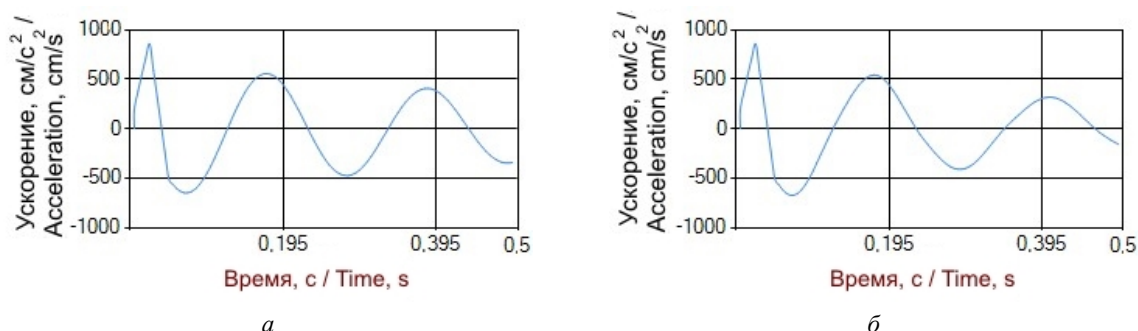


Рис. 6. Горизонтальное ускорение узла № 11 при демпфировании 5 % от критического:

a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 6. Horizontal acceleration of node No. 11 of the structure with damping at 5% of the critical:

a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

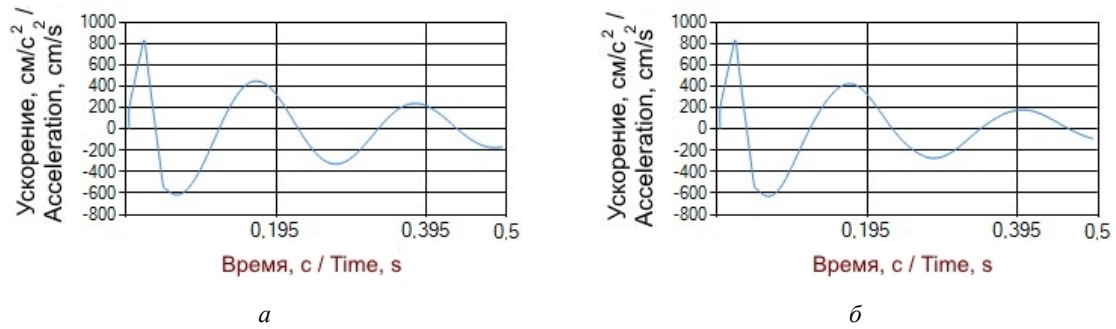


Рис. 7. Горизонтальное ускорение узла № 11 при демпфировании 10 % от критического:

a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 7. Horizontal acceleration of node No. 11 of the structure with damping at 10% of the critical:

a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

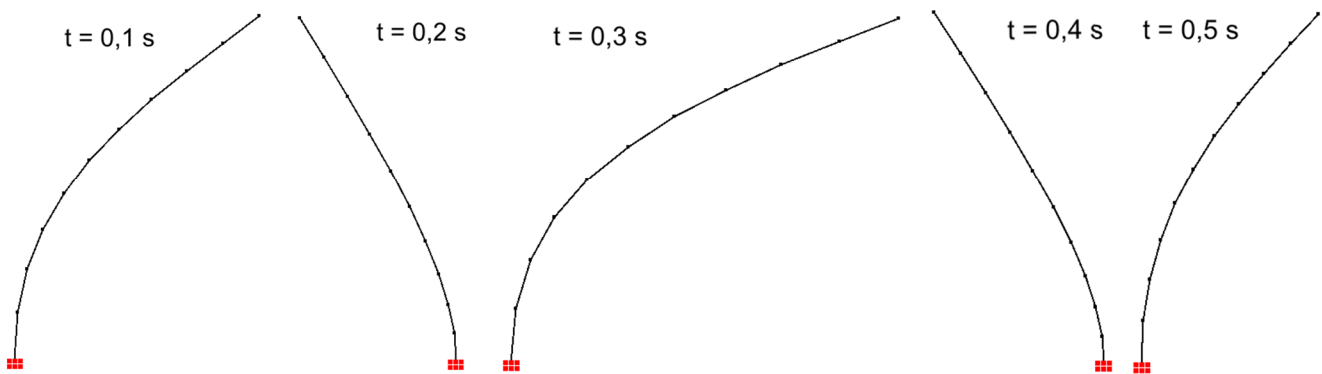


Рис. 8. Вынужденные колебания конструкции без учета демпфирования

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 8. Forced vibrations of the structure without damping

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

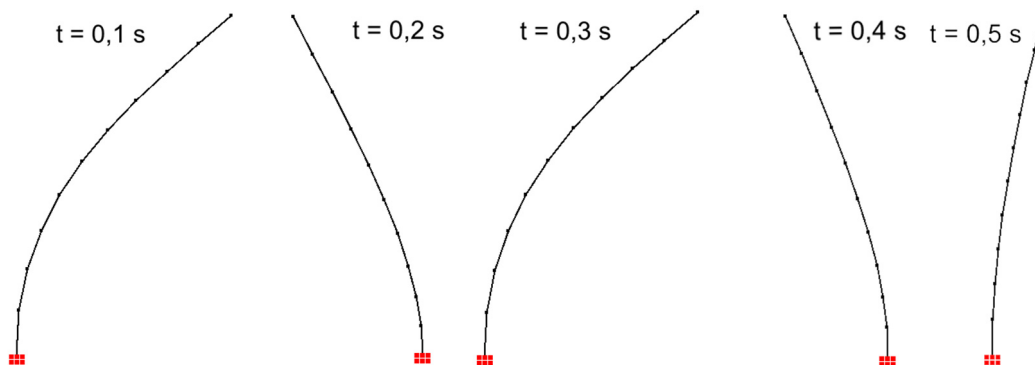


Рис. 9. Вынужденные колебания конструкции при демпфировании 5 % от критического

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 9. Forced vibrations of the structure with damping at 5% of the critical

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

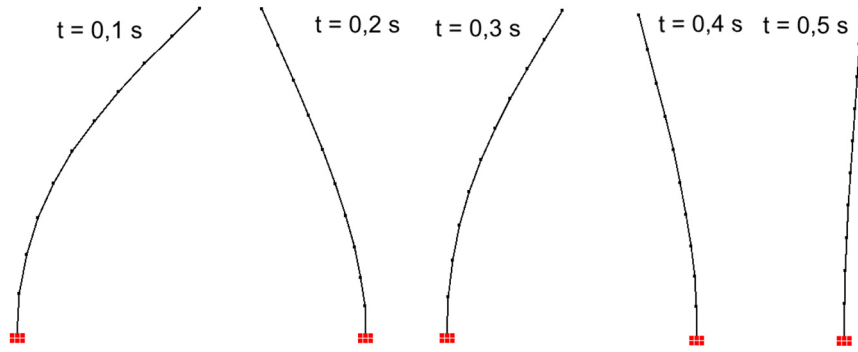


Рис. 10. Вынужденные колебания конструкции при демпфировании 10 % от критического
И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 10. Forced vibrations of the structure with damping at 10% of the critical
S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

В нелинейных расчетах учитывалась только геометрическая нелинейность (в уравнении (7) принималось, что $\mathbf{K}_{nl_1} = \mathbf{K}_{nl_2} = 0$), так как в конечных элементах балок, построенных на основе классической теории сопротивления материалов, достоверно учесть физическую нелинейность практически невозможно. Нагрузки и перемещения в данном примере таковы, что ожидать существенного влияния геометрической нелинейности на результаты априори не приходилось, и расчеты это подтвердили. Результаты линейного и нелинейного расчетов оказались близки между собой, и это свидетельствует о правильности разработанной программы. Имеющиеся при этом различия объясняются логикой работы рассматриваемой конструкции.

4. Заключение

Анализ графиков, приведенных на рис. 3–7, показывает, что в линейном расчете в установившемся режиме графики перемещений и ускорений симметричны относительно оси времени, а в нелинейном расчете они несимметричны. При этом перемещения в нелинейном расчете оказываются меньшими по абсолютному значению в области отрицательных ускорений и большими — в области их положительных величин.

В этом и проявляется влияние геометрической нелинейности, что поясняется на рис. 11. Так, при отрицательных ускорениях инерционная сила направлена, как показано на рис. 11, *a*.

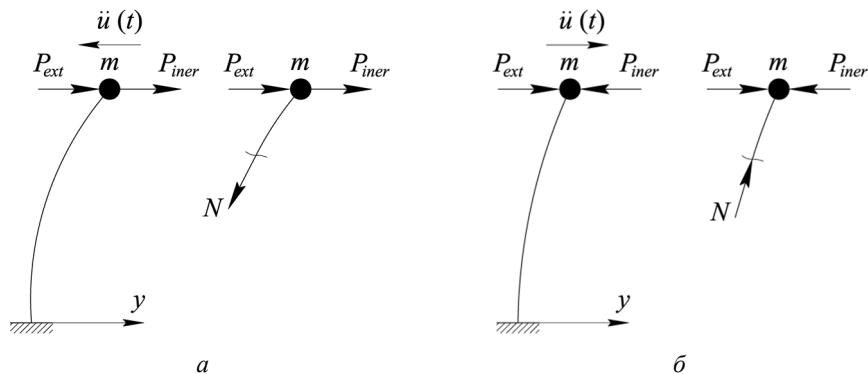


Рис. 11. Внешние и внутренние силы:
a — при отрицательных ускорениях; *b* — при положительных ускорениях
И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 11. External and internal forces:
a — at negative accelerations; *b* — at positive accelerations
S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

При этом в стержне возникает растягивающее усилие, что приводит к увеличению изгибной жесткости и, вследствие этого, к уменьшению перемещений. При положительных ускорениях инерционная сила направлена, как показано на рис. 11, б. Продольная сила в стержне при этом уменьшается по сравнению со случаем действия только внешней силы и может стать отрицательной. Вследствие этого изгибная жесткость стержня уменьшается, что и приводит к увеличению перемещений. Вышесказанное подтверждает корректность полученных с помощью программы ПРИНС результатов.

Таким образом, разработанная программа нелинейных динамических расчетов расширяет круг задач, решаемых с помощью вычислительного комплекса ПРИНС, и может быть рекомендована для практического применения в проектных организациях и конструкторских бюро.

Список литературы

1. Bathe K.J. *Finite element procedures*. N.J.: Prentice Hall, 1996. 1037 p. URL: <https://djvu.online/file/yY0gpLpAdzH4q> (дата обращения: 13.09.2025).
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element for solid and structural mechanics*. 7th edition. Elsevier, 2014. 657 p. ISBN 10 1856176347
3. Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics // *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1959. Vol. 85. Issue 367. P. 67–94. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>
4. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1976. 528 p. ISBN 100136271901
5. Clough R.W., Penzien J. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, 1993. 738 p. ISBN 0-07-113241-4
6. Галишичникова В.В., Рынковская М.И., Туликова Е.М. Основы динамики сооружений с элементами численного анализа в среде языка Python. Москва : РУДН, 2021. 270 с. ISBN 978-5-209-10747-7 EDN: RIOWOP
7. Oden J.T. *Finite Elements of nonlinear continua*. Courier Corporation, 2013. 517 p. ISBN ISBN 0-486-31790-0
8. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 2: Advanced Topics*. UK: John Wiley & Sons Ltd, 2000. 509 p. ISBN 047195649X, 9780471956495
9. Агапов В.П., Маркович А.С. Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС. Москва : РУДН, 2023. 263 с. ISBN 978-5-209-11784-1
10. Агапов В.П., Маркович А.С. Расчет массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // *Промышленное и гражданское строительство*. 2023. № 7. С. 43–49. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2023.07.43-49> EDN: LRCNLR
11. Агапов В.П., Маркович А.С. Использование объемных суперэлементов при нелинейных расчетах плитно-балочных конструкций в вычислительном комплексе ПРИНС // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2025. Т. 21. № 4. С. 283–293. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-283-293> EDN: SEBUAP
12. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable // *South Florida Journal of Development*. 2021. Vol. 2 No. 4. P. 5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007> EDN: VUBETV
13. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. Москва : АСВ, 2005. 245 с. ISBN 5-93093-303-0
14. Агапов В.П. Расчет несущих конструкций на прочность с использованием вычислительного комплекса ПРИНС. Москва : МГСУ, 2015. 181 с. ISBN 5-7264-0431-9
15. Wilson E.L. *Static and dynamic analysis of structures: A physical approach with emphasis on earthquake engineering* // *Computers and Structures*. 4th ed. 2010. 394 p. ISBN 0923907041, 9780923907044

References

1. Bathe K.J. *Finite element procedures*. N.J.: Prentice Hall, 1996. Available from: <https://djvu.online/file/yY0gpLpAdzH4q> (accessed: 13.09.2025).
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element for solid and structural mechanics*. 7th edition. Elsevier; 2014. ISBN 101856176347
3. Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1959;85(367):67–94. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>
4. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. N.J.: Prentice-Hall, Inc.; 1976. ISBN 100136271901
5. Clough R.W., Penzien J. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill; 1993. ISBN 0071132414, 9780071132411

6. Galishnikova V.V., Rynkovskaya M.I., Tupikova E.M. *Fundamentals of structural dynamics with elements of numerical analysis in Python*. Moscow: RUDN; 2021. (In Russ.) ISBN 978-5-209-10747-7
7. Oden J.T. *Finite elements of nonlinear continua*. Courier Corporation; 2013. ISBN 0-486-31790-0
8. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 2. Advanced Topics. UK: John Wiley & Sons Ltd; 2000. ISBN 047195649X, 9780471956495
9. Agapov V.P., Markovich A.S. *Nonlinear models of concrete and reinforced concrete structures. Theory and implementation in PRINS software*: monograph. Moscow: RUDN University; 2023. (In Russ.) ISBN 978-5-209-11784-1
10. Agapov V.P., Markovich A.S. Calculation of massive reinforced concrete structures including cracks. *Industrial and Civil Engineering*. 2023;7:43–49. (In Russ.) <http://doi.org/10.33622/0869-7019.2023.07.43-49> EDN: LRCNLR
11. Agapov V.P., Markovich A.S. Using solid superelements for nonlinear analysis of slab-and-beam structures in the PRINS software. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(4):283–293. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-283-293> EDN: CEBUAP
12. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007> EDN: VUBETV
13. Agapov V.P. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.) ISBN 5-93093-303-0
14. Agapov V.P. *Strength calculation of load-bearing structures using the PRINS FEM complex*. Moscow: MSUCE; 2015. (In Russ.) ISBN 5-7264-0431-9
15. Wilson E.L. *Static and dynamic analysis of structures: A physical approach with emphasis on earthquake engineering. computers and structures*. 4th ed., 2010. ISBN 0923907041, 9780923907044

Параметры модели Concrete Damage Plasticity для расчета железобетонных конструкций

Е.А. Исаков 

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

✉ isakoww3@yandex.ru

Поступила в редакцию: 21 декабря 2025 г.

Доработана: 15 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 15 февраля 2026 г.

Аннотация. Выполнено обоснование параметров модели Concrete Damage Plasticity, применяемой при численном расчете железобетонных конструкций. Показано, что результаты моделирования существенно зависят от выбора параметров пластичности и заданных диаграмм деформирования бетона. Цель исследования — анализ чувствительности ключевых параметров модели и верификация ее применимости при статическом нагружении. Численные расчеты выполнены методом конечных элементов в программном комплексе Abaqus. Исследовано влияние угла дилатансии, параметров поверхности текучести и энергетически согласованных диаграмм деформирования на расчетную жесткость и несущую способность элементов. Проведена верификация модели на уровне материала и конструкции. Установлено, что использование обоснованных параметров обеспечивает корректное воспроизведение нелинейного поведения железобетонных элементов вплоть до стадии разрушения.

Ключевые слова: бетон, численный расчет, метод конечных элементов, пластичность, повреждение, дилатация, деформационная модель, Abaqus

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Исаков Е.А. Параметры модели Concrete Damage Plasticity для расчета железобетонных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 1. С. 28–38. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-28-38> EDN: INASME

Concrete Damage Plasticity Parameters for the Analysis of Reinforced Concrete Structures

Egor A. Isakov 

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation

✉ sakoww3@yandex.ru

Received: December 21, 2025

Revised: February 15, 2026

Accepted: February 15, 2026

Abstract. The paper presents a justification of the parameters of the Concrete Damage Plasticity (CDP) model used for numerical analysis of reinforced concrete structures. It is shown that the results of nonlinear simulations are highly sensitive to the choice of plasticity parameters and the adopted concrete stress–strain relationships. The aim of the study is to analyse the sensitivity of the

Исаков Егор Андреевич, аспирант инженерно-строительного института высшей школы гидротехнического и энергетического строительства, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Российская Федерация, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 лит. Б; eLIBRARY SPIN-код: 1616-6935, ORCID: 0009-0006-9228-4574; e-mail: isakoww3@yandex.ru.

Egor A. Isakov, postgraduate student of the Institute of Civil Engineering of the Higher School of Hydraulic and Power Engineering, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russian Federation, 195251, Saint Petersburg, Polytechnicheskaya, 29; eLIBRARY SPIN-code: 1616-6935, ORCID: 0009-0006-9228-4574; e-mail: isakoww3@yandex.ru.

© Исаков Е.А., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

key CDP parameters and to verify the applicability of the model under static loading conditions. Numerical simulations were performed using the finite element method in Abaqus. The influence of the dilation angle, yield surface parameters and energy-consistent stress–strain diagrams on stiffness and load-bearing capacity was investigated. The model was verified at both the material and structural levels. It is demonstrated that the use of physically justified parameters ensures an accurate reproduction of the nonlinear behaviour of reinforced concrete elements up to failure.

Keywords: concrete, numerical analysis, finite element method, plasticity, damage, dilation, deformation model, Abaqus

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Isakov E.A. Concrete Damage Plasticity parameters for the analysis concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):28–38. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-28-38>
EDN: INASME

1. Введение

Железобетонные конструкции работают в условиях сложного нелинейного деформирования. При достижении предельных состояний в бетонных элементах развивается упругопластическое поведение с образованием трещин. Точное прогнозирование такого поведения необходимо для надежной оценки прочности и выработки оптимальных проектных решений. Современные численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ), позволяют моделировать нелинейную работу железобетона и анализировать напряженно-деформированное состояние элементов на различных стадиях нагружения.

Специально для бетона разработан ряд современных моделей материала, основанных на комбинации теории пластического течения и механизма повреждений [1–3]. Одной из наиболее популярных является модель Concrete Damage Plasticity (CDP), реализованная в Abaqus. Модель CDP была разработана Лублинером с соавт. [4] и доработана Ли и Фенвесом [5] для учета циклического нагружения. Пластическая часть модели основана на критерии текучести, описанном в работах Друкера [6] и Прагера [7] и модифицированном для учета асимметрии прочности бетона в сжатии и растяжении.

Модель сочетает концепции теории пластичности и механики повреждений для описания трещинообразования, накопления необратимых пластических деформаций и деградации (снижения) жесткости бетона под нагрузкой. За счет учета раскрытия трещин при растяжении, дробления материала при сжатии, пластического течения и снижения модуля упругости по мере накопления повреждений модель CDP позволяет воспроизводить поведение бетона вплоть до предельного состояния.

Несмотря на широкое распространение, модель CDP чувствительна к выбору параметров пластичности и заданных диаграмм деформирования, что существенно влияет на результаты расчета [8–10]. К параметрам пластичности, задаваемым пользователем, относятся угол дилатансии ψ , эксцентриситет пластического потенциала ϵ , отношение прочности бетона при двусосном и одноосном сжатии σ_{b0}/σ_{c0} , коэффициент формы поверхности текучести K_c , а также параметр вязкости μ . Корректное назначение этих параметров важно для получения воспроизводимых и физически обоснованных результатов.

В последние годы ведется активная работа по повышению точности модели CDP и ее калибровке. Так, Fedoroff с соавт. [11] провели параметрическое исследование влияния угла дилатансии и формы поверхности текучести на работу модели CDP, проанализировав характер деформаций бетона в простых напряженных состояниях. Показано, что неверный выбор ψ или соотношения прочностей по меридианам может приводить к существенным погрешностям в расчете деформаций и напряжений. Qasem с соавт. [12] разработали обобщенный подход к калибровке и оптимизации CDP, включив влияние армирования на работу бетона при растяжении (tension stiffening) и при сжатии (compression softening). Отдельные аспекты модели CDP также улучшаются: например, Alfarah и др. [13] предложили аналитические выражения для эволюции скалярных переменных повреждения в CDP, позволяющие получить реалистичную нисходящую ветвь диаграммы без обширных экспериментов. Rakić с соавт. [14] разработали метод идентификации параметров CDP на основе решения обратной задачи, что помогает подобрать параметры, наилучшим образом согласующиеся с заданными экспериментальными кривыми деформирования.

В отечественной научной литературе вопросы нелинейного моделирования бетона с использованием упругопластических моделей с повреждением получили определенное развитие [15; 16], в том числе с применением модели CDP [17–19]. Вместе с тем анализ опубликованных работ показывает, что существующие исследования, как правило, ориентированы на решение частных задач и не формируют единого и методически прозрачного подхода к выбору ключевых параметров модели CDP. Недостаточная систематизация рекомендаций по назначению параметров пластичности и повреждаемости затрудняет практическое применение модели при расчете железобетонных конструкций.

В связи с этим актуальной является задача обобщения накопленного опыта и разработки обоснованных рекомендаций по выбору параметров модели Concrete Damage Plasticity, обеспечивающих корректное воспроизведение нелинейного поведения бетона. Цель исследования — обоснование параметров модели CDP и верификация ее применимости для расчета железобетонных элементов при статическом нагружении.

2. Методы

Для достижения поставленной цели выполнен анализ отечественных и зарубежных работ, посвященных численному моделированию бетона и железобетонных конструкций с использованием модели Concrete Damage Plasticity. На основе обобщения литературных данных проведено численное исследование поведения бетона в программном комплексе Abaqus/Standard для типовых элементов из бетона и железобетона. Анализировалось влияние каждого параметра CDP на расчетную жесткость, прочность и характер разрушения материала. На основе обоснованных значений параметров выполнена верификация модели путем сопоставления результатов численного моделирования с данными физических экспериментов.

Для обеспечения корректного численного моделирования необходимо учитывать физический смысл используемой модели и заложенные в нее предположения. В связи с этим ниже кратко представлены положения модели CDP, необходимые для интерпретации входных параметров и результатов расчета.

В рамках модели пластическое течение бетона описывается поверхностью текучести в пространстве инвариантов напряжений. Форма поверхности текучести характеризуется параметрами, определяемыми через отношение прочности бетона при двусосном и одноосном сжатии σ_{b0}/σ_{c0} и коэффициент формы поверхности текучести K_c .

Принято, что для тяжелого бетона отношение $\sigma_{b0}/\sigma_{c0} = 1,16$. Стандартное значение $K_c = 2/3$ соответствует критерию Виллама — Варнке и отражает соотношение расчетной прочности бетона при чистом сдвиге и всестороннем сжатии. Несмотря на широкое применение стандартных значений параметров, они получены для идеализированных условий нагружения и не учитывают особенности реального напряженного состояния в железобетонных элементах. В связи с этим идентификация параметров σ_{b0}/σ_{c0} и K_c позволяет повысить достоверность численного моделирования и обеспечить корректное воспроизведение несущей способности и механизма разрушения бетона.

В качестве пластического потенциала в Abaqus используется сглаженный гиперболический потенциал Друкера — Прагера¹. Его форма задается двумя параметрами: углом дилатансии ψ и эксцентриситетом ϵ . Угол дилатансии определяет способность материала к объемному расширению (поперечному разбуханию) при пластическом сдвиге и регулирует долю пластической объемной деформации относительно продольной. В литературе отмечается широкий диапазон значений угла дилатансии ψ (приблизительно от 5° до 55°), что указывает на отсутствие универсального значения данного параметра и подчеркивает необходимость его обоснования по экспериментальным данным для конкретного класса бетона и типа напряженного состояния. Аналогично и для эксцентриситета пластического потенциала, наиболее часто используемые значения которого варьируются в диапазоне 0,05–0,2. Это свидетельствует о вариативности настроек численной модели к форме поверхности течения и подтверждает целесообразность идентификации данного параметра с учетом условий нагружения и особенностей рассматриваемой расчетной постановки.

¹ Dassault Systèmes. Abaqus Analysis User's Manual. Version 6.14. Providence, RI, USA. Dassault Systèmes Simulia Corp.; 2014.

Для регуляризации решения в условиях разрушения в модель вводится параметр вязкости μ , придающий материалу искусственную вязкопластичность и улучшающий сходимость итерационного процесса. В литературе указывается на значительный разброс рекомендуемых значений параметра вязкости μ . Отмечается, что без вязкопластической регуляризации расчеты нелинейного бетона часто не доходят до стадии полного разрушения из-за потери сходимости на нисходящей ветви диаграммы [12]. Несмотря на нефизическую природу данного параметра, его выбор для конкретной расчетной постановки оказывает заметное влияние на устойчивость расчета и характер нелинейного отклика.

Для моделирования поведения бетона под нагрузкой в модель CDP вводятся диаграммы «напряжение — неупругая деформация» при сжатии и растяжении, служащие основой для вычисления пластических деформаций и повреждений. Аналитический обзор существующих подходов показывает, что для надежного моделирования необходимо задавать реалистичные диаграммы с плавной нисходящей ветвью. Использование упрощенных диаграмм с мгновенным обрывом может приводить к некорректному учету энергии разрушения, что ведет к зависимости результата от размера конечных элементов [13].

В качестве универсальной модели для сжатия принят обобщенный закон Поповича [20] с модификацией нисходящей ветви по Теренфельдту — Коллинзу (1)–(3) [21; 22]. С ростом класса бетона повышаются начальный модуль упругости и крутизна восходящей ветви, а нисходящая ветвь становится более крутой, отражая возрастание хрупкости материала (рис. 1, а):

$$\sigma_c = f_c \left[\frac{n(\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})}{n-1 + (\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})^{nk}} \right], \quad (1)$$

$$k = \begin{cases} 1, \varepsilon_c < \varepsilon_{c1} \\ 0,67 + \frac{f_c}{62}, \varepsilon_c > \varepsilon_{c1} \end{cases}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{c1} = \frac{f_c}{E_c} \frac{n}{n-1}. \quad (3)$$

В формулах выше: σ_c — текущее напряжение при сжатии, МПа; f_c — цилиндрическая прочность бетона при сжатии, МПа; E_c — модуль упругости, МПа; ε_c — текущая относительная деформация; ε_{c1} — относительная деформация, соответствующая пику диаграммы; n — коэффициент кривизны восходящей части; k — коэффициент постпикового участка диаграммы.

Коэффициент поврежденности бетона при сжатии d_c вычислялся на основе разложения полной неупругой деформации на неупругую и пластическую составляющие (4) (рис. 1, б).

$$d_c = \frac{\varepsilon_c^{in} - \varepsilon_c^{pl}}{\sigma_c / E_c + (\varepsilon_c^{in} - \varepsilon_c^{pl})}, \quad (4)$$

где ε_c^{in} — неупругая деформация бетона при сжатии; ε_c^{pl} — пластическая деформация бетона при сжатии, вычисляемая феноменологически как часть полной неупругой деформации после предела прочности, при этом фиксированная доля прироста неупругой деформации, равная 0,2, относилась к поврежденной составляющей.

Диаграмма растяжения бетона принята двусоставной: линейно-упругой до предела прочности и с убывающей ветвью после образования первой трещины. В качестве ниспадающей части диаграммы растяжения использован экспоненциальный закон уменьшения напряжения от ширины раскрытия трещины w , предложенный Хордейком (5) (рис. 2, а) [23]:

$$\frac{\sigma_t}{f_{cr}} = \left[1 + \left(c_1 \frac{w}{w_{cr}} \right)^3 \right] e^{-c_2 \frac{w}{w_{cr}}} - \frac{w}{w_{cr}} (1 + c_1^3) e^{-c_2}, \quad (5)$$

где σ_t — текущее напряжение при растяжении, МПа; f_{cr} — прочность бетона при осевом растяжении, МПа; w — текущая ширина раскрытия трещины, мм; w_{cr} — критическое раскрытие трещины, мм; c_1 и c_2 — эмпирические коэффициенты, равные 3 и 6,93 соответственно. Критическое раскрытие w_{cr} вычислялось из условия равенства площади под кривой σ - w энергии трещинообразования $G_f(\delta)$:

$$w_{cr} = 5,14 G_f / f_{cr}. \quad (6)$$

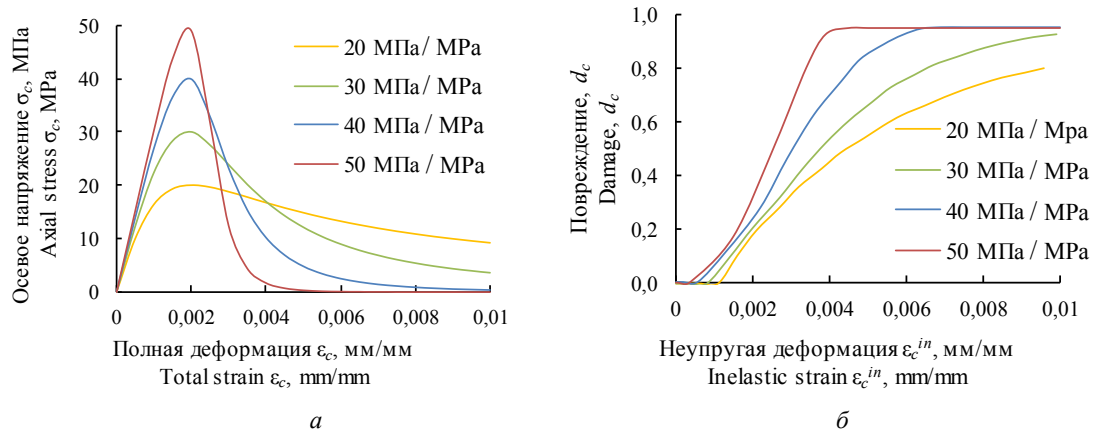


Рис. 1. Диаграммы деформирования бетона при сжатии по модели Поповича — Теренфольда — Коллинза для различных классов бетона и соответствующая эволюция коэффициента поврежденности:

- a* — зависимости «напряжение-деформация» бетона при одноосном сжатии;
- б* — изменение коэффициента поврежденности в зависимости от деформации при сжатии

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым.

Figure 1. Concrete compressive stress-strain relationship according to the Popovics — Thorenfeldt — Collins model for different concrete strength classes and corresponding damage variable evolution:

- a* — stress-strain relationships of concrete in compression;
- б* — evolution of the compressive damage variable as a function of strain

S o u r c e: made by E.A. Isakov.

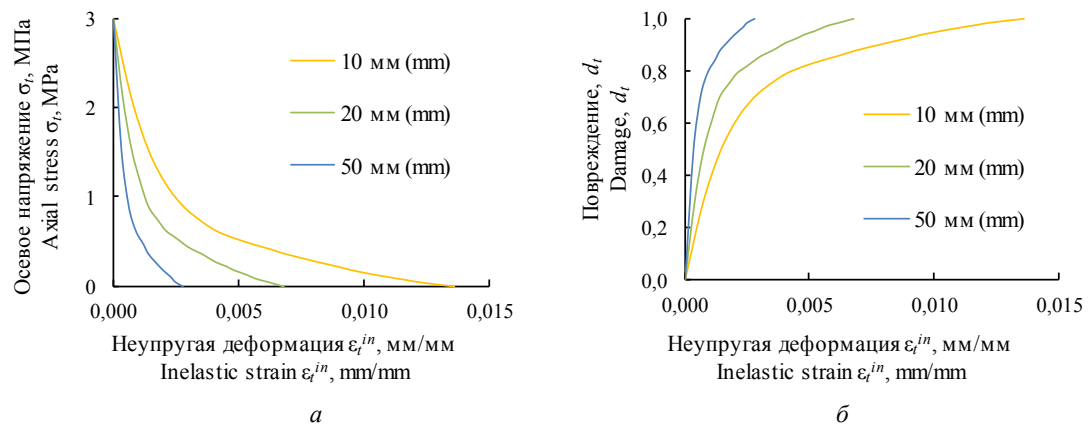


Рис. 2. Диаграммы деформирования бетона при растяжении по модели Хордейка, откалиброванные для различных размеров конечного элемента и соответствующая эволюция коэффициента поврежденности:

- a* — зависимости «напряжение-деформация» бетона при растяжении с учетом энергии трещинообразования;
- б* — изменение коэффициента поврежденности в зависимости от деформации при растяжении

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым.

Figure 2. Concrete tensile stress-strain relationship based on the Hordijk model calibrated for different finite element characteristic lengths and corresponding damage variable evolution:

- a* — stress-strain curves of concrete in tension according to fracture energy;
- б* — evolution of the tensile damage variable as a function of strain

S o u r c e: made by E.A. Isakov.

Прочность бетона на осевое растяжение f_{cr} определялась через прочность при сжатии по эмпирической зависимости (7). Энергия разрушения G_f (Н/м) оценивалась по fib Model Code² в зависимости от максимального размера заполнителя d_a (мм) и прочности бетона (8):

$$f_{cr} = 0,3f_c^{2/3}; \quad (7)$$

$$G_f = (0,0469 d_a^2 - 0,5 d_a + 26) \left(\frac{f_c + 8}{10} \right)^{0,7}. \quad (8)$$

Для учета масштабного эффекта и уменьшения зависимости результатов от размера конечных элементов применялась теория полосы трещин (crack band theory) [24]. В соответствии с этим подходом вводится характеристическая ширина локализации l_{ch} (мм), связанная с размером конечного элемента в направлении распространения трещины. Далее ширина раскрытия w переводится в эквивалентную локальную деформацию ε_t по формуле $\varepsilon_t = \varepsilon_{cr} + w/l_{ch}$, где ε_{cr} — деформация, соответствующая началу трещинообразования. Этот прием обеспечивает распределение раскрытия трещины по элементу и делает результаты менее зависимыми от шага сетки. В результате достигается правильное затухание напряжений на нисходящей ветви независимо от размера КЭ, а полная энергия G_f , расходуемая при разрушении, остается постоянной.

Коэффициент поврежденности бетона при растяжении d_t вычислялся через степень снижения действующих напряжений по отношению к пределу прочности бетона (9) (рис. 2, б):

$$d_t = 1 - \frac{\sigma_t}{E_c \varepsilon_t}. \quad (9)$$

3. Результаты и обсуждение

На основании выполненного анализа литературы и численного анализа систематизированы эффекты каждого параметра CDP на поведение бетона и сформулированы рекомендации по их выбору. Ниже приведены ключевые результаты об их влиянии на жесткость, прочность и характер разрушения материала.

■ Выполненный анализ литературных источников и результаты численного исследования подтвердили, что угол дилатансии ψ является одним из наиболее чувствительных параметров модели Concrete Damage Plasticity и существенно влияет на расчетную жесткость, несущую способность и прогнозируемый характер разрушения бетонных и железобетонных элементов [8–14]. Увеличение значения ψ в рамках модели, как правило, приводит к росту несущей способности при сдвиговых и сложных напряженных состояниях, что обусловлено развитием поперечного расширения (дилатации), создающего эффект дополнительного бокового обжатия материала. При малых значениях ψ пластическое течение сопровождается меньшим объемным расширением, что снижает расчетное сопротивление сдвигу и может приводить к более хрупкому характеру разрушения.

Для тяжелых бетонов нормальной прочности в качестве базового значения угла дилатансии целесообразно рассматривать $\psi \approx 30\text{--}35^\circ$ [10; 12; 14]. Вариация ψ в диапазоне $20\text{--}40^\circ$ в ряде постановок приводит к изменению расчетной несущей способности порядка 5–10 %, что позволяет использовать данный интервал как ориентировочный для инженерных расчетов при отсутствии калибровки по эксперименту.

Для элементов, работающих преимущественно в условиях одноосного сжатия и изгиба, наилучшее согласование с экспериментальными данными, как правило, достигается при умеренных значениях угла дилатансии [18]. В диапазоне $\psi \approx 25\text{--}35^\circ$ возможно корректное воспроизведение жесткости, несущей способности и постпикового поведения без искусственного упрочнения. Для типичных

² fib Model Code for Concrete Structures 2010. Lausanne. fib; 2013. <https://doi.org/10.1002/9783433604090>

железобетонных колонн прямоугольного сечения из тяжелого бетона в ряде работ оптимальным указывается значение ψ порядка 35° [10].

Для элементов с выраженным трехосным сжатием или близких к плоской деформации (короткие колонны, массивные элементы, опорные зоны) дилатативная способность бетона подавляется всесторонним давлением [11; 26]. В этих условиях рекомендуется использовать пониженные значения угла дилатансии порядка $\psi \approx 10\text{--}20^\circ$, что позволяет учитывать снижение дилатации при высоком уровне обжатия [11; 12].

Для элементов, разрушение которых определяется развитием наклонных трещин и сдвиговых деформаций (например, короткие консоли), может быть оправданно применение повышенных значений ψ . Отдельные расчеты показывают, что $\psi \approx 45\text{--}50^\circ$ позволяет описывать диагональный характер трещинообразования и согласуется с экспериментальными наблюдениями [9]. Для ультравысокопрочных композитов типа УНРС в отдельных исследованиях приводятся повышенные значения угла дилатансии вплоть до $\psi \approx 55^\circ$ [25].

Влияние класса бетона на оптимальное значение угла дилатансии носит вторичный характер по сравнению с типом напряженно-деформированного состояния и принятыми параметрами CDP [12; 19]. Для бетонов нормальной прочности (B25–B40) допустимо использование средних значений ψ в указанных диапазонах. Для высокопрочных бетонов целесообразно рассматривать значения ψ ближе к нижней границе соответствующих диапазонов, тогда как для бетонов пониженной прочности возможны несколько более высокие значения при аналогичном НДС [10; 12].

■ Экцентриситет пластического потенциала в диапазоне $0\text{--}0,2$ при фиксированных прочих параметрах, как правило, оказывает ограниченное влияние на расчетную жесткость и предельную несущую способность при типовых постановках [11; 12; 19]. Вместе с тем слишком малое ϵ может затруднить сходимость решения, а слишком большое ϵ может завышать эффект дилатансии при низком гидростатическом давлении и тем самым искажать поведение модели. В инженерных расчетах целесообразно принимать $\epsilon = 0,1$ (значение по умолчанию в Abaqus) как компромисс между устойчивостью вычислений и физической правдоподобностью, а отклонение от этого значения — выполнять только при наличии экспериментальной калибровки.

■ Параметр σ_{b0}/σ_{c0} (отношение прочности при двухосном сжатии к прочности при одноосном сжатии) определяет форму поверхности текучести CDP в области высоких всесторонних давлений и поэтому существенен для элементов, работающих при заметном обжатии и сложном напряженном состоянии [11; 12; 19]. При занижении параметра модель может недооценивать несущую способность при сложном напряженном состоянии, тогда как при завышении возможна переоценка прочности и завышенная жесткость [10; 14]. Для тяжелого бетона нормальной прочности при отсутствии специальных данных целесообразно использовать диапазон $1,1\text{--}1,2$ как ориентировочный, принимая базовое значение $\sigma_{b0}/\sigma_{c0} = 1,16$ (настройка по умолчанию в Abaqus).

■ Коэффициент формы поверхности текучести K_c в большинстве практических реализаций CDP принимается равным $2/3$ [11; 12; 14; 19]. Расчеты показывают, что изменение K_c в диапазоне $0,5\text{--}0,8$ обычно слабо влияет на расчетную жесткость и пиковую прочность, однако заметно влияет на локализацию деформаций, ориентацию и развитие зон повреждения. Для обычного тяжелого бетона при отсутствии данных калибровки рекомендуется использовать $K_c = 2/3$, рассматривая отклонения от этого значения как часть процедуры параметрической идентификации под конкретные условия.

■ В статических расчетах вязкопластический параметр μ целесообразно принимать $\mu = 0$, чтобы модель отражала квазистатическое поведение без введения искусственной вязкостной регуляризации. При проблемах со сходимостью допустимо задавать малое ненулевое значение μ , достаточное для стабилизации решения при минимальном влиянии на результаты расчета. В качестве исходного ориентировочного уровня можно использовать $\mu \approx 10^{-4}$ при обязательной проверке чувствительности результатов к его изменению и фиксации того, что введенная регуляризация не искажает ключевые расчетные характеристики.

3.1. Верификация и сравнение с экспериментом

Модель CDP была проверена по экспериментальным данным. На уровне материала расчетные диаграммы сжатия сравнивались с результатами испытаний Купфера [26]. В его работе образцы $200 \times 200 \times 50$ мм из бетона прочностью $R_b = 32,2$ МПа испытывались при различных соотношениях главных напряжений. По результатам численного расчета достигнуто удовлетворительное совпадение вплоть до разрушения (рис. 3).

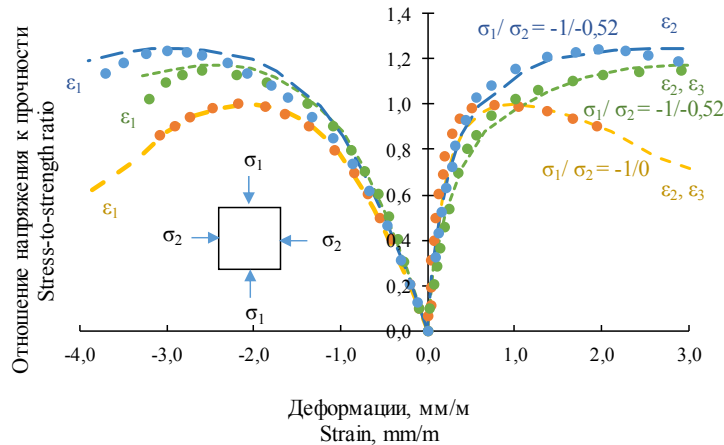


Рис. 3. Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым по [26].

Figure 3. Comparison of the numerical model response and laboratory test results

S o u r c e: made by E.A. Isakov on [26].

Нисходящая ветвь диаграммы растяжения и энергия трещинообразования G_f дополнительно проверялись на задаче изгиба балки с надрезом и сопоставлялись с экспериментальными данными (рис. 4) [27]. Энергия трещинообразования была принята $G_f = 77$ Н/м для заполнителя размером $d_a = 12$ мм и пределом прочности на растяжение $R_{bt} = 3,33$ МПа. Стабильность работы модели на стадии разупрочнения была проверена при различных размерах конечно-элементной сетки.

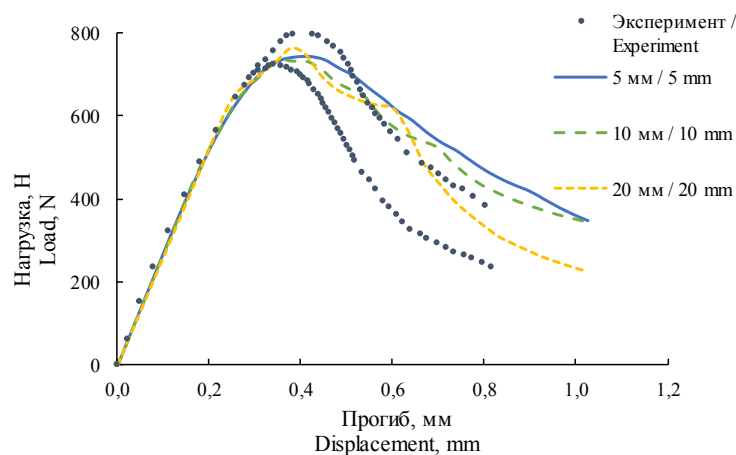


Рис. 4. Сравнение результатов численных испытаний образцов с разным размером конечного элемента с лабораторными испытаниями

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым по [27].

Figure 4. Comparison of the numerical model response with different finite element sizes with laboratory test results

S o u r c e: made by E.A. Isakov on [27].

На уровне конструкции проведена верификация на примере железобетонной балки по данным Обернихина и Никулина (рис. 5) [28]. Характеристики бетона в расчете приняты: $E_b = 30,0$ ГПа, $R_b = 22,5$ МПа. Арматура была смоделирована двулинейным упругопластическим материалом.

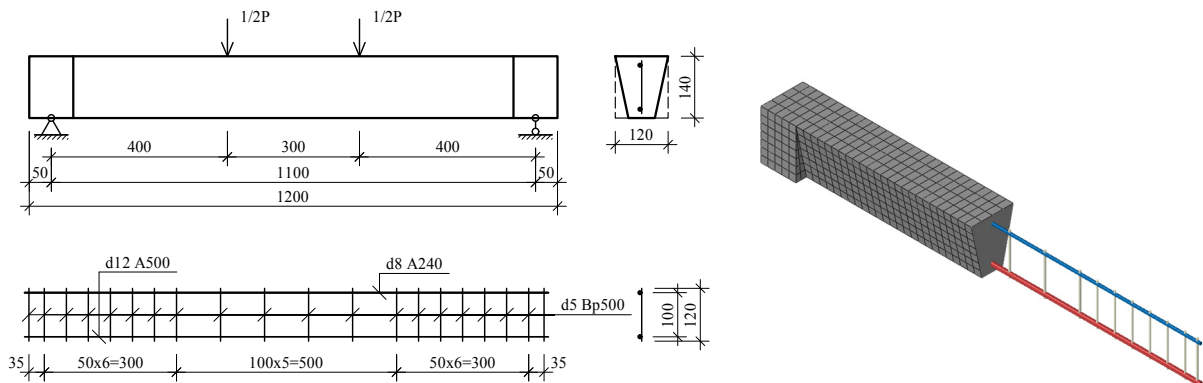


Рис. 5. Конструкция и расчетная модель испытываемой балки

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым.

Figure 5. Structural configuration and numerical model of the tested beam

S o u r c e: made by E.A. Isakov.

Результаты расчета балки нормального армирования показали удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными вплоть до разрушающей нагрузки (табл.). Так, для балки трапециевидного сечения серии БТВ отклонение расчетной предельной нагрузки от средней экспериментальной не превысило 5 %. Жесткость на этапе трещинообразования и развития пластических деформаций была спрогнозирована моделью с погрешностью менее 10 % по прогибу. Характер трещинообразования в балке, оцененный по распределению коэффициента поврежденности бетона d_t , показан на рис. 6.

Сравнение результатов численного расчета с лабораторными данными
Comparison of the numerical model response and laboratory test results

Исследуемая величина / Quantity	Средние значения прогибов балок в мм при нагрузке, кН / Average mid-span deflection of beams at mm at load, kN			Средняя предельная нагрузка, кН / Average ultimate load, kN
	16	24	32	
Результаты экспериментов / Experimental results	2,19	3,66	5,17	39,27
Результаты расчета в Abaqus / Numerical results (Abaqus)	1,71	3,30	5,14	37,60
Погрешность, % / Error, %	-22	-10	-1	-4

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым / S o u r c e: made by E.A. Isakov.

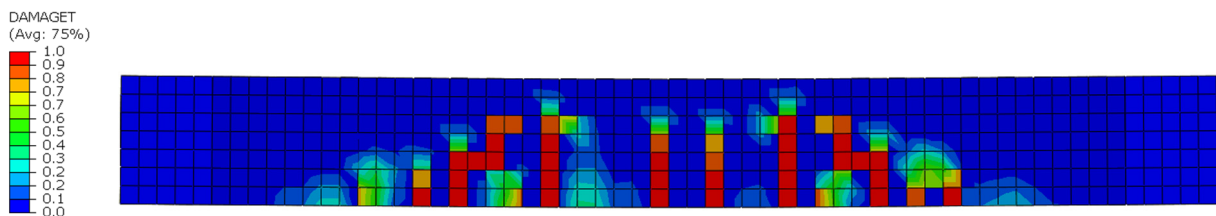


Рис. 6. Численное распределение трещин, представленное через коэффициент поврежденности d_t

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым.

Figure 6. Numerical crack pattern represented by the concrete damage parameter d_t

S o u r c e: made by E.A. Isakov.

4. Заключение

В работе выполнено обоснование параметров модели Concrete Damage Plasticity (CDP) для применения в расчетах железобетонных конструкций.

1. Проведен анализ влияния ключевых параметров (ψ , ϵ , σ_{b0}/σ_{c0} , K_c , μ) на результаты численного моделирования, а также обоснован выбор диаграмм деформирования бетона.

2. Установлено, что угол дилатансии ψ оказывает наиболее заметное влияние на несущую способность и деформативность модели. Для тяжелого бетона при статическом нагружении рекомендуется принимать $\psi \approx 30\text{--}35^\circ$ с возможной корректировкой в пределах $20\text{--}40^\circ$ в зависимости от типа напряженно-деформированного состояния, а также класса бетона. Эксцентриситет пластического потенциала целесообразно принимать равным $\epsilon = 0,1$ как базовое значение, обеспечивающее устойчивость вычислений при удовлетворительной физической правдоподобности. Отношение прочностей σ_{b0}/σ_{c0} для тяжелого бетона при отсутствии специальных данных рекомендуется принимать равным $1,16$, коэффициент формы поверхности текучести $K_c = 2/3$. В статических задачах параметр вязкости μ рекомендуется задавать равным нулю. При проблемах со сходимостью возможно использование малого ненулевого значения μ порядка 10^{-4} при обязательном контроле влияния на диаграммы деформирования.

Для корректного воспроизведения нелинейного поведения бетона и постпикового отклика необходимо использовать диаграммы деформирования, согласованные с энергетическим критерием разрушения. Для сжатия рекомендуется применять обобщенную кривую Поповича, для растяжения — экспоненциальную зависимость на основе энергии разрушения G_f с регуляризацией по размеру конечного элемента. Данные диаграммы верифицированы на основе экспериментальных данных испытаний материала. Соблюдение указанных рекомендаций позволяет получить устойчивые и физически обоснованные результаты численного моделирования работы бетона вплоть до разрушения в рамках выбранных параметров CDP.

References / Список литературы

1. Etse G., Willam K. Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. 1994;120(9):1983–2011. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1994\)120:9\(1983\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120:9(1983))
2. Grassl P., Xenos D., Nystrom U., Rempling R., Gylltoft K. CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 2013;50(24):3805–3816. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.008>
3. Zreid I., Kaliske M. A gradient enhanced plasticity-damage microplane model for concrete. *Computational Mechanics*. 2018;62(5):1239–1257. <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1561-1>
4. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 1989;25(3):299–326. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4)
5. Lee J., Fenves G.L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*. 1998;124(8):892–900. Available from: [https://www.sci-hub.ru/10.1061/\(asce\)0733-9399\(1998\)124:8\(892\)](https://www.sci-hub.ru/10.1061/(asce)0733-9399(1998)124:8(892)) (accessed: 13.09.2025).
6. Drucker D.C. Some implications of work hardening and ideal plasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1950; 7(4):411–418. Available from: <https://www.jstor.org/stable/43633751> (accessed: 13.09.2025)
7. Prager W. Recent developments in the mathematical theory of plasticity. *Journal of Applied Physics*. 1949;20(3): 235–241. <https://doi.org/10.1063/1.1698348>
8. Jabbar A.M. Impact of failure-surface parameters of concrete damage plasticity model on the behavior of reinforced ultra-high performance concrete beams. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. 2023;67(2):495–504. <https://doi.org/10.3311/PPci.21345>
9. Neuberger Y.M., Andrade M.V., de Sousa A.M.D., Bandeira M., da Silva Junior E.P., dos Santos H.F., Catoia B., Bolandim E.A., de Moura Aquino V.B., Christoforo A.L. Numerical analysis of reinforced concrete corbels using concrete damage plasticity: sensitivity to material parameters and comparison with analytical models. *Buildings*. 2023;13(11):2781. <https://doi.org/10.3390/buildings13112781> EDN: HKANPC
10. Bilal K.A., Mahamid M., Hariri-Ardebili M.A., Tort C., Ford T. Parameter selection for concrete constitutive models in finite element analysis of composite columns. *Buildings*. 2023;13(7):1759. <https://doi.org/10.3390/buildings13071759>

11. Fedoroff A., Calonius K., Kuutti J. Behavior of the Abaqus CDP model in simple stress states. *Rakenteiden Mekaniikka*. 2019;52(2):87–113. <https://doi.org/10.23998/rm.75937>
12. Qasem M., Hasan M., Muhamad R., Chin C.L., Alanazi N. Generalised calibration and optimization of concrete damage plasticity model for finite element simulation of cracked reinforced concrete structures. *Results in Engineering*. 2025;25:103905. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2024.103905> EDN: RFAJSJ
13. Alfarah B., Lopez-Almansa F., Oller S. New methodology for calculating damage variables evolution in concrete model. *Engineering Structures*. 2017;132:70–85. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.11.022>
14. Rakic D.M., Bodic A.S., Milivojevic N.J., Dunic V.Lj., Zivkovic M.M. Concrete damage plasticity material model parameters identification. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2021;15(2):111–122. <https://doi.org/10.24874/jsscm.2021.15.02.11> EDN: GWWDNU
15. Budarin A.M., Rempel G.I., Kamzolkin A.A., Alekhin V.N. Concrete damage-plasticity model with double independent hardening. *Vestnik MGSU*. 2024;19(4):527–543. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.4.527-543> EDN: ПJBПQ
Бударин А.М., Ремпель Г.И., Камзолкин А.А., Алехин В.Н. Деформационно-прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением и повреждением // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. № 4. С. 527–543. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.4.527-543> EDN: ПJBПQ
16. Agapov V.P., Markovich A.S. Finite element for analysis of massive reinforced concrete structures with cracking. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):593–607. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607> EDN: HIQWQW
Агапов В.П., Маркович А.С. Конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 6. С. 593–607. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607> EDN: HIQWQW
17. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G., Belyaev M.O., Modestov V.S. Methods for identification of elasto-plastic concrete models with damage accumulation. *Mag Civ Eng*. 2017;(8):279–297. (In Russ.) <https://doi.org/10.18720/MCE.76.24> EDN: YSTEJC
Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Беляев М.О., Модестов В.С. Методы идентификации упругопластических моделей бетона с учетом накопления повреждений // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8 (76). С. 279–297. <https://doi.org/10.18720/MCE.76.24> EDN: YSTEJC
18. Rimshin V.I., Amelin P.A. Numerical calculation of bent reinforced concrete elements of rectangular section in the Abaqus software. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):552–563. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563> EDN: WCRNSY
Римшин В.И., Амелин П.А. Численный расчет изгибаемых железобетонных элементов в программной среде Abaqus // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 552–563. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563> EDN: WCRNSY
19. Murtazin I.R., Fedorenko R.V., Lukin A.V., Modestov V.S., Malinkin A.S., Fedotov M.A., Panarin S.N. Parameter identification of the concrete damaged plasticity model. *Mag Civ Eng*. 2025;18(6):13808.
20. Popovics S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*. 1973;3:583–589. Available from: [https://www.sci-hub.ru/10.1016/0008-8846\(73\)90096-3](https://www.sci-hub.ru/10.1016/0008-8846(73)90096-3) (accessed: 13.10.2025)
21. Thorenfeldt E, Tomaszewicz A, Jensen JJ. Mechanical properties of high-strength concrete and applications in design. *Symposium utilization of high-strength concrete*. Stavanger: Norwegian Institute of Technology, 1987. p. 149–159.
22. Collins M.P., Porasz A. Shear design for high strength concrete. *CEB Bull Inf*. 1989. p. 77–83. Available from: [http://refhub.elsevier.com/S2590-1230\(24\)02148-0/sbref0076](http://refhub.elsevier.com/S2590-1230(24)02148-0/sbref0076) (accessed: 17.11.2025).
23. Hordijk D.A. *Local approach to fatigue of concrete*. Delft: Delft University of Technology; 1991. EDN: FTYUDD
24. Bazant Z.P., Oh B.H. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*. 1983;16(93):155–177. Available from: <http://www.civil.northwestern.edu/people/bazant/PDFs/Papers/157.pdf> (accessed: 13.09.2025)
25. Fakeh M., Jawdhari A., Fam A. Recommended concrete damage plasticity parameters and constitutive models for UHPC in Abaqus. *Engineering Structures*. 2025;333:120154. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120154> EDN: EEEAGA
26. Kupfer H, Hilsdorf HK, Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI J*. 1969; 66(8):656–666. Available from: <https://www.scirp.org/reference/ReferencesPapers?ReferenceID=32233> (accessed: 13.09.2025)
27. Petersson PE. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. *Report No. TVBM-1006*. Lund: University of Lund, 1981. URL: <https://lucris.lub.lu.se/ws/portalfiles/portal/4631196/1607139.pdf> (дата обращения: 13.09.2025)
28. Nikulin A.I., Obernikhin D.V. The experimental researches of the deformability of the bending reinforced concrete elements with the various cross sections. *Bulletin of BSTU Named After V.G. Shukhov*. 2017;(4):56–59. (In Russ.) https://doi.org/10.12737/article_58e61337b86486.82545138 EDN: YINIVZ
Никюлин А.И., Обернихин Д.В. Экспериментальные исследования деформативности изгибаемых железобетонных элементов различных поперечных сечений // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. № 4. С. 56–59. https://doi.org/10.12737/article_58e61337b86486.82545138 EDN: YINIVZ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-22-1-39-52

EDN: IFEHZJ

Research article / Научная статья

Rational Outline of Timber Beams

Mikhail S. Lisyatnikov^{ID}, Alexander V. Repin^{ID}, Kirill M. Terentyev^{ID}, Svetlana I. Roshchina[✉]^{ID}Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, *Vladimir, Russian Federation*

✉ rsi3@mail.ru

Received: January 5, 2026

Revised: February 13, 2026

Accepted: February 17, 2026

Abstract. Timber structures, in particular glued laminated beams, have a number of advantages that contribute to their wide use in industrial and civil construction. The development and research of design solutions that utilize the strength properties of structural timber more efficiently is a key area for improving the performance of timber structures. The object of this study is a timber beam of rectangular cross-section loaded with a uniformly distributed load, the outline of which is based on the uniform-strength trajectories of beams in bending and horizontal shear. The construction of the outline of rational timber beams (RTB) was based on determining the coordinates of nodal points by constructing straight lines tangent to the contour of a beam of uniform strength. The RTB is a beam with a zone of constant rigidity in the middle of the span and undercuts in the support zones. The purpose of this approach was to create a resource-efficient beam structure made of glued timber, characterized by lower material consumption compared to beams of constant cross-section height along the entire span, as well as relative ease of manufacturing. The results of the study show that the relative values of the RTB parameters, such as: the height of the support section relative to the maximum height of the section h_{sup}/h , the length of the undercut relative to the span l_{cut}/L and the angle of the undercut α_{cut} , depend only on the ratio of the maximum height of the section to the span h/L . The change in the width of the section b and the value of the external load q have no effect on them. The theoretical savings of structural timber of grades 1 and 2 are 6.2%...18.3%.

Keywords: timber beams of variable rigidity, timber beams of uniform strength, timber beams of rational outline, resource-efficient timber beams, structural timber saving

Authors' contribution: *Lisyatnikov M.S.* — supervision, conceptualization, methodology, text draft; *Repin A.V.* — methodology, text editing, conclusions; *Terentyev K.M.* — methodology, text editing; *Roshchina S.I.* — supervision, conclusions. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Mikhail S. Lisyatnikov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (VISU), 87 Gorky St., Vladimir, 600000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4089-7216, ORCID: 0000-0002-5262-6609; e-mail: mlisiyatnikov@mail.ru

Alexander V. Repin, Student, Department of Building Structures, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (VISU), 87 Gorky St, Vladimir, 600000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8623-6207, ORCID: 0009-0003-3011-7883; e-mail: avlr@bk.ru

Kirill M. Terentyev, Postgraduate student, Assistant of the Department of Building Structures, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (VISU), 87 Gorky St, Vladimir, 600000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5134-7370, ORCID: 0009-0001-8678-1121; e-mail: terenzeret@gmail.com

Svetlana I. Roshchina, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Building Structures, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (VISU), 87 Gorky St, Vladimir, 600000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4159-8636, ORCID: 0000-0003-0356-1383; e-mail: rsi3@mail.ru

© Lisyatnikov M.S., Repin A.V., Terentyev K.M., Roshchina S.I., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Acknowledgements. The study was conducted under the state assignment in the field of scientific activity of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic FZUN-2024-0004, state assignment of the Vladimir State University).

For citation: Lisyatnikov M.S., Repin A.V., Terentyev K.M., Roshchina S.I. Rational outline of timber beams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):39–52. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-39-52> EDN: IFEHZJ

Рациональное очертание деревянных балок

М.С. Лисятников[✉], А.В. Репин[✉], К.М. Терентьев[✉], С.И. Рощина[✉]

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Российская Федерация

✉ rsi3@mail.ru

Поступила в редакцию: 5 января 2026 г.

Доработана: 13 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 17 февраля 2026 г.

Аннотация. Деревянные конструкции, в частности дощатоклееные балки, обладают рядом достоинств, способствующих их широкому применению в промышленном и гражданском строительстве. Разработка и исследование конструктивных решений, позволяющих более рационально использовать прочностные характеристики конструкционной древесины, являются одним из актуальных направлений повышения эксплуатационных качеств деревянных конструкций. Объект исследования — деревянные балки прямоугольного сечения, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой, очертание которых построено на основе траекторий равнопрочности балок при изгибе и скалывании. Построение очертания рациональных деревянных балок (РДБ) основывалось на определении координат узловых точек путем построения прямых, касательных к контуру равнопрочной балки. РДБ представляет собой балку с участком постоянной жесткости в середине пролета и подрезками в опорных зонах. Целью такого подхода являлось создание ресурсоэффективной балочной конструкции из клееной древесины, отличающейся меньшей материалоемкостью по сравнению с балками постоянной высоты сечения по всей длине пролета, а также относительной простотой исполнения. Результаты исследования показывают, что относительные значения параметров РДБ, такие как высота опорного сечения относительно максимальной высоты сечения h_{sup}/h , длина подрезки относительно пролета l_{cut}/L и угол подрезки α_{cut} , зависят только от соотношения максимальной высоты сечения к пролету h/L . Изменение же ширины сечения b и значения внешней нагрузки q никакого влияния на них не оказывают. Теоретическая экономия конструкционной древесины 1 и 2-го сортов составляет 6.2 %...18.3 %.

Ключевые слова: деревянные балки переменной жесткости, равнопрочные деревянные балки, деревянные балки рационального очертания, ресурсоэффективные деревянные балки, экономия конструкционной древесины

Вклад авторов: Лисятников М.С. — научное руководство, концепция исследования, развитие методологии, написание исходного текста, итоговые выводы; Репин А.В. — развитие методологии, доработка текста; Терентьев К.М. — развитие методологии, доработка текста; Рощина С.И. — научное руководство, итоговые выводы. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема FZUN-2024-0004, госзадание ВлГУ).

Для цитирования: Лисятников М.С., Репин А.В., Терентьев К.М., Рощина С.И. Рациональное очертание деревянных балок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 1. С. 39–52. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-39-52> EDN: IFEHZJ

1. Introduction

Load-bearing timber structures (TS) have found widespread application in the construction of buildings and structures due to their physical and mechanical properties, as well as their renewability, carbon neutrality, and economic efficiency [1–5]. Study [6] is devoted to comparing TS with other types of building structures. One way to improve their performance is to refine structural solutions by seeking improved cross-sectional shapes, rational axis outlines of elements, and through the use of variable rigidity, as discussed in [7]. Adopting a structurally justified solution at the design phase allows to reduce the cost of the structure and cut construction and operational expenses, as demonstrated by the design of Olympic facilities made of timber in the Russian Federation. Therefore, improving structural solutions for these load-bearing elements remains a relevant task for the construction industry.

Adopting a technically justified solution at the design phase helps reduce the overall cost of the structure and lower the construction and operating costs of the entire building. This process involves modeling and complex mathematical calculations. Existing approaches include numerous variational methods, as well as the well-developed theory of uniform strength [8], and the numerical finite element methods described in [9; 10]; however, they require significant computational resources and specialized software.

Variability of the properties of wood, as a natural material, poses challenges for accurately evaluating the mechanical characteristics of glued laminated beams. Therefore, it is crucial to develop and validate models for predicting the mechanical characteristics in order to fully exploit the potential of this material [11]. A stochastic model, which enables the establishment of relationships between safety factors and individual mechanical characteristics by combining structural analysis tools with probabilistic descriptions of timber planks, has become an important step in the design of timber structures, including for the purpose of enhancing the competitiveness of timber compared to other building materials [12]. The transversely isotropic model proved to be the most appropriate for describing glued structures, due to the averaging of anisotropic properties in a multilayer solid [13]. Structural optimization is closely linked to the grain distribution along the cross-section. The grain angle should depend on the magnitude of the applied load, which led to development of a nomogram for the rational lamination, in which the proportion of low-quality timber should not exceed 50%. Experimental and numerical analyses [14] indicate the advantages of using hardwood for manufacturing glued laminated beams, particularly in a combined configuration where the layers in the middle of the cross-section are made of low-grade timber, which opens up broad opportunities for resource optimization. Study [15] also demonstrates the effective use of resources in glued laminated beams by inserting lower-quality lamellas into less-loaded zones, typically in the center of the beam.

The influence of geometric parameters on the stress state was numerically determined in [16]. The relationship between the section height and stress is parabolic, while the relationship between the wall thickness and modulus of elasticity is linear. The authors confirm the theory that, in the beam outline, the height axis is the most critical parameter for the structural shape. Timber lamellas in glued laminated structures contain knots formed as a result of the natural growth process of trees, which significantly affect the mechanical properties [17]. Accounting for the location of knots and finger joints in glued laminated beams, that can cause significant stress and strain concentrations, is important, as demonstrated in [18]. Special stresses are concentrated in the support zones of deep beams, during the study of which an engineering calculation of maximum stress was proposed, taking into account the rheological properties of wood, and a method of reinforcement with polymers based on glass fabric with carbon nanotubes was developed, increasing the horizontal shear strength by 10–20% [19]. The developed reinforcement method demonstrated the possibility of conserving wood resources in glued laminated beams while maintaining the design strength [20]. Study [21] demonstrates that replacing up to 34% of the lamellas with lower-quality timber (after fire exposure resulting from a forest fire) reduces the load-bearing capacity by only 2.5%.

Approaches to improving beam geometry have evolved from individual formulas to comprehensive analysis and design methods [22]. In [23], a solution for the skew bending of rectangular beams using the Lagrange method was proposed, which minimizes the cross-sectional area subject to strength constraints. In [24], a variational analysis method was developed and a system of integral equations for calculating forces in all components of the structure of a multi-layer beam was obtained. A simple optimization method for “scissor” trusses, developed in [25], revealed that the slope of the upper chord minimizes forces due to scaling of the load diagrams.

Finite element methods (FEM) have become the standard for analyzing complex structures. Numerical modeling of glued laminated timber beams is a complex problem; for example, the quasi-brittle nature of wood requires modeling of progressive failure mechanisms and nonlinear behavior under load [26]. Simulation in MATLAB can predict flexural rigidity with high accuracy and provide sufficiently accurate predictions of the flexural strength of glued laminated beams [27]. Developing a model in the ANSYS software allows to simulate stress states of any complexity. In the practice of large-scale design, modelling of a lattice timber dome with a diameter of 100 m allowed to reduce wood consumption by 10–15% [28].

The method for buckling analysis of glued laminated beams with variable cross-sections, proposed by the authors [29], revealed an underestimation of the design coefficients when using the Bubnov — Galerkin method. Compound timber elements connected by dowels were studied in [30], showing compliance coefficients in the range of 0.85–0.93. There is a trend toward increased use of glued laminated timber in increasingly slender structures, which requires special attention to stability issues, such as lateral buckling [31]. Lateral buckling of narrow beams with bracing, investigated in [32], was refined in an orthotropic formulation with an equation that revealed overestimation of standard values for a single bracing. Study [33] is devoted to the investigation of out-of-plane bending of glued laminated structures, presenting a comparison of the bending and shear characteristics of CLT and GLT beams.

The development of the strength criteria proceeded in parallel with the refinement of standards, as shown in [34]. The authors of the study demonstrated the inadequacy of the Navier — Zhuravsky calculations for glued laminated structures and proposed Ashkenazi tensor criterion with checks for radial stresses and splitting across the grain in the near-support zones. In [35], a critical reassessment of building codes for timber structures was performed, and errors in the coefficients for lateral buckling were identified. The authors prepared tables for all types of restraints, refining the formulas and force diagram shapes. Field test results confirmed the theoretical hypotheses with a discrepancy of no more than 12%. The results demonstrate the need to refine the regulatory framework for structurally justified timber structure outlines and the validity of applying the principle of uniform strength in practical calculations.

Practical implementation confirms the justification of the improvements to the TS shapes. Technically justified structures are being actively incorporated into the designs of real projects. Compound composite timber beams with mechanical connections, developed in [36], have increased the strength by a factor of 1.5–1.8 and stiffness by a factor of 2.5–3. Software [37] allows to automate the calculation of prestressed compound beams with uniform stress distribution.

Having conducted the analysis of the use of timber structures in construction, including ways to improve the shape and configuration of cross-sections, it can be concluded that the study of load-bearing TS remains relevant. Contemporary researchers are exploring structural solutions aimed at conserving timber resources without compromising the overall strength. Most of the research is related to the use of composite materials, compound structures, or refinement of design codes. However, the use of technically justified structural shapes or cross-sectional configurations is not widely covered in the literature. These factors allow the authors to formulate the objective of this study, which is to determine the cross-sectional shape of a timber beam that will make the most complete use of the strength characteristics of structural timber, and to evaluate the effectiveness of the resulting designs.

The object of this study is a simply supported glued laminated timber floor or roof beam with a rectangular cross-section and subjected to a uniformly distributed load.

The ratio of the wood consumption of beams with a rational outline to that of beams with constant rigidity along their entire length is used as a criterion for evaluating the effectiveness of this design.

The outline of a rational timber beam (RTB) is determined by constructing tangents to the function of the height of the cross-section of a beam of uniform-strength with a constant cross-sectional width. This method ensures a linear variation in rigidity in the near-support zones of the structure, while the cross-sectional height remains constant in the middle of the span.

2. Methods

In the first stage of the study, the contour of a beam of uniform strength was constructed using diagrams of the relationship between the section height and the distribution of bending moments and shear forces $y = h_Q(x)$ along the axis of the member (Figure 1).

The height of the cross-section of the beam of uniform strength was determined based on the strength conditions for timber beams with respect to normal and shear stresses:

$$\sigma = \frac{M(x)}{W(x)} \leq R_b, \tag{1}$$

$$\tau = \frac{Q(x)S(x)}{bJ(x)} \leq R_{hs}, \tag{2}$$

where $M(x) = qx(L - x)/2$ is the function of the bending moment distribution along the beam axis; $Q(x) = q(L/2 - x)$ is the function of the shear force distribution along the beam axis; $W(x) = bh(x)^2/6$ is the section modulus of the beam of variable rigidity; $S(x) = bh(x)^2/8$ is the statical moment of the beam of variable rigidity; $J(x) = bh(x)^3/12$ is the moment of inertia of the beam of variable rigidity; b is the width of the beam section; R_b , R_{hs} are the design strengths of timber in bending and horizontal shear, respectively.

The expressions for $M(x)$ and $W(x)$ were substituting into formula (1), the expressions for $Q(x)$, $S(x)$ and $J(x)$ were substituted into formula (2), and the variable section height $h(x)$ was then expressed:

$$\sigma = \frac{6qx(L - x)}{2bh(x)^2} = R_b \Rightarrow h_M(x) = \sqrt{\frac{3qx(L - x)}{bR_b}}. \tag{3}$$

$$\tau = \frac{12qx(L/2 - x) \cdot bh(x)^2}{8b \cdot bh(x)^3} = \frac{1.5qx(L/2 - x)}{bh(x)} = R_{hs} \Rightarrow h_Q(x) = \frac{1.5q(L/2 - x)}{bR_{hs}}. \tag{4}$$

Next, three tangents to the curve of function $h_M(x)$ were constructed. One of them ran horizontally through its extremum (point D), the vertical coordinate of which corresponds to the maximum height of the cross-section at the midpoint of the span h_{max} . The other two tangents were drawn from points A and G , the vertical coordinates of which correspond to the heights of the support cross-sections h_{sup} . These tangents were, in turn, the extrema of function $h_Q(x)$ and touched the graph of function $h_M(x)$ at points B and E . Solving the problem of determining the rational outline of the timber beam reduced to determining the coordinates of the nodal points of the contour A, B, C, D, E, F, G (see Figure 1).

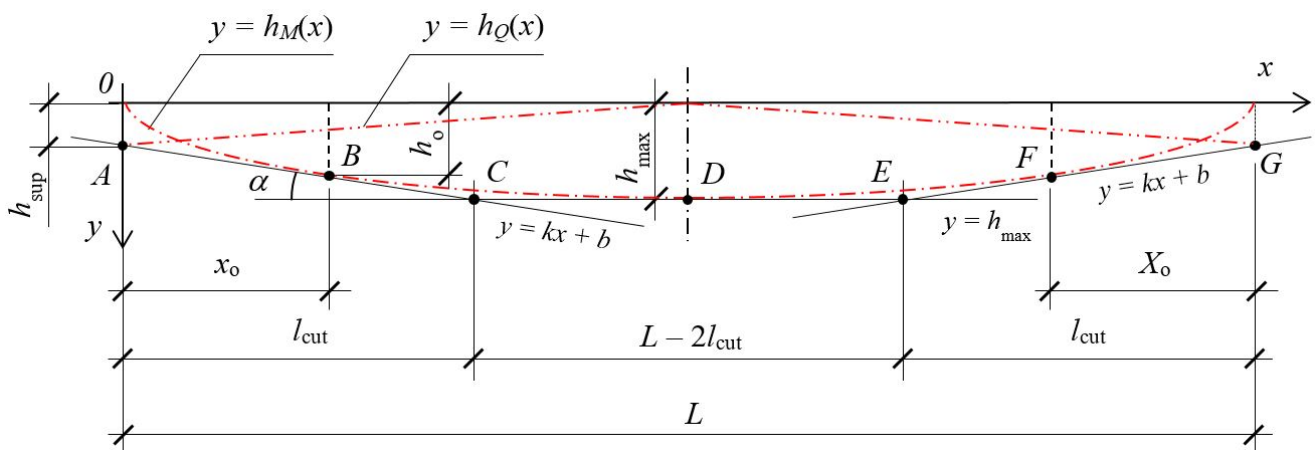


Figure 1. Diagram for determining the rational outline of a timber beam

Source: made by A.V. Repin.

In the second stage, half of the beam span from the origin was considered and the coordinates of points A, D , and G were determined. A coordinate system with its origin at point O was defined, which coincided with the starting point of diagram $h_M(x)$, and the y -axis was oriented vertically downward. The horizontal

coordinates of points A , D , and G corresponded to the beginning, middle, and end of the beam span: $x_A = 0$; $x_D = L/2$; $x_G = L$. The vertical coordinates of points A , D , and G corresponded to the heights of the support sections and the middle of the span (maximum height): $y_A = y_G = h_{\text{sup}}$; $y_D = h_{\text{max}}$. The final coordinates of the points were as follows: $A(0; h_{\text{sup}})$, $D(L/2; h_{\text{max}})$, $G(L; h_{\text{sup}})$.

Thus, based on the above, the following equations were obtained:

$$y_D = h_{\text{max}} = h_M(L/2) = \sqrt{\frac{3qL(L-L/2)/2}{bR_b}} = L\sqrt{\frac{0.75q}{bR_b}}, \quad (5)$$

$$y_A = h_{\text{sup}} = h_Q(0) = \frac{1.5q(L/2-0)}{bR_{\text{hs}}} = \frac{0.75qL}{bR_{\text{hs}}}. \quad (6)$$

In the next stage, the equations for the tangent line to curve $h_M(x)$ were composed:

$$y = h_M(x_o) + h_M'(x_o)(x - x_o) = \sqrt{\frac{3qx_o(L-x_o)}{bR_b}} + \left(\sqrt{\frac{3qx_o(L-x_o)}{bR_b}} \right)' (x - x_o) \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{\frac{0.75q}{bR_b x_o(L-x_o)}} (Lx_o + x(L-2x_o)). \quad (7)$$

$$\text{where } h_M'(x_o) = \left(\sqrt{\frac{3qx_o(L-x_o)}{bR_b}} \right)' = \frac{(3qx_o(L-x_o)/(bR_b))'}{2\sqrt{3qx_o(L-x_o)/(bR_b)}} = (L-2x_o) \sqrt{\frac{0.75q}{bR_b x_o(L-x_o)}}.$$

Next, the position of point B was determined using the equation of the tangent line (7). For this, it was specified in the equation that $x_B = x_o$ and the coordinates of point A were substituted for x and y :

$$\frac{0.75qL}{bR_{\text{hs}}} = \sqrt{\frac{0.75q}{bR_b x_B(L-x_B)}} (Lx_B + 0(L-2x_B)).$$

Then, using the equation given above, x_B was expressed:

$$x_B = \frac{0.75qR_b}{bR_{\text{hs}}^2 + 0.75qR_b} L. \quad (8)$$

The horizontal coordinate of point B is numerically equal to the distance from the support axis to the critical section in the near-support zones of variable rigidity.

The vertical coordinate of point B was determined by substituting $x = x_o = x_B$:

$$y = h_M(x_o) + h_M'(x_o)(x_o - x_o) = h_M(x_o) = \sqrt{\frac{3qx_o(L-x_o)}{bR_b}} \Rightarrow$$

$$y_B = \frac{1.5qR_{\text{hs}}}{bR_{\text{hs}}^2 + 0.75qR_b} L. \quad (9)$$

The vertical coordinates of points B and F are numerically equal to the height of the critical section in the near-support zones of variable rigidity: $h_0 = y_B$.

To determine the coordinates of the points where tangents C and E intersect, y in the equation of the tangent (7) was substituted with expression (5) for h_{\max} :

$$\sqrt{\frac{0.75qL^2}{bR_b}} = \sqrt{\frac{0.75q}{bR_b x_o(L-x_o)}} (Lx_o + x(L-2x_o)).$$

Next, the value of x_C from the equation given above was derived:

$$x_C = \frac{\sqrt{x_o(L-x_o)} - x_o}{L-2x_o}. \quad (10)$$

Substituting x_0 in equation (10) with the expression for x_B , the following is obtained:

$$x_C = \frac{L}{1 + R_{hs} \sqrt{b / (0.75qR_b)}}. \quad (11)$$

The horizontal coordinate of point C is numerically equal to the length of the undercut in the support zones of the beam: $l_{\text{cut}} = x_C$.

In the next stage of the study, based on the expressions given above, calculations were performed to determine the rational outline of the timber beam, and the results of the study were analyzed.

During the process of constructing the trajectory of the beam of uniform strength, cross-section heights were obtained for which the ratio of internal forces to the ultimate strength was equal to one; therefore, the structural capacity was virtually exhausted. It was decided that when determining the outline of a rational beam, a safety factor of, for example, 8% is applied. The values of the design strengths will be multiplied by safety factor $\eta = 1.08$.

Design parameters:

- of 1st-grade pine timber:
 - bending and tensile strength $R_b^A = 21.0$ MPa;
 - shear strength along the grain of glued members in bending $R_{hs}^A = 2.4$ MPa.
- for 2nd-grade pine timber:
 - bending and tensile strength $R_b^A = 19.5$ MPa;
 - shear strength along the grain of glued members in bending $R_{hs}^A = 2.25$ MPa.

Values of service condition factors:

– long-term strength factor $m_{lt} = 0.66$ is adopted for service conditions involving the combined action of dead, long-term temporary and occupancy loads on the floors of residential and public buildings, or the combined action of dead and short-term snow loads;

– coefficient m_b depends on the height of the rectangular cross-section of glued laminated elements in bending. In this study, the calculation was performed for beams with different cross-sectional heights; therefore, in each case, the values of m_b , and the design strength values of timber in bending R_b^D and horizontal shear R_{hs}^D will differ (see Table 1);

– the values of the remaining service condition factors such as m_s, m_h, m_t, m_l are taken as equal to one, and $m_o, m_a, m_c, m_{s,l}, m_{cr}, m_{ptl}$ are not used.

Rational timber beams (RTB) with spans of 6.0, 9.0, 12.0, and 15.0 m were examined, with cross-sectional dimensions relative to the span as follows: height $h = (L/10; L/12; L/15)$; width $b = (h/4; h/5; h/6)$.

The analysis was performed in two directions:

- at each step, relative cross-sectional dimensions h/L and b/h were assigned, based on which the absolute values of h and b , the geometric characteristics of the cross-section, etc., were calculated;
- by varying the value of the design load q , a perfect match was achieved between the values of the extrema of the trajectory of a beam of uniform strength and the absolute value of h .

Table 1. Values of design strength of timber taking into account service condition factors m_i and the specified safety factor

Design characteristics	Section height, cm					
	50 and lower	60	70	80	100	120 and higher
Coefficient m_b	1	0.96	0.93	0.90	0.85	0.8
$R_b^D = R_b^A \cdot m_{lt} \cdot \prod m_i / \eta$, MPa	13.86	13.31	12.89	12.47	11.78	11.09
$R_{hs}^D = R_{hs}^A \cdot m_{lt} \cdot \prod m_i / \eta$, MPa	1.584	1.521	1.473	1.426	1.346	1.267

Source: made by M.S. Lisyatnikov.

Based on the data provided above, the coordinates of the key nodal points governing the rational outline of the timber beam were determined. Next, the geometric parameters of the RTB were calculated: the height of the support section h_{sup} , the height of the critical section in the zones of variable beam rigidity h_0 , the length of the undercut in the near-support zones l_{cut} , and the undercut angle α_{cut} . The economic efficiency of the new structural design was evaluated by comparing the difference in wood consumption between the RTB and beams of constant rigidity. For the same cross-sectional width, the wood consumption is numerically equal to the ratio of the lateral surface areas of the compared structures:

$$\omega = \frac{V_{RB}}{V_{CB}} = \frac{S_{RB}}{S_{CB}} = \frac{h(L - 2l_{cut}) + l_{cut}(h_{sup} + h)}{h \times L}, \quad (12)$$

where V_{RB} , V_{CB} , S_{RB} , S_{CB} are the volumes and surface areas of the rational beam and the constant (rigidity) beam; h , h_{sup} are the cross-sectional heights at the midspan and at the supports, respectively; L is the span of the beam; l_{cut} is the length of the undercut in the near-support zones of the beam.

The calculation process and verification of the results were performed using the *MS Excel* spreadsheet program.

3. Results and Discussion

Figure 2 shows the diagrams of RTB with a span of 9.0 m for $L/h = 10, 12$, and 15, generated using the Chart Wizard in *MS Excel*.

The results of the analysis are presented in Table 2. They show that the relative parameters of the rational beam outline depend on the value of the relative section height h at the midspan. Other characteristics — span L , cross-sectional width b , etc. — have virtually no effect. It has been established that as the section height h increases, the values of such relative values as the length of the undercut l_{cut} / L , the height of the support section h_{sup} , and the coordinate of the critical section in zones of variable rigidity also increase.

By performing calculations for intermediate values of the relative section height, taking into account the strength characteristics of structural timber of grades 1 and 2, the relative geometric characteristics of the RTB as a function of various L/h ratios are obtained. The calculation results are presented in Tables 3 and 4 and in Figures 3 and 4.

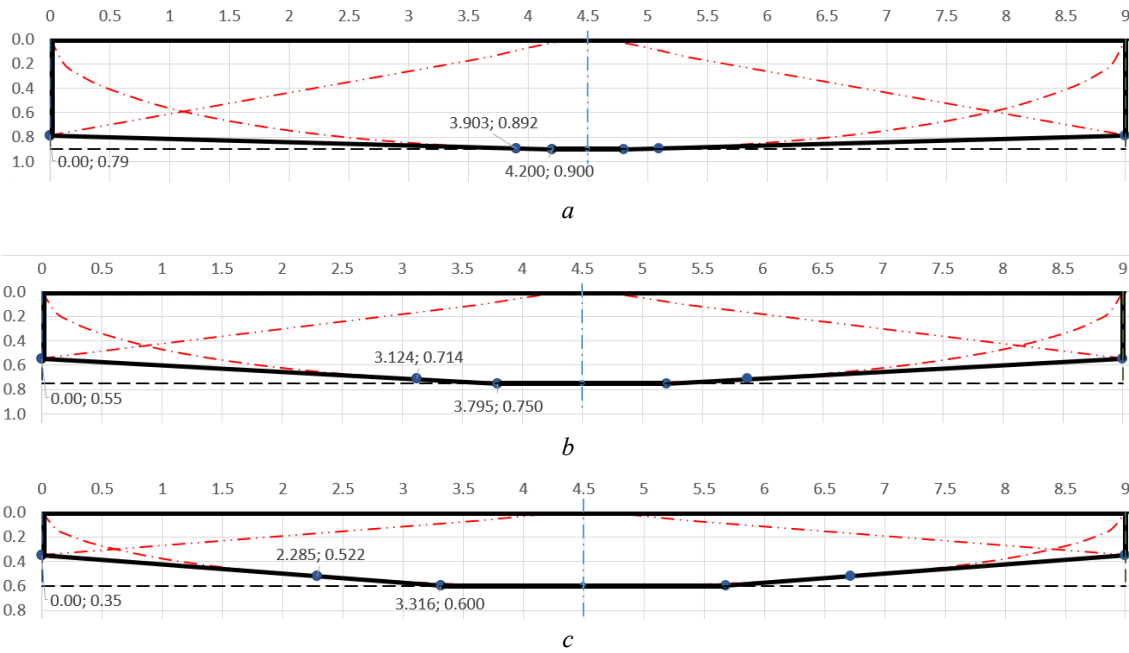


Figure 2. General view of rational beam outlines using the example of structures with a span of $L = 9.0$ m for:
 a — $L/h = 10$; b — $L/h = 12$; c — $L/h = 15$
 Source: made by A.V. Repin.

Table 2. Main results of the calculation for determining the parameters of the rational outline of timber beams made of grade 1 timber

L, m	Parameters and indices	$h = L/10$			$h = L/12$			$h = L/15$		
		$b = h/4$	$b = h/5$	$b = h/6$	$b = h/4$	$b = h/5$	$b = h/6$	$b = h/4$	$b = h/5$	$b = h/6$
6.0	$q, kN/m$	26.61	21.29	17.74	16.04	12.83	10.69	8.21	6.57	5.48
	h, m	0.600			0.500			0.400		
	h_{sup}, m	0.525			0.365			0.233		
	b, m	0.150	0.120	0.100	0.120	0.096	0.080	0.100	0.080	0.067
	X_0, m	2.602			2.083			1.523		
	l_{cut}, m	2.800			2.530			2.211		
	$\alpha_{cut}, ^\circ$	1.534			3.064			4.312		
	h_{sup} / h	0.875			0.729			0.583		
	X_0 / L	0.434			0.347			0.254		
	l_{cut} / L	0.467			0.422			0.368		
	$\omega, \%$	6.2			12.9			18.1		
9.0	$q, kN/m$	35.34	28.28	23.56	21.66	17.33	14.44	11.83	9.46	7.88
	h, m	0.90			0.75			0.60		
	h_{sup}, m	0.79			0.55			0.35		
	b, m	0.23	0.18	0.15	0.19	0.15	0.13	0.15	0.12	0.10
	X_0, m	3.903			3.124			2.285		
	l_{cut}, m	4.200			3.795			3.316		
	$\alpha_{cut}, ^\circ$	1.535			3.064			4.312		
	h_{sup} / h	0.875			0.729			0.583		
	X_0 / L	0.434			0.347			0.254		
	l_{cut} / L	0.467			0.422			0.368		
	$\omega, \%$	6.2			12.9			18.1		

Ending of the Table 2

L, m	Parameters and indices	$h = L/10$			$h = L/12$			$h = L/15$		
		$b = h/4$	$b = h/5$	$b = h/6$	$b = h/4$	$b = h/5$	$b = h/6$	$b = h/4$	$b = h/5$	$b = h/6$
12.0	$q, kN/m$	44.35	35.48	29.57	27.27	21.82	18.18	14.78	11.83	9.86
	h, m	1.20			1.00			0.80		
	h_{sup}, m	1.05			0.73			0.47		
	b, m	0.30	0.24	0.20	0.25	0.20	0.17	0.20	0.16	0.13
	X_0, m	5.203			4.165			3.047		
	l_{cut}, m	5.60			5.06			4.42		
	$\alpha_{cut}, ^\circ$	1.535			3.064			4.312		
	h_{sup} / h	0.875			0.729			0.583		
	X_0 / L	0.434			0.347			0.254		
	l_{cut} / L	0.467			0.422			0.368		
$\omega, \%$	6.2			12.9			18.1			
15.0	$q, kN/m$	55.43	44.35	36.96	32.08	25.67	21.39	17.45	13.96	11.64
	h, m	1.50			1.25			1.00		
	h_{sup}, m	1.31			0.91			0.58		
	b, m	0.38	0.30	0.25	0.31	0.25	0.21	0.25	0.20	0.17
	X_0, m	6.50			5.21			3.81		
	l_{cut}, m	7.00			6.33			5.53		
	$\alpha_{cut}, ^\circ$	1.536			3.065			4.312		
	h_{sup} / h	0.875			0.729			0.583		
	X_0 / L	0.434			0.347			0.254		
	l_{cut} / L	0.467			0.422			0.368		
$\omega, \%$	6.2			12.9			18.1			

Source: made by M.S. Lisyatnikov.

Table 3. Summary table of calculation results for beams made of grade 1 timber

Parameters and indices	Relative height of the section h										
	$L/10$	$L/10.5$	$L/11$	$L/11.5$	$L/12$	$L/12.5$	$L/13$	$L/13.5$	$L/14$	$L/14.5$	$L/15$
$\alpha_{cut}, ^\circ$	1.535	2.000	2.404	2.755	3.064	3.337	3.577	3.792	3.984	4.156	4.312
h_{sup} / h	0.875	0.833	0.795	0.761	0.729	0.700	0.673	0.648	0.625	0.603	0.583
X_0 / L	0.434	0.410	0.388	0.367	0.347	0.329	0.312	0.296	0.281	0.267	0.254
l_{cut} / L	0.467	0.455	0.443	0.432	0.422	0.412	0.402	0.393	0.385	0.376	0.368
$\omega, \%$	6.2	8.2	10.0	11.5	12.9	14.1	15.1	16.1	16.9	17.5	18.1

Source: made by M.S. Lisyatnikov.

Table 4. Summary table of calculation results for beams made of 2nd grade timber

Parameters and indices	Relative height of the section h										
	$L/10$	$L/10.5$	$L/11$	$L/11.5$	$L/12$	$L/12.5$	$L/13$	$L/13.5$	$L/14$	$L/14.5$	$L/15$
$\alpha_{cut}, ^\circ$	1.645	2.107	2.505	2.855	3.159	3.429	3.669	3.881	4.071	4.242	4.395
h_{sup} / h	0.867	0.825	0.788	0.754	0.722	0.693	0.667	0.642	0.619	0.598	0.578
X_0 / L	0.429	0.405	0.383	0.362	0.343	0.325	0.308	0.292	0.277	0.263	0.250
l_{cut} / L	0.464	0.452	0.441	0.430	0.419	0.409	0.400	0.391	0.382	0.374	0.366
$\omega, \%$	6.6	8.6	10.3	11.8	13.2	14.4	15.4	16.3	17.0	17.7	18.3

Source: made by M.S. Lisyatnikov.

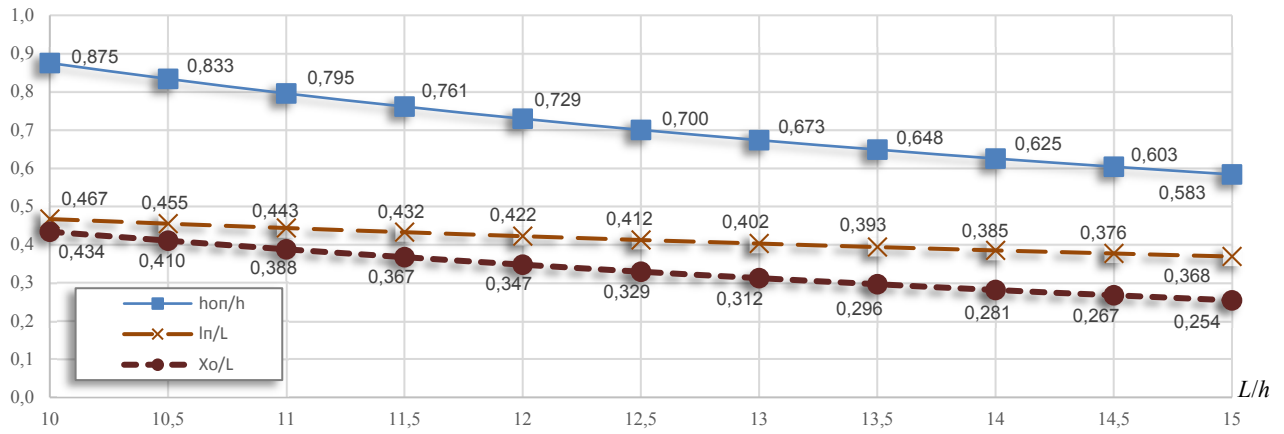


Figure 3. Diagram of the relationship between the relative parameters of the rational outline of timber beams and the relative cross-section height L/h . 1st grade timber

Source: made by A.V. Repin.

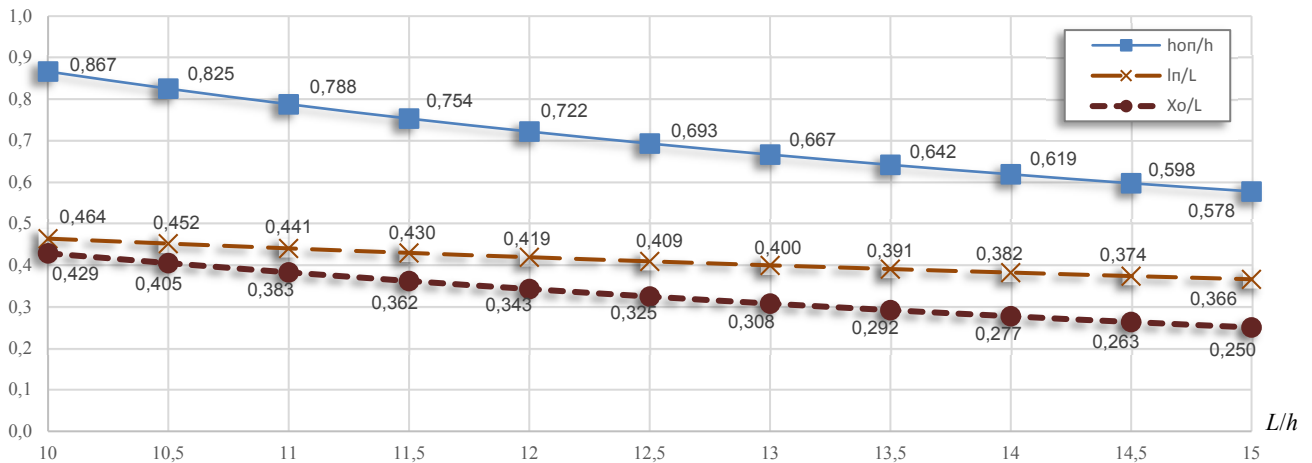


Figure 4. Diagram of the relationship between the relative parameters of the rational outline of timber beams and the relative cross-section height L/h . 2nd grade timber

Source: made by A.V. Repin.

Calculations show that including a safety factor and/or changing the service condition factors has no influence whatsoever on the relative values of the rational beam parameters. The absence of influence indicates that the dominant factor is the ratio between the values of the design strengths to bending and horizontal shear, while the service condition factors and safety factors, judging from negligible influence, are similarity factors.

A techno-economic evaluation of the RTB structural designs shows that their economic efficiency increases as the section height decreases from $L/h = 10$ to $L/h = 15$: from 6.2 to 18.1% for grade 1 timber and from 6.6 to 18.3% for grade 2 timber (Figure 5). At the same time, the difference between the corresponding economic efficiency values for grade 1 and grade 2 timber is within 0.4%. Thus, the influence of timber grade on the economic efficiency of RTB structural designs is insignificant. Given the presence of a large number of factors with insignificant influence on the parameters of the rational beam, it follows that the RTB analysis method will reduce to determining the relative section height L/h and subsequently selecting the RTB parameters from the corresponding table. Intermediate values are determined by interpolation.

Future research will focus on developing the methodology for RTB analysis and conducting a comparative analysis with the results of numerical studies using FEM.

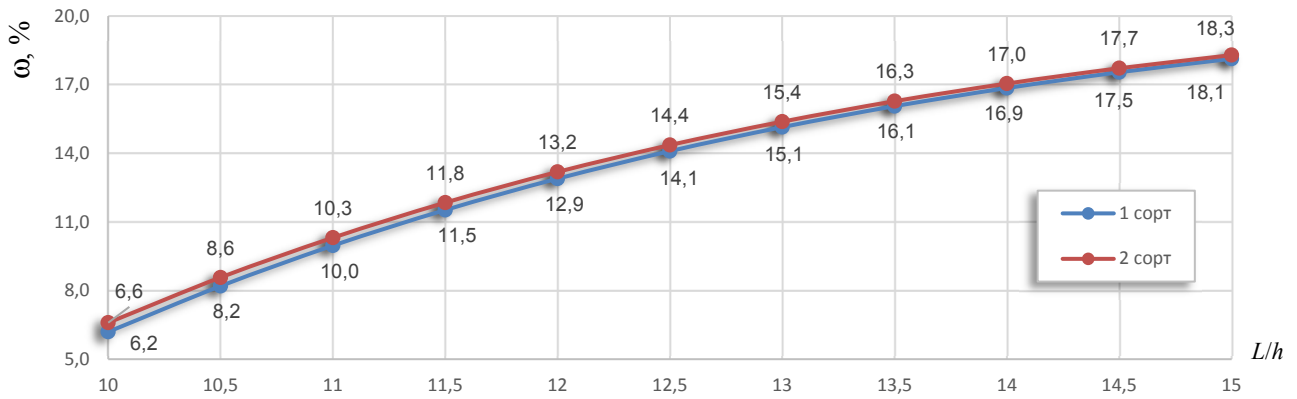


Figure 5. Diagram of the relationship between the economic efficiency (ω) of the RTB and the relative height of the section L/h

Source: made by A.V. Repin.

4. Conclusion

The following conclusions were drawn as a result of the study:

1. Theoretical studies of single-span timber beams were conducted to determine their rational outline based on the uniform strength trajectories of beams with constant cross-sectional widths in bending and horizontal shear. Expressions were derived to determine the coordinates of the nodal points of the rational beam contour, and calculations were performed to determine the absolute and relative values of the geometric parameters of rational timber beams for various spans and cross-sectional dimensions;

2. Analysis of the calculation results showed that the relative values of the shape parameters of a rational beam depend on the relative section height h at midspan. Other characteristics — length L , cross-sectional width b , etc. — have virtually no effect. It has been established that as the section height h increases, the values of the following relative values also increase:

- the length of the undercut l_{cut} / L ;
- the height of the support section h_{sup} ;
- the coordinate of the critical section in zones of variable rigidity.

3. A techno-economic evaluation of structural designs for rational timber beams shows that the economic efficiency (wood consumption relative to a beam of constant rigidity) increases as the cross-sectional height decreases: from 6.2 to 18.1% for grade 1 timber and from 6.6 to 18.3% for grade 2 timber; the difference between the corresponding values is within 0.4%. The insignificant difference in wood consumption indicates that the grade of timber has a negligible effect on the economic efficiency of the studied structures.

References

1. Zapoev M.A., Romanov N.P., Belyaeva S.V. Features of glued laminated timber anisotropic structure. *Alfabuild*. 2018;4(6):83–91. <https://doi.org/10.34910/ALF.6.8> EDN: MYLBYQ
2. Xiong W., Xu J., Li Z., Xiao Y. Use of glued laminated bamboo (glubam), and cross-laminated bamboo and timber (CLBT) in the environmentally-friendly construction: A study from the perspective of fatigue properties. *Engineering Structures*. 2025;342:120979. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120979> EDN: MKIFAU
3. Gong Y., Liu R., Yao L., Ren H., Xu J. Innovation analysis of carbon emissions from the production of glued laminated timber in China based on real-time monitoring data. *Journal of Cleaner Production*. 2024;469:14314. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2024.143174> EDN: CVPZKW
4. Bremner A., Poudyal N.C., Nepal P., Brandeis C., Taylor A., Bergman R. Social, economic, and policy aspects of cross-laminated timber: A review of emerging literature and future research needs. *Forest Policy and Economics*. 2026;183:103695. <https://doi.org/10.1016/j.forpol.2025.103695>
5. Tsai M.-T., Soegiono P.D., Lee W.-L. Life cycle assessment and environmental impact of novel cross-laminated timber composite façade applied in renovation of aged reinforced concrete residential building in subtropical area. *Energy and Buildings*. 2026;357:117085. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2026.117085>

6. Hassan O.A., Johansson C. Glued laminated timber and steel beams. *Journal of Engineering, Design and Technology*. 2018;16(3):398–417. <https://doi.org/10.1108/JEDT-12-2017-0130>
7. Zhadanov V.I., Nesterenko M.A., Pinaykin I.P. Analysis of structural solutions of bearing ribs of large-sized combined panels on a wooden frame. *Expert: Theory and Practice*. 2024;4:31–36. (In Russ.) https://doi.org/10.51608/26867818_2024_4_31 EDN: IBQWHQ
8. Nemirovsky Yu.V., Boltaev A.I. Calculation and design of hybrid wooden beams. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017;(3):129–152. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.11> EDN: ZJZRUX
9. Toktoraliev E.T., Asrankulov T., Karoolbek K.A., Abutalipov E.A. Determination of optimal slope of top chord for the timber structures. *Science and Innovative Technologies*. 2020;(1):221–228. (In Russ.) <https://doi.org/10.33942/sit.nes031> EDN: FKSZPD
10. Shorstov R.A., Yaziev S.B., Chepurnenko A.S., Klyuev A.V. Flat bending shape stability of rectangular cross-section wooden beams when fastening the edge stretched from the bending moment. *Construction Materials and Products*. 2022;5(4):5–18. (In Russ.) <https://doi.org/10.58224/2618-7183-2022-5-4-5-18> EDN: GIVPBC
11. Vafadar F., Jaaranen J., Fink G. Probabilistic numerical modeling of glued laminated timber beams — Experimental validation and insights into the potential of layout modification. *Engineering Structures*. 2025;344:121310. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.121310> EDN: VBZODI
12. Kandler G., Lukacevic M., Zechmeister Ch., Wolff S., Füssl J. Stochastic engineering framework for timber structural elements and its application to glued laminated timber beams // *Construction and Building Materials*. 2018. Vol. 190. P. 573–592. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.09.129>
13. Nemirovskiy Yu.V., Boltaev A.I. Features of deformation and destruction of hybrid timber beams. *Russian Forestry Journal*. 2018;(4):118–131. (In Russ.) <https://doi.org/10.17238/issn0536-1036.2018.4.118> EDN: XUBIZF
14. Sciomenta M., Spera L., Peditto A., Ciuffetelli E., Savini F., Bedon Ch., Romagnoli M., Nocetti M., Brunetti M., Fragiaco M. Mechanical characterization of homogeneous and hybrid beech-Corsican pine glue-laminated timber beams. *Engineering Structures*. 2022;264:114450. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114450> EDN: LNBVHQ
15. Pech S., Kandler G., Lukacevic M., Füssl J. Metamodel assisted optimization of glued laminated timber beams by using metaheuristic algorithms. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2019;79:129–141. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2018.12.010>
16. Novitsky Ya.Ya., Khanko O.V., Yushkevich I.V. Theoretical studies of proportioning of sections of glued beams with a thin wall. *Innovative regional development: The potential of science and modern education. Proceedings of the VI National Scientific and Practical Conference with international participation*. Astrakhan, February 08–09, 2023. p. 43–47. (In Russ.) EDN: JIEGKL
17. Vida Ch., Lukacevic M., Eberhardsteiner J., Füssl J. Modeling approach to estimate the bending strength and failure mechanisms of glued laminated timber beams. *Engineering Structures*. 2022;255:113862 <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.113862> EDN: DIUQOE
18. Vafadar F., Jaaranen J., Fink G. Experimental stiffness investigation of finger joints in glued laminated timber beams using digital image correlation. *Construction and Building Materials*. 2024;438:137095. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.137095> EDN: UNJELC
19. Roshchina S.I., Lisyatnikov M.S., Griбанov A.S., Glebova T.O. Calculation and strengthening of maximum stressed near support zones of high glue-wood beam constructions. *Forestry Engineering Journal*. 2015;(5):187–197. (In Russ.) <https://doi.org/10.12737/11276> EDN: TVXUFV
20. Lisyatnikov M.S. Improving the technology of glued wooden structures with increased support zones. *Forestry Engineering Journal*. 2015;5(2):137–148. (In Russ.) <https://doi.org/10.12737/111988> EDN: TZCARL
21. Lukina A., Lisyatnikov M., Lukin M., Vatin N., Roshchina S. Strength properties of raw wood after a wildfire. *Magazine of Civil Engineering*. 2023;(3):11907. <https://doi.org/10.34910/MCE.119.7> EDN: JIUHQK
22. Ding M., Hua Zh., Lin Y., Zhong X., Yi J., Wei Y. Experimental analysis and finite element simulation of the flexural performance of glued laminated bamboo beam string structures // *Construction and Building Materials*. 2026. Vol. 519. Article no. 145854. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2026.145854>
23. Shein A.I., Zemtsova O.G. Closed solution of the problem of optimizing multi-story frame systems from the stability conditions. *Transport Facilities*. 2018;5(2):6. (In Russ.) <https://doi.org/10.15862/06SATS218> EDN: UUCBHQ
24. Shevchenko A.V., Shapovalov S.M. Calculation of composite wood beams is based on variational method. *Bulletin of Bstu Named After V.G. Shukhov*. 2017. № 1. С. 88–91. (In Russ.) <https://doi.org/10.12737/23928> EDN: XHLEJZ
25. Repin V.A., Lukina A.V., Usov A.S. Rational structural solutions for triangular trusses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):199–209. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-199-209> EDN: CUKIGR
26. Vida Ch., Lukacevic M., Hochreiner G., Pech S., Füssl J. Numerical modeling of glued laminated timber beams without finger joints: Identifying load-bearing capacity and analyzing failure mechanisms. *Engineering Structures*. 2025;345:121489. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.121489> EDN: YTJPSB

27. Jaaranen J., Fink G. A finite element simulation approach for glued-laminated timber beams using continuum-damage model and sequentially linear analysis. *Engineering Structures*. 2024;304:117679. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.117679> EDN: GNKZQAQ
28. Miryaev B.V., Sorokina E.A. Mesh wooden dome frame optimization. *Modeling and Mechanics of Structures*. 2023;(17):95–104. (In Russ.) EDN: RKUTVQ
29. Yaziev B.M., Chepurnenko A.S., Karamysheva A.A., Yaziev S.B. Optimization of wooden beams of variable cross-section Certificate of registration of the computer program RU 2016615085, 05.16.2016. Application No. 2016612477 dated 03/23.2016. (In Russ.) EDN: YGMPRJ
30. Kryukova A.A., Suzyumov A.V., Yartsev V.P. About coefficient of compliance, error and bearing capacity of composite wood elements. *Ecological and resource-saving technologies in science and technology : proceedings of the All-Russian Scientific and Technical Conference*. October 19-20, 2021. Voronezh: Voronezh State Forestry Engineering University named after G.F. Morozov; 2021. p. 107–111. (In Russ.) https://doi.org/10.34220/ERSTST2021_107-111 EDN: REJFX Y
31. Capellán G., Sánchez-Haro Ja., de Celis P., Ramos-Gavilán A.B. Theoretical, experimental and numerical study of lateral buckling in glued laminated timber beams. *Engineering Structures*. 2025;338:120558. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120558> EDN: UQKEQJ
32. Shorstov R.A., Yaziev S.B., Chepurnenko A.S. Optimization of compressed wooden bars of variable section according to the criterion of maximum critical load. *Construction and Architecture*. 2023;11(1):4. (In Russ.) <https://doi.org/10.29039/2308-0191-2022-11-1-5-5> EDN: NRRYQL
33. Li H., Wang L., Wei Ya., Wang B.J., Jin H. Bending and shear performance of cross-laminated timber and glued-laminated timber beams: A comparative investigation. *Journal of Building Engineering*. 2022;45:103477. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2021.103477> EDN: OGEXZG
34. Serov E.N., Belov V.V. Modern assessment of glued wooden design durability. *Bulletin of Civil Engineers*. 2016;(6):109–113. (In Russ.) EDN: XGRIZP
35. Karamysheva A.A., Yazyeva S.B., Chepurnenko A.S. Calculation of plane bending stability of beams with variable stiffness. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Technical Sciences*. 2016;(1):95–98. (In Russ.) <https://doi.org/10.17213/0321-2653-2016-1-95-98> EDN: VPF BMP
36. Popov E., Labudin B., Konovalov A., Karelskiy A., Sopilov V., Bobyleva A., Stolypin D. Numerical buckling calculation method for composite rods with semi-rigid ties. *Magazine of Civil Engineering*. 2023;(3):11904. <https://doi.org/10.34910/MCE.119.4> EDN: AGVRHV
37. Schmidt A.B. Calculation of a double-slope curved glued beam of variable cross-section height. Certificate of state registration of a computer program. No. RU 2019610152. Date of publication: 09.01.2019. Registration date: 12.18.2018. Saint Petersburg: SPbGASU, 2019. EDN: FOZMJT

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-22-1-53-66
EDN: INBMOW

Научная статья / Research article

Влияние асимметрии геометрии на пространственную работу башенных конструкций

Ю.Д. Маркина 

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация

✉ poluektoff@bk.ru

Поступила в редакцию: 1 декабря 2025 г.

Доработана: 10 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 14 февраля 2026 г.

Аннотация. Трехгранные антенно-мачтовые сооружения с асимметричной нижней частью, выполненной в форме усеченной пирамиды с одним вертикальным поясом, характеризуются выраженной неравномерностью пространственной жесткости. Геометрическая асимметрия, усиленная эксплуатационной, влияет на деформационные и динамические характеристики конструкций и приводит к отличиям от классических симметричных башенных схем. Объектом исследования являются три эксплуатируемые башни высотой 70 м, построенные по единой конструктивной схеме, но различающиеся массой металлоконструкций, объемом оборудования и климатическими параметрами районов установки. Метод исследования основан на пространственном конечно-элементном моделировании с учетом нормативных ветровых воздействий и массовой инерции оборудования. Получены ключевые закономерности работы конструкций: максимальная податливость в направлении вертикальной грани; снижение горизонтальных перемещений на 9–18 % при ветровом воздействии в наклонные грани; концентрация изгибно-растягивающих усилий в нижних участках наклонных поясов; выраженная торсионно-изгибная составляющая собственных форм колебаний. Установлено влияние оборудования на деформативность и динамические параметры: добавленная масса снижает частоты первых изгибных форм на 16–20 % и торсионно-изгибных — на 10–15 %. Выявленные эффекты формируют комплексное представление о пространственной работе асимметричных трехгранных башен и служат основой для дальнейшего сопоставления с эквивалентными симметричными моделями.

Ключевые слова: трехгранная башня, МКЭ, НДС, ветровая нагрузка, собственные колебания, асимметричная решетчатая конструкция, деформационная жесткость, горизонтальные перемещения

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности. Автор выражает благодарность генеральному директору ООО «ПРИЗМОНТ-МЕТАЛЛ» (Москва, Российская Федерация) Сергею Васильевичу Климовичу за предоставление технических данных по монтажу башен с асимметричной нижней частью в виде усеченной пирамиды с одним вертикальным поясом. Автор выражает признательность рецензентам за внимательный анализ и конструктивные замечания, позволившие повысить качество представленного материала.

Для цитирования: Маркина Ю.Д., Влияние асимметрии геометрии на пространственную работу башенных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 1. С. 53–66. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-53-66> EDN: INBMOW

Маркина Юлия Дмитриевна, кандидат технических наук, доцент кафедры теории сооружений и технической механики, инженерно-строительный факультет, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет (ННГАСУ), Российская Федерация, 603000, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, д. 65; eLIBRARY SPIN-код: 4203-4240, ORCID: 0009-0006-7167-0652; e-mail: poluektoff@bk.ru

© Маркина Ю.Д., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Influence of Geometric Asymmetry on the Spatial Behavior of Tower Structures

Yulia D. Markina 

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, *Nizhny Novgorod, Российская Федерация*

✉ poluektoff@bk.ru

Received: December 1, 2025

Revised: February 10, 2026

Accepted: February 14, 2026

Abstract. Triangular antenna mast structures with an asymmetric lower part shaped as a truncated pyramid with a single vertical chord exhibit nonuniform spatial stiffness. Geometric and operational asymmetry affects their deformation and dynamic behavior, leading to deviations from classical symmetric tower systems. The research object comprises three operating 70 m towers built according to the same structural concept, but differing in structural mass, equipment configuration and climatic conditions. The analysis is based on three-dimensional finite element modelling that accounts for regulatory wind actions and the inertial mass of the equipment. The study identifies key response patterns. The towers demonstrate maximum lateral flexibility in the direction of the vertical face, while wind action toward inclined faces reduces horizontal displacements by 9–18%. Combined bending and tensile stress concentrates in the lower parts of the inclined chords, whereas lattice members operate with a significant reserve of capacity. Natural vibration analysis reveals a pronounced bending–torsion coupling in modes 3–5 due to asymmetric stiffness. Equipment mass lowers the frequencies of the first bending modes by 16–20% and the bending–torsion modes by 10–15%. The results provide a comprehensive understanding of the spatial behavior of asymmetric triangular towers and form the basis for comparison with an equivalent symmetric model.

Keywords: triangular tower, finite-element analysis, stress–strain state, wind load, natural vibrations, asymmetric lattice structure, deformation stiffness, horizontal displacements

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

Acknowledgements. The author expresses his gratitude to Klimovich Sergey Vasilyevich, General Director of OOO PRISMONT-METAL (company in Moscow, Russian Federation), for providing technical data on the installation of towers with an asymmetric lower part in the form of a truncated pyramid with one vertical chord. The author expresses sincere gratitude to the reviewers for their careful evaluation of the manuscript and constructive comments that helped improve the quality of the presented work.

For citation: Markina Yu.D. Influence of geometric asymmetry on the spatial behavior of tower structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):53–66. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-53-66> EDN: INBMOW

1. Введение

Антенно-мачтовые сооружения (АМС) представляют собой высокие решетчатые пространственные конструкции, эксплуатируемые в условиях значительных ветровых воздействий. Их геометрическая форма, конфигурация решетки и тип поясов определяют напряженно-деформированное состояние конструкции, динамические характеристики и эксплуатационную надежность, что подтверждается рядом исследований, посвященных оптимизации и оценке жесткостных характеристик башенных конструкций. Так, в [1] выполнена топологическая оптимизация телекоммуникационной башни с учетом ветровых и гололедных нагрузок, что демонстрирует высокую чувствительность пространственной работы конструкции к геометрии решетки. Исследования [2] показали, что конфигурация стержневых элементов существенно влияет на распределение напряжений при повреждениях, что связано с глобальной устойчивостью каркаса. В [3] обоснована роль геометрических параметров при концептуальном проектировании телекоммуникационных конструкций, что подчеркивает важность выбора схемы поясов и решетки на ранних этапах.

Ветровая нагрузка является главным эксплуатационным фактором для таких сооружений, поэтому значительное число работ посвящено аэродинамике башен. Численные и экспериментальные исследования [4–6] показывают, что даже при регулярной геометрии решеток и гладких стержнях реальная картина обтекания характеризуется выраженной трехмерностью: чередованием зон повышенно-

Yulia D. Markina, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Theory of Structures and Technical Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering (NNGASU), 68 Il'inskaya St, Nizhny Novgorod, 603000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4203-4240, ORCID: 0009-0006-7167-0652; e-mail: poluektoff@bk.ru

го и пониженного давления, периодическим вихреобразованием и сильной зависимостью аэродинамических коэффициентов от угла атаки. Обобщенные данные [7–9] указывают, что телекоммуникационные башни обладают значительно более сложной аэродинамической реакцией, чем классические стержневые фермы, что связано как с плотностью решетки, так и с локальными препятствиями в виде антенн и оборудования. Работы [10–12] демонстрирует, что оценка ветровых воздействий должна учитывать вероятностную природу экстремальных скоростей ветра, что особенно важно для высоких гибких сооружений.

Динамические характеристики башен под действием ветра и сейсмике изучены в ряде работ. В [13] исследовались колебательные формы оффшорных платформ, показав, что неравномерность распределения масс приводит к усилению изгибно-крутильных форм колебаний. Аналогичные выводы для решетчатых башен представлены в [14; 15], где показана высокая чувствительность частот и форм к изменению массы оборудования и ветровой нагрузки. Вероятностные оценки динамического отклика телекоммуникационных конструкций, выполненные в [16–18], подтверждают, что асимметрия геометрии и нагрузки приводит к существенному изменению глобальных форм колебаний и возможному снижению устойчивости.

Важным фактором, влияющим на пространственную работу телекоммуникационных башен, является масса и конфигурация технологического оборудования. Размещение антенн, радиоблоков и волноводных систем не только увеличивает собственную массу конструкции, но и формирует дополнительные ветровые площади, изменяя реакцию башни при действии горизонтальных нагрузок. В численных [19–21] и экспериментальных исследованиях [22; 23] показано, что оборудование способно существенно изменять распределение инерционных сил, смещать центр масс башни и усиливать изгибно-крутильные деформации ствола. Эти работы подчеркивают, что асимметричное расположение антенн приводит к различной степени вовлечения поясов и решетки при действии ветра, а увеличение массы оборудования снижает частоты изгибных форм и увеличивает перемещения в направлении наименьшей жесткости.

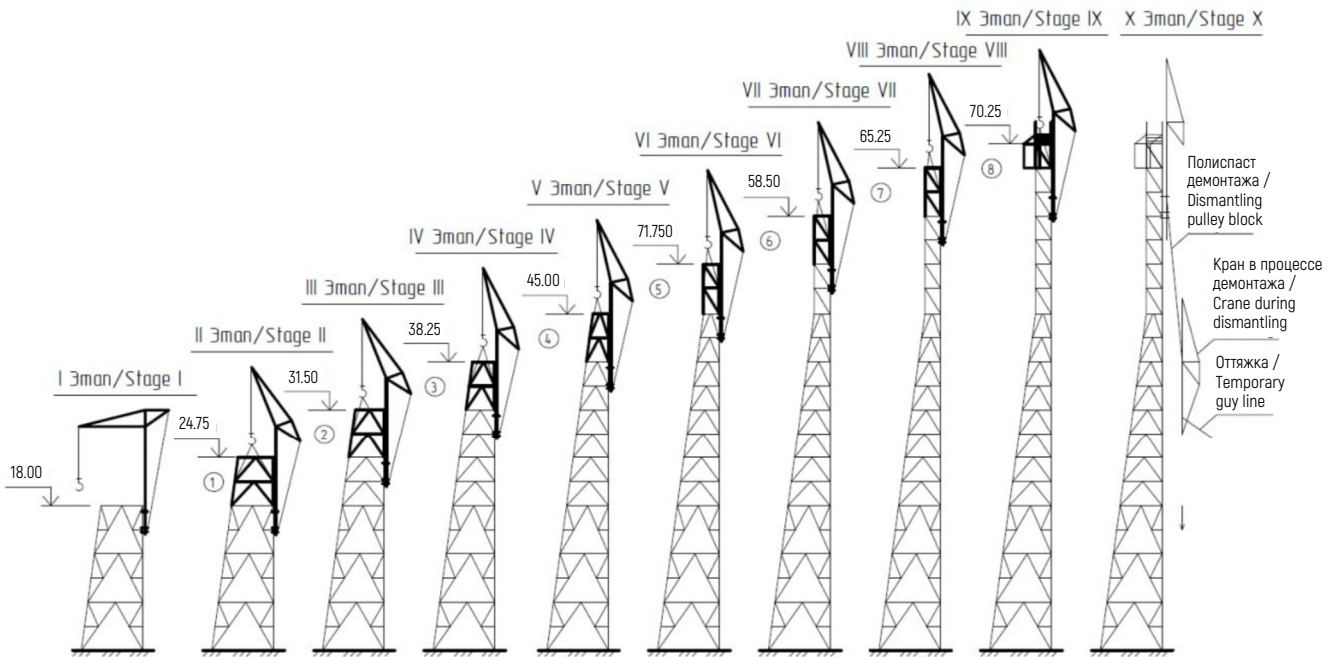
Одним из специализированных типов АМС является трехгранная решетчатая башня, нижняя часть которой имеет форму трехгранной усеченной пирамиды с одним вертикальным и двумя наклонными поясами. Такая форма применяется из-за особенностей технологии монтажа: вертикальный пояс обеспечивает возможность последовательного подъема самоподъемного крана вдоль ребра, что упрощает монтаж блоков (рис. 1). Однако данное конструктивное решение существенно изменяет пространственную работу сооружения по сравнению с классическими правильными трехгранными пирамидами. Асимметрия нижнего блока приводит к неравномерному распределению жесткости в продольном направлении, различной степени вовлечения поясов и решетки при действии ветра и формирует выраженный торсионный компонент в изгибно-крутильных формах колебаний. Несмотря на распространенность таких конструкций, их динамическое поведение и особенности работы под действием ветровых нагрузок остаются неизученными. Нормативные документы и публикации ориентированы на симметричные геометрические схемы, тогда как трехгранные АМС с вертикальным поясом обладают иными характеристиками жесткости и динамического отклика. Требуются специализированные исследования, направленные на выявление влияния геометрической и эксплуатационной асимметрии именно для такого типа трехгранных башен.

Объектом исследования является металлическая трехгранная башня антенно-мачтового типа высотой 70 м с асимметричной геометрией нижней части ствола — с одним вертикальным поясом и двумя наклонными.

Цель исследования — выявление особенностей пространственной работы и динамического поведения трехгранных АМС с асимметричной нижней частью в виде усеченной пирамиды с одним вертикальным поясом.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1) построение и верификация конечно-элементных моделей трех эксплуатируемых трехгранных АМС с асимметричной геометрией нижнего блока;



a



b



v

Рис. 1. Монтаж башни самоподъемным краном:

a — технологическая схема монтажа; *b* — подготовка к Этапу I — навеске самоподъемного крана;

v — Этап IX — установка самоподъемным краном верхнего блока башни

Источники: выполнено Ю.Д. Маркиной, А.А. Маркиным.

Figure 1. Tower installation using a self-erecting crane:

a — technological scheme of installation; *b* — preparation for Stage I: attaching the self-erecting crane;

v — Stage IX: lifting and installing the upper tower block with a self-erecting crane

Source: made by Yu.D. Markina, A.A. Markin.

2) анализ горизонтальных перемещений ствола башен при различных направлениях ветровой нагрузки;

3) определение и сравнение коэффициентов использования элементов для разных направлений ветра и условий эксплуатации;

4) определение собственных частот и форм колебаний и анализ их чувствительности к асимметрии конструкции и наличию оборудования;

5) выявление закономерностей влияния асимметрии нижнего блока на жесткостные и динамические характеристики сооружений;

6) подготовка базы для дальнейшего сравнения исследованных башен с эквивалентной симметричной конструкцией.

2. Методы

Исследование выполнено методом численного моделирования напряженно-деформированного состояния трех эксплуатируемых башен связи высотой 70 м (рис. 2). Каждая башня представляет собой пространственную стержневую конструкцию, внешне образующую трехгранную усеченную пирамиду с одним вертикальным поясом (до +45,000 м) и трехгранную призму в верхней части. Пояса выполнены из труб, в плоскости граней расположена решетка из труб и швеллеров. Несмотря на общность конструктивной схемы, исследуемые башни различаются рядом параметров. К таким различиям относятся отдельные геометрические характеристики, сечения части поясов и элементов решетки, состав и расположение вспомогательных конструкций, масса и конфигурация установленного антенно-фидерного оборудования. Основные конструктивные параметры приведены в табл. 1.



Рис. 2. Общий вид объектов исследования:

a — Б1; *б* — Б2; *в* — Б3

И с т о ч н и к: выполнено А.А. Маркиным.

Figure 2. General view of the research objects:

a — Т1; *б* — Т2; *в* — Т3

S o u r c e: made by А.А. Markin.

Таблица 1. Основные характеристики конструктивного решения башен
 Table 1. Main structural characteristics of the tower design

№ / No.	Наименование характеристики / Name of characteristic	Значение / Value
1	Высота металлической башни, м / Height of the steel tower, m	70,00
2	Размеры граней, м / Face widths, m	8,50–2,50
3	Высота расположения диафрагм жесткости, м / Elevation of stiffening diaphragms, m	+6,000, +12,000, +18,000, +21,375, +24,750, +31,500, +68,625
4	Высота расположения переходных, технологических площадок и площадок для установки огней «ЗОМ», м / Elevation of transition and service platforms and aircraft warning light platforms, m	+6,000, +18,000, +24,750, +38,250, +51,750, +65,250, +68,625

Источники: выполнено Ю.Д. Маркиной / Source: made by Yu.D. Markina.

Расчетные исследования выполнены автором в программном комплексе SCAD Office с использованием метода конечных элементов в рамках поверочных расчетов несущей способности конструкций опор с учетом размещенного и планируемого к установке антенно-фидерного оборудования. Для моделирования несущей системы использовались пространственные стержневые конечные элементы типа 5 «Пространственный стержень», обладающие шестью степенями свободы в узле (UX, UY, UZ, RX, RY, RZ). Данный тип элемента основан на аппроксимации изгиба по модели Эйлера — Бернулли с учетом сдвига по теории Тимошенко и обеспечивает корректное представление изгибных, продольных и крутильных деформаций тонкостенных трубчатых элементов, характерных для решетчатых АМС. Использование стержневых элементов позволяет достигать требуемой точности расчета при существенно меньшей вычислительной размерности модели по сравнению с пластинчатыми и объемными конечными элементами, что делает данный подход наиболее рациональным для пространственных решетчатых конструкций [25]. Стержневые элементы также соответствуют нормативной методике расчета решетчатых башен¹. Модель фундамента принята абсолютно жесткой, для узлов у основания заданы нулевые перемещения и повороты по всем степеням свободы.

Модели включают полный набор постоянных и временных нагрузок согласно требованиям Свода правил Российской Федерации СП 20.13330.2016²: собственный вес конструкций и навесного оборудования, гололедную и ветровую нагрузки. Ветровое воздействие моделировалось как распределенная нагрузка вдоль поясов. Рассматривались три направления ветрового воздействия: в грань W1, вдоль грани W2 и от грани W3 (рис. 3). Выбор ненормативных направлений (согласно СП 20.13330.2016³ для трехгранных опор является обязательным рассмотрение только ветра в грань W1, остальные направления не регламентированы) обусловлен тем, что при W2 и W3 могут формироваться максимальные усилия в элементах решетки и определяющие отрывные реакции фундаментов. Основным расчетным сочетанием является комбинация полной ветровой нагрузки с постоянными. Расчет выполнялся в линейной постановке. Корректность результатов подтверждается сопоставимостью с результатами более ранних поверочных расчетов несущей способности этих же башен, выполненных в рамках экспертизы опор до переоборудования. Эксплуатационные параметры башен приведены в табл. 2.

Влияние вертикальной грани оценивалось по относительному снижению перемещений при ветре в наклонные грани Г2 и Г3 относительно Г1. Под снижением перемещений понимается относительное уменьшение горизонтального перемещения при действии ветра в наклонные грани Г2 или Г3 по

¹ СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. 154 с.; ENV 1993-1-3 EuroCode 3: Design of steel structures. Part 1–3: General rules. Supplementary rules for cold formed thin gagemembers and sheeting. European Committee for Standardisation CEN. Brussels, 1996; Wind Actions on Structures: ISO 4354:2009. [2009-06-04]. Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization, 2009. 68 p.

² СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. 154 с.

³ Там же.

сравнению с перемещением при ветре в вертикальную грань Г1. Показатель выражается в процентах и определяется как

$$\Delta\delta = \frac{\delta_{\Gamma 1} - \delta_{\Gamma i}}{\delta_{\Gamma 1}} 100\%,$$

где $\delta_{\Gamma 1}$ — горизонтальное перемещение при ветровом воздействии в грань Г1; $\delta_{\Gamma i}$ — перемещение при ветре в грань Г2 или Г3.

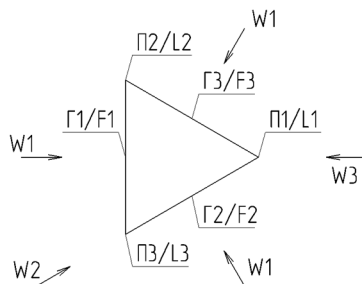


Рис. 3. Рассматриваемые направления ветра по отношению к конструкции:

W1 — в грань; W2 — вдоль грани; W3 — от грани; П1 — вертикальный пояс;
 П2 и П3 — наклонные пояса; Г1 — наклонная грань, противоположная поясу П1;
 Г2 и Г3 — вертикальные грани, противоположные поясам П2 и П3

И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 3. Considered wind directions relative to the structure:

W1 — towards the face; W2 — along the face; W3 — away from the face;
 L1 — vertical chord; L2 and L3 — inclined chords; F1 — inclined face opposite to chord L1;
 F2 and F3 — vertical faces opposite to chords L2 and L3

S o u r c e: made by Yu.D. Markina.

Таблица 2. Эксплуатационные параметры башен / Table 2. Operational parameters of the towers

—	Б1/Г1	Б2/Г2	Б3/Г3
Область Российской Федерации / Region of the Russian Federation	Нижегородская / Nizhny Novgorod	Рязанская / Ryazan	Нижегородская / Nizhny Novgorod
Ветровой район / Wind region	II	I	I
Тип местности / Terrain category	A	A	A
Гололедный район / Icing region	II	II	III
Сейсмичность района, баллы / Seismicity of the area, points	< 6	< 6	< 6
Коэффициент надежности по ответственности / Partial safety factor with respect to importance	1	1	1
Вес конструкции, т / Weight of the steel structure, t	16,04	16,79	18,13
Вес оборудования, т / Weight of equipment, t	3,17	5,09	2,72
Суммарная ветровая нагрузка, тс / Total wind load, tf	6,97	5,50	6,95

И с т о ч н и к: выполнено Ю.Д. Маркиной / S o u r c e: made by Yu.D. Markina.

Положительные значения характеризуют уменьшение перемещений, а отрицательные — их увеличение относительно базового случая ветра в грань Г1.

Собственные частоты определялись для первых десяти форм колебаний, включающих изгибные, торсионные и локальные формы.

Для всех трех башен выполнено сопоставление:

- абсолютных перемещений;
- процентного снижения перемещений;

- максимальных коэффициентов использования;
- периодов собственных колебаний.

Методический подход в данном исследовании представляет собой последовательную процедуру численного анализа, включающую четыре ключевых компонента:

1) моделирование пространственной работы башни при трех направлениях ветровой нагрузки: нормативном (W1) и двух ненормативных (W2, W3);

2) учет как геометрической асимметрии конструкции, так и эксплуатационной асимметрии, обусловленной массой и размещением оборудования;

3) сопоставительный расчет трех башен, построенных по одной конструктивной схеме, что позволяет выявить универсальные закономерности и исключить влияние индивидуальных особенностей объектов;

4) использование нормированного показателя снижения перемещений, позволяющего количественно оценить вклад асимметрии в пространственное поведение конструкций независимо от абсолютных значений нагрузок и жесткостей.

Таким образом, расчетные процедуры объединены в единую логически полную схему анализа влияния асимметрии геометрии на пространственную работу трехгранных башен.

3. Результаты и обсуждение

Анализ эксплуатационных параметров и расчетных данных трех башен связи показал, что при сходной геометрии несущего ствола конструкции обладают схожими закономерностями пространственной работы, несмотря на различия в массе металлоконструкций, количестве и размещении оборудования. Наибольшее ветровое воздействие приходится на башни Б1 и Б3 (6,97 и 6,95 тс), тогда как Б2, расположенная в I ветровом районе, испытывает меньшую нагрузку (5,50 тс). Тем не менее именно Б2 имеет максимальные коэффициенты использования по поясам, раскосам и анкерным болтам (табл. 3) вследствие наибольшей массы установленного оборудования (5,09 т), создающего дополнительную нагрузку и смещающего центр тяжести конструкции.

Таблица 3. Максимальные коэффициенты использования элементов башен
Table 3. Maximum Utilization Rates of Tower Elements

Максимальный коэффициент использования / Maximum utilization factor	Б1/Т1	Б2/Т2	Б3/Т3
Поясов (высотная отметка элемента, м) / Chords (elevation of the element, m)	0,78 (+3,000)	0,97 (+0,000)	0,7 (+0,000)
Раскосов (высотная отметка элемента, м) / Braces (elevation of the element, m)	0,40 (+45,000)	0,52 (+45,000)	0,36 (+45,000)
Распорок (высотная отметка элемента, м) / Struts (elevation of the element, m)	0,55 (+48,375)	0,28 (+38,250)	0,19 (+45,000)
Болтов анкерных групп / Anchor bolt groups	0,71	0,90	0,62
Деформационное условие / Deformation criterion	0,48	0,16	0,24

Источники: выполнено Ю.Д. Маркиной / Source: made by Yu.D. Markina.

Наименьшие коэффициенты использования в элементах решетки (раскосах и распорках) наблюдаются у Б3, что объясняется ее большей массой металлоконструкций (18,13 т) и, соответственно, повышенной жесткостью. Башня Б1 занимает промежуточное положение по прочностным критериям, однако характеризуется наибольшей податливостью по деформациям, что согласуется с распределением оборудования по высоте.

По результатам анализа несущей способности установлено, что критические состояния во всех трех башнях формируются исключительно по первой группе предельных состояний в элементах по-

ясов и анкерных соединений. Наибольшие изгибно-растягивающие усилия развиваются в нижней зоне наклонных поясов (0–6 м) при ветровом воздействии в вертикальную грань (Г1). Элементы решетки (раскосы и распорки) во всех сценариях работают с существенным запасом. Проверки по второй группе предельных состояний также не являются определяющими — горизонтальные перемещения находятся в пределах допуска, что подтверждает достаточную эксплуатационную жесткость всех трех объектов.

Анализ перемещений (рис. 4–6) выявил устойчивую закономерность: для всех башен максимальные горизонтальные перемещения формируются при ветровом воздействии в вертикальную грань (Г1). Ветер, действующий перпендикулярно вертикальной грани Г1, загружает конструкцию в направлении, где жесткость минимальна. Это связано с работой поясов: вертикальный пояс, формирующий грань Г1, не создает распорного эффекта, в то время как два наклонных пояса обеспечивают пространственную устойчивость за счет V-образной схемы. При действии ветра в наклонные грани (Г2, Г3) относительное снижение перемещений увеличивается с высотой, достигая 9–18 % в верхней части ствола. В нижней зоне до 14,23 м он крайне нестабилен и колеблется от –250 до 100 %, далее стабилизируется и плавно снижается на 1–5 % к отметке перелома пояса на высоте 45 м, после чего скорость снижения плавно возрастает и к верхней отметки башни 70 м падает еще на 5–8 %. Различие перемещений при ветровом воздействии на грани Г2 и Г3 объясняется эксплуатационной асимметрией башни, связанной с неравномерным размещением оборудования, площадок обслуживания, лестниц и кабельных трасс. Полная симметрия работы при ветре в Г2 и Г3 не достигается даже без оборудования за счет асимметрично расположенных вспомогательных элементов: площадок, лестницы, кабельного лотка.

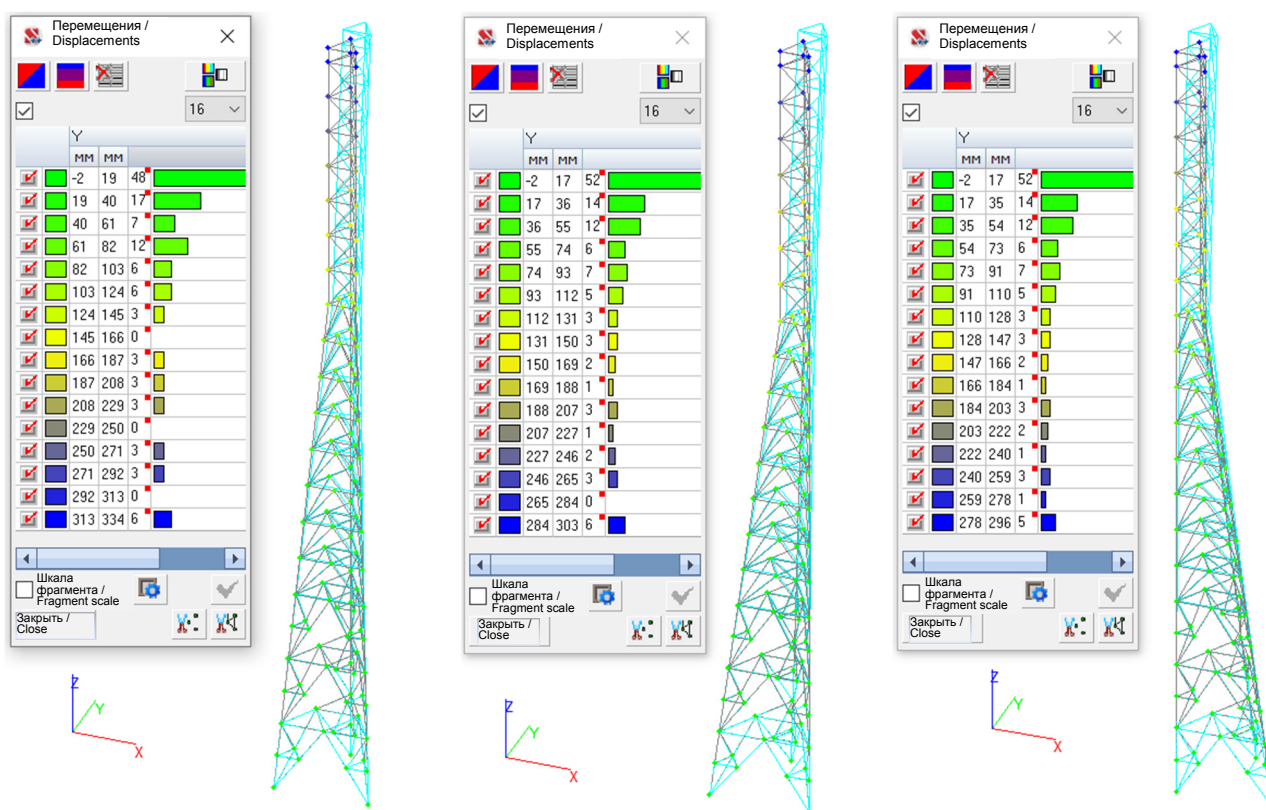


Рис. 4. Цветовая индикация величин горизонтальных перемещений в узлах башни Б1 при направлении ветра в грань W1 с учетом оборудования:

a — в грань Г1; *б* — в грань Г2; *в* — в грань Г3

Источники: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 4. Color-coded horizontal displacements of nodes of Tower T1 under wind direction W1 with equipment:

a — towards face F1; *б* — towards face F2; *в* — towards face F3

Source: made by Yu.D. Markina.

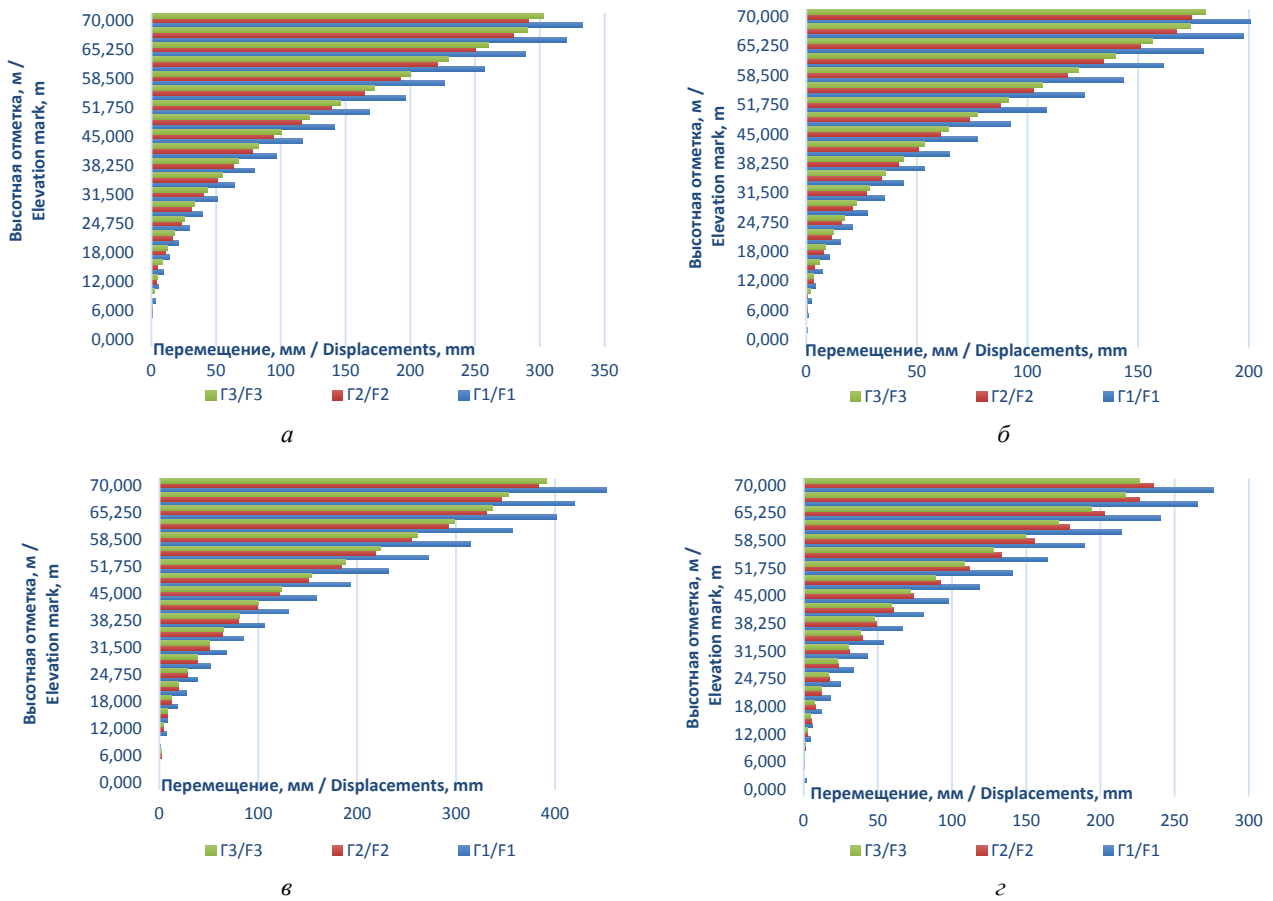


Рис. 5. Перемещения при направлении ветра в грань W1:
 а — для Б1 с оборудованием; б — для Б1 без оборудования; в — для Б2; г — для Б3
 Источники: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 5. Displacements under wind direction W1:
 а — T1 with equipment; б — T1 without equipment; в — T2; г — T3
 Source: made by Yu.D. Markina.

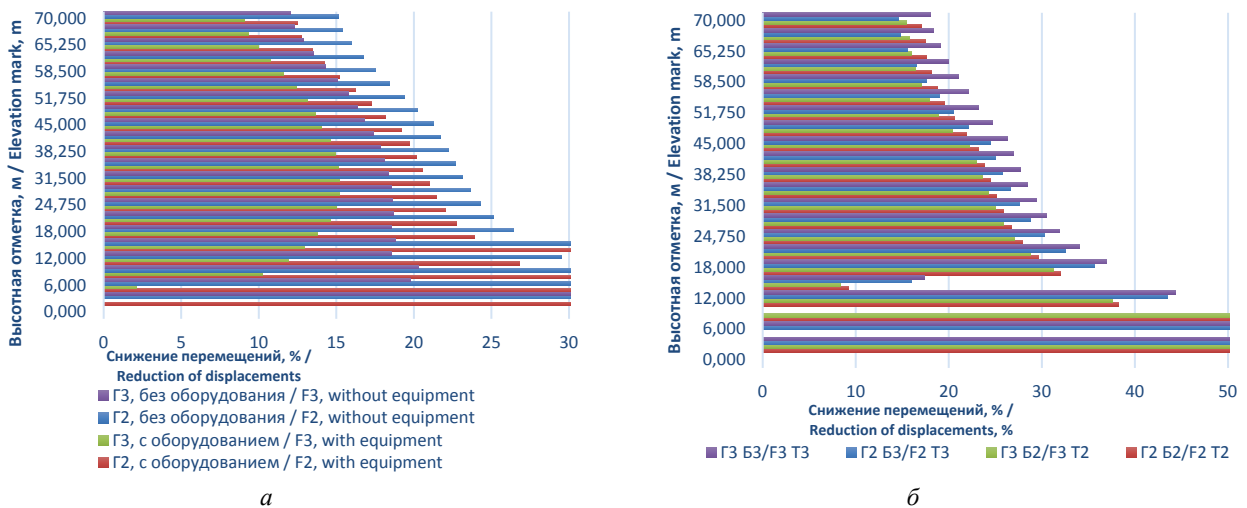


Рис. 6. Снижение горизонтальных перемещений при направлении ветра в грань W1:
 а — для Б1; б — для Б2 и Б3
 Источники: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 6. Reduction of horizontal displacements under wind direction W1:
 а — T1; б — T2 and T3
 Source: made by Yu.D. Markina.

Вариант с оборудованием имеет важную особенность: несмотря на общее увеличение перемещений, коэффициент снижения перемещений становится на 3–4 % меньше по высоте. Дополнительная масса и ветровые площади оборудования перераспределяют жесткость и инерционные характеристики конструкции. По сравнению с вариантом без оборудования изгибная форма ствола изменяется: в средней части башни формируется выраженная S-образная форма, обусловленная увеличением гибкости под действием добавленных масс.

В табл. 4 приведены периоды первых десяти форм собственных колебаний башен. Первый столбец содержит порядковый номер формы колебаний, соответствующий результатам модального анализа конечно-элементной модели. Второй столбец показывает периоды колебаний башни Б1 с учетом установленного оборудования. Третий столбец содержит значения для той же башни без оборудования, что позволяет оценить влияние дополнительной массы и ветровых площадей. Четвертый и пятый столбцы представляют периоды колебаний башен Б2 и Б3 соответственно. Анализ периодов (табл. 4) и форм (рис. 7) собственных колебаний, классифицированных по горизонтальным перемещениям и угловым поворотам узлов, подтверждает ключевую роль геометрической асимметрии и эксплуатационной нагрузки. Для Б1 включение оборудования снижает частоты первых двух изгибных форм на 16–20 %, а торсионно-изгибных форм 3–6 — на 10–15 %. У башни Б2 наблюдаются наибольшие периоды собственных колебаний, что связано с сочетанием максимальной массы оборудования и минимальной ветровой нагрузки для I ветрового района. Б3 занимает промежуточное положение — большая масса металлоконструкций увеличивает ее жесткость, компенсируя влияние оборудования.

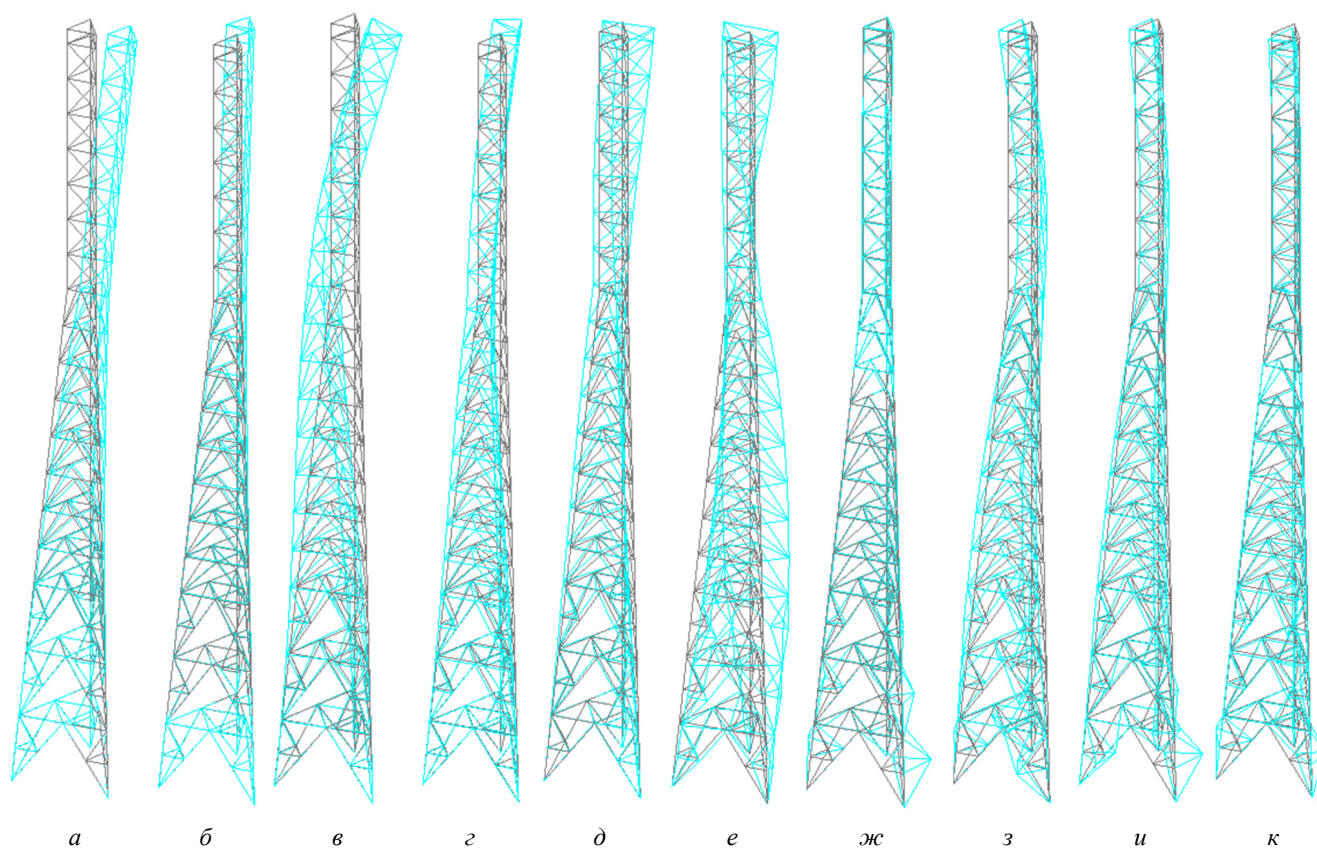


Рис. 7. Первые 10 форм собственных колебаний башни Б1 с оборудованием:

а — первая изгибная форма в направлении минимальной жесткости; *б* — вторая изгибная форма в ортогональной плоскости; *в–е* — третья–шестая изгибно-крутильные формы; *ж–к* — седьмая–десятая локальные формы колебаний

Источник: выполнено Ю.Д. Маркиной.

Figure 7. First ten natural vibration modes of Tower T1 with equipment:

a — first bending mode in the direction of minimum stiffness; *b* — second bending mode in the orthogonal plane; *v–e* — the third – the sixth bending–torsional modes; *ж–к* — the seventh – the tenth local vibration modes

Source: made by Yu.D. Markina.

Таблица 4. Периоды собственных колебаний башен
Table 4. Natural vibration periods of the towers

Форма колебаний / Mode shape	Период собственных колебаний, с / Natural vibration period, s			
	Б1 с оборудованием / T1 with equipment	Б1 без оборудования / T1 without equipment	Б2/Г2	Б3/Г3
1	1,031	0,862	1,389	1,150
2	1,007	0,844	1,370	1,125
3	0,321	0,282	0,358	0,346
4	0,304	0,268	0,339	0,323
5	0,276	0,239	0,324	0,304
6	0,166	0,154	0,163	0,187
7	0,141	0,140	0,153	0,160
8	0,139	0,137	0,153	0,156
9	0,134	0,131	0,123	0,144
10	0,132	0,129	0,120	0,141

Источники: выполнено Ю.Д. Маркиной / Source: made by Yu.D. Markina.

Все три башни обладают выраженными торсионно-изгибными формами в диапазоне 3–6, обусловленными тем, что вертикальный пояс создает различную жесткость в плоскостях изгиба и снижает крутильную жесткость. Формы 7–10 являются локальными, соответствуют колебаниям отдельных панелей решетки и верхнего блока и практически не зависят от оборудования. На этих частотах динамическая работа определяется локальными параметрами решетки.

В целом результаты показывают, что для трехгранных башен с одним вертикальным поясом конструктивная схема является доминирующим фактором, определяющим пространственную жесткость, систему перемещений и динамические характеристики. Климатические условия и различное распределение оборудования усиливают, но не изменяют общие закономерности поведения. Все три объекта имеют типичную для асимметричных трехгранных конструкций комбинацию повышенной гибкости в направлении вертикальной грани, наличия выраженного торсионного компонента и локальных эффектов, связанных с реальным расположением вспомогательных элементов.

4. Заключение

В результате исследования трех трехгранных АМС с асимметричной нижней частью, выполненной в форме трехгранной усеченной пирамиды с одним вертикальным поясом, получены следующие научные результаты.

1. Выявлена устойчивая закономерность пространственной работы конструкций: максимальные горизонтальные перемещения во всех случаях формируются при ветровом воздействии в вертикальную грань (Г1), что подтверждает доминирующее влияние геометрической асимметрии нижнего блока.

2. Установлена роль наклонных поясов, создающих распорную работу и уменьшающих деформации при ветре в направлениях Г2 и Г3 на 9–18 % к верхним отметкам. Вертикальный пояс распор не формирует, что обуславливает направление минимальной жесткости и наиболее неблагоприятную деформационную форму.

3. Показано, что решетка обладает значительным запасом несущей способности, тогда как предельные состояния формируются в поясах и анкерах. Наибольшие усилия во всех башнях концентрируются в нижних участках наклонных поясов (0–6 м).

4. Установлено влияние эксплуатационной асимметрии (оборудование, лестницы, площадки, кабельные лотки) на деформированную форму. Она усиливает S-образный характер изгиба, изменяет распределение жесткости и препятствует достижению полной симметрии даже в варианте без оборудования.

5. Определено влияние оборудования на динамику: добавленная масса снижает частоты первых изгибных форм на 16–20 %, а торсионно-изгибных — на 10–15 %, практически не затрагивая локальные формы (7–10).

6. Показано различие динамической гибкости между башнями Б1, Б2 и Б3, обусловленное сочетанием массы металлоконструкций, ветровой нагрузки и массы оборудования.

7. Идентифицирована выраженная торсионно-изгибная составляющая в формах 3–6, являющаяся следствием асимметрии жесткостной схемы и присутствия одного вертикального пояса. Этот эффект — характерная особенность данного типа трехгранных АМС.

8. Сформированы количественные показатели деформационной и динамической чувствительности к асимметрии, что создает основу для дальнейшего сравнения с эквивалентной симметричной моделью.

References / Список литературы

1. Tsavdaridis K.D., Nicolaou A., Mistry A.D., Efthymiou E. Topology optimisation of lattice telecommunication tower and performance-based design considering wind and ice loads. *Structures*. 2020;27:2379–2399. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.08.060> EDN: ПАПЛФ
2. Kefal A., Sohoulis A., Oterkus E., Yildiz M., Suleman A. Topology optimization of cracked structures using peridynamics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2019;31:1645–1666. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00804-w> EDN: HMDRWP
3. He L., Gilbert M., Johnson T., Pritchard T. Conceptual design of AM components using layout and geometry optimization. *Computers and Mathematics with Applications*. 2018;76:2166–2185. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.07.034>
4. Zhang D, Song X, Deng H, Hu X, Ma X. Experimental and numerical study on the aerodynamic characteristics of steel tubular transmission tower bodies under skew winds. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2021; 214:104678. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2021.104678> EDN: XOPYTX
5. Zhang W., Xiao Y., Li C., Zheng Q., Tang Y. Wind load investigation of self-supported lattice transmission tower based on wind tunnel tests. *Engineering Structures*. 2022;252:113575. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113575> EDN: LJNXDT
6. Wu P., Chen G., Feng R., He F. Research on wind load characteristics on the surface of a towering precast television tower with a grid structure based on Large Eddy Simulation. *Buildings*. 2022;12(9):428. <https://doi.org/10.3390/buildings12091428>
7. Khazaali M., Ma L., Rokneddin K., Mazzotti M., Bocchini P. A robust protocol to compute wind load coefficients of telecommunication towers and antennas using numerical simulation for risk and resilience assessment. *Resilient Cities and Structures*. 2024;3(1):66–83. <https://doi.org/10.1016/j.rcns.2024.02.001> EDN: LYXCFY
8. Moradi A., Salajegheh E., Tavakol M.M., Heidari A. Numerical simulation of turbulent airflow around a tall telecommunication tower model. *Advances in Aerodynamics*. 2024;6:26. <https://doi.org/10.1186/s42774-024-00185-1> EDN: YRHJOR
9. Johnson R.M., Smith T.A. Wind Load Analysis of Communication Towers: A Comparative Study. *Journal of Structural Engineering*. 2020;146(3):04019120. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0002532](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002532)
10. Brown S.E., Taylor J.P. Structural Assessment of Cellular Towers Subjected to Wind Loads. *International Journal of Engineering Research*. 2021;9(4):256-263. <https://doi.org/10.17577/IJERTV9IS040265>
11. Vlădulescu F., Constantinescu D.M. Tower structure optimization through finite element analyses. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;997:012020. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/997/1/012020> EDN: ACCPJO
12. Kenéz Á., Joó A.L. Performance-based wind engineering assessment of a telecommunication mast utilizing Bayesian extreme wind velocity model. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 2024;38:727–749. <https://doi.org/10.1007/s00477-023-02596-w> EDN: QXLUJQ
13. Li H.N., Liu H.J., Fu X., Zhao K., Yang X.L., Wen Z.F. Failure criteria and wind-induced vibration analysis for an offshore platform jacking system. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2021;21(5):2150105. <https://doi.org/10.1142/S0219455421501054> EDN: GQYSUL
14. He B., Zhao M., Feng W., Xiu Y., Wang Y., Feng L., Qin Y., Wang C. A method for analyzing stability of tower-line system under strong winds. *Advances in Engineering Software*. 2019;127:1–7. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.10.004>
15. Fernández Lorenzo I., Clavelo Elena B., Martín Rodríguez P., Elena Parnás V.B. Dynamic analysis of self-supported tower under hurricane wind conditions. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2020;197:104078. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2019.104078> EDN: MEZHDB
16. Kassem M.M., Yang M., Liu S., Liu J., Gao G., Yang Z. Quantification of the seismic behavior of a steel transmission tower subjected to single and repeated seismic excitations using vulnerability function and collapse margin ratio. *Applied Sciences*. 2022;12(4):1984. <https://doi.org/10.3390/app12041984> EDN: UNGRWA

17. Tian L., Yang M., Liu S., Liu J., Gao G., Yang Z. Collapse failure analysis and fragility analysis of a transmission tower-line system subjected to multidimensional ground motion of different input directions. *Structures*. 2023;48:1018–1028. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.01.042> EDN: NAVTRP

18. Fu Z., Tian L., Liu J. Seismic response and collapse analysis of a transmission tower-line system considering uncertainty factors. *Journal of Constructional Steel Research*. 2022;189:107094. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2021.107094> EDN: IHGQUO

19. Clavelo B., Moes K., Martin P., Elena V., Tubino F. Experimental Evaluation of the Aerodynamic Coefficients of an Antenna Mast by Wind Tunnel Tests. *Journal of Structural Engineering*. 2022;151:11. <https://doi.org/10.1061/JSENDH.STENG-14810> EDN: MYADQF

20. Belash T.A., Safin R.R. Wind load simulation for the analysis of the antenna dual-purpose poles aerodynamics. *Bulletin of the Scientific Research Center Construction*. 2024;(2):18–28. (In Russ.) <https://doi.org/10.37538/2224-9494> 2024-2(41)-18-28 EDN: CQQMAP

Белаш Т.А., Сафин Р.Р. Моделирование ветровой нагрузки для анализа аэродинамики опор двойного назначения с антеннами, установленными на них // Вестник НИЦ Строительство. 2024. № 2 (41). С. 18–28. <https://doi.org/10.37538/2224-9494> 2024-2(41)-18-28 EDN: CQQMAP

21. Markina Yu.D. Influence of technological equipment placement on the results of numerical simulation of a cellular communication tower. *Omskiy Nauchnyy Vestnik*. 2025;(4):26–34. (In Russ.) <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2025-196-26-34> EDN: UGRPYB

Маркина Ю.Д. Влияние расположения технологического оборудования на результаты расчета цифровой модели башни сотовой связи // Омский научный вестник. 2025. № 4(196). С. 26–34. <https://doi.org/10.25206/1813-8225-2025-196-26-34>

22. Rasool A.M., Qureshi M.U., Ahmad M. A Comparative study on the calculation of wind load and analysis of communication tower as per TIA-222-G and TIA-222-H Standards. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2021;25:646–653. <https://doi.org/10.1007/s12205-020-0662-5>

23. Williams T. Assessing and moving on from the dominant project management discourse in the light of project overruns. *IEEE Transactions on Engineering Management*. 2005;52(4):497–508. <https://doi.org/10.1109/TEM.2005.856572>

24. Markina Yu.D. Design wind directions in structural assessment of triangular antenna-mast structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(4):334–345. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-334-345> EDN: CIVXMF

Маркина Ю.Д. Расчетные направления ветра при экспертизе несущей способности трехгранных антенно-мачтовых сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 4. С. 334–345. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-334-345> EDN: CIVXMF

25. Langlois S., Prud'homme S., Légeron F., Pourshargh F. Review of advanced modelling methods for lattice steel towers. *CIGRE-IEC Colloquium on Overhead Lines*. May 9–11, 2016, Montréal, QC, Canada, 2016:1–8. Available from: https://www.researchgate.net/publication/304321959_Review_of_advanced_modelling_methods_for_lattice_steel_towers_Montreal_QC_Canada (accessed: 17.09.2025).

СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ SEISMIC RESISTENCE

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-22-1-67-80

EDN: IQZRJE

Научная статья / Research article

Сопоставление экспериментальных и расчетных динамических характеристик здания

М.Н. Воскресенский¹, А.А. Курданова¹, Е.А. Косоротова¹, В.С. Михайлов²¹ Институт геофизики имени Ю.П. Булашевца Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Российская Федерация² Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (НГАСУ), Новосибирск, Российская Федерация

✉ a.truuuman@gmail.com

Поступила в редакцию: 25 декабря 2025 г.

Доработана: 2 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 15 февраля 2026 г.

Аннотация. Рассмотрена проблема определения динамических характеристик зданий на основе микросейсмических наблюдений. Актуальность исследования обусловлена требованиями нормативных документов, предусматривающих необходимость определения фактических динамических параметров зданий при их обследовании и мониторинге. Существующие методики, основанные на анализе микросейсмического фона, позволяют определить собственные частоты колебаний, однако не всегда обеспечивают однозначную идентификацию мод колебаний и их характера (изгибного или крутильного). Цель исследования — уточнение методики обследования зданий в части определения характера колебаний и идентификации мод собственных колебаний на основе сопоставления экспериментальных и расчетных данных. Объектом исследования является здание Института геофизики УрО РАН. Выполнена регистрация микросейсмического фона, проведен спектральный анализ записей и определены частоты собственных колебаний здания. Полученные экспериментальные данные сопоставлены с результатами численного моделирования, выполненного в программном комплексе SCAD с учетом конструктивных особенностей здания и геологических характеристик основания. Сравнение показало согласованность экспериментально определенных частот с расчетными значениями. Установлено, что в различных частях здания могут доминировать разные формы колебаний, включая изгибные и крутильные моды. Полученные результаты подтверждают эффективность комплексного подхода, основанного на совместном использовании инструментальных наблюдений и численного моделирования, для уточнения динамических характеристик зданий. Полученные результаты могут быть использованы при формировании критериев интерпретации микросейсмических данных и уточнении методики оценки динамических характеристик зданий.

Ключевые слова: конечно-элементная модель, формы колебаний, частота, здание, мониторинг, микросейсмический фон

Воскресенский Михаил Николаевич, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, заведующий лабораторией сейсмометрии, Институт геофизики имени Ю.П. Булашевца Уральского отделения Российской академии наук, Российская Федерация, 620016, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, д. 100; eLIBRARY SPIN-код: 4710-9710, ORCID: 0000-0002-6222-7265; e-mail: voskresenskiy.mn@gmail.com

Курданова Алена Алексеевна, младший научный сотрудник лаборатории сейсмометрии, Институт геофизики имени Ю.П. Булашевца Уральского отделения Российской академии наук, Российская Федерация, 620016, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, д. 100; eLIBRARY SPIN-код: 7695-6043, ORCID: 0000-0002-1582-8113; e-mail: a.truuuman@gmail.com

Косоротова Елена Александровна, младший научный сотрудник лаборатории сейсмометрии, Институт геофизики имени Ю.П. Булашевца Уральского отделения Российской академии наук, Российская Федерация, 620016, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, д. 100; eLIBRARY SPIN-код: 9804-6660, ORCID: 0000-0002-1445-7250; e-mail: kosorotiha30@gmail.com

Михайлов Виктор Сергеевич, директор проектного и научно-исследовательского офиса, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (НГАСУ), Российская Федерация, 630008, г. Новосибирск, ул. Белинского, д. 151; eLIBRARY SPIN-код: 2330-3643, ORCID: 0000-0002-0178-3516; e-mail: vsmikhailov@mail.ru

© Воскресенский М.Н., Курданова А.А., Косоротова Е.А., Михайлов В.С., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Вклад авторов: *Вокресенский М.Н.* — постановка задачи, организация и реализация исследовательского процесса, описание эксперимента; *Курданова А.А.* — организация и реализация исследовательского процесса, сбор и обработка полевых данных, оформление графических материалов, описание эксперимента; *Косоротова Е.А.* — реализация исследовательского процесса, сбор полевых данных; *Михайлов В.С.* — выполнение численного моделирования, описание эксперимента. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: *Вокресенский М.Н., Курданова А.А., Косоротова Е.А., Михайлов В.С.* Сопоставление экспериментальных и расчетных динамических характеристик здания // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2026. Т. 22. № 1. С. 67–80. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-67-80> EDN: IQZRJE

Comparison of Experimental and Numerical Dynamic Characteristics of a Building

Mikhail N. Voskresenskiy¹, Alena A. Kurdanova¹, Elena A. Kosorotova¹, Viktor S. Mikhailov²

¹ Institute of Geophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation

² Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (NSUACE), Novosibirsk, Russian Federation

✉ a.truuuman@gmail.com

Received: Desember 25, 2025

Revised: February 2, 2026

Accepted: February 15, 2026

Abstract. The problem of determining the dynamic characteristics of buildings based on microseismic observations is considered. The relevance of the research is associated with regulatory requirements that necessitate the determination of actual dynamic parameters of buildings during structural inspection and monitoring. Existing approaches based on microseismic background analysis allow the identification of natural frequencies; however, they do not always provide unambiguous identification of vibration modes and their type (bending or torsional). The aim of this study is to refine the methodology for building surveys by improving the identification of vibration types and mode shapes through the comparison of experimental observations with numerical modeling results. The object of the study is the building of the Institute of Geophysics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IG UB RAS). Ambient vibration (microtremor) recordings were performed, followed by spectral analysis of the signals to determine the natural frequencies of the building. The obtained experimental data were compared with the results of numerical modeling carried out in the SCAD software environment, taking into account the structural characteristics of the building and the geological properties of the foundation. The comparison showed good agreement between experimentally determined and calculated frequencies. It was also found that different vibration modes, including bending and torsional modes, may dominate in different parts of the building. The results demonstrate the effectiveness of a combined approach based on instrumental observations and numerical modeling for refining the dynamic characteristics of buildings and may contribute to the development of criteria for the interpretation of microseismic data and the improvement of methodologies for evaluating building dynamics.

Keywords: finite element model, mode shapes, frequency, building, monitoring, microseismic noise

Authors' contribution: *Vokresenskiy M.N.* — conceptualization, supervision, investigation, experiment description; *Kurdanova A.A.* — supervision, investigation, field data acquisition and processing, preparation of figures, experiment description; *Kosorotova E.A.* — investigation, field data acquisition; *Mikhailov V.S.* — numerical modeling, experiment description. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

For citation: Voskresenskiy M.N., Kurdanova A.A., Kosorotova E.A., Mikhailov V.S. Comparison of experimental and numerical dynamic characteristics of a building. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):67–80. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-67-80> EDN: IQZRJE

Mikhail N. Voskresenskiy, Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Head of the Seismometry Laboratory, Institute of Geophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 100 Amundsen St, Yekaterinburg, 620016, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4710-9710, ORCID: 0000-0002-6222-7265; e-mail: vokresenskiy.mn@gmail.com

Alena A. Kurdanova, Junior Researcher, Seismometry Laboratory, Institute of Geophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 100 Amundsen St, Yekaterinburg, 620016, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7695-6043, ORCID: 0000-0002-1582-8113; e-mail: a.truuuman@gmail.com

Elena A. Kosorotova, Junior Researcher, Laboratory of Seismometry, Institute of Geophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 100 Amundsen St, Yekaterinburg, 620016, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9804-6660, ORCID: 0000-0002-1445-7250; e-mail: kosorotiha30@gmail.com

Viktor S. Mikhailov, Director of the Project and Research Office, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (NSUACE), 151 Belinsky St, Novosibirsk, 630008, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2330-3643, ORCID: 0000-0002-0178-3516; e-mail: vsmikhailov@mail.ru

1. Введение

Оценка динамических характеристик зданий и сооружений является одной из ключевых задач прикладной геофизики, особенно в условиях плотной городской застройки и сейсмоопасных регионов. Современные требования к надежности объектов диктуют необходимость применения оперативных, достоверных и неразрушающих методов контроля технического состояния конструкций.

Традиционные методы, основанные на ударных или вибрационных воздействиях, часто оказываются неприменимыми при обследовании эксплуатируемых, исторических или промышленных зданий. В пассивной геофизике в качестве зондирующего сигнала широко используется естественный сейсмический фон Земли (микросейсмы), что позволяет быстро и экономично получать информацию о структуре земной толщи и особенностях взаимодействия здания с основанием [1; 2].

Одним из распространенных и эффективных методов является *HVSR* — спектральное отношение горизонтальной и вертикальной компонент микросейсмического сигнала, предложенный Накамурой [3]. Этот метод активно применяется в российских научных центрах (ИГФ УрО РАН, Сибстрин, ТГАСУ и др.) и доказал свою эффективность в [4; 5]. Для идентификации сложных форм колебаний и верификации численных моделей применяется метод стоячих волн, который особенно актуален при обследовании зданий сложной геометрии и сейсмоизолированных конструкций, как показано в [6; 7].

Практика сейсмического мониторинга ответственных объектов (например, гидроэлектростанций и зданий в Арктике) обобщена в исследованиях [8], с учетом особенностей промышленного шума. Международный опыт, в частности сеть *KiK-net* в Японии [9–11], подтверждает важность *HVSR*-анализа для оценки взаимодействия «основание–здание», что особенно значимо для зданий малой и средней этажности [12].

Современные методики объединяют расчетные модели и инструментальные измерения, обеспечивая верификацию проектных решений [13]. Согласно межгосударственному стандарту ГОСТ 31937-2024¹, при вводе зданий в эксплуатацию необходимо указывать фактические динамические характеристики, что особенно важно для объектов повышенной ответственности. В гражданском строительстве расхождение между проектными и фактическими характеристиками конструкций способно вызывать вибрации и ухудшать эксплуатационные показатели. В рамках настоящего исследования рассматривается частота собственных колебаний как основная динамическая характеристика здания. Объект исследования — здание, предмет — собственные частоты его колебаний.

Согласно действующим нормативным документам, определение динамических характеристик зданий может выполняться на основе регистрации микросейсмического фона и анализа спектральной плотности мощности для выявления собственных частот (периодов) колебаний. Однако предложенный подход не предусматривает критериев, позволяющих однозначно идентифицировать порядковый номер моды и установить характер колебаний конструкции (изгибной или крутильный).

Цель исследования — уточнение методики обследования зданий и сооружений в части определения характера колебаний (изгибных или крутильных) и однозначной идентификации порядкового номера моды собственных колебаний. Для достижения этой цели в работе решались следующие задачи:

- 1) анализ результатов многолетнего микросейсмического мониторинга здания Института геофизики для выявления закономерностей динамического поведения конструкции;
- 2) расчет, адаптация и уточнение математической модели здания с учетом экспериментальных данных и геологических характеристик основания;
- 3) сопоставление результатов экспериментального мониторинга с расчетными данными численного моделирования для выявления критических зон и оценки согласованности динамических характеристик здания.

¹ ГОСТ 31937-2024. Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния. URL: <https://fkr-spb.ru/upload/iblock/63e/ecmzt5zuoze4p3sclatcp9gobynte9h.pdf> (дата обращения: 01.08.2025).

В исследовании применяется экспозиционный (периодический) мониторинг. Периодический мониторинг исключает накопление избыточных данных при сохранении достоверности оценки. Моделирование в *SCAD* демонстрирует необходимость учета высоких форм собственных колебаний — вплоть до 243-й, однако в рамках настоящей работы рассматриваются первые три формы, вносящие основной вклад в динамическую массу, что соответствует подходу [14].

Комплексный подход позволяет создавать базы данных по динамическому поведению зданий разной этажности, способствуя уточнению проектных моделей и повышению надежности в процессе строительства и эксплуатации.

Исследования показывают, что расчетные модели в программных комплексах (*SCAD*, ЛИРА) часто базируются на упрощенных параметрах и не учитывают фактическое состояние конструкций. Это приводит к расхождениям в частотах и формах колебаний. О.Р. Пахмурин с соав. [15] указывают, что фактические характеристики зданий нередко превышают расчетные из-за обжатия элементов и взаимодействия с самонесущими стенами.

Необходимость верификации моделей микросейсмическим мониторингом и методом стоячих волн отражена в СП 385.1325800.2018 «Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения»², однако нормативно не регламентирована на ранних этапах проектирования, что ограничивает использование мониторинга для уточнения моделей. Отсутствуют также формализованные процедуры перехода от спектральных характеристик к коэффициентам уязвимости и единые критерии оценки достоверности спектров.

В настоящем исследовании численное моделирование динамики объекта выполнено в *SCAD Office* на примере четырехэтажного офисного здания Института геофизики УрО РАН (ИГФ) с железобетонным каркасом. Модель создана на основе проектной документации, визуального обследования и замеров, учитывает несущие элементы и распределение масс с учетом нагрузок и грунтовых условий (суглинки).

Расчитанные формы колебаний и частоты сопоставлены с экспериментальными данными микросейсмического мониторинга. Высокая степень совпадения расчетных и экспериментальных результатов обосновывает предложенную методику как эффективный инструмент для повышения точности диагностики технического состояния зданий.

2. Аппаратура и методика

В сентябре 2022 г. было проведено сейсмическое обследование здания Института геофизики УрО РАН. В ходе эксперимента осуществлялась регистрация микросейсмического фона. Для анализа записей рассчитывались спектры мощности скорости смещения по трем компонентам зарегистрированного сейсмического сигнала.

Здание Института геофизики имени Ю.П. Булашевича — кирпичное здание, введенное в эксплуатацию в 1981 г., с размерами 107 на 20 м. На рис. 1 приведено изображение здания, полученное с помощью сервиса «Яндекс Карты»³. Изучаемое здание имеет Т-образную форму, однако основной, и, соответственно, исследуемый, объем здания выделен красным прямоугольником. Остальная часть здания представляет собой одноэтажный пристрой, поэтому в этой работе не рассматривается.

Обследование зданий и сооружений с использованием регистрации микросейсмических колебаний требует организации сети наблюдательных точек в объеме здания. В случае здания Института геофизики УрО РАН (ИГФ) система наблюдений представляла собой 16 точек наблюдения, равномерно распределенных по четыре на каждом этаже и формирующих условно четыре вертикальных и четыре горизонтальных профиля.

² СП 385.1325800.2018. Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. 2018. 22 с. URL: <https://sro-a.ru/upload/medialibrary/b58/hqu55t90lv26otre29t25xmc0p9r85ca/SP-385.1325800.2018.-Svod-pravil.-Zashchita-zdaniy-i-sooruzheniy.pdf> (дата обращения: 20.11.2025).

³ Яндекс Карты. URL: <https://yandex.ru/maps/-/CHfw5Xn3> (дата обращения: 24.11.2026).

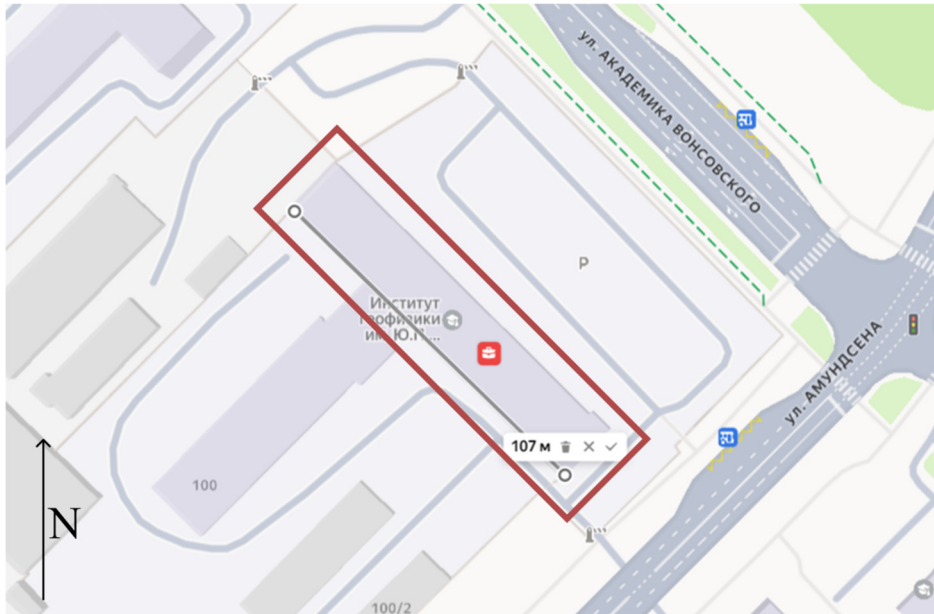


Рис. 1. Расположение здания ИГФ УрО РАН на карте
Источник: выполнено А.А. Курдановой.

Figure 1. Location of the IG UB RAS building on the map
Source: made by A.A. Kurdanova.

На рис. 2 представлено схематичное изображение здания относительно автомобильных дорог. Пунктирными линиями обозначены лестничные пролеты и шахта лифта, а красными треугольниками — расположение точек наблюдения.

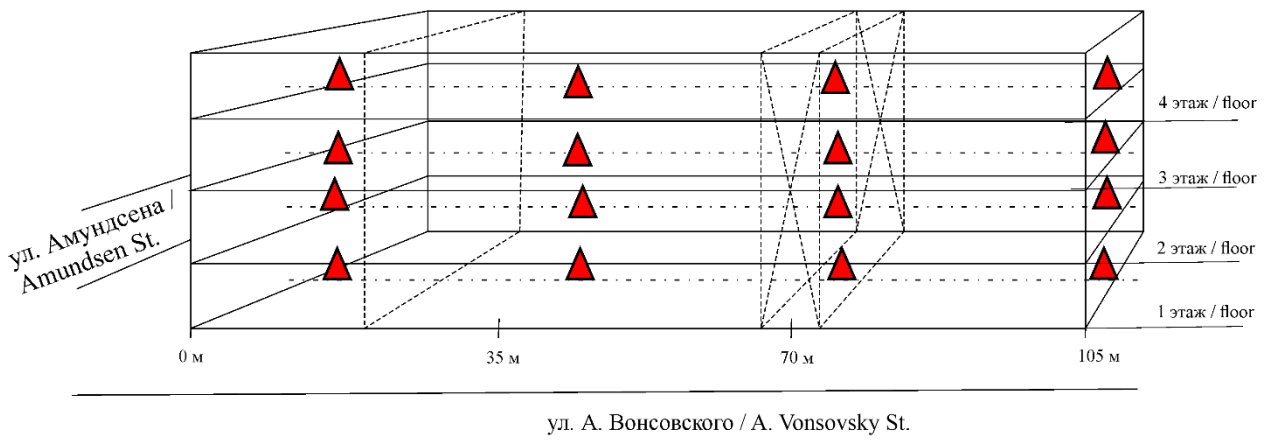


Рис. 2. Схема здания относительно близлежащих улиц с расположением точек наблюдений
Источник: выполнено А.А. Курдановой.

Figure 2. Model of the building relative to nearby streets with the location of the monitoring points
Source: made by A.A. Kurdanova.

Обследование здания Института геофизики УрО РАН методом регистрации микросейсмического шума проводится ежегодно с 2017 г. Ранее для измерений применялся аппаратно-программный комплекс «Регистр-SD» [16]. С 2021 г. используется мобильный регистратор сейсмических сигналов REFTEK DAS 130-1/6 в комплекте с короткопериодным велосиметром LE-3Dlite Mk III (рис. 3).



Рис. 3. Комплект оборудования в точке регистрации:

- 1 — велосиметр LE-3Dlite Mk III;
 2 — регистратор сейсмических сигналов REFTEK DAS 130-1/6 и аккумулятор ТИТАН;
 3 — пульт управления регистратором

Источники: выполнено А.А. Курдановой.

Figure 3. A set of equipment at the observation site:

- 1 — LE-3Dlite Mk III velocimeter; 2 — REFTEK DAS 130-1/6 seismic signal recorder, TITAN battery;
 3 — control panel of the recorder

Source: made by A.A. Kurdanova.

Измерения в точках наблюдения осуществляются последовательно во времени с использованием двух комплектов оборудования. Каналы регистратора ориентированы по трем взаимно перпендикулярным направлениям: горизонтальным составляющим X и Y , а также вертикальной составляющей Z . Длительность записи составляет 15–20 мин [17], частота дискретизации — 125 Гц, что обеспечивает максимальную частоту сигнала до 62,5 Гц. Обработка сейсмограмм и вычисления выполнялись отдельно по каждой измерительной оси с использованием программного обеспечения *MicroSeisTool* [18]. Для определения резонансных частот рассчитывается спектральная плотность мощности с применением полосовой фильтрации от 1 до 7 Гц.

Следует отметить, что при регистрации микросейсмических сигналов ориентация регистратора в горизонтальной плоскости не совпадала с направлениями сторон света, а была ориентирована согласно ребрам жесткости конструкции. В государственных стандартах, регламентирующих порядок мониторинга зданий и сооружений, описываются нормативы для горизонтальных составляющих, поэтому в настоящей работе значения вертикальной составляющей не рассматриваются. Направление горизонтальной составляющей X было параллельно короткой стороне здания, а направление Y — длинной стороне.

3. Результаты и обсуждение

Результаты мониторинга демонстрируют ежегодную стабильность резонансных характеристик, несмотря на использование различного оборудования и программного обеспечения (основной экстремум по оси X соответствует 2,8 Гц, по оси Y — 2,5 Гц) [19]. Помимо подробного описания результатов мониторинга в [19] рассматривается распределение коэффициента уязвимости (K_y) в плоскости наблюдений. Коэффициент уязвимости — это параметр, который позволяет описывать участки исследуемых объектов, наиболее чувствительные к воздействию упругих колебаний. Применение K_y основывается на методе *HVSR*, предложенном Накамуром [3].

На рис. 4 приведена карта распределения K_y . Значительное повышение значений наблюдается в левой части карты (торец здания со стороны ул. Амундсена). Ранее было выдвинуто предположение, что данные различия связаны с особенностями конструкции [20]: описываемая часть здания построена отлично от основного объема, вследствие чего здание не колеблется как единая система.

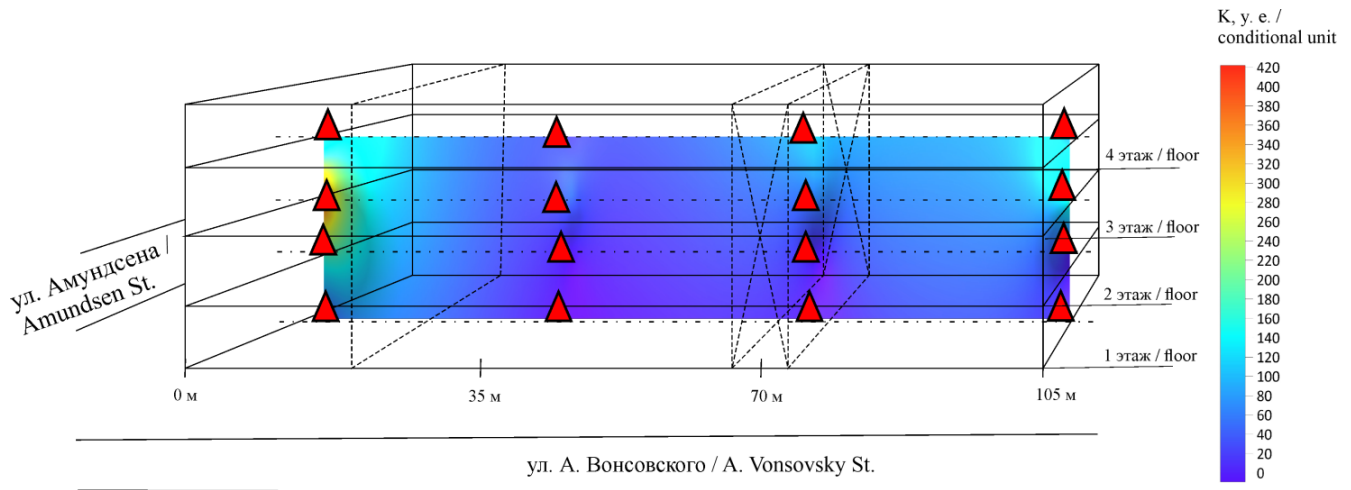


Рис. 4. Распределение коэффициента уязвимости в объеме здания ИГФ

Источни к: выполнено А.А. Курдановой.

Figure 4. The distribution of the vulnerability coefficient throughout the IG UB RAS building

Source: made by A.A. Kurdanova.

Основной задачей настоящего исследования является сопоставление результатов, полученных с помощью экспериментальных и расчетных методов. В качестве расчетного метода используется численное моделирование методом конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе *SCAD*. Численное моделирование позволяет воспроизвести динамическое поведение здания с учетом реальных геометрических и конструктивных особенностей, а также уточненных характеристик грунтового основания, полученных на основе метода преломленных волн (МПВ). Это дает возможность не только проверить соответствие экспериментальных мод колебаний и собственных частот, но и визуализировать распределение напряжений, деформаций и коэффициента уязвимости в объеме здания. На модели это показано амплитудой суммарных перемещений.

Для повышения точности модели выполнено уточнение инженерно-геологических условий с использованием данных сейсморазведки методом преломленных волн. Измерения проводились на территории объекта с регистрацией продольных и поперечных волн. Полученные скоростные параметры позволили построить скоростной разрез грунтов (ПО *Zond ST*) и скорректировать характеристики грунтового основания. На рис. 5 приведен скоростной разрез, построенный по поперечным волнам.

Таким образом, получена конечно-элементная модель, учитывающая не только материалы конструкции, но и реальные грунтовые условия. Модель описывает 12 форм колебаний (рис. 6), которые характеризуют динамическое состояние здания в пространстве.

В представленном эксперименте и модели *SCAD* были определены первые пять форм собственных частот колебаний, вовлекающие наибольшее количество динамических масс в колебательный процесс. Первыми тремя формами являются преимущественно изгибные колебания, отражающие асимметрию конструкции и распределение масс. Четвертая и пятая формы характеризуют крутильные колебания по продольной и поперечной осям соответственно. Расчетные частоты, полученные по результатам вычисления математической модели в *SCAD office* (рис. 6), совпадают с экспериментальными результатами спектрального анализа микросейсмического фона (рис. 7).

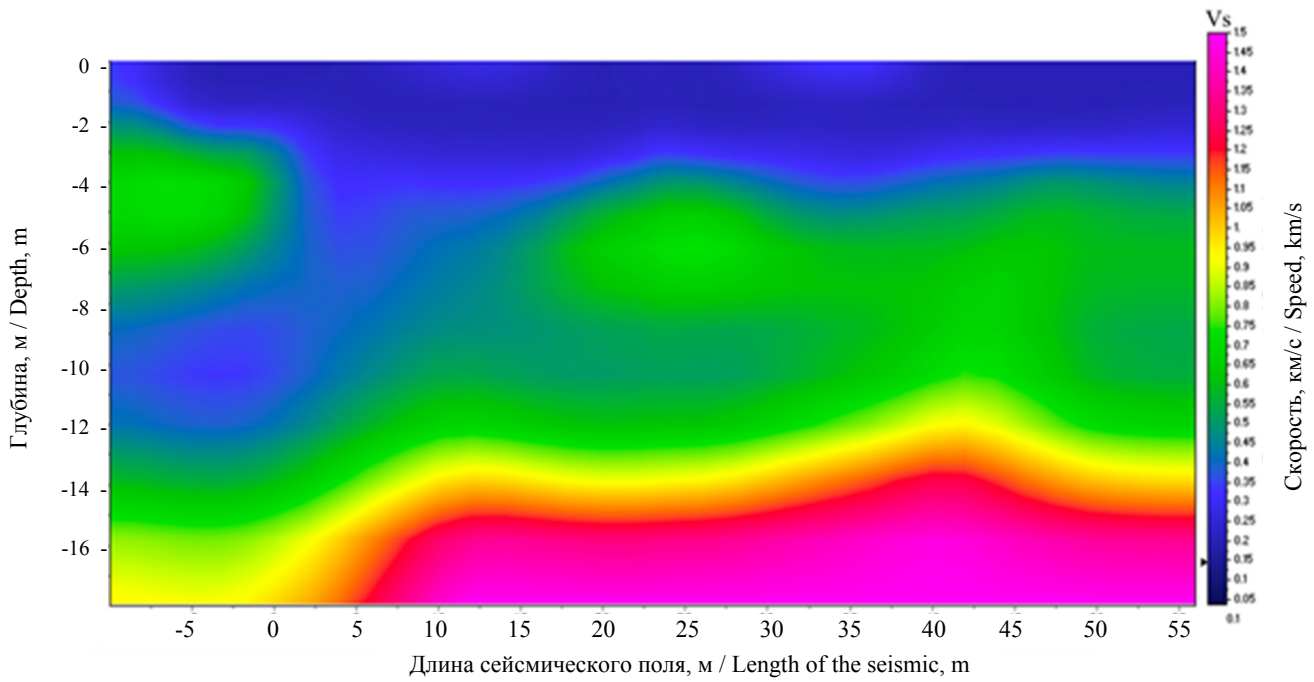


Рис. 5. Скоростной разрез по поперечным волнам
Источник: выполнено М.Н. Воскресенским.

Figure 5. Transverse wave velocity section V_s
Source: made by M.N. Voskresenskiy.

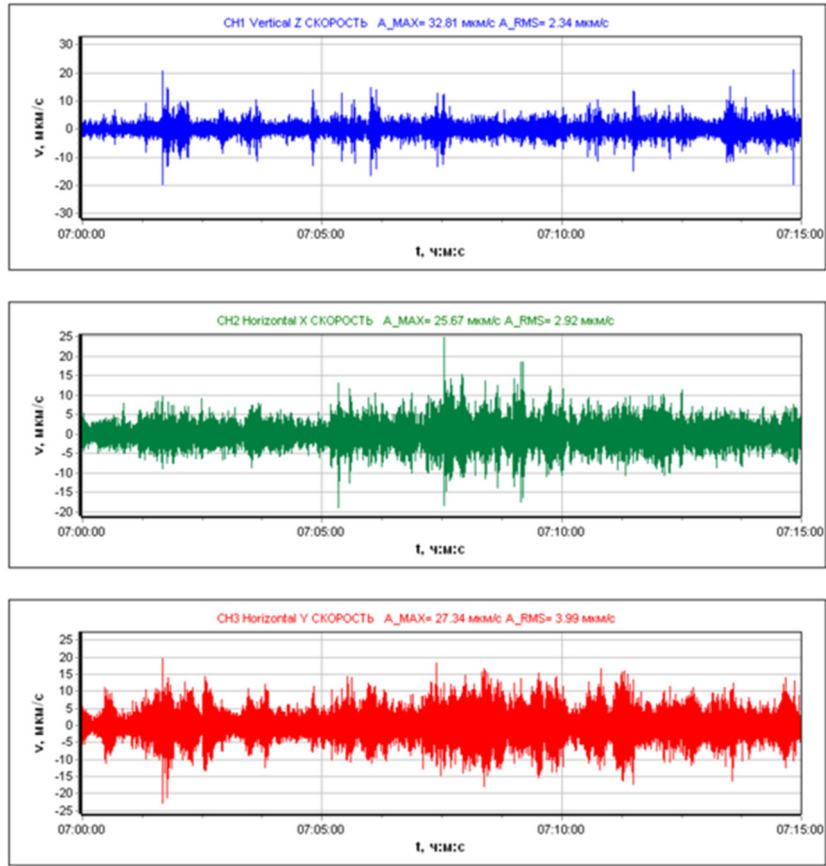
Загружение Load Case		Номер формы Mode Number	Собственное значение Eigenvalue	Частота Frequency		Период Period сек s
				рад/сек rad/s	Гц Hz	
5	Модан.СВ / Modal Analysis	1	0,069	14,571	2,319	0,431
		2	0,065	15,474	2,463	0,406
		3	0,06	16,614	2,644	0,378
		4	0,045	22,126	3,521	0,284
		5	0,04	24,961	3,973	0,252
		6	0,037	27,371	4,356	0,23
		7	0,029	34,685	5,52	0,181
		8	0,025	40,193	6,397	0,156
		9	0,023	43,808	6,972	0,143
		10	0,022	45,291	7,208	0,139
		11	0,021	46,861	7,458	0,134
		12	0,021	47,419	7,547	0,133

Рис. 6. Периоды и частоты колебаний в ПО SCAD
Источник: выполнено В.С. Михайловым, А.А. Курдановой.

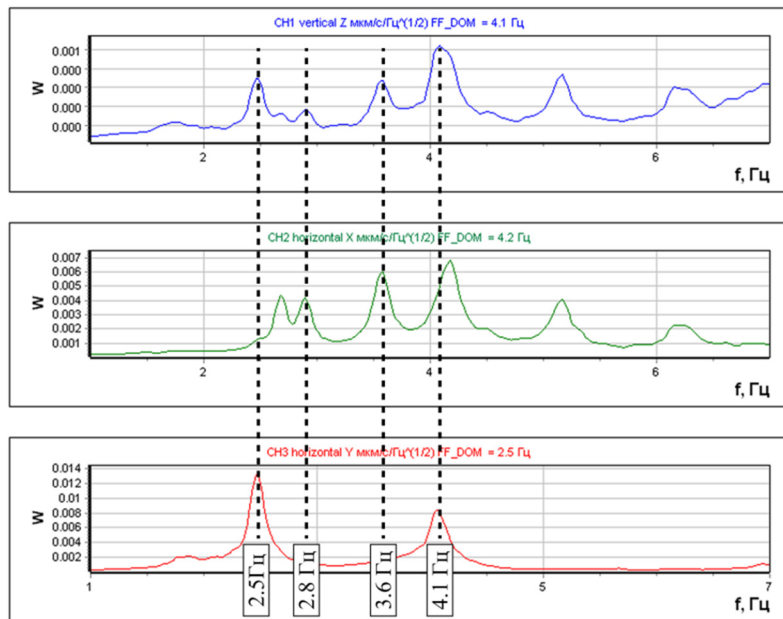
Figure 6. Periods and frequencies of vibrations in the SCAD software
Source: made by V.S. Mikhailov, A.A. Kurdanova.

Первая, вторая и третья формы колебаний — изгибные на частотах 2,3, 2,5, 2,6 Гц соответственно, четвертая и пятая — крутильные на 3,5 и 4,0 Гц.

На рис. 7, б, представлены значения резонансных частот, полученные в ходе эксперимента. Значения приведены для точки наблюдений, находящейся на 4-м этаже здания. В экспериментальных расчетах первая изгибная форма не наблюдается из-за малого энергетического вклада (рис. 7). Однако основные резонансные пики эксперимента совпадают с формами колебаний, полученными с помощью модели. Экспериментальная оценка подтверждает расчетную модель.



a



b

Рис. 7. Результат обработки экспериментальных данных в ПО *MicroSeisTool*:

a — запись микросейсмического фона по трем каналам регистратора;

b — плотность мощности для каждого канала регистратора

Источники: выполнено А.А. Курдановой.

Figure 7. The result of processing experimental data in *MicroSeisTool* software:

a — recording of the microtremor on three channels of the recorder;

b — the spectral power density for each channel of the recorder.

Source: made by A.A. Kurdanova.

Ранее упоминалось, что при проведении ежегодного мониторинга постоянство резонансных пиков наблюдалось во всех точках наблюдения, кроме торца здания со стороны ул. Амундсена. Если в основном объеме здания резонансная частота по длинной стороне здания составляла 2,8 Гц, то в отличающейся части — 4,2 Гц. Ранее предположение о том, что эта часть построена отлично от всего здания, было опровергнуто математической моделью. Модель демонстрирует, что эта разница возникает из-за того, что в разных частях здания доминируют различные формы колебаний. Это показано на рис. 8–11, которые визуализируют колебания и дифференцируют их по типу деформации. Наиболее жестким и устойчивым является центр здания, а максимальные колебания приходятся на крайние части зданий. Доминирование крутильных частот на краях зданий — закономерное явление для протяженных строительных объектов. У крутильных форм амплитуды ближе к ядру жесткости (области смещения центра кручения) будут существенно ниже, чем в краевых точках. У изгибных форм колебаний амплитуды будут сопоставимы с краевыми точками.

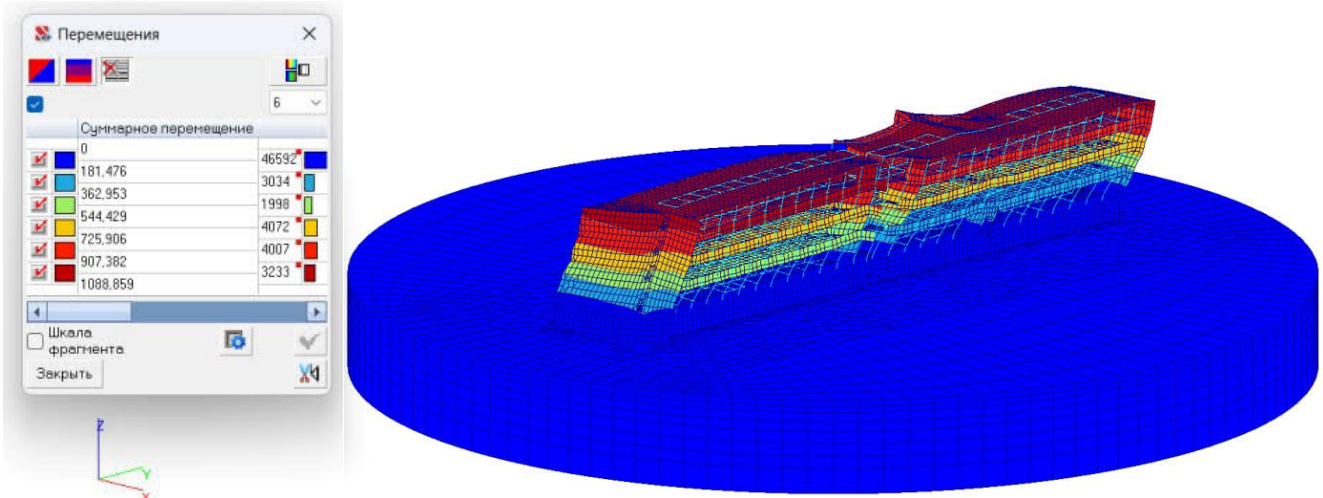


Рис. 8. Вторая форма колебаний – изгибная по оси Y

Источник: выполнено В.С. Михайловым.

Figure 8. The second bending mode shape, Y axis

Source: made by V.S. Mikhailov.

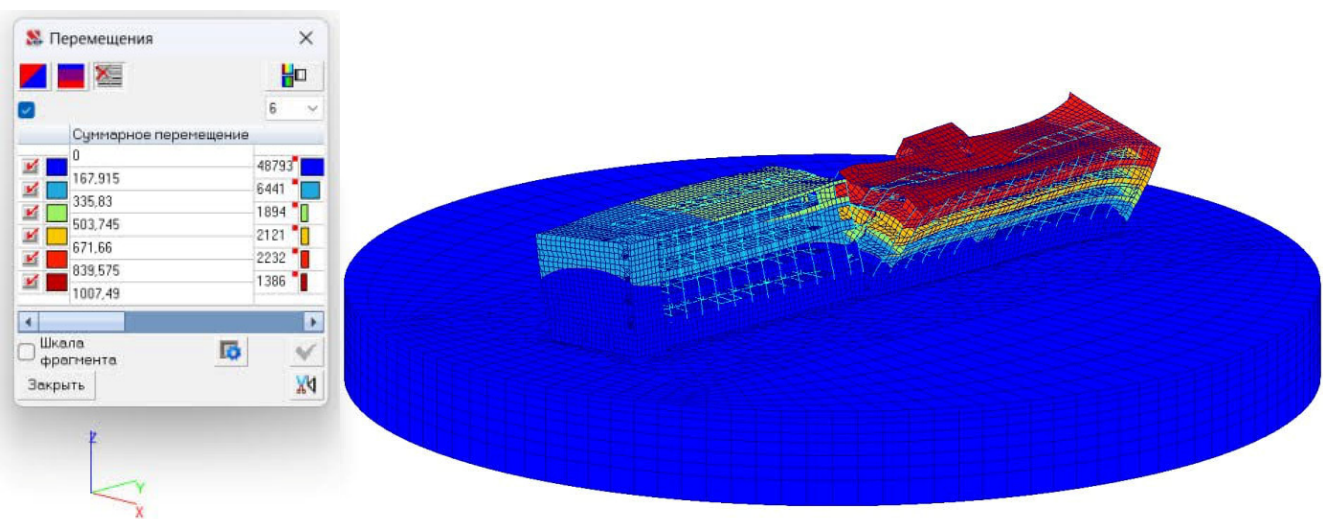


Рис. 9. Третья форма колебаний – изгибная по оси X

Источник: выполнено В.С. Михайловым.

Figure 9. The third bending mode shape, X axis

Source: made by V.S. Mikhailov.

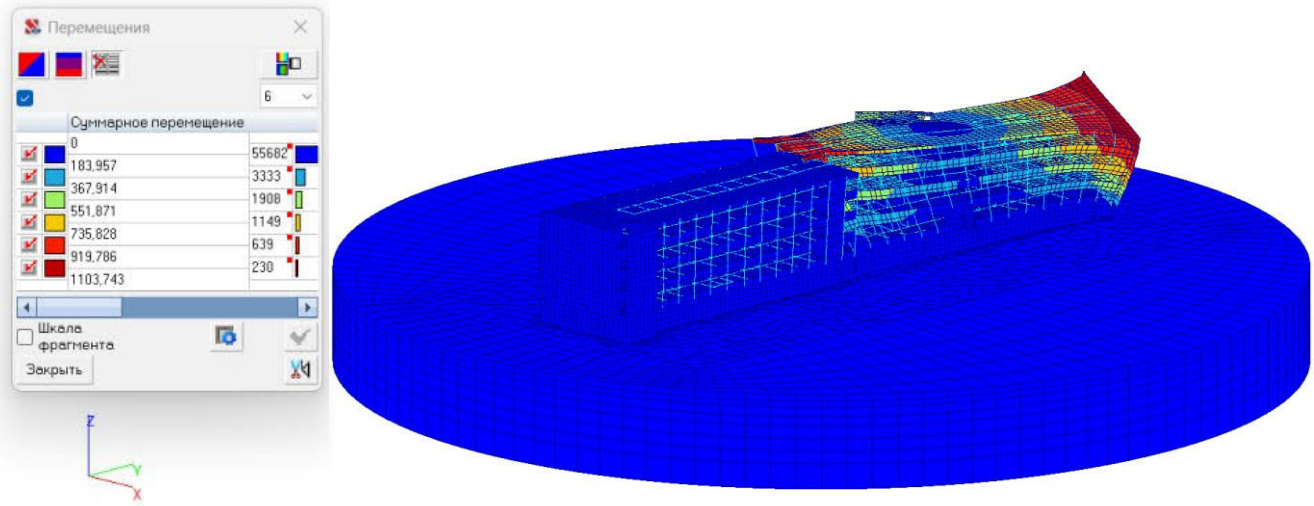


Рис. 10. Четвертая форма колебаний — крутильная
Источник: выполнено В.С. Михайловым.

Figure 10. The fourth torsional mode shape
Source: made by V.S. Mikhailov.

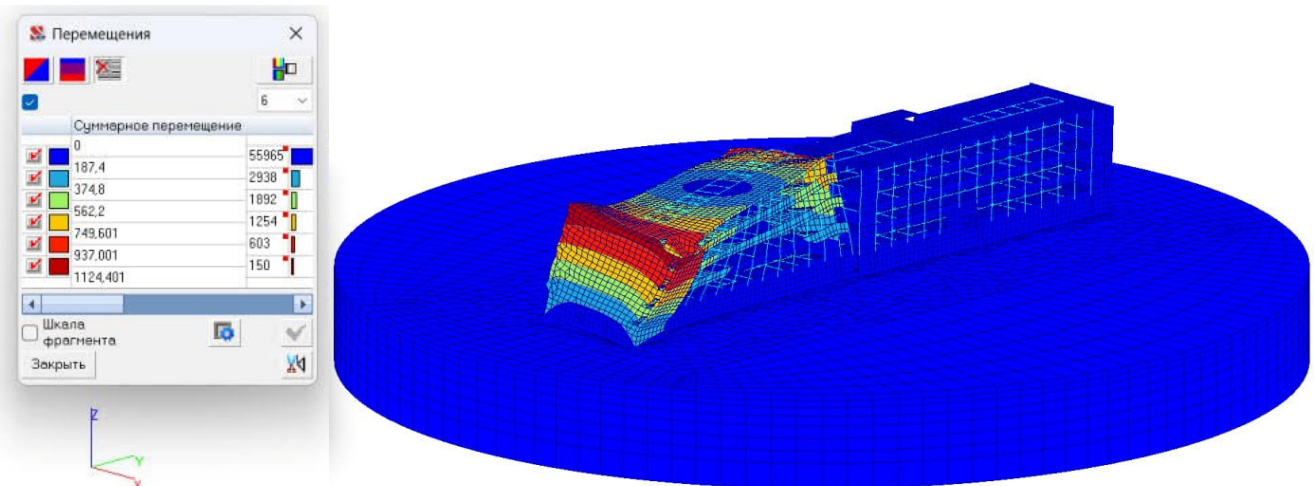


Рис. 11. Пятая форма колебаний – крутильная
Источник: выполнено В.С. Михайловым.

Figure 11. The fifth torsional mode shape
Source: made by V.S. Mikhailov.

Для сопоставления экспериментального и аналитического метода были выбраны первые пять экстремумов колебаний. Первая, вторая и третья формы колебаний — изгибные на частотах 2,3, 2,5 и 2,6 Гц соответственно, четвертая и пятая — крутильные на 3,5 и 4,0 Гц. Результаты, полученные с помощью моделирования, подтверждают результаты натурного эксперимента.

Сопоставление расчетных значений с экспериментальными показало совпадение собственных частот и форм мод, что подтверждает корректность экспериментальной методики и адекватность используемых моделей. При этом численное моделирование позволило дополнительно выявить зоны с максимальными значениями напряжений и потенциально повышенной уязвимостью, что согласуется с распределением коэффициента уязвимости, рассчитанного по данным микросейсмического мониторинга.

Возможность визуализации форм колебаний в *SCAD* дает возможность наглядно представить динамическое поведение здания в резонансных режимах. Это создает предпосылки:

- для определения потенциально перегруженных зон конструкции;
- оценки эффективности демпфирующих элементов;
- проведения перспективного анализа декремента затухания на основе комбинации моделирования и натурных наблюдений.

4. Заключение

1. Частоты собственных колебаний здания ИГФ стабильны во времени, но неоднородны по объему здания. В юго-восточном торце наблюдается смещение резонансной частоты, связанное с преобладанием различных форм колебаний; крутильные моды доминируют на краевых участках, что характерно для протяженных зданий.

2. Для анализа выбраны первые пять мод: три изгибные (2,3; 2,5; 2,6 Гц) и две крутильные (3,5; 4,0 Гц). Результаты численного моделирования согласуются с натурными измерениями.

3. Регистрация микросейсмиков показала ее эффективность как экспресс-метода для оценки соответствия здания нормативным требованиям.

4. Численное моделирование позволяет прогнозировать динамическое поведение здания, а микросейсмический метод предоставляет фактические данные; сопоставление этих подходов подтверждает их взаимодополняемость.

5. Формы собственных колебаний (изгиб и кручение) определены путем сопоставления экспериментальных данных с расчетными моделями с учетом уточненных характеристик основания.

Перспективные направления развития методики включают расширение выборки зданий с различной конструкцией и географией, изучение временных характеристик микросейсмических сигналов, интеграцию с цифровыми платформами моделирования и анализ влияния параметров дискретизации и оборудования на точность результатов. Реализация этих направлений повысит точность диагностики, надежность мониторинга и своевременность принятия решений по техническому состоянию зданий.

Список литературы

1. Ведерников Г.В. Методы пассивной сейсморазведки // Приборы и системы разведочной геофизики. 2013. Т. 44. № 2. С. 30–36. EDN: QOUGXP
2. Колосова Е.А., Лукк А.А., Серова О.А., Сидорин А.Я. Природные и техногенные источники триггерной активности сейсмичности и сейсмического шума // Наука и технологические разработки. 2015. Т. 94. № 4. С. 30–43. EDN: WAOWMJ
3. Nakamura Y. What Is the Nakamura Method? // Seismological Research Letters. 2019. Vol. 90. No. 4. P. 1437–1443. <https://doi.org/10.1785/0220180376>
4. Пахмурин О.Р., Михайлов В.С., Воскресенский М.Н. Использование трехкомпонентной сейсмостанции «регистр» для определения динамических характеристик и HVSR анализа каркасных зданий методом Накамуры // Инвестиции, градостроительство, недвижимость как драйверы социально-экономического развития территории и повышения качества жизни населения // Материалы XI Международной научно-практической конференции : в 2 частях. 02–04 марта, Томск, 2021. С. 417–420. EDN: FNHXUW
5. Адищев В.В., Калачева В.В., Михайлов В.С. Методы оценки амплитудно-частотных характеристик зданий с монолитным железобетонным каркасом // Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (СИБСТРИН). 2024. Т. 27. № 4. С. 9–26. <https://doi.org/10.32683/1815-5987-2024-27-94-4-9-26> EDN: XLXLWR
6. Еманов А.Ф., Бах А.А. Стоячие волны в инженерных объектах сложных конструкций // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2019. № 2 (2). С. 67–73. <https://doi.org/10.33764/2618-981X-2019-2-2-67-73> EDN: TNIQQO
7. Селезнев В.С., Лисейкин А.В., Коковкин И.В., Соловьев В.М. Изменение значений частот собственных колебаний зданий и сооружений в зависимости от внешних факторов // Геология и геофизика. 2024. Т. 65. № 7. С. 1036–1044. <https://doi.org/10.15372/GiG2024102> EDN: ZVFRU
8. Антоновская Г. Н. Сейсмический мониторинг состояния антропогенных объектов и территорий их размещения, включая Крайний Север : дис. ... д-ра техн. наук. Москва, 2018. 317 с. EDN: URZDHW
9. Kong X., Rong M., Li X., Wang J., Zhang B. The relationship between site resonance frequency and bedrock interface at one-dimensional sites based on the Kik-Net database. 2023. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4579250>

10. Gosar A. Site effects and soil-structure resonance study in the Kobarid basin (NW Slovenia) using microtremors // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2010. Vol. 10. P. 761–772. <https://doi.org/10.5194/nhess-10-761-2010>
11. Moisiđi M., Vallianatos F., Gallipoli M.R. Assessing the main frequencies of modern and historical buildings using ambient noise recordings: Case studies in the historical cities of crete (Greece) // *Heritage*. 2018. Vol. 1. No. 12. P. 171–188. <https://doi.org/10.3390/heritage1010012> EDN: HKXLXX
12. Khodabakhshi Soureshjani R., Ghasemzadeh H. Development of seismic fragility curves for buckling-restrained braced structures under far-field motions considering soil-structure interaction // *Results in Engineering*. 2025. Vol. 25. Article no. 104188. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.104188>
13. Базаров А.Д., Лундэнбазар Б., Комаров А.К., Иванов И.А. Оценка динамической реакции каркасного здания под воздействием микросейсмического шума в г. Улан-Баторе // *Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость*. 2020. Т. 10. № 2. С. 198–205. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2020-2-198-205> EDN: DYLOFJ
14. Lalin V.V., Le Ty K.C. Calculation of building structures under multiple dynamic loads with static consideration of higher vibration modes // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020. Vol. 16. No. 3. P. 171–178. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-171-178> EDN: VSEGWP
15. Туровский С.В., Пахмурип О.Р. Оценка пространственной работы многоэтажного каркасного здания с безригельным перекрытием // *Избранные доклады Юбилейной университетской научно-технической конференции студентов и молодых ученых*. 25 апреля, Томск, 2019. С. 100–103. EDN: JSHSEO
16. Сенип Л.Н., Сенипа Т.Е., Воскресенский М.Н. Аппаратно-программный комплекс «Регистр-SD» для изучения сейсродинамических характеристик объектов, находящихся под воздействием упругих колебаний // *Приборы и техника эксперимента*. 2017. № 4. С. 157–158. <https://doi.org/10.7868/S0032816217040115> EDN: ZCQCQD
17. Воскресенский М.Н., Курдапова А.А. Оптимальная длительность наблюдений при обследовании зданий сейсмическим методом // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 2. С. 182–194. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-2-182-194> EDN: JPZCMI
18. Романов В.В., Мальский К.С. MicroSeisTool — программа обработки записей микросейсмических колебаний. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2016615697.27.05.2016. Заявка № 2016611234 от 16.02.2016. EDN: SACRCP
19. Курдапова А.А., Воскресенский М.Н., Косоротова Е.А., Парыгин Г.И. Мониторинг технического состояния зданий сейсмическим методом // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 5. С. 479–490. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-5-479-490> EDN: CVGMIC
20. Воскресенский М.Н., Парыгин Г.И., Сенипа Т.Е., Сенип Л.Н. Обследование здания ИГФ УрО РАН с применением метода HVSR // *Материалы всероссийской конференции с международным участием. Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей*. 23–27 сентября 2019 г. Екатеринбург, 2019. С. 85–90. EDN: CASQLI

References

1. Vedernikov G.V. Methods of passive seismic survey. *Instruments and Systems of Exploration Geophysics*. 2013; 44(2):30–36. (In Russ.) EDN: QOUGXP
2. Kolosova E.A., Lukk A.A., Serova O.A., Sidorin A.Ya. Natural and technogenic origins of trigger effects in seismicity and seismic noise. *Science and Technological Developments*. 2015;94(4):30–43. (In Russ.) EDN: WAOWMJ
3. Nakamura Y. What Is the Nakamura method? *Seismological Research Letters*. 2019;90(4):1437–1443. <https://doi.org/10.1785/0220180376>
4. Pakhmurin O.R., Mikhailov V.S., Voskresenskiy M.N. Using the Three-Component Seismostation “Registr” for Determining Dynamic Characteristics and HVSR Analysis of Frame Buildings by the Nakamura Method. *Investments, Urban Planning, and Real Estate as Drivers of Socio-Economic Development and Quality of Life. Proceedings of the XI International Scientific and Practical Conference*. March 02–04, Tomsk, 2021. p. 417–420. (In Russ.) EDN: FNHXUW
5. Adishchev V.V., Kalacheva V.V., Mikhailov V.S. Methods for Evaluating the Amplitude-Frequency Characteristics of Buildings with Monolithic Reinforced Concrete Frames. *Proceedings of Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (SIBSTRIN)*. 2024;27(4):9–26. (In Russ.) <https://doi.org/10.32683/1815-5987-2024-27-94-4-9-26> EDN: XLXLWR
6. Emanov A.F., Bakh A.A. Standing waves in engineering structures of complex design. *Interexpo Geo-Siberia*. 2019;2(2):67–73. (In Russ.) <https://doi.org/10.33764/2618-981X-2019-2-2-67-73>
7. Seleznev V.S., Liseykin A.V., Kokovkin, I.V., Solovyev V.M. Variations of Natural Frequencies of Buildings and Structures under External Influences. *Geology and Geophysics*. 2024;65(7):1036–1044. (In Russ.) <https://doi.org/10.15372/GiG2024102> EDN: ZVFRTU
8. Antonovskaya G.N. *Seismic monitoring of anthropogenic structures and their sites, including the far north*. Doctoral Dissertation. 2018. (In Russ.)
9. Kong X., Rong M., Li X., Wang J., Zhang B. *The relationship between site resonance frequency and bedrock interface at one-dimensional sites based on the KIK-Net database*. 2023. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4579250>

10. Gosar A. Site Effects and soil-structure resonance study in the Kobarid Basin (NW Slovenia) Using Microtremors. *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2010;10:761–772. <https://doi.org/10.5194/nhess-10-761-2010>
11. Moisiidi M., Vallianatos F., Gallipoli M.R. Assessing the main frequencies of modern and historical buildings using ambient noise recordings: Case studies in the historical cities of crete (Greece). *Heritage*. 2018;1(12):171–188. <https://doi.org/10.3390/heritage1010012> EDN: HKXLXX
12. Khodabakhshi Soureshjani R., Ghasemzadeh H. Development of seismic fragility curves for buckling-restrained braced structures under far-field motions considering soil-structure interaction. *Results in Engineering*. 2025;25:104188. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.104188>
13. Bazarov A.D., Lundenbazar B., Komarov A.K., Ivanov I.A. Dynamic response assessment of a frame building affected by microseismic noise in the city of Ulan Bator. *Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real Estate*. 2020;10(2):198–205. (In Russ.) <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2020-2-198-205>
14. Lalin V.V., Le Ty K.C. Calculation of building structures under multiple dynamic loads with static consideration of higher vibration modes. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(3):171–178. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-171-178> EDN: VSEGWP
15. Pakhmurin O.R., Turovskiy S.V. Evaluation of the Spatial Behavior of a Multi-Storey Frame Building with Beamless Slabs. *Selected reports of the Anniversary University Science and Technology Conference of Students and Young Scientists*. April 25, Tomsk, 2019. p. 100–103. (In Russ.) EDN: JSHSEO
16. Senin L.N., Senina T.E., Voskresenskiy M.N. Hardware-software complex “Registr-SD” for studying seismic-dynamic characteristics of structures subject to elastic vibrations. *Instruments and Experimental Techniques*. 2017;4:157–158. (In Russ.) <https://doi.org/10.7868/S0032816217040115> EDN: ZCQCQD
17. Voskresenskiy M.N., Kurdanova A.A. Optimal duration of observations during seismic inspection of buildings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(2):182–194. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-2-182-194>
18. Romanov V.V., Malskiy K.S. *MicroSeisTool — Software for processing microseismic records*. Certificate of Registration of Computer Program No. 2016615697, 27.05.2016. Application No. 2016611234, 16.02.2016. (In Russ.) EDN: CACRCP
19. Kurdanova A.A., Voskresenskiy M.N., Kosorotova E.A., Parygin G.I. Monitoring of technical condition of buildings by seismic method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(5):479–490. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-5-479-490> EDN: CVGMIC
20. Voskresenskiy M.N., Parygin G.I., Senina T.E., Senin L.N. Survey of the IGF UB RAS building using the HVSR method. *Proceedings of the All-Russian Conference with International Participation. Deep Structure, Geodynamics, Thermal Field of the Earth, Interpretation of Geophysical Fields. September 23–27, Yekaterinburg, 2019*. p. 85–90. (In Russ.) EDN: CASQLI

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ EXPERIMENTAL RESEARCH

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-22-1-81-90

EDN: IZEVGR

Research article / Научная статья

Compressive Properties of Hybrid Basalt Reinforced Concrete for Aerodrome Pavement

Qais A.A. Qais¹, Alena V. Kotlyarevskaya¹, Galina E. Okolnikova^{1,2}¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation² Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ qaiseng@gmail.com

Received: December 2, 2025

Revised: January 27, 2026

Accepted: February 5, 2026

Abstract. Concrete remains the most widely used construction material, yet its brittleness and susceptibility to cracking limit its application in high-load structures such as aerodrome pavements. Improving mechanical strength and durability is therefore essential. While fiber reinforcement has been widely studied, mono-fiber systems often yield only partial benefits. Hybrid reinforcement using basalt macro fibers and microfibers presents a sustainable alternative, but remains underexplored, particularly for aerodrome pavements. This study investigated the influence of hybrid basalt fibers on the compressive strength of concrete at 7, 14, and 28 days, with the goal of identifying the most effective fiber proportion. Concrete mixes with different ratios of basalt macro fibers (A) and microfibers (B) were produced, cast into standard cubes, and tested for compressive strength following established guidelines. Results indicated that hybridization significantly improved strength development compared to the control. Fiber concrete mixture series achieved the highest 28-day compressive strength of 72.8 MPa, outperforming both mono-fiber and control samples. This confirms the synergistic role of hybrid fibers in enhancing crack control and load transfer. The findings suggest that hybrid basalt fiber reinforcement offers a practical, sustainable solution for high-performance concrete, with strong potential for application in aerodrome pavements and other demanding structural works.

Keywords: hybrid fibers, basalt fiber reinforced concrete, compressive strength, airfield runway, sustainable construction

Authors' contribution: Qais Q.A.A. — laboratory experiments, writing, conceptualization, literature review, editing; Kotlyarevskaya A.V. — supervision, conceptualization, validation; Okolnikova G.E. — supervision, review and editing. All authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

For citation: Qais Q.A.A., Kotlyarevskaya A.V., Okolnikova G.E. Compressive properties of hybrid basalt reinforced concrete for aerodrome pavement. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):81–90. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-81-90> EDN: IZEVGR

Qais Abdulrahman Ali Qais, Assistant and postgraduate student, Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2820-3305; ORCID: 0009-0003-0245-2086; e-mail: qaiseng@gmail.com

Alena V. Kotlyarevskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7953-0380, ORCID: 0000-0001-5192-0550; e-mail: kotlyarevskaya-av@rudn.ru

Galina E. Okolnikova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Associate Professor of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8731-8713, ORCID: 0000-0002-8143-4614.; e-mail: okolnikova_ge@mail.ru

© Qais Q.A.A., Kotlyarevskaya A.V., Okolnikova G.E., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Прочностные свойства гибридного базальтобетона для аэродромных покрытий

К.А.А. Кайс¹✉, А.В. Котляревская¹, Г.Э. Окольникова^{1,2}

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ qaiseng@gmail.com

Поступила в редакцию: 2 декабря 2025 г.

Доработана: 27 января 2026 г.

Принята к публикации: 5 февраля 2026 г.

Аннотация. Бетон остается наиболее широко используемым строительным материалом, однако его хрупкость и склонность к растрескиванию ограничивают его применение в подверженных высоким нагрузкам конструкциях, таких как покрытия аэродромов. Поэтому крайне важно повысить его механическую прочность и долговечность. Хотя армирование волокнами широко изучено, системы с одним видом волокон часто дают лишь частичные преимущества. Гибридное армирование с использованием макроволокон и микроволокон из базальта представляет собой устойчивую альтернативу, но остается недостаточно изученным, особенно для покрытий аэродромов. Авторами изучено влияние гибридных базальтовых волокон на прочность бетона на сжатие через 7, 14 и 28 дней с целью определения наиболее эффективной пропорции волокон. Были изготовлены бетонные смеси с различными соотношениями макроволокон (А) и микроволокон (В), отлиты в стандартные кубы и испытаны на прочность на сжатие в соответствии с установленными рекомендациями. Результаты показали, что гибридизация значительно улучшила развитие прочности по сравнению с контрольными образцами. Фибробетонная смесь серии 1,5А0,5В достигла наивысшей прочности на сжатие через 28 дней — 72,8 МПа, превосходя как образцы с одним видом волокон, так и контрольные образцы. Это подтверждает синергетическую роль гибридных волокон в улучшении контроля трещин и передачи нагрузки. Результаты исследования показывают, что армирование гибридными базальтовыми волокнами является практичным и устойчивым решением для высокопрочного бетона, имеющим большой потенциал для применения в аэродромных покрытиях и других сложных строительных работах.

Ключевые слова: гибридные волокна, бетон, армированный базальтовым волокном, прочность на сжатие, взлетно-посадочная полоса аэродрома, устойчивое строительство

Вклад авторов: Кайс К.А.А. — выполнение лабораторных экспериментов, написание текста, концепция исследования, обзор литературы, редактирование; Котляревская А.В. — научное руководство, концепция исследования, валидация; Окольникова Г.Э. — научное руководство и редактирование. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Qais Q.A.A., Kotlyarevskaya A.V., Okolnikova G.E. Compressive properties of hybrid basalt reinforced concrete for aerodrome pavement // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2026. Т. 22. № 1. С. 81–90. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-81-90> EDN: IZEVGR

1. Introduction

Airport pavements are designed to withstand extremely heavy and repetitive aircraft loads while resisting environmental deterioration [1]. A key factor in their performance is the effect of impact forces from hard landings, which can accelerate structural fatigue [2]. For this reason, runway concrete is specified with high compressive strength, often between 30 and 40 MPa, and is typically reinforced with steel or other fibers to improve durability. The Federal Aviation Administration (FAA) recommends a compressive

Кайс Абдулрахман Али Кайс, аспирант, ассистент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2820-3305; ORCID: 0009-0003-0245-2086; e-mail: qaiseng@gmail.com

Котляревская Алена Валерьевна, кандидат технических наук, доцент, кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 7953-0380, ORCID: 0000-0001-5192-0550; e-mail: kotlyarevskaya-av@rudn.ru

Окольникова Галина Эриковна, кандидат технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций, Московский государственный строительный университет (Национальный исследовательский университет), 129337, Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 8731-8713, ORCID: 0000-0002-8143-4614; e-mail: okolnikova_ge@mail.ru

strength of about 4,000 psi (≈ 28 MPa) to achieve a 20-year runway lifespan.¹ Since compressive strength governs both load resistance and fatigue performance, higher values allow for thinner slabs or increased load capacity [3]. Recent advances have focused on lightweight high-strength concrete and ultra-high-performance concrete (UHPC), which provide enhanced durability and lower maintenance needs [4].

Basalt fibers (BFs) have emerged as a promising reinforcement for aerodrome pavements due to their high tensile strength, chemical stability, and resistance to temperature extremes. In [5], it was reported that basalt fibers improved compressive and tensile strengths by about 7%, while study [6] emphasized the influence of fiber length and dosage on workability and long-term durability. In [7], it was found that a 0.1% fiber dosage optimized compressive strength, whereas higher hybrid dosages could reduce performance. Hybridization with polypropylene further enhanced flexural behavior. In [8], it was demonstrated that basalt fiber-reinforced nano-SiO₂ concrete retained superior mechanical properties even after heating to 800°C. Similarly, study [9] showed that small fiber additions significantly improved compressive strength and salt-freezing resistance, reducing porosity and enhancing durability.

In most conventional applications, fiber-reinforced concrete (FRC) incorporates only a single fiber type. However, combining two or more fibers in suitable proportions can improve concrete's overall performance through a synergistic effect, a process referred to as hybridization [10]. In paper [11], it was demonstrated that hybrid systems significantly enhance the behavior of ultra-high-performance concrete (UHPC). For instance, the inclusion of long hooked-end steel fibers in hybrid mixes can synergistically boost compressive strength, while increasing hybrid fiber volume fraction further elevates tensile splitting strength [12]. Study [13] investigated hybrid basalt–polypropylene fiber-reinforced concrete (HBPRC) and found that hydrostatic response, peak deviatoric stress, elastic modulus, and Poisson's ratio were influenced by both confining pressure and fiber composition. Within this composite, basalt fibers primarily contribute to strength enhancement, whereas polypropylene fibers improve ductility and deformation capacity. Similarly, study [14] showed that hybridization with Kevlar and glass fibers at 1.5% dosage yielded superior compressive, flexural, and tensile strengths, along with higher toughness indices, compared to mono-fiber mixes. Concrete, derived from mineral cements, remains the most widely used construction material worldwide [15]. Its compressive capacity is traditionally evaluated through standardized cube or cylinder tests [16]. However, specimen strength is often incorrectly generalized as the material's intrinsic strength [17]. While in-situ strength measurement remains challenging [18], predictive modeling using statistical and machine learning techniques has improved accuracy and industrial relevance [19].

From a fracture mechanics standpoint, basalt fibers effectively slow crack propagation [20]. Compared with GFRP and CFRP, basalt fiber-reinforced polymer (BFRP) provides lower cost and better creep resistance [21]. For UHPC, optimal basalt fiber content of $\sim 1\%$ maximizes compressive, flexural, and tensile strengths [22], while also improving residual flexural performance with little difference in the damping ratio [23].

This study aims to examine the influence of hybrid basalt fiber reinforcement, combining macro fibers and microfibers, on the compressive strength of concrete for aerodrome pavements, and the objectives are to;

- i. evaluate compressive strength at 7, 14, and 28 days;
- ii. identify the optimal hybrid fiber mix;
- iii. compare results with existing literature; and
- iv. provide practical recommendations for using hybrid basalt fibers in producing durable, high-strength concrete.

Concrete is the most widely used construction material globally, yet its brittleness and cracking limit performance in aerodrome pavements exposed to high static and dynamic loads. Fiber reinforcement improves strength, but single type of fibers provides narrow benefits. Hybrid reinforcement, combining macro fibers for load transfer and microfibers for shrinkage control, offers synergistic gains, though optimal

¹ Federal Aviation Administration. AC 150/5320-6E, Airport Pavement Design and Evaluations. Washington (DC); 2009.

ratios remain underexplored. Basalt fibers, a sustainable alternative to steel or synthetics, show promise. This study investigates their hybridization to enhance pavement durability, address practical construction demands, and promote eco-friendly, high-performance concrete.

Although mono-fibers like steel, polypropylene, and glass have been widely studied, limited research exists on the combination of micro and macro basalt fibers and their effect on compressive strength across curing ages. Gaps include insufficient exploration of basalt hybridization, lack of data on optimal macro/micro ratios, dearth of specific studies relating to aircraft pavements, and practical recommendations for high-strength, durable concrete.

2. Materials and Methods

2.1. Experimental Materials

Cement. Cement is a key construction material, primarily used as a binder in concrete [24]. Portland cement comes from straightforward technology but involves complicated [25]. This study employed Portland Cement M600 CEM I 52.5, supplied by Akkermann Cement, meeting GOST 31108-2020² standard. Characterized by high early and ultimate strength, rapid hydration, and superior bonding, it is well-suited for high-performance and fiber-reinforced concrete.

Water. Water, though vital, is a limited resource [26]. Mixing water complied with GOST 23732-79³, while potable water per GOST 2874-82⁴ was accepted without further tests, ensuring purity, proper hydration, fiber bonding, and long-term durability.

Superplasticizer. A high-range water-reducing admixture was incorporated at 0.7% of cement weight to enhance workability at low water-to-cement ratios, improving fiber dispersion and compaction. The selected polycarboxylate-based superplasticizer effectively reduces the yield stress of the fresh mix, enabling uniform distribution of both macro- and micro-basalt fibers. This ensures optimal bonding between fibers and the cementitious matrix while preventing fiber balling or segregation, thus improving mechanical performance and surface finish quality.

Aggregates. Natural medium sands per GOST 8736-93⁵, with fineness modulus 2.0–2.5 and particle sizes 0.63–1.25 mm, were supplied by OOO BATOLIT. Clean, well-graded, and free from impurities, they improved packing density, reduced voids, and enhanced workability in fiber-reinforced concrete.

Coarse aggregate was 20 mm crushed stone from igneous and metamorphic rocks, conforming to GOST 8267-93⁶ and GOST 26633-91⁷ standards. With crushability of not less than 1200, it provided high strength, stability, and interlock, enhancing compatibility with fibers and overall concrete performance.

Basalt Fibers (Micro and Macro). Basalt macro fibers (50 mm × 1 mm), produced from basalt rock by melt extrusion, were added to enhance toughness, crack bridging, and impact resistance. With high tensile strength and alkali resistance, they improved durability under static and dynamic loads. Basalt microfibers (18.2 mm × 17 μm) were added to control microcracks, reduce shrinkage, and strengthen the Interfacial Transition Zone. Their high aspect ratio and chemical stability enhance tensile strain capacity, long-term durability, and resistance to freeze-thaw and chemical attack.

² Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. GOST 31108-2020: Cements for general construction. Specifications. Moscow; 2020.

³ Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. GOST 23732-79 (rev. 2011): Water for concrete and mortars. Technical conditions. Moscow; 1979

⁴ Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. GOST 2874-82: Drinking water. Hygienic requirements and quality control. Moscow; 1982.

⁵ Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. GOST 8736-93: Sand for construction works. Specifications. Moscow; 1993.

⁶ Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. GOST 8267-93: Crushed stone and gravel of solid rocks for construction works. Specifications. Moscow; 1995.

⁷ Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. GOST 26633-91: Heavy-weight and fine concrete. Specifications. Moscow; 1991.

2.2. Experimental Procedures

Concrete mixes with basalt macro and microfibers were prepared with materials listed in Section 2. The dry materials were mixed before gradually adding water and superplasticizer to ensure uniformity and prevent fiber balling. Cubic specimens (100 × 100 × 100 mm) were cast in steel molds, compacted with vibration, and finished with a smooth steel-trowel surface. After casting, specimens were covered with a polyethylene sheet and left undisturbed for 24 ± 2 hours at laboratory temperature. Following demolding, the specimens were cured in a water tank maintained at a stable temperature, in accordance with GOST 10180-2012⁸. Specimens were cured until the designated testing ages of 7, 14, and 28 days, representing early, intermediate, and standard design strength evaluations. Compressive strength was tested using a 2000 kN machine at a controlled loading rate. Specimen ends were cleaned, centrally aligned, and loaded uniformly until failure. The maximum load at failure (P , in Newtons) was recorded for each specimen. The compressive strength f_c was calculated using Equation (1):

$$f_c = \frac{P}{A}, \quad (1)$$

where f_c is the compressive strength (MPa); P is the maximum load at failure (N); A is the cross-sectional area of the specimen (mm²).

For each mix and testing age, the average compressive strength was determined from three replicate specimens to minimize variability and improve reliability of results.

3. Results and Discussions

At seven days of curing, the compressive strength results revealed important insights into the performance of basalt macro fibers, microfibers, and their hybrid combinations in concrete. The control mix (K) reached 51.67 MPa in Figure 1, providing a useful baseline for comparison. When mono-fiber systems were considered, it became evident that dosage played a decisive role in determining strength outcomes.

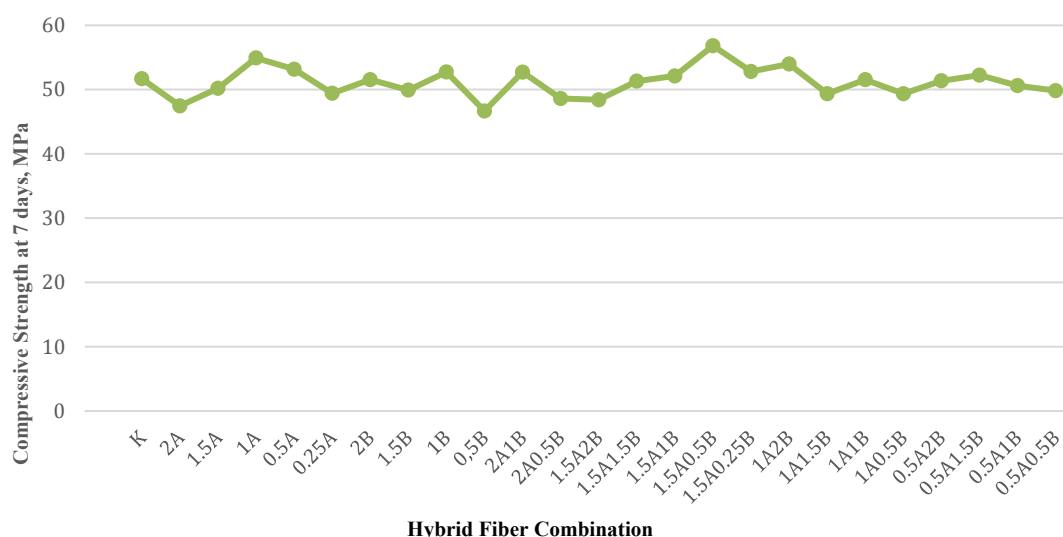


Figure 1. Compressive Strength at 7 days against Hybrid Fiber Combination

Source: made by Q.A.A. Qais.

⁸ Interstate Technical Committee for Standardization in Construction. GOST 10180-2012: Concretes. Methods for strength determination using reference specimens. Moscow; 2012. (In Russ.).

For the macro fiber (A) series, strengths ranged between 47.45 and 54.90 MPa. The mix containing 1% macro fibers (1A) performed best within this group, achieving 54.90 MPa, which represented an increase of approximately 6.2% over the control. By contrast, both lower and higher dosages tended to reduce strength relative to the control, suggesting that the inclusion of macro fibers beyond the optimum level may compromise matrix consolidation and uniformity. This is similar to study [13] which stated that mono steel fiber has no significant effect on compressive strength. The compressive strength decreases when the volume fraction increases from 1.0 to 1.5%, but increases when it exceeds 1.5%. Hybrid fibers with different combination types produce a synergistic effect.

The microfiber (B) series in Figure 1 showed a similar trend, with strengths ranging from 46.66 to 52.72 MPa. The 1% microfiber mix (1B) achieved 52.72 MPa, reflecting a modest gain of about 2% over the control. However, mixes with either lower or higher microfiber contents, such as 0.5B and 1.5B, performed below the control, indicating that excessive or insufficient microfibers do not contribute positively to compressive strength. These outcomes highlight the existence of an optimum dosage range for each fiber type, beyond which workability issues, poor dispersion, or increased porosity may negatively affect structural integrity. This mirrors study [27] which compared systems with mono-fibers (steel or polypropylene) and hybrids. At 7 days, hybrid mixes had only a slight increase (from ~15.3 MPa to ~15.8 MPa) over mono-fiber ones, a small but noteworthy improvement.

The most significant improvements were observed with hybrid fiber systems, where macro fibers and microfibers were combined. The 1.5A0.5B mix recorded the highest compressive strength of 56.80 MPa as shown in Figure 1, representing a 9.9% increase over the control and outperforming all other combinations. Other hybrid mixes, such as 1A2B (53.96 MPa) and 0.5A (53.15 MPa), also displayed improvements relative to the control, although not as pronounced as the 1.5A0.5B mix. The synergistic behavior observed in these combinations suggests that moderate macro fiber content enhances load-bearing capacity while small amounts of microfibers help control microcrack propagation, leading to more efficient stress transfer and improved structural performance. Conversely, certain hybrids, such as 1.5A2B, underperformed, which indicates that high fiber volumes, particularly of microfibers, may disrupt the homogeneity of the mix, leading to reduced strength.

At 14 days of curing, the compressive strength results reflected both the continued hydration of cement and the influence of different fiber dosages and hybrid combinations. The control mix (K) achieved 58.33 MPa in Figure 2, providing the benchmark for comparison. This value illustrates the expected strength gain from the 7-day results, showing steady hydration and matrix densification.

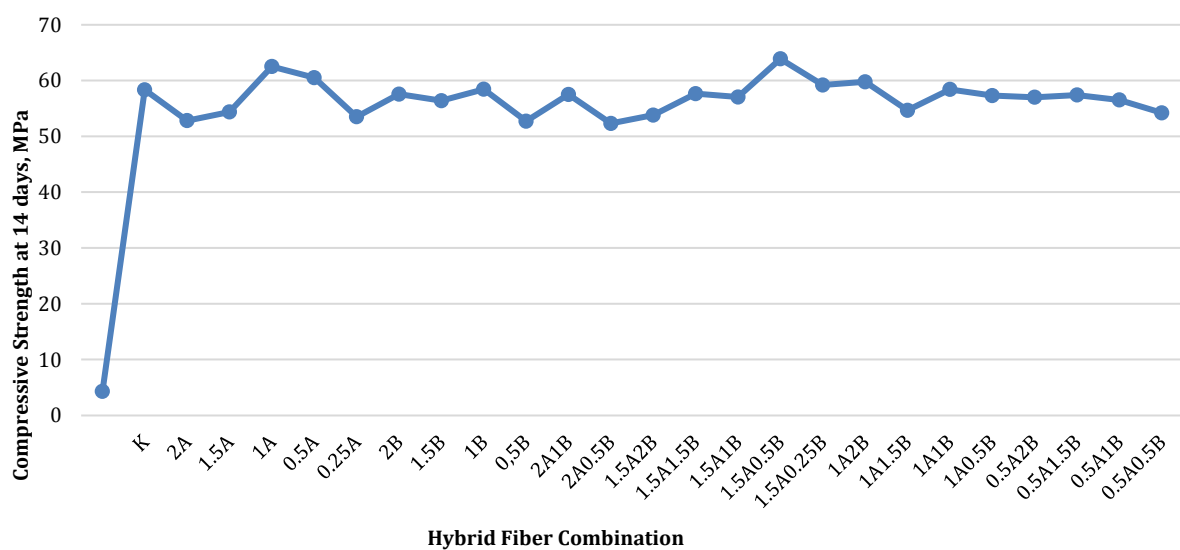


Figure 2. Compressive Strength at 14 days against Hybrid Fiber Combination

Source: made by Q.A.A. Qais.

For the macro fiber (A) series, compressive strength values ranged from 52.8 to 62.5 MPa in Figure 2. The best-performing mix was 1A, which reached 62.5 MPa — an improvement of about 7.1% compared to the control. The 0.5A mix also performed well, achieving 60.5 MPa. These results confirm the existence of an optimum dosage window, as excessive macro fiber inclusion, such as in 1.5A and 2A, resulted in reduced strengths of 54.36 MPa and 52.8 MPa respectively. Overdosage likely led to fiber clustering, and entrapped voids, which compromise strength despite the high tensile capacity of basalt fibers.

The microfiber (B) series showed a smaller strength range, between 52.71 MPa and 58.42 MPa. The highest performance was observed in 1B, which slightly exceeded the control at 58.42 MPa, while other dosages (0.5B, 1.5B, 2B) in Figure 2 offered limited or no advantage. This indicates that microfibers contribute more effectively when combined with macro fibers rather than acting alone, as their primary role lies in controlling microcracks rather than significantly enhancing compressive resistance.

The hybrid fiber mixes produced the most significant improvements. Among these, 1.5A0.5B achieved the highest compressive strength of 63.87 MPa as illustrated in Figure 2, representing a 9.5% gain over the control and surpassing all mono-fiber mixes. Other strong performers included 1A2B (59.76 MPa) and 1.5A0.25B (59.18 MPa), both of which exceeded the control, though to a lesser degree. The synergy between macro- and microfibers appears most effective when macro fiber content is moderate and complemented by small amounts of microfibers. In such proportions, macro fibers provide crack-bridging capacity and post-cracking toughness, while microfibers limit microcrack initiation and improve the homogeneity of the cement matrix. This is slightly comparable to results from [28] which showed that the effective participation of carbon, polypropylene and steel fibers and their combination with synthetic fibers contributed positively to the performance of fiber-reinforced concrete. The gain in axial compression strength reached values in the range of 10 to 19% depending on the content of total fibers and their combination, without problems in the production process.

However, not all hybrid combinations yielded superior results. Mixes such as 1.5A2B (53.8 MPa) and 2A0.5B (52.3 MPa) underperformed, even relative to the control. These outcomes reinforce the importance of balance: high volumes of either fiber type tend to reduce compressive strength by interfering with mix compactness and increasing void content.

At 28 days, the compressive strength results clearly highlight the long-term performance of the hybrid fiber-reinforced concrete mixes, showing both continued hydration and the stabilizing effect of fiber reinforcement. The control mix (K) achieved 63.6 MPa in Figure 3, a significant improvement from its 14-day value of 58.33 MPa, demonstrating expected strength gain with curing. This benchmark provides the basis for evaluating the effectiveness of fiber additions.

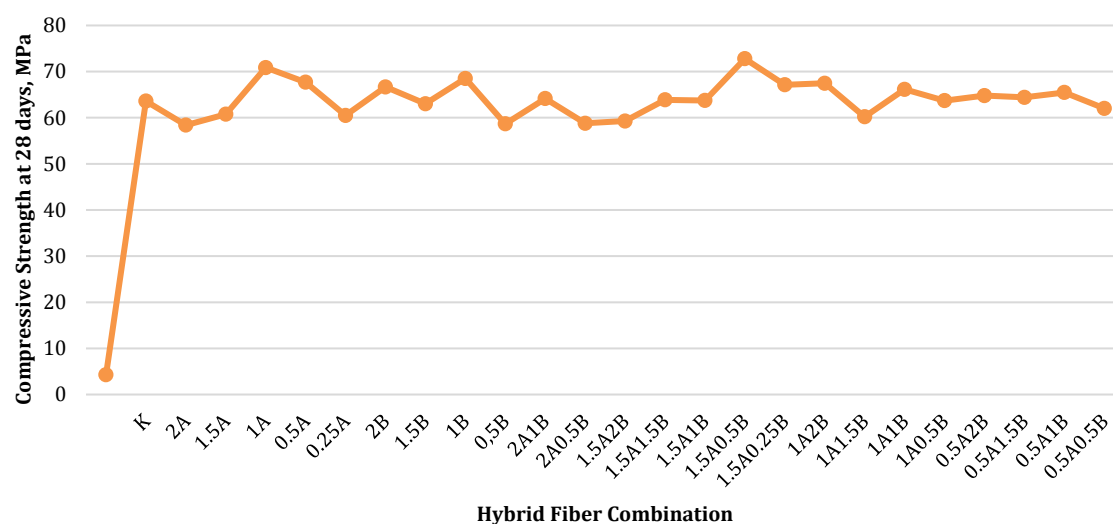


Figure 3. Compressive Strength at 28 days against Hybrid Fiber Combination

Source: made by Q.A.A. Qais.

For the macro-fiber (A) series, compressive strength ranged between 58.4 and 70.86 MPa as visualized in Figure 3. The standout mix was 1A, which achieved 70.86 MPa, representing an 11.4% improvement over the control. Similarly, 0.5A showed excellent performance with 67.7 MPa, while 1.5A and 0.25A produced moderate strengths (60.76 MPa and 60.5 MPa, respectively). The lowest performance in this group was observed in 2A (58.4 MPa), confirming the negative effects of excessive macro fiber dosage, such as poor workability, void entrapment, and fiber clustering. These results confirm that moderate macro fiber contents (0.5–1%) optimize crack-bridging without compromising mix compactness.

The microfiber (B) series generally improved compressive strength compared to the control, though less dramatically than macro fibers. In Figure 3, Strength values ranged between 58.67 and 68.5 MPa, with 1B achieving the highest strength of 68.5 MPa, surpassing the control by 7.7%. Other mixes such as 0.5B (58.67 MPa) and 1.5B (63.03 MPa) showed less improvement, while 2B (66.67 MPa) performed well. These findings suggest that microfibers are effective at enhancing long-term durability and reducing microcracking but provide more consistent rather than peak strength gains.

The hybrid fiber mixes yielded the most notable improvements, with several combinations outperforming both the control and mono-fiber mixes. The best-performing mix, 1.5A0.5B, achieved 72.8 MPa, representing a 14.5% increase over the control, highlighting strong synergy between moderate macro fibers and a small fraction of microfibers. Other effective hybrids included 1A1.5B (67.46 MPa), 1A2B (67.13 MPa), and 1A0.5B (66.16 MPa) as displayed in Figure 3. These results confirm that balancing fiber types and dosages enhances performance: macro fibers provide crack bridging and load redistribution, while microfibers improve homogeneity and limit microcrack formation. Unlike the findings of [29], where hybrid reinforcement with steel, polypropylene, and basalt fibers combined with 50% fly ash substitution achieved about a 30% increase in mechanical properties at 28 days, this study demonstrates the effectiveness of optimized basalt hybridization alone. Thus, targeted proportions of basalt macro- and microfibers can significantly improve compressive strength in high-performance concrete. Not all hybrid mixes were successful. Combinations such as 2A0.5B (58.8 MPa) and 1.5A2B (59.28 MPa) underperformed, even relative to the control, due to excessive fiber content disrupting workability and compaction. This reinforces the finding that balance, rather than quantity, trumps performance.

The compressive strength results of hybrid fiber-reinforced concrete provide a strong foundation for advancing aerodrome pavement technology. The demonstrated improvement, particularly with the 1.5A0.5B mix, shows that strategic fiber hybridization can significantly enhance both early-age and long-term structural capacity. This is critical for airfield pavements, which are subject to heavy static and dynamic loads from aircraft, as well as fatigue stresses from frequent take offs and landings. By delivering higher compressive strength, hybrid fiber mixes enable the design of thinner yet stronger pavement sections, reducing overall material consumption and construction costs while maintaining safety margins.

Furthermore, the improved strength characteristics open pathways for extending service life, minimizing maintenance needs, and reducing downtime at airports — a major economic and operational advantage. The synergy of macro- and microfibers not only enhances load-bearing capacity but also improves crack resistance, directly addressing challenges such as rutting, thermal stresses, and impact damage. These findings provide engineers with innovative material solutions that align with modern sustainability goals, allowing aerodrome infrastructure to evolve towards greater durability, resilience, and cost-efficiency while meeting the demands of increasing air traffic.

4. Conclusions

This study investigated the effect of hybrid fiber reinforcement, using basalt macro fibers (A) and microfibers (B) in varying proportions, on the compressive strength of concrete for aerodrome pavement applications. The goal was to identify optimal hybrid mixes that balance strength with workability. Experimental results across 7, 14, and 28 days revealed consistent trends. At 7 days, mix 1.5A0.5B achieved the highest strength (56.8 MPa), about 9.9% above the control, showing the early benefits of balanced hybridization. At 14 days, the same mix again led with 63.87 MPa, about 9.5% higher than the control.

By 28 days, 1.5A0.5B reached 72.8 MPa, a 14.5% improvement, confirming its long-term advantage. These findings align with recent studies highlighting that hybridization enhances strength, limits microcracking, and improves structural performance.

Recommendations:

1. For aerodrome pavements and high-strength structures, the 1.5A0.5B hybrid mix is recommended, having consistently delivered superior compressive strength across all curing ages.
2. Moderate fiber contents are essential because excessive microfibers reduce workability, hinder compaction, and compromise strength despite their crack-bridging benefits.
3. Beyond compressive strength, durability indices such as shrinkage, freeze–thaw resistance, and chloride penetration should be investigated to develop a holistic performance profile.
4. Predictive modeling can optimize fiber ratios before large-scale testing, while pilot projects in aerodrome pavements are necessary to confirm long-term field performance.

References

1. Liu Q., Yi X., Yu B., Falchetto A. C., Wang D. A review of high-performance fiber concrete for airport pavements. *Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition)*. 2025;12(4):907–925. <https://doi.org/10.1016/j.jtte.2024.06.005>
2. Ali S., Liu X., Thambiratnam D.P., Fawzia S. Enhancing the impact performance of runway pavements with improved composition. *Engineering Failure Analysis*. 2021;130:105739. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105739> EDN: SFJZQY
3. Xu Sh., Yan K., Jiang T., Wang Y., Shi Sh., Li W., Zhao Yu., Sun K., Yu J., Wu X. Compressive properties of basalt fibers and polypropylene fiber-reinforced lightweight concrete. *ACS Omega*. 2024;9(25):26973–26982. <https://doi.org/10.1021/acsomega.3c10076> EDN: NREPYT
4. Li M., Zhang W., Wang F., Li Y., Liu Zh., Meng Q., Huo F., Zhao D., Jiang J., Zhang J. A state-of-the-art assessment in developing advanced concrete materials for airport pavements with improved performance and durability. *Case Stud Constr Mater*. 2024;21:e03774. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2024.e03774> EDN: XFGSDK
5. Liu G., Wang X. Advances in basalt fiber reinforced cement-based composites: Mechanical properties and durability insights. *J Eng Res Rep*. 2025;27(1):225–231. <https://doi.org/10.9734/jerr/2025/v27i11382> EDN: PYMDWG
6. Al-Rousan E.T., Khalid H.R., Rahman M.K. Fresh, mechanical, and durability properties of basalt fiber-reinforced concrete (BFRC): A review. *Dev Built Environ*. 2023;14:100155. <https://doi.org/10.1016/j.dibe.2023.100155> EDN: KXIYXD
7. Fu Q., Zhang Z., Xu W., Zhao X., Zhang L., Wang Y., Niu D. Flexural behavior and prediction model of basalt fiber/polypropylene fiber-reinforced concrete. *Int J Concr Struct Mater*. 2022;16(1):31. <https://doi.org/10.1186/s40069-022-00524-w> EDN: OEXDTF
8. Yang W., Liu H., Wang H. Experimental study on mechanical properties of basalt fiber reinforced nano-SiO₂ concrete after high temperature. *Front Mater*. 2024;11:1415144. <https://doi.org/10.3389/fmats.2024.1415144> EDN: VGOMMX
9. Zhou J.G., Wang G.H., Zhu G.X. The durability of basalt-fiber-reinforced cement mortar under exposure to unilateral salt freezing cycles. *Front Mater*. 2023. <https://doi.org/10.3389/fmats.2023.1202889> EDN: HKRRKR
10. Banthia N., Majdzadeh F., Wu J., Bindiganavile V. Fiber synergy in hybrid fiber reinforced concrete (HyFRC) in flexure and direct shear. *Cem Concr Compos*. 2014;48:91–97. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2013.10.018>
11. Meng W., Khayat K.H. Effect of hybrid fibers on fresh properties, mechanical properties, and autogenous shrinkage of cost-effective UHPC. *J Mater Civ Eng*. 2018;30(4):04018030. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0002212](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0002212)
12. He F., Biolzi L., Carvelli V. Effect of fiber hybridization on mechanical properties of concrete. *Mater Struct*. 2022;55(7):195. <https://doi.org/10.1617/s11527-022-02020-9> EDN: HZSFNV
13. Fu Q., Bu M., Su L., Liu L., Chen L., Li N., Niu D. Triaxial mechanical behaviour of hybrid basalt-polypropylene fibre-reinforced concrete: the effect of micro-fibres at multi scale levels. *Mater Struct*. 2021;54(3):126. <https://doi.org/10.1617/s11527-021-01723-9> EDN: RUPCCD
14. Shahid M.A., Rashid M.U., Ali N., Chaiyasarn K., Joyklad P., Hussain Q. Mechanical experiments on concrete with hybrid fiber reinforcement for structural rehabilitation. *Materials*. 2022;15(8):2828. <https://doi.org/10.3390/ma15082828> EDN: HNLCCV
15. Krivenko P. *Compressive strength of concrete*. Norderstedt: BoD-Books on Demand; 2020. ISBN 978-1-78985-568-5
16. Moccia F., Yu Q., Fernández Ruiz M., Muttoni A. Concrete compressive strength: From material characterization to a structural value. *Struct Concr*. 2021;22:E634–642. <https://doi.org/10.1002/suco.202000211> EDN: VTXZZT
17. Yankelevsky D.Z. The uniaxial compressive strength of concrete: revisited. *Mater Struct*. 2024;57(6):144. <https://doi.org/10.1617/s11527-024-02422-x> EDN: SMDMSX

18. Thandavamoorthy T.S. Determination of concrete compressive strength: A novel approach. *Adv Appl Sci Res*. 2015;6(10):88–96.
19. Young B.A., Hall A., Pilon L., Gupta P., Sant G. Can the compressive strength of concrete be estimated from knowledge of the mixture proportions? New insights from statistical analysis and machine learning methods. *Cem Concr Res*. 2019;115:379–388. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2018.09.006>
20. Mu Y., Xia H., Yan Y., Wang Z., Guo R. Fracture behavior of basalt fiber-reinforced airport pavement concrete at different strain rates. *Materials*. 2022;15(20):7379. <https://doi.org/10.3390/ma15207379> EDN: FIPFGW
21. Duan S.J., Feng R.M., Yuan X.Y., Song L.T., Tong G.S., Tong J.Z. A review on research advances and applications of basalt fiber-reinforced polymer in the construction industry. *Buildings*. 2025;15(2):181. <https://doi.org/10.3390/buildings15020181> EDN: NIQZFY
22. Gong Y., Hua Q., Wu Z., Yu Y., Kang A., Chen X., Dong H. Effect of basalt/steel individual and hybrid fiber on mechanical properties and microstructure of UHPC. *Materials*. 2024;17(13):3299. <https://doi.org/10.3390/ma17133299> EDN: CWHOSK
23. Wu H., Zhao Q., Huang X., Kaewunruen S. Engineering, mechanical and dynamic properties of basalt fiber reinforced concrete for civil applications. *Materials*. 2023;16(2):623. Available from: <https://doi.org/10.3390/ma16020623> EDN: LHIXTQ
24. Soomro M., Tam V.W., Evangelista A.C.J. Production of cement and its environmental impact. In: *Recycled concrete*. Cambridge: Woodhead Publ.; 2023. p. 11–46. <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-85210-4.00010-2>
25. Aitcin P.C. Portland cement. In: *Science and technology of concrete admixtures*. Cambridge: Woodhead Publ.; 2016. p. 27–51. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100693-1.00003-5>
26. Waidyasekara K.G.A.S., De Silva M.L., Rameezdeen R. A critical review of water studies in construction industry. In: *Proceedings of the 3rd World Construction Symposium*. Colombo; 2014. p. 1–12. Available from: <http://dl.lib.uom.lk/handle/123/17076> (accessed: 27.05.2025).
27. Han D., Park Y.J., Han M.C., Yi S.T. Evaluation on protection performance and on-site applicability of hybrid fiber-reinforced concrete. *Int J Concr Struct Mater*. 2019;13(1):19. <https://doi.org/10.1186/s40069-018-0329-5>
28. Quinino U.C.D.M., Christ R., Tutikian B.F., Silva L.C.P.D. Statistical modeling of compressive strength of hybrid fiber-reinforced concrete-HFRC. *Fibers*. 2022;10(8):64. <https://doi.org/10.3390/fib10080064> EDN: WDOGYD
29. Chakravarthy R., Venkatesan S., Patnaikuni I. Mechanical properties of high volume fly ash concrete reinforced with hybrid fibers. *Adv Mater Sci Eng*. 2016;2016(1):1638419. <https://doi.org/10.1155/2016/1638419>