

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Асапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Адилходжаев А.И., д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан

Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Базаров Д.Р., д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

Варум У., д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

Войццкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

Волосухин В.А., д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия

Галишичкова В.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Дуцев М.В., д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия

Евкин А.Ю., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

Какоеи С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Козлов Д.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Кудрявцев С.А., чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия

Курбацкий Е.Н., д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия

Лазарев Ю.Г., д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

Перькова М.В., д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Федюк Р.С., д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия

Якутов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Метод расчета монтажных напряжений в стержневых конструкциях, усиливаемых в деформированном состоянии 197

Sereke I.A., Rynkovskaya M.I., Damir H.Y. Stability Analysis and Comparison of Conventional Concrete and Expanded Polystyrene Concrete Spherical Shells (Анализ устойчивости и сравнение сферических оболочек из обычного бетона и пенополистиролбетона) 211

Савин С.Ю., Ступак М.И., Маньков Д.К. Живучесть железобетонного каркаса здания с учетом длительности эксплуатации 220

СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Курбацкий Е.Н., Пестрякова Е.А., Хуссейн Ш.А. Методика построения расчетных спектров максимальных реакций на землетрясения ... 241

Tamrazyan A.G., Kudryavtsev M.V. Influence of Damage Level on Dynamic Characteristics of Reinforced Concrete Structures when Assessing their Seismic Resistance (Влияние уровня повреждений на динамические характеристики железобетонных конструкций при оценке их сейсмостойкости) 255

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Krivoshapko S.N. Analytical Calculation of Momentless Conical Shell with Elliptical Base (Аналитический расчет конической оболочки на эллиптическом основании по безмоментной теории) 265

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Штейн А.В., Зылев В.Б. Динамические задачи строительной механики с отрицательным временем 276

Рзаев Н.С. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки из разномодульного материала, лежащей на вязкоупругом основании 289

Редактор И.Л. Панкратова
Редактор англоязычных текстов Е.Ф. Шалеева
Дизайн обложки Ю.Н. Ефремовой
Компьютерная верстка Н.В. Маркеловой

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stnj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 19.06.2024. Выход в свет 27.06.2024. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 12,32 Тираж 250 экз. Заказ № 820. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2024 VOLUME 20 No. 3

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatin, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Vladimir I. Andreev, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dutsev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Roman S. Fedjuk, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIIF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

- Serazutdinov M.N., Ubaydullov M.N.* Method for Calculating Assembly Stresses in Frame Structures Strengthened in Deformed State 197
- Sereke I.A., Rynkovskaya M.I., Damir H.Y.* Stability Analysis and Comparison of Conventional Concrete and Expanded Polystyrene Concrete Spherical Shells 211
- Savin S.Yu., Stupak M.I., Mankov D.K.* Robustness of Reinforced Concrete Frame with Respect to its Service Life 220

SEISMIC RESISTENCE

- Kurbatskiy E.N., Pestryakova E.A., Huseyin Sh.A.* Method of Constructing Maximum Design Response Spectra to Earthquakes .. 241
- Tamrazyan A.G., Kudryavtsev M.V.* Influence of Damage Level on Dynamic Characteristics of Reinforced Concrete Structures when Assessing their Seismic Resistance 255

ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

- Krivoshapko S.N.* Analytical Calculation of Momentless Conical Shell with Elliptical Base 265

DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

- Shtein A.V., Zylev V.B.* Problems of Structural Dynamics with Negative Time 276
- Rzayev N.S.* Dynamic Stability of a Cylindrical Shell Made of a Material of Different Modulus Placed on a Viscous-elastic Foundation 289

Copy Editor I.L. Pankratova

English Texts' Editor E.F. Shaleeva

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210

УДК 69.04

EDN: KSBHBB

Научная статья / Research article

Метод расчета монтажных напряжений в стержневых конструкциях, усиливаемых в деформированном состоянии

М.Н. Серазутдинов[✉], М.Н. Убайдуллоев[✉]

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия

✉ madgidpwn@rambler.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 5 февраля 2024 г.

Доработана: 24 апреля 2024 г.

Принята к публикации: 30 апреля 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Представлен метод и результаты расчета напряженно-деформированного состояния нагруженных металлических стержневых конструкций при их усилении за счет присоединения дополнительных элементов к основным. При таком усилении в конструкции возникают дополнительные монтажные напряжения. Изложены математическая модель и вариационный метод определения монтажных перемещений и напряжений, в котором при решении задачи не используются формулы для перемещений стержневой системы от единичных сосредоточенных сил. Предлагаемые математическую модель и метод можно с одинаковым успехом использовать при решении линейных и нелинейных задач. Для определения напряженно-деформированного состояния усиленной в период эксплуатации стержневой конструкции предложены математическая модель и метод расчета, позволяющие последовательно определять перемещения и напряжения в конструкции от воздействия начальных, монтажных и дополнительных эксплуатационных нагрузок. Применяются основные гипотезы модели теории стержней с учетом сдвигов и вариационный принцип Лагранжа. Особенность метода расчета состоит в том, что в процессе решения задачи на перемещения основных и усиливающих элементов конструкции накладываются связи и с учетом этих связей вычисляются монтажные перемещения и напряжения, возникающие при действии начальных нагрузок. Эта особенность существенно упрощает решение задачи

Серазутдинов Мурад Нуриевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 9043-5123, ORCID: 0000-0001-7222-1935; E-mail: serazmn@mail.ru

Убайдуллоев Маджид Насриевич, доктор технических наук, профессор кафедры основ конструирования прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 6935-9797, ORCID: 0000-0003-2265-0103; E-mail: madgidpwn@rambler.ru

© Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

и позволяет расширить круг исследуемых вопросов, так как снимает ограничения, связанные с определением монтажных сил. Решены тестовые задачи. Сравнения полученных в тестовых задачах величин монтажных перемещений и напряжений с данными, определенными другими методами, иллюстрируют достоверность и высокую точность расчетов.

Ключевые слова: стержневая система, усиление, напряженно-деформированное состояние, монтажные напряжения, вариационный метод

Для цитирования

Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Метод расчета монтажных напряжений в стержневых конструкциях, усиливаемых в деформированном состоянии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 197–210. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210>

Method for Calculating Assembly Stresses in Frame Structures Strengthened in Deformed State

Murat N. Serazutdinov^{id}, Madzhid N. Ubaydullov^{id}✉

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia

✉ madgidpwn@rambler.ru

Article history

Received: February 5, 2024

Revised: April 24, 2024

Accepted: April 30, 2024

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. The methodology and results of calculating the stress-strain state of metal frame structures when they are strengthened by attaching additional elements to the original ones. With such strengthening, additional assembly stresses emerge in the structure. This paper presents a mathematical model and a variational method for determining assembly displacements and stresses, where the equations for displacement of the system due to unit concentrated forces are not used in solving the problem. The proposed mathematical model and method can be used with equal success for solving linear and nonlinear problems. The mathematical model and the calculation method for analyzing the stress-strain state of a frame structure strengthened during operation allow to successively determine displacements and stresses in the structure from the effects of initial, assembly and additional operational loads. The basic hypotheses of the bar theory, taking shearing into account, and the Lagrange variational principle are applied. A distinguished feature of the calculation method is that in the process of solving the problem, constraints are imposed on the displacements of the original and strengthening structural elements and, taking into account these constraints, the assembly displacements and stresses due to the initial loads are calculated. This feature significantly simplifies the solution of the problem and allows to expand the range of questions under study, since it removes the limitations associated with the determination of assembly forces. The test problems have been solved. Comparison of the values of assembly displacements and stresses obtained in the test problems and determined by other methods demonstrate reliability and high accuracy of the calculations.

Keywords: frame system, strengthening, stress-strain state, assembly stresses, variational method

Murat N. Serazutdinov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Fundamentals of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 9043-5123; ORCID: 0000-0001-7222-1935; E-mail: serazmn@mail.ru

Madzhid N. Ubaydullov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Fundamentals of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 6935-9797; ORCID: 0000-0003-2265-0103; E-mail: madgidpwn@rambler.ru

For citation

Serazutdinov M.N., Ubaydullov M.N. Method for calculating assembly stresses in frame structures strengthened in deformed state. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):197–210. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210>

1. Введение

При реконструкции и ремонте сооружений в виде стержневых систем в конструкцию вносятся изменения и дополнения, которые позволяют увеличить величины действующих эксплуатационных нагрузок. Напряженно-деформированное состояние таких систем зависит от нагрузок (ремонтные нагрузки), при которых проводят реконструкцию, от способа усиления при которых могут возникать или не возникать монтажные напряжения, и от действующих после ремонта эксплуатационных нагрузок. В статье представлен метод расчета напряженно-деформированного состояния стержневой системы при усилении с возникновением монтажных напряжений.

В настоящее время теоретическому и экспериментальному исследованию усиления конструкций эксплуатируемых сооружений посвящены многие публикации. Например, вопросы проектирования и расчета усиливаемых металлических конструкций рассмотрены в статьях [1–4], а для железобетонных конструкций в [5–14]. Теоретические и экспериментальные исследования усиления сооружений с применением композитных материалов опубликованы в [11; 15–19]. В [1; 10; 20; 21] приведены результаты численных расчетов указанных исследований.

Отметим, что в настоящее время вопросы определения монтажных напряжений и их влияние на напряженно-деформированное состояние усиленных под нагрузкой конструкций в достаточной мере не изучены. В частности, в отмеченных выше публикациях возможности возникновения и влияния монтажных напряжений на напряженно-деформированное состояние усиленных под нагрузкой строительных конструкций не рассмотрены. К одной из первых работ, в которой обращается внимание на особенности учета таких напряжений при усилении конструкций, относится монография И.С. Реброва [22]. Однако в ней представлена общая постановка задачи, но не приведены методика и примеры расчетов монтажных сил и напряжений. Исследованию влияния монтажных напряжений на напряженно-деформированное состояние усиливаемых под нагрузкой стержневых систем посвящены публикации [23–25] авторов этой статьи. В этих работах описан метод определения монтажных напряжений, приведены данные расчетов, показывающие влияние этих напряжений на несущую способность усиленных под нагрузкой конструкций. Показано, что учет особенностей монтажа при усилении нагруженных стержневых конструкций под нагрузкой оказывает значительное влияние на перераспределение напряжений между элементами конструкции.

Особенность использованного в [23–25] способа определения монтажных напряжений состоит в том, что для расчета необходимо предварительно находить перемещения рассматриваемой системы от единичных сосредоточенных сил. Отметим, что алгоритм расчета монтажных напряжений с использованием перемещений от единичных нагрузок не является достаточно простым и применять этот метод, видимо, целесообразно при решении линейных задач.

В связи с этим представляется актуальной разработка сравнительно простого метода определения монтажных напряжений, в котором не используются перемещения от единичных сил, а деформации могут быть и нелинейными.

Цель исследования — разработка модели и метода определения монтажных перемещений и напряжений в стержневых системах, в которых при решении задачи не используются формулы для перемещений стержневой системы от единичных сосредоточенных нагрузок.

Задачи исследования:

➤ построение математической модели и метода определения монтажных перемещений и напряжений в стержневых конструкциях, усиленных в деформированном состоянии;

➤ иллюстрация достоверности и точности получаемых по этому методу результатов на основе тестовых численных расчетов и их сравнения с данными, опубликованными в научной литературе.

2. Метод расчета

Изложим вариационный метод определения монтажных перемещений и напряжений, возникающих при усилении стержневой системы, элементы которых деформированы и имеют ремонтные¹ (начальные) напряжения и деформации.

Полагаем, что возникающие в стержнях перемещения и деформации являются малыми. Для определения их напряженно-деформированного состояния используем теорию стержней с учетом поперечных сдвигов [25].

Введем глобальную $0\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ и локальную $0xyz$ декартовы системы координат. Начало локальной системы координат выбирается в поперечном сечении стержня, в котором вычисляются перемещения, деформации и напряжения. Ось $0x$ направляется по направлению касательной к продольной оси стержня, а $0y$ и $0z$ располагаются в поперечном сечении.

Для вычисления напряжений σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} и деформации ε_x , γ_{xy} , γ_{xz} введем в глобальной системе координат вектор перемещений $\bar{u}^* = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}^T$ и углов поворота поперечных сечений стержней $\bar{\varphi}^* = \{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}^T$. Эти векторы с компонентами, определенными в локальной системе координат, обозначим $\bar{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ и $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T$. Связь между компонентами указанных векторов описывается формулами

$$\bar{u} = [n]\bar{u}^*, \quad \bar{\varphi} = [n]\bar{\varphi}^*, \quad (1)$$

где $[n]$ — матрица направляющих косинусов:

$$[n] = \begin{bmatrix} \cos(\hat{x}, \hat{\tilde{x}}) & \cos(\hat{x}, \hat{\tilde{y}}) & \cos(\hat{x}, \hat{\tilde{z}}) \\ \cos(\hat{y}, \hat{\tilde{x}}) & \cos(\hat{y}, \hat{\tilde{y}}) & \cos(\hat{y}, \hat{\tilde{z}}) \\ \cos(\hat{z}, \hat{\tilde{x}}) & \cos(\hat{z}, \hat{\tilde{y}}) & \cos(\hat{z}, \hat{\tilde{z}}) \end{bmatrix}.$$

В локальной системе координат деформации вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_1}{dx} - y \frac{d\varphi_3}{dx} + z \frac{d\varphi_2}{dx}, & \gamma_{xy} &= \psi_1(y, z) \left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) - \psi_2(y, z) \frac{d\varphi_1}{dx}, \\ \gamma_{xz} &= \psi_1^*(y, z) \left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) + \psi_2^*(y, z) \frac{d\varphi_1}{dx}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\psi_1(y, z)$, $\psi_2(y, z)$, $\psi_1^*(y, z)$, $\psi_2^*(y, z)$ — функции, зависящие от вида деформации и формы поперечного сечения стержня [23].

¹Термин «ремонтные напряжения» относится к области механики усиления и принят в соответствии с РТМ 212.0116 – 82.

Полагаем, что справедлив закон Гука:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad (3)$$

где E и G — модули упругости и сдвига материала.

Перемещения и углы поворота элементов стержневой конструкции определяются из условия вариационного принципа Лагранжа

$$\delta U - \delta W = 0. \quad (4)$$

Здесь δU — вариация потенциальной энергии стержневой конструкции; δW — элементарная работа внешних сил.

В локальной системе координат

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \int \int (E\varepsilon_x \delta\varepsilon_x + G\gamma_{xy} \delta\gamma_{xy} + G\gamma_{xz} \delta\gamma_{xz}) dA dx, \\ \delta W &= \int (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_3 \delta u_3) dl + \sum_n (F_{1n} \delta u_1(x_n) + F_{2n} \delta u_2(x_n) + F_{3n} \delta u_3(x_n)) + \\ &+ \sum_k (M_{1k} \phi_k(x_k) + M_{2k} \phi_2(x_k) + M_{3k} \phi_3(x_k)), \end{aligned}$$

где l , A — длины и площади поперечных сечений стержней конструкции; l_q — длины участков, на которых действуют распределенные нагрузки $\bar{q}(q_1, q_2, q_3)$; $\bar{F}(F_{1n}, F_{2n}, F_{3n})$ — сосредоточенные силы; $\bar{M}(M_{1k}, M_{2k}, M_{3k})$ — сосредоточенные моменты.

Входящие в (4) величины вычисляются в локальной системе координат $Oxyz$ с использованием формул (1–3).

Для проведения вычислений вводятся векторы перемещений и поворотов, определенные в глобальной системе координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$. На каждом из N участков стержневой системы компоненты векторов $\bar{u}^* = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}^T$ и $\bar{\varphi}^* = \{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}^T$ представляются в виде рядов

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_k^i = \sum_{m=1}^M C_{km}^i f_m(t). \quad (5)$$

Здесь $k = 1, 2, 3$; $i = \overline{1, N}$; C_{km}^i, D_{km}^i — неизвестные постоянные, которые определяются из условия (4); $f_m(t)$ — аппроксимирующие функции, $f_1(t) = 1-t$, $f_2(t) = t$, $f_m(t) = (1-t)t^{m-2}$, $m = \overline{3, M}$; $t = s/l_i$ — безразмерный параметр ($0 \leq t \leq 1$); s — длина продольной оси стержня, отсчитываемая от начала участка ($0 \leq s \leq l_i$); l_i — длина участка стержня с номером i .

Удовлетворяя граничным условиям и используя формулы (2–5), из условия (4) можно получить систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов рядов C_{km}^i, D_{km}^i :

$$[K]\{C\} = \{F\}, \quad (6)$$

где $[K]$ — матрица жесткости стержневой конструкции; $\{C\}$ — вектор неизвестных постоянных; $\{F\}$ — вектор нагрузок.

Решение системы уравнений (6) позволяет определять коэффициенты C_{km}^i , D_{km}^i и, используя приведенные здесь соотношения, вычислить перемещения, деформации и напряжения, возникающие в стержнях.

Изложим расчет напряженно-деформированного состояния нагруженной конструкции при усилении, в которой возникают монтажные напряжения. Этот расчет можно разбить на три этапа:

- 1) определение перемещений, деформаций и напряжений в элементах эксплуатируемой стержневой системы при воздействии начальных (ремонтных) нагрузок;
- 2) вычисление монтажных перемещений и напряжений, возникающих при усилении деформированных и напряженных элементов конструкции;
- 3) расчет конструкции после усиления при действии дополнительных эксплуатационных нагрузок.

На первом этапе на конструкцию действуют ремонтные нагрузки \bar{q}^p , \bar{F}^p , \bar{M}^p . Полагается $\tilde{u}_k^i = \tilde{u}_k^{ip}$, $\tilde{\varphi}_k^i = \tilde{\varphi}_k^{ip}$. Определение перемещений, деформаций и напряжений в стержневой системе осуществляется по приведенным здесь соотношениям с использованием обычных процедур вариационного метода, которые подробно изложены в ряде публикаций [23–25]. В результате этого находятся прогибы \tilde{u}_k^{ip} , углы поворота $\tilde{\varphi}_k^{ip}$, деформации ε_x^p , γ_{xy}^p , γ_{xz}^p и напряжения σ_x^p , τ_{xy}^p , τ_{xz}^p , возникающие от ремонтных (начальных) нагрузок.

На втором этапе расчета вычисляются монтажные перемещения, деформации и напряжения. Возникновение этих величин обусловлено тем, что конструкция усиливается за счет присоединения к деформированным (изогнутым) стержням исходной системы недеформированных усиливающих стержней. Следовательно, первоначально между усиливаемым и усиливающим стержневым элементом имеется некоторый зазор. Соединение этих элементов осуществляется с использованием стяжных устройств так, чтобы между усиливаемым и усиливающим стержнями не возникало зазора. При этом стержневая система от воздействия стяжных устройств деформируется, в ней возникают монтажные перемещения и напряжения.

При расчете монтажных напряжений может использоваться метод, основанный на предварительном определении монтажных сил, под действием которых ликвидируется зазор между соединяемыми элементами [23–25]. Эти силы затем вносятся в выражение для элементарной работы внешних сил δW , и в вариационной постановке решается задача определения монтажных перемещений и напряжений.

Изложим метод вычисления монтажных перемещений деформаций и напряжений, в котором не требуется предварительно определять монтажные силы.

Введем в глобальной системе координат вектор-функции, описывающие зазоры между усиливаемым и усиливающим элементами:

$$\bar{f}^m(s) = f_1^m(s)\bar{i}^* + f_2^m(s)\bar{j}^* + f_3^m(s)\bar{k}^*, \quad (7)$$

где \bar{i}^* , \bar{j}^* , \bar{k}^* — орты, $f_1^m(s)$, $f_2^m(s)$, $f_3^m(s)$ — расстояния между деформированными и недеформированными стержнями на участках усиления с номерами $m = m_1, m_2, \dots, m_n$. Обозначим через $\bar{u}_D^m(s) = \{ \tilde{u}_{1D}^m, \tilde{u}_{2D}^m, \tilde{u}_{3D}^m \}^T$ и $\bar{u}_N^m(s) = \{ \tilde{u}_{1N}^m, \tilde{u}_{2N}^m, \tilde{u}_{3N}^m \}^T$ перемещения, которые возникают соответственно в деформированных и недеформированных элементах при монтажном усилении. Чтобы между усиливаемым и усиливающим стержнями не возникало зазора, должны выполняться условия:

$$\bar{u}_N^m(s) = \bar{f}^m(s) + \bar{u}_D^m(s), \quad m = m_1, m_2, \dots, m_n. \quad (8)$$

В скалярном виде эта связь записывается следующим образом:

$$\tilde{u}_{1N}^m(s) = f_1^m(s) + \tilde{u}_{1D}^m(s), \quad \tilde{u}_{2N}^m(s) = f_2^m(s) + \tilde{u}_{2D}^m(s), \quad \tilde{u}_{3N}^m(s) = f_3^m(s) + \tilde{u}_{3D}^m(s). \quad (9)$$

Получается, что для решения задачи необходимо выполнение условия принципа Лагранжа (4) при наложенных на перемещения системы связей (9).

Удовлетворяя наложенным на перемещения стержней связям, можно определить монтажные силы \bar{q}^M , под действием которых ликвидируется зазор между соединяемыми стержнями [23–25] и с учетом \bar{q}^M вычислить монтажные напряжения [23–25]. В этом случае в вариационном уравнении (4)

$$\delta U = \delta U_o + \delta U_m(\bar{u}_N^m(s), \bar{\phi}_N^m(s)), \quad \delta W = \delta W_o + \delta W_m, \quad (10)$$

где δU_o , δU_m — вариации потенциальной энергии исходных и усиливающих элементов стержневых элементов конструкции, δW_o , δW_m — элементарные работы внешних и монтажных сил.

Не вычисляя \bar{q}^M и используя связи (9), исключим функции $\tilde{u}_{1N}^m(s)$ из соотношений для δU . Так как $\delta \bar{f}^m(s) = 0$, то из равенств (9) получается

$$\delta \tilde{u}_{1N}^m(s) = \delta \tilde{u}_{1D}^m(s), \quad \delta \tilde{u}_{2N}^m(s) = \delta \tilde{u}_{2D}^m(s), \quad \delta \tilde{u}_{3N}^m(s) = \delta \tilde{u}_{3D}^m(s). \quad (11)$$

С учетом введенных обозначений для перемещений $\bar{u}_D^m(s)$ усиливаемых стержней и уравнений (9, 10), получим

$$\delta U = \delta U_o + \delta U_m(\bar{u}_D^m(s), \bar{\phi}_N^m(s)), \quad \delta W = \delta W_o + \delta W_m^c(\bar{f}^m(s)). \quad (12)$$

Отметим, что в выражении (11) для δW содержатся функции $\bar{f}^m(s)$, описывающие зазоры между усиливаемым и усиливающим элементами.

При проведении расчетов полагается

$$\tilde{u}_k^i = \tilde{u}_k^{ip} + \tilde{u}_k^{im}, \quad \tilde{\phi}_k^i = \tilde{\phi}_k^{ip} + \tilde{\phi}_k^{im}. \quad (13)$$

Варьируемыми величинами в (13) являются \tilde{u}_k^{im} , $\tilde{\phi}_k^{im}$.

Подставляя формулы (12), (13) в условие (4), можно определить \tilde{u}_k^{im} и $\tilde{\phi}_k^{im}$, которые возникают в исходных элементах стержней при монтажном усилении. После этого, используя (9), можно найти перемещения $\tilde{u}_{1N}^m(s)$ в усиливающих стержнях.

Деформации и напряжения, возникающие в стержневой системе от действия ремонтных (начальных) нагрузок и монтажного усиления, вычисляются с учетом (11).

Для более детального представления основных соотношений и особенностей расчетов на этом этапе изложим описанный метод определения монтажных напряжений в частном случае.

Пусть балка 1 (рис. 1, а) длиной l_1 с площадью поперечного сечения A_1 под действием ремонтных нагрузок деформируется и в ней возникает прогиб $f(x)$. При усилении к ней присоединяется прямолинейная балка 2 (рис. 1) длиной l_2 с площадью поперечного сечения A_2 . Под действием монтажных сил q^M обе балки деформируются, зазор $f(x)$ между ними ликвидируется, они соединяются друг с другом и в дальнейшем деформируются как единое целое.

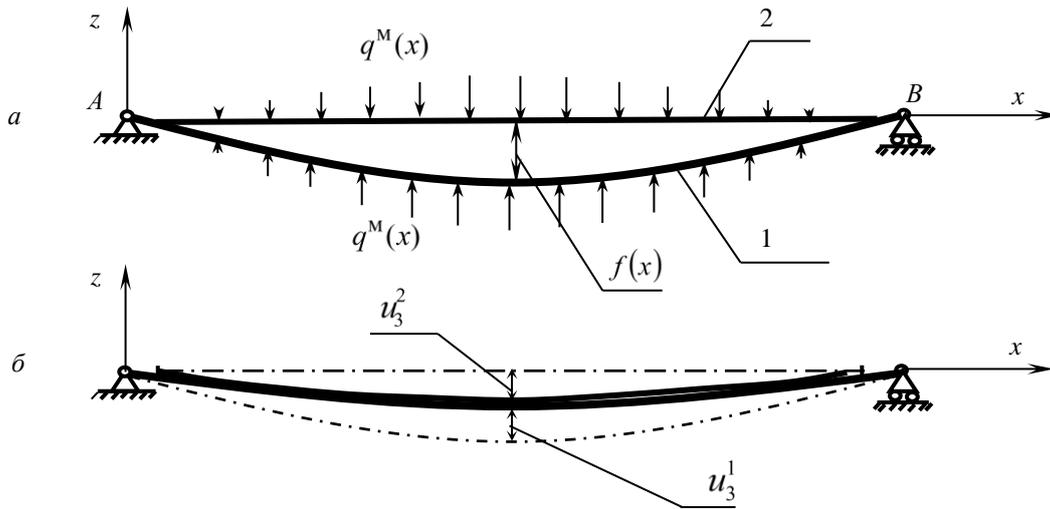


Рис. 1. Схема усиления деформированного стержня
 И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым
Figure. 1. Model of strengthening a deformed bar
 S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

В данном случае в прямолинейных стержнях возникает деформация изгиба в плоскости, следовательно, $\tilde{u}_1=0, \tilde{u}_2=0, \tilde{\varphi}_1=0, \tilde{\varphi}_3=0$ и можно считать, что $\bar{u}^* = \bar{u}, \bar{\varphi}^* = \bar{\varphi}$. Полагая $s = x, u_3^1(x) = \tilde{u}_{1D}^1(x), u_3^2(x) = \tilde{u}_{1D}^2(x)$, условие соединения балок (9) при помощи монтажных сил можно записать в следующем виде:

$$u_3^2 = f(x) + u_3^1. \tag{14}$$

Из этого уравнения следует

$$\delta u_3^2 = \delta u_3^1. \tag{15}$$

Отметим, что под действием монтажных сил q^M балки должны сблизиться. Величины q^M заранее не известны. Чтобы исключить дополнительную процедуру определения q^M , силы q^M в условие (4) не вводятся, а вместо этого учитываются связь (14) и равенство (15).

Используя соотношений (2–4), (12), (13), находим

$$\delta U_o = \int_{l_1} \int_{A_1} \left\{ E \left(z \frac{d\phi_2^1}{dx} \right) \left(z \frac{d\delta\phi_2^1}{dx} \right) + G \psi_1^* \left(\frac{du_3^1}{dx} + \phi_2^1 \right) \psi_1^* \left(\frac{d\delta u_3^1}{dx} + \delta\phi_2^1 \right) \right\} dA dx, \tag{16}$$

$$\delta U_M = \int_{l_2} \int_{A_2} \left\{ E \left(z \frac{d\phi_2^2}{dx} \right) \left(z \frac{d\delta\phi_2^2}{dx} \right) + G \psi_1^* \left(\frac{du_3^1}{dx} + \phi_2^2 \right) \psi_1^* \left(\frac{d\delta u_3^1}{dx} + \delta\phi_2^2 \right) \right\} dA dx. \tag{17}$$

$$\delta W = - \int_{l_2} \int_{A_2} G \psi_1^{*2} \left[\frac{df(x)}{dx} \left(\frac{d\delta u_3^1}{dx} \right) + \frac{df(x)}{dx} \delta\phi_2^2 \right] dA dx. \tag{18}$$

Получилось, что при таком способе учета наложенных связей элементарная работа внешних сил (18) выражается через производную от функции $f(x)$, а не через монтажные силы q^M , под действием которых зазор между балками ликвидируется.

Используя соотношения (16–18), (15), можно определить возникающие при деформировании под действием q^M (рис. 1) монтажные перемещения, деформации и напряжения.

На третьем этапе расчета, после выполненного усиления, к конструкции могут быть приложены дополнительные эксплуатационные нагрузки \bar{q}^y , \bar{F}^y , \bar{M}^y . Определение напряженно-деформированного состояния на этом этапе осуществляется по уже описанной схеме. Полагается

$$\tilde{u}_k^i = \tilde{u}_k^{ip} + \tilde{u}_k^{im} + \tilde{u}_k^{iy}, \quad \tilde{\phi}_k^i = \tilde{\phi}_k^{ip} + \tilde{\phi}_k^{im} + \tilde{\phi}_k^{iy}. \quad (19)$$

Варьируемыми величинами в (19) являются \tilde{u}_k^{iy} , $\tilde{\phi}_k^{iy}$. Из решения вариационной задачи находятся прогибы \tilde{u}_k^{iy} и углы поворота $\tilde{\phi}_k^{iy}$. Затем, с использованием (19), вычисляются деформации и напряжения, возникающие в усиленной стержневой системе.

3. Результаты и обсуждение

С целью иллюстрации точности расчетов по описанному методу, достоверности получаемых данных и особенностей, возникающих при усилении деформированных стержней, приведем примеры расчета двухопорной балки 1 (рис. 2, а).

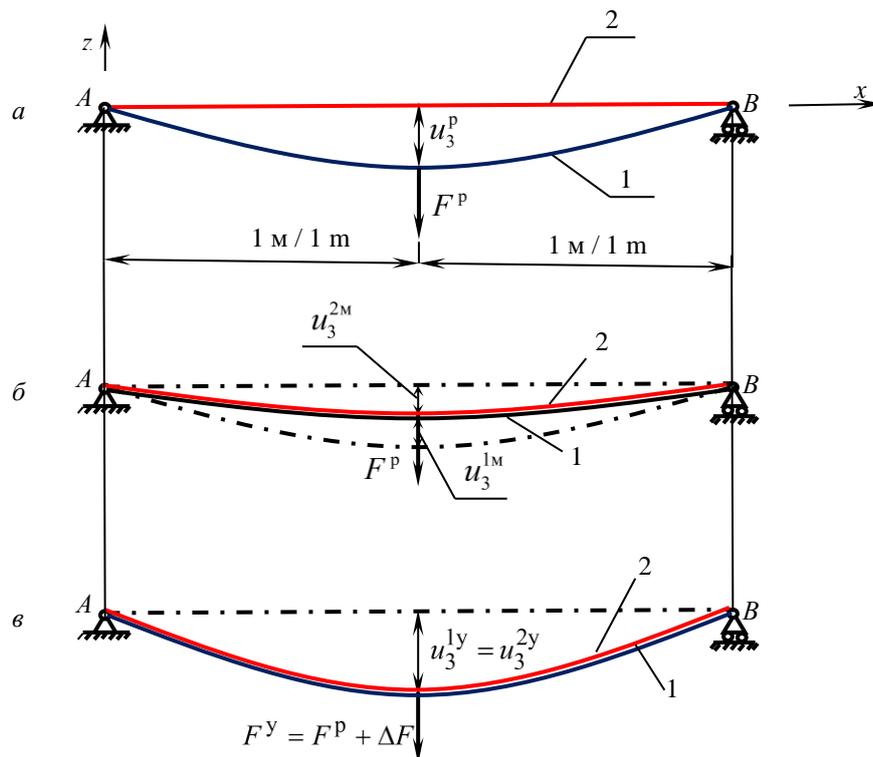


Рис. 2. Схемы деформации балок: а — до усиления; б — после усиления; в — после приложения дополнительной нагрузки ΔF

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Figure. 2. Beam deformation models: а — before strengthening; б — after strengthening; в — after applying additional load ΔF

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

До усиления балка 1 деформируется под действием сосредоточенной силы F^P , в ней возникает прогиб $u_3^P(x)$. При усилении, с использованием стяжных устройств, эта балка и прямолинейный стержневой элемент 2 (рис. 2, а) сближаются друг с другом, и их скрепляют между собой. Зазор $u_3^P(x)$ между балками ликвидируется. При этом возникают монтажные перемещения u_3^{1M} и u_3^{2M} и моменты M_1^M и M_2^M (рис. 2, б). Затем прикладывается дополнительная сосредоточенная нагрузка ΔF (рис. 2, в). Сила, действующая после усиления, становится равной $F^Y = F^P + \Delta F$. В стержнях возникают перемещения u_3^{1Y} , u_3^{2Y} и моменты M_1^Y , M_2^Y .

При расчете полагалось $F^P = 10 \text{ кН}$, $\Delta F = 20 \text{ кН}$, $F^Y = F^P + \Delta F = 30 \text{ кН}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Представлены два варианта расчетов:

1) балка 1 усиливается элементом равной жесткости ($EJ_1 = EJ_2$), обе балки — двутавр № 18 ($J_1 = J_2 = 1290 \text{ см}^4$);

2) балка 1 — двутавр № 33, усиливается двутавром № 18 ($EJ_1 > EJ_2$, $J_1 = 9840 \text{ см}^4$, $J_2 = 1290 \text{ см}^4$).

В табл. 1–4 представлены результаты расчетов, которые иллюстрируют достаточно сложные закономерности изменения перемещений и распределения усилий в стержнях при усилении. В частности, видно, что в случае $EJ_1 = EJ_2$ ($EJ_1/EJ_2 = 1$) изгибающие моменты M_1^Y и M_2^Y в балках равны ($M_1/M_2 = 1$). Возникающий в середине пролета изгибающий момент $M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$ распределяется между балками 1 и 2 пропорционально значениям жесткости балок на изгиб ($EJ_1/EJ_2 = 1$, $M_1^Y/M_2^Y = 1$). В случае же $EJ_1 > EJ_2$ эта закономерность нарушается. Как видно из табл. 4, возникающий в середине пролета изгибающий момент $M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$ распределяется между балками 1 и 2 непропорционально значениям жесткости балок при изгибе ($EJ_1/EJ_2 = 7,63$, $M_1^Y/M_2^Y = 6,2$).

Таблица 1

Перемещения в стержневых элементах 1 и 2 при $EJ_1 = EJ_2$

Метод расчета	№ стержня	$u_{\max}^P, \text{ м}$	$u_{\max}^M, \text{ м}$	$u_{\max}^Y, \text{ м}$
Описанный в этой статье	1	-0,000676	0,000338	-0,00101
	2	0	-0,000338	-0,00101
Описанный в [23]	1	-0,000676	0,000337	-0,00101
	2	0	-0,000337	-0,00101

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Table 1

Displacements in bar elements 1 and 2 when $EJ_1 = EJ_2$

Calculation method	Bar id	$u_{\max}^P, \text{ m}$	$u_{\max}^M, \text{ m}$	$u_{\max}^Y, \text{ m}$
Described in this paper	1	-0.000676	0.000338	-0.00101
	2	0	-0.000338	-0.00101
Described in paper [23]	1	-0.000676	0.000337	-0.00101
	2	0	-0.000337	-0.00101

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

Таблица 2

Усилия в стержневых элементах 1 и 2 при $EJ_1 = EJ_2$

Метод расчета	№ стержня	M_{\max}^P , кН·м	M_{\max}^M , кН·м	M_{\max}^y , кН·м
Описанный в этой статье	1	-5,0	2,5	-7,5
	2	0	-2,5	-7,5
Описанный в [23]	1	-5,0	2,5	-7,5
	2	0	-2,5	-7,5

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Table 2

Forces in bar elements 1 and 2 when $EJ_1 = EJ_2$

Calculation method	Bar id	M_{\max}^P , kN·m	M_{\max}^M , kN·m	M_{\max}^y , kN·m
Described in this paper	1	-5.0	2.5	-7.5
	2	0	-2.5	-7.5
Described in paper [23]	1	-5.0	2.5	-7.5
	2	0	-2.5	-7.5

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

Таблица 3

Перемещения в стержневых элементах 1 и 2 при $EJ_1 > EJ_2$

Метод расчета	№ стержня	u_{\max}^P , м	u_{\max}^M , м	u_{\max}^y , м
Описанный в этой статье	1	-0,000098	0,0000125	-0,000256
	2	0	-0,0000125	-0,000256

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Table 3

Displacements in bar elements 1 and 2 when $EJ_1 > EJ_2$

Calculation method	Bar id	u_{\max}^P , m	u_{\max}^M , m	u_{\max}^y , m
Described in this paper	1	-0.000098	0.0000125	-0.000256
	2	0	-0.0000125	-0.000256

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

Таблица 4

Усилия в стержневых элементах 1 и 2 при $EJ_1 > EJ_2$

Метод расчета	№ стержня	M_{\max}^P , кН·м	M_{\max}^M , кН·м	M_{\max}^y , кН·м
Описанный в этой статье	1	-5,0	0,694	-12,919
	2	0	-0,694	-2,081

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Table 4

Forces in bar elements 1 and 2 when $EJ_1 > EJ_2$

Calculation method	Bar id	M_{\max}^P , kN·m	M_{\max}^M , kN·m	M_{\max}^y , kN·m
Described in this paper	1	-5.0	0.694	-12.919
	2	0	-0.694	-2.081

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

Представленные данные показывают, что даже в рассмотренном достаточно простом случае усиления статически определимой балки возникают особенности, требующие специального исследования. Для статически неопределимых систем закономерности влияния монтажных напряжений на напряженно-деформированное состояние системы являются еще более сложными. Использование же расчетов, в которых учитывается влияние монтажных напряжений на напряженно-деформированное состояние стержней, позволяет существенно увеличить эффективность усиления [24].

Отметим, что результаты, полученные с использованием описанной в данной статье математической модели и метода расчета и представленные в табл. 1 и 2, практически совпадают с данными, полученными по методу, представленному в публикации [23].

4. Заключение

1. Предложены математическая модель и вариационный метод расчета монтажных перемещений и напряжений в стержневых конструкциях, усиленных в деформированном состоянии.

2. Особенность предложенного метода состоит в том, что при его использовании нет необходимости предварительно определять монтажные силы. Эта особенность существенно упрощает решение задачи и позволяет расширить круг исследуемых вопросов, так как снимает некоторые ограничения, заложенные в методиках определения монтажных сил с использованием формул для перемещений от единичных сил.

3. Сравнения полученных в тестовых расчетах величин монтажных перемещений и напряжений с данными, определенными другими методами, иллюстрируют достоверность и высокую точность расчетов. Отмечается, что при монтажном усилении возникают особенности, требующие специального исследования.

Список литературы

1. Liu Y., Gannon L.G. Finite element study of steel beams reinforced while under load // *Engineering Structures*. 2009. Vol. 31. Iss. 11. P. 2630–2642. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.06.011>
2. Durga P.B., Gupta L.M., Pachpor P.D., Deshpande N.V. Strengthening of steel beam around rectangular web openings // *International Journal of Engineering Science and Technology Year*. 2011. Vol. 3. Iss. 2. P. 1130–1136.
3. Воробьев А.В., Фаизов И.Н. Проектирование усиления раскосной фермы // *Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура*. 2012. № 1. С. 162–167. EDN: PMSLXZ
4. Vild M., Bajer M. Strengthening Under Load: The Effect of Preload Magnitudes // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 161. P. 343–348. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.570>
5. Бондаренко С.В., Санжаровский Р.С. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. М.: Стройиздат, 1990. 352 с.
6. Ватин Н.И., Дьячкова А.А., Кишинеvская Е.В., Кузнецов В.Д. Усиление железобетонных конструкций с использованием композиционных материалов на основе углеродных волокон и постнатягаемых стрендов // *Стройпрофиль*. 2009. № 4. С. 20–21. EDN: SBDDGX
7. Кишинеvская Е.В., Ватин Н.И., Кузнецов В.Д. Усиление строительных конструкций с использованием постнатяженного железобетона // *Инженерно-строительный журнал*. 2009. № 3. С. 29–32. EDN: NBMYYF
8. Duarte M.V. Faria. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding // *Engineering Structures*. 2011. Vol. 33. Iss. 6. P. 2025–2043. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.039>
9. Campione G. Load carrying capacity of RC compressed columns strengthened with steel angles and strips // *Engineering Structures*. 2012. Vol. 40. P. 457–465. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.006>
10. Si Larbi A., Agbossou A., Hamelin P. Experimental and numerical investigations about textile-reinforced concrete and hybrid solutions for repairing and/or strengthening reinforced concrete beams // *Composite Structures*. 2013. Vol. 99. P. 152–162. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.12.005>
11. Daugevicius M., Valivonis J., Beinaravicius A., Skuturna T., Budvytis M. Experimental Investigation of the Load Carrying Capacity of Eccentrically Loaded Reinforced Concrete Elements Strengthened with CFRP // *Procedia Engineering*. 2013. No. 57. P. 232–237. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.04.032>
12. Altin S., Koprman Y., Baran M. Strengthening of RC walls using externally bonding of steel strips // *Engineering Structures*. 2013. Vol. 49. Iss. 3. P. 686–695. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.022>

13. Choi S.H., Hwang J.H., Han S.J., Joo H.E., Yun H. Do, Kim K.S. Seismic performance assessments of RC frame structures strengthened by external precast wall panel // *Applied Science*. 2020. Vol. 10. Iss. 5. <https://doi.org/10.3390/app10051749>
14. Neverov A.N., Truntov P.S., Ketsko E.S., Rimshin V.I. Calculating the Strengthening of Construction Structures Before the Reconstruction of the Building // *Proceedings of MPCPE 2021. Lecture Notes in Civil Engineering*. Vol. 182. P. 173–179. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_14
15. Peng G., Xianglin G., Mosallam A.S. Flexural behavior of preloaded reinforced concrete beams strengthened by prestressed CFRP laminates // *Composite Structures*. 2016. Vol. 157. P. 33–50. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.08.013>
16. Kuzina E., Rimshin V. Strengthening of concrete beams with the use of carbon fiber // *Springer International Publishing*. 2019. Vol. 2. P. 911–919. https://doi.org/10.1007/978-3-030-19868-8_90
17. Фролов К.Е. Экспериментальные исследования железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных композитными материалами // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 3. С. 237–242. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-237-242>
18. Al-Ghazawi O., Al-Rousan R.Z. Response of Reinforced Concrete Slabs Strengthened with CFRP // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2020. Vol. 13. Iss. 6. P. 125–129. <https://doi.org/10.25103/jestr.136.17>
19. Singkh Y., Singkh K. Applications of Fiber Reinforced Polymer Laminates in Strengthening of Structures // *ITCSD 2020: 3rd International Conference on Innovative Technologies for Clean and Sustainable Development. Part of the RILEM Bookseries book series*. 2021. Vol. 29. P. 263–271. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51485-3_17
20. Georgiu E., Kyriakides N., Christis Z. Correction to: Numerical simulation of RC frames infilled with RC walls for seismic strengthening of existing structures // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2022. Vol. 20. Iss. 5. P. 2369–2398. <https://doi.org/10.1007/s10518-022-01332-z>
21. Abdelrahman A. Strengthening of Concrete Structures Unified Design Approach, Numerical Examples and Case Studies. Springer Singapore, 2023. 174 p.
22. Ребров И.С. Усиление стержневых металлических конструкций. Л.: Стройиздат, 1988. 288 с. URL: <https://djuvonline.file/BuIOUzU8VpXCf> (дата обращения: 22.01.2024).
23. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н., Абрагим Х.А. Влияние монтажных сил на несущую способность усиливаемых стержневых систем // *Вестник Казанского технологического университета*. 2011. № 10. С. 116–124. EDN: NXAIQJ
24. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Усиление нагруженных стержневых конструкций с учетом влияния ремонтных и монтажных сил // *Инженерно-строительный журнал*. 2012. № 1 (27). С. 98–105. EDN: ORDEER
25. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Вариационный метод расчета прямолинейных и криволинейных тонкостенных стержней: монография. Казань: КНИТУ, 2016. 144 с. URL: <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788219547.html> (дата обращения: 22.01.2024).

References

1. Liu Y., Gannon L.G. Finite element study of steel beams reinforced while under load. *Engineering Structures*. 2009;31(11):2630–2642. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.06.011>
2. Durga P.B., Gupta L.M., Pachpor P.D., Deshpande N.V. Deshpande. Strengthening of steel beam around rectangular web openings. *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2011;3(2):1130–1136.
3. Vorobyev A.V., Faizov I.N. Girder frame reinforcement design. *Herald of PSTU. Construction and architecture*. 2012;1:162–167. (In Russ.) EDN: PMSLXZ
4. Vild M., Bajer M. Strengthening Under Load: The Effect of Preload Magnitudes. *Procedia Engineering*. 2016;161:343–348. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.570>
5. Bondarenko S.V., Sanzharovskiy R.S. *Strengthening of reinforced concrete structures in the reconstruction of buildings*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1990. (In Russ.)
6. Vatin N.I., Dyachkova A.A., Kishinevskaya YE.V., Kuznetsov V.D. Strengthening of reinforced concrete structures using composite materials based on carbon fibers and post-stressed strands. *Stroyprofil*. 2009;4:20–21. (In Russ.) EDN: SBDDGX
7. Kishinevskaya Ye.V., Vatin N.I., Kuznetsov V.D. Strengthening building structures using post-stressed concrete. *Magazine of civil engineering*. 2009;3:29–32. (In Russ.) EDN: NBMYYF
8. Duarte M.V. Faria. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding. *Engineering Structures*. 2011;33(6):2025–2043. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.039>
9. Campione G. Load carrying capacity of RC compressed columns strengthened with steel angles and strips. *Engineering Structures*. 2012;40:457–465. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.006>

10. Si Larbi A., Agbossou A., Hamelin P. Experimental and numerical investigations about textile-reinforced concrete and hybrid solutions for repairing and/or strengthening reinforced concrete beams. *Composite Structures*. 2013;99:152–162. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.12.005>
11. Daugevicius M., Valivonis J., Beinaravicius A., Skuturna T., Budvytis M. Experimental Investigation of the Load Carrying Capacity of Eccentrically Loaded Reinforced Concrete Elements Strengthened with CFRP. *Procedia Engineering*. 2013;57:232–237. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.04.032>
12. Altin S., Kopraran Y., Baran M. Strengthening of RC walls using externally bonding of steel strips. *Engineering Structures*. 2013;49(3):686–695. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.022>
13. Choi S.H., Hwang J.H., Han S.J., Joo H.E., Yun H. Do, Kim K.S. Seismic performance assessments of RC frame structures strengthened by external precast wall panel. *Applied Science*. 2020;10(5):26. <https://doi.org/10.3390/app10051749>
14. Neverov A.N., Truntov P.S., Ketsko E.S., Rimshin V.I. Calculating the Strengthening of Construction Structures Before the Reconstruction of the Building. *Proceedings of MPCPE 2021. Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021;182:173–179. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_14
15. Peng G., Xianglin G., Mosallam A.S. Flexural behavior of preloaded reinforced concrete beams strengthened by prestressed CFRP laminates. *Composite Structures*. 2016;157:33–50. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.08.013>
16. Kuzina E., Rimshin V. Strengthening of concrete beams with the use of carbon fiber. *Springer International Publishing*. 2019;2:911–919. https://doi.org/10.1007/978-3-030-19868-8_90
17. Frolov K.E. Experimental studies of reinforced concrete structures of hydraulic structures reinforced with composite materials. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(3):237–242. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-237-242>
18. Al-Ghazawi O., Al-Rousan R.Z. Response of Reinforced Concrete Slabs Strengthened with CFRP. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2020;13(6):125–129. <https://doi.org/10.25103/jestr.136.17>
19. Singkh Y, Singkh K. Applications of Fiber Reinforced Polymer Laminates in Strengthening of Structures. *ITCSD 2020: 3rd International Conference on Innovative Technologies for Clean and Sustainable Development. Part of the RILEM Bookseries book series*. 2020;29:263–271. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51485-3_17
20. Georgiu E., Kyriakides N., Christis Z. Correction to: Numerical simulation of RC frames infilled with RC walls for seismic strengthening of existing structures. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2022;20(5):2369–2398. <https://doi.org/10.1007/s10518-022-01332-z>
21. Abdelrahman A. *Strengthening of Concrete Structures. Unified Design Approach, Numerical Examples and Case Studies*. Springer Singapore, 2023.
22. Rebrov I.S. *Strengthening of beam metal structures*. Leningrad: Stroyizdat Publ.; 1988. (In Russ.) Available from: <https://djuv.online/file/BuIOUzU8VpXCf> (accessed: 22.01.2024).
23. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N., Abragim KH.A. Influence of mounting forces on the bearing capacity of strengthened rod systems. *Herald of Technological University*. 2011;10:116–124. (In Russ.) EDN: NXAIQJ
24. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. Strengthening of the loaded beam structures taking into account repair and assembly forces. *Magazine of civil engineering*. 2012;1(27):98–105. (In Russ.) EDN: ORDEER
25. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. *Variational method for calculating rectilinear and curvilinear thin-walled rods: monograph*. Kazan: KNITU Publ.; 2016. (In Russ.) Available from: <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788219547.html> (accessed: 22.01.2024).

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-211-219

UDC 539:691.32

EDN: LGAGVT

Research article / Научная статья

Stability Analysis and Comparison of Conventional Concrete and Expanded Polystyrene Concrete Spherical Shells

Issaias A. Sereke^{1,2}, Marina I. Rynkovskaya¹, Habte Y. Damir^{1,2}¹RUDN University, Moscow, Russia²Eritrea Institute of Technology, Asmara, Eritrea

✉ 1042195035@rudn.ru

Article history

Received: February 2, 2024

Revised: April 3, 2024

Accepted: April 10, 2024

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. The main purpose of this study is to investigate the buckling behavior of a light weight expanded polystyrene concrete (EPSC) spherical shell and compare it to an equivalent concrete shell. Such behavior of EPSC is not yet studied and the material has not been implemented in shell structures. The methods adopted are numerical linear buckling analysis (LBA), material non-linear analysis (MNA) and Geometric and material non-linear analysis with imperfection (GMNIA) for both concrete and EPSC spherical shells of the same geometric parameters in ABAQUS software. From the results of the study, the elastic and plastic buckling capacities of EPSC shell and the buckling resistance obtained from GMNIA method are smaller than that of equivalent concrete shell. The maximum displacements of the EPSC shell corresponding to the GMNIA method, with the application of first eigen and actual loads are greater than the concrete shell by small millimeters. Buckling capacities of EPSC shell obtained from the three methods exceed the actual external uniform pressure (self-weight of EPSC and actual snow load), and the displacement results are reasonable enough to ensure that EPSC spherical shells are stable and could be practically applicable.

Keywords: expanded polystyrene concrete, stability, buckling analysis, geometric imperfection

For citation

Sereke I.A., Rynkovskaya M.I., Damir H.Y. Stability analysis and comparison of conventional concrete and expanded polystyrene concrete spherical shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3): 211–219. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-211-219>

Issaias A. Sereke, PhD Student of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russia; ORCID: 0009-0003-4351-8205; E-mail: 1042195035@rudn.ru

Marina I. Rynkovskaya, Dr. of Structural Mechanics, Associate professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 9184-7432; ORCID: 0000-0003-2206-2563; E-mail: rynkovskaya-mi@rudn.ru

Habte Y. Damir, PhD Student of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russia; Lecturer, Eritrea Institute of Technology, Asmara Eritrea; ORCID: 0000-0002-7275-6750; E-mail: khabte-y@rudn.ru

© Sereke I.A., Rynkovskaya M.I., Damir H.Y., 2024

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Анализ устойчивости и сравнение сферических оболочек из обычного бетона и пенополистиролбетона

И.А. Сереке^{1,2}✉, М.И. Рынковская¹, Х.Ю. Дамир^{1,2}

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Эритрейский технологический институт, Асмэра, Эритрея

✉ 1042195035@rudn.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 2 февраля 2024 г.

Доработана: 3 апреля 2024 г.

Принята к публикации: 10 апреля 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Исследовано поведение сферической оболочки из легкого пенополистиролбетона (EPSC) при изгибе и проведено сравнение ее с аналогичной бетонной оболочкой. Такое поведение EPSC еще не изучено, и этот материал не применялся в конструкциях оболочек. В качестве методов были использованы численный анализ линейной потери устойчивости (LBA), нелинейный анализ материалов (MNA) и геометрический нелинейный анализ материалов с учетом дефектов (GMNIA) как для бетонных, так и для EPSC сферических оболочек с одинаковыми геометрическими параметрами в программном обеспечении ABAQUS. Согласно результатам исследования, упругие и пластические свойства оболочки EPSC на изгиб и сопротивление изгибу, полученные методом GMNIA, меньше, чем у аналогичной бетонной оболочки. Максимальные перемещения оболочки EPSC, соответствующие методу GMNIA, при приложении первых собственных и фактических нагрузок превышают размеры бетонной оболочки на несколько миллиметров. Способность оболочки EPSC к потере устойчивости, полученная с помощью трех методов, превышает фактическое внешнее равномерное давление (собственный вес EPSC и фактическая снеговая нагрузка), а результаты смещения являются достаточно обоснованными, чтобы гарантировать стабильность сферических оболочек EPSC и возможность их практического применения.

Ключевые слова: пенополистиролбетон, устойчивость, анализ потери устойчивости, геометрическое несовершенство

Для цитирования

Sereke I.A., Rynkovskaya M.I., Damir H.Y. Stability analysis and comparison of conventional concrete and expanded polystyrene concrete spherical shells // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 3. С. 211–219. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-211-219>

1. Introduction

1.1. Buckling of spherical shells

Several research works have been conducted on the stability issues of spherical shells. The theory of shell buckling has originated from Euler's formula of critical load determination for a straight bar. Following this, a first theory of linear buckling of spherical shells was developed by Zoelly in 1915 where the elastic critical buckling load of complete spherical shells under external pressure was determined according to the formula [1]:

Сереке Иссайас Андай, аспирант департамента строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; ORCID: 0009-0003-4351-8205; E-mail: 1042195035@rudn.ru

Рынковская Марина Игоревна, кандидат технических наук, доцент департамента строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 9184-7432; ORCID: 0000-0003-2206-2563; E-mail: rynkovskaya-mi@rudn.ru

Дамир Хабте Йоханнес, аспирант департамента строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; преподаватель, Эритрейский технологический институт, Асмэра, Эритрея; ORCID: 0000-0002-7275-6750; E-mail khabte-y@rudn.ru

$$P_z = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot E \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2, \quad (1)$$

where t — thickness of the shell, R — radius of curvature of the shell, E — modulus of elasticity, ν — Poisson's ratio.

In most codes of design equation (1) is commonly taken as a reference load of buckling for elastic spheres. However, most experimental studies reveal that the actual buckling capacity is a fraction of the amount obtained from equation (1). External disturbances and imperfections whose magnitude can not be predicted at the design stage, are the main factors for the decreased capacity of the buckling load. The load carrying capacity of perfect shells is greater than shells that show deviations in material behavior, geometry and boundary conditions [2–6]. Numerical concepts for load carrying capability of shells with imperfection are based on perfect shell models and on the postcritical equilibrium paths which are estimated analytically. This idea was established first by Koiter [7]. The post buckling theory of Koiter describes the static non-linear load carrying behavior of a structure at the buckling initial stages. The post buckling analysis gives information about the post buckling path at the initial stage, the stability of the corresponding equilibrium state and the way geometric imperfections influence the load bearing behavior of a structure. Thus, in the computation of buckling capacity of a structure, it is necessary to apply reduction factors in consideration to the influence of imperfections and effects from plastic behavior of a material.

A wide research on the buckling behavior of spherical shells became possible with the enhancement of computer technologies and finite element method. In numerical simulation, a method of construction for the relationship between the worst imperfection with its amplitude and the limit load are applied [8]. In this paper, a numerical simulation of the elastic, perfectly plastic and imperfect spherical shells of conventional concrete and EPSC are presented. The results are compared each other for investigating the possible application of EPSC in spherical domes.

1.2. Cement concrete

Cement concrete is one of the popular structural materials. Cement concrete is isotropic, homogeneous and elastic material of construction. The main ingredients of concrete are cement, sand, Coarse aggregate and water [9]. Concrete is strong in compression but weak in tension and in locations of a structure where there is tension, steel reinforcement is provided to give tensile strength to the structure. Strength of cement concrete increases with increasing hydration of cement. High strength concrete has a modulus of elasticity ranging from 14-41MPa [10] and generally a Poisson's ratio varying between 0.15 for high strength concrete and 0.22 for low strength [11; 12].

Concrete structural members have big cross-sections resulting from the high self-weight of the material. Coarse aggregate and sand are the main ingredients for the increased weight of concrete. Concrete's weight can be reduced by using lightweight aggregates such as cinders, pumice, shales, EPS... In this paper stability of a lightweight concrete, which is expanded polystyrene concrete (EPSC) is going to be investigated. It is produced by partially or totally replacing aggregates with expanded polystyrene (EPS) [13–16].

Expanded polystyrene concrete has a lesser density than conventional concrete with range of densities 800-200 kg/m³. The density and compressive strength of EPSC decrease with increasing amount of EPS used in the concrete mix [17–20]. EPSC has been utilized in several applications like curtain walls, pavements and load bearing blocks [21]. However, its application, stability and strength capacity in shell structures has not yet studied. Therefore, this research will focus on:

- Studying the properties of EPSC to be used for the current study
- Analyzing the stability of conventional concrete and EPSC spherical shells considering elastic critical buckling, plastic buckling and buckling with geometric imperfection and material non-linearity. Moreover, the shells' displacements are also analyzed numerically in ABAQUS considering the same geometric data for both EPSC and concrete shells.

2. Methods

2.1. Experimental work



Figure 1. Testing for compressive strength
Source: photo by I.A. Sereke

In a 1:2:3 proportion by volume, 16.67 % of sand and 33.33 % of coarse aggregate were replaced by EPS to produce expanded polystyrene concrete. By using 0.6 water cement ratio, ingredients cement, sand, coarse aggregate water and EPS were thoroughly mixed. A flowing and homogeneous EPSC was then obtained and filled into three cubic molds of dimension 150 mm×150 mm×150 mm for testing at a laboratory. After demolding, curing and drying the specimens' compressive strength testing was followed as shown in Figure 1.

The mass, compressive strength and density were recorded as shown in Table 1.

Table 1

EPSC properties from experiment

Cubic EPSC No.	Measured mass, kg	Density, kg/m ³	Compressive force, kN	Compressive strength, MPa
1	7.15	2120	235	10.44
2	6.948	2058.66	207	9.2
3	6.898	2043.85	198	8.8

Source: made by I.A. Sereke

The computed average values of density and compressive strength are 2074.17 kg/m³ and 9.48 MPa respectively.

The elastic modulus of EPSC is computed from the formula in equation (2), [22]: and obtained as 11.18GPa:

$$E_c = w_c^{1.5} \cdot 0.043 \sqrt{f_c'}, \quad (2)$$

where w_c — density ranging from 1440–22560 kg/m³, E_c — modulus of elasticity in MPa, f_c' — compressive strength of a cylinder specimen in MPa.

The cylinder compressive strength is computed from equation (3) [23].

$$\text{Cylinder strength} = 0.8 \times \text{cube strength}. \quad (3)$$

In the stability analysis, a cylinder strength of conventional concrete C20, unit weight of concrete 24 kN/m³, Poisson's ratio 0.2 and corresponding modulus of elasticity 22.61 GPa are adopted. Similarly, for EPSC, a unit weight of 20.74 kN/m³ a cylinder strength of 7.58 MPa, modulus of elasticity 11.18 GPa and a Poisson's ratio of 0.22 are used.

2.2. Numerical methods of analysis

Application of finite element method with advanced computer programs accelerated research works, that shells of different material, geometry, loading or support condition were able to be analyzed with high

accuracy and reliability. In this study linear buckling analysis (LBA), material non-linear analysis (MNA) and geometric and material non-linear analysis with imperfection (GMNIA) are applied for both concrete and EPSC spherical shells. For analysis and comparison, a spherical shell with radius of curvature 35 m, half central angle 55° , base radius 28.67 m, thickness 0.15 m and rise of 14.92 m is considered as shown in Figure 2. The buckling pressures are compared to the external pressures coming from the respective self-weights and assumed snow load of 1.5 kN/m^2 .

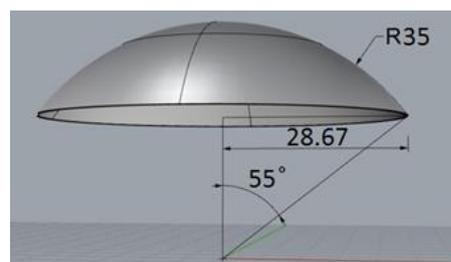


Figure 2. Shell geometric details
Source: made by Sereke I.A.

2.2.1. Linear buckling analysis

Elastic critical buckling load PR_{cr} of a shell is determined with eigenvalue linear buckling analysis where, the shell is considered as elastic without imperfection [24–26]. This kind of analysis is necessary for arbitrarily loaded spherical shells, and the critical buckling load obtained is going to be applied for further analysis in the estimation of ultimate buckling load. LBA is based on the bending theory of elastic thin-walled shells considering linear material characteristics and small deflections. At the value of the elastic critical pressure which is the lowest eigen value, elastic linear stability analysis gets reduced and the shell ceases to be stable.

2.2.2. Material non-linear analysis

The plastic resistance PR_{pl} of a shell is determined by using material non-linear analysis (MNA). It is based on the bending theory of perfect shell structures; assumption of small deflections and a nonlinear elastic-plastic material law is adopted. MNA is used to make an estimation of the plastic resistance while checking the plastic limit state (LS1), cyclic plasticity (LS2) and the ultimate limit state of buckling (LS3) [24–27]. The plastic resistance in conjunction with the elastic critical resistance is used to determine the relative slenderness of an entire spherical shell.

2.2.3. Geometric and material non-linear analysis with imperfection

A numerical analysis that considers geometric and material nonlinearity with imperfections (GMNIA) is the one that currently gives the most accurate result of the buckling capacity of a structure. It is based on the non-linear elastic-plastic material characteristics and theory of large deflections. Geometric imperfections are considered in determining a structure's elastic plastic design capacity [24–27]. The shape deviations from the ideal geometry may be caused due to shortage of sphericity happening during casting. Imperfections that correspond to the first two buckling modes of an analyzed system may also be considered. Similarly, the material homogeneity is influenced by creep, cracking and plasticity of the materials. [28]. For this study the first eigen buckling form of the analyzed shell with a randomly selected imperfection amplitude of 0.1 is considered in the GMNIA method of analysis.

3. Results and Discussion

3.1. Results of LBA analysis

The elastic critical buckling loads for concrete and EPSC corresponding to the first Eigen mode are 469.83 kN/m^2 and 244.19 kN/m^2 respectively. Computation of linear buckling analysis is performed considering the elastic modulus and Poisson's ratio of the respective materials. Accordingly, the critical resistance of EPSC is 1.92 times lower than that of concrete. Since the obtained elastic critical buckling

resistances is greater than summation of EPSC shell's self-weight (3.05 kN/m^2) and assumed snow load of (1.5 kN/m^2), the shell will continue elastically stable.

3.2. MNA results

The plastic buckling resistance of concrete and EPSC spherical shells is computed from material nonlinear analysis (MNA). In this analysis yield strength of the respective materials is introduced while neglecting strain amplification. The plastic load capacity of concrete and EPSC from the numerical analysis are obtained as 171.43 kN/m^2 and 64.97 kN/m^2 respectively. Similarly, the corresponding maximum plastic displacements are 0.062 m for concrete and 0.045 m for EPSC as shown in Figures 3 and 4. EPSC's plastic load capacity is 2.63 times smaller than that of concrete. Nevertheless, the plastic load resistance is greater than the external uniform load, indicating that the load capacity of the EPSC shell will not get exhausted.

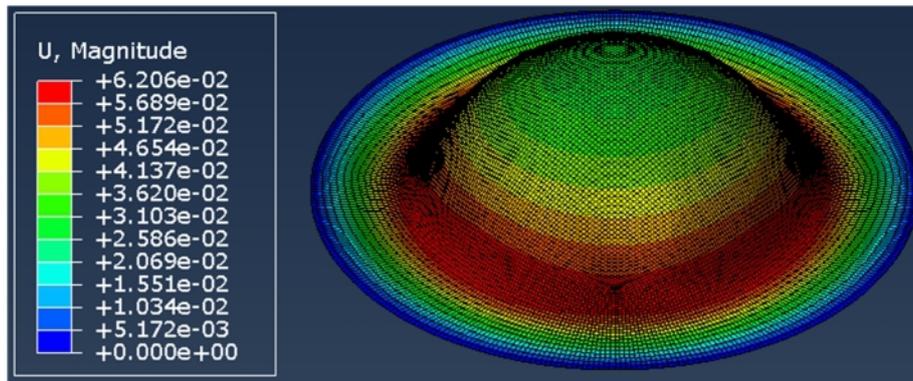


Figure 3. Maximum plastic deformation of concrete shell from MNA method
S o u r c e: made by I.A. Sereke

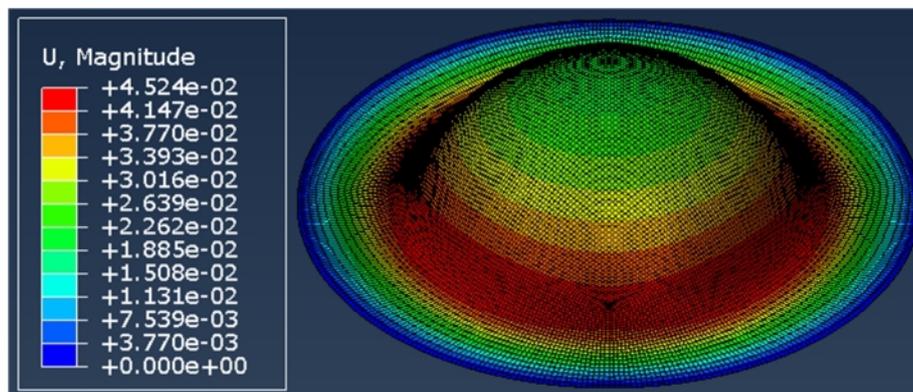


Figure 4. Maximum plastic deformation of EPSC shell from MNA method
S o u r c e: made by I.A. Sereke

3.3. GMNIA results

The geometric and material nonlinear analysis was started by imposing a first buckling form of imperfection of the analyzed shell and scaling it to a randomly selected amplitude of 0.1. The ultimate level of the buckling capacity is considered as the load value at which a complete plasticization is occurring. This value of buckling resistance is obtained as 27.38 kN/m^2 for concrete and 10.87 kN/m^2 for EPSC with EPSC's buckling resistance 2.5 times smaller than concrete's resistance. Nevertheless, it is greater than the actual external pressure. In addition, the corresponding maximum displacements for concrete and EPSC are

computed as 2.27 m and 2.29 m for both concrete and EPSC shells respectively as shown in Figures 5 and 6. These displacements are very high however, they are computed when the shells are loaded to the first Eigenvalue pressures 469.83 kN/m² and 244.19 kN/m². These displacement values will significantly get reduced when the shells are loaded with their respective actual external pressures, resulting to 5.1 mm and 8.9 mm for concrete and EPSC shells respectively as depicted from Figures 7 and 8.

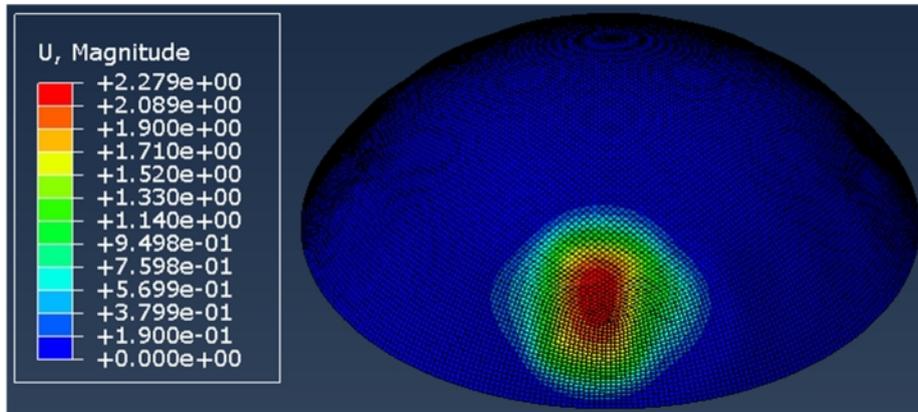


Figure 5. Maximum displacement of concrete shell from GMNIA method
 Source: made by I.A. Sereke

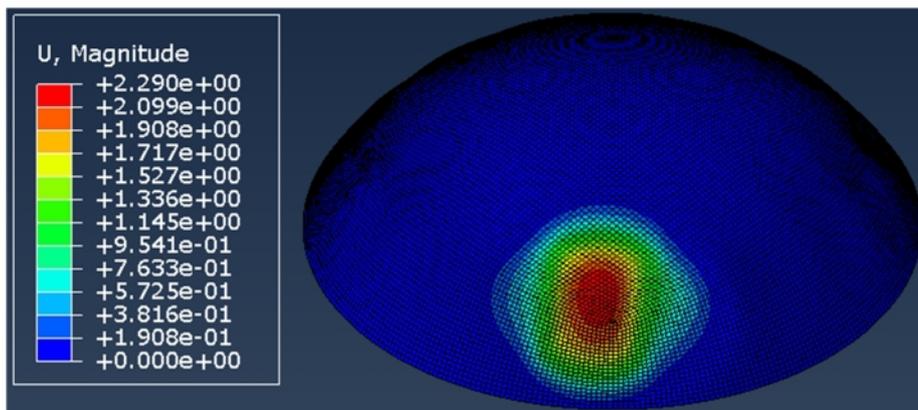


Figure 6. Maximum displacement of EPSC shell from GMNIA method
 Source: made by I.A. Sereke

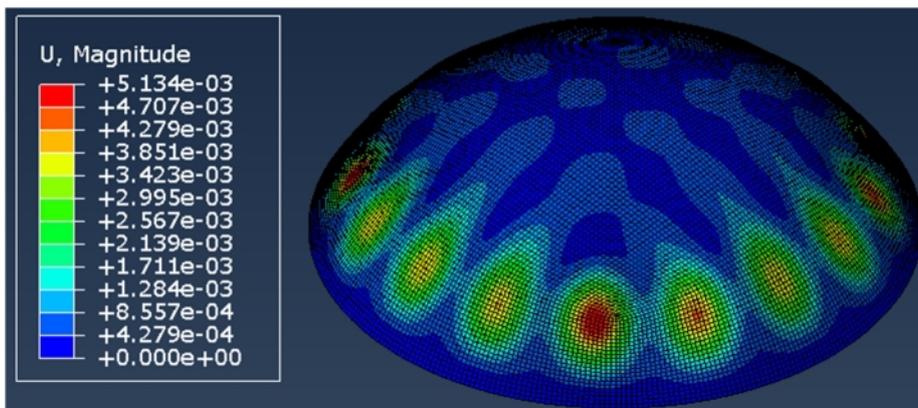


Figure 7. Displacement of concrete shell under the actual load
 Source: made by I.A. Sereke

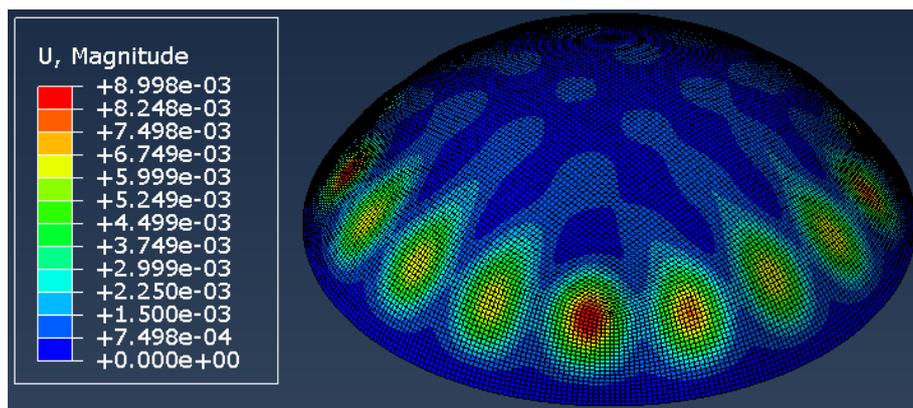


Figure 8. Displacement of EPSC shell under the actual load
S o u r c e: made by I.A. Sereke

4. Conclusion

From this conducted investigation the following statements could be concluded:

1. Since both geometric imperfection and material non-linearity are considered in GMNIA method of analysis, accurate buckling capacity of the shells correspond to this method of analysis.
2. The difference in the obtained buckling capacities of the three methods arose from a snap-through buckling that controls the case of spherical shells buckling. A progressive change of geometry resulted from the snap through analysis derives an imperfection reduction factor which is accounted in the GMNIA method only to have more accurate result.
3. The GMNIA results may vary depending on the considered types of imperfections and corresponding amplitudes.
4. The buckling resistance of EPSC dome obtained from GMNIA method (10.87 kN/m^2) exceeds the external pressure (4.55 kN/m^2) by 2.38 times, showing to the stability and practicality of EPSC in the real-world construction of spherical shell roofs.
5. The maximum displacement of EPSC shell from the GMNIA method is found to be 1.42 times greater than that of concrete when both shells are loaded to their respective first eigen loads and 1.74 times greater when the shells are loaded to their actual external pressures. Moreover, under the actual load, a displacement of 8.9 mm in a span of 57.34 m EPSC shell is negligible, which reveals EPSC spherical shell is a stiff shell.
6. The linear buckling capacity of EPSC shell is 53.67 times greater than the external pressure acting on the shell, which indicates the continuity of the shell to be elastic and stable.
7. Similarly, the plastic buckling capacity of EPSC shell, which is 14.28 times greater than the external pressure, this confirms that there will not be plastic flow mechanism in the EPSC spherical shell.
8. Finally, it is recommended to conduct large-scale experiment on EPSC shells by considering different proportions of EPS to best optimize concrete in the construction of spherical domes.

References

1. Zoelly R. *Über ein knickungsproblem an der kugelschale* (Dissertation). Zurich, 1915. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091951>
2. Wunderlich W., Albertin U. Analysis and load carrying behavior of imperfection sensitive shells. *International Journal for Numerical methods in Engineering*. 2000;47(1–3):255–273. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000110/30\)47:1/3<255::AID-NME770>3.0.CO;2-0](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<255::AID-NME770>3.0.CO;2-0)
3. Wunderlich W., Albertin U. Buckling behavior of imperfect spherical shells. *International Journal of non-linear mechanics*. 2002;37(4–5):589–604. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00086-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00086-5)
4. Ismail M.S., Mahmud J., Jailani A. Buckling of an imperfect spherical shell subjected to external pressure. *Ocean Engineering*. 2023;75(1):114118. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.114118>

5. Wagner H.N.R., Niewöhner G., Pototzky A., Hühne C. Show more on the imperfection sensitivity and design of tori-spherical shells under external pressure. *International journal of pressure vessels and piping*. 2021;191(2):104321. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2021.104321>
6. Mohad S.I., Sayed M., Jamaluddin M. Buckling behavior of steel dome cap design under external pressure. *International journal of pressure vessels and piping*. 2024;208:105135. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2024.105135>
7. Koiter Wt. *Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht* (PhD, thesis). Polytechnic institut Delft. 1945. English translation: on the stability of elastic equilibrium. NASA TTF-10, 833, 1967. Available from: <https://apps.dtic.mil> (accessed: 07.12.2023).
8. Deml M., Wunderlich W. Direct evaluation of the worst imperfection shape in shell buckling. *Computer. methods Applied. Mechanics and Engineering*. 1997;149(1-4):201–222. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00055-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00055-8)
9. Gagg C.R. Cement and concrete as an engineering material. An historic appraisal and case study analysis. *Engineering failure analysis*. 2014;40:114–140. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.02.004>
10. Habte Y.D., Rynkovskaya M., Issaias A.S. Comparative buckling analysis of concrete and expanded polystyrene dome shells. *Architecture and Engineering*. 2024;1(9):71–78. <https://doi.org/10.23968/2500-0055-202-9-1-71-78>
11. Eisenbach P. *Processing of slender concrete shells-fabrication and installation* (Dissertation). Universität Kassel, 2017. <https://doi.org/10.19211/KUP9783737602594>
12. Neville A.M. *Properties of concrete*. 5th edn. Prentice Hall; 2012. Available from: <https://www.academia.edu> (accessed: 07.12.2023).
13. Maghfouri M., Alimohammadi V., Gupta R., Saberian M., Azarsa P., Hashemi M., Asadi I., Roychand R. Drying shrinkage properties of expanded polystyrene (EPS) lightweight aggregate concrete: A review. *Case studies in construction materials*. 2022;16(6):e00919. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e00919>
14. Borkar Y., Singi M. EPS based light-weight concrete design with enhancement of strength. *International journal of civil and structural engineering research*. 2019;7(2):44–54. Available from: www.researchpublish.com (accessed: 07.12.2023).
15. Bedanta S., Mishra S., Rout A.K., Mohanty A., Parida A.P. Expanded polystyrene concrete. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology*. 2022;10(5):1466–1470. <https://doi.org/10.22214/ijraset.2022.42547>
16. Rosca B. Corobseanu V. Structural grade concrete containing expanded polystyrene beads with different particle distributions of normal weight aggregate. *Materials Today proceedings*. 2021;42:548–554. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.10.517>
17. Babu D.S., Ganesh B.K., Wee T.H. Properties of lightweight expanded polystyrene aggregate concretes containing flyash. *Cement and concrete research*. 2005;35(6):1218–1223. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2004.11.015>
18. Liu N., Chen B. Experimental study of the influence of EPS particle size on the mechanical properties of EPS lightweight concrete. *Construction and Building Materials*. 2014;68:227–232. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.06.062>
19. Paul Z., Shuaib A., Michael L. *High performance concretes*. A state of art report. 1989. Available from: <https://rosap.ntl.bts.gov> (accessed: 07.12.2023).
20. Maghfouri M. et al. Appropriate drying shrinkage prediction models for lightweight concrete containing coarse agro-waste aggregate. *Journal of building Engineering*. 2020;29. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2019.101148>
21. Sri Ravindrarajah R., Tuck A. Properties of hardened concrete containing treated expanded polystyrene beads. *Cement and concrete. Composites*. 1994;16(4):273–277. Available from: <https://www.academia.edu> (accessed: 07.12.2023).
22. ACI Committee Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19) Farmington Hills: American concrete institute; 2019. Available from: <https://www.usb.ac.ir> (accessed: 07.12.2023).
23. Akter T., Ferdous W.M., Siddique A.B. Strength variation of concrete between cylindrical and cubical specimen due to various proportion of ingredients. *Sonargaon university journal*. 2017;2(2):56–64. Available from: https://su.edu.bd/public/research/14-10-2022_1665738989.pdf (accessed: 15.09.2023)
24. Eurocode 3 *Design of steel structures part 1–6, strength and stability of shell structures*, European standard. 2007. Available from: <https://www.phd.eng.br> (accessed: 07.12.2023).
25. Rotter J.M., Schmidt H. *Buckling of steel shells. European design recommendations*. 5th ed. European convention for constructional steelwork. Brussels, Belgium; 2008. Available from: <https://store.steelconstruct.com> (accessed: 07.12.2023).
26. Blazekewski P. Development of a procedure for the determination of the buckling resistance of steel spherical shells according to EC 1993-1-6. *Materials*. 2022;15(1). <https://doi.org/10.3390/ma15010025>
27. Kurejkova M., Wald F., Kabelac J., Sabatka L. Slender compressed plate in component based finite element model. *IOP conference series. Materials science and Engineering Institute of Physics publishing*. 2015. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/96/1/012050>
28. Tomas A., Marti P., Tovar J.P. Imperfection sensitivity in in the buckling of single curvature concrete shells. *Proceedings of the international association for shell and spatial structures (IASS) symposium. Valencia*. 2009. p. 1713–1721. Available from: <https://www.academia.edu> (accessed: 10.12.2023).

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-220-240

УДК 624.012

EDN: QPLAEY

Научная статья / Research article

Живучесть железобетонного каркаса здания с учетом длительности эксплуатации

С.Ю. Савин[✉], М.И. Ступак^{ORCID}, Д.К. Маньков^{ORCID}

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
Москва, Российская Федерация
✉ suwin@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 12 апреля 2024 г.

Доработана: 25 мая 2024 г.

Принята к публикации: 30 мая 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии
конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Исследовано влияние длительности эксплуатации железобетонного каркаса здания на параметры его живучести при сценарии внезапного отказа одного из несущих элементов конструктивной системы. В качестве объекта исследования была выбрана железобетонная несущая система здания филармонии. Для количественной оценки ее живучести используется относительный индекс живучести, связанный с параметрами разрушающей нагрузки для системы с наличием начального локального разрушения и без разрушений. В рамках исследования выполнялось квазистатическое моделирование методом конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности. Физическая нелинейность бетона, в том числе при длительной эксплуатации сооружения, учитывалась с помощью модифицированных билинейных диаграмм состояния материала, отличавшихся для элементов с различным напряженно-деформированным состоянием на стадии длительной эксплуатации. Параметры таких диаграмм были получены с использованием интегрального модуля В.М. Бондаренко. По результатам исследования получены и проанализированы деформации и усилия в элементах несущей системы после возникновения в ней начального разрушения. Построены графики зависимости изменения процента разрушенных элементов от параметров разрушающей нагрузки для моделей несущей системы с наличием начального локального разрушения в виде отказа колонны крайнего ряда и моделей системы без начальных разрушений. Показано, что при учете длительности эксплуатации сооружения значения параметра разрушающей нагрузки и параметра живучести несущей системы снижаются.

Ключевые слова: устойчивость, железобетон, каркас, прогрессирующее обрушение, живучесть

Сергей Юрьевич Савин, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 1301-4838, ORCID: 0000-0002-6697-3388; E-mail: suwin@yandex.ru.

Мария Игоревна Ступак, магистрант, кафедра железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия; ORCID: 0009-0008-1903-0572; E-mail: maria.stpak@gmail.com

Дмитрий Константинович Маньков, магистрант, кафедра железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия; ORCID: 0009-0009-1311-2312; E-mail: dmitrymanckov03@gmail.com

© Савин С.Ю., Ступак М.И., Маньков Д.К., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-49-10010, <https://rscf.ru/project/24-49-10010/>

Для цитирования

Савин С.Ю., Ступак М.И., Маньков Д.К. Живучесть железобетонного каркаса здания с учетом длительности эксплуатации // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 220–240. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-220-240>

Robustness of Reinforced Concrete Frame with Respect to its Service Life

Sergey Yu. Savin , Maria I. Stupak , Dmitry K. Mankov 

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia

✉ suwin@yandex.ru

Article history

Received: April 12, 2024

Revised: May 25, 2024

Accepted: May 30, 2024

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. The effect of service life of a reinforced concrete building frame on its robustness parameters in the case of sudden failure of the outermost column has been investigated. The reinforced concrete frame of a philharmonic hall was chosen as the study subject. In order to evaluate its robustness, a relative robustness index, which is related to the parameters of the failure load for a system with and without initial local failure, has been utilized. Quasi-static modeling using the finite element method taking into account physical and geometric nonlinearity was performed as a part of the study. The physical nonlinearity of concrete, considering long-term operation of the structure, was accounted for by modified bilinear constitutive models of the material. Such models differed for elements with different stress-strain states in long-term operation. The parameters of the constitutive models were obtained using the integral deformation modulus proposed by Bondarenko. This approach has been employed to analyze the deformations and forces in the elements of the load-bearing system in the scenario of the outermost column failure. The curves for the percentage of destroyed elements of the load-bearing structure versus the parameters of the failure load have been plotted for the models with and without initial local failure of the outermost column, as well as for short-term and long-term operation. It is shown that the values of the failure load parameter and the relative robustness index decrease when the service life of the structure is accounted for.

Keywords: resistance, reinforced concrete, frame, progressive collapse, robustness

Acknowledgements

The research was carried out at the expense of a grant from the Russian Science Foundation No. 24-49-10010, <https://rscf.ru/project/24-49-10010/>

For citation

Savin S.Yu., Stupak M.I., Mankov D.K. Robustness of reinforced concrete frame with respect to its service life. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):220–240. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-220-240>

Sergey Yu. Savin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 1301-4838, ORCID: 0000-0002-6697-3388; E-mail: suwin@yandex.ru.

Maria I. Stupak, Graduate student, Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russia; ORCID: 0009-0008-1903-0572; E-mail: maria.stpak@gmail.com

Dmitry K. Mankov, Graduate student, Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russia; ORCID: 0009-0009-1311-2312; E-mail: dmitrymankov03@gmail.com

1. Введение

Начиная с 2001 года в связи с обрушением башен-близнецов Всемирного торгового центра во всем мире значительно возрос интерес к проблеме обеспечения устойчивости несущих систем зданий к аварийным воздействиям, в том числе приводящим к повреждению или разрушению отдельных несущих элементов. Хотя инженерному сообществу были известны случаи обрушения зданий в результате локальных отказов или повреждений отдельных конструкций и ранее, например, случаи со зданиями Ронан Пойнт [1] и Альфреда Мюррея [2], комплексом «Трансвааль-парк» [3] или ТЦ Сампун [4], начало интенсивного роста числа публикаций по этой проблеме приходится на 2000-е гг. [5]. Основной особенностью перечисленных выше случаев обрушений зданий является низкая вероятность события, послужившего причиной начального разрушения или повреждения конструктивной системы. Однако последствия изменения расчетной схемы сооружений в результате отказа одного из элементов и последующего перераспределения нагрузок оказались катастрофическими. В [6] отмечается, что, несмотря на низкую вероятность аварийного воздействия, риск наступления неприемлемых последствий существенен. В связи с этим расчетные ситуации, связанные с возникновением начальных локальных повреждений или разрушений, должны быть учтены при проектировании сооружений повышенного уровня ответственности.

Следует отметить, что в результате аварийной ситуации могут реализоваться специфические механизмы сопротивления конструкций либо могут быть превышены допустимые границы использования упрощенных моделей сопротивления. В связи с этим требуют более глубокого обоснования модели и критерии, используемые при оценке несущей способности отдельных конструкций и живучести сооружения в целом. В частности, при аварийной ситуации допускается переход конструкций перекрытий к механизму сопротивления по типу висячей системы. Рассматривая причины и механизм разрушения Всемирного торгового центра в [7], авторы отмечали, что начальные механические повреждения от столкновения самолета с сооружением, а также последовавший за этим пожар привели к тому, что перекрытия перешли к вантовому механизму сопротивления. В результате перекрытия потянули за собой колонны, что привело к потере их устойчивости. В [8] была исследована модель двухпролетной железобетонной рамы на внезапное удаление колонны среднего ряда с переходом ригелей к сопротивлению по типу висячей системы. По результатам испытаний был отмечен разрыв верхней арматуры в опорных сечениях у крайних колонн и нижней арматуры в опорных сечениях у средней колонны, для которой моделировалось внезапное выключение. Также было отмечено разрушение бетона сжатой зоны в колонне крайнего ряда в уровне примыкания к ней ригеля. Такое разрушение было обусловлено изменением эффективной расчетной длины колонны и дополнительным поперечным воздействием на колонну от ригеля после его перехода к работе по типу висячей системы (catenary action).

Кроме того, известно, что в бетоне железобетонных конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений во времени развиваются деформации, вызванные усадкой и ползучестью. Также наблюдается рост прочности и начального модуля упругости в результате старения бетона. В [9] исследовали бетонные образцы в возрасте 20–30 лет, извлеченные из балок и плит вблизи предполагаемых нейтральных осей изгибаемых элементов, а также из колонн, для которых средний уровень напряжений в течение срока эксплуатации оценивался не более $0,27 f_{ck}$ в условиях нормальной эксплуатации и не более $0,55 f_{ck}$ с учетом сейсмических воздействий. Авторами отмечено увеличение модуля деформаций и снижение деформативности. Таким образом, материал с течением времени стал более хрупким, уменьшился диапазон пластических деформаций. В бетоне эксплуатируемых железобетонных конструкций во времени может также наблюдаться релаксация напряжений вследствие развития деформаций ползучести и перераспределения усилий на стержни продольной арматуры [10; 11], а также другие конструкции в статически неопределимых системах. Отмеченное явление может сказаться на вязкостных свойствах бетона и параметрах его силового сопротивления при аварийных воздействиях, однако оно, как правило, не учитывается при оценке устойчивости конструктивной системы к обрушению.

Существующие критерии, используемые при оценке устойчивости несущих систем зданий к прогрессирующему обрушению при возникновении начального локального разрушения, преимущественно связаны с прочностью сечений несущих элементов и определяются предельными значениями усилий или деформаций. Применительно к конструкциям балочного типа в [12] предлагается интегральная оценка особого предельного состояния по величине относительного прогиба или по углу поворота при образовании пластических шарниров. Следует отметить, что применительно к сжатым и внецентренно сжатым конструкциям данные интегральные критерии не применимы. В [13] используются диаграммы «момент — кривизна», которые позволяют выполнять оценку сопротивления сечений как изгибаемых, так и внецентренно сжатых элементов. Общим недостатком деформационных критериев, в том числе интегральных (относительный прогиб, кривизна, угол поворота и т.д.), является то, что они применимы лишь к отдельному элементу или его сечению и не дают полного представления о состоянии несущей системы в целом после возникновения в ней начального локального разрушения.

Более универсальными критериями оценки несущей способности элементов конструктивных систем зданий и сооружений при особых воздействиях являются критерии, основанные на анализе и сопоставлении потенциальной и кинетической энергии элементов системы, части конструктивной системы или несущей системы в целом. Bazant и Verdure [7] предлагают энергетический критерий и упрощенный подход для оценки механизма обрушения типа *pancake*. Для оценки сопротивляемости элементов несущей системы обрушению при возникновении в ней начального локального разрушения Szyniszewski и Krauthammer [14; 15] оценивают изменение внутренней энергии конструкции при ее нагружении. В [16] модифицированный энергетический критерий в форме отпорности конструктивного элемента был использован для оценки потери устойчивости элементов железобетонной рамы при внезапном отказе угловой колонны. Однако энергетические критерии также не позволяют в полной мере оценить состояние и резервы силового сопротивления несущей системы после особого воздействия.

Поиски путей решения проблемы оценки резервов силового сопротивления несущих систем зданий и сооружений при возникновении в них начальных локальных разрушений привели к появлению в научной литературе термина — «живучесть» (*structural robustness*). В [5] приводится анализ существующих определений данного термина, представленных в научной литературе. Хотя авторы рассматриваемых определений обращают внимание на различные аспекты живучести, общим во всех предлагаемых определениях этого термина является способность конструктивной системы противостоять воздействиям, не предусмотренным режимом нормальной эксплуатации, избегать непропорционального отклика на начальное воздействие.

В [17] отмечается необходимость учета факторов длительного сопротивления несущих систем, таких как старение и износ, на их живучесть. При этом свойство живучести конструктивной системы рассматривается во взаимосвязи с внешними факторами, определяющими последствия начального воздействия. Для количественной оценки живучести сборных и монолитных железобетонных конструктивных систем зданий в [18] предложен вариант вероятностного подхода, учитывающий в базисных переменных нагрузок и сопротивлений специфические факторы, характерные для явления прогрессирующего обрушения. Учитывая высокую трудоемкость полностью вероятностных методов расчета живучести, предложенный авторами подход может быть использован для калибровки параметров полувероятностных форматов безопасности.

С точки зрения проектной практики наиболее привлекательным является детерминистический подход, поскольку он существенно упрощает постановку задачи и во многих случаях позволяет использовать существующие модели сопротивления элементов, а также модели воздействий, представленные в нормативных документах с учетом уточнения значений частных коэффициентов и коэффициентов сочетаний. В [19; 20] предложен относительный индекс живучести, допускающий детерминистический расчет и связанный с параметрическими разрушающими нагрузками для исходной конструктивной системы и модифицированной в результате локального разрушения. Однако

данный критерий не применялся к оценке живучести в сочетании с моделями, учитывающими реологические свойства материалов несущих систем зданий.

Обобщая результаты представленного выше краткого анализа научной литературы, можно сделать вывод об отсутствии исследований влияния изменений, происходящих в несущих системах зданий в процессе их длительной эксплуатации, на живучесть при особых расчетных ситуациях, связанных с отказом одного из несущих элементов. Применительно к железобетонным несущим системам такие изменения могут быть связаны с развитием во времени деформаций ползучести и усадки, изменением параметров диаграмм состояния бетона при кратковременном квазистатическом и динамическом нагружении вследствие старения.

Целью данного исследования являлась оценка влияния длительности эксплуатации железобетонного каркаса здания на параметры его живучести при сценарии внезапного отказа одного из несущих элементов конструктивной системы.

2. Модели и методы

2.1. Метод исследования

Для исследования влияния длительности эксплуатации железобетонного каркаса здания на параметры его живучести при сценарии внезапного отказа одного из несущих элементов использовался программный комплекс Лира-САПР, позволяющий выполнять статические и динамические расчеты по методу конечных элементов. В качестве объекта исследования была выбрана железобетонная несущая система здания филармонии. В рамках моделирования динамические эффекты, вызванные локальным разрушением одного из несущих элементов конструктивной системы здания — колонны крайнего ряда, заменялись статическим эквивалентом. Применительно к принятой в исследовании квазистатической постановке задачи определяющее уравнение метода конечных элементов имеет вид

$$[K]\{u\} = \sum\{F\}, \quad (1)$$

где $\{u\}$ — вектор перемещений в узлах конечно-элементной модели; $[K]$ — матрица жесткости; $\sum\{F\}$ — вектор внешних нагрузок в узлах конечно-элементной модели.

Задача решалась с учетом физической и геометрической нелинейности методом последовательных нагружений. Реологические свойства бетона учитывались при задании модифицированных диаграмм деформирования, которые различались для несущих элементов с различным напряженно-деформированным состоянием, сформировавшимся к моменту локального разрушения.

Количественная оценка живучести конструктивной системы выполняется в детерминистической постановке. В качестве количественной меры, характеризующей способность системы сопротивляться лавинообразному обрушению, используется относительный индекс живучести, предложенный в [19]:

$$RRI = \frac{\lambda_{\text{damaged}} - \lambda_{\text{design}}}{\lambda_{\text{intact}} - \lambda_{\text{design}}};$$

$$\lambda_{\text{damaged}} = \frac{L_{\text{damaged}}}{L_{\text{design}}}, \quad \lambda_{\text{intact}} = \frac{L_{\text{intact}}}{L_{\text{design}}}, \quad (2)$$

где L_{design} — проектная нагрузка, L_{intact} — несущая способность неповрежденной конструктивной системы по первичной расчетной схеме, L_{damaged} — несущая способность поврежденной несущей системы по вторичной расчетной схеме.

Параметры λ_{damaged} и λ_{intact} являются множителями к проектной нагрузке, аналогичные параметру λ согласно [21]. Поиск значений этих параметров осуществляется в предположении, что несущая способность конструктивной системы здания исчерпана, если в ней наблюдаются вторичные разрушения за пределами зоны начального локального разрушения. При этом допускается разрушение одного или нескольких сечений по длине железобетонного элемента при условии частичного сохранения несущей способности за счет перехода к иному механизму сопротивления. В частности, для плит перекрытий это может быть переход к работе по типу висячей системы при условии обеспечения анкеровки арматуры и несущей способности вертикальных несущих конструкций, выполняющих роль опоры.

При определении несущей способности элементов конструктивной системы по первичной и вторичной расчетным схемам используются предельные значения относительных деформаций. Для сжатого бетона $\varepsilon_{b,ult} = 0,0035$, для стальной арматуры $\varepsilon_{s,ult} = 0,033$.

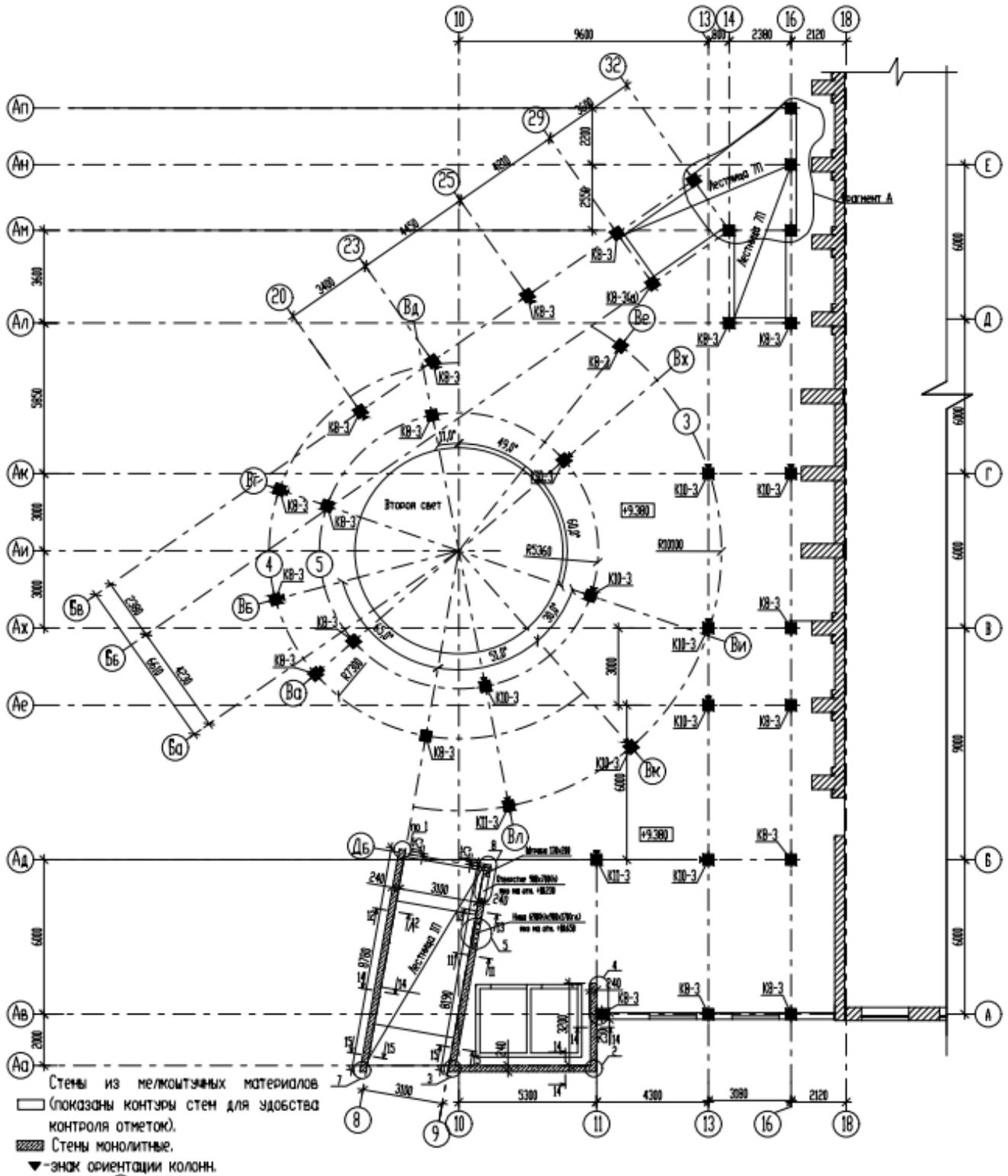
2.2. Конструктивные решения здания и рассматриваемая расчетная ситуация

Рассматривается железобетонный каркас пристройки к зданию филармонии (рис. 1) в Белгороде (рис. 2, а). На рис. 2, б, в, приводятся план 2-го этажа пристройки и разрез по пристраиваемому блоку. Пристройка выполнена на отдельном фундаменте и образует отдельный деформационный блок. В связи с этим конструкции надземной части могут быть рассчитаны без учета влияния существующей части здания. На основании результатов предварительно выполненных расчетов были подобраны и проверены размеры сечений и армирование несущих элементов в соответствии с критериями I (Ultimate) и II (Serviceability) групп предельных состояний на основные комбинации нагрузок, предусмотренных нормальным режимом эксплуатации сооружения. Вертикальные несущие конструкции представлены монолитными железобетонными колоннами сечением 400×400 мм и стенами толщиной 240 мм. Перекрытия выполнены в виде безбалочных монолитных железобетонных плит толщиной 250 мм. Схема армирования колонн представлена на рис. 2, б. Для всех конструкций используется бетон класса прочности по сжатию В25. В качестве продольной рабочей арматуры используется арматура А400. В качестве поперечной и конструктивной используется арматура А240.



Рис. 1. Рассматриваемое здание: Белгородская государственная филармония
И с т о ч н и к : https://cdn1.flamp.ru/e3450d9719b6f23fc715fa06d7956036_300_300.jpg

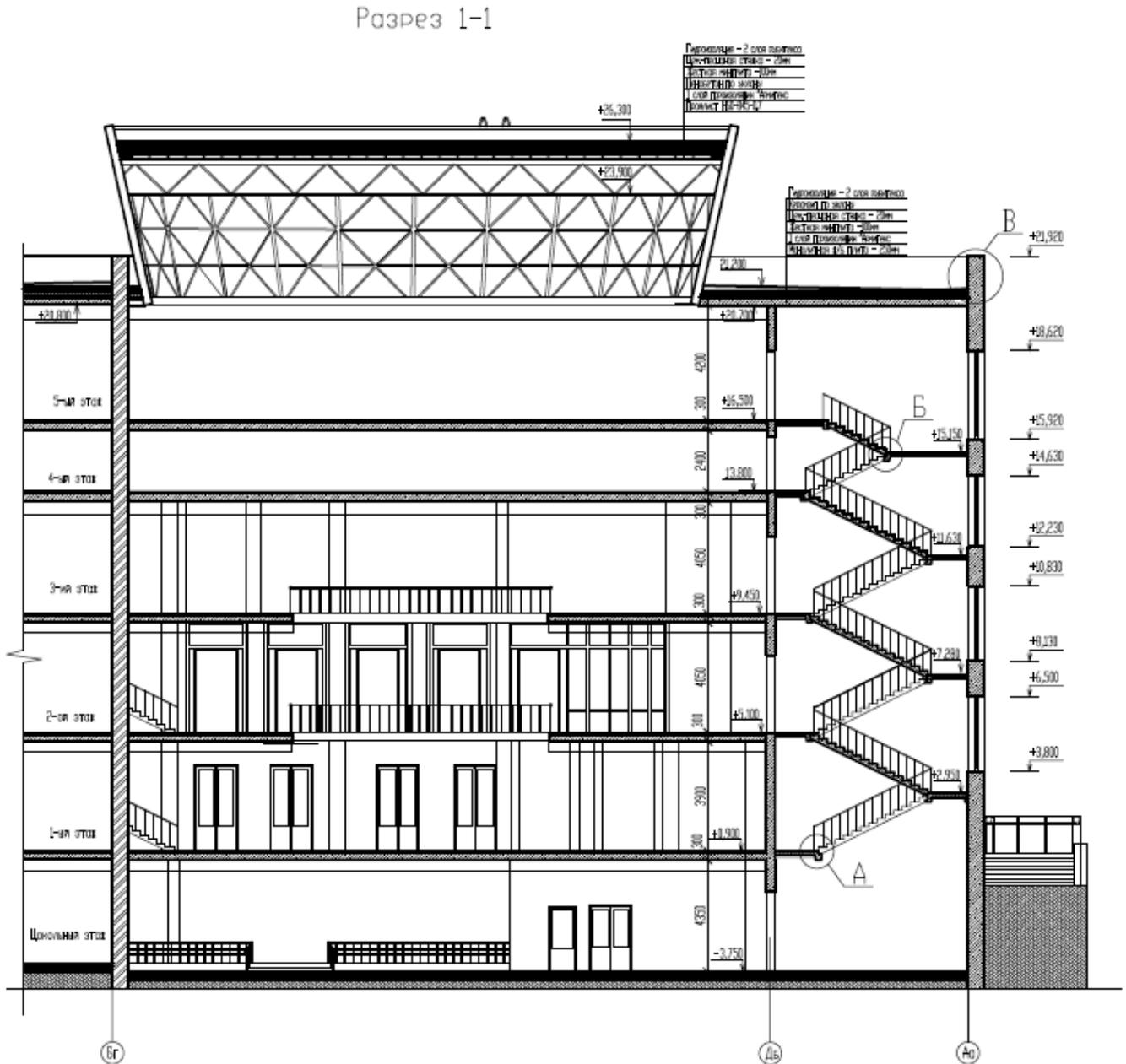
Figure 1. Building under study: Belgorod State Philharmonic
S o u r c e : https://cdn1.flamp.ru/e3450d9719b6f23fc715fa06d7956036_300_300.jpg



a

Рис. 2. Исходные данные для моделирования
 a — план второго блока конструкции пристройки Белгородской государственной филармонии
 Источник: выполнено М.И. Ступак

Figure 2. Initial data for modeling:
 a — plan of the second block of structures for the extension of the Belgorod State Philharmonic
 Source: compiled by M.I. Stupak



6

Рис. 2. Исходные данные для моделирования (окончание):

в — разрез второго блока филармонии

И с т о ч н и к : выполнено М.И. Ступак

Figure 2. Initial data for modeling (ending):

в — section of the second block of the Philharmonic

S o u r c e : compiled by M.I. Stupak

В качестве аварийной расчетной ситуации рассматривается внезапный отказ колонны в осях 4/Вб на 2-м этаже здания (рис.2, б). Выбор данной колонны для моделирования начального локального разрушения обусловлен расположением в крайнем ряду, что делает ее уязвимой для внешних воздействий. При этом в случае отказа колонны в осях 4/Вб происходит увеличение пролета плиты перекрытия, а колонны в осях 4/Ва и 4/Вг имеют ограниченное раскрепление в горизонтальной плоскости по направлению к зоне предполагаемого начального локального разрушения.

2.3. Конечно-элементная модель здания (рис. 3)

Для определения напряженно-деформированного состояния элементов железобетонного каркаса пристройки в результате аварийной расчетной ситуации, вызванной отказом колонны в осях 4/Вб на 2-м этаже, был выполнен нелинейный квазистатический расчет в постановке pull-down по методу конечных элементов в программном комплексе Лира-САПР.

Для моделирования колонн использовались универсальные стержневые конечные элементы КЭ 410, позволяющие учитывать физическую и геометрическую нелинейность. Плиты перекрытия и стены моделировались с помощью универсальных четырехугольных конечных элементов оболочки КЭ 444 с учетом геометрической и физической нелинейности. В узлах сопряжения колонн с плитами перекрытий и покрытия в пределах размеров поперечного сечения колонны вводились абсолютно жесткие тела, реализующие гипотезу о недеформируемых поперечных сечениях.

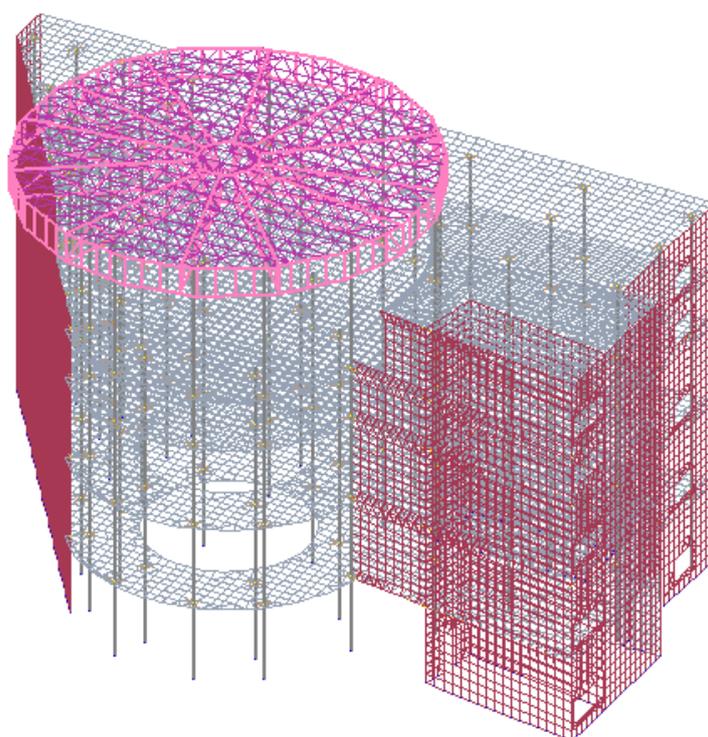


Рис. 3. Общий вид конечно-элементной модели второго блока филармонии

И с т о ч н и к : выполнено М.И. Ступак

Figure 3. General view of the finite element model of the second block of the Philharmonic

S o u r c e : compiled by M.I. Stupak

2.4. Моделирование нагрузок и воздействий

Расчет выполнялся на особое сочетание нагрузок, включающих только постоянные и длительные нагрузки. Все нагрузки принимались по их нормативным значениям.

Моделирование динамического догружения несущей системы после отказа колонны в осях 4/Вб на 2-м этаже выполнялось по методу pull-down [21], который предполагал приложение реакции удаляемого элемента (колонны) с противоположным знаком к расположенному выше вертикальному несущему элементу с учетом коэффициента динамичности.

Величина такой силы может быть определена по формуле

$$P = (k_d - 1) F_i, \quad (3)$$

где F_i — усилие в концевом сечении несущего элемента перед его разрушением или потерей устойчивости; k_d — коэффициент динамичности.

На основании исследований сопротивления прогрессирующему обрушению железобетонных каркасов многоэтажных зданий, выполненных В.О. Алмазовым, А.И. Плотниковым, Б.С. Расторгуевым [23], а также результатов испытаний полномасштабных физических моделей пространственных каркасов [24], в данном исследовании был принят $k_d = 1,25$, что соответствовало статическому эквиваленту динамического воздействия $0,25P$ при расчете в квазистатической постановке pull-down.

2.5. Модели материалов

Для моделирования работы материалов использовались идеализированные нелинейные диаграммы состояния бетона (рис. 4, а) и арматуры (рис. 4, б) для нормативной прочности. Рассматривались диаграммы состояния бетона при кратковременном нагружении без учета длительной выдержки при постоянной нагрузке и с учетом такой выдержки в течение 2 лет.

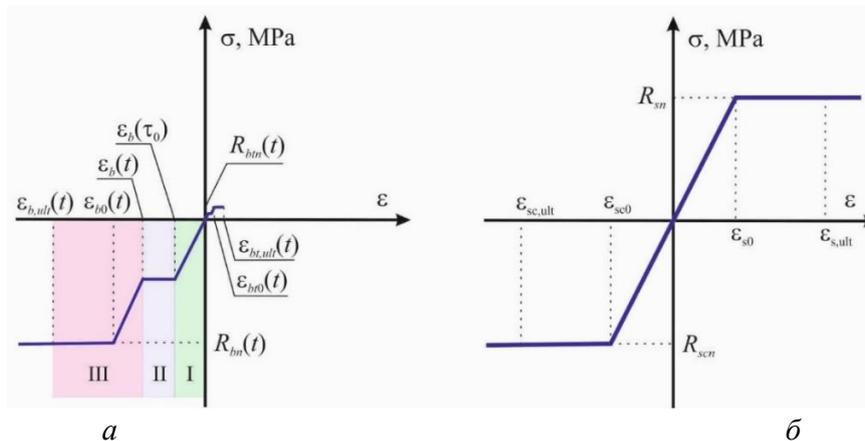


Рис. 4. Схемы диаграмм деформирования: а — бетона; б — арматуры
И с т о ч н и к : выполнено С.Ю. Савиным

Figure 4. Deformation curves: а — concrete; б — reinforcement
S o u r c e : compiled by S.Yu. Savin

Характерные точки диаграмм для бетона длительно эксплуатируемого каркаса здания назначались с учетом влияния ползучести и усадки к моменту реализации аварийной ситуации. Участок I диаграммы работы бетона (рис. 4, а) при действии квазистатической нагрузки характеризуется приведенным модулем упругости

$$E_{b,red} = \frac{R_{bn}}{\epsilon_{b1,red}}, \quad (4)$$

где $\epsilon_{b1,red} = 0,0015$ для тяжелого бетона при непродолжительном действии нагрузки.

Участок II диаграммы (рис. 4, а) соответствует деформированию бетона при постоянной нагрузке. При этом в запас прочности не учитывается релаксация напряжений в бетоне, которая в зависимости от длительности действия нагрузки может быть оценена $\approx 0,1 \dots 0,2 \cdot \sigma(\tau_0)$. С учетом принятого допущения деформации на этом участке могут быть определены по формуле

$$\varepsilon(t, \tau_0) = \frac{\sigma(\tau_0)}{E_b(\tau_0)} - \frac{\sigma(\tau_0)}{E_b(t)} + \sigma(\tau_0) \cdot C(t, \tau_0), \quad (5)$$

где $\sigma(\tau_0)$ — постоянное во времени напряжение; $E(\tau_0)$ — модуль деформации в начальный момент времени τ_0 ; $E(t)$ — модуль деформации в момент времени t ; $C(t, \tau_0)$ — мера ползучести, представляющая собой деформацию ползучести к моменту времени t , вызванную единичным напряжением, действующим с момента τ_0 .

Модуль деформации бетона на участке III диаграммы (см. рис. 4, а):

$$E_{b,red}^d = \frac{R_{bn}^d}{\varepsilon_{b1,red}}, \quad (6)$$

где $R_{bn}^d = \varphi_d \cdot R_{bn}$. Здесь консервативно принято $\varphi_d = 1,15$ — для режима деформирования конструктивной системы при внезапном отказе несущего элемента.

С учетом выражений связи напряжений и деформаций по всем трем участкам диаграммы деформирования бетона для конечного напряженно-деформированного состояния получим

$$\varepsilon_{tot}(t) = \sigma_i \left(\frac{1}{E_{b,red}} + C(t; t_0) \right) + (\sigma_j - \sigma_i) \cdot \frac{1}{E_{b,red}^d}, \quad (7)$$

где σ_j — напряжения в бетоне на первой полуволне колебаний, вызванных локальным разрушением в конструктивной системе здания. В первом приближении σ_j может быть оценено на основании предварительного квазистатического расчета при параметрах диаграмм состояния материалов, соответствующих квазистатическому режиму приложения нагрузки.

Из выражения (5) получим эффективный модуль деформации бетона:

$$E_{eff} = \frac{\sigma_j}{\varepsilon_{tot}} = \frac{E_{b,red}}{\frac{\sigma_i}{\sigma_j} + \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \cdot C(t; t_0) \cdot E_{b,red} + \frac{(\sigma_j - \sigma_i) E_{b,red}}{\sigma_j \cdot E_{b,red}^d}}. \quad (8)$$

Для учета влияния длительности эксплуатации сооружения предложен следующий алгоритм расчета:

1. Выполняются нелинейные квазистатические расчеты на действие эксплуатационных нагрузок (постоянных и длительных) и особое воздействие с учетом параметров диаграмм состояния бетона для кратковременного нагружения. Определяются жесткости элементов на этапе нормальной эксплуатации и после аварийной ситуации, вызванной отказом несущего элемента или связи.

2. Определяются интегральные модули деформаций железобетонных элементов [25; 26] из следующих выражений.

Для этапа нормальной эксплуатации при $M = M_1$:

$$E_{int,EI} = \frac{(EI)_1}{I}, \quad (9)$$

где $(EI)_1$ — изгибная жесткость приведенного сечения (по секущему модулю деформаций), полученная по результатам нелинейного квазистатического расчета на эксплуатационные нагрузки, I — момент инерции сечения относительно геометрического центра тяжести.

Для этапа аварийного догружения в результате перераспределения усилий в несущей системе с разрушенным (поврежденным) элементом:

$$E_{\text{int},EI}^d = \frac{(EI)_2 - (EI)_1}{I \cdot (M_2 - M_1)} \cdot \varphi_d, \quad (10)$$

где $(EI)_2$ — изгибная жесткость приведенного сечения (по секущему модулю деформаций), полученная по результатам нелинейного квазистатического расчета на особое воздействие, M_1, M_2 — соответственно изгибающие моменты в наиболее нагруженных сечениях при действии эксплуатационных нагрузок и в результате особого воздействия.

3. Вычисляется интегральный эффективный модуль деформаций $E_{\text{eff},\text{int}}$ путем замены фибровых модулей деформаций по участкам диаграммы состояния бетона на интегральные для сечений железобетонных элементов, а также замены фибровых напряжений от эксплуатационных нагрузок σ_i и от особого воздействия σ_j на интегральные усилия (изгибающие моменты):

$$E_{\text{eff},\text{int}} = \frac{M_j \cdot I}{(E \cdot I)_j} = \frac{E_{b,\text{red},\text{int}}}{\frac{M_i}{M_j} + \frac{M_i}{M_j} \cdot C(t; t_0) \cdot E_{b,\text{red},\text{int}} + \frac{(M_j - M_i) E_{b,\text{red},\text{int}}}{M_j \cdot E_{b,\text{red},\text{int}}^d}}. \quad (11)$$

4. Выполняется расчет несущей системы здания на особое воздействие (начальное локальное разрушение) с использованием идеализированных диаграмм, параметры которых определяются по значениям динамической прочности бетона для рассматриваемого режима нагружения R_{bn}^d и интегральных модулей деформации для сечений железобетонных элементов $E_{\text{eff},\text{int}}$.

3. Результаты исследования и их анализ

3.1. Результаты квазистатического расчета на особое воздействие

На рис. 5–6 приведены результаты расчета несущей системы здания филармонии на особое воздействие (разрушение колонны 2-го этажа в осях 4/Вб).

Анализ результатов расчета показывает, что максимальные (по абсолютной величине) вертикальные перемещения для расчетной модели несущей системы здания (рис. 5, а), в которой параметры диаграмм работы бетона были приняты как для кратковременного нагружения, оказались в 2,14 раза меньше, чем для модели, учитывающей влияние длительности эксплуатации на параметры диаграмм состояния материалов (рис. 5, б). Различия в границах областей с наибольшими перемещениями по двум моделям обусловлены особенностями перераспределения усилий между несущими элементами с учетом деформаций ползучести и усадки.

Максимальные (по абсолютной величине) относительные деформации для расчетной модели несущей системы здания (рис. 6, а) с параметрами диаграмм работы бетона, соответствующими кратковременному нагружению, оказались в 2,08 раза меньше, чем для модели, учитывающей влияние длительности эксплуатации на параметры диаграмм состояния материалов (рис. 6, б). Уместно заметить, что из-за физической нелинейности, в том числе проявляющейся в результате неравновесных процессов ползучести и усадки, между изменениями относительных деформаций и изменением усилий в элементах отсутствует прямая зависимость. Значительный прирост относительных деформаций не сопровождается таким же приростом усилий. Так, изгибающие моменты в колоннах несущей системы здания по результатам расчета с использованием диаграмм для кратковременного нагружения оказались в 1,28 раза меньше, чем по результатам расчета с использованием модифицированных диаграмм (рис. 7). Однако рост относительных деформаций приводит к увеличению прогибов несущих элементов, что делает их более уязвимыми при продольном изгибе.

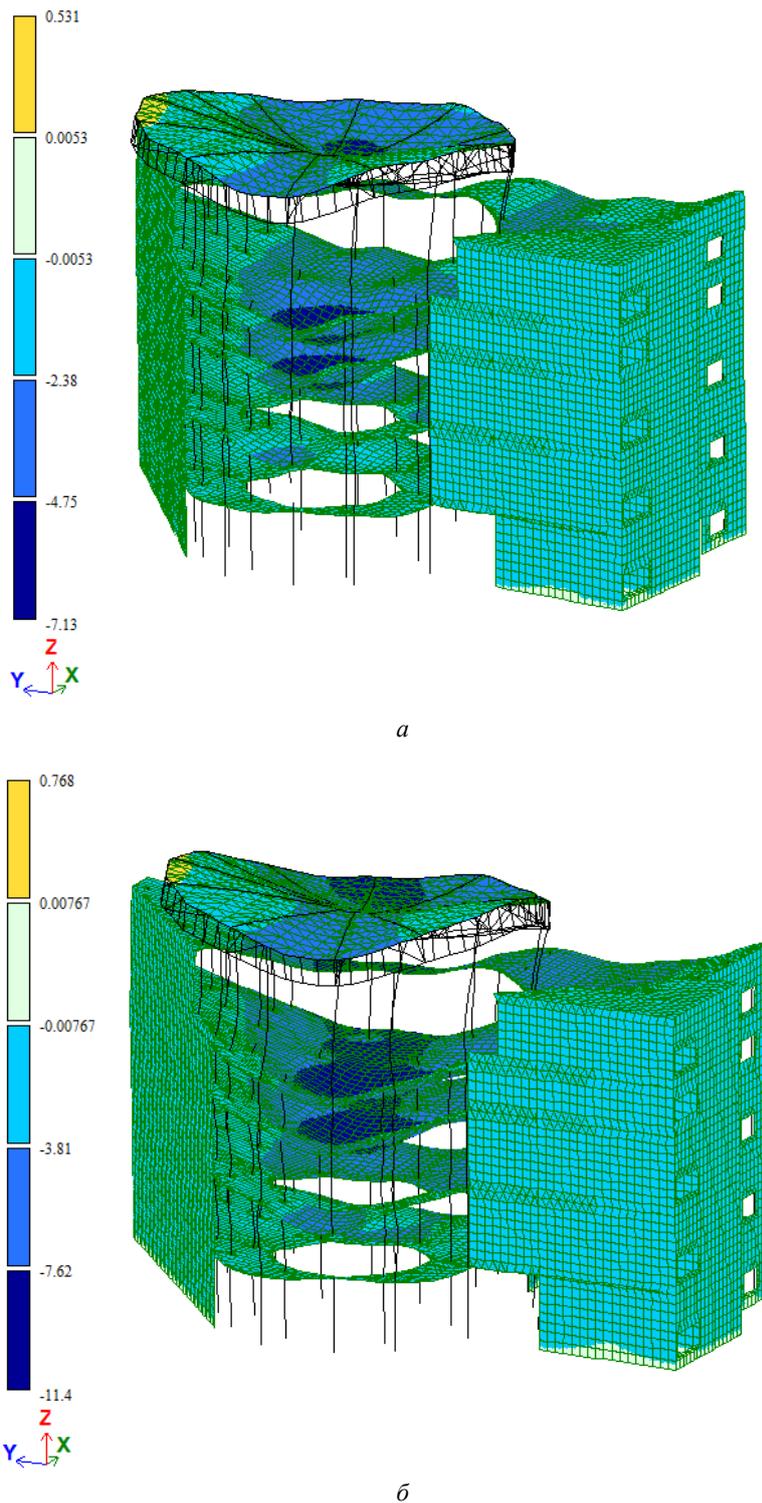


Рис. 5. Вертикальные перемещения в несущей системе здания филармонии в результате локального разрушения колонны 2-го этажа в осях 4/Вб: *a* — полученные на основе диаграмм состояния бетона при кратковременном нагружении; *б* — полученные на основе модифицированных диаграмм состояния бетона с учетом длительности выдержки при статической нагрузке

И с т о ч н и к : выполнено С.Ю. Савиным, М.И. Ступак, Д.К. Маньковым

Figure 5. Vertical displacements in the load-bearing structure of the Philharmonic as a result of local failure of the 2nd storey column in axes 4/Вб: *a* — obtained on the basis of constitutive models of concrete under short-term loading; *б* — obtained on the basis of modified constitutive models of concrete, taking into account the duration of exposure under static load

S o u r c e : compiled by S.Yu. Savin, M.I. Stupak, D.K. Mankov

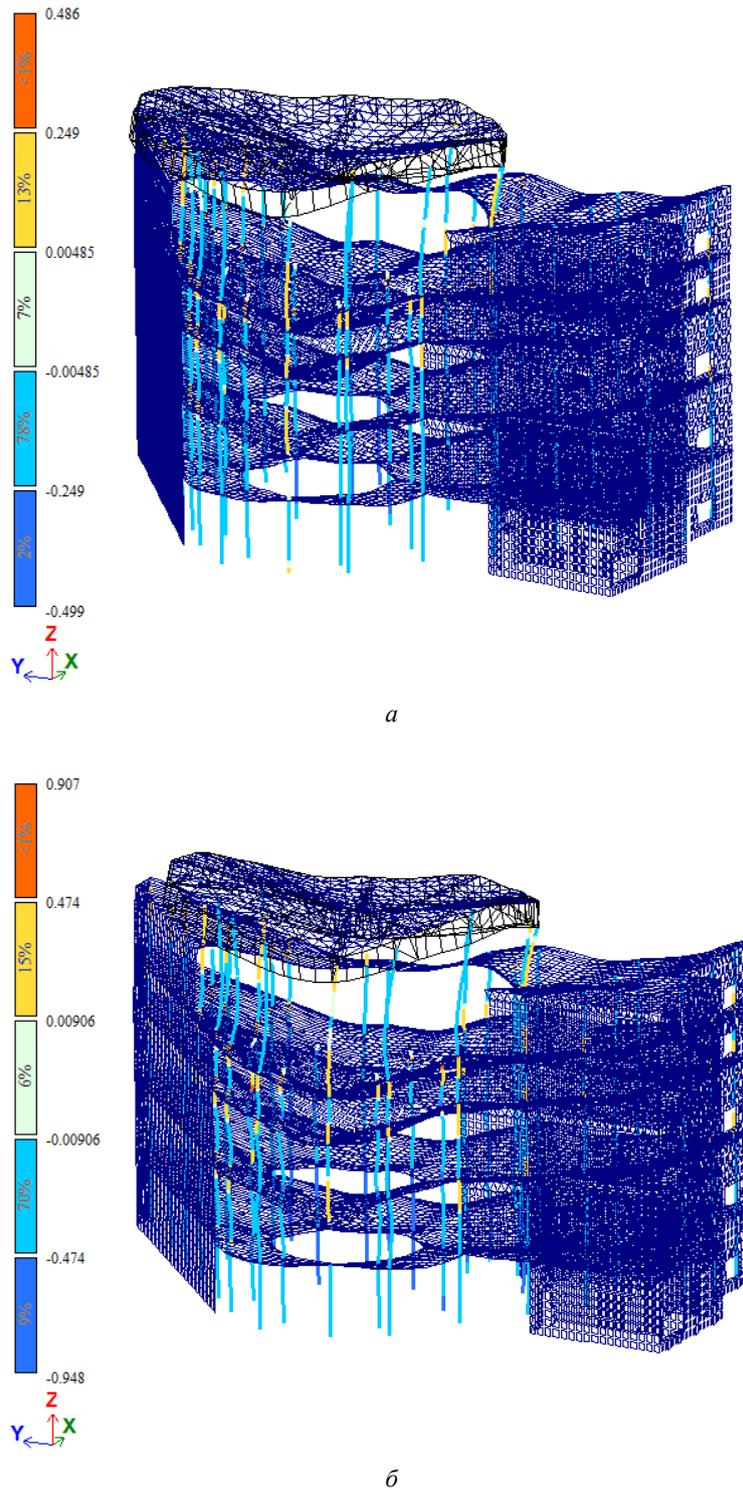


Рис. 6. Относительные деформации в колоннах несущей системы здания филармонии в результате локального разрушения колонны 2-го этажа в осях 4/Вб: *a* — полученные на основе диаграмм состояния бетона при кратковременном нагружении; *б* — полученные на основе модифицированных диаграмм состояния бетона с учетом длительности выдержки при статической нагрузке

И с т о ч н и к : выполнено С.Ю. Савиным, М.И. Ступак, Д.К. Маньковым

Figure 6. Strains in the columns of the load-bearing structure of the Philharmonic as a result of local failure of the 2nd floor column in axes 4/Вб: *a* — obtained on the basis of constitutive models of concrete under short-term loading; *б* — obtained on the basis of modified constitutive models of concrete, taking into account the duration of exposure under static load

S o u r c e : compiled by S.Yu. Savin, M.I. Stupak, D.K. Mankov

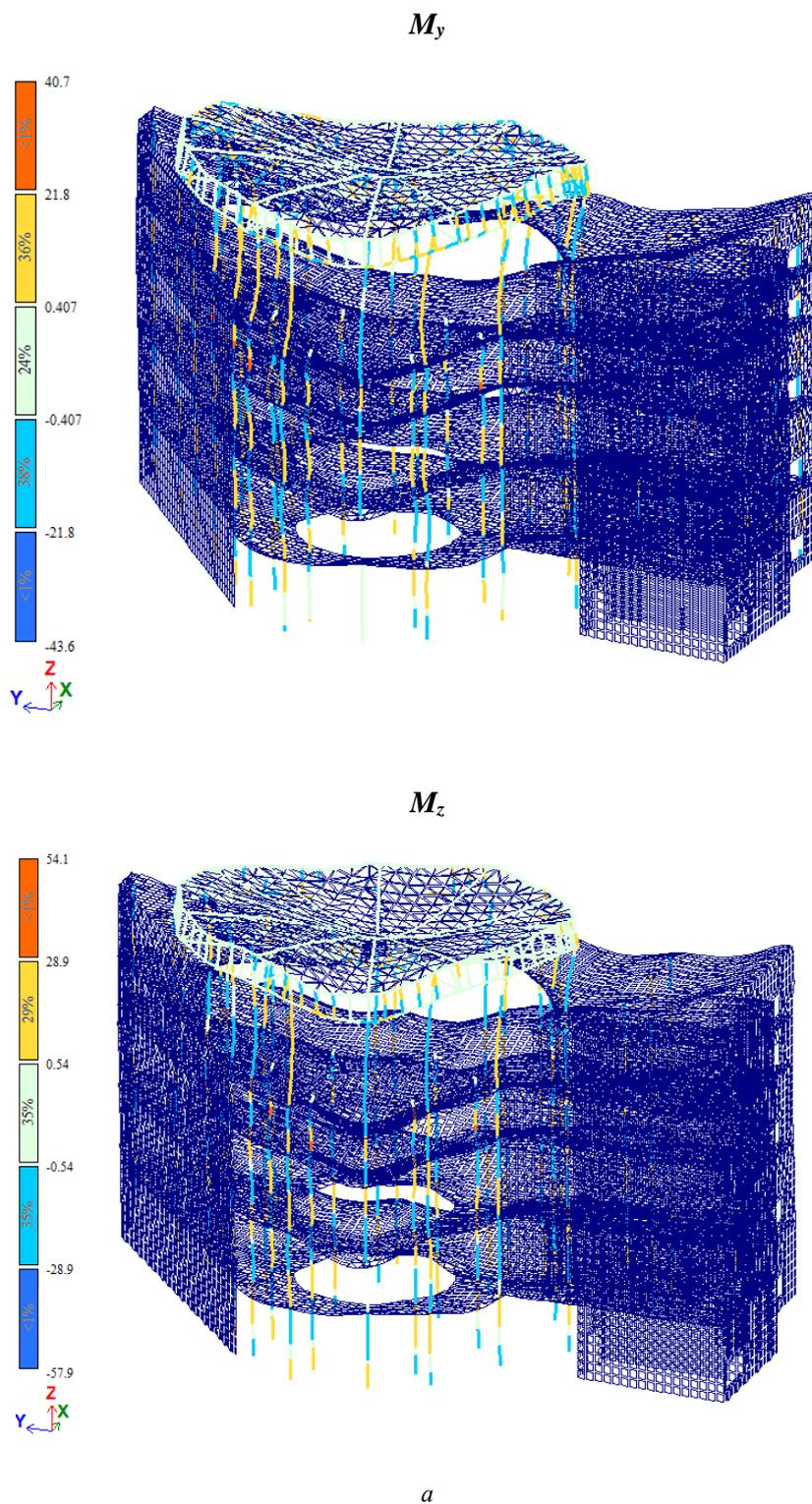


Рис. 7. Изгибающие моменты M_y и M_z в колоннах несущей системы здания филармонии в результате локального разрушения колонны 2-го этажа в осях 4/Вб:
a — полученные на основе диаграмм состояния бетона при кратковременном нагружении
 И с т о ч н и к : выполнено С.Ю. Савиным, М.И. Ступак, Д.К. Маньковым

Figure 7. Bending moments M_y and M_z in the columns of the load-bearing structure of the Philharmonic as a result of local failure of the 2nd floor column in axes 4/Вб:
a — obtained on the basis of the constitutive models of concrete under short-term loading
 S o u r c e : compiled by S.Yu. Savin, M.I. Stupak, D.K. Mankov

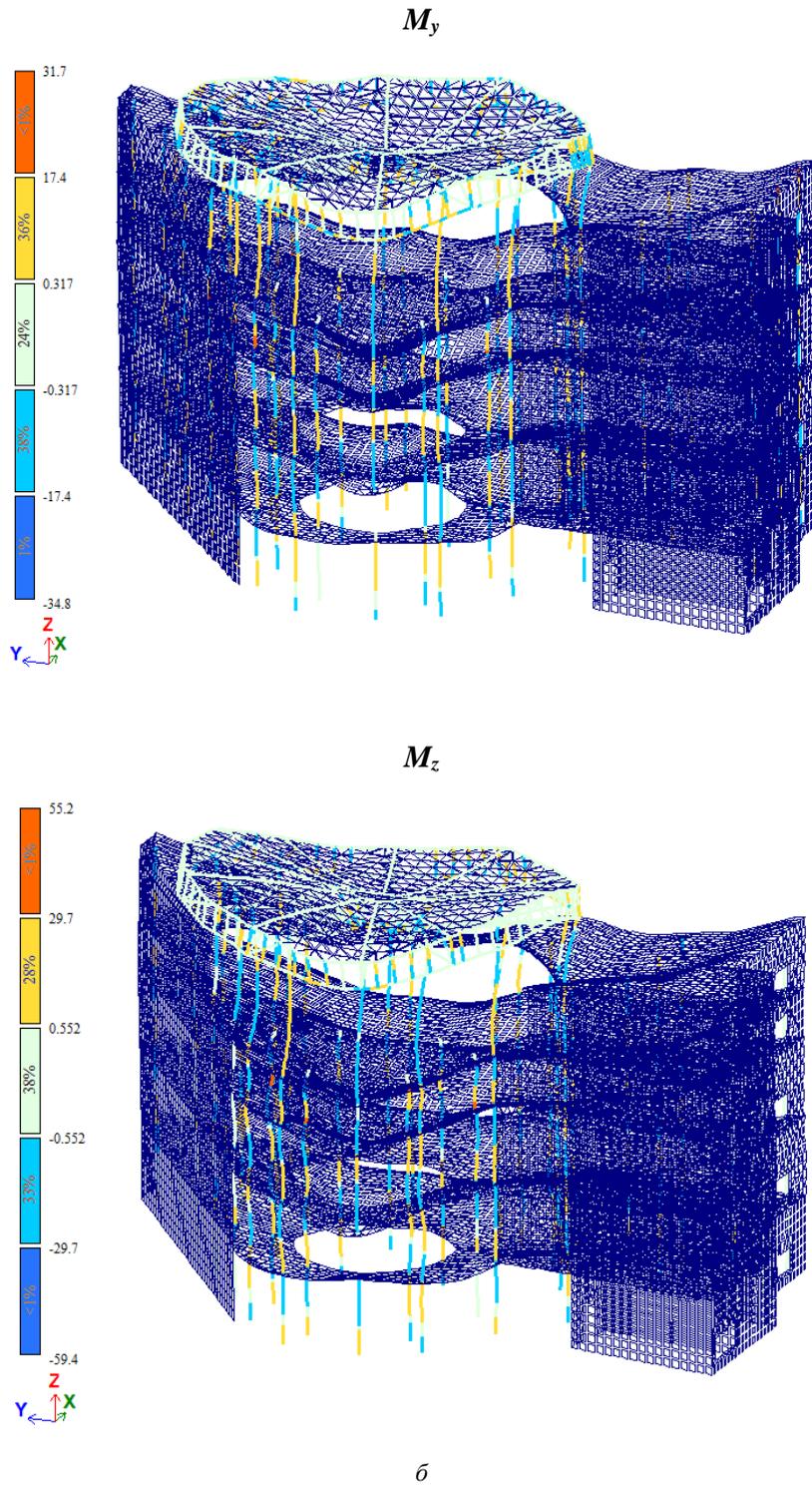


Рис. 7. Изгибающие моменты M_y и M_z в колоннах несущей системы здания филармонии в результате локального разрушения колонны 2-го этажа в осях 4/В6 (окончание):

\bar{b} — полученные на основе модифицированных диаграмм состояния бетона с учетом длительности выдержки при статической нагрузке

И с т о ч н и к : выполнено С.Ю. Савиным, М.И. Ступак, Д.К. Маньковым

Figure 7. Bending moments M_y and M_z in the columns of the load-bearing structure of the Philharmonic as a result of local failure of the 2nd floor column in axes 4/B6 (ending):

\bar{b} — obtained on the basis of modified constitutive models of concrete, taking into account the duration of exposure under static load

S o u r c e : compiled by S.Yu. Savin, M.I. Stupak, D.K. Mankov

3.2. Количественная оценка живучести несущей системы здания при локальном разрушении

На рис. 8 приведены графики зависимости процента разрушенных конечных элементов модели несущей системы здания от параметров предельных нагрузок λ_{intact} и λ_{damaged} .

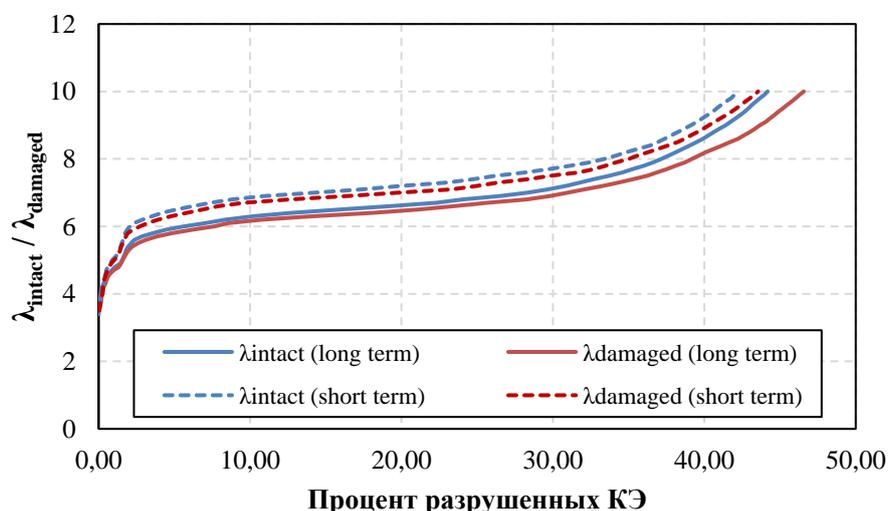


Рис. 8. Графики зависимости процента разрушенных конечных элементов модели несущей системы здания от параметров предельных нагрузок λ_{intact} и λ_{damaged}
И с т о ч н и к : выполнено С.Ю. Савиным

Figure 8. Relationship between the percentage of destroyed finite elements of the load-bearing structure model and the parameters of ultimate loads λ_{intact} and λ_{damaged}
S o u r c e : compiled by S.Yu. Savin

При расчете несущей системы без учета длительности эксплуатации по первичной (без локального разрушения) расчетной модели первые разрушения были зафиксированы при $\lambda_{\text{intact}} = 3,565$. Во вторичной (с локальным разрушением колонны 2-го этажа в осях 4/В6) расчетной модели — $\lambda_{\text{damaged}} = 3,475$. Относительный индекс живучести по формуле (10) без учета длительности эксплуатации составил $RRI = 0,965$.

При учете влияния длительного силового сопротивления первые разрушения конечных элементов в первичной модели несущей системы были зафиксированы при $\lambda_{\text{intact}} = 3,494$. Во вторичной расчетной модели $\lambda_{\text{damaged}} = 3,297$. Таким образом, относительный индекс живучести с учетом длительности эксплуатации составил $RRI = 0,92$. Выявленный эффект обусловлен ростом деформаций во внецентренно сжатых элементах в результате ползучести. Это подтверждается анализом изгибающих моментов в колоннах (см. рис. 7), где наблюдаются большие значения моментов для модели, учитывающей длительность эксплуатации здания.

Учитывая, что максимальный коэффициент динамичности при появлении первого локального разрушения в несущей системе не превышает $k_d = 2$, а минимальные значения параметров предельной нагрузки для двух вариантов вторичных расчетных моделей превышали это значение ($\lambda_{\text{damaged}} > 2$), несущая система обладает значительными резервами сопротивления обрушению при рассматриваемом сценарии локального разрушения. При этом уместно заметить, что параметры предельной нагрузки λ_{intact} и λ_{damaged} , а также относительный индекс живучести RRI при учете длительности эксплуатации несущей системы здания оказались ниже, чем при использовании диаграмм состояния для кратковременного нагружения. Интенсивный рост числа разрушенных конечных элементов в расчетных моделях несущей системы наблюдался при $\lambda_{\text{damaged}} = 5,5$ для случая учета длительности

эксплуатации и при $\lambda_{\text{damaged}} = 5,7$ без учета длительных процессов. Такие значения параметров не достижимы в реальных условиях эксплуатации несущей системы, однако при других сценариях начального локального разрушения возможно снижение параметров предельной нагрузки и относительного индекса живучести.

4. Заключение

В статье представлено исследование устойчивости к обрушению железобетонной несущей системы здания с учетом длительности эксплуатации на момент особого воздействия, вызванного локальным разрушением одной из несущих колонн. Для количественной оценки резервов сопротивления несущей системы были использованы параметры предельной нагрузки и относительный индекс живучести. На основании проведенного исследования можно сформулировать следующие выводы:

1. На основе концепции интегрального модуля В.М. Бондаренко предложен способ учета влияния длительности эксплуатации железобетонных несущих систем зданий на их деформирование при особых воздействиях, вызванных локальными разрушениями несущих элементов или связей.

2. Численное моделирование методом конечных элементов показало, что при учете длительности эксплуатации сооружения до момента, предшествующего особой расчетной ситуации, значения параметров разрушающей нагрузки и относительного индекса живучести несущей системы снижаются по сравнению с результатами моделирования, полученными на основе диаграмм для кратковременного нагружения. Выявленный эффект обусловлен ростом деформаций во внецентренно сжатых элементах в результате ползучести.

Таким образом, фактор длительной эксплуатации может оказывать негативное влияние на живучесть железобетонных конструктивных систем зданий при особых расчетных ситуациях и должен учитываться на этапе проектирования.

Список литературы

1. *Pearson C., Delatte N.* Ronan Point Apartment Tower Collapse and its Effect on Building Codes // *Journal of Performance of Constructed Facilities*. 2005. Vol. 19. № 2. P. 172–177. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0887-3828\(2005\)19:2\(172\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3828(2005)19:2(172))
2. *Tagel-Din H., Rahman N.A.* Simulation of the Alfred P. Murrah federal building collapse due to blast loads // *AEI 2006: Building Integration Solutions — Proceedings of the 2006 Architectural Engineering National Conference*. 2006. Vol. 2006. [https://doi.org/10.1061/40798\(190\)32](https://doi.org/10.1061/40798(190)32)
3. *Belostotsky A.M., Pavlov A.S.* Long span buildings analysis under physical, geometric and structural nonlinearities consideration // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2010. Vol. 6. No. 1–2. P. 80–86. EDN: PZEW H
4. *Caredda G., Makoond N., Buitrago M., Sagaseta J., Chryssanthopoulos M., Adam J.M.* Learning from the progressive collapse of buildings // *Developments in the Built Environment*. 2023. Vol. 15. <https://doi.org/10.1016/j.dibe.2023.100194>
5. *Adam J.M., Parisi F., Sagaseta J., Lu X.* Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century // *Engineering Structures*. 2018. Vol. 173. P. 122–149. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.082>
6. *Kokot S., Solomos G.* Progressive collapse risk analysis: literature survey, relevant construction standards and guidelines — JRC 32253-2011 // *European Commission*. 2012. 80 p. <https://data.europa.eu/doi/10.2788/70141>
7. *Bažant Z.P., Verdure M.* Mechanics of Progressive Collapse: Learning from World Trade Center and Building Demolitions // *Journal of Engineering Mechanics*. 2007. Vol. 133. No. 3. P. 308–319. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:3\(308\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:3(308))
8. *Pham A.T., Brenneis C., Roller C., Tan K.-H.* Blast-induced dynamic responses of reinforced concrete structures under progressive collapse // *Magazine of Concrete Research*. 2022. Vol. 74. No. 16. P. 850–863. <https://doi.org/10.1680/jmacr.21.00115>
9. *Levtchitch V., Kvasha V., Boussalis H., Chassiakos A., Kosmatopoulos E.* Seismic performance capacities of old concrete // *13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada*. 2004. P. 1–15. URL: https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/13_2182.pdf (дата обращения: 2.02.2024)

10. Zhou Y. Concrete creep and thermal effects on the dynamic behavior of a concrete-filled steel tube arch bridge // *Journal of Vybriengineering*. 2014. Vol. 16. No. 4. P. 1735–1744. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/323313701.pdf> (дата обращения: 2.02.2024)
11. Tosic N., Aidarov S., De la Fuente A. Systematic Review on the Creep of Fiber-Reinforced Concrete // *Materials*. 2020. Vol. 13. <https://doi.org/10.3390/ma13225098>
12. Trekin N., Kodysh E., Shmakov S., Terekhov I., Kudyakov K. Determination of the criteria of deformation in a special limiting state // *International Journal for Computational Civil and Structural*. 2021. Vol. 17. No. 1. P. 108–116. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-1-108-116>
13. Fedorova N.V., Pliushchenko T.A. Influence of pre-stressing over parameters of diagram of static-dynamic de-formation of RC elements // *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 687. No. 3. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/687/3/033033>
14. Szyniszewski S. Dynamic energy-based method for progressive collapse analysis // *Proceedings of the 2009 Structures Congress — Don't Mess with Structural Engineers: Expanding Our Role*. 2009. P. 1259–1268. [https://doi.org/10.1061/41031\(341\)138](https://doi.org/10.1061/41031(341)138)
15. Szyniszewski S., Krauthammer T. Energy flow in progressive collapse of steel framed buildings // *Engineering Structures*. 2012. Vol. 42. No. 2. P. 142–153. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.04.014>
16. Savin S., Kolchunov V., Fedorova N., Vu N.T. Experimental and Numerical Investigations of RC Frame Stability Failure under a Corner Column Removal Scenario // *Buildings*. 2023. Vol. 13. No. 4. <https://doi.org/10.3390/buildings13040908>
17. Тамразян А.Г. Концептуальные подходы к оценке живучести строительных конструкций, зданий и сооружений // *Железобетонные конструкции*. 2023. № 3. С. 62–74. <https://doi.org/10.22227/2949-1622.2023.3.62-74>
18. Лизогуб А.А., Тур А.В., Тур В.В. Вероятностный подход к оценке живучести конструктивных систем из сборного и монолитного железобетона // *Строительство и реконструкция*. 2023. Т. 108. № 4. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2023-108-4-93-105>
19. Fallon C.T., Quiel S.E., Naito C.J. Uniform Pushdown Approach for Quantifying Building-Frame Robustness and the Consequence of Disproportionate Collapse // *Journal of Performance of Constructed Facilities*. 2016. Vol. 30. No. 6. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CF.1943-5509.0000912](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0000912)
20. Quiel S.E., Naito C.J., Fallon C.T. A non-emulative moment connection for progressive collapse resistance in precast concrete building frames // *Engineering Structures*. 2019. Vol. 179. P. 174–188. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.10.027>
21. Колчунов В.И., Ключева Н.В., Андросова Н.Б., Бухтиярова А.С. Живучесть зданий и сооружений при запроектных воздействиях. М.: Изд-во АСВ, 2014. 208 с. EDN: VTAMII
22. Savin S.Yu., Fedorova N.V. Comparison of methods for analysis of structural systems under sudden removal of a member // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022. Vol. 18. No. 4. P. 329–340. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-329-340>
23. Алмазов В.О., Плотников А.И., Расторгуев Б.С. Проблемы сопротивления зданий прогрессирующему разрушению // *Вестник МГСУ*. 2011. № 2–1. С. 16–20. EDN: OUVYJV
24. Adam J.M., Buitrago M., Bertolesi, Sagaseta J., Moragues J.J. Dynamic performance of a real-scale reinforced concrete building test under a corner-column failure scenario // *Engineering Structures*. 2020. Vol. 210. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110414>
25. Бондаренко В.М., Боровских А.В. Интегральные оценки жесткости конструкций в теории железобетона. Часть 1 // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. Vol. 264. № 1. С. 2–7. EDN: VRDGVB
26. Бондаренко В.М., Боровских А.В. Интегральные оценки жесткости конструкций в теории железобетона. Часть 2 // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. Vol. 265. № 2. С. 2–7. EDN: WMHRQZ

References

1. Pearson C., Delatte N. Ronan Point Apartment Tower Collapse and its Effect on Building Codes. *Journal of Performance of Constructed Facilities*. 2005;19(2):172–177. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0887-3828\(2005\)19:2\(172\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3828(2005)19:2(172))
2. Tagel-Din H., Rahman N.A. Simulation of the Alfred P. Murrah federal building collapse due to blast loads. *AEI 2006: Building Integration Solutions — Proceedings of the 2006 Architectural Engineering National Conference*. 2006;2006:32. [https://doi.org/10.1061/40798\(190\)32](https://doi.org/10.1061/40798(190)32)
3. Belostotsky A.M., Pavlov A.S. Long span buildings analysis under physical, geometric and structural nonlinearities consideration. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2010;6(1-2):80–86. EDN: PZEW
4. Caredda G., Makoond N., Buitrago M., Sagaseta J., Chryssanthopoulos M., Adam J.M. Learning from the progressive collapse of buildings. *Developments in the Built Environment*. 2023;15:100194. <https://doi.org/10.1016/j.dibe.2023.100194>

5. Adam J.M., Parisi F., Sagaseta J., Lu X. Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century. *Engineering Structures*. 2018;173:122–149. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.082>
6. Kokot S., Solomos G. Progressive collapse risk analysis: literature survey, relevant construction standards and guidelines — JRC 32253-2011. *European Commission*. 2012. <https://data.europa.eu/doi/10.2788/70141>
7. Bažant Z.P., Verdure M. Mechanics of Progressive Collapse: Learning from World Trade Center and Building Demolitions. *Journal of Engineering Mechanics*. 2007;133(3):308–319. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:3\(308\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:3(308))
8. Pham A.T., Brenneis C., Roller C., Tan K.-H. Blast-induced dynamic responses of reinforced concrete structures under progressive collapse. *Magazine of Concrete Research*. 2022;74(16):850–863. <https://doi.org/10.1680/jmacr.21.00115>
9. Levitchitch V., Kvasha V., Boussalis H., Chassiakos A., Kosmatopoulos E. Seismic performance capacities of old concrete. *13th World Conference on Earthquake Engineering*. Vancouver, B.C., Canada. 2004. P. 1–15. Available from: https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/13_2182.pdf (accessed: 2.02.2024)
10. Zhou Y. Concrete creep and thermal effects on the dynamic behavior of a concrete-filled steel tube arch bridge. *Journal of Vybroyengineering*. 2014;16(4):1735–1744. Available from: <https://core.ac.uk/download/pdf/323313701.pdf> (accessed: 2.02.2024)
11. Tosic N., Aidarov S., De la Fuente A. Systematic Review on the Creep of Fiber-Reinforced Concrete. *Materials*. 2020;13(5098):5098. <https://doi.org/10.3390/ma13225098>
12. Trekin N., Kodysh E., Shmakov S., Terekhov I., Kudyakov K. Determination of the criteria of deformation in a special limiting state. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021;17(1):108–116. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-1-108-116>
13. Fedorova N.V., Iliushchenko T.A. Influence of pre-stressing over parameters of diagram of static-dynamic de-formation of RC elements. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2019;687(3):033033. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/687/3/033033>
14. Szytniszewski S. Dynamic energy-based method for progressive collapse analysis. *Proceedings of the 2009 Structures Congress — Don't Mess with Structural Engineers: Expanding Our Role*. 2009. P. 1259–1268. [https://doi.org/10.1061/41031\(341\)138](https://doi.org/10.1061/41031(341)138)
15. Szytniszewski S., Krauthammer T. Energy flow in progressive collapse of steel framed buildings. *Engineering Structures*. 2012;42(2):142–153. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.04.014>
16. Savin S., Kolchunov V., Fedorova N., Vu N.T. Experimental and Numerical Investigations of RC Frame Stability Failure under a Corner Column Removal Scenario. *Buildings*. 2023;13(4):908. <https://doi.org/10.3390/buildings13040908>
17. Tamrazyan A. Conceptual Approaches to Robustness Assessment of Building Structures, Buildings and Facilities. *Reinforced concrete Structures*. 2023;3(3):62–74. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/2949-1622.2023.3.62-74>
18. Lizahub A.A., Tur A.V., Tur V.V. Probabilistic Approach for Assessing the Robustness of Structural Systems Made of Precast and Monolithic Reinforced Concrete. *Building and reconstruction*. 2023;108(4):93–105. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2023-108-4-93-105>
19. Fallon C.T., Quiel S.E., Naito C.J. Uniform Pushdown Approach for Quantifying Building-Frame Robustness and the Consequence of Disproportionate Collapse. *Journal of Performance of Constructed Facilities*. 2016;30(6). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CF.1943-5509.0000912](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0000912)
20. Quiel S.E., Naito C.J., Fallon C.T. A non-emulative moment connection for progressive collapse resistance in precast concrete building frames. *Engineering Structures*. 2019;179:174–188. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.10.027>
21. Kolchunov V.I., Klyueva N.V., Androsova N.B., Bukhtiyarova A.S. Robustness of building and structures to undesigned actions. Moscow: ASV Publ.; 2014. (In Russ.) EDN: VTAMIJ
22. Savin S.Yu., Fedorova N.V. Comparison of methods for analysis of structural systems under sudden removal of a member. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):329–340. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-329-340>
23. Almazov V.O., Plotnikov A.I., Rastorguev B.S. Problems of buildings resistance to progressive collapse. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2011;2–1:16–20. (In Russ.) EDN: OUVYJV
24. Adam J.M., Buitrago M., Bertolesi, Sagaseta J., Moragues J.J. Dynamic performance of a real-scale reinforced concrete building test under a corner-column failure scenario. *Engineering Structures*. 2020;210:110414. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110414>
25. Bondarenko V.M., Borovskikh A.V. Integral Estimates of Structure Rigidity in the Theory of Reinforced Concrete. Part 1. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2016;264(1):2–7. (In Russ.) EDN: VRDGVB
26. Bondarenko V.M., Borovskikh A.V. Integral Estimates of Structure Rigidity in the Theory of Reinforced Concrete. Part 2. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2016; 265(2):2–7. (In Russ.) EDN: WMHRQZ

СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ SEISMIC RESISTENCE

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-241-254

УДК 634.075

EDN: QRGONJ

Научная статья / Research article

Методика построения расчетных спектров максимальных реакций на землетрясения

Е.Н. Курбацкий[✉], Е.А. Пестрякова^{id}, Ш.А. Хуссейн^{id}

Российский университет транспорта, Москва, Россия

✉ dynamic.mii@gmail.com

История статьи

Поступила в редакцию: 4 марта 2024 г.

Доработана: 20 мая 2024 г.

Принята к публикации: 27 мая 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. В настоящее время спектр максимальных реакций представляет собой основное понятие в сейсмической инженерии и является удобным средством для представления воздействия землетрясений на сооружения. Он также дает возможность для применения на практике положений динамики конструкций при проектировании конструкций и разработке требований в строительных нормах и правилах. К сожалению, российским проектировщикам эта концепция практически не известна и не используется в расчетах на сейсмостойкость. В российских нормах при расчетах на сейсмостойкость используется концепция динамических коэффициентов, не имеющая физического смысла для землетрясений. Отсутствие в российских нормативных документах по расчету сооружений на сейсмостойкость понятия спектров ответов, по нашему мнению, является серьезной ошибкой. Представление спектров реакций максимальных перемещений, скоростей и ускорений в логарифмических координатах на одном графике позволило выявить закономерности практически любых сейсмических воздействий, что нашло широкое применение в нормативных документах многих стран.

Ключевые слова: коэффициенты динамичности, спектры ответов, комбинированные спектры, сейсмические воздействия

Для цитирования

Курбацкий Е.Н., Пестрякова Е.А., Хуссейн Ш.А. Методика построения расчетных спектров максимальных реакций на землетрясения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 241–254. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-241-254>

Курбацкий Евгений Николаевич, доктор технических наук, академик РАТ, профессор кафедры мостов и тоннелей, Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 8993-9910, ORCID: 0000-0002-8593-0340; E-mail: dynamic.mii@gmail.com

Пестрякова Екатерина Алексеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры мостов и тоннелей, Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 6339-2821, ORCID: 0000-0003-3441-1011; E-mail: kate.pestriakova@gmail.com

Хуссейн Шахд Алрмиш, аспирант кафедры мостов и тоннелей, Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия; ORCID: 0009-0004-8106-9698; E-mail: shahdalrmish@yandex.ru

© Курбацкий Е.Н., Пестрякова Е.А., Хуссейн Ш.А., 2024

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Method of Constructing Maximum Design Response Spectra to Earthquakes

Evgeny N. Kurbatskiy , Ekaterina A. Pestriakova , Shahd A. Hussein 

Russian University of Transport, Moscow, Russia

✉ dynamic.miit@gmail.com

Article history

Received: March 4, 2024

Revised: May 20, 2024

Accepted: May 27, 2024

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. At present, the maximum response spectrum is a basic concept in seismic engineering, providing a convenient means for representing the impact of earthquakes on structures. It also provides a practical approach to the application of structural dynamics principles to the design of structures and the development of requirements in building codes and regulations. Unfortunately, this concept is practically unknown to Russian designers and is not used in seismic resistance calculations. In Russian standards, the concept of dynamic coefficients is used in seismic resistance calculations, which has no physical meaning for earthquakes. The absence of the concept of response spectra in Russian regulatory documents on seismic resistance calculations of structures, in our opinion, is a serious mistake. The presentation of response spectra of maximum displacements, velocities and accelerations in logarithmic coordinates on a single graph made it possible to identify patterns in almost any seismic impacts, which has found wide application in regulatory documents of many countries.

Keywords: dynamic coefficients, response spectra, combined spectra, seismic effects

For citation

Kurbatskiy E.N., Pestriakova E.A., Hussein Sh.A. Method of constructing maximum design response spectra to earthquakes. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):241–254. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-241-254>

1. Введение

Идея использования спектров максимальных реакций для представления сейсмических воздействий была изложена в 1926 г. в бюллетене Института исследования землетрясений Токийского императорского университета в статье первого директора Института К.А. Сюэхиро [1].

Позднее в 1932 г. важную роль в широком признании концепции спектра реакции на землетрясения как практического средства, характеризующего движение грунта и его воздействий на конструкции, сыграли американские ученые [2; 3]. Подробно история возникновения и развития концепции спектров ответов изложена в [4].

В нормах СССР и РФ для оценки сейсмических воздействий используется понятие «спектральный коэффициент динамичности» — β , который является неудачным аналогом спектров реакций. Отметим, что концепция спектров реакций в нормах расчета на сейсмостойкость принята более чем в 50 странах. Известный американский ученый А.К. Чорга в [5] отметил, что «концепция спектров ответов хорошо интегрировалась в теорию и практику инженерных расчетов сооружений на сейсмостойкость, но многие исследователи и инженеры, использующие эту концепцию, не знают проис-

Evgeny N. Kurbatskiy, Doctor of Sciences in Technology, Academician of the Russian Academy of Transport, Professor Department of Bridges and Tunnels, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 8993-9910, ORCID: 0000-0002-8593-0340; E-mail: dynamic.miit@gmail.com

Ekaterina A. Pestriakova, Candidate of Sciences in Technology, Assistant Professor, Department of Bridges and Tunnels, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 6339-2821, ORCID: 0000-0003-3441-1011; E-mail: kate.pestriakova@gmail.com

Shahd A. Hussein, Postgraduate student, Department of Bridges and Tunnels, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia; ORCID: 0009-0004-8106-9698; E-mail: shahdalmish@yandex.ru

хождения концепции. Для того чтобы исправить это положение, сотрудниками кафедры Мосты и тоннели РУТ (МИИТ) были опубликованы критические статьи и монография «Спектры Фурье и спектры ответов на землетрясения».

Спектры максимальных реакций (ответов) — одна из наиболее важных, полезных и широко используемых концепций в теории и практике расчетов сооружений на сейсмостойкость. В настоящее время эта концепция используется практически во всех зарубежных нормативных документах и руководствах по расчету сооружений на сейсмостойкость¹. Ввиду того что в нормах РФ концепция спектров максимальных реакций не нашла применения для дальнейшего изложения, будем руководствоваться положениями UBC² (Единый строительный кодекс), который был признан на международном уровне в качестве эталона в области оценки сейсмостойкости сооружений. Во многих странах, и в частности в Сирийской Арабской Республике, положения UBC были приняты за основу при разработке национальных строительных норм.

1. Концепция спектров максимальных реакций

1.1. Спектр максимальных перемещений

Для определения реакции системы с одной степенью свободы на кинематическое возбуждение основания используется расчетная схема, представленная на рис. 1.

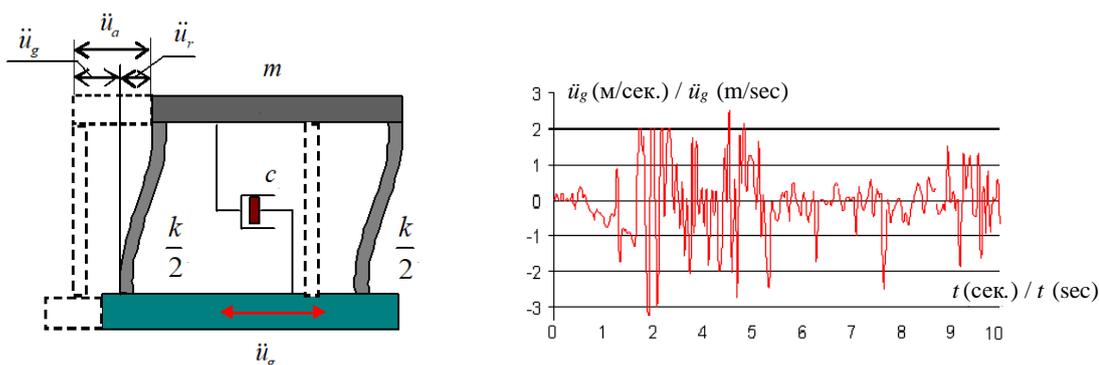


Рис. 1. Расчетная схема системы с одной степенью свободы и акселерограмма колебаний поверхности грунта при землетрясении

И с т о ч н и к : выполнено Е.Н. Курбацким

Figure 1. Single-degree of freedom system and ground acceleration during earthquake

S o u r c e : compiled by E.N. Kurbatskiy

Дифференциальное уравнение движения такой системы имеет вид

$$m\ddot{u}_a + c\dot{u}_r + ku_r = 0. \quad (1)$$

Учитывая, что в (1) $\ddot{u}_a = \ddot{u}_g + \ddot{u}_r$,

где \ddot{u}_a — абсолютное ускорение, \ddot{u}_g — переносное ускорение и \ddot{u}_r — относительное ускорение

и $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — частота собственных колебаний системы без учета демпфирования, можно представить

в виде

¹ Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings. Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance Part 2: Bridges. BS 1998-2:2005+A1:2009. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary ASCE 4-98. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures ASCE/SEI 4-16.

² IBC, International Building Code Council, Washington, DC, 2015.

$$\ddot{u}_r + 2\xi\omega\dot{u}_r + \omega^2u_r = -\ddot{u}_g, \quad (2)$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} \text{ — относительный коэффициент демпфирования (отношение реального демпфирования к критическому).}$$

Величина относительного коэффициента демпфирования строительных конструкций находится в пределах $0,005 \leq \xi \leq 0,07$.

Перемещения для систем с разными собственными частотами при воздействии землетрясений можно определить из решения уравнения (2) в виде интеграла Дюамеля:

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega(t - \tau) e^{-\omega\xi(t-\tau)} d\tau \quad (3)$$

В качестве примера будем использовать акселерограмму измитского землетрясения (рис. 2. Турция, 1999).

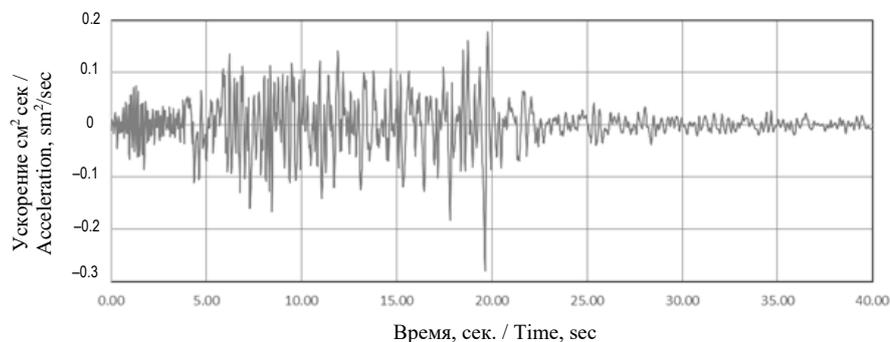


Рис. 2. Акселерограмма колебаний поверхности грунта при землетрясении Измит, Турция, 1999 г.

И с т о ч н и к : выполнено Ш.А. Хуссейн

Figure 2. Ground acceleration during earthquake Izmit, Türkiye, 1999

S o u r c e : compiled by Sh.A. Hussein

Для построения спектра максимальных перемещений необходимо определить, как будут реагировать на это землетрясение системы с разными собственными периодами колебаний и выбрать в каждом случае только максимальные значения.

Графики перемещений систем с одной степенью свободы с разными периодами собственных колебаний представлены на рис. 3–7.

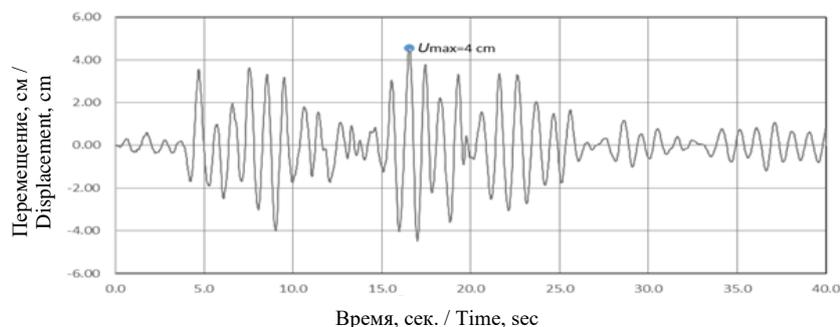


Рис. 3. Уравнения вынужденных колебаний системы, собственный период колебаний которой $T = 1$ сек.

И с т о ч н и к : выполнено Ш.А. Хуссейн

Figure 3. Deformation response of SDOF system with $T = 1$ sec to Izmit earthquake

S o u r c e : compiled by Sh.A. Hussein

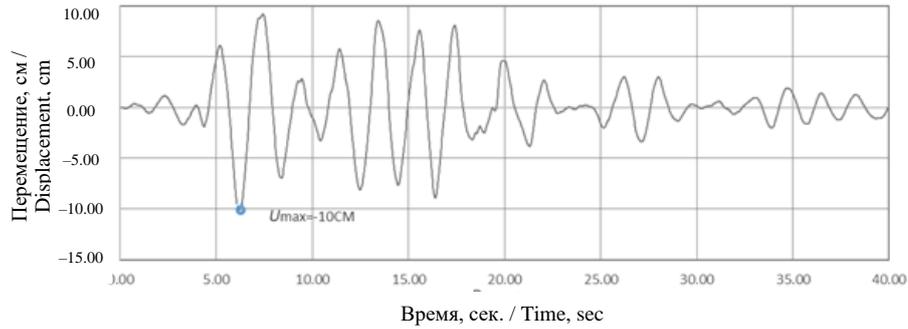


Рис. 4. Уравнения вынужденных колебаний системы, собственный период колебаний которой $T = 2$ сек.

И с т о ч н и к : выполнено Ш.А. Хуссейн

Figure 4. Deformation response of SDOF system with $T = 2$ sec to Izmit earthquake
S o u r c e : compiled by Sh.A. Hussein

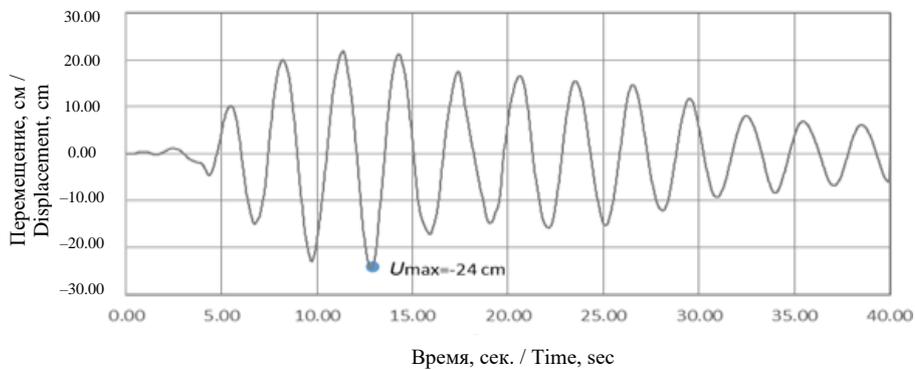


Рис. 5. Уравнения вынужденных колебаний системы, собственный период колебаний которой $T = 3$ сек.

И с т о ч н и к : выполнено Ш.А. Хуссейн

Figure 5. Deformation response of SDOF system with $T = 3$ sec to Izmit earthquake
S o u r c e : compiled by Sh.A. Hussein

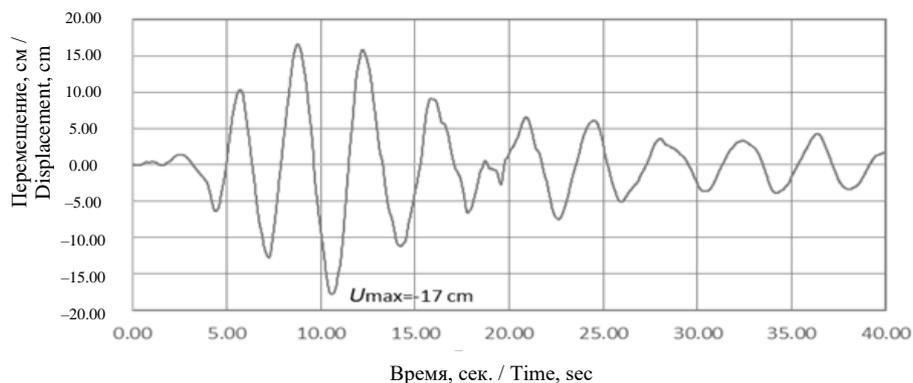


Рис. 6. Уравнения вынужденных колебаний системы, собственный период колебаний которой $T = 4$ сек.

И с т о ч н и к : выполнено Ш.А. Хуссейн

Figure 6. Deformation response of SDOF system with $T = 4$ sec to Izmit earthquake
S o u r c e : compiled by Sh.A. Hussein

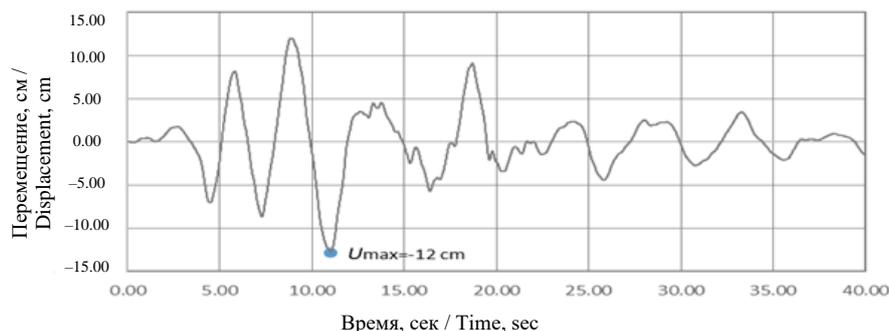


Рис. 7. Уравнения вынужденных колебаний системы, собственный период колебаний которой $T = 5$ сек.

И с т о ч н и к : выполнено Ш.А. Хуссейн

Figure 7. Deformation response of SDOF system with $T = 5$ sec to Izmit earthquake
S o u r c e : compiled by Sh.A. Hussein

Для построения спектра максимальных перемещений используются только значения максимальных перемещений, соответствующих заданным периодам собственных колебаний. При построении спектров максимальных перемещений применяются абсолютные значения.

График спектра максимальных перемещений представлен на рис. 8.

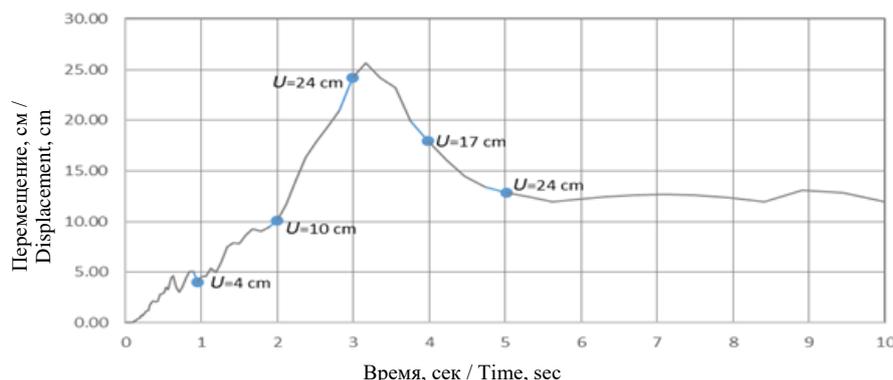


Рис. 8. Спектр максимальных перемещений (см) для систем с коэффициентом демпфирования $\zeta = 0,05$ при воздействии землетрясения Измит

И с т о ч н и к : выполнено Ш.А. Хуссейн

Figure 8. Deformation response spectra with damping ratio $\zeta = 0.05$ to Izmit earthquake
S o u r c e : compiled by Sh.A. Hussein

2. Спектры и псевдоспектры максимальных реакций (ответов) скоростей и ускорений

Спектры максимальных скоростей и ускорений можно определить, используя первую и вторую производные интеграла Дюамеля (3).

Доказано [2; 3], что для систем с коэффициентами демпфирования, определяемыми диапазоном $0 < \xi < 0,2$, для построения спектров максимальных реакций можно использовать приближенные соотношения

$$S_{pv}(\omega, \xi) = \omega S_d(\omega, \xi) = \frac{S_{pa}(\omega, \xi)}{\omega}. \quad (4)$$

Так как выражения $S_{pv}(\omega, \xi)$ и $S_{pa}(\omega, \xi)$ отличаются от реальных спектров $S_v(\omega, \xi)$ и $S_{av}(\omega, \xi)$, их принято называть псевдоспектрами.

Таким образом, для построения спектров достаточно определить только спектр псевдоскоростей по формуле

$$S_{pv}(\omega, \xi) = \left[\int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin \omega(t - \tau) e^{-\omega \xi(t - \tau)} d\tau \right]_{\max}^2. \quad (5)$$

Кроме того, псевдоспектр скоростей выбирается в качестве исходного ввиду того, что псевдоспектр максимальных скоростей практически равен амплитудному спектру Фурье ускорений колебаний грунта, что существенно ускоряет и упрощает обработку сейсмической информации.

Ввиду того что сравнение графиков спектров и псевдоспектров скоростей и ускорений, показывающих их несущественное отличие, приводится в многочисленных источниках, в частности в [2–4], примеры приводить не будем.

Каждый из спектров максимальной реакции: перемещений, псевдоскоростей и псевдоускорений на заданное колебание грунта содержит одну и ту же информацию, не больше и не меньше. Три спектра — просто разные способы представления одной и той же информации о реакции сооружений. Возникает вопрос зачем нужны эти три спектра, если они содержат одинаковую информацию?

Ответ: во-первых, каждый спектр напрямую представляет важную физическую величину. Спектр перемещений определяет максимальные деформации системы. Спектр псевдоскоростей определяет максимальную энергию, накопленную системой при землетрясении. Спектр псевдоускорений определяет пиковое значение эквивалентной статической силы при сдвиге основания.

Во-вторых, все три спектра можно представить на одном графике для более удобного аппроксимирования для целей проектирования. Для этого особенно полезен комбинированный график, представляющий все три спектральные величины. В зарубежных источниках такой спектр получил название «Комбинированный D-V-A спектр», соответствующий первым буквам слов Displacement (перемещение), Velocity (скорость) и Acceleration (ускорение). Впервые графики такого типа были построены учеными А.С. Veletsos и N.M. Newmark в 1960 г. [6].

Для построения комбинированных графиков строится специальная логарифмическая сетка. Пример такой сетки приводится на рис. 9.

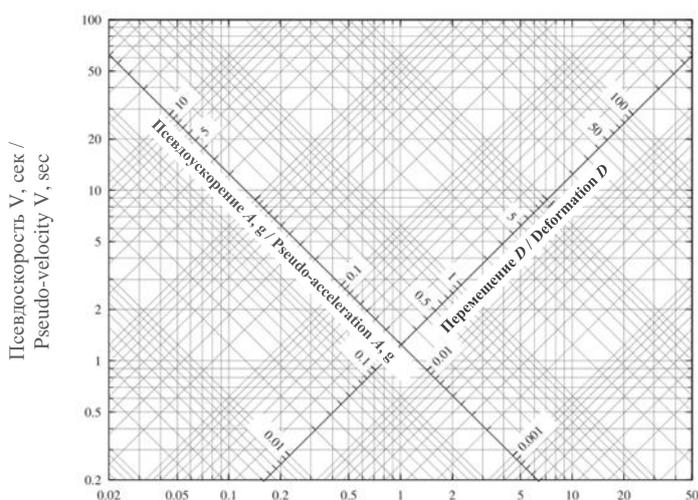


Рис. 9. Логарифмическая сетка для построения комбинированного спектра D-V-A
И с т о ч н и к : Чопра А.К. [7]

Figure. 9. Logarithmic grid for constructing a combined D-V-A spectrum
S o u r c e : Chopra A.K. [7]

3. Комбинированный трехординатный график максимальных реакций в логарифмических координатах

Ввиду того что в российских нормативных документах о спектрах перемещений, скоростей и ускорений даже не упоминается, подробно опишем методику построения координатной сетки для комбинированного трехординатного графика спектров реакций.

Для построения четырехкоординатного графика максимальных реакций воспользуемся следующими соотношениями:

$$S_{pv} = \omega S_d \quad \text{и} \quad S_{pv} = \frac{S_{pa}}{\omega}, \quad (6)$$

где S_d — спектр максимальных перемещений; S_{pv} — псевдоспектр максимальных скоростей и S_{pa} — псевдоспектр максимальных ускорений при воздействии реального землетрясения.

3.1. Методика построения трехординатной сетки координат в зависимости от круговой частоты

Предварительно отметим, что графики, в зависимости от круговой частоты, на практике используются реже по сравнению с графиками в зависимости от периода собственных колебаний. Но графики, в которых по горизонтальной оси откладываются собственные частоты, более наглядны и удобны при объяснении. Поэтому начнем объяснение именно с этих графиков.

Представим псевдоспектр максимальных скоростей как функцию круговой частоты ω в логарифмических координатах: $\log S_v$ ордината и $\log(\omega)$ абсцисса.

Выбрав точку $S_v = 1$ и $\omega = 1$ в качестве начала координат, проведем вертикальную и горизонтальную оси с одинаковым логарифмическим масштабом (рис. 10).

Для построения координатной сетки для псевдоспектра ускорений рассмотрим выражение

$$\log S_{pv} = -\log \omega + \log S_{pa}, \quad (7)$$

которое следует из уравнений (6) при логарифмировании.

При постоянном значении параметра S_{pa} уравнение (7) представляет собой прямую линию, направленную под углом -45 градусов. Линии координатной сетки, соответствующие постоянным и различным значениям спектра S_{pa} , будут также направлены под углом -45 градусов. Ось ординат спектра S_{pa} будет направлена перпендикулярно этим линиям (рис. 10). Для упрощения введем следующие обозначения для точек на шкалах: A — для шкалы псевдоускорений, V — шкалы псевдоскоростей и D — для шкалы перемещений.

Установим соответствие между шкалами.

Точке A на оси S_{pa} должны соответствовать координаты $S_{pv} = \sqrt{A}$ и $\omega = \sqrt{A}$, для того чтобы удовлетворить условию $S_{pa} = \omega S_{pv}$.

Значения координат должны быть равными, так как ось S_{pa} направлена под углом 45 градусов.

На рис. 10 в качестве примера жирными линиями отмечены три точки с координатами [(3)(9)(3)]; [(2)(4)(2)] и [(0,2)(0,004)(0,2)].

Для построения координатной сетки для перемещений рассмотрим выражение

$$\log S_{pv} = \log \omega + \log S_d, \tag{8}$$

которое также следует из уравнения (7) при логарифмировании.

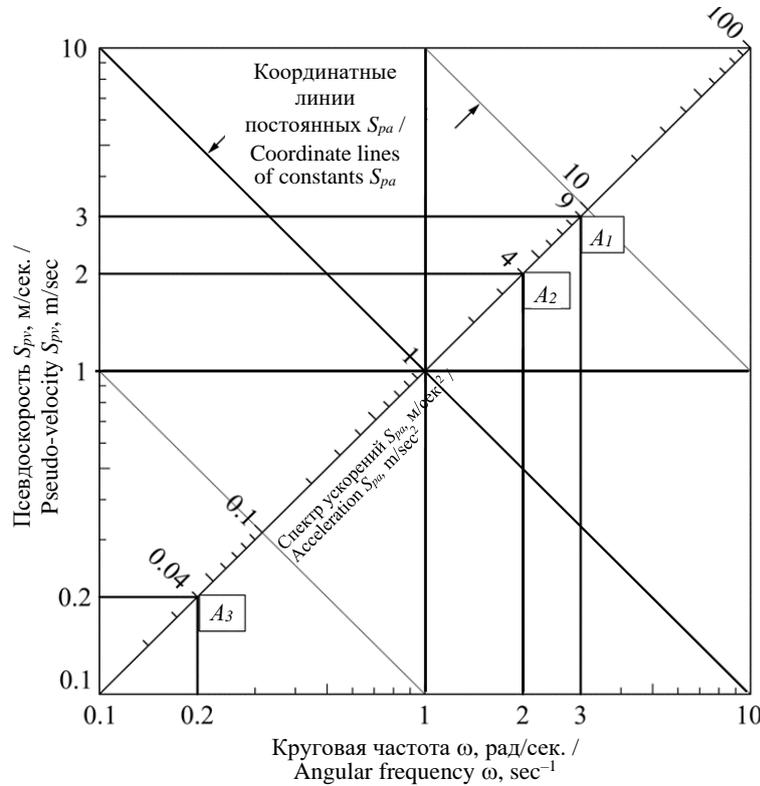


Рис. 10. Координатная сетка для псевдоспектров ускорений в зависимости от круговой частоты, рад/сек.

И с т о ч н и к : выполнено Е.А. Пестряковой

Figure 10. Coordinate grid for pseudo-spectra of accelerations depending on the angular frequency, rad/sec

S o u r c e : compiled by E.A. Pestriakova

При постоянном значении S_d , уравнение (7) представляет собой прямую линию, направленную под углом 45 градусов. Таким образом, линии координатной сетки, соответствующие постоянным значениям спектра S_d , будут направлены также под углом 45 градусов. Ось ординат спектра S_d будет направлена перпендикулярно этим линиям (рис. 10).

Установим соответствие между шкалами.

Точке D на оси S_d должны соответствовать координаты $S_{pa} = \sqrt{D}$ и $\omega = 1/\sqrt{D}$ для того, чтобы

удовлетворить уравнению $S_d = \frac{S_{pv}}{\omega}$, учитывая, что ось S_d направлена под углом -45 градусов.

На рис. 11 в качестве примера жирными линиями отмечены три точки с координатами [(2)(4)(0,5)]; [(1)(1)(1)] и [(0,2)(0,004)(5,0)].

Объединяя оба графика, представим координатную сетку для комбинированного трехординатного спектра (рис. 12), принимая во внимание четыре координатные оси: две горизонтальные и вертикальную и две оси, направленные под углом 45 градусов и -45 градусов. В некоторых литературных источниках графики, построенные таким образом, называют комбинированными четырехкоординатными графиками.

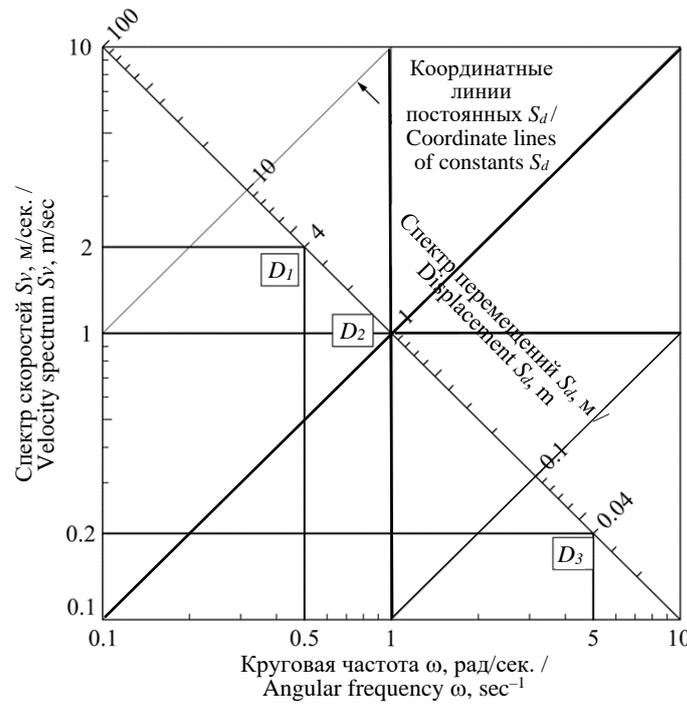


Рис. 11. Координатная сетка для перемещений в зависимости от круговой частоты

И с т о ч н и к : выполнено Е.А. Пестряковой

Figure 11. Coordinate grid for displacements depending on the angular frequency

S o u r c e : compiled by E.A. Pestriakova

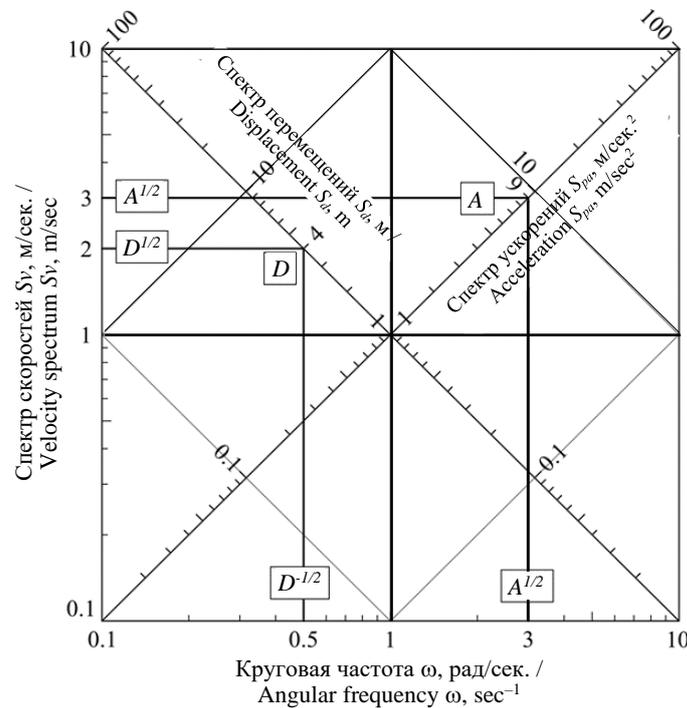


Рис. 12. Координатная сетка для построения объединенного трехординатного спектра максимальных перемещений, псевдоскоростей и псевдоускорений в зависимости от круговой частоты, рад/сек.

И с т о ч н и к : выполнено Е.А. Пестряковой

Figure 12. Coordinate grid for constructing a combined three-coordinate spectrum of maximum displacements, velocities and accelerations depending on the angular frequency, rad/sec.

S o u r c e : compiled by E.A. Pestriakova

3.2. Методика построения трехординатной системы координат в зависимости от периода собственных колебаний

Графики спектров максимальных реакций можно построить в зависимости от круговой частоты ω (рад/сек.), циклической частоты f (герцы) и в зависимости от периода собственных колебаний T . Все эти графики представляют одну и ту же информацию и имеют право на существование. Для инженеров наиболее удобным, понятным и привлекательным понятием является период собственных колебаний. Поэтому в нормативных документах наиболее часто используются спектры максимальных реакций в зависимости от периода собственных колебаний.

Для построения спектров максимальных реакций в зависимости от периодов собственных колебаний используется методика, аналогичная методике, подробно изложенной в предыдущем разделе. Поэтому отметим только основное отличие.

В уравнениях (6) круговая частота заменяется выражением $\omega = \frac{2\pi}{T}$. В результате получим

$$S_{pv} = \frac{2\pi}{T} S_d \quad \text{и} \quad S_{pa} = T \frac{S_{pa}}{2\pi}. \tag{9}$$

Так как период собственных колебаний T является величиной, обратной круговой частоте ω , направление горизонтальной оси меняется на противоположное. Кроме того, наличие множителя 2π приводит к смещению графиков по горизонтали.

Пример координатной сетки для трехординатного графика максимальных спектров ответов приведен на рис. 13.

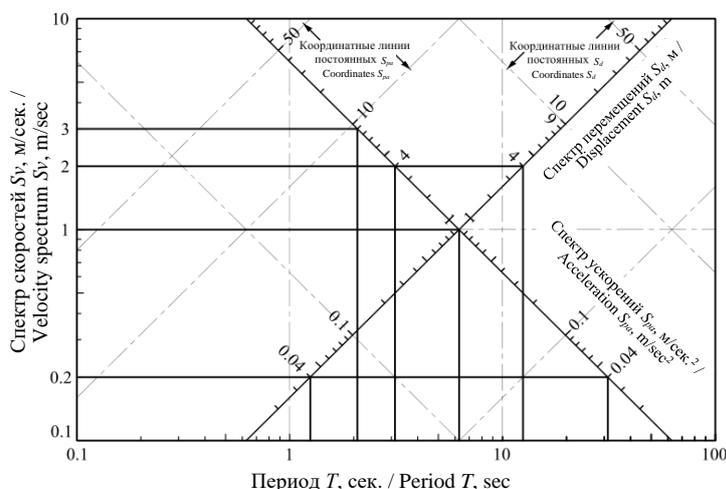


Рис. 13. Координатная сетка для для трехординатного графика максимальных спектров ответов

И с т о ч н и к : выполнено: Е.А. Пестряковой

Figure 13. Coordinate grid for a three-coordinate graph of maximum response spectra

S o u r c e : compiled by E.A. Pestriakova

4. Преимущества представления спектров реакций в трехординатной системе координат

Спектры различных землетрясений отличаются между собой. Тем не менее представление спектров реакций максимальных перемещений, скоростей и ускорений в логарифмических координатах на одном графике позволило выявить закономерности практически любых сейсмических воздействий [4]. Обработано большое количество записей акселерограмм землетрясений, что позволило построить

огibaющие и осредненные спектры максимальных реакций. Примеры пяти спектров различных землетрясений, среднего спектра (кривая красного цвета) и огibaющего спектра (белая линия) представлены на рис. 14.

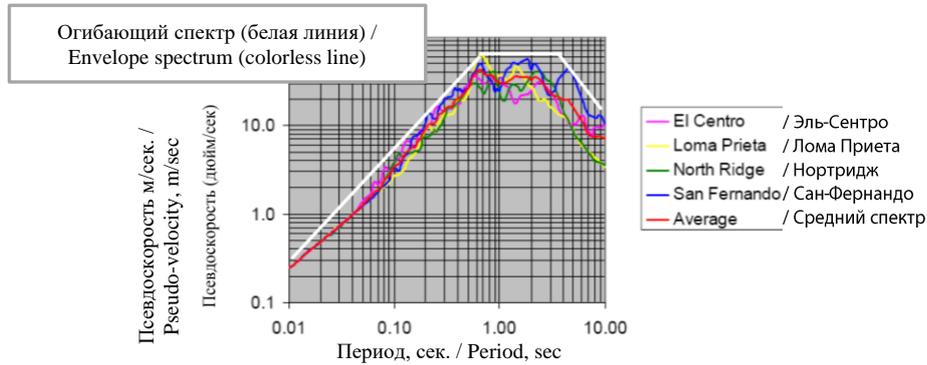


Рис. 14. Примеры комбинированных спектров D-V-A четырех землетрясений, среднего спектра (красная линия) и огibaющего спектра (белая линия)

И с т о ч н и к : выполнено Е.Н. Курбацким

Figure 14. Examples of combined D-V-A spectra of four earthquakes, the average spectrum (red line) and the envelope spectrum (white line)

S o u r c e : compiled by E.N. Kurbatskiy

5. Использование представления спектров максимальных реакций в виде трехординатного графика для построения расчетных спектров ответов в нормативных документах

Представление спектров максимальных реакций в виде трехординатного графика позволяет выделить области спектров, которые можно аппроксимировать отрезками прямых, и выделить характерные точки. На рис. 15 представлен пример спектра с указанием характерных областей и точек из работ [4; 6] Это свойство используется для построения расчетных спектров.

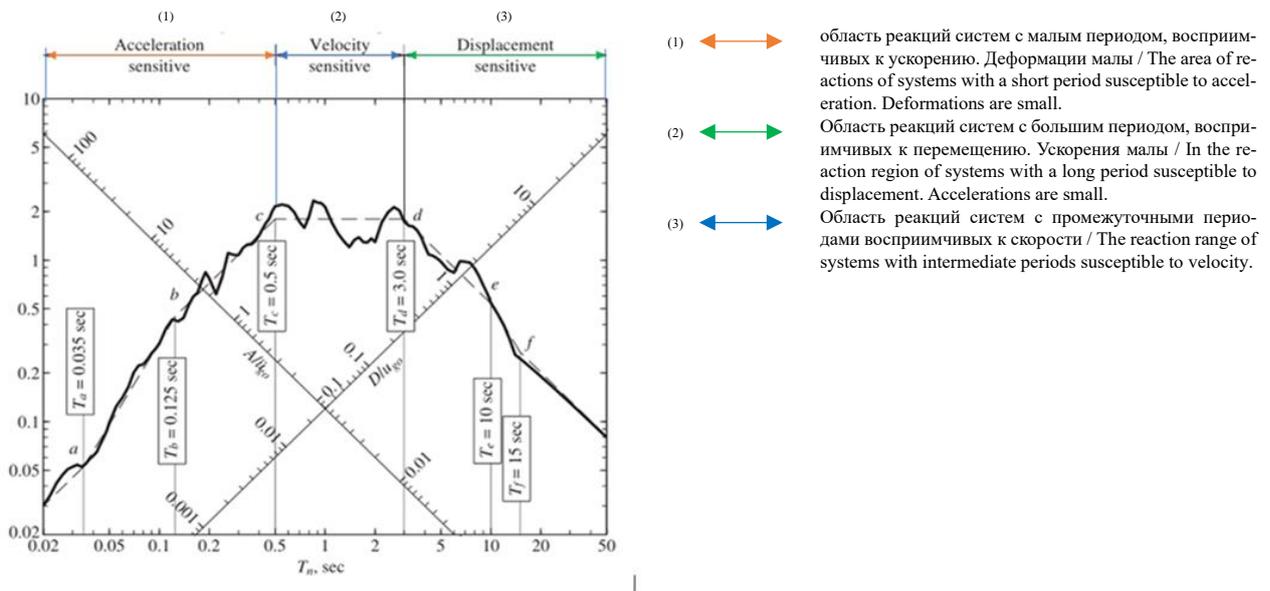


Рис. 15. Спектр реакций на землетрясение с обозначением характерных точек и соответствующих им периодов

И с т о ч н и к : Курбацкий Е.Н. и др. [8]

Figure 15. Earthquake response spectrum with characteristic points and corresponding periods

S o u r c e : Kurbatskiy E.N. et al. [8]

В настоящее время в мире разработаны методики построения расчетных спектров, учитывающих локальные инженерно-геологические условия. В наиболее часто используемой методике, разработанной Ньюмарком и Холлом, в качестве исходных параметров применяются максимальные значения перемещений PGD, скоростей PGV и ускорений PGA грунта, которые умножаются на коэффициенты, зависящие от категории грунтов. На рис. 16 представлен спектр Ньюмарка — Холла и спектр, принятый в европейских нормах.

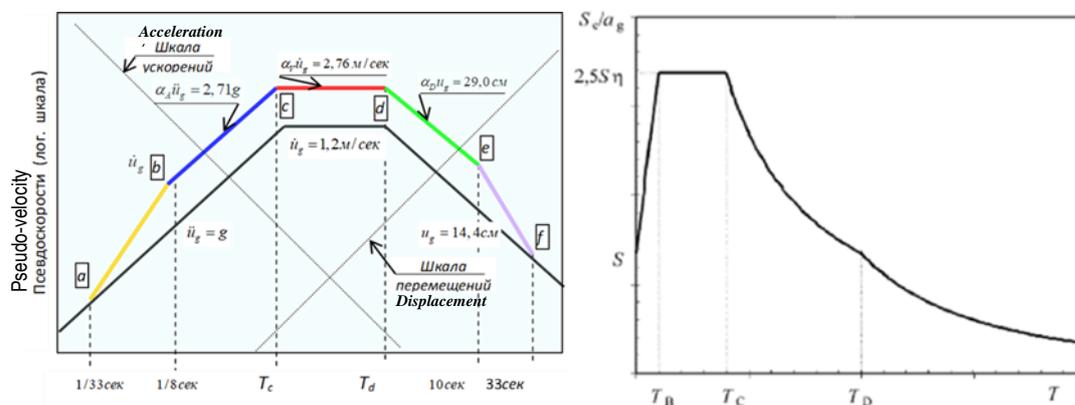


Рис. 16. Спектр Ньюмарка — Холла и EN 1998-1:2004

И с т о ч н и к : Е.Н. Курбацкий [4]

Figure 16. Newmark — Hall and EN 1998-1:2004 spectra

S o u r c e : E.N. Kurbatskiy [4]

Для построения таких спектров необходимо вместо сейсмического районирования в баллах иметь карты сейсмического районирования в изосейсмах ускорений, которые пока, к сожалению, в РФ отсутствуют. В заключение приведем выдержку из статьи известного советского и российского сейсмолога В.И. Уломова, датированной 2012 г.: «И, хотя в отечественной строительной практике до сих пор используется пересчет баллов в ускорения по шкале МСК-64, необходимо отметить, что такой пересчет не учитывает спектральный состав сейсмического воздействия и в силу этого должен очень осторожно применяться для инженерных расчетов без должного обоснования».

6. Заключение

При расчете сооружений на сейсмостойкость важную роль играет способ задания исходной сейсмической информации.

Исходная сейсмическая информация в нормах Российской Федерации не соответствует современным достижениям сейсмической инженерии.

Нормативные документы по сейсмостойкости и районированию, разработанные зарубежными специалистами в области сейсмической инженерии, существенно отличаются от российских.

В отличие от российских международные стандарты, как правило, содержат математические модели и расчетные схемы, разработанные специалистами в области механики сплошных сред и инженерами-строителями, что позволило приблизить сейсмическое районирование и содержание норм к нуждам сейсмостойкого строительства, а также к снижению сейсмического риска.

Выводы

1. В нормах на сейсмостойкость следует отказаться от концепции динамических коэффициентов, не имеющей физического смысла для землетрясений.

2. Разработать концепцию спектров максимальных реакций на землетрясения, учитывая зарубежный опыт.

3. Построение комбинированных спектров ответов D-V-A в логарифмических координат позволит определить характерные точки спектров реакций.

4. Информация о характерных точках спектров максимальных реакций даст возможность построить карты сейсмического районирования РФ в изосейсмах ускорений.

5. Карты в изосейсмах ускорений позволят отказаться от грубого и неточного районирования в баллах, которое нигде в мире не используется.

Список литературы

1. *Suyehiro K.* A seismic vibration analyser and the records obtained therewith // *Bulletin of the Earthquake Research Institute-University of Tokyo*. 1926. Vol. 1. P. 59–64.
2. *Biot V.A* Theory of vibration of building during earthquakes // *Zeitschrift fur Angewandte Matematic und Mechanik*. 1934. Vol. 14. Issue 4. P. 213–233.
3. *Hudson D.E.* Response spectrum techniques in engineering seismology // *Proceedings of the First World Conference on Earthquake Engineering*. Berkley, CA, 1956.
4. *Курбатовский Е.Н.* Спектры Фурье и спектры ответов на землетрясения. М.: ЕАСА (Eurasian SEISMO Association): АНО «СРОСЭКСПЕРТИЗА»: «Onebook.ru», 2018. 156 с.
5. *Chopra A.K.* Elastic response spectrum: a historical note // *Earthquake engineering and structural dynamics*. 2007. Vol. 36. P. 3–12.
6. *Veletsos A.S., Newmark N.M.* Response Spectra for Single-Degree of freedom Elastic and Inelastic Systems // *Report No. RTD-TRD-63-3096 Vol. III Air Force Weapon Laboratory Albuquerque. N.M.* June 1964. URL: https://archive.org/details/DTIC_AD0444989/page/n3/mode/2up?view=theater
7. *Chopra A.K.* *Dynamic of Structures. Theory and application to Earthquake Engineering*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Publ., 1995. 793 p. ISBN: 0-13-855214-2
8. *Курбатовский Е.Н., Мондрус В.Л., Титов Е.Ю., Емельянова Г.А., Пестрякова Е.А.* Устаревшие положения норм Российской Федерации, регламентирующие строительство в сейсмических районах // *Academia. Архитектура и строительство*. 2024. № 1. С. 159–165. <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2024-1-159-165>

References

1. *Suyehiro K.* A seismic vibration analyser and the records obtained therewith. *Bulletin of the Earthquake Research Institute-University of Tokyo*. 1926;1:59–64.
2. *Biot V.A* Theory of vibration of building during earthquakes. *Zeitschrift fur Angewandte Matematic und Mechanik*. 1934;14(4):213–233.
3. *Hudson D.E.* Response spectrum techniques in engineering seismology. *Proceedings of the First World Conference on Earthquake Engineering*. Berkley, CA, 1956.
4. *Chopra A.K.* Elastic response spectrum: a historical note. *Earthquake engineering and structural dynamics*. 2007; 36:3–12.
5. *Kurbatskiy E.N.* *Fourier spectra and earthquake response spectra*. Moscow: EASA (Eurasian SEISMO Association): АНО “СРОСЭКСПЕРТИЗА”: “Onebook.ru”; 2018.
6. *Veletsos A.S., Newmark N.M.* Response Spectra for Single-Degree of freedom Elastic and Inelastic Systems. *Report No. RTD-TRD-63-3096 Vol. III Air Force Weapon Laboratory Albuquerque. N.M.* 1964. URL: https://archive.org/details/DTIC_AD0444989/page/n3/mode/2up?view=theater
7. *Chopra A.K.* *Dynamic of Structures. Theory and application to Earthquake Engineering*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Publ.; 1995. ISBN: 0-13-855214-2
8. *Kurbatskiy E.N., Mondrus V.L., Titov E.Yu., Emel’yanova G.A., Pestryakova E.A.* Outdated Provisions of the Russian Federation Norms Regulating Construction in Seismic Areas. *Academia. Architecture and Construction*. 2024;(1): 159–165. <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2024-1-159-165>

DOI 10.22363/1815-5235-2024-20-3-255-264

UDC 624.04:624.074

EDN: QXCZMC

Research article / Научная статья

Influence of Damage Level on Dynamic Characteristics of Reinforced Concrete Structures when Assessing their Seismic Resistance

Ashot G. Tamrazyan^{ORCID}, Maksim V. Kudryavtsev^{ORCID}✉

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), *Moscow, Russia*

✉ KudryavtsevMV@mgsu.ru

Article history

Received: March 15, 2024

Revised: May 21, 2024

Accepted: May 30, 2024

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. Many buildings during their operational period incur damage of different origin: man-made, natural, operational, etc. Dynamic tests are performed for detailed assessment of the technical condition of buildings and structures in accordance with the regulatory documents for general analysis of the building damage state. In a large number of papers, the results of comparison of full-scale tests and numerical analysis using finite element method are presented. When analyzing the results, it can be concluded that the dynamic method is reliable, but has several limitations. The advantage of the dynamic method of building damage assessment is the possibility to adjust finite element models in software systems taking into account results obtained from in-situ tests, which allows to obtain more accurate results for the assessment of bearing capacity under seismic loading. To examine the effect of damage to buildings on their seismic resistance, an experiment with corrosion-damaged reinforced concrete columns was performed. The result of the first stage of the experiment is the assessment of the change in dynamic characteristics (eigenfrequency, vibration decrement, vibration damping coefficient, etc.) of reinforced concrete column specimens subjected to corrosion damage.

Keywords: vibration frequency, corrosion, reinforced concrete, vibration decrement, experimental studies, damage, dynamic method

For citation

Tamrazyan A.G., Kudryavtsev M.V. Influence of damage level on dynamic characteristics of reinforced concrete structures when assessing their seismic resistance. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3): 255–264. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-255-264>

Ashot G. Tamrazyan, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 2636-2447, ORCID: 0000-0003-0569-4788; E-mail: tamrazian@mail.ru

Maksim V. Kudryavtsev, Postgraduate student, Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Russia; eLIBRARY SPIN-code: 2543-0639, ORCID: 0000-0002-2585-5684; E-mail: KudryavtsevMV@mgsu.ru

© Tamrazyan A.G., Kudryavtsev M.V., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Влияние уровня повреждений на динамические характеристики железобетонных конструкций при оценке их сейсмостойкости

А.Г. Тамразян , М.В. Кудрявцев  

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

 KudryavtsevMV@mgsu.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 15 марта 2024 г.

Доработана: 21 мая 2024 г.

Принята к публикации: 30 мая 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Большое количество зданий за свой эксплуатационный период приобретают повреждения различного происхождения: техногенного, природного, эксплуатационного и др. Для детальной оценки технического состояния зданий и сооружений в соответствии с нормативными документами проводят динамические испытания для общего анализа состояния поврежденности здания. Во многих работах отечественных и зарубежных авторов приведены результаты сопоставления натурных испытаний и численных расчетов методом конечных элементов. При анализе результатов можно сделать выводы, что динамический метод является достоверным, однако имеет ряд ограничений. Преимуществом динамического метода оценки повреждений зданий является возможность корректировки конечно-элементных моделей в программных комплексах с учетом полученных результатов по натурным испытаниям, что позволяет получить более точные результаты для оценки несущей способности в условиях сейсмических воздействий. Для уточнения сведений о влиянии повреждений зданий на их сейсмостойкость был поставлен эксперимент на коррозионно-поврежденных железобетонных колоннах. Результатом первого этапа эксперимента является оценка изменения динамических характеристик (собственная частота, декремент колебаний, коэффициент затухания колебаний и др.) железобетонных образцов колонн, подверженных коррозионным повреждениям.

Ключевые слова: частота колебаний, коррозия, железобетон, декремент колебаний, экспериментальные исследования, повреждение, динамический метод

Для цитирования

Tamrazyan A.G., Kudryavtsev M.V. Influence of damage level on dynamic characteristics of reinforced concrete structures when assessing their seismic resistance // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 3. С. 255–264. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-255-264>

1. Introduction

During operation, buildings and structures sustain damage, the origin of which can be divided into two main categories: man-made (explosions, fires, removal of structural elements, accidents) and natural. In the modern world, reinforced concrete buildings and structures account for 70–80% of the total volume of construction. Due to the influence of aggressive media, as well as man-induced factors, the process of corrosion of load-bearing reinforced concrete elements can start, which in turn leads to a decrease in the

Тамразян Ашот Георгиевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 2636-2447, ORCID: 0000-0003-0569-4788; E-mail: tamrazian@mail.ru

Кудрявцев Максим Владимирович, аспирант кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 2543-0639, ORCID: 0000-0002-2585-5684; E-mail: k.m.v.29.12.96@yandex.ru

rigidity and load-bearing capacity of the building. Special attention should be paid to the assessment of the technical condition of existing buildings located in seismic regions of the Russian Federation. Considering the reduction of stiffness parameters of buildings due to existing damage, integral dynamic characteristics are noticeably reduced. Assuming unchanged mass characteristics of the object, the eigenfrequencies of vibration become lower, which in turn affects such parameters as the period and shape of free vibrations, which characterize the degree of dynamic impact on the object and the change in shape at various points under study [1–5].

The main regulatory document in the field of monitoring and technical inspection of buildings and structures is GOST 31937-2011¹ interstate standard. This document regulates the definition of dynamic parameters of buildings and structures, which characterize the dynamic properties that are exposed under dynamic loads. The definition of dynamic properties includes frequencies, periods, decrements (X , Y , Z axes) of vibrations, transfer functions of the structure (as well as its individual parts and elements) [6].

Measurement of dynamic parameters should be performed after the construction of the facility, as well as 2 years after. If the measurement results of the dynamic characteristics do not differ by more than 10% from the previous inspection, the subsequent measurement must be repeated after 2 years. If the deviation of 10% from the original parameters is exceeded, a full mandatory unscheduled inspection should be carried out.

In addition, these dynamic parameters can be used for the following tasks:

- refinement (validation) of the numerical model;
- evaluation of the actual seismic resistance;
- implementation of seismic strengthening measures;
- determination of the damage degree;
- localization of damage locations.

The main measurement rules and instrumental methods for determining eigenfrequencies, periods and logarithmic decrements of vibrations are established by GOST R 54859-2011² national standard of the Russian Federation.

The main purpose of the study is to investigate the influence of the level of corrosion damage of reinforced concrete structures on the change of their dynamic characteristics. Based on the obtained and analyzed data on the influence of corrosion on the dynamics of reinforced concrete structures located in earthquake-prone regions, it is possible to predict their earthquake resistance.

2. Methods

In [7], seismic resistance of a cast-in-situ reinforced concrete building was evaluated based on experimental data from the Polytechnic University in Hong Kong. The tower-type building was subjected to structural damage. At each stage, the fundamental vibration frequency was measured at each damage level, and the results are summarized in Table 1.

The building was modeled in Abaqus CAE, and according to the calculation results, the building collapse occurs at the degree of reduction of natural vibration frequency $\geq 15\%$. The calculation results confirm the results of the field experiment.

In [8], short-term monitoring of 6 multistory buildings of different years of construction (from 1973 to 2014), with different number of storeys and sections was performed. Monitoring was conducted between July and October 2017. Based on the test results, the author concludes that the method of dynamic monitoring can be applied to assess building damage as an integral method with mandatory additional technical inspection.

¹ GOST 31937-2011. Buildings and constructions. Rules of inspection and monitoring of the technical condition. Moscow: Standartinform Publ.; 2014.

² GOST R 54859-2011. Buildings and constructions. Determination of the parameters of the basic tone of free oscillations of buildings. Moscow: Standartinform Publ.; 2012.

Table 1

Results of the experiment in paper

Degree of damage	Value of fundamental vibration frequency, Hz	Decrease in frequency of natural vibration, %
No damage	4.61	0
Light	4.55	1.3
Moderate	4.32	6.3
Serious (severe)	3.70	19.7
Catastrophic (before complete destruction)	2.58	44.0

Source : Chauskin A.Yu. [7]

In [9], an experimental evaluation of an 11-storey frame building of the KUB-2.5 series was performed to analyze the level of seismic resistance of residential buildings. The research results are based on the parametric analysis of forced vibrations (microseismic vibrations), which allowed to estimate the change in the integral stiffness of load-bearing structures due to damage accumulation. The initial dynamic characteristics were determined, which will allow further monitoring of the technical condition of the building.

The author of [10] states that the advantage of the dynamic control method is its “integrality”, which reflects the deformation of bond of reinforcement with concrete in reinforced concrete structures, and allows to evaluate strength, stiffness and crack resistance. The author investigated a reinforced concrete beam with a length of 6 meters and a cross section of 40×70 cm. The beam had a 15×15×3 cm defect located at a distance of 3 meters from one of the supports. The modeling was performed in ANSYS PC (Figure 1). The experiment showed that with the increase of the defect size there is a decrease in the eigenfrequencies of vibration. The best result about the location of the defect was shown by the method of changing the shape of vibrations, the basis of which is the modal convergence criterion (MAC):

$$MAC(x) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n \varphi(x)_j \cdot \varphi(x)_j^* \right|^2}{\sum_{j=1}^n \varphi(x)_j^2 \cdot \sum_{j=1}^n \varphi(x)_j^{*2}}, \tag{1}$$

where x is the distance to the measurement point, n is the number of vibration measurement points, φ and φ^* are the values of vibration shape displacements without and with damage. The error of the method amounted to 2.33%, which is a positive result.

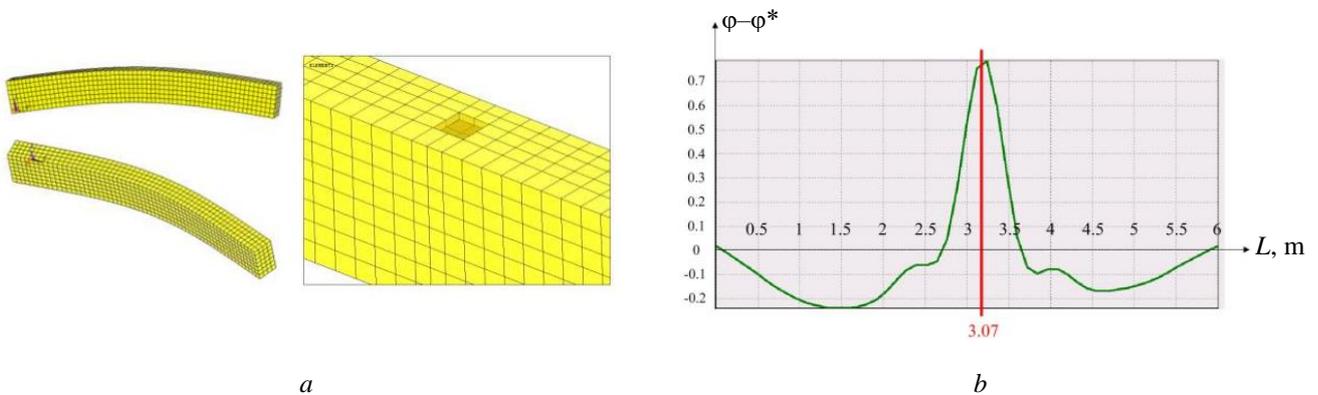


Figure 1. Defect detection by modal convergence method:
a — FE model of beam with defect (first and second eigenfrequencies);
b — location of the defect along the length of the beam

Source : Kadomtsev M.I. et al. [10]

The modal convergence criterion (*MAC*) varies from 0 (no correlation between modes of vibration) to 1 (100% matching).

Paper [11] considers the problem of predicting the consequences of earthquakes, man-made accidents, natural factors, and other impacts on the load-bearing structures of operating buildings. It is recommended to use eigenfrequencies, decrements, and periods of vibration as the main parameters for verification of the analysis model. To predict the seismic resistance of buildings with damage, it is necessary to create a model with the closest possible values of dynamic characteristics. As an example, the author considers a large-panel building located in St. Petersburg. Based on the results of the survey, the frequencies of natural vibrations were determined, and the model was created in ANSYS. The results are summarized in Table 2.

Table 2

Results of the calculation in paper

Shape of vibration according to the model	Vibration frequency recorded during testing, Hz	Frequency of vibration according to the model adjusted by dynamic characteristics, Hz	Mismatch of vibration frequency in relation to the design frequency, %
1	1.25	1.291	3.1
2	1.92	1.944	1.2
3	1.94	2.045	5.1
4	5.96	5.604	5.9
5	6.98	6.832	2.1
6	7.812	7.456	4.5

Source: Savin S.N., Smirnova E.E. [11]

Based on the obtained data, calculations were performed considering the damage to buildings from the unevenness of building settlement with subsequent partial failure.

The author concluded that this method could solve various problems, both in evaluating the technical condition of the building, and for forecasting the residual life of damaged objects.

To evaluate the reduction of dynamic characteristics of corrosion-damaged structures, an experiment is conducted on reinforced concrete columns with dimensions of 100×100×700 mm [12–17]. Damage to reinforcement is achieved by electrocorrosion of specimens in salt solution. The undamaged specimen is fixed by the widening in the base to the floor. At a distance of 150 mm from the free edge of the column, a displacement sensor parallel to the impact is installed, and a force sensor is fixed to the end of the column above the displacement sensor (Figure 2).

The test methodology and processing of the results are as follows:

1. The force sensor is struck with a hammer to excite forced vibrations in the column.
2. Recording equipment reads the impact force and records at a frequency of 1000 Hz.
3. Based on the test results, the time graph of the vibration amplitude is plotted and the first eigenfrequency of vibration, vibration period, logarithmic decrement of vibration and damping coefficient are analytically determined (Figure 3).

The first eigenfrequency for the intact sample was 37.037 Hz, and the vibration period was 0.027 s.

To estimate the damping of the system, we introduce the logarithmic decrement of vibration — δ . The rate of damping is defined as the natural logarithm of the ratio of peak vibration amplitudes spaced by one period:

$$\delta = \ln \frac{y_i}{y_{i+1}} = \alpha T. \quad (2)$$

Also, in dynamic analysis, important characteristics are the coefficient of energy absorption ψ characterizing the cyclicity of deformation process, which in the form of the ratio to the number 2π gives inelastic deformation coefficient γ . The inelastic drag coefficient (equation (3)) and energy absorption coefficient (equation (4)) were determined based on the experiments performed [18–25].

$$\gamma = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\delta}{\pi}, \tag{3}$$

$$\psi = -2 \int_t^{t+T} \frac{dy_0}{y_0} = 2 \ln \frac{y_i}{y_{i+1}} = 2\pi. \tag{4}$$

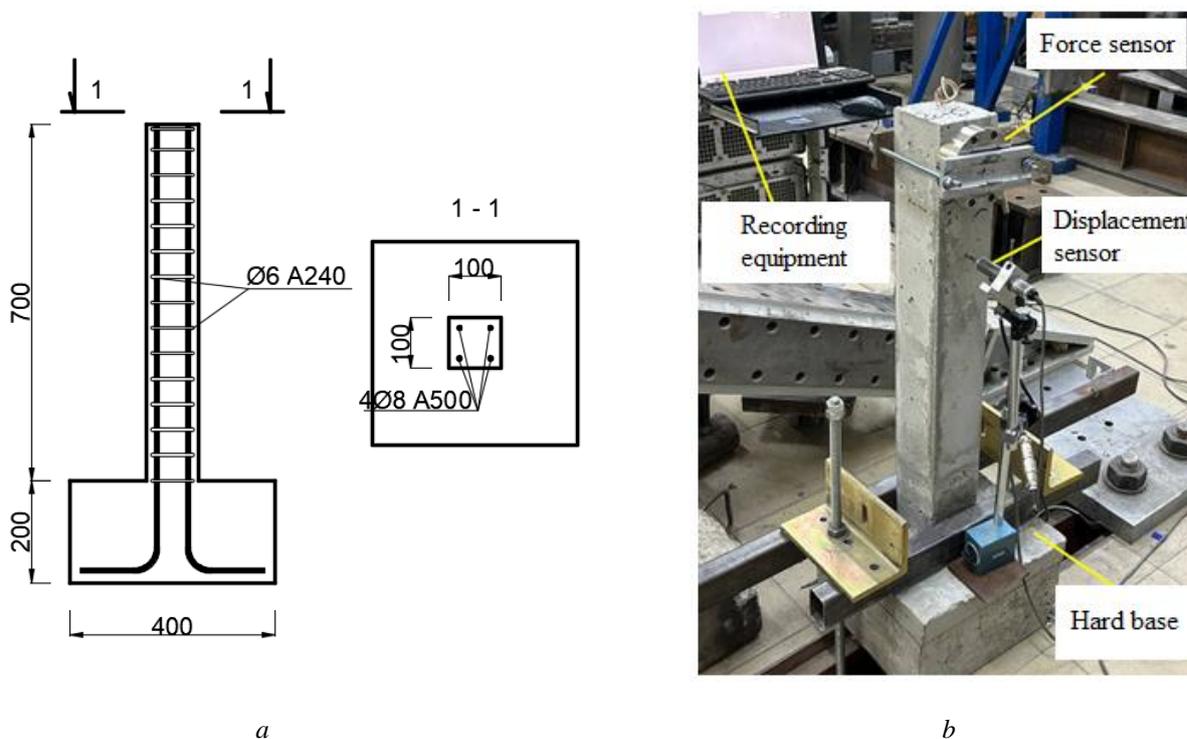


Figure 2. Specimen testing:
a — reinforcement model; *b* — testing of samples
 Source: made by A.G. Tamrazyan, M.V. Kudryavtsev

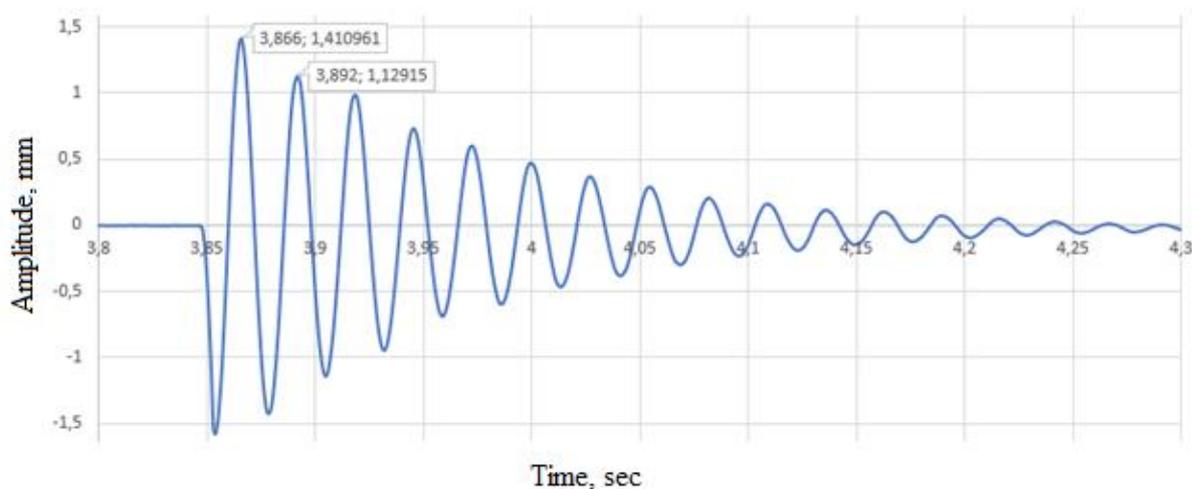


Figure 3. “Amplitude, mm vs time, s” graph
 Source: made by A.G. Tamrazyan, M.V. Kudryavtsev

3. Results and Discussion

Equations (2)–(4) were used to calculate the main dynamic characteristics obtained experimentally on reinforced concrete column specimens undamaged by corrosion. The results of calculations are presented in Table 3.

Table 3

Results of the authors' calculations

№	Sample ID	Impact along the axis	Vibration period	Vibration frequency	Logarithmic decrement of vibration	Circular frequency	Inelastic drag coefficient	Energy absorption coefficient
			T	ν	δ	ω	γ	ψ
1.	1c-1	X	0.027	37.04	0.263	232.6	0.0837	0.525
		Y	0.031	32.26	0.173	202.6	0.0552	0.347
2.	1c-2	X	0.027	37.04	0.369	232.6	0.1175	0.738
		Y	0.026	38.46	0.133	241.5	0.0423	0.266
3.	1c-3	X	0.024	41.67	0.230	261.7	0.0734	0.461
		Y	0.028	35.71	0.236	224.3	0.0750	0.471
4.	1c-4	X	0.026	38.46	0.246	241.5	0.0784	0.492
		Y	0.026	38.46	0.808	241.5	0.2572	1.615
5.	1c-5	X	0.031	32.26	0.468	202.6	0.1491	0.937
		Y	0.029	34.48	0.911	216.6	0.2903	1.823
6.	1c-6	X	0.026	38.46	0.156	241.5	0.0496	0.311
		Y	0.027	37.04	0.308	232.6	0.0982	0.617
7.	1c-7	X	0.028	35.71	0.400	224.3	0.1274	0.800
		Y	0.027	37.04	0.355	232.6	0.1130	0.710
8.	2c-1	X	0.028	35.71	0.169	224.3	0.0537	0.338
		Y	0.035	28.57	0.122	179.4	0.0389	0.244
9.	2c-2	X	0.031	32.26	0.330	202.6	0.1052	0.661
		Y	0.03	33.33	0.423	209.3	0.1348	0.846
10.	2c-3	X	0.026	38.46	0.289	241.5	0.0921	0.579
		Y	0.027	37.04	0.271	232.6	0.0865	0.543
11.	2c-4	X	0.026	38.46	0.644	241.5	0.2049	1.287
		Y	0.029	34.48	0.402	216.6	0.1282	0.805
12.	2c-5	X	0.026	38.46	0.344	241.5	0.1095	0.687
		Y	0.029	34.48	0.201	216.6	0.0639	0.401
13.	2c-6	X	0.03	33.33	0.144	209.3	0.0459	0.288
		Y	0.03	33.33	0.264	209.3	0.0840	0.527
14.	2c-7	X	0.026	38.46	0.223	241.5	0.0710	0.446
		Y	0.029	34.48	0.216	216.6	0.0687	0.432
Mean value:			35.89	0.325	225.4	0.1035	0.650	

Source: made by A.G. Tamrazyan, M.V. Kudryavtsev

Since the experimental study with artificial corrosion of reinforced concrete takes a long time, the test results with a comparison of the obtained results will be presented in the upcoming articles.

4. Conclusion

1. Based on the scientific studies using methods of mathematical analysis, computer modeling and in-situ tests, conclusions were made about the significant effect of reducing the frequency of natural vibrations on the degree of damage to the building under dynamic action such as seismic loading. This effect arises due to the accumulation of damages of different nature in the nodes of structures and elements of buildings, making them less rigid and more compliant, which affects the overall degradation of the rigidity of the structure.

2. The method of dynamic assessment of the technical condition of buildings and structures is popular among surveyors, but there are difficulties in comparing measured values with the original indicators, because the latter, in turn, have not been measured. This problem can be solved by designing a high quality model in a CAE software. Also, to estimate the residual life of buildings and to assess the seismic resistance of buildings, the results of measurements can be introduced into the calculation to refine the FEM model considering the technical condition of the building.

3. Conducting the experiment will allow to expand the field of assessment of the technical condition of buildings considering the corrosion damage of load-bearing structures, which will increase the accuracy of solving the problems of earthquake resistance.

References

1. Savin S.Yu., Fedorova N.V. Stability exposure of building structural systems under environmental damage. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):564–572. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-564-572>
2. Klyueva N.V., Kolchunov V.I., Gubanova M.S. Strength criterion of the loaded and corrosion-damaged concrete under the plane stressed state. *Housing Construction*. 2016;(5):22–27. (In Russ.) EDN: WEFACB
3. Shamshina K.V. Experimental research results of deformation properties of compressible reinforced concrete structures with corrosion longitudinal cracks in the protective layer of concrete. *Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region*. 2020;(1):26–33. (In Russ.) EDN: LEQCNP
4. Dangwal S., Singh H. Behavior of corrosion damaged non-seismically and seismically detailed reinforced concrete beam-column sub-assemblages under cyclic loading. *Engineering Failure Analysis*. 2023;146:107135. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2023.107135>
5. Kanchanadevi A., Ramanjaneyulu K. Effect of corrosion damage on seismic behaviour of existing reinforced concrete beam-column sub-assemblages. *Engineering Structures*. 2018;174:601–617. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.07.094>
6. Shakhramanian M.A., Nigmatov G.M., Gaifullin Z.G., Babusenko M.S. Methodology of assessment and certification of engineering safety of buildings and structures. *Civil security technologies*. 2004;(2):5–15. (In Russ.) EDN: KVUNYV
7. Chauskin A.Yu., Pshenichkina V.A., Leichu F.F. Failure criteria of buildings as nonlinear systems under earthquake load. *FEFU: School of Engineering Bulletin*. 2018;(2):120–127. (In Russ.) <https://doi.org/10.5281/zenodo.1286040>
8. Ulybin A.V. Measurement of periods and decrements of vibrations of multistory buildings. *Inspection of buildings and structures: problems and ways of their solution. Materials of the VIII International Scientific and Practical Conference*. St Petersburg, 2017. p. 192–202. (In Russ.) EDN: YQYCBV
9. Bazarov A.D., Lundenbazar B., Ivanov I.A. Dynamic response assessment of a frame building affected by micro-seismic noise in the city of Ulan Bator. *Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real estate*. 2020;(1): 198–205. (In Russ.) <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2020-2-198-205>
10. Kadomtsev M.I., Lyapin A.A., Shatilov Yu.Yu. Vibrodiagnostics of building structures. *Engineering journal of Don*. 2012;(3):576–579. (In Russ.) EDN: PJZXHZ
11. Savin S.N., Smirnova E.E. Predicting the service life of buildings in the conditions of natural and technogenic emergency situations. *Modern problems of civil protection*. 2019;(2):33–42. (In Russ.) EDN: XYVCJB
12. Avetisyan L.A., Tamrazyan A.G. Experimental research in eccentrically compressed reinforced concrete elements during short-term dynamic loadings under fire conditions. *Industrial and Civil Engineering*. 2014;(4):24–28. (In Russ.) EDN: SAZOJD
13. Tamrazyan A.G. Livability as a degree of serviceability of structures under damage. *Industrial and Civil Engineering*. 2023;(7):22–28. (In Russ.) <https://doi.org/10.33622/0869-3019.2023.07.22-28>
14. Tamrazyan A.G. Conceptual approaches to the assessment of survivability of building structures, buildings and facilities. *Reinforced Concrete Structures*. 2023;3(3):62–74. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/2949-1622.2023.3.62-74>

15. Matseevich T.A., Tamrazyan A.G. Reliability analysis of reinforced concrete slab with corroded reinforcement. *Construction and Reconstruction*. 2022;(1):89–98. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-99-1-89-98>
16. Kolchunov V.I., Al-Hashimi O.I., Protchenko M.V. Rigidity of reinforced concrete structures in bending with transverse and longitudinal forces. *Construction and Reconstruction*. 2021;(6):5–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-98-6-5-19>
17. Tamrazyan A.G., Chernik V.I., Matseevich T.A., Manaenkov I.K. Analytical model of deformation of reinforced concrete columns based on fracture mechanics. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;(18):573–583. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-573-583>
18. Trekin N.N., Kodysh E.N., Trekin D.N. Calculation of the formation of normal cracks based on the deformation model. *Industrial and Civil Construction*. 2016;(7):74–78. (In Russ.) EDN: WHKJXN
19. Belov N.N., Yugov N.T., Kopanitsa D.G., Kabantsev O.V., Yugov A.A., Ovechkina A.N. The design and experimental approach to the analysis of dynamic strength of reinforced concrete constructions. *Earthquake Engineering. Constructions safety*. 2006;(4):40–46. (In Russ.) EDN: HUIJPT
20. Tonkikh G.P., Kabantsev O.V., Dorofeev M.L. Experimental studies of the influence of non-structural elements on the periods of natural vibrations of frame buildings. *Earthquake Engineering. Safety of constructions*. 2002;(6):12–16. (In Russ.) EDN: UIEBJR
21. Kabantsev O.V., Useinov E.S., Sharipov Sh. On the methodology for determining the damage tolerance factor of earthquake-resistant structures. *Bulletin of Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering*. 2016;(2):117–129. (In Russ.) EDN: VSTVTV
22. Nazarov Yu.P., Poznyak E.V. Estimation of Amplification Factor in Earthquake Engineering. *Construction: Science and Education*. 2015;(1):2. (In Russ.) EDN: TMPKTT
23. Sosnin A.V. About dissipation properties of multi-storey RC frame buildings of large-scale-construction projects at their earthquake-resistance estimation. *Modern Science and Innovations*. 2017;(1):114–131. (In Russ.) EDN: YTFHIB
24. Li D., Wei R., Xing F., Sui L., Zhou Y., Wang W. Influence of Non-uniform corrosion of steel bars on the seismic behavior of reinforced concrete columns. *Construction and Building Materials*. 2018;(167):20–32. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.01.149>
25. El-Joukhadar N., Dameh F., Pantazopoulou S. Seismic Modelling of Corroded Reinforced Concrete Columns. *Engineering Structures*. 2023;275(Part A):115251. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115251>

Список литературы

1. Savin S.Yu., Fedorova N.V. Stability exposure of building structural systems under environmental damage // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022. Vol. 18. No. 6. P. 564–572. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-564-572>
2. Клюева Н.В., Колчунов В.И., Губанова М.С. Критерий прочности нагруженного и коррозионно поврежденного бетона при плоском напряженном состоянии // *Жилищное строительство*. 2016. № 5. С. 22–27. EDN: WEFACB
3. Шамишина К.В. Результаты экспериментальных исследований деформационных свойств сжимаемых железобетонных конструкций с коррозионными продольными трещинами в защитном слое бетона // *Инженерно-строительный вестник Прикаспия*. 2020. № 1 (31). С. 26–33. EDN: LEQCNP
4. Dangwal S., Singh H. Behavior of corrosion damaged non-seismically and seismically detailed reinforced concrete beam-column sub-assemblages under cyclic loading // *Engineering Failure Analysis*. 2023. Vol. 146. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2023.107135>
5. Kanchanadevi A., Ramanjaneyulu K. Effect of corrosion damage on seismic behaviour of existing reinforced concrete beam-column sub-assemblages // *Engineering Structures*. 2018. Vol. 174. P. 601–617. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.07.094>
6. Шахраманьян М.А., Нигметов Г.М., Гайфуллин З.Г., Бабусенко М.С. Методика оценки и сертификации инженерной безопасности зданий и сооружений // *Технологии гражданской безопасности*. 2004. № 2. С. 5–15. EDN: KVUNYV
7. Чаускин А.Ю., Пшеничкина В.А., Лейчу Ф.Ф. Критерии отказа зданий как нелинейных систем при сейсмическом воздействии // *Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета*. 2018. № 2 (35). С. 120–127. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1286040>
8. Улыбин А.В. Измерение периодов и декрементов колебаний многоэтажных зданий // *Обследование зданий и сооружений: проблемы и пути их решения: материалы VIII Международной научно-практической конференции*. Санкт-Петербург. 2017. С. 192–202. EDN: YQYCBV
9. Базаров А.Д., Лундэнбазар Б., Комаров А.К., Иванов И.А. Оценка динамической реакции каркасного здания под воздействием микросейсмического шума в г. Улан-Баторе // *Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость*. 2020. № 2 (33). С. 198–205. <https://doi.org/10.21285/2227-2917-2020-2-198-205>

10. *Кадомцев М.И., Ляпин А.А., Шатилов Ю.Ю.* Вибродиагностика строительных конструкций // Инженерный вестник Дона. 2012. № 3 (21). С. 576–579. EDN: PJZXHZ
11. *Савин С.Н., Смирнова Е.Э.* Прогноз ресурса зданий в условиях природных и техногенных чрезвычайных ситуаций // Современные проблемы гражданской защиты. 2019. № 2 (31). С. 33–42. EDN: XYVCJB
12. *Аветисян Л.А., Тамразян А.Г.* Экспериментальные исследования внецентренно сжатых железобетонных элементов при кратковременном динамическом нагружении в условиях пожара // Промышленное и гражданское строительство. 2014. № 4. С. 24–28. EDN: SAZOJD
13. *Тамразян А.Г.* Живучесть как степень работоспособности конструкций при повреждениях // Промышленное и гражданское строительство. 2023. № 7. С. 22–28. <https://doi.org/10.33622/0869-3019.2023.07.22-28>
14. *Тамразян А.Г.* Концептуальные подходы к оценке живучести строительных конструкций, зданий и сооружений // Железобетонные конструкции. 2023. Т. 3. № 3. С. 62–74. <https://doi.org/10.22227/2949-1622.2023.3.62-74>
15. *Мацевич Т.А., Тамразян А.Г.* Анализ надежности железобетонной плиты с корродированной арматурой. *Строительство и реконструкция*. 2022. № 1 (99). С. 89–98. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-99-1-89-98>
16. *Колчунов В.И., Аль-Хашими О., Протченко М.В.* Жесткость железобетонных конструкций при изгибе поперечной и продольной силами // Строительство и реконструкция. 2021. № 6 (98). С. 5–19. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-98-6-5-19>
17. *Tamrazyan A.G., Chernik V.I., Matseevich T.A., Manaenkov I.K.* Analytical model of deformation of reinforced concrete columns based on fracture mechanics // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. № 6. С. 573–583. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-573-583>
18. *Трекин Н.Н., Кодыш Е.Н., Трекин Д.Н.* Расчет образования нормальных трещин на основе деформационной модели // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 7. С. 74–78. EDN: WHKJXN
19. *Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г., Кабанцев О.В., Югов А.А., Овечкина А.Н.* Расчетно-экспериментальный метод анализа динамической прочности железобетонных конструкций // Инженерная сейсмостойкость. Безопасность сооружений. 2006. № 4. С. 40–46. EDN: HUIJPT
20. *Тонких Г.П., Кабанцев О.В., Дорофеев М.Л.* Экспериментальные исследования влияния неконструктивных элементов на периоды собственных колебаний каркасных зданий // Инженерная сейсмология. Безопасность сооружений. 2002. № 6. С. 12–16. EDN: UIEBJR
21. *Кабанцев О.В., Усеинов Э.С., Шарипов Ш.* О методике определения коэффициента допускаемых повреждений сейсмостойких конструкций // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 2 (55). С. 117–129. EDN: VSTVTV
22. *Назаров Ю.П., Позняк Е.В.* Определение коэффициента динамичности в расчетах на сейсмостойкость // Строительство: наука и образование. 2015. № 1. С. 2. EDN: TMRKTT
23. *Соснин А.В.* К вопросу учёта диссипативных свойств многоэтажных железобетонных каркасных зданий массового строительства при оценке их сейсмостойкости // Современная наука и инновации. 2017. № 1 (17). С. 114–131. EDN: YTFHIB
24. *Li D., Wei R., Xing F., Sui L., Zhou Y., Wang W.* Influence of Non-uniform corrosion of steel bars on the seismic behavior of reinforced concrete columns // *Construction and Building Materials*. 2018. Vol. 167. P. 20–32. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.01.149>
25. *El-Joukhadar N., Dameh F., Pantazopoulou S.* Seismic modelling of corroded reinforced concrete columns // *Engineering Structures*. 2023. Vol. 275. Part A. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115251>

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-265-275
UDC 624.04:624.074
EDN: RDDWZD

Research article / Научная статья

Analytical Calculation of Momentless Conical Shell with Elliptical Base

Sergey N. Krivoshapko 

RUDN University, Moscow, Russia
✉ sn_krivoshapko@mail.ru

Article history

Received: February 28, 2024
Revised: April 17, 2024
Accepted: April 26, 2024

Conflicts of interest

The author declares that there is no conflict of interest

Abstract. Differential equilibrium equations of the momentless shell theory are very easily integrated in cases of cylindrical and right circular conical shells. Shells of zero Gaussian curvature defined in arbitrary curvilinear coordinates are more difficult to analyze, which was reaffirmed by the case of elliptical conical shells. For the first time, analytical expressions of normal and tangential internal forces in a momentless right elliptical conical shell defined in non-orthogonal conjugate system of curvilinear coordinates are obtained. The derived results can be used for approximation of the stress state of thin conical shells with elliptical base and also for the investigation of stability of these shells. Four internal tangential forces obtained by integration of the system of four equilibrium equations of a shell element contain two unknown integration functions, which are determined by satisfying given boundary conditions. The application of obtained analytical equations is demonstrated by an example of analysis of a truncated elliptical conical shell with free upper edge. A uniformly distributed surface load in the direction of the vertical axis of the shell was assumed as external load. The presented formulae are easily adapted for the analysis of a right circular conical shell.

Keywords: elliptical cone, momentless shell theory, non-orthogonal curvilinear coordinates, truncated elliptical cone

For citation

Krivoshapko S.N. Analytical calculation of momentless conical shell with elliptical base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):265–275. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-265-275>

Sergey N. Krivoshapko, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966; ORCID: 0000-0002-9385-3699; E-mail: sn_krivoshapko@mail.ru

© Krivoshapko S.N., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Аналитический расчет конической оболочки на эллиптическом основании по безмоментной теории

С.Н. Кривошапко 

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

✉ sn_krivoshapko@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 28 февраля 2024 г.

Доработана: 17 апреля 2024 г.

Принята к публикации: 26 апреля 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Аннотация. Дифференциальные уравнения равновесия безмоментной теории оболочек легче всего интегрируются для цилиндрических и прямых конических круговых оболочек. Труднее задача решается для оболочек нулевой гауссовой кривизны, заданных не в линиях кривизны. Это еще раз подтверждено на примере конической эллиптической оболочки. Впервые получены аналитические формулы для определения нормальных и касательных внутренних усилий в прямой конической эллиптической оболочке по безмоментной теории оболочек, заданных в неортогональной сопряженной системе криволинейных координат. Полученные результаты могут быть использованы для приближенной оценки напряженного состояния тонких конических оболочек на эллиптическом основании, а также при исследовании устойчивости этих оболочек. Четыре внутренних тангенциальных усилия, полученные интегрированием системы четырех уравнений равновесия элемента оболочки, содержат две неизвестные функции интегрирования, которые находятся при выполнении поставленных граничных условий. Использование полученных аналитических формул проиллюстрировано на примере расчета усеченной конической эллиптической оболочки со свободным верхним краем. Внешняя нагрузка — поверхностная равномерно распределенная нагрузка в направлении вертикальной оси оболочки. Приведенные формулы легко адаптируются для случая расчета прямой круговой конической оболочки.

Ключевые слова: эллиптический конус, безмоментная теория оболочек, неортогональные криволинейные координаты, усеченный эллиптический конус

Для цитирования

Krivoshapko S.N. Analytical calculation of momentless conical shell with elliptical base // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 3. С. 265–275. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-265-275>

1. Introduction

The momentless theory of the analysis of rigid thin shells is an approximate theory, but in some cases it gives fairly accurate values of tangential internal forces, which can be used for preliminary analysis of the stress state of a thin shell [1]. This data can be useful, for example, when assigning the thickness of the shell. It has been established that the momentless theory of shells yields reasonable results in comparison with exact results when fulfilling well-known requirements for supports, the type of external loads, boundary conditions

Кривошапко Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966; ORCID: 0000-0002-9385-3699; E-mail: sn_krivoshapko@mail.ru

and the shape of the shell [2; 3]. Research on the momentless theory of rigid thin shells was being actively developed especially until the 1980s [4]. Then came the fascination with numerical methods for calculating moment shells using linear and physically or geometrically nonlinear calculation theories. However, in many monographs of famous scientists of the last years of the 20th century, there was a necessary chapter devoted to the momentless theory of calculating thin shells [1–3; 5], and textbooks contained information about the application potential of this theory [6]. The momentless theory is used in the study of stability of thin shells [7].

At the present day, the amount of studies on the momentless theory of shells has been significantly reduced, but they are available [8]. Generally, a comparative analysis of the results obtained by the momentless theory and by more precise methods using numerical methods is carried out [9]. There are studies containing comparative analysis of the calculation results obtained using the momentless theory of shells and the results obtained experimentally, for example, in the process of designing the conical shell foundations [10].

The conical shape of shells is currently widely used in civil [11] and mechanical engineering [12]. Shells in the form of right thin (Figure 1) and thick [13] circular cones have been applied in most cases, but conical shells with elliptical base are also used [14–16]. Moreover, truncated conical shells with elliptical base have found application even in medicine [17].

The purpose of this work is to obtain analytical expressions for determining tangential internal forces in an elliptical conical shell according to the momentless theory.

The symmetric equation of a right elliptical conical surface may be expressed in the following form:

$$\frac{x^2}{L^2} + \frac{y^2}{W^2} - \frac{z^2}{T^2} = 0,$$

where T is the height of the conical surface.

Parametric equations of the elliptical cone (Figure 2) are known [18]:

$$x = x(u, v) = vL[1 - u], \quad y = y(u, v) = \pm W[1 - u] \left[1 - |v|^2 \right]^{1/2}, \quad z = z(u) = uT, \quad (1)$$

where $-L \leq x \leq L$, $-W \leq y \leq W$, $0 \leq z \leq T$; $2L$, $2W$, T are the dimensions of the surfaces under consideration.



Figure 1. Circular cone, “City of Arts and Sciences”,
Valencia, Spain
Source: photo by S.L. Shambina

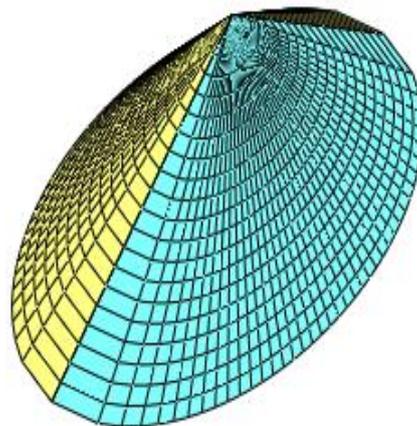


Figure 2. Right elliptical conical surface
Source: compiled by S.N. Krivoshapko

Lateral area of an elliptical cone can be calculated with the following formula [19]:

$$A_{\text{cone}} \approx \frac{\pi}{2} \left[W\sqrt{L^2 + T^2} + L\sqrt{W^2 + T^2} \right].$$

Volume of an elliptical cone is determined by the following formula:

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi}{3} TLW.$$

The surface depicted in Figure 2 is generated by a family of $z = \text{const}$ sections (ellipses).

By adopting a new variable parameter $0 \leq \beta \leq 2\pi$, so that $v = \sin\beta$, $1 - v^2 = \cos^2\beta$, parametric equations (1) can be expressed in the following form:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = L[1 - u] \sin\beta; \\ y &= y(u, v) = W[1 - u] \cos\beta; \\ z &= z(u) = uT. \end{aligned} \quad (2)$$

Curvilinear coordinates u, v of the elliptical cone defined by parametric equations (1), (2) are non-orthogonal and conjugate [18]. Coordinate lines u are straight generatrices of the cone, lines v are ellipses lying in parallel planes. Coordinate lines v intersect coordinate lines u at right angles only along the straight generatrices $v = 0$ and $v = \pm 1$.

2. Momentless Theory of Calculating Right Conical Surface with Elliptical Base

Paper [18] contains the derivation of analytical equations for determining the normal and tangential internal forces of a thin shell, the middle surface of which is defined by equations (1). Using the momentless shell theory, the system of three equilibrium equations of a shell element is obtained from the general equations of equilibrium for shells defined in curvilinear non-orthogonal conjugate coordinates [5].

The equations for determining normal forces N_u, N_v and tangential forces $S_u \neq S_v$ per unit length of the corresponding coordinate lines, obtained in article [18], can be expanded in the form, convenient for computer-assisted calculations:

$$\begin{aligned} N_v &= (1 - u) f_5(v); \\ N_u &= \frac{(1-u)\sqrt{f_8}}{(L^2 - W^2)} (f_9 - f_{10}) + \frac{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}{2(1-u)^2 f_0} \left[\frac{3v}{A^2} (L^2 - W^2) V_1 + \frac{dV_1}{dv} + \frac{2(1-u)}{A} V_2 \right] + (1-u) f_5; \\ S_v &= (1-u) f_6(v) + \frac{V_1(v)}{(1-u)^2}; \\ S_u &= (1-u)(1-v^2)^{\frac{1}{2}} v f_{10} + \frac{(1-v^2)}{(1-u)^2 f_0} \left[\frac{f_8 V_1}{(1-v^2) A^2} - \frac{v^2}{2A^2} (L^2 - W^2)^2 V_1 - \frac{v}{2} (L^2 - W^2) \frac{dV_1}{dv} \right] - \\ &\quad - \frac{v(1-v^2)}{(1-u) A f_0} (L^2 - W^2) V_2(v); \end{aligned} \quad (3)$$

where $f_i = f_i(v)$ are known values, $V_1(v), V_2(v)$ are arbitrary functions of integration, which are determined by satisfying boundary conditions defined in forces.

Equations (3) contain constant geometric dimensions L , W , T of the shell middle surface, mentioned in the comments to equations (1). In addition, new constants K and R have been introduced, which allowed to slightly reduce the formulas given below for expressing the known functions $f_i(v)$:

$$K = L^2 - W^2, \quad R = (W^2 + T^2)(T^2 + L^2).$$

The known functions $f_i(v)$, contained in equations (3), obtained by integration of the three equilibrium equations in paper [18], can be written as follows:

$$f_3(v) = \sqrt{A^2 - T^2} = \sqrt{v^2 L^2 + W^2(1 - v^2)}; \quad A^2 = A^2(v) = v^2 L^2 + W^2(1 - v^2) + T^2;$$

$$f_0(v) = L^2 - v^2 K;$$

$$f_5(v) = \frac{q\sqrt{A^2 - T^2} \left[L^2(W^2 + T^2) - v^2 T^2(L^2 - W^2) \right]^{\frac{3}{2}}}{LTWA^3} = \frac{q\sqrt{A^2 - T^2} f_8^{\frac{3}{2}}(v)}{LTWA^3};$$

$$f_6(v) = (1 - v^2)^{\frac{1}{2}} v f_9(v);$$

$$f_7(v) = (1 - v^2)^{\frac{1}{2}} v f_{10}(v);$$

$$f_8(v) = L^2(W^2 + T^2) - v^2 T^2(L^2 - W^2);$$

$$f_9(v) = \frac{qK}{3ALTW\sqrt{A^2 - T^2}} \left[R \left(4 \frac{T^2}{A^2} - 3 \right) - T^4 \right];$$

$$f_{10}(v) = \frac{1}{2A f_0(v)} \left\{ 2 \frac{f_8 f_9}{A} - \frac{qK^2}{3LTW f_3(v)} \left[\left(1 - v^2 - \frac{v^2 L^2}{f_3^2(v)} \right) \left(4R \frac{T^2}{A^2} - 3R - T^4 \right) - \frac{(1 - v^2) 8vRT^2 K}{A^4} \right] + \frac{\sqrt{f_8(v)}}{A} K [f_5(v) + qT] \right\}. \quad (4)$$

In equations (4), q denotes the external surface load, such as self-weight, in the direction opposite to the fixed coordinate axis z .

Thus, the momentless shell theory allows to obtain approximate values of normal forces N_u , N_v and tangential forces S_u , S_v using analytical equations (3).

3. Truncated Elliptical Conical Shell with Free Upper Edge

Let the upper edge $u = u_0$ of the thin shell be free and the lower edge $u = 0$ be simply supported, with the direction of the supports coinciding with the direction of the straight generatrices of the cone. The shell is smooth, without fractures, and of constant thickness. External load $q = \text{const}$ is a constant distributed load, such as self-weight. Thus, all the requirements for the application of the momentless theory for the shell are fulfilled.

Since the upper edge $u = u_0$ is free, the following two boundary conditions can be defined at this edge:

$$S_u = 0, N_u = 0 \text{ at } u = u_0.$$

The expression for normal force N_u is taken from paper [18] and is equated to zero:

$$N_u = -(S_u - S_v) \frac{\sqrt{f_8}}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}} v (L^2 - W^2)} + N_v = 0, \quad (5)$$

and by considering that $S_u = 0$, the presented condition is simplified:

$$N_u = S_v \frac{\sqrt{f_8}}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}} v (L^2 - W^2)} + N_v = 0.$$

By substituting the second and the fourth formula from the system of equations (3) into the last expression, it is possible to determine integration constant $V_1(v)$:

$$\begin{aligned} V_1(v) &= -q \frac{(1-u_0)^3 (L^2 - W^2)}{ALTW \sqrt{A^2 - T^2}} v (1-v^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{A^2 - T^2}{A^2} f_8(v) + \frac{1}{3} \left[R \left(4 \frac{T^2}{A^2} - 3 \right) - T^4 \right] \right\} = \\ &= -v (1-v^2)^{\frac{1}{2}} (1-u_0)^3 \left[f_9(v) + \frac{qK \sqrt{A^2 - T^2}}{LTWA^3} f_8(v) \right] = -v (1-v^2)^{\frac{1}{2}} (1-u_0)^3 V_{01}(v). \end{aligned} \quad (6)$$

The second integration constant $V_2(v)$ is determined from the fourth formula of the system of equations (3) by satisfying the boundary condition of $S_u = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{v(1-v^2)K}{Af_0} V_2(v) &= (1-u_0)^2 v (1-v^2)^{1/2} f_{10} + \frac{1}{(1-u_0)f_0} \left\{ \frac{V_1(v)}{A^2} \left[f_8 - \frac{v^2(1-v^2)K^2}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v(1-v^2)K}{2} \frac{dV_{1(v)}}{dv} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Now, by using equations (3), internal tangential forces per unit length of coordinate lines can be calculated:

$$S_v = \frac{v(1-v^2)^{1/2}}{(1-u)^2} \left\{ \left[(1-u)^3 - (1-u_0)^3 \right] f_{9(v)} - \frac{qK(1-u_0)^3 \sqrt{A^2 - T^2}}{A^3 LTW} f_8(v) \right\}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S_u &= v(1-v^2)^{1/2} \left\{ \frac{(1-u)^2 - (1-u_0)^2}{(1-u)} f_{10} + \frac{(u-u_0)(1-u_0)^2}{(1-u)^2 f_0(v)} \left[\frac{f_8(v)}{A^2} V_{01}(v) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{K(1-v^2)(W^2 + T^2)}{2A^2} V_{01}(v) - \frac{K}{2} v^2 V_{01}(v) + \frac{Kv(1-v^2)}{2} \frac{dV_{01}(v)}{dv} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Normal force N_v is calculated with the first formula of the system of equations (3). Normal force N_u is determined according to formula (5):

$$N_u = \frac{\sqrt{f_8}}{K} \left\{ \frac{[(1-u)^3 - (1-u_0)^3]}{(1-u)^2} f_9 - \frac{qK(1-u_0)^3 \sqrt{A^2 - T^2}}{(1-u)^2 A^3 L T W} f_8 - \frac{(1-u)^2 - (1-u_0)^2}{(1-u)} f_{10} - \right. \\ \left. - \frac{[(1-u) - (1-u_0)](1-u_0)^2}{(1-u)^2 f_0} V_{01} \left[\frac{f_8}{A^2} + \frac{K(1-v^2)(W^2 + T^2)}{2A^2} - \frac{Kv^2}{2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{v(1-v^2)(u-u_0)(1-u_0)^2}{2(1-u)^2 f_0} K \frac{dV_{01}}{dv} \right\} + (1-u) \frac{q\sqrt{A^2 - T^2}}{A^3 L T W} f_8^{\frac{3}{2}}. \quad (10)$$

Coefficients $f_i = f_i(v)$ are defined by equations (4); coordinate u varies in the range of $0 \leq u \leq u_0$, and $u_0 < 1$; coordinate v varies from -1 to $+1$ (Figure 3).

It should be noted that truncated conical shells are widely used in mechanical engineering (Figure 4, *a*) and civil engineering (Figures 4, *b*, *c*). The momentless shell theory can be useful in studying the stability of truncated conical shells [20].

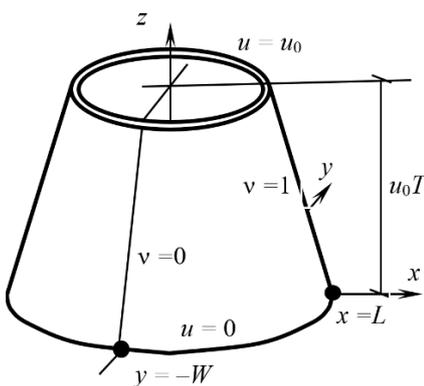


Figure 3. Truncated elliptical conical shell

Source: compiled by S.N. Krivoshapko

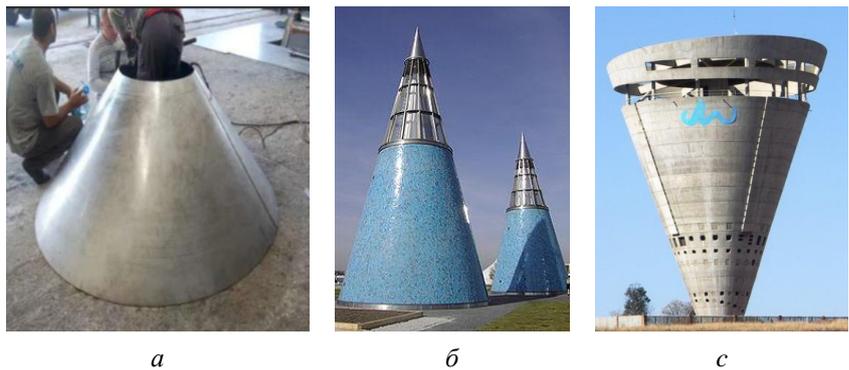


Figure 4. Truncated conical shells in mechanical and civil engineering: *a* — metal product; *b* — conical roofs at the Bundeskunsthalle in Bonn Germany; *c* — water tower in Midrand, South Africa

Source: *a* — http://molodec-kyznec.ru/market/izgotovlenie_obechaek/val_covka_konusov/; *b* — [11]; *c* — [11]

3.1. Example of Calculation

As an example, let us determine the internal tangential forces along the straight generatrices of the truncated conical elliptical shell considered above. Let us examine the straight generatrices coinciding with coordinate lines $v = 0$ and $v = \pm 1$. For these lines, parameters $f_i(v)$ are calculated and summarized in Table.

It was noted earlier that the curvilinear coordinate system u, v is non-orthogonal conjugate, so $S_v \neq S_u$. Coordinate lines $u = \text{const}$ intersect coordinate lines v at right angles only at $v = 0$ and $v = \pm 1$. Therefore, due to the law of reciprocity of tangential stresses according to equations (8) and (9), it turns out that $S_v = S_u$.

The straight generatrices coinciding with coordinate lines $v = 0$ and $v = \pm 1$

$v = 0$ (Figure 3)	$v = \pm 1$ (Figure 3)
$f_0 = L^2$	$f_0 = W^2$
$f_3 = (A^2 - T^2)^{1/2} = W$	$f_3 = (A^2 - T^2)^{1/2} = L$
$A^2 = W^2 + T^2$	$A^2 = L^2 + T^2$
$f_5 = qL^2 / T$	$f_5 = qW^2 / T$
$f_6 = 0$	$f_6 = 0$
$f_7 = 0$	$f_7 = 0$
$f_8 = L^2 (W^2 + T^2)$	$f_8 = W^2 (L^2 + T^2)$
$f_9 = \frac{qK [T^2 L^2 - 3W^2 T^2 - 3W^2 L^2]}{3LTW^2 \sqrt{W^2 + T^2}}$	$f_9 = \frac{qK [T^2 W^2 - 3W^2 L^2 - 3T^2 L^2]}{3WTL^2 \sqrt{L^2 + T^2}}$
$f_{10} = \frac{qK [L^2 T^2 (L^2 + W^2) - 3W^4 (L^2 + T^2)]}{6L^3 TW^2 \sqrt{W^2 + T^2}}$	$f_{10} = \frac{qK [W^2 T^2 (L^2 + W^2) - 3L^4 (W^2 + T^2)]}{6L^2 TW^3 \sqrt{L^2 + T^2}}$
$V_{01} = \frac{qKT (L^2 - 3W^2)}{3LW^2 \sqrt{W^2 + T^2}}$	$V_{01} = \frac{qKT (W^2 - 3L^2)}{3WL^2 \sqrt{L^2 + T^2}}$
$N_v = (1-u) \frac{qL^2}{T},$	$N_v = (1-u) \frac{qW^2}{T},$
$S_u = S_v = 0$	$S_u = S_v = 0$

Source : compiled by S.N. Krivoshapko

Normal forces N_v along coordinate lines u , i.e. at $v = 0$ and $v = \pm 1$, are calculated according to equations presented in Table. Normal forces N_u along the same coordinate lines can be calculated using formula (10) at $v = 0$ and $v = \pm 1$. For example, formula (10) takes the following form when evaluated at $v = 0$:

$$\begin{aligned}
 N_u(v=0) = & \frac{q}{6L^2 W^2 T} \left\{ (1-u) (T^2 L^4 - 7L^2 W^2 T^2 + 3L^2 W^4 + 3W^4 T^2) - \right. \\
 & \left. - \frac{(1-u_0)^3}{(1-u)^2} [T^2 (L^2 - 3W^2) (5L^2 - W^2)] + \frac{(1-u_0)^2}{(1-u)} [4T^2 L^4 - 3L^2 W^4 - 9L^2 W^2 T^2] \right\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

One can perform a check that normal force N_u , calculated with formula (11), must be zero at the free edge $u = u_0$ (Figure 3).

3.2. Right Circular Conical Surface

A right circular conical surface may be analysed using the formulas presented above by setting $K = L^2 - W^2 = 0$ and $L = W = r$, where r is the radius of the base of the cone.

Thus, the following may be obtained for a truncated circular conical shell with a free upper edge:

$$S_u = S_v = 0;$$

$$N_v = (1-u) \frac{qr^2}{T};$$

$$N_u = \frac{q}{6T} \left\{ 3(1-u)(r^2 - T^2) + 8 \frac{(1-u_0)^3}{(1-u)^2} T^2 - \frac{(1-u_0)^2}{(1-u)} (3r^2 + 5T^2) \right\}.$$

4. Results and Discussion

It is known that the differential equilibrium equations of the momentless shell theory are most easily integrated for shells of zero Gaussian curvature, the middle surfaces of which are defined in lines of curvature, e.g., cylindrical and right circular conical shells. The problem is more difficult to solve for shells of zero Gaussian curvature defined in arbitrary coordinate lines [1]. This is further confirmed by the example of an elliptical conical shell. The main difficulty in the calculation was the application of a curvilinear non-orthogonal conjugate coordinate system, in which the middle surface of the thin shell under consideration is defined. The equilibrium equations of the shell element defined in an arbitrary curvilinear coordinate system were used for the analysis. These equations were obtained by the author earlier.

1. For the first time, analytical expressions for the determination of normal and tangential internal forces in a right elliptical conical shell according to the momentless theory of shells defined in a non-orthogonal conjugate system of curvilinear coordinates are obtained. The obtained approximate results can be used to evaluate the stress state of thin conical shells with an elliptic base, as well as to study the stability of these shells.

2. The application of the formulas obtained for the first time for the calculation of tangential forces according to the momentless shell theory is demonstrated by the example of a truncated elliptical conical shell with a free upper edge subjected to a distributed load such as self-weight.

3. It is shown that the obtained equations can be used for the analysis of right circular conical shells according to the momentless theory.

5. Conclusion

Despite the development of powerful computer hardware and the creation of powerful software systems capable of calculating the stress-strain state of complex thin-walled spatial structures on the basis of the moment theory of shells, the momentless theory has not lost its relevance. Computational systems are most often based on the application of numerical methods of calculation. The possibility of obtaining analytical solutions is always preferable, as it allows to review the obtained solution. The momentless stress state occupies an honorable place in the calculation of shells, being the ideal to which one should strive when designing shells. The conditions of the momentless stress state cannot always be fulfilled structurally. Even so, the results of the calculation, at some distance from problematic areas, may be acceptable for preliminary design decisions.

References

1. Goldenveizer A.L. *Theory of Elastic Thin Shells*. New York: Pergamon Publ.; 1961.
2. Novozhilov V.V., Chernikh K.F., Mikhailovskiy E.I. *Linear Theory of Thin Shells*. Leningrad: Politehnika Publ.; 1991. (In Russ.) ISBN 5-7325-0127-4
3. Jawad M.H. *Design of Plate and Shell Structures*. New York: ASME Publ.; 2004. ISBN: 0-7918-0199-3
4. Bajoriya G.Ch. The application of the system of Goldenveiser's equations for analysis of momentless torse shells. *Issledovaniya po Raschetu Elementov Prostranstvennih Sistem* [Investigation on Analysis of Fragments of Space Systems]. Moscow: UDN; 1987. P. 65–72 (In Russ.)
5. Ivanov V.N., Krivoshapko S.N. *Analytical Methods of Analysis of Shells of Non-canonical Shape*. Moscow: RUDN; 2010. (In Russ.) EDN: TINZYP
6. Rekach V.G. *Manual for Solution of Problems of Applied Theory of Elasticity*. Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1973.
7. Tovstik P.E. *Stability of Thin Shells: Asymptotic Methods*. Moscow: Nauka, Fizmatlit Publ.; 1995. (In Russ.) ISBN 5-02-014522-X
8. Tyurikov E.V. On the construction of mathematical models of the membrane theory of convex shells. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(1):17–25. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-17-25>
9. Ivanov V.N., Alyoshina O.O. Comparative analysis of the stress-strain state's parameters of equal slope shell with the director ellipse using three calculation methods. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2020;3:37–46. (In Russ.) <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.3.37.46>
10. Fattah M.Y., Waryosh W.A., Al-Hamdani M.A.E. Experimental and theoretical studies of bearing capacity of conical shell foundations composed of reactive powder concrete. *Acta Geodyn. Geometer*. 2015;12(4):411–420. <https://doi.org/10.13168/AGG.2015.0037>
11. Mamieva I.A., Razin A.L. Symbol spatial structures in the form of conic surfaces. *Industrial and Civil Engineering*. 2017;10:5–11. (In Russ.) EDN: ZSMVFN
12. Golzan B.S., Showkati H. Buckling of thin-walled conical shells under uniform external pressure. *Thin-Walled Structures*. 2008;46(5):516–529. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.10.011>
13. Chung S.W., Ju Gisu. A conical shell theory of hybrid anisotropic materials. *International Journal of Composite Materials*. 2019;9(3):53–59. <https://doi.org/10.5923/j.cmaterials.20190903.01>
14. Kantor B.Ya., Mellerovich G.M., Naumenko V.V. Investigation of stress state of shells of elliptic cone. *Dynamics and Strength of Mashines*. 1982;31:19–34.
15. Krivoshapko S.N., Timoshin M.A. Static calculation of an elliptical shell of the same slope, two conical shells with a guiding ellipse and a torso with two ellipses lying in parallel planes for overall stability. *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Engineering Systems — 2012."* Moscow, 2012. C. 40–46. (In Russ.) EDN: TYKBOV
16. Drozdov S.M., Zhirnikov B.L., Kosykh A.P., Nersesov G.G., Yumashev V.L. Investigation of streamlining and aero-dynamical characteristics of blunted elliptical cones when supersonic speed. *Scientific notes of TSAGI*, 2008. Vol. 39. No. 1–2. P. 39–51. (In Russ.) EDN: JWVOIZ
17. Hueston S. *Anthropometric Analysis of the Cervical Spine*. Wright State University. Browse all Theses and Dissertations. 2011. 83 p. Available from: https://corescholar.libraries.wright.edu/etd_all/487 (accessed: 22.05.2023).
18. Krivoshapko S.N. Ruled shells of conical type on elliptical base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(1):40–56. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-1-40-56>
19. Weisstein E.W. Elliptic Cone. Available from: <https://mathworld.wolfram.com/EllipticCone.html> (accessed: 22.05.2023).
20. Gizatulina G.S. *Investigation of Stability of Truncated Conical Shells of Elliptical Cross Section under Different Types of Loading*: dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Kazan; 1999. EDN: QCZCNB

Список литературы

1. Goldenveizer A.L. *Theory of Elastic Thin Shells*. New York: Pergamon Publ.; 1961. 662 p.
2. Новожиллов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. *Линейная теория тонких оболочек*. Л.: Политехника, 1991. 656 с. ISBN 5-7325-0127-4
3. Jawad M.H. *Design of Plate and Shell Structures*. NY: ASME PRESS, 2004. 476 p. ISBN: 0-7918-0199-3
4. Баджория Г.Ч. *Применение системы уравнений А.Л. Гольденвейзера для расчета торсовых оболочек по безмоментной теории // Исследования по расчету элементов пространственных систем*. М.: Изд-во УДН, 1987. С. 65–72.

5. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы. М.: РУДН, 2010. 542 с. EDN: TINZYP
6. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. М.: Высшая школа, 1973. 384 с.
7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука; Физматлит, 1995. 320 с. ISBN 5-02-014522-X
8. Тюриков Е.В. К вопросу о построении математических моделей мембранной теории выпуклых оболочек // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2023. Vol. 23. No. 1. P. 17–25. <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-17-25>
9. Иванов В.Н., Алёшина О.О. Сравнительный анализ параметров напряженно-деформированного состояния торса с направляющим эллипсом с помощью трех методов расчета // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 3. С. 37–46. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.3.37.46>
10. Fattah M.Y., Waryosh W.A., Al-Hamdani M.A.E. Experimental and theoretical studies of bearing capacity of conical shell foundations composed of reactive powder concrete // Acta Geodyn. Geometer. 2015. Vol. 12. No. 4. P. 411–420. <https://doi.org/10.13168/AGG.2015.0037>
11. Мамиева И.А., Разин А.Д. Знаковые пространственные сооружения в форме конических поверхностей // Промышленное и гражданское строительство. 2017. № 10. С. 5–11. EDN: ZSMVFN
12. Golzan B.S., Showkati H. Buckling of thin-walled conical shells under uniform external pressure // Thin-Walled Structures. 2008. Vol. 46. Iss. 5. P. 516–529. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.10.011>
13. Chung S.W., Ju Gisu. A conical shell theory of hybrid anisotropic materials // International Journal of Composite Materials. 2019. Vol. 9. Iss. 3. P. 53–59. <https://doi.org/10.5923/j.comaterials.20190903.01>
14. Кантор Б.Я., Меллерович Г.М., Науменко В.В. Исследование напряженного состояния оболочек типа эллиптического конуса // Динамика и прочность машин. 1982. Вып. 31. С. 19–34.
15. Кривошапко С.Н., Тимошин М.А. Статический расчет эллиптической оболочки одинакового ската, двух конических оболочек с направляющим эллипсом и торса с двумя эллипсами, лежащими в параллельных плоскостях на общую устойчивость // Труды Международной научно-практической конференции «Инженерные системы — 2012». М., 2012. С. 40–46. EDN: ТҮКВОВ
16. Дроздов С.М., Журников Б.Л., Косых А.П., Нерсесов Г.Г., Юмашев В.Л. Исследование обтекания и аэродинамических характеристик затупленных эллиптических конусов при сверхзвуковых скоростях // Ученые записки ЦАГИ. 2008. Т. 39. № 1–2. С. 39–51. EDN: JWVOIZ
17. Hueston S. Anthropometric Analysis of the Cervical Spine. Wright State University. Browse all Theses and Dissertations. 2011. 83 p. URL: https://corescholar.libraries.wright.edu/etd_all/487(дата обращения: 22.05.2023).
18. Krivoshapko S.N. Ruled shells of conical type on elliptical base // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 1. С. 40–56. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-1-40-56>
19. Weisstein E.W. Elliptic Cone. URL: <https://mathworld.wolfram.com/EllipticCone.html> (дата обращения: 22.05.2023).
20. Гизатулина Г.С. Исследование устойчивости усеченных конических оболочек эллиптического поперечного сечения при различных типах нагружения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1999. 131 с. EDN: QCZCNB

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-276-288

УДК 624.04:004

EDN: KGHCLL

Научная статья / Research article

Динамические задачи строительной механики с отрицательным временем

А.В. Штейн^{ID}, В.Б. Зылев^{ID}✉

Российский университет транспорта, Москва, Россия

✉ zylevzb@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 7 апреля 2024 г.

Доработана: 21 мая 2024 г.

Принята к публикации: 27 мая 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Сформулирована динамическая задача с отрицательным течением времени. Обычные уравнения движения с добавлением начальных условий достаточны не только для того, чтобы рассматривать движение деформируемой системы при обычном, прямом течении времени, но позволяют восстанавливать состояние системы для предыдущих моментов времени. Практическое приложение решения задач с отрицательным временем авторы видят, прежде всего, в контроле численных методов интегрирования уравнений движения, поскольку прямой и обратный ход не являются идентичными. Предлагаемый способ тестирования численных методов решения динамических задач в принципе может быть применен к любой вычислительной схеме интегрирования уравнений движения. Дано два примера с численным решением на основании явной вычислительной схемы с экстраполяцией по Адамсу. Решаемые задачи относятся к плоско-деформированному состоянию пластин в условиях больших перемещений. Области пластин разбиваются на треугольные конечные элементы с равномерным шагом для пространственной сетки. Криволинейные границы в этом случае получаются ступенчатыми. Результаты приведенных тестовых примеров продемонстрировали хорошую точность тестируемого метода. Были рассмотрены задачи, требующие большого количества шагов интегрирования (до 1 миллиона), при этом система возвращалась в исходное состояние с большой точностью. Второе из приведенных численных решений имело расчетную схему из 160 000 конечных элементов, динамическое решение задачи носит явно выраженный волновой характер решения. В примерах приведены данные о восстановлении значений упругих перемещений, скоростей и напряжений. Основной вывод, который можно сделать из работы, заключается в том, что предлагаемый вариант контроля численных методов может быть эффективно использован, особенно для задач, решение которых носит волновой характер.

Штейн Алексей Владимирович, доцент кафедры строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3150-4438, ORCID: 0009-0003-2232-5121; E-mail: avsh7714@yandex.ru

Зылев Владимир Борисович, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3150-4438, ORCID: 0000-0001-5160-0389; E-mail: zylevzb@ya.ru

© Штейн А.В., Зылев В.Б., 2024

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Ключевые слова: динамические задачи, деформируемая система, предыдущее состояние системы, численное интегрирование, уравнения движения, отрицательное время, явная вычислительная схема, треугольные конечные элементы, большие перемещения, равномерная пространственная сетка, шаг численного интегрирования, волновое решение, локальные экстремумы

Для цитирования

Штейн А.В., Зылев В.Б. Динамические задачи строительной механики с отрицательным временем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 276–288. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-276-288>

Problems of Structural Dynamics with Negative Time

Alexey V. Shtein^{id}, Vladimir B. Zylev^{id}✉

Russian University of Transport, Moscow, Russia

✉ zylevzb@yandex.ru

Article history

Received: April 7, 2024

Revised: May 21, 2024

Accepted: May 27, 2024

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. A dynamic problem with negative flow of time is formulated. The conventional equations of motion with the addition of initial conditions are sufficient not only for the analysis of motion of a deformable system under the regular, forward flow of time, but they allow to restore the state of the system for past moments of time. The practical use of solving problems with negative time can be found primarily in testing numerical methods for integrating the equations of motion, since forward and backward algorithms are not identical. The proposed technique of testing numerical methods for solving dynamic problems can be applied virtually to any computational scheme of integrating the equations of motion. Two examples of numerical solution based on explicit computational scheme with Adams extrapolation are presented. The addressed problems deal with the plane deformation state of plates under large displacements. Plate regions are partitioned into triangular finite elements with uniform spacing for spatial meshing. The obtained curvilinear boundaries in this case are stepped. The results of the presented test cases demonstrated good accuracy of the tested method. Problems requiring a large number of integration steps (up to 1 million) were considered, and the system returned to the initial state with high accuracy. The second of the given numerical solutions had a computational scheme of 160 000 finite elements, and the dynamic solution of the problem has a pronounced wave-like behavior. In the examples, data on the recovery of elastic displacement, velocity and stress values are given. The main conclusion of the study is that the proposed technique of control of numerical methods can be effectively applied, especially for problems with wave-like solution properties.

Keywords: dynamic problems, deformable system, recovery of previous states of the system, numerical integration of equations of motion, explicit computational scheme, triangular finite elements, large displacements, uniform spatial mesh, numerical integration step, wave-like solution, local extrema

For citation

Shtein A.V., Zylev V.B. Problems of structural dynamics with negative time. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):276–288. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-276-288>

Alexey V. Shtein, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3150-4438; ORCID: 0009-0003-2232-5121; E-mail: avsh7714@yandex.ru

Vladimir B. Zylev, Doctor of Technical Science, Head of the Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3150-4438; ORCID: 0000-0001-5160-0389; E-mail: zylevzb@ya.ru

1. Введение

Динамические задачи строительной механики предполагают моделирование поведения системы при нарастающем времени. В данном исследовании мы рассматриваем обратную в определенном смысле задачу, когда уравнения движения используются для восстановления предыдущих по времени состояний системы. Отметим, что подобные задачи известны в механике, например, в небесной механике развиты методы предсказаний не только будущих солнечных затмений, но и определение времени ранее наблюдавшихся затмений, что позволяет уточнять хронологию исторических событий.

Как пример задачи с отрицательным временем для упругой системы приведем аналитическое решение задачи о затухающих колебаниях системы с одной степенью свободы (рис. 1). Известное частное решение которой имеет вид

$$y = Be^{-nt} \sin \omega t. \quad (1)$$

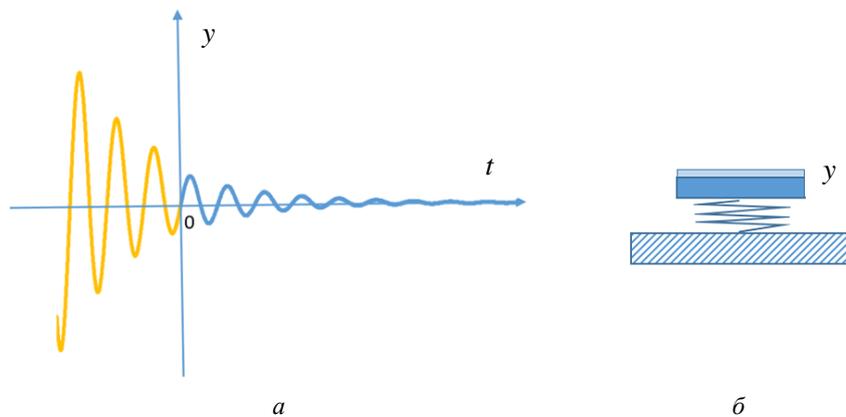


Рис. 1. Затухающие колебания системы с одной степенью свободы:
a — график аналитического решения; *b* — система с одной степенью свободы
 И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 1. Damped vibration of a single degree-of-freedom system:
a — analytical solution; *b* — single degree-of-freedom system
 S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

В данном случае для восстановления предыдущих состояний системы (светлая часть графика на рис. 1, *a*) достаточно подставить в решение (1) отрицательное значение времени.

В настоящее время широко используются численные методы интегрирования уравнений движения. Наибольшее количество публикаций относится к неявным вычислительным схемам (метод Ньюмарка, θ — метод Вилсона и др.) [1–4]. Кроме неявных вычислительных схем используются и явные вычислительные схемы (метод центральных разностей, метод Рунге — Кутты, метод Адамса [5]).

Применение любого численного метода неизбежно связано с погрешностями, определение и оценка которых относятся к основным вопросам применимости того или иного вычислительного алгоритма. Методы контроля весьма разнообразны: счет с уменьшенным шагом; сравнение с известными аналитическими решениями, сравнение с экспериментальными данными и т.д. Мы хотим обратить внимание на ту дополнительную возможность, которую здесь предоставляет решение обратной динамической задачи, или, лучше сказать, решение задачи с отрицательным временем. Следует заметить, что термин «обратные задачи» в задачах акустики имеет совершенно другое значение [6–10]. Обратные задачи акустики заключаются в определении упругих и массовых характеристик массива грунта по параметрам распространяющихся в нем волнам деформаций.

При численном решении динамической задачи погрешность при прямом и обратном течении времени получается различной. Это открывает возможность контроля точности решения. По сравнению с обычным временем отрицательное время в задачах контроля точности имеет то преимущество, что заранее известно состояние системы, к которому она должна прийти (точнее говоря, вернуться). Например, это может быть начальное ненапряженное состояние системы.

Практическое приложение решений задач с отрицательным временем мы видим в контроле точности численных методов. Рассмотрим далее особенности выполнения такого контроля.

2. Рассматриваемый численный метод интегрирования

Возможность построения решения при обратном течении времени в принципе не связана с рассмотрением какого-либо конкретного численного метода интегрирования уравнений движения, соответственно, любой вычислительный алгоритм может рассматриваться как тестируемый подобным способом. Приводимые ниже примеры решаются нами с использованием явной экстраполяционной схемы шагового интегрирования, которая достаточно подробно изложена в [11–13]. Все рассмотренные в данной статье примеры относятся к плоской задаче теории упругости с возможностью рассмотрения больших перемещений. Используются треугольные конечные элементы с линейной аппроксимацией перемещений внутри элемента. Сетка разбиения берется с постоянным шагом. Массы предполагаются сосредоточенными в узлах. Условно устойчивая вычислительная схема использует весьма малый шаг по времени, что дает возможность получать волновые решения.

Приведем крайне сокращенное описание численного метода, что необходимо для понимания особенностей решения при прямом и обратном течении времени. На рис. 2 показаны графики изменения ускорения (составляющей ускорения по одной из координатных осей) некоторого узла системы. Рассмотрим сначала обычное течение времени. На рис. 2 Δ — это шаг интегрирования по времени. W_1, W_2, W_3 — это значения ускорений на уже пройденных участках интегрирования. W_0 — ускорение, которое только что вычислено по текущим координатам узлов и значениям скоростей.

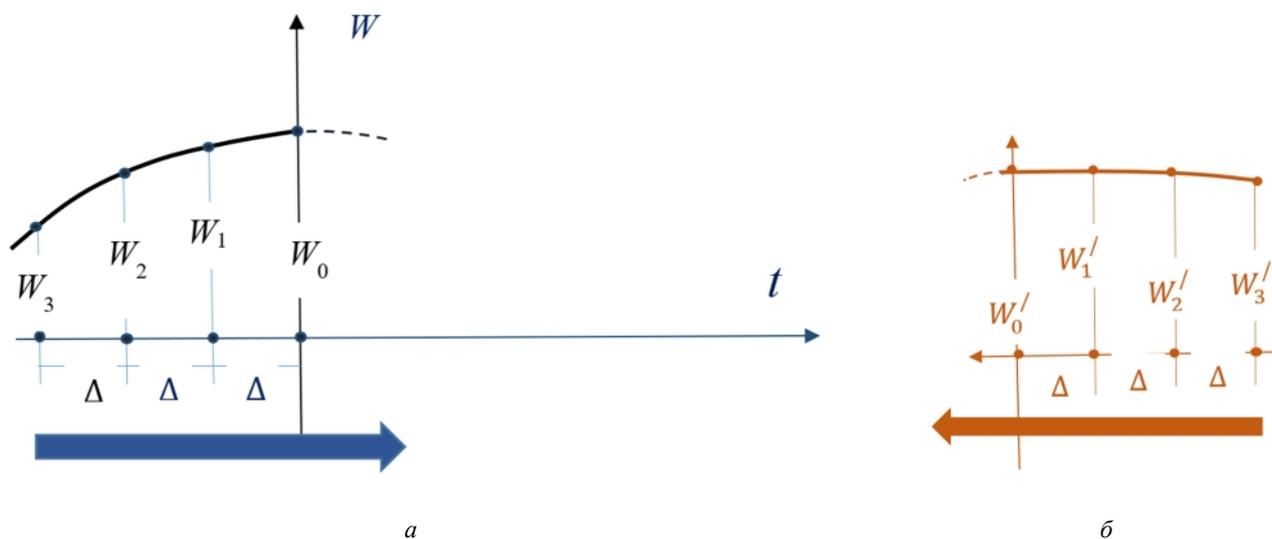


Рис. 2. График изменения составляющей ускорения:
 а — прямое течение времени; б — обратное течение времени
 Источник: выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 2. Change of acceleration component with time:
 а — forward flow of time; б — backward flow of time
 Source: compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Через четыре известных значения ускорений проводится кубическая парабола, что обеспечивает получение приближенного выражения для ускорения на предстоящем шаге интегрирования. Используемые при расчете формулы для приращения скорости и смещения за шаг по времени имеют вид

$$\Delta V = \frac{\Delta}{24}(55W_0 - 59W_1 + 37W_2 - 9W_3);$$

$$\Delta S = V_0\Delta + \frac{\Delta^2}{360}(323W_0 - 264W_1 + 159W_2 - 38W_3). \quad (2)$$

Один шаг по времени при обратном течении времени делается аналогично прямому. Значения ускорений в опорном отрезке будут W_0' , W_1' , W_2' , W_3' . Конечно, эти значения получены при обратном течении времени (см. рис. 2, б). Таким образом, шаг вперед и шаг назад по времени будут иметь каждый свою погрешность, что определяет возможность использовать отрицательное время для контроля точности.

3. Пример численного решения задачи о пластине (балке) при внезапном приложении нагрузки

На рис. 3 показана расчетная схема консольной балки (пластины). Размеры балки — высота 2 м, длина 20 м. Балка загружается 11 сосредоточенными силами 200 кН, направленными вниз. Точки приложения сил по верхней границе балки отмечены на рис. 3, а. Глухая заделка закрепляет пластину в правом сечении балки. Конечные элементы — равносторонние прямоугольные треугольники в 20 слоев по вертикали и 200 слоев по горизонтали. Таким образом, имеем 8000 конечных элементов. Материал имеет модуль упругости 200 000 МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,25$. Удельная плотность 7850 кг/м^3 . Толщина расчетного слоя 0,01 м. Представлена плоская деформация. Рассматриваются большие перемещения, но соотношения между деформациями и напряжениями подчиняются закону Гука, таким образом, задача условно решается с учетом лишь геометрической нелинейности, независимо от уровня напряжений.

Точки приложения сил /
Points of application of forces

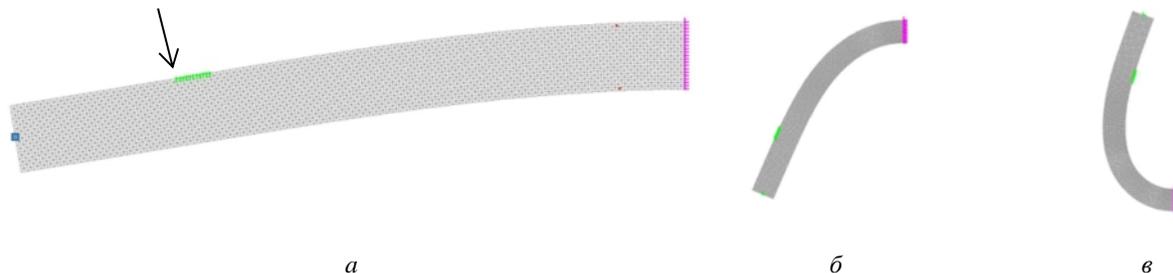


Рис. 3. Внезапное приложение нагрузки к консольной балке:
a — расчетная схема с разбивкой на конечные элементы, статический прогиб;
б — полученные в расчете максимальные отклонения вниз;
в — полученные в расчете максимальные отклонения вверх
 Источник: выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 3. Instantaneous load applied to a cantilever beam:
a — finite element model; *б* — maximum upwards deflection; *в* — maximum downwards deflection
 Source: compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

В расчетной модели учитываются силы внешнего сопротивления. В каждый узел прикладывается противоположно его скорости сила сопротивления — $kt\dot{y}$, где m — масса узла. Значение k принято равным 10 с^{-1} .

На рис. 4 показан график изменения во времени перемещения отмеченной на рис. 3, а точки торцевого поперечного сечения стержня по вертикали. Красными стрелками (направленными направо) на рис. 4 отмечено обычное течение времени, голубой стрелкой (направленной налево) отмечено обратное течение времени.

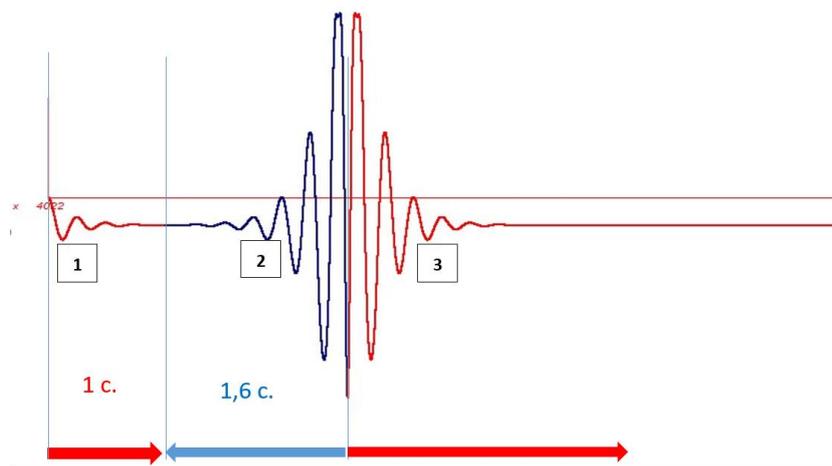


Рис. 4. График изменения перемещения торцевой точки стержня по вертикали

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 4. Vertical displacement of the end of the bar with time

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Итак, как следует из графика на рис. 4, в течение одной секунды с момента приложения нагрузки почти достигается положение равновесия балки, которое показано на рис. 3, а, где перемещения показаны в натуральном масштабе. После момента времени 1 с обычный расчет заканчивается и начинается расчет при обратном течении времени (второй участок графика на рис. 4). В нашей компьютерной программе график при обратном течении времени строится с нарастанием времени направо. При таком способе построения графиков не происходит наложения графиков, что обеспечивает их удобное сравнение и взаимный контроль. В идеале график при обратном течении времени будет зеркальным отображением графика при прямом течении времени, что и наблюдается на рис. 4.

На втором участке (рис. 4) можно наблюдать возвращение системы в исходное недеформированное состояние (график коснулся оси времени). Если в этот момент снять нагрузку, исходное равновесие восстановится. В данном примере продемонстрирован переход за начальный момент времени при сохранении нагрузки.

Поскольку при прямом течении времени амплитуды убывали (затухающие колебания), при обратном течении времени они будут неограниченно возрастать, что можно видеть на рис. 4. В данном случае на возрастание амплитуды отведено 0,6 с, при этом амплитуды стали нереально большими, система перешла в состояние весьма больших прогибов (см. рис. 3, б), которые тем не менее отображаются расчетной моделью с точки зрения геометрических соотношений. Далее (см. рис. 4) опять включается расчет с обычным течением времени, при этом система вновь проходит исходное равновесное состояние и далее повторяет движение, соответствующее обычному динамическому расчету. Насколько можно видеть из графиков на рис. 4, описанная картина движения правильно отображается расчетом.

Для более точной оценки погрешности численного решения рассмотрим данные, приведенные в табл. 1, где даны локальные минимумы перемещений для точек 1, 2, 3 (см. рис. 4). Все эти точки соответствуют тождественным состояниям системы.

Таблица 1

Локальные минимумы на графике изменения перемещения торцевой точки балки для идентичных состояний 1, 2, 3 (рис. 4)

Номер локального минимума на рис. 4	1	2	3
Значения перемещения по вертикали, метры	-3,833306	-3,833305	-3,833432

И с т о ч н и к : выполнено выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Table 1

Local minima on the bar end displacement curve for identical states 1, 2, 3 (Figure 4)

Local minima ID in Figure 4	1	2	3
Vertical displacement, m	-3.833306	-3.833305	-3.833432

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

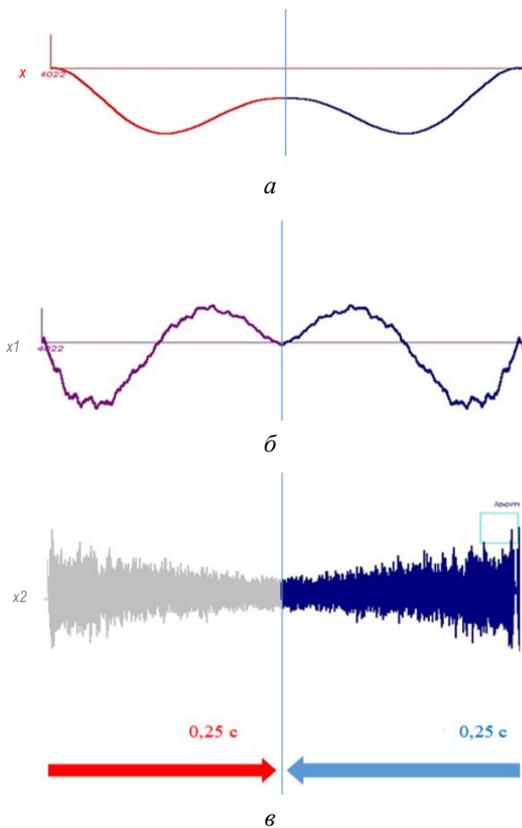


Рис. 5. Отрезок времени 0,25 с:

а — вертикальное перемещение узла (фрагмент рис. 4);

б — составляющая скорости узла по вертикали;

в — составляющая ускорения по вертикали

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 5. Time interval of 0.25 s:

а — vertical nodal displacement (Figure 4 fragment);

б — vertical component of nodal velocity;

в — vertical component of acceleration

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Как видно из табл. 1, отличия в прогибах имеются лишь в пятом знаке, что явилось неожиданностью даже для авторов статьи. Решение велось с шагом по времени $\Delta = 0,00000256\text{ с}$, таким образом, до третьего максимума компьютер выполнил около 1 миллиона шагов. Отметим, что шаг в нашей компьютерной программе назначается автоматически на основании формулы $\Delta = \frac{T^{\text{парц}}}{20}$, где $T^{\text{парц}}$ — наименьший парциальный период системы [12]. Наша явная вычислительная схема является условно устойчивой. Попытка увеличения этого шага в 2,5 раза приводит к неустойчивому вычислительному процессу. Таким образом, данные, приведенные в табл. 1, соответствуют стандартному значению шага по времени.

Сравнение напряжений при прямом и обратном счете приводит к большим погрешностям, которые содержатся уже в четвертой значащей цифре. Можно констатировать, что выполненный тест дал вполне удовлетворительный результат для напряжений и перемещений.

Теперь рассмотрим скорость по вертикали того же узла и соответствующую составляющую ускорения. На рис. 5 показан временной интервал 0,25 с от момента внезапного приложения нагрузки и обратный счет тоже 0,25 с. Графики на рис. 5, а это перемещение, скорость и ускорение торцевого узла по вертикали. Таким образом, здесь имеется график функции, ее первой и вто-

рой производной, что на первый взгляд может вызвать сомнения. Однако рассмотрение графика перемещения в сильно увеличенном масштабе эти сомнения аннулирует, так как показывает, что эта кривая отнюдь не является гладкой. Мелкие неровности на кривой перемещений отображают высокочастотные колебания узла, без моделирования которых решить задачу не получится. Подробнее этот вопрос рассмотрен в [14].

В табл. 2 даны полученные на компьютере значения экстремумов на графиках скорости и ускорения.

Таблица 2

Минимальное значение скорости и максимальное значение ускорения на отрезке времени 0,25 с

Шаг численного интегрирования Δt , с	Минимальное значение скорости на исследуемом отрезке времени м/с		Максимальное значение ускорения на исследуемом отрезке времени, м/с ²	
	Прямой ход	Обратный ход	Прямой ход	Обратный ход
$\Delta t = 0,00000256$	-53,26545	-53,21240	43244,92	29328,13
$\frac{\Delta t}{2} = 0,00000128$	-53,28352	-53,26672	43609,32	42302,79
$\frac{\Delta t}{16} = 0,00000016$	-53,29225	-53,29226	43625,28	43625,32

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Table 2

Minimum value of velocity and maximum value of acceleration over the time interval of 0.25 s.

Numerical integration step Δt , s	Minimum velocity over the considered time interval, m/s		Maximum acceleration over the considered time interval, m/s ²	
	Forward stepping	Backward stepping	Forward stepping	Backward stepping
$\Delta t = 0,00000256$	-53.26545	-53.21240	43244.92	29328.13
$\frac{\Delta t}{2} = 0,00000128$	-53.28352	-53.26672	43609.32	42302.79
$\frac{\Delta t}{16} = 0,00000016$	-53.29225	-53.29226	43625.28	43625.32

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Исходный шаг интегрирования дает для скоростей совпадение трех знаков. Уменьшение исходного шага в 16 раз приводит к совпадению семи значащих цифр.

Совпадения для ускорений получаются уже значительно хуже. Совпадение пяти знаков достигается только при уменьшении шага в 16 раз. Правда, следует отметить, что здесь мы сравниваем значения, которые могут получаться для слегка различных моментов времени, определяемых шагом при конкретной числовой реализации.

Отметим интересную особенность, которая заключается в том, что, получая существенные несовпадения экстремумов ускорений, мы тем не менее имеем очень хорошие результаты для смещений (см. табл. 1), ведь численный алгоритм полностью (см. формулы (2)) построен на ускорениях.

4. Пример численного решения волновой задачи

На рис. 6 показана расчетная область, разбитая на треугольные конечные элементы с равномерной толщиной слоев 0,005 м. Она содержит $200 \times 400 \times 2 = 160\,000$ конечных элементов (с учетом удаленных из отверстий элементов). Пустоты и вырезы получаются выбрасыванием соответствующих конечных элементов, так что границы отверстий являются ступенчатыми. Характеристики материала и допущения те же, что и в предыдущем примере, вновь рассматривается плоская деформация. Толщина расчетного слоя 0,01 м.

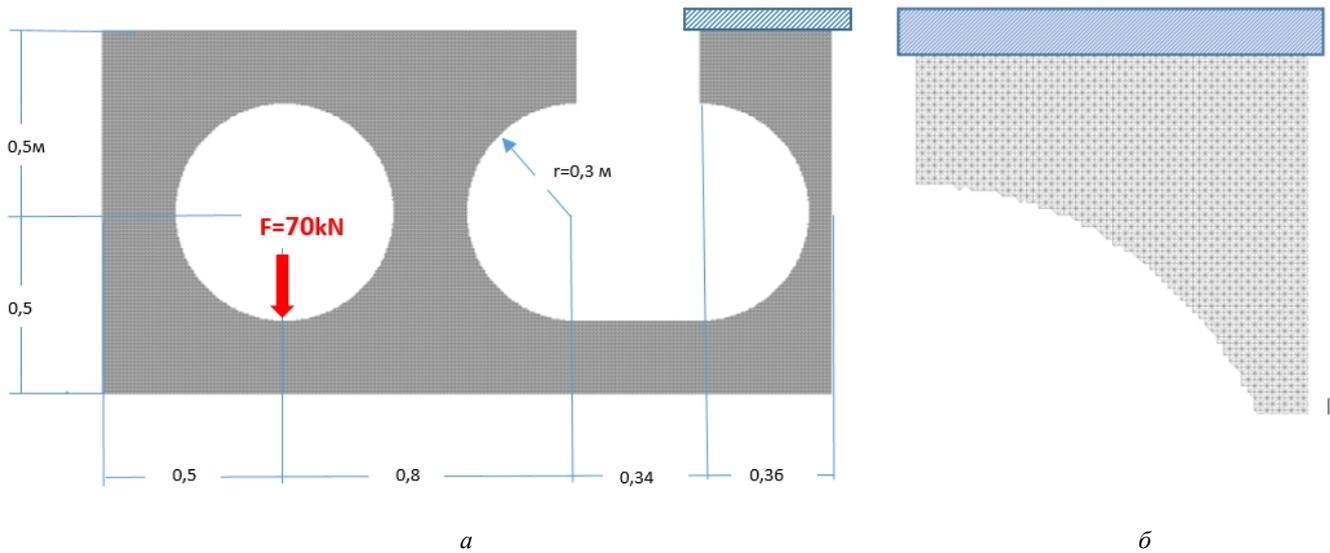


Рис. 6. Расчетная область при действии внезапно приложенной силы:
 а — размеры, нагрузка и закрепление; б — правый верхний фрагмент расчетной схемы
 И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 6. Analyzed area subjected to instantaneous load:
 а — dimensions, load and restraints; б — upper right segment of the model
 S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Сила F считается внезапно приложенной. Пластина закреплена по горизонтальному участку границы справа сверху жесткой заделкой. В табл. 3 приведены деформации пластины для нескольких указанных моментов времени. Эпюры даны для первого главного напряжения. Как видно, решение носит явно выраженный волновой характер. Скорость распространения фронта волн деформаций соответствует скорости распространения волны сжатия в неограниченном упругом теле.

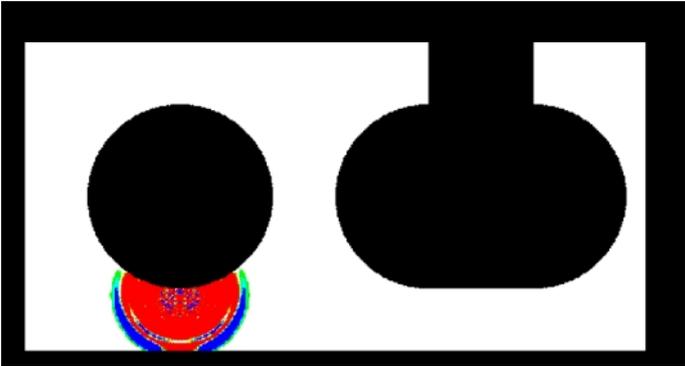
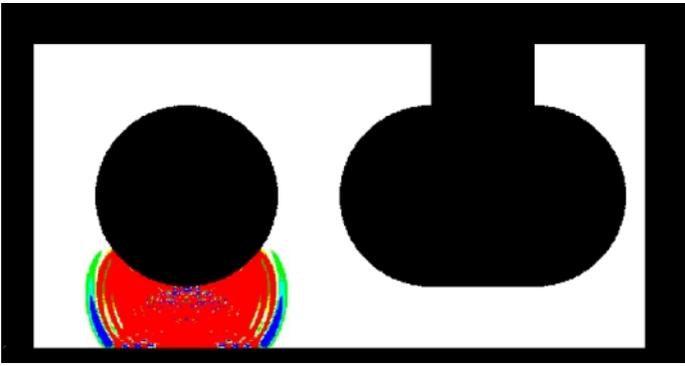
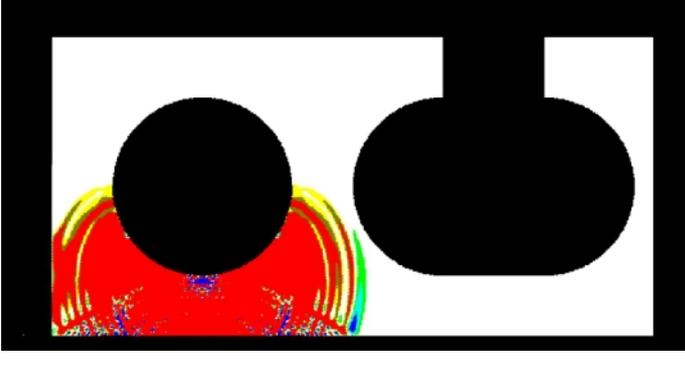
$$c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1-\mu-2\mu^2)}} = 5476,52 \text{ м/с, в чем можно убедиться, рассматривая рисунки в табл. 3.}$$

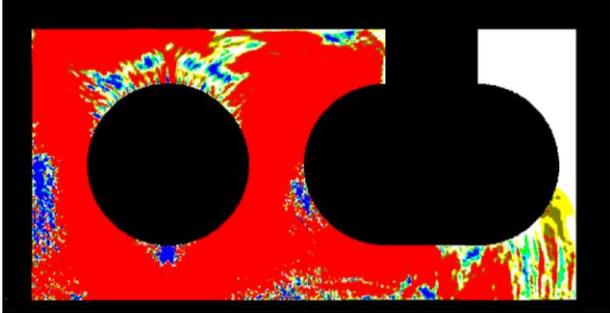
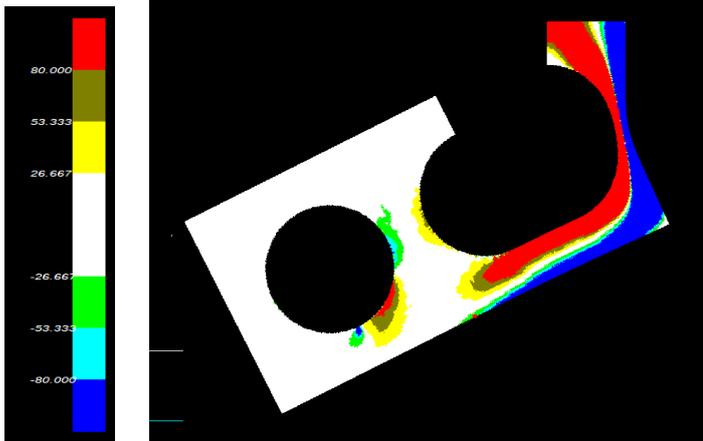
Таблица 3 / Table 3

**Задача о распространении волн деформаций в пластине сложного очертания /
 The problem of propagation of deformation waves in a plate of complex shape**

Комментарии / Comments	Состояние системы / System state	
Время $t = 0,00002 \text{ с}$ Эпюра первого главного напряжения / Time $t = 0.00002 \text{ sec.}$ Distribution of the first principal stress		

Продолжение табл. 3 / Continuation of the Table 3

Комментарии / Comments	Состояние системы / System state
<p>Время $t = 0,00004$ с / Time $t = 0.00004$ sec</p>	
<p>Время $t = 0,00006$ с / Time $t = 0.00006$ sec</p>	
<p>Время $t = 0,00008$ с / Time $t = 0.00008$ sec</p>	
<p>Время $t = 0,00010$ с / Time $t = 0.00010$ sec</p>	

Комментарии / Comments	Состояние системы / System state
<p>Время $t = 0,00034$ с / Time $t = 0.00034$ sec</p>	
<p>Время $t = 0,04$ с Эпюра нормальных напряжений на горизонтальных площадках / Time $t = 0.04$ sec. Distribution of normal stress on horizontal planes. Large displacements</p>	

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном / S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Отметим, что последний рисунок табл. 3 соответствует моменту времени 0,04 с. Для нас это достаточно большой промежуток времени, так как он соответствует выполнению более 600 000 шагов интегрирования по времени на прямой и обратный ход (шаг интегрирования в этом примере оказался равным 0,000000128 с). Кроме того, на последнем рисунке приведена эпюра для нормального напряжения на горизонтальных площадках σ_y , которое направлено вертикально, и увеличен масштаб шкалы напряжений до 80 МПа. Подчеркнем, что эти напряжения действуют именно в горизонтальной площадке, так как в нашей программе напряжения определяются в исходной глобальной системе координат.

Приведенные в табл. 3 рисунки соответствуют обычному, прямому течению времени. При выполнении расчетов с отрицательным течением времени для идентичных моментов мы получали рисунки, визуально не отличимые от имеющихся в табл. 3, поэтому в статье они не приводятся.

Для характеристики контроля точности решения с привлечением моделирования обратного течения времени рассмотрим графики на рис. 7.

Максимальное перемещение узла по вертикали составляет 0,827 м, что соответствует большим перемещениям (см. последний рисунок в табл. 3). Для графика выбрано первое главное напряжение в середине нижнего волокна пластины, так как оно достигает максимума в начале исследуемого отрезка времени 0,04 с. Как видно, нарушения симметрии на графиках незначительны. Максимумы напряжений в идентичных состояниях при прямом и обратном ходе времени отличаются на 1,2 %, и это несмотря на то, что выполнено более 0,5 млн шагов интегрирования. Решение этого примера выполнялось при стандартном шаге интегрирования 128×10^{-9} с. При использовании обычного компьютера с тактовой частотой процессора 3,2 GHz задача требует 7,2 ч процессорного времени.

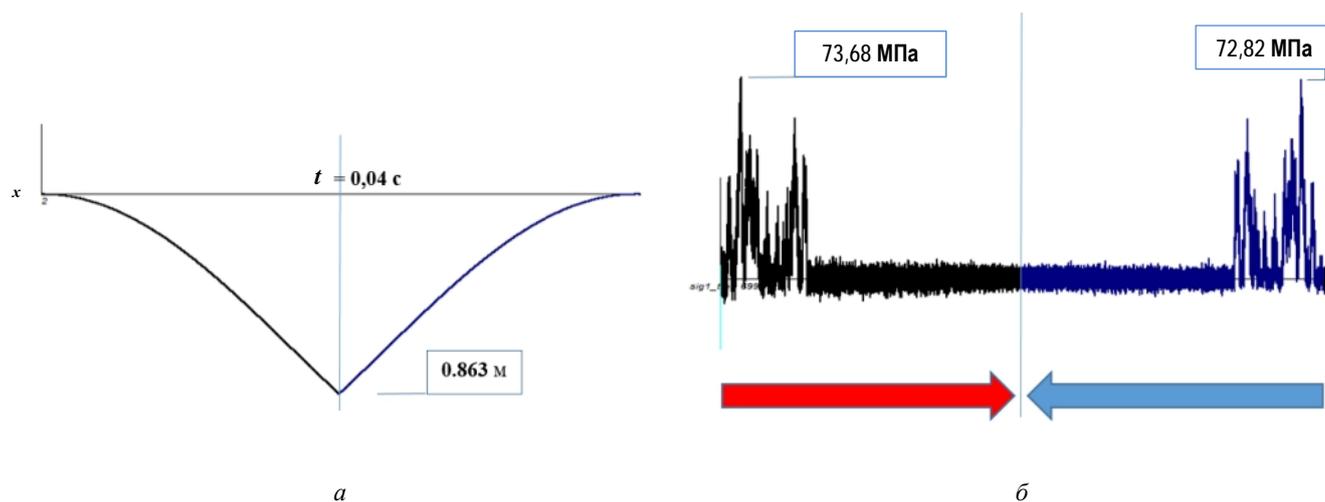


Рис. 7. Перемещения и напряжения в пластине сложного очертания при прямом и обратном течении времени: *a* — перемещение левого нижнего угла пластины по вертикали; *б* — первое главное напряжение в середине нижней границы пластины

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 7. Displacements and stresses in a plate of complex shape under forward and backward flow of time: *a* — vertical displacement of the lower corner of the plate; *б* — first principal stress in the middle of the lower edge of the plate

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

5. Заключение

1. Сформулированы цели и задачи моделирования поведения деформируемой системы при обратном течении времени. Показано, как решения задач с отрицательным течением времени могут быть использованы для контроля точности численных методов интегрирования уравнений движения.

2. Явная схема интегрирования уравнений движения с экстраполяцией по Адамсу демонстрирует успешное прохождение теста на отрицательное время. Тестирование на отрицательное время показано на решении плоской динамической задачи теории упругости для двух конечно-элементных расчетных схем большой размерности. Задачи рассматриваются при больших перемещениях в геометрически нелинейной постановке.

3. Хотя контроль на отрицательное время, безусловно, не является единственным и, тем более, главным способом контроля решений динамических задач, то как дополнительное средство контроля он представляет интерес, особенно для задач, решение которых носит явно выраженный волновой характер.

Список литературы

1. Karimi Y., Rashahmadi S., Hasanzadeh R. The effects of Newmark method parameters on errors in dynamic extended finite element method // International Journal of Engineering, Transactions A: Basics. 2018. Vol. 31. No 1. P. 50–57. <https://doi.org/10.5829/ije.2018.31.01a.08>
2. Pasetto M., Waisman H., Chen J.S. A waveform relaxation Newmark method for structural dynamics problems // Computational Mechanics. 2019. Vol. 63. No. 6. P. 1223–1242. <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1646-x>
3. Ma K., Du J., Liu Ya. Nonlinear dynamic behavior analysis of closed-loop self-excited crankshaft model using improved Newmark — β method // Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 111. No. 6. P. 1223–1242. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08100-3>
4. Ye Sh., Xue T., Zhang W. Multi-stage displacement analysis based on real-time dynamic slider method // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2023. Vol. 174. No. 6. 108209. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2023.1082>
5. Soltanieh G., Kabir M.Z., Shariyat M. Improvement of the dynamic instability of shallow hybrid composite cylindrical shells under impulse loads using shape memory alloy wires // Composites Part B: Engineering. 2019. Vol. 167. P. 167–179. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.040>

6. Беженцева М.В., Вуцин Л.И., Кибец А.И., Крушка Л. Конечно-элементная методика численного моделирования упругопластического деформирования древесины при ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 428–441. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-428-441>
7. Bakushinsky A.B., Leonov A.S. Multifrequency inverse problem of scalar acoustics: remarks on nonuniqueness and solution algorithm // *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 274. No. 4. P. 460–474. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06613-9>
8. Kasenov S., Askerbekova Ja., Tleulesova A. Algorithm construction based on the gradient method of one inverse problem for the acoustics equation // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022. Vol. 2. No. 5 (116). P. 43–52. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.253568>
9. Белай О.В., Подivilов Е.В., Фрумин Л.Л., Шапиро Д.А. Обратная задача рассеяния для волнового уравнения в одномерно неоднородной среде // *Автоматрия*. 2009. Т. 45. № 6. С. 69–77. EDN: KYKGLN
10. Symes W.W., Chen H., Minkoff S.E. Solution of an acoustic transmission inverse problem by extended inversion // *Inverse Problems*. 2022. Vol. 38. No. 11. URL: <https://arxiv.org/pdf/2201.08891> (дата обращения: 10.12.2023)
11. Зылев В.Б., Штейн А.В. Численное решение задачи о нелинейных колебаниях системы нитей // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1986. № 6. С. 58–61.
12. Зылев В.Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М.: НИЦ «Инженер», 1999. 144 с. ISBN 5-8208-0012-5
13. Александров А.В., Потанов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика: в 2 кн. Книга 2. Динамика и устойчивость упругих систем. М.: Высшая школа, 2008. 384 с. ISBN: 9785060053579
14. Зылев В.Б., Григорьев Н.А., Алферов И.В. Об ускорениях точек упругих тел при соударениях // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 2 (283). С. 59–61. EDN: DJHVAE

References

1. Karimi Y., Rashahmadi S., Hasanzadeh R. The effects of Newmark method parameters on errors in dynamic extended finite element method. *International Journal of Engineering, Transactions A: Basics*. 2018;31(1):50–57. <https://doi.org/10.5829/ije.2018.31.01a.08>
2. Pasetto M., Waisman H., Chen J.S. A waveform relaxation Newmark method for structural dynamics problems. *Computational Mechanics*. 2019;63(6):1223–1242. <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1646-x>
3. Ma K., Du J., Liu Ya. Nonlinear dynamic behavior analysis of closed-loop self-excited crankshaft model using improved Newmark — β method. *Nonlinear Dynamics*. 2023;111(6):1223–1242. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08100-3>
4. Ye Sh., Xue T., Zhang W. Multi-stage displacement analysis based on real-time dynamic slider method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2023;174(6):108209. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2023.1082>
5. Soltanieh G., Kabir M.Z., Shariyat M. Improvement of the dynamic instability of shallow hybrid composite cylindrical shells under impulse loads using shape memory alloy wires. *Composites Part B: Engineering*. 2019;167:167–179. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.040>
6. Bezhentseva M.V., Vutsin L.I., Kibets A.I., Krushka L. Finite element method for numerical modeling of elastic-plastic deformation of wood under shock loading. *Problems of strength and plasticity*. 2020;82(4):428–441. (In Russ.) <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-428-441>
7. Bakushinsky A.B., Leonov A.S. Multifrequency inverse problem of scalar acoustics: remarks on nonuniqueness and solution algorithm. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023;274(4):460–474. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06613-9>
8. Kasenov S., Askerbekova Ja., Tleulesova A. Algorithm construction based on the gradient method of one inverse problem for the acoustics equation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022;2(5):43–52. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.253568>
9. Belai O.V., Podivilov E.V., Frumin L.L., Shapiro D.A. Inverse scattering problem for the wave equation in a one-dimensional inhomogeneous medium. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2009;45(6):546–553. <https://doi.org/10.3103/S8756699009060090>
10. Symes W.W., Chen H., Minkoff S.E. Solution of an acoustic transmission inverse problem by extended inversion. *Inverse Problems*. 2022;38(11):115003. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2201.08891> (accessed: 10.12.2023).
11. Zylev V.B., Shtein A.V. Numerical solution of the problem of nonlinear oscillations of a system of threads. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1986;6:58–61. (In Russ.)
12. Zylev V.B. *Computational methods in nonlinear mechanics of structures*. Moscow: NIC “Inzhener” Publ.; 1999. (In Russ.) ISBN 5-8208-0012-5
13. Alexandrov A.V., Potapov V.D., Zylev V.B. *Construction mechanics*. In 2 books. Book 2. *Dynamics and stability of elastic systems*. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 2008. (In Russ.) ISBN: 9785060053579
14. Zylev V.B., Grigoriev N.A., Alferov I.V. About the acceleration of points of elastic bodies in collisions. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2019;2(283):59–61. (In Russ.) EDN: DJHVAE

Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки из разномодульного материала, лежащей на вязкоупругом основании

Н.С. Рзаев 

Бакинский инженерный университет, Баку, Республика Азербайджан

✉ nrzayev@beu.edu.az

История статьи

Поступила в редакцию: 14 января 2024 г.

Доработана: 11 апреля 2024 г.

Принята к публикации: 25 апреля 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Аннотация. Исследована задача устойчивости цилиндрической оболочки с различными модулями на вязкоупругом основании. Предполагается, что оболочка круглого сечения подвергается силовому воздействию и теряет устойчивость в осесимметричной форме. Считается, что один конец оболочки остается неподвижным, а другой меняет свое местоположение (движется) с определенной скоростью. При этом предполагается, что поперечное перемещение больше продольного. При решении задачи принималось во внимание сопротивление внешней среды, а также учитывалось, что цилиндрическая оболочка изготовлена из разномодульного материала. Получены уравнения связи между критической силой с характерными параметрами для цилиндрической оболочки, расположенной на основании, характеризуемом, в свою очередь, как вязкоупругое основание, и моделью Пастернака. Из полученных уравнений и изложенных результатов видно, что допускаются серьезные погрешности, если при решении вопросов устойчивости не учитываются сопротивление внешней среды и разная модульность. Результаты расчета показывают, что значение критической силы в рассматриваемом случае существенно отличается от значений, соответствующих классическим задачам, и зависит от параметров, характеризующих сопротивление основания. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах разномодульных цилиндрических оболочек на прочность, устойчивость и частотно-амплитудных характеристик с учетом сопротивления внешней среды.

Ключевые слова: растяжение, сжатие, цилиндрическая оболочка, устойчивость

Для цитирования

Рзаев Н.С. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки из разномодульного материала, лежащей на вязкоупругом основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 289–299. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299>

Рзаев Натиг Самандар, доктор философии в области механики, доцент кафедры инженерной механики, Бакинский инженерный университет, Баку, Азербайджанская Республика; eLIBRARY SPIN-код: 5334-6047, ORCID: 0000-0002-1159-9296, E-mail: nrzayev@beu.edu.az.

© Рзаев Н.С., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Dynamic Stability of a Cylindrical Shell Made of a Material of Different Modulus Placed on a Viscous-elastic Foundation

Natig S. Rzayev 

Baku Engineering University, Baku, Republic of Azerbaijan

✉ nrzayev@beu.edu.az

Article history

Received: January 14, 2024

Revised: April 11, 2024

Accepted: April 25, 2024

Conflicts of interest

The author declares that there is no conflict of interest.

Abstract. The problem of stability of a cylindrical shell with various modules on a viscoelastic base is investigated. It is assumed that the shell of a circular cross section is subjected to force and loses stability in an axisymmetric form. It is believed that one end of the shell remains motionless, while the other changes its location (moves) at a certain speed. It is assumed that the transverse displacement is greater than the longitudinal one. When solving the problem, the resistance of the external environment was taken into account, and it was also read that the cylindrical shell was made of a material of different modularity. Relationship equations are obtained between the critical force and the characteristic parameters for a cylindrical shell located on a base, characterized, in turn, as a viscoelastic base and the Pasternak model. From the equations obtained and the results presented, it can be seen that serious errors are allowed if, when solving stability issues, the resistance of the external environment and different modularity are not taken into account. The calculation results show that the value of the critical force in the case under consideration differs significantly from the values corresponding to classical problems, and depends on the parameters characterizing the base resistance. The results obtained can be used in calculations of multi-modulus cylindrical shells for strength, stability, and frequency-amplitude characteristics, taking into account the resistance of the external environment.

Keywords: tension, compression, cylindrical shell, stability

For citation

Rzayev N.S. Dynamic stability of a cylindrical shell made of a material of different modulus placed on a viscous-elastic foundation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):289–299. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299>

1. Введение

Цилиндрические оболочки круглого сечения широко применяются в строительстве и во многих областях техники и энергетики. В последнее время в указанных областях применяют оболочки со сложными свойствами, не удовлетворяющими (не соответствующими) требованиям классической теории упругости. Среди них преобладают материалы, механические свойства которых зависят от вида применяемой нагрузки и которые имеют различное сопротивление растяжению-сжатию.

Во многих случаях, при эксплуатации конструкции, расчет устойчивости выходит на первый план. Учет сопротивления вязкоупругой внешней среды является актуальным (важным) моментом при решении вопросов динамической устойчивости цилиндрической оболочки. Вопрос, рассматриваемый в рамках классической теории упругости, решен [1; 3].

Разработан расчетный метод прогнозирования начала возникновения скручивания (искривления) эксцентрично нагруженных цилиндрических оболочек (покрытий). Этот метод представляет собой модификацию волнового метода Блоха, основанную на методе матрицы жесткости. Для

реализации предложенного метода в коммерческом пакете конечных элементов Abaqus разработаны численный метод и эффективный алгоритм [1].

Аналитически решена задача о свободной вибрации цилиндрического покрытия, расположенного на основе Винклера — Пастернака. Приведено аналитическое решение свободной вибрации функционально-ступенчатой цилиндрической оболочки с ребрами жесткости, опирающейся на фундамент Винклера — Пастернака, с несколькими граничными условиями. Предполагается, что свойства материала цилиндрической оболочки плавно и непрерывно изменяются по толщине по степенному закону распределения объемной доли составляющих. На основе принципа Гамильтона, теории сдвиговых деформаций первого порядка и метода размазанных ребер жесткости получены определяющие уравнения подкрепленной функционально-градиентной цилиндрической оболочки, опирающейся на упругое основание [2].

В рамках теории оболочек Доннелла исследована большая амплитуда колебаний ортотропных цилиндрических оболочек функционально-градиентного материала (ФГМ), взаимодействующих с нелинейным упругим основанием Винклера. Для вывода основных уравнений ортотропных цилиндрических оболочек ФГМ, взаимодействующих с нелинейным упругим основанием, используется геометрическая нелинейность типа фон Кармана. Полуобратным методом получены частотно-амплитудные характеристики функционально-градиентной (ФГ) ортотропной цилиндрической оболочки, взаимодействующей с нелинейным упругим основанием [3].

Исследуется ортотропная пологая цилиндрическая оболочка, лежащая на упругом основании типа Пастернака. Кривые нагрузки/прогиба строятся для свободно опертых подвижных и неподвижных краев. Обсуждается влияние геометрии оболочки, параметров фундамента и краевых условий на эти характеристики. Замечено, что на кривые нагрузки/прогиба оболочек с подвижными краями меньше всего влияют изменения указанных выше параметров [4].

Представлена формулировка в замкнутой форме трехмерной (3D) уточненной теории сдвиговой деформации высшего порядка (RHOST) для анализа свободных колебаний однородных изотропных круглых цилиндрических оболочек с простой опорой-просто опорой и зажимом-зажимом [5].

Изучено влияние эксцентрических крепежных элементов и температуры на нелинейную статическую и динамическую реакцию цилиндрических S-FGM панелей. При этом цилиндрические оболочки (покрытия) усилены изогнутыми крепежными элементами (ребрами жесткости), в верхнем слое, а в нижнем слое — поддерживаются (подперты) упругими опорами. Нагружение динамического критического скручивания (искривления) было получено по критерию Будианского — Рота. Приведены численные результаты для оценки влияния повышения температуры, сжимающего давления, углов изгиба крепежных элементов (ребер жесткости) и упругих опор на нелинейную статическую и динамическую реакцию цилиндрических S-FGM панелей в термической среде [6; 7].

Разработана полуаналитическая модель для прогнозирования акустического отклика тонкостенных цилиндров с ортогональной жесткостью. Модель свободных колебаний решена приближенным методом предполагаемых мод. Возбуждение нормальных мод рассматривается с точки зрения совместной функции принятия (JAF) для падающих акустических гармонических плоских волн [8].

Были исследованы проблемы скручивания (искривления) цилиндрических резервуаров, используемых для хранения нефти и топлива при статических или квазистатических нагрузках, включая давление, ветер, обрушение фундамента и пожар. Во всех случаях скручивание (искривление) рассматривалось как статический процесс. Были внесены предложения по улучшению конструкции [9].

С использованием метода конечных элементов исследован динамический анализ предварительно напряженной круглой цилиндрической оболочки (покрытия) с распределенным снаружи давлением [10; 11].

Кинематические соотношения, рассматриваемые для панелей оболочки, соответствуют теории сдвиговой деформации первого порядка наряду с геометрическими нелинейностями фон Кармана, а вклад ребер жесткости рассматривается на основе метода размытых ребер жесткости. Нелинейные основные уравнения движения для панелей оболочки FGM с эксцентричной жесткостью выведены

с использованием принципа Гамильтона. Предполагается, что функции Навье удовлетворяют заданным граничным условиям, тогда как методы Галеркина и Рунге — Кутты четвертого порядка используются для достижения нелинейных динамических характеристик [12].

В задаче о свободной вибрации продольно подкрепленных цилиндрических оболочек, учитывая сложность граничных условий стрингерной подкрепленной цилиндрической оболочки и произвольность сечения стрингера, были введены упругие ограничения, которые могут непрерывно изменяться на обоих концах оболочки. Выведена зависимость смещения между совместимостью смещений между центром жесткого элемента произвольного поперечного сечения и средней поверхностью цилиндрической оболочки, функция формы осевой моды оболочки построена ортогональным методом Грама — Шмидта [13].

В упомянутых работах не учитывалось сопротивление внешней среды и то, что материал цилиндрической оболочки (покрытия) имеет разные модули (разномодульный). В представленном исследовании он расположен на вязкоупругой основе. Решена задача динамической устойчивости цилиндрической оболочки (покрытия) с различными модулями.

2. Метод расчета

В рассматриваемой задаче исследуется динамическая устойчивость оболочки цилиндрического круглого сечения, закрепленной на вязкоупругом основании. Зависимость реакции среды q от прогиба рассматривается следующим образом [11]:

$$q = K_1 W + K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь W — прогиб, t — время, K_1 и K_2 — характеристики основания, которые определяются из экспериментов.

Предположим, что цилиндрическая оболочка различного модуля радиусом R , толщиной h и круглым поперечным сечением под действием силы T , действующей на его поверхность, теряет устойчивость в осесимметричном виде. Уравнение движения с учетом (1) записывается следующим образом (предполагается, что один конец оболочки неподвижен, а другой конец изменяется с заданной скоростью) [7; 16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} &= h\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T_2}{R} - T_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 W + K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= h\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где u — продольное и W — поперечное перемещение; T_1 и T_2 — внутренние силы в осевом и поперечном направлениях соответственно; M — осевой изгибающий момент; ρ — плотность.

Используя [3; 7], можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_1 &= A_1 \varepsilon_1 + A_2 \varepsilon_2 + A_3 \wp_1 + A_4 \wp_2; \\ T_2 &= C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2 + C_3 \wp_1 + C_4 \wp_2; \\ M &= B_1 \varepsilon_1 + B_2 \varepsilon_2 + B_3 \wp_1 + B_4 \wp_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{W}{R}; \quad \wp_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \wp_2 = -\frac{W}{R^2}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{E^+ h}{2(1 - v^+ v^-)} \left[n(2\bar{h}_0 + 1) + (1 - 2\bar{h}_0) \right]; \\
 A_2 &= \frac{E^+ h}{2(1 - v^+ v^-)} \left[n v^+ (1 + 2\bar{h}_0) + v^- (1 - 2\bar{h}_0) \right]; \\
 A_3 &= \frac{E^+ h^2}{8(1 - v^+ v^-)} (1 - n)(1 - 4\bar{h}_0^2); \\
 A_4 &= \frac{E^+ h^3}{8(1 - v^+ v^-)} (1 - 4\bar{h}_0^2) h^2; \\
 B_1 &= A_3; \quad B_2 = A_4; \\
 B_3 &= \frac{E^+ h^3}{24(1 - v^+ v^-)} \left[n(1 + 8\bar{h}_0^2) + (1 - 8\bar{h}_0^2) \right]; \\
 B_4 &= \frac{E^+ h^3}{24(1 - v^- v^+)} \left[v^+ (8\bar{h}_0^2 + 1) - v^- n(1 - 8\bar{h}_0^3) \right]; \\
 C_1 &= \frac{E^+ h}{2(1 - v^+ v^-)} \left[v^- n(1 + 2\bar{h}_0) + v^+ (1 - 2\bar{h}_0) \right]; \\
 C_2 &= \frac{E^+ h}{2(1 - v^+ v^-)} \left[n(1 + 2\bar{h}_0) + (1 - 2\bar{h}_0) \right]; \\
 C_3 &= \frac{E^+ h^2 (v^- + v^+ n)}{8(1 - v^+ v^-)} (1 - 4\bar{h}_0^2); \\
 C_4 &= \frac{(1 - n) E^+ \rho^2}{8(1 - v^+ v^-)} (1 - 4\bar{h}_0^2).
 \end{aligned} \tag{5}$$

При этом были приняты следующие обозначения:

$$\bar{h}_0 = -\frac{\varepsilon_1 + v_o \varepsilon_2}{h(1 - v_o \rho)}; \quad v_o = \frac{v^+ + v^- - (v^- v^+) \sin \sigma}{q}; \quad n = \frac{E^-}{E^+}. \tag{6}$$

$\bar{h}_0 = h_0 \cdot h^{-1}$ — разница нейтральной силы.

Если учесть выражения (5) в уравнении движения (2), то получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{W}{R} - A_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - A_4 \frac{W}{R^2} \right) = h \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{W}{R} - B_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - B_4 \frac{W}{R^2} \right) + \frac{1}{R} \left(C_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 \frac{W}{R^2} - C_4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - C_4 \frac{W}{R^2} \right) + \\ + K_1 W + K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - T_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = h\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Предположим, что $u \ll W$ и принято условие $h\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow 0$, тогда из первого уравнения системы можно получить следующее выражение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A_1^{-1} \left(A_2 \frac{W}{R} + A_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + A_4 \frac{W}{R^2} \right). \quad (8)$$

Если во второе уравнение (7) подставить выражение (4), то получим следующее уравнение относительно поперечного перемещения:

$$\begin{aligned} b_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial b_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2} - \frac{b_1}{R} + \frac{b_3}{R^2} - \frac{b_4}{R} + T_1 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial b_3}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial x} \right) + \\ + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} + \frac{b_5}{R} + K_1 R \right) W + (K_2 - h\rho) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь были приняты следующие обозначения:

$$b_1 = B_3 - B_1 \cdot A_3 \cdot A_1^{-1}; \quad b_2 = B_2 - B_1 \cdot A_2 \cdot A_1^{-2}; \quad b_3 = B_4 - B_1 \cdot A_4 \cdot A_1^{-1};$$

$$b_4 = C_1 A_2 \cdot A_1^{-1} - C_3; \quad b_5 = R^{-1} \left[C_2 - C_1 A_3 \cdot A_1^{-1} (C_4 - C_1 A_4 \cdot A_1^{-1}) \right];$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial x} = \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} (q_1 - q_2 \cdot A_3 A_1) (\bar{h}_0 - B_3 A_1^{-1});$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} = (q_1 - q_2 \cdot A_3 \cdot A_1^{-1}) (\bar{h}_0 - A_1^{-1} B_3) \frac{\partial^2 \bar{h}_0}{\partial x^2} - q_2 A_1^{-2} (q_1 A_1 - q_2 A_2) (\bar{h}_0 - B_3 A_1^{-1}) \left(\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} \right) + \\ + (q_1 - q_2 \cdot A_1^{-1} \cdot A_3) \left[\left(1 - A_1^{-2} (q_1 \bar{h}_0 \cdot A_1 - B_3 A_2) \right) \right] \frac{\partial^2 \bar{h}_0}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial x} = \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} (\bar{h}_0 - A_1^{-1} \cdot A_2) (\bar{h}_0 - A_1^{-1} B_1) \cdot q_2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{h}_0^2}{\partial x^2} (\bar{h}_0 - A_1^{-1} \cdot A_2) (\bar{h}_0 - B_2^{-1} \cdot q_1) q_2 + \\ + \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} \left[\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} - A_1^{-2} q_2 (\bar{h}_0 A_1 - A_2) \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} (\bar{h}_0 - A_1^{-1} B_1) \right] + \\ + \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} (\bar{h}_0 - A_1^{-1} A_2) \cdot \left[\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} - A_1^{-2} q_2 (\bar{h}_0 A_1 - B_1) \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} \right] q_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_3}{\partial x} &= (q_1 \bar{h}_0 - A_1^{-1} A_4 q_2) (\bar{h}_0 - A_1^{-1} B_1) \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} &= (q_1 \bar{h}_0 - A_1^{-1} A_4 q_2) (\bar{h}_0 - A_1^{-1} B_1) \frac{\partial^2 \bar{h}_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} \right)^2 \cdot \\ &\quad \cdot [q_1 - A_1^{-2} (A_1 A_2 \cdot q_2 - A_4 \cdot q_2)] (\bar{h}_0 - B_1 A_1^{-1}) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} \right)^2 (q_1 \bar{h}_0 - A_1^{-1} \cdot q_2) [1 - A_1^2 (A_1 \bar{h}_0 - B_1) q_2]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$q_1 = \frac{E^+ (nv^+ - v^-)}{1 - v^+ v^-}; \quad q_2 = \frac{E^+ (n-1)}{1 - v^- v^+}.$$

В общем случае $b_1 \dots b_5$ является функцией W — прогиб \bar{h}_0 определяется следующим образом:

$$\bar{h}_0 = \frac{A_3 \cdot A_1^{-1} \varrho_1 + A_2 \cdot A_1^{-1} \varepsilon_2 + A_4 \cdot A_1^{-1} \varrho_2 - \nu_0 \varepsilon_2}{(\varrho_1 + \varrho_2 \nu_0) h}. \quad (11)$$

Решение уравнения (9) определяем в виде следующей функции, удовлетворяющей граничным условиям:

$$W = q(t) \sin \frac{m\pi}{L} x, \quad (12)$$

где q — амплитуда кривой, m — есть число полуволн вдоль длины волны. В этом случае из (11) видно, что граница нейтрального слоя вне зависимости от \bar{h}_0 определяется следующей формулой:

$$P_1 \bar{h}_0 + P_2 \bar{h}_0 + P_3 = 0, \quad (13)$$

где

$$P_1 = q_2 (1 - R^2 \alpha^2) - 0,5 (q_1 - R^2 q_2 \alpha^2);$$

$$P_2 = q_3 (1 - R^2 \alpha^2) - R (v^- q_2 - q_1);$$

$$P_3 = (q_6 - R^2 \alpha^2 q_4) - R (v^- q_3 - q_5);$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{l}; \quad q_3 = \frac{E^+ (n+1) h}{1 - v^+ v^-} \frac{1}{2}; \quad q_4 = -\frac{h^2}{8} K_2;$$

$$q_5 = \frac{h E^+ (v^+ + nv^-)}{2 (1 - v^+ v^-)}; \quad q_6 = -\frac{h^2}{8} K_5. \quad (14)$$

Поскольку \bar{h}_0 — имеет постоянное значение, то все производные от \bar{h}_0 равняются нулю.

$$\frac{\partial b_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial b_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial b_3}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} = 0. \quad (15)$$

Уравнение движения выглядит следующим образом:

$$q''(t) - \eta q(t) = 0. \quad (16)$$

Здесь

$$\eta = -\frac{1}{h\rho} \left[(b_2 \alpha^2 - R^{-2} b_3 + R^{-1} a_4 - T + K_1) + R^{-1} b_5 \right]. \quad (17)$$

3. Результаты и обсуждение

Как видно из (17), при $\eta < 0$ движение — периодическое, а при $\eta > 0$ амплитуда искривления со временем увеличивается и оболочка теряет устойчивость. Она определяется из условия $\eta = 0$ критической силы (T_k):

$$T_k = b_2 \alpha^2 - (R^{-1} b_3 - b_4 - b_5) R^{-1} + K_1. \quad (18)$$

При $n = 1$, с учетом сопротивления внешней среды, $v^+ = v^-$ можно получить решение задачи для однодульной цилиндрической оболочки. Если $K_1 = 0$, то классическая задача решена.

Следующие частные случаи получаются, когда $n = 1$:

1) сопротивление внешней среды отсутствует ($K_1 = 0, K_2 = 0$);

2) линия покрытия находится на основе Винклера.

Действие критической силы на оболочку, закрепленную на вязкоупругом основании, отсутствует.

Теперь рассмотрим решение задачи по модели Пастернака [11; 15]:

$$q = K_1 W - K_2 \frac{d^2 W}{dx^2}. \quad (19)$$

В этом случае уравнение движения записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{W}{R} - A_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - A_4 \frac{W}{R^2} \right) &= h\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{W}{R} - B_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - B_4 \frac{W}{R} \right) &+ \frac{1}{R} \left(C_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 \frac{W}{R^2} - C_4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - C_4 \frac{W}{R^2} \right) + \\ &+ K_1 W - (T + K_2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = h\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Принимая $u \ll W$, как и в предыдущем случае, можно получить из условия приближения $h\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{A_2}{A_1} \frac{W}{R} + \frac{A_3}{A_1} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{A_4}{A_1} \frac{W}{R^2}. \quad (21)$$

Если подставить выражение (21) во второе уравнение (20), то получим следующее уравнение с учетом прогиба W :

$$b_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial b_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2} - \frac{b_1}{R} + \frac{b_3}{R^2} - \frac{b_4}{R} + (T + K_2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \frac{2}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial b_3}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} + \frac{b_5}{R} \right) W + K_1 W = h\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (22)$$

Записав выражение (21) в уравнение (22) и учитывая, что b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 постоянны, получим следующее уравнение:

$$q''(t) - \gamma_1 q(t) = 0. \quad (23)$$

Здесь

$$\gamma_1 = -\frac{1}{h\rho} \left[(b_2 \alpha^2 - R^{-2} b_3 + R^{-1} b_4 - (T + K_2)) \alpha^2 \right] + R^{-1} b_5 + K_1. \quad (24)$$

При этом, если $\gamma_1 < 0$, решение становится периодическим, если $\gamma_1 > 0$, то амплитуда со временем увеличивается, а оболочка теряет устойчивость. Значение критической силы определяется из условия $\gamma_1 = 0$:

$$T_k = \frac{\alpha^2 (b_2 - K_2) - R^{-1} (R^{-1} b_3 - b_4 + b_5) + K_1}{\alpha^2}. \quad (25)$$

Здесь, когда $K_1 = 0$, внешнее сопротивление не учитывается, а когда $K_2 = 0$, решение соответствующей задачи выполняется на основании Винклера.

Из выражения (25) видно, что в отличие от вязкоупругого основания здесь величина критической силы зависит от коэффициента Пастернака.

4. Заключение

1. Решена задача динамической устойчивости цилиндрической оболочки с различными модулями, расположенной на вязкоупругом основании и основании, характеризуемом моделью Пастернака.

2. Получены уравнения связи между критической силой и характеристическими параметрами. Из полученных уравнений видно, что сопротивление внешней среды и различные модули оказывают существенное влияние на критическую силу. Если эти факторы не учитывать, можно допустить серьезные ошибки (отклонения).

3. Полученные результаты могут быть использованы в расчетах на прочность, устойчивость и в определении частотно-амплитудных характеристик цилиндрических покрытий с различными модулями с учетом сопротивления внешней среды.

Список литературы

1. Ning X., Pellegrino S. Bloch wave buckling analysis of axially loaded periodic cylindrical shells // Computers and Structures. 2016. Vol. 177. P. 114–125. <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.09.006>
2. Nguyen V.-L., Hoang T.-P. Analytical solution for free vibration of stiffened functionally graded cylindrical shell structure resting on elastic foundation // SN Applied Sciences. 2019. Vol. 1. <http://doi.org/10.1007/s42452-019-1168-y>

3. Sofiyev A.H. Large amplitude vibration of FGM orthotropic cylindrical shells interacting with the nonlinear Winkler elastic foundation // *Composites Part B: Engineering*. 2016. Vol. 98. P. 141–150.
4. Paliwal D.N., Kanagasabapathy H., Gupta K.M. The large deflection of an orthotropic cylindrical shell on a Pasternak foundation // *Composite Structures*. 1995. Vol. 31. Iss. 1. P. 31–37. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(94\)00068-9](https://doi.org/10.1016/0263-8223(94)00068-9)
5. Khalili S.M.R., Davar A., Malekzadeh Fard K. Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory // *International Journal of Mechanical Sciences*. March 2012. Vol. 56. Iss. 1. P. 1–25. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.002>
6. Duc N.D., Kim S.-E., Manh D.T., Nguyen P.D. Effect of eccentrically oblique stiffeners and temperature on the nonlinear static and dynamic response of S-FGM cylindrical panels // *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 146. <http://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106438>
7. Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M., Pellicano F. On the buckling load estimation of grid-stiffened composite conical shells using vibration correlation technique // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2022. Vol. 96. <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104667>
8. Zhao D., Ferguson N.S., Squicciarini G. Acoustic response of thin-walled, orthogonally stiffened cylinders // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 657. Iss. 1. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/657/1/012007>
9. Godoy L.A. Buckling of vertical oil storage steel tanks: Review of static buckling studies // *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol. 103. P. 1–21. <http://doi.org/10.1016/j.tws.2016.01.026>
10. Harbaoui I., Khadimallah M.A. A Prestressed Ring-Stiffened Cylindrical Shell: A New Spectral Element // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2022. P. 362–368. http://doi.org/10.1007/978-3-030-86446-0_48.
11. Harbaoui I., Khadimallah M.A., Benslimane A., Jin G., Civalek O. Formulation of continuous element of prestressed stiffened circular cylindrical shell // *Steel and Composite Structures*. 2021. Vol. 41. P. 521–531. <http://doi.org/10.12989/scs.2021.41.4.521>
12. Kumar A., Kumar D., Sharma K. An Analytical Investigation on Linear and Nonlinear Vibrational Behavior of Stiffened Functionally Graded Shell Panels Under Thermal Environment // *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2021. Vol. 9. Iss. 8. P. 2047–2071. <http://doi.org/10.1007/s42417-021-00348-0>
13. Niu N., Sun L.-L., Xing Z.-Z., Zhao G.-D., Wang X.-H., Wu Y.-Y. Calculation and analysis of inherent properties of stiffened cylindrical shells with longitudinal stiffeners of arbitrary cross section under typical boundary conditions. *Zhending Gongcheng Xuebao // Journal of Vibration Engineering*. 2023. Vol. 36. P. 96–106. <http://doi.org/10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.011>
14. Zhang R., Meng X., Gardner L. Shape optimisation of stainless steel corrugated cylindrical shells for additive manufacturing // *Engineering Structures*. 2022. Vol. 270. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114857>
15. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Стройиздат, 1954. 89 с.
16. Гаджиев В.Д. Собственное колебание ортотропной круговой пластинки лежащей на неоднородно вязкоупругом основании // *Вестник современной науки*. 2016. № 5. С. 20–24.

References

1. Ning X., Pellegrino S. Bloch wave buckling analysis of axially loaded periodic cylindrical shells. *Computers and Structures*. 2016;177:114–125. <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.09.006>
2. Nguyen V.-L., Hoang T.-P. Analytical solution for free vibration of stiffened functionally graded cylindrical shell structure resting on elastic foundation. *SN Applied Sciences*. 2019;1:1150. <http://doi.org/10.1007/s42452-019-1168-y>
3. Sofiyev A.H. Large amplitude vibration of FGM orthotropic cylindrical shells interacting with the nonlinear Winkler elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*. 2016;98:141–150. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.05.018>
4. Paliwal D.N., Kanagasabapathy H., Gupta K.M. The large deflection of an orthotropic cylindrical shell on a Pasternak foundation. *Composite Structures*. 1995;31(1):31–37. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(94\)00068-9](https://doi.org/10.1016/0263-8223(94)00068-9)
5. Khalili S.M.R., Davar A., Malekzadeh Fard K. Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012; 56(1):1–25. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.002>
6. Duc N.D., Kim S.-E., Manh D.T., Nguyen P.D. Effect of eccentrically oblique stiffeners and temperature on the nonlinear static and dynamic response of S-FGM cylindrical panels. *Thin-Walled Structures*. 2020;146:106438. <http://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106438>
7. Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M., Pellicano F. On the buckling load estimation of grid-stiffened composite conical shells using vibration correlation technique. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2022;96:104667. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104667>

8. Zhao D., Ferguson N.S., Squicciarini G. Acoustic response of thin-walled, orthogonally stiffened cylinders. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019;657(1):012007. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/657/1/012007>
9. Godoy L.A. Buckling of vertical oil storage steel tanks: Review of static buckling studies. *Thin-Walled Structures*. 2016;103:1–21. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.01.026>
10. Harbaoui I., Khadimallah M.A. A Prestressed Ring-Stiffened Cylindrical Shell: A New Spectral Element. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2022:362–368. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86446-0_48
11. Harbaoui I., Khadimallah M.A., Benslimane A., Jin G., Civalek O. Formulation of continuous element of prestressed stiffened circular cylindrical shell. *Steel and Composite Structures*. 2021;41:521–531. <https://doi.org/10.12989/scs.2021.41.4.521>
12. Kumar A., Kumar D., Sharma K. An Analytical Investigation on Linear and Nonlinear Vibrational Behavior of Stiffened Functionally Graded Shell Panels Under Thermal Environment. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2021;9(8):2047–2071. <https://doi.org/10.1007/s42417-021-00348-0>
13. Niu N., Sun L.-L., Xing Z.-Z., Zhao G.-D., Wang X.-H., Wu Y.-Y. Calculation and analysis of inherent properties of stiffened cylindrical shells with longitudinal stiffeners of arbitrary cross section under typical boundary conditions. *Zhendong Gongcheng Xuebao. Journal of Vibration Engineering*. 2023;36:96–106. <https://doi.org/10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.011>
14. Zhang R., Meng X., Gardner L. Shape optimisation of stainless steel corrugated cylindrical shells for additive manufacturing. *Engineering Structures*. 2022;270:114857. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114857>
15. Pasternak P.L. *Fundamentals of a new method for calculating the foundations on elastic base by means of two coefficients of poete*. Moscow: Sroyizdat Publ.; 1954. (In Russ.)
16. Gadjiev V.D. A natural oscillation of the orthotropic circular plate lying on a heterogeneous viscous-elastic base. *Bulletin of modern science*. 2016;5:20–24. (In Russ.)

