

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ватин Н.И.*, д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*Ерофеев В.Т.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия*Колчунов В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

## ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

*Мамиева И.А.*, РУДН, Москва, Россия

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

*Азапов В.П.*, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия*Адилюджиев А.И.*, д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан*Андреев В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия*Базаров Д.Р.*, д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан*Ванин В.В.*, д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина*Варум У.*, д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия*Войццкий З.*, проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша*Волосухин В.А.*, д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия*Галишикова В.В.*, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия*Дуцев М.В.*, д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия*Евкин А.Ю.*, д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада*Какоин С.*, д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия*Карпенко Н.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия*Козлов Д.В.*, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия*Красич С.*, канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия*Кудрявцев С.А.*, чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия*Курбацкий Е.Н.*, д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия*Лазарев Ю.Г.*, д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия*Магуле Ф.*, проф., Высшая инженерная школа «Централь Сопелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция*Мендонка П.*, д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия*Перькова М.В.*, д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия*Сантос Р.*, исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия*Травуш В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия*Федюк Р.С.*, д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия*Якулов Н.М.*, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

## СОДЕРЖАНИЕ

**РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

- Kirsanov M.N.* Formulas for Fundamental Natural Frequency of Plane Periodic Truss (Формулы для основной частоты собственных колебаний плоской регулярной фермы)..... 551
- Timilsina P., Ghimire C.R., Chaulagain H.* Evaluation of Soil Structure Interaction Effects on Seismic Response of RC Framed Buildings Using Simplified Method (Оценка влияния взаимодействия грунтово-вых структур на сейсмический отклик зданий с железобетонным каркасом с использованием упрощенного метода)..... 560

**ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ**

- Yakupov S.N., Gumarov G.G., Yakupov N.M.* Experimental-Theoretical Method for Assessing the Stiffness and Adhesion of the Coating on a Spherical Substrate (Экспериментально-теоретический метод оценки жесткости и адгезии покрытия на сферической подложке)..... 577

**ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК**

- Semenov A.A., Kondratieva L.N., Glukhikh V.N.* Buckling of Steel Conical Panels Reinforced with Stiffeners (Устойчивость стальных конических панелей, усиленных ребрами жесткости)..... 583

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ**

- Aganov V.P., Markovich A.S.* Конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования.. 593

**СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ**

- Толчков Ю.Н.* Структурные характеристики углеродных наноматериалов как компонентов модификатора для композитов строительного назначения..... 608

Редактор И.Л. Панкратова

Редактор англоязычных текстов В.В. Карневич

Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова

Компьютерная верстка: Н.В. Маркелова

## Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i\_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 11.12.2023. Выход в свет 25.12.2023. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 8,3. Тираж 250 экз. Заказ № 2173. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, 2023

© Курылева А.А., фото на обложке (Город науки и искусства. Планетарий. Валенсия, Испания), 2023

# STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2023 VOLUME 19 No. 6

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

## EDITORIAL BOARD

### EDITOR-IN-CHIEF

*Nikolai I. Vatın*, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

### ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

*Vladimir T. Erofeev*, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

*Vitaly I. Kolchunov*, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

### MANAGING EDITOR

*Iraida A. Mamieva*, RUDN University, Moscow, Russia

### MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

*Anvar I. Adylkhodzhaev*, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

*Vladimir P. Agapov*, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

*Vladimir I. Andreev*, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

*Dilshod R. Bazarov*, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

*Mikhail V. Dutsev*, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

*Alexander Yu. Evkin*, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

*Roman S. Fedyuk*, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia

*Vera V. Galishnikova*, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

*Saeid Kakooei*, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

*Nikolay I. Karpenko*, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

*Dmitriy V. Kozlov*, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

*Sonja Krasic*, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

*Sergey A. Kudryavtsev*, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

*Evgeniy N. Kurbatskiy*, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

*Yuriy G. Lazarev*, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

*Fredéric Magoulès*, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

*Paulo Mendonca*, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

*Margarita V. Perkova*, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

*Ricardo Santos*, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

*Vladimir I. Travush*, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

*Vladimir V. Vanin*, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

*Humberto Varum*, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

*Viktor A. Volosukhin*, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

*Zbigniew Wójcicki*, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

*Nukh M. Yakupov*, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

## CONTENTS

### ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

- Kirsanov M.N.* Formulas for Fundamental Natural Frequency of Plane Periodic Truss..... 551
- Timilsina P., Ghimire C.R., Chaulagain H.* Evaluation of Soil Structure Interaction Effects on Seismic Response of RC Framed Buildings Using Simplified Method..... 560

### THEORY OF ELASTICITY

- Yakupov S.N., Gumarov G.G., Yakupov N.M.* Experimental-Theoretical Method for Assessing the Stiffness and Adhesion of the Coating on a Spherical Substrate ..... 577

### THEORY OF THIN SHELLS

- Semenov A.A., Kondratieva L.N., Glukhikh V.N.* Buckling of Steel Conical Panels Reinforced with Stiffeners..... 583

### ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS

#### OF STRUCTURES

- Agapov V.P., Markovich A.S.* Finite Element for the Analysis of Massive Reinforced Concrete Structures with Cracking..... 593

### CONSTRUCTION MATERIALS AND PRODUCTS

- Tolchkov Yu.N.* Investigation of Structural Characteristics of Carbon Nanomaterials as Modifier Components for Construction Composites..... 608

Copy Editor I.L. Pankratova

English Texts' Editor V.V. Karnevich

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer N.V. Markelova

#### Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba  
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i\_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba  
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University  
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 2023

© Kuryleva A.A., photo on the cover of the journal  
(City of Arts and Sciences. Planetarium. Valencia, Spain), 2023

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-551–559

UDC 624.04:531.391.3


EDN: GIHHVG

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Formulas for Fundamental Natural Frequency of Plane Periodic Truss

Mikhail N. Kirsanov  

National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation

 c216@ya.ru

#### Article history

Received: June 16, 2023

Revised: September 24, 2023

Accepted: October 7, 2023

#### Conflicts of interest

The author declares that there is no conflict of interest.

**Abstract.** This study considers a plane statically determinate truss with double lattice structure and without a lower chord. Well-known versions of this design are Fink and Bollman trusses. Two methods are used to derive the analytical relationship of the lower limit of the fundamental frequency with the number of panels in the periodic structure. It is assumed that mass of the truss is concentrated at its joints (nodes). The nodes vibrate vertically, and the number of degrees of freedom coincides with the number of nodes. The stiffness analysis of the truss is performed using the Maxwell — Mohr method. The forces in the elastic elements and the reactions of the roller and pin supports are calculated by the method of joints depending on the size of the truss and its order of periodicity. The system of linear equations is solved using the inverse matrix method. The Dunkerley method of partial frequencies is used to calculate the lower limit of the fundamental frequency. For a series of solutions obtained for trusses with different number of panels, the common term in the sequence of solution formulas is found by induction using Maple software. The solution coefficients have polynomial form in the number of panels of order not higher than the fifth. The solution is compared with an approximate version of the Dunkerley method, in which the sum of the terms corresponding to partial frequencies is calculated using the mean value theorem. The closeness of the frequency obtained by the two analytical methods to the numerical frequency spectrum solution is shown by particular examples. An approximate version of the Dunkerley method has a simpler form and an accuracy comparable to the original Dunkerley method.

**Keywords:** plane truss, Dunkerley method, fundamental frequency, analytical solution, natural vibration, periodic structure, induction method, Maxwell — Mohr method

#### Funding

The work was supported by the Russian Science Foundation 22-21-00473.

#### For citation

Kirsanov M.N. Formulas for fundamental natural frequency of plane periodic truss. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):551–559. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-551-559>

*Mikhail N. Kirsanov*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-8588-3871; E-mail: c216@ya

© Kirsanov M.N., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Формулы для основной частоты собственных колебаний плоской регулярной фермы

М.Н. Кирсанов 

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Российская Федерация

✉ c216@ya.ru

## История статьи

Поступила в редакцию: 16 июня 2023 г.

Доработана: 24 сентября 2023 г.

Принята к публикации: 7 октября 2023 г.

## Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Аннотация.** Рассмотрена модель плоской статически определимой фермы решетчатого типа без нижнего пояса с двойной решеткой. Известные аналоги такой конструкции — ферма Финка и ферма Больмана. Двумя методами выводится аналитическая зависимость нижней границы основной собственной частоты регулярной конструкции от числа панелей. Предполагается, что его масса фермы сконцентрирована в ее узлах. Узлы совершают колебательные движения по вертикали, число степеней свободы совпадает с числом узлов. Расчет жесткости фермы производится с помощью интеграла Максвелла — Мора. Усилия в упругих стержнях и реакции подвижной и неподвижной опор вычисляются методом вырезания узлов в зависимости от размеров фермы и ее порядка регулярности. Система линейных уравнений решается с помощью метода обратной матрицы. Для расчета нижней границы основной частоты используется метод парциальных частот Донкерлея. Для серии решений, полученных для ферм с различным числом панелей, методом индукции в системе символьной математики Maple находится общий член последовательности расчетных формул. Коэффициенты формулы имеют вид полиномов по числу панелей порядка не выше пятого. Решение сравнивается с приближенным вариантом метода Донкерлея, в котором сумма слагаемых, соответствующих парциальных частотам, вычисляется по теореме о среднем. На конкретных примерах показана близость частоты, полученной двумя аналитическими методами, численному решению задачи о спектре частот. Приближенный вариант метода Донкерлея имеет более простую форму и точность, сопоставимую с исходным методом Донкерлея.

**Ключевые слова:** пространственная ферма, метод Донкерлея, основная частота, аналитическое решение, собственные колебания, регулярная конструкция, спектр, спектральная константа, метод индукции, формула Максвелла — Мора

## Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

## Для цитирования

Kirsanov M.N. Formulas for fundamental natural frequency of plane periodic truss // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 6. С. 551–559. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-551-559>

## 1. Introduction

The first (fundamental) natural frequency of vibration is one of the main dynamic characteristics of a structure. To calculate this frequency in practice, the finite element method [1–3], which is implemented in standard engineering software, is used most often. Thus, it is possible to calculate the spectrum of all natural frequencies of a structure. A wide range of trusses can be calculated with numerical methods: statically indeterminate structures, structures with various types of fastenings, material inhomogeneities, errors in manufacture and installation of their elements. Analytical solutions for the lower and upper bounds of the fundamental frequency exist for simple statically determined trusses. Such solutions are especially valuable for periodic structures. One of the

*Кирсанов Михаил Николаевич*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-8588-3871; E-mail: c216@ya.ru

methods for obtaining analytical solutions is the method of induction [4–6]. Calculations of deflections and displacements of roller supports of plane periodic trusses with an arbitrary number of panels were performed using Maple software in [7; 8]. Deflections of space trusses depending on the order of periodicity (number of panels) are calculated in [9; 10]. R.G. Hutchinson and N.A. Fleck were the first who raised the question of the existence of statically determinate truss structures [11; 12]. The same issues were explored by F.W. Zok, R.M. Latture, and M.R. Begley [13]. A. Kaveh [14; 15] solved the problems of optimization and classification of various plane and space periodic trusses. The Maple mathematical system was used in [16; 17] for calculating elements of building structures in analytical form. Handbooks [18; 19] contain formulas for calculating deflections of various statically determinate plane trusses with an arbitrary number of panels. The formula for the lower estimate of natural vibrations of a planar periodic trussed beam with a rectilinear upper chord was derived in [20]. The method of induction was applied in [21] to obtain the equation for relationship between the deflection of a plane truss and the order of periodicity. A version of the Dunkerley method for estimating the fundamental frequency of a plane truss as applied to periodic structures was proposed in [22]. Simplification of the solution formula for the fundamental frequency is achieved here by calculating the sum of partial frequencies using the mean value theorem.

In this paper, a design of a statically determinate lattice truss is proposed, and an analytical relationship of the fundamental frequency with the dimensions, weight, and number of panels of the truss is derived. The numerical solution and the solution according to the simplified Dunkerley method [22] are compared.

## 2. Structure

A planar statically determinate truss consists of  $2n$  panels of length  $a$  and height  $2h$  (Figure 1). Four diagonal elements connected to nodes 8 and 16 are  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  long, the other diagonal elements are  $2c$  long. An important feature of the truss is the absence of the lower chord. The Bollman [23] and Fink [24] plane trusses have a similar structure without a lower chord.

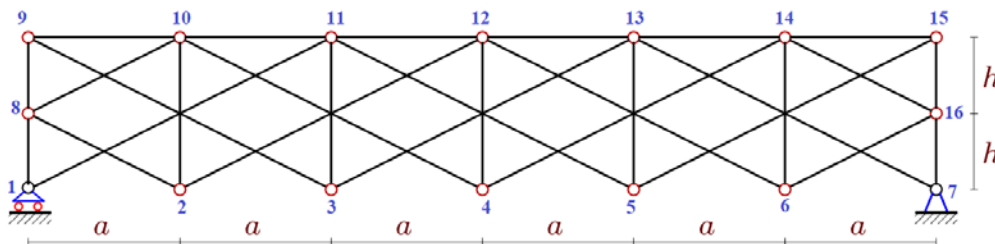


Figure 1. Truss structure,  $n = 3$   
Source: made by the author

The truss model consists of  $\eta = 9n + 3$  elements, including three elements corresponding to the roller and pin supports. The number of nodes in which the entire mass of the truss is concentrated is  $K = 4(n + 1)$ . It is assumed that the masses vibrate along the vertical  $y$ -axis. The number of degrees of freedom of the truss, according to this assumption, is equal to  $K$ . The truss hinges are ideal and the material of the elements is elastic.

## 3. Method

**3.1. Analysis of Forces.** The analysis of forces in the truss elements is performed in symbolic form with Maple software [8]. The algorithm of this program is used in [3–7; 9–10; 20–24]. The hinge coordinates are entered in loops with a parametrically defined length. The coordinate origin is located at the left roller support:

$$x_i = x_{2n+2+i} = a(i-1), y_i = 0, y_{2n+2+i} = 2h,$$

$$x_{2n+2} = 0, y_{2n+2} = h, x_{4n+4} = 2na, y_{4n+4} = h, i = 1, \dots, 2n+1.$$

The lattice structure is determined by the order in which the elements are connected to nodes (hinges). The order is given by lists containing the indices of the ends of the corresponding elements  $\Phi_i, i = 1, \dots, \eta$ . Ascending diagonal elements, for example, are defined by the following lists:  $\Phi_i = [i, i + 2n + 4], i = 1, \dots, 2n - 1$ .

The equilibrium equations for all nodes, including the support ones, are written in matrix form:  $\mathbf{GS} = \mathbf{T}$ , where  $\mathbf{G}$  is the matrix of directional cosines of the internal forces in the elements,  $\mathbf{S}$  is the vector of unknown forces and reactions of the supports,  $\mathbf{T}$  is the load vector. The directional cosines of the forces are calculated from the coordinates of the nodes and values  $\Phi_i, i = 1, \dots, \eta$ , which provide the order of connection of the elements to nodes. Horizontal and vertical nodal loads applied to node  $i$  are written, respectively, into odd  $T_{2i-1}$  and even  $T_{2i}$  coefficients of this vector. The matrix equation is solved in symbolic form in Maple using the inverse matrix method:  $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$ .

**3.2. Dunkerley Method for Estimating Fundamental Frequency.** In cases where only the first (fundamental) frequency is required to analyze the structure, the Dunkerley lower estimate or the Rayleigh upper estimate can be used to calculate it. The latter estimate is more accurate, however, its analytical expression is very cumbersome.

The approximate lower estimate of the fundamental frequency according to Dunkerley is:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2}, \quad (1)$$

where  $\omega_i$  are the partial frequencies calculated for each mass separately.

The equation of mass vibration at node  $i$ :

$$m\ddot{y}_i + d_i y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Stiffness coefficient  $d_i$  is the reciprocal of the flexibility coefficient, which is determined using the Maxwell — Mohr method formula. The summation in this formula is performed over all truss elements, including three elements that substitute supports:

$$\delta_i = 1 / d_i = \sum_{j=1}^{\eta} (S_j^{(i)})^2 l_j / (EF). \quad (3)$$

From (1) it follows that  $\omega_i = \sqrt{d_i / m}$ . From this, the formula for the Dunkerley frequency is obtained:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^K \delta_i = m \Delta_n. \quad (4)$$

#### 4. Results and Discussion

Variable  $\delta_i$  included in the final formula for frequency (4) is in fact the vertical displacement of node  $i$  due to a unit vertical force applied to this node. Factor  $\Delta_n$  is the sum of all such displacements for a truss of order  $n$ . To derive the relationship of  $\Delta_n$  with the number of panels, the method of induction is used. The calculations give the following sequence:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (c^3 + 30h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (8a^3 + 9c^3 + 50h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (448a^3 + 329c^3 + 894h^3) / (18h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (168a^3 + 105c^3 + 220h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_5 &= 3(704a^3 + 407c^3 + 786h^3) / (10h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

When finding a common term in this sequence, it was necessary to calculate ten trusses. Maple operators for a sequence of smaller lengths do not find a pattern. As a result, the following solution is obtained:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF), \quad (5)$$

where the coefficients have the following form:

$$\begin{aligned} C_1 &= 4(n^2 - 1)(4n^2 - 1) / 45, \\ C_2 &= (4n^2 - 1)(4n^2 + 11) / 90, \\ C_3 &= (16n^5 - 80n^3 + 480n^2 + 199n + 60) / (45n). \end{aligned} \quad (6)$$

As a result, the lower estimate of the fundamental frequency according to Dunkerley has the form:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (7)$$

The considered algorithm includes the summation operation in (4), which is easily computed numerically. On the contrary, the summation of symbolic expressions is usually complex and does not always yield a compact result. In the obtained solution, for example, it was particularly difficult to calculate coefficient  $C_3$ , which contains parameter  $n$  in the denominator. Maple operators successfully generalize sequences of polynomials, but do not work with fractional values in symbolic form. Therefore, in [22], a simplified formula was proposed using the mean value theorem, which excludes summation:

$$\omega_*^{-2} = Km\delta_{\max} / 2 = m\Delta_{\max}^*.$$

Finding the value of maximum deflection  $\delta_{\max}$  among all the deflections due to nodal forces is usually intuitive and reduces to a fairly simple task of identifying the most flexible node. For trussed beams, this is usually the node at the mid-span. In the considered truss, such node can be the one with index  $3n + 3$  on the upper chord. The analysis of trusses with a successively increasing number of panels gives the following expressions:

$$\begin{aligned} \Delta_{\max,1}^* &= (c^3 + 6h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_{\max,2}^* &= 3(2a^3 + 2c^3 + 7h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_{\max,3}^* &= 2(16a^3 + 11c^3 + 26h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_{\max,4}^* &= 5(20a^3 + 12c^3 + 27h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_{\max,5}^* &= 3(80a^3 + 45c^3 + 94h^3) / (h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

General form of the solution:

$$\Delta_{\max}^* = (D_1 a^3 + D_2 c^3 + D_3 h^3) / (h^2 EF).$$

The coefficients in this expression are obtained by induction:

$$\begin{aligned} C_1 &= n(n-1)(n+1)^2 / 3, \\ C_2 &= n(n+1)(n^2 + 2) / 6, \\ C_3 &= (n+1)(2n^3 + 4n + 3(-1)^n + 15) / 6. \end{aligned}$$

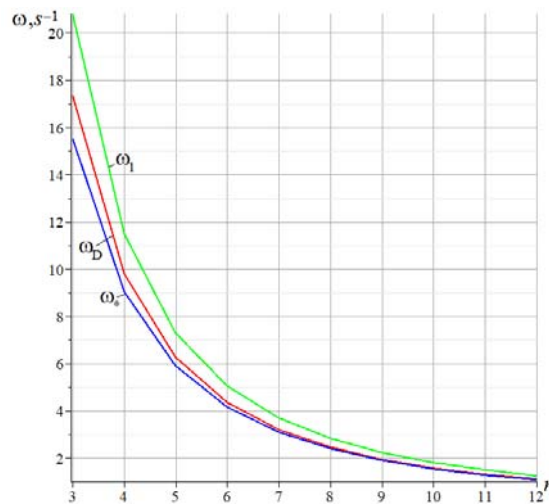
The result is the following formula:

$$\omega_* = h \sqrt{\frac{6EF}{m(n+1)(2n(n^2 - 1)a^3 + n(n^2 + 2)c^3 + (2n^3 + 4n + 3(-1)^n + 15)h^3)}}. \quad (8)$$

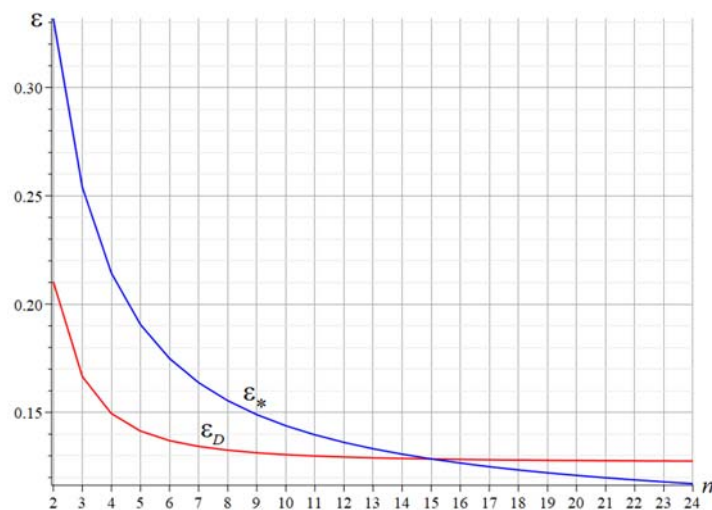
Other versions of the Dunkerley method were considered in [25; 26].

Solution (7) with coefficients (6) and solution (8) can be compared with the numerical one obtained in the Maple system using the Eigenvalues operator from the LinearAlgebra package, designed to calculate the matrix eigenvalues. The algorithm for calculating forces, entering the coordinates of nodes and the order of connections is the same as in the analytical methods.

As an example, a truss with the following characteristics is analyzed: nodal masses  $m = 200 \text{ kg}$  ; modulus of elasticity  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  ; cross-sectional area of the elements  $16 \text{ cm}^2$  ; dimensions  $a = 5 \text{ m}$ ,  $h = 1 \text{ m}$  . Figure 2 shows the curves of the fundamental frequency versus the number of panels obtained numerically and analytically using the two discussed methods. In the figure,  $\omega_1$  denotes the fundamental frequency computed numerically. The highest error of the analytical solutions is observed for lower number of panels. Starting at approximately  $n = 13$ , the three methods yield nearly identical frequencies. It is possible to estimate the errors of the methods more accurately and compare them by introducing relative values  $\varepsilon_* = |\omega_1 - \omega_*| / \omega_1$  and  $\varepsilon_D = |\omega_1 - \omega_D| / \omega_1$  (Figure 3). The figure shows that for  $n > 15$  the accuracy of the simplified version of the Dunkerley method (8) is greater than that of the original one (7). The error of the Dunkerley method (when compared with the numerical one) decreases with the increase in the number of panels and reaches a horizontal asymptote of 13 %, which is quite acceptable for using this solution in practice.



**Figure 2.** Relationship between the fundamental frequency and the number of panels  
Source : made by the author using the Mapl program



**Figure 3.** Relationship between the relative error and the number of panels  
Source : made by the author using the Mapl program



## 5. Conclusion

The model of a plane truss with elastic elements and concentrated nodal masses allows to find an analytical solution for the fundamental natural frequency for an arbitrary number of panels. The solution by the Dunkerley method and its simplified version are comparable in complexity, although the latter solution is still somewhat more compact and in some cases gives a more accurate (under the adopted assumptions) solution. Both methods can be used for a preliminary evaluation of the frequency of natural vibrations of the designed structure. The analytical form of the solutions makes it possible to optimize the structure in terms of choosing the appropriate natural frequency.

The main results:

1. A structure of a statically determinate periodic truss has been developed.
2. Analytical estimates of the fundamental natural frequency are derived as a function of the number of panels.
3. Comparison of the analytical estimates with the numerical solution shows good agreement. The accuracy of estimates increases with the number of panels.
4. For a large number of panels, the simplified Dunkerley method is more accurate than the original method.

## References

1. Kobiela S., Zamiar Z. Oval concrete domes. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2017;17(3):486–501. <https://doi.org/10.1016/J.ACME.2016.11.009>
2. Rezaiee-Pajand M., Rajabzadeh-Safaei N. Exact post-buckling analysis of planar and space trusses. *Engineering Structures*. 2020;223:111146. <https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2020.111146>
3. Macareno L.M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. FEM Subsystem Replacement Techniques for Strength Problems in Variable Geometry Trusses. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008;44:346–357. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>
4. Belyankin N.A., Boyko A.Yu. Formulas for the deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels under uniform loading. *Structural mechanics and structures*. 2019;1(20):21–29. (In Russ.) EDN: YZOZGH
5. Tkachuk G.N. The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019;2(21):32–39. (In Russ.) EDN: JKMMFY
6. Boyko A.Yu., Tkachuk G.N. Derivation of formulas for the dependence of the deflection of a flat articulated-rod frame on the number of panels in the Maple system. *Structural mechanics and structures*. 2019;4(23):15–25. (In Russ.) EDN: ZJDBGW
7. Kirsanov M.N. Stress state and deformation of a rectangular spatial rod coating. *Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture*. 2016;1(41):93–100. (In Russ.) EDN: VNXUON
8. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU. [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2020;(4): 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>
9. Kirsanov M.N. Evaluation of the deflection and stability of a spatial beam truss. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2016;5(268):19–22. (In Russ.) EDN: WWUGZJ
10. Larichev S.A. Inductive analysis of the effect of building lift on the rigidity of a spatial beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. Moscow: Infra-M Publ.; 2015;(1):4–8. (In Russ.) EDN: AZKRYX
11. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2005;85(9):607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006.54(4):756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>
13. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016;96:184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
14. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020;290. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>
15. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerrega A. Size, layout, and topology optimization of skeletal structures using plasma generation optimization. *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Civil Engineering*. 2020;45(2):513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1>
16. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition method in the analysis of an isotropic rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016;10(54):2647–2660. <https://doi.org/10.12988/ams.2016.67211>

17. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *AIP Conference Proceedings*. 2018;1959(1):382–385. <https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342169>
18. Kirsanov M.N. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge scholars Publ.; 2020. ISBN: 978-1-5275-5976-9
19. Kirsanov M.N. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publ.; 2019. ISBN: 978-1-52753531-2
20. Shchigol E.D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):46–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>
21. Manukalo A.S. Analysis of a planar sprengel truss first frequency natural oscillations value. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):54–60. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006>
22. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023;108:10801. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>
23. Skulova P.A. Estimation of the natural oscillation frequency of the Bolman truss. In: *Mechanization and automation of construction. Digest of articles*. Samara State Technical University. 2020:102–107. (In Russ.) EDN: PJJVTX
24. Petrichenko E.A. Lower bound of the natural oscillation frequency of the Fink truss. *Structural mechanics and structures*. 2020;3(26):21–29. (In Russ.) EDN: PINHFN
25. Rutenberg A. A Lower Bound for Dunkerley's Formula in Continuous Elastic Systems. *Journal of Sound and Vibration, Academic Press*. 1976;45:249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X)
26. Low K.H. A Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences, Pergamon*. 2000;42:1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1)

### Список литературы

1. Kobiela S., Zamiar Z. Oval concrete domes // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2017. Vol. 17. No. 3. P. 486–501. <https://doi.org/10.1016/J.ACME.2016.11.009>
2. Rezaiee-Pajand M., Rajabzadeh-Safaei N. Exact post-buckling analysis of planar and space trusses // *Engineering Structures*. 2020. Vol. 223. <https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2020.111146>
3. Macareno L.M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. FEM Subsystem Replacement Techniques for Strength Problems in Variable Geometry Trusses // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008. Vol. 44. P. 346–357. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>
4. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 1 (20). С. 21–29. EDN: YZozGH
5. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2 (21). С. 32–39. EDN: JKKMFY
6. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 4 (23). С. 15–25. EDN: ZJDBGW
7. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // *Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура*. 2016. № 1 (41). С. 93–100. EDN: VNXUON
8. Бука-Вайваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Вестник МГСУ*. 2020. Т. 15. Вып. 4. С. 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>
9. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 5 (268). С. 19–22. EDN: WWUGZJ
10. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М.: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 4–8. EDN: AZKRYX
11. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2005. Vol. 85. Issue 9. P. 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. № 4. P. 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>
13. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. P. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
14. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. Vol. 290. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>
15. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerreza A. Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization // *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Civil Engineering*. 2020. Vol. 45. No. 2. P. 513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1>
16. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle // *Applied Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 10. No. 54. P. 2647–2660. <https://doi.org/10.12988/ams.2016.67211>

17. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. Issue 1. <https://doi.org/10.1063/1.5034687>
18. Kirsanov M.N. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publ., 2020. 186 p. ISBN: 978-1-5275-5976-9
19. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publ., 2019. 206 p. ISBN: 978-1-52753531-2
20. Щиголь Е.Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>.
21. Манукало А.С. Анализ значения первой частоты собственных колебаний плоской шпренгельной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 54–60. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006>
22. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. Vol. 108. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>
23. Скулова П.А. Оценка частоты собственных колебаний фермы Больмана // *Механизация и автоматизация строительства: сборник статей*. Самарский государственный технический университет. Самара, 2020. С. 102–107. EDN: PJJVTX
24. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 3 (26). С. 21–29. EDN: PINHFN
25. Rutenberg A. A Lower Bound for Dunkerley's Formula in Continuous Elastic Systems // *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press. 1976. Vol. 45. P. 249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X)
26. Low K.H. A Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses // *International Journal of Mechanical Sciences*, Pergamon. 2000. Vol. 42. P. 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1)

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-560-576

UDC 624.9


EDN: IWLXPA

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Evaluation of Soil Structure Interaction Effects on Seismic Response of RC Framed Buildings Using Simplified Method

Prakash Timilsina , Chhabi Raj Ghimire , Hemchandra Chaulagain  

Pokhara University, Pokhara, Federal Democratic Republic of Nepal

 hchaulagain@gmail.com

### Article history

Received: September 27, 2023

Revised: November 21, 2023

Accepted: November 29, 2023

### Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

### Authors' contribution

Undivided co-authorship.

**Abstract.** In the current practice for the design of the building structure is done by considering the footing as fixed based. The mid-rise buildings having variation in storey height from 3- to 10-storey were selected for the research. In this research, analysis was done to study into the interaction between the seismic response of RC-framed buildings and the soil-structure for various soil types. To study the linear responses of the structures, the model was developed in FEM software SAP2000. The underneath soil was modelled by using direct method, where the soil is considered as solid element. The considered depth of soil was considered 30 m and the viscous spring dashpot were applied to avoid the reflection of seismic waves in soil medium along the effective horizontal soil boundaries. The seismic response variables such as maximum lateral deflection, inter-storey drift and fundamental time periods have been studied. SSI amplified the lateral deflection, inter-storey drift and time period of structure shifting the performance level from life safety to near collapse level. Fundamental time period of the first mode was increased by 23 % for very soft soil. The maximum lateral deflection of 10-storey building for very soft soil was amplified up to 282 % for Kobe and the performance level was shifted from life safety (1.5 %) to collapse level for all the considered model for soil type *D*. The performance level of structure was checked against the different soil types on varying storey height and finally a simplified method has been proposed to incorporate the effects of SSI in fixed base structures.

**Keywords:** Soil structure interaction, Simplified method, Seismic response, Linear dynamic analysis, Inter-storey drift

### For citation

Timilsina P., Ghimire C.R., Chaulagain H. Evaluation of soil structure interaction effects on seismic response of RC framed buildings using simplified method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):560–576. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-560-576>

**Prakash Timilsina**, M.Sc., Structural Engineering, School of Engineering, Pokhara University, Kaski, Federal Democratic Republic of Nepal; ORCID: 0009-0009-5512-766X; E-mail: prakashtimilsina108@gmail.com

**Chhabi Raj Ghimire**, Assistant Professor, School of Engineering, Pokhara University, Kaski, Federal Democratic Republic of Nepal; ORCID: 0009-0008-3626-7424; E-mail: chhabiusc@gmail.com

**Hemchandra Chaulagain**, Ph.D., Associate Professor, School of Engineering, Pokhara University, Kaski, Federal Democratic Republic of Nepal; ORCID: 0000-0002-9483-5652; E-mail: hchaulagain@gmail.com

© Timilsina P., Ghimire C.R., Chaulagain H., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Оценка влияния взаимодействия грунтовых структур на сейсмический отклик зданий с железобетонным каркасом с использованием упрощенного метода

П. Тимилсина , Ч.Р. Гимире , Х. Чаулагейн  

Университет Покхары, Покхара, Федеративная Демократическая Республика Непал

✉ hchaulagain@gmail.com

## История статьи

Поступила в редакцию: 27 сентября 2023 г.

Доработана: 21 ноября 2023 г.

Принята к публикации: 29 ноября 2023 г.

## Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

**Аннотация.** Существующая практика проектирования конструкции здания основывается на рассмотрении фундамента как неподвижно закрепленного. Для исследования были выбраны здания средней этажности, высота которых варьируется от 3 до 10 этажей. Проведен анализ взаимодействия между сейсмическим откликом зданий с радиоуправляемым каркасом и структурой грунта для различных типов грунтов. Для изучения линейных откликов конструкций разработана модель в программном обеспечении FEM SAP2000. Грунт под землей был смоделирован с использованием прямого метода, где грунт рассматривается как твердый элемент. Глубина залегания грунта считалась равной 30 м, и для предотвращения отражения сейсмических волн в грунтовой среде вдоль эффективных горизонтальных границ грунта были применены вязкие пружинные амортизаторы. Были изучены такие переменные сейсмического отклика, как максимальное боковое отклонение, смещение между этажами и основные периоды времени. SSI увеличил поперечный прогиб, смещение между этажами и временной промежуток конструкции, повысив уровень эксплуатационных характеристик с уровня безопасности жизнедеятельности до уровня, близкого к обрушению. Основной период первого режима был увеличен на 23 % для очень мягкого грунта. Максимальное боковое отклонение 10-этажного здания для очень мягкого грунта было увеличено до 282 % для Кобе, а уровень производительности был изменен с уровня безопасности для жизни (1,5 %) на уровень обрушения для всех рассмотренных моделей для грунта типа D. Уровень эксплуатационных характеристик конструкции был проверен с учетом различных типов грунта на разной высоте этажа, и, наконец, был предложен упрощенный метод для учета эффектов SSI в конструкциях с фиксированным основанием.

**Ключевые слова:** взаимодействие грунта и конструкции, упрощенный метод, сейсмический отклик, линейный динамический анализ, перекоп этажа

## Для цитирования

Timilsina P., Ghimire C.R., Chaulagain H. Evaluation of soil structure interaction effects on seismic response of RC framed buildings using simplified method // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 6. С. 560–576. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-560-576>

## 1. Introduction

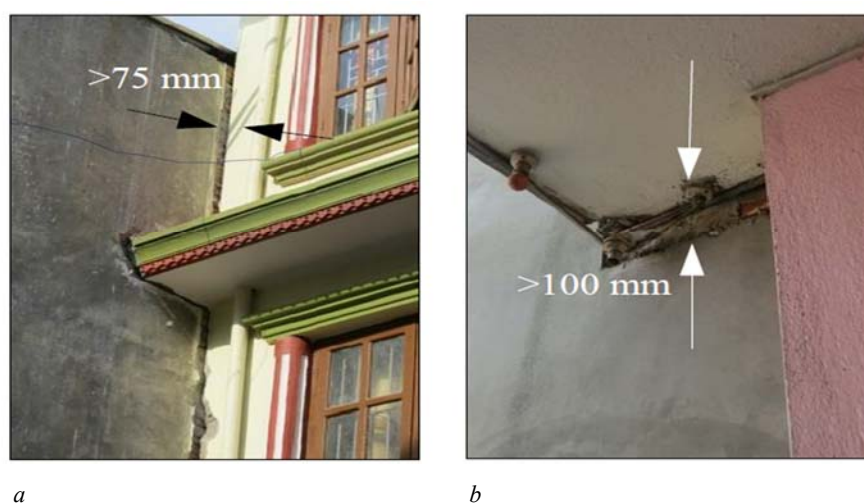
Since it might be essential to develop structures at places with less favorable site conditions in areas that are earthquake-prone, the issue of soil-structure interaction (SSI) in seismic analysis and structure design has become more crucial. These factors make Nepal extremely earthquake susceptible. Some of the past large earthquakes are Nepal-Bihar Earthquake (1833), Nepal-Tibet Earthquake (1916), Kathmandu Earthquake (1988) and Gorkha Earthquake (2015) [1]. The features of earthquakes, their travel paths, local sites, and interactions between soil and structures influence the structures' seismic sensitivity [2]. The combination of the first three of

*Тимилсина Пракаш*, магистр, инженер-проектировщик инженерной школы, Университет Покхары, Каски, Федеративная Демократическая Республика Непал; ORCID: 0009-0009-5512-766X; E-mail: prakashtimilsina108@gmail.com

*Гимире Чхаби Радж*, доцент инженерной школы, Университет Покхары, Каски, Федеративная Демократическая Республика Непал; ORCID: 0009-0008-3626-7424; E-mail: chhabiusc@gmail.com

*Чаулагейн Хемчандра*, Ph.D., доцент инженерной школы, Университет Покхары, Каски, Федеративная Демократическая Республика Непал; ORCID: 0000-0002-9483-5652; E-mail: hchaulagain@gmail.com

these components results in free-field seismic activity [3]. SSI influences the structural responses to the free-field motion. The process by which the motion of the system is affected by the response of the ground under structure and the response of the ground is affected by the motion of the building is known as SSI [4]. FEM or FDM is used for most complicated study of interface behavior of soil and structure rather than analytical approaches [5]. The support configuration of structure is crucial for determining a building's dynamic behavior. The footing condition is different for various soil types, on stiff soil, a rigid footing might be considered, and i.e. a rigid footing might be considered for stiff soil and a flexible base footing for soft soil [6]. On considering SSI effects the fundamental period of building is increased, and a result structural response such as displacement, drift, base shear may differ from the rigid base structures (Figure 1). To predict the actual behaviour, the designer should consider the SSI effects. Generally, there are two methods to consider the effects of SSI in analysis i.e., Substructure and Direct approaches [7]. Two independent media are considered in the substructure technique, and the principle of superposition is used to determine the final seismic results [8; 9], where as in direct-method soil and building are modeled as a unified system [10].



**Figure 1.** Observed damage due to foundation settlement:  
*a* — Differential settlement caused by foundation rotation; *b* — Vertical settlement [1]

Damage on buildings occurred due to foundation settlements in Kathmandu valley, this was due to basin effects caused during Gorkha Earthquake 2015 [1]. A considerable effect of SSI should be considered for soil having shear-wave velocity below 600 m/s [4; 9; 5]. The properties of soil deposited at different place of Kathmandu city has shear-wave velocity less than 150 m/s [11; 12]. The SSI effects on midrise buildings for very soft soil (<150 m/s) has not been yet carried out. The lower the value of shear-wave velocity of soil increases the flexibility of medium, which may affect on performance level of structures. IS 1893:2016 / NBC 105:2020 ignore the effects of SSI on period of buildings. Not only building height but SSI also influence the fundamental period of structures [13]. The main aim of this research is to propose the maximum lateral deflection increment factor for fixed based RC structure to simplify the design method considering SSI effects.

**Description of buildings.** According to NBC 206:2015 a mid-rise building is considered to be 16–25 m in height, and similarly IS code classifies 4–10 stories buildings as mid-rise ones. Here, 3, 5, 7 and 10 stories building are taken into consideration, as this thesis examined the seismic response of mid-rise structures up to 10 storey high. The details of model used in this study are shown in Table 1. Because a finite-element program SAP2000 can simulate complicated issues requiring massive computational resources through a direct technique of analysis, it was used to simulate soil-structure systems numerically. The damping in the models was considered to be 5%. Concrete of grade M25 and steel of grade Fe500 were assigned as materials for beams, columns, and slabs. Each building was modeled and analyzed as per IS 1893:2016 and NBC 105:2020 for dynamic analysis. The loading on structure was taken in accordance with IS 1893:2016 (Table 2).

Live load intensity applied on selected structures was 1.5 KN/m<sup>2</sup> for roof and 3 KN/m<sup>2</sup> for other slabs, and similarly floor finish of intensity 1.2 KN/m<sup>2</sup> was also applied. Wall loads were converted into uniformly distributed load. For dynamic analysis seismic load was applied in accordance with NBC 105:2020.

Table 1

## Major features of building

Storey No.	Storey height, mm	No of bays in X- & Y-direction	Bay width in X-direction, mm	Bay width in Y-direction, mm	Depth of MAT, mm	Column Size, mm	Beam Size, mm	Slab thickness, mm
3	3000	2	4000	4000	500	300×300	300×250	125
5	3000	2	4000	4000	500	380×380	300×250	150
7	3000	3	4000	4000	1000	550×550	500×450	200
10	3000	3	4000	4000	1000	650×650	600×550	200

Table 2

## Seismic parameters of building (IS 1893:2016)

Parameters	General Description
Structural System	Special Moment Resisting Frame
No. of Floors	3,5,7 and 10 storey
Concrete Grade	M25
Reinforcements	Fe 500
Response Reduction Factor	5 %
Seismic Zone Factor	0.36
Importance Factor	1.5

## 2. Methods

The 3D model was simulated by applying frame components for the columns and beams, shell components for the slabs, MAT foundation, and viscous spring elements for the soil boundaries; the structure was represented as a three-dimensional frame. The MAT foundation and soil elements (continuum elements) are simulated using solid components (Figure 2).

Direct method of approach was used for modeling of system as it can show the real behaviour of structure. Viscous spring absorbing boundaries were used to avoid reflective nature of waves propagation. The effects of the reflective waves were minimal if the gap between the building's center and the soil FEM margin was within three/four times in horizontal and two/three times along the depth of soil layers [14]. In this study the boundary was considered 5–6 times the foundation radius, and depth was considered as a rigid base after 30 m below (Tables 3, 4).

Table 3

## Properties of soil layers

Model Parameters	Unit	Soil class B	Soil class C	Soil class D
Mass density $\rho$	kg/m <sup>3</sup>	1,700	1,698	1,164
Bulk modulus $K$	kPa	1,209,036	746,826	27,522
Shear modulus $G$	kPa	623,409	177,304	3321
Poisson's ratio $\nu$		0.28	0.39	0.442
Elastic modulus $E$	kPa	1,595,927	492,905	9,577
Shear strength $C$	kPa	5	20	20
Friction angle $\phi$	° (deg)	40	19	12

Table 4

## Soil parameters

Soil Type	S-wave velocity, m/s	P-wave wave velocity, m/s
Soil class B	600	1318
Soil class C	320	753
Soil class D	52.9	164

The soil parameters for soil modeling were taken from the (Rahvar 2005) and (Rahvar 2006a) for soil class *B* and *C* respectively, and soil parameters of Kathmandu valley were taken into consideration for soil class *D* as soil parameter classified by [11]. The above soil are taken under the consideration of soil profiles classified by (ATC, 1996; FEMA356, 2000) [15]. The shear-wave velocity of soil in different places of Kathmandu valley was less than 180 m/s [12; 11]. For soil type *D*, the soil having minimum value of shear velocity was taken for this study. For soil having shear-wave less than 600 m/s, there were significant effects of SSI for RC framed building [9]. The soil was modeled as one homogeneous layer of 30 m depth. The maximum grid spacing ( $\Delta h$ ) was limited in accordance with formula given by [16].

$$\Delta h \leq \frac{V_s}{10f_{max}}, \tag{1}$$

where  $f_{max}$  — is the maximum frequency of relevant structures;  $V_s$  — is shear wave velocity of medium (Figure 2).

$$K_1 = K_2 = \frac{2G}{R} A, \tag{2}$$

$$C_1 = C_2 = \rho c_s A, \tag{3}$$

$$K_3 = \frac{4G}{R} A, \tag{4}$$

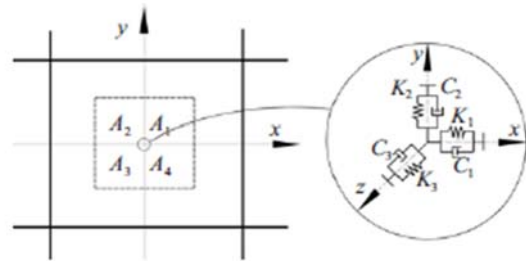
$$C_3 = \rho c_p A, \tag{5}$$

where,  $C_1$ ,  $C_2$ , and  $C_3$  are viscous damping coefficients and  $K_1$ ,  $K_2$ , and  $K_3$  are spring stiffness coefficient along  $x$ -,  $y$ - and  $z$ -axis respectively.  $G$  is the shear modulus,  $\rho$  is the mass density,  $A$  is the area of soil continuum grid,  $c_s$  and  $c_p$  are  $s$ - and  $p$ -wave velocities respectively.

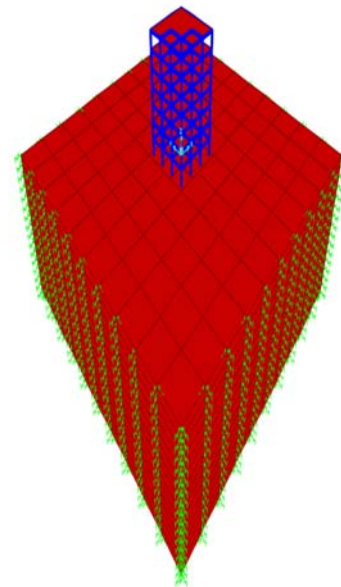
In computational models, the facing zone was divided from the neighboring soil region by interface components. Here, two shear springs along two orthogonal direction and one spring along the vertical direction were modeled for frictional contact between the two planes of soil layer and MAT foundation in order to prevent from sliding of MAT and soil layers during seismic loading. The shear strength of soil and footing elements was determined as Mohr–Coulomb failure criterion, and the interconnection between structural base and soil layers were given as spring-slider systems [18; 19].

$$K_{n(max)} = K_{s(max)} = 10_{x(max)} \left[ \frac{k + \frac{4}{3}G}{(\Delta z)_{min}} \right], \tag{6}$$

where  $(\Delta z)_{min}$  is the smallest continuum zone dimension next to the normal direction of the interface. The direct method of modeling of building and soil along with its boundary elements along the periphery of soil layer is shown on Figure 3. Selection of representative ground motion for seismic performance evaluation should be done in such a way, that they account for the uncertainties and difference in frequency, severity and the duration characteristics. Ground motion parameters can be displacement, velocity and acceleration or combination of them. Among these parameters, acceleration is measured quantity and other are derived quantity. So, acceleration time histories are generally used in the analysis.



**Figure 2.** Sketch of 3D Viscous Spring Artificial Boundary (VSAB) [17]



**Figure 3.** Model of 7-storey building using direct approaches  
Source: made by authors



At least three pairs of synthetic earthquake recordings with two orthogonal components i.e., in both  $x$ - and  $y$ -direction are used. The acceleration histories of given earthquake are downloaded from PEER. The ground motion data are selected according with codal provisions. Response of different ground motion differ depending on their origin, the types of earthquakes and local site response.

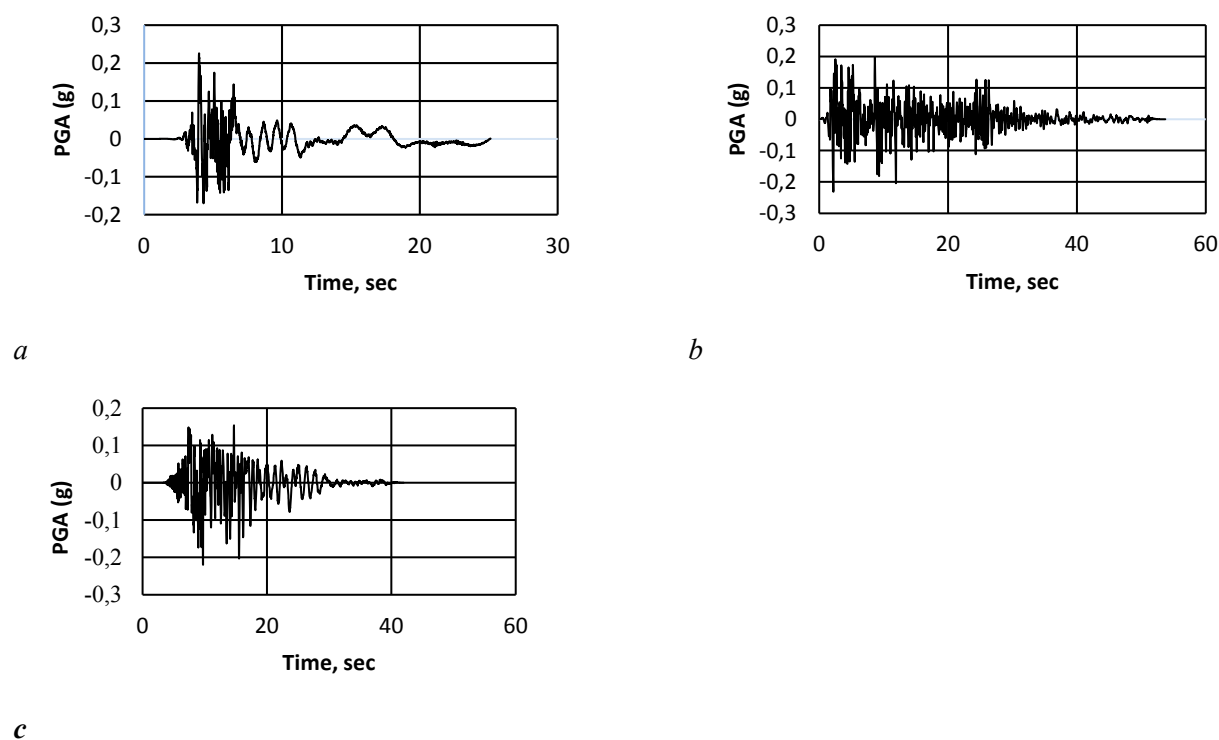
SeismoMatch 2022 is used for matching of earthquake data. Kobe, Gorkha and El Centro are input source accelerogram. Code based spectrum IS 1893 (Part 1):2016 is set as a targeted spectrum. The earthquake data are matched differing the soil type with damping value of 5 % (Figure 4, Table 5).

Table 5

Selected ground motion with Original and Matched PGA (g)					
S.No	Earthquake	PGA(g)-Original		PGA(g)-Matched	
		$x$	$y$	$x$	$y$
1	Kobe, Japan	0.21924	0.28977	0.154	0.23153
2	El Centro	0.25409	0.15024	0.19777	0.1696
3	Gorkha, Nepal	0.44942	0.4081	0.2308	0.22572

**Linear dynamic.** To compute earthquake forces, their dispersion over the height of the structure, and the associated internal forces and structural deflections for the Linear Dynamic Procedure (LDP), a linearly elastic, dynamic analysis is applied. Using the codal response spectra provided by the seismic code (IS 1893:2016), the dynamic analysis of the building model has been performed. When a structure is exposed to earthquake excitations [20], the equation of motion in a structural system can be expressed as

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = F(t). \quad (7)$$

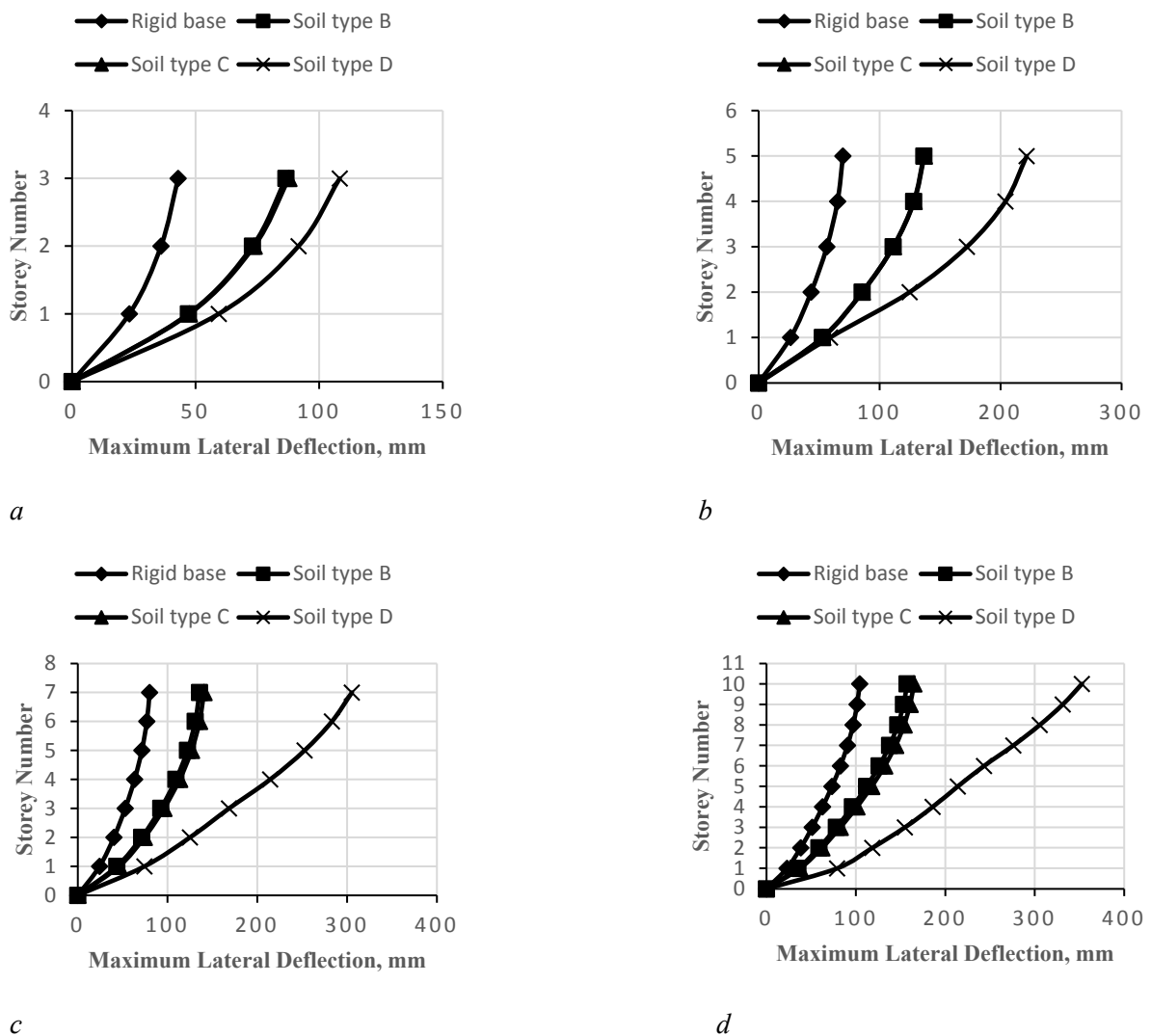


**Figure 4.** Seismic records along  $X$ -direction:  
*a* — Gorkha Earthquake 2015; *b* — El Centro; *c* — Kobe  
 Source : made by authors

### 3. Result and discussion

#### 3.1. Maximum lateral deflection

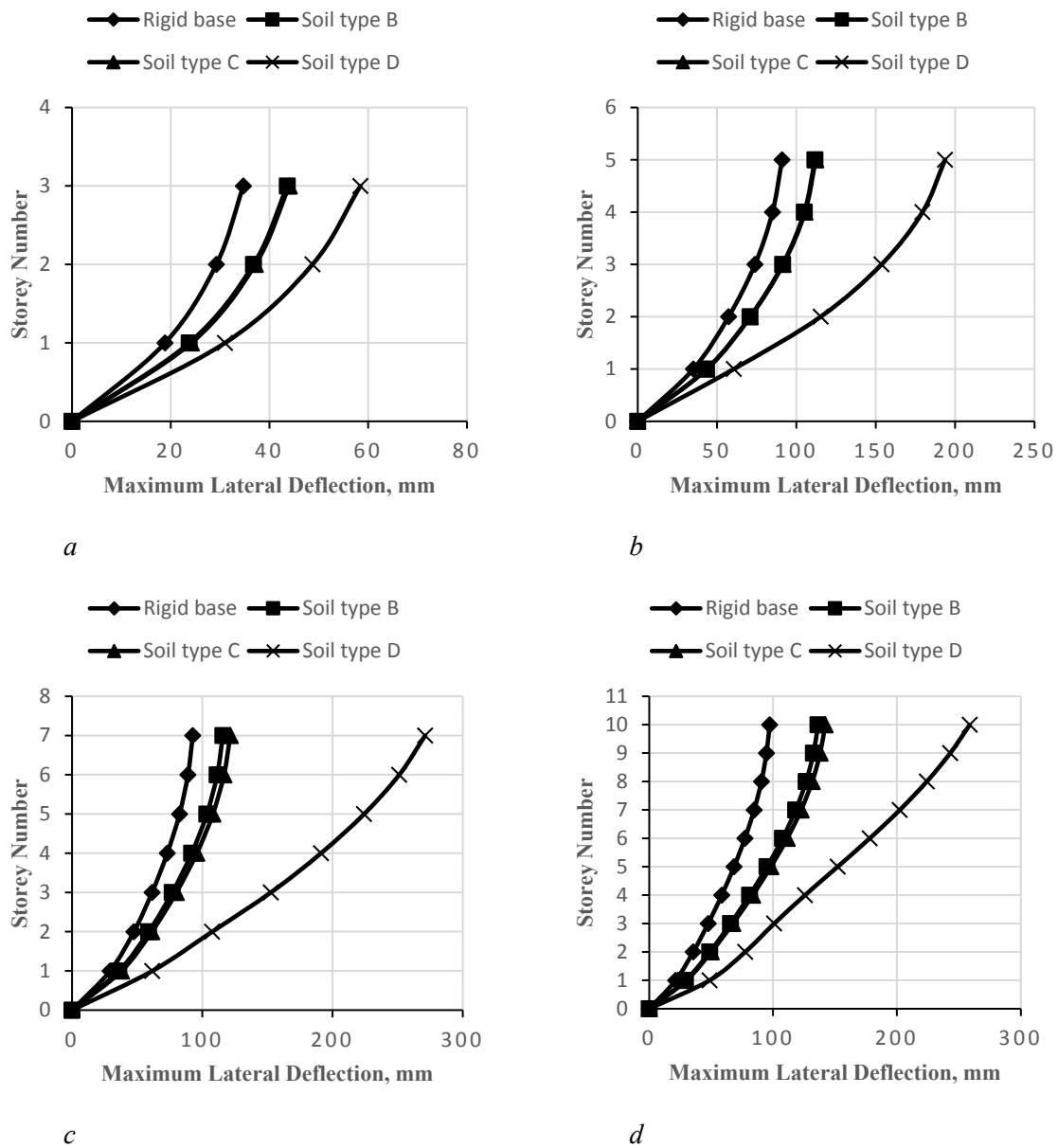
Figure 5–7, *a, b, c, d* show the maximum lateral deflection of 3-storey, 5-storey, 7-storey and 10-storey RC framed structures with different soil type *B, C, D* and considering fixed based respectively. Compared to rigid base structure lateral deflection of flexible-base structure for all cases was been increased, despite of the height of buildings, footing and soil type. This was because of the soil-structure system’s degree of freedom increased once SSI was taken into account; the natural period was lengthened [21]. So, the amplification of displacement was seen in the structure when considering SSI. This indicates that with the changing soil from *B* to *C* to *D*, the maximum lateral deformation also increased gradually. With increase in width of buildings the stability increased and effects of footing rotation decreased. Also, it should be noted that increase in buildings bays distance (spacing between two columns) increase in overall mass of structure resulting in the increments of inertial force. Hence, the nature lateral deflection follows different pattern on change in height and width of structure. Soil having shear-wave velocity less than 180 m/s (very soft soil), the structure can deform considerable amplification ranging up to 300 % as compared to rigid-base structure [6]. The displacement of structure increases nonlinearly over the storey height.



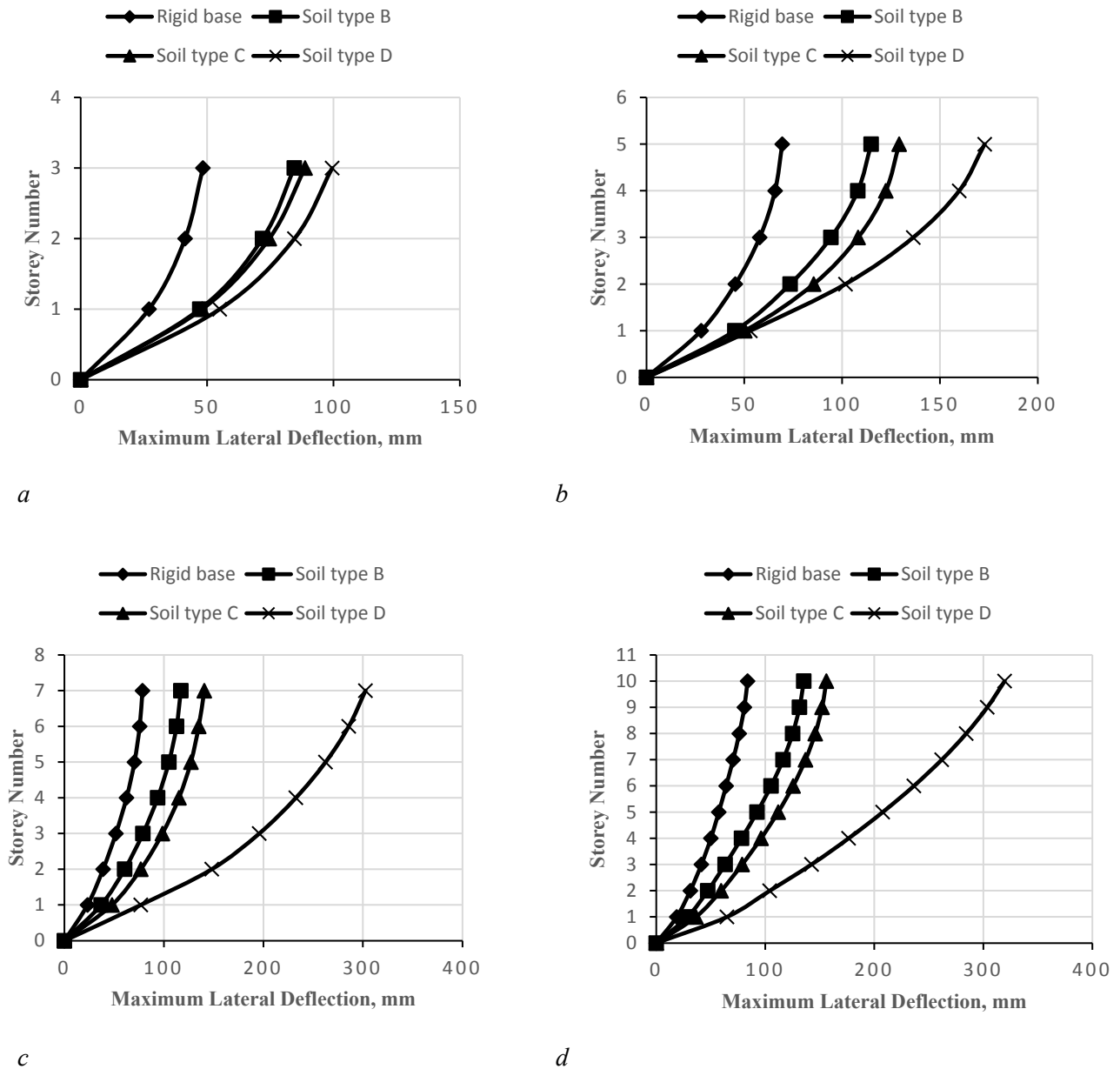
**Figure 5.** Lateral deflection with various types of subsoil:  
*a* — M-3; *b* — M-5; *c* — M-7; *d* — M-10 structures (Kobe earthquake)  
 Source: made by authors

Figure 5 shows the maximum lateral deflection of 3-, 5-, 7-, and 10-storey buildings for Kobe earthquake. In this section, the results are presented and analyzed in terms of the maximum storey displacements. The top of the structure was amplified 101.5, 104.2 and 152.2 % for soil classes B, C and D respectively for a 3-storey building. The deformation of 5-storey was amplified by 69.5, 75.8 and 207.6 % for Kobe earthquake. It can be seen that lateral deflection of a 7-storey building was amplified by 69.5, 76 and 282 % for soil classes B, C and D respectively. Similarly, 51, 58.3 and 238.7 % were the lateral displacement amplification values for a 10-storey structure.

Figure 6 shows the maximum lateral deflection of 3-, 5-, 7-, and 10-storey building for El Centro earthquake. The maximum top deflections for 3-storey regular building were been amplified as 74.8, 83.5 and 105.8 % respectively for soil type B, C and D with respect to the rigid base. Top deflection for 5-storey regular building has been amplified as 65.5, 86 and 149 %. Top deflection for a 7-storey regular building was been amplified as 49, 79.2 and 285 %. Similarly, top displacement for 10-storey building along X-direction was amplified as 61.7, 86.5 and 281.9 % for soil type B, C and D respectively.



**Figure 6.** Lateral deflection with various types of subsoil:  
 a — M-3; b — M-5; c — M-7; d — M-10 structures (Gorkha earthquake)  
 Source: made by authors



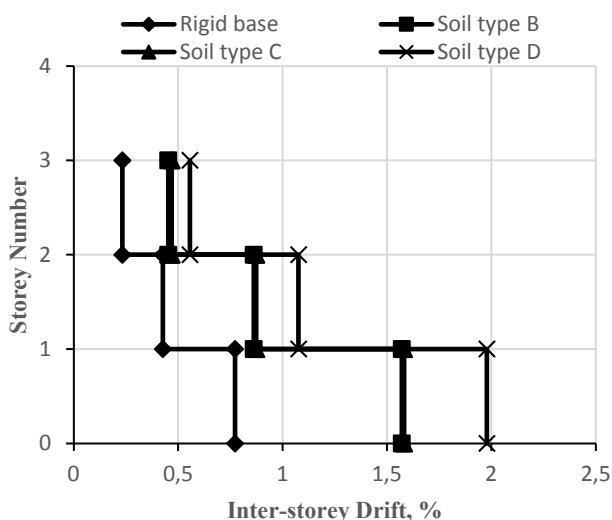
**Figure 7.** Lateral deflection with various types of subsoil:  
*a* — M-3; *b* — M-5; *c* — M-7; *d* — M-10 structures (El Centro earthquake)  
 Source: made by authors

Figure 7 shows the maximum lateral deflection of 3-, 5-, 7-, and 10-storey building for Gorkha earthquake. The maximum top deflection for 3-storey regular building has been amplified as 34.5, 35.45 and 68.3 % respectively for soil type B, C and D with respect to rigid base. Top deflection for 5-storey regular building has been amplified as 36.2, 37 and 113 %. Top deflection for 7-storey regular building along X-direction has been amplified as 25, 31.1 and 192.5 %. Similarly, top displacement for 10-storey building has amplified as 40.2, 46.1 and 175.2 % for soil type B, C and D respectively.

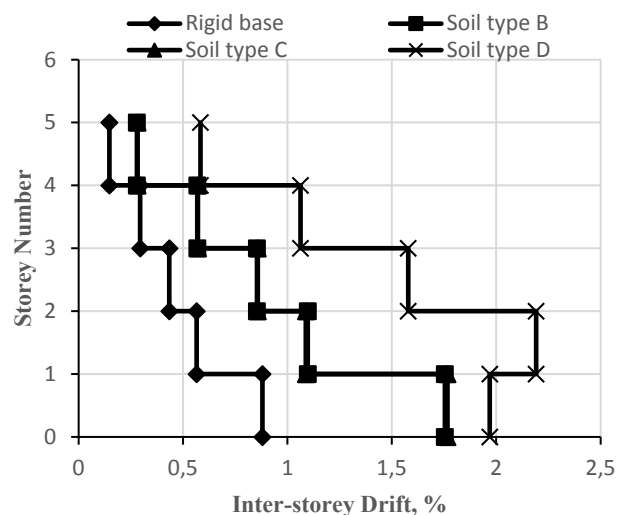
The one of most important design parameters is inter-storey drift. This variable displays the appropriate displacement between the top and bottom of a storey. The storey drift ratio is calculated for different types of soil types ranging from B to D according to Nepalese code. The drift values reach maximum at first storey for all the considered models. If the stiffness decreases the drift ratio increases [13]. Mainly the top and the bottom stories drift ratio values are affected by SSI than the middle stories. The below statement illustrates the inter-storey drift ratio's governing equation:

$$drift = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{h} \tag{7}$$

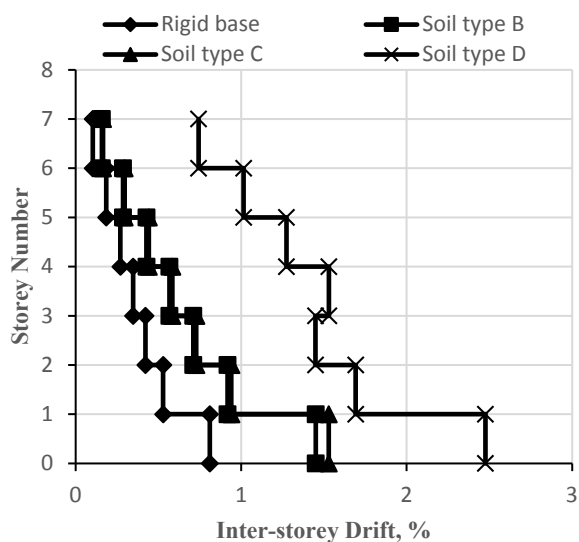
Figures 8–10, *a*, *b*, *c* and *d*, show the inter-storey drift of 3-storey, 5-storey, 7-storey and 10-storey RC framed structures with different soil type *B*, *C*, *D* and considering fixed based respectively for different earthquake (Kobe, El Centro, Gorkha). Similar to lateral deflection, inter-storey drifts were also found to be increased in all flexible cases and the maximum value in many cases has exceeded 1.5 %. This indicates, after accounting for SSI, the performance level was shifted from life safety to near collapse (2.5 %)¹. In a fixed base foundation system, the inter-storey drift lies at the life safety level. The different performance level according to FEMA-356 are tabulated below:



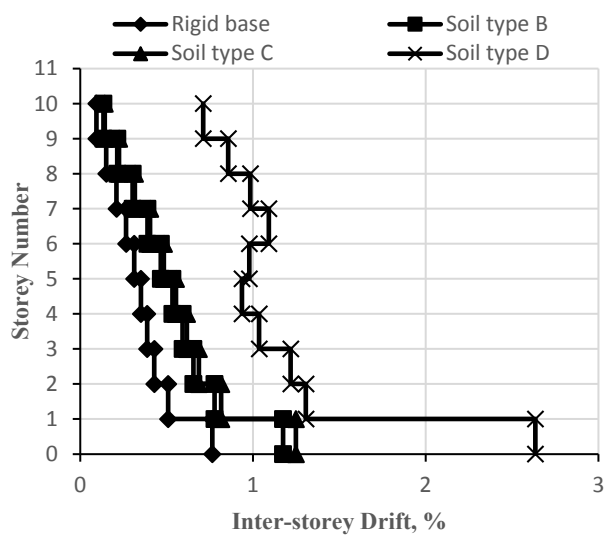
*a*



*b*



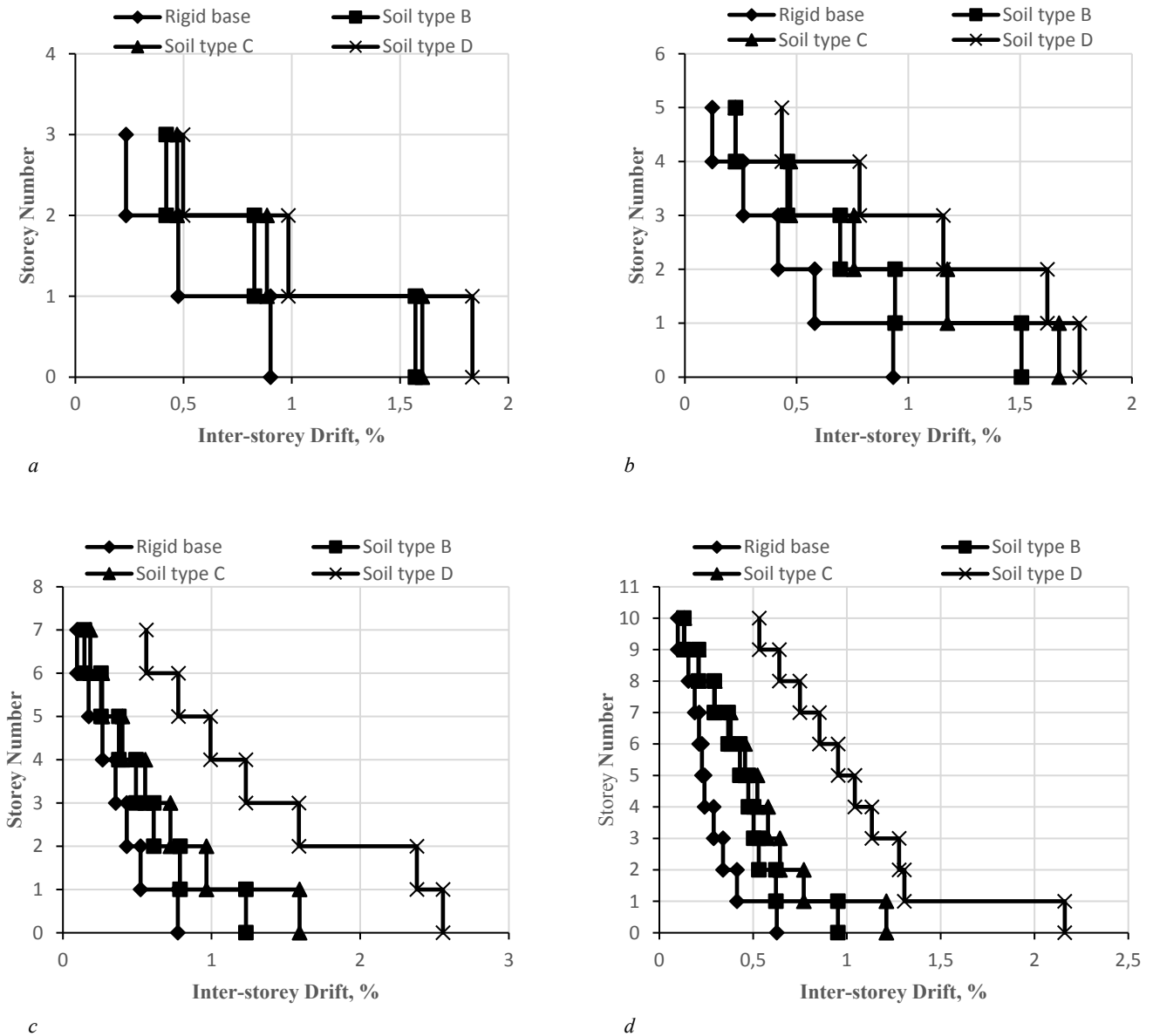
*c*



*d*

**Figure 8.** Inter-storey drift (%) of various buildings types and subsoil types (THx):  
*a* — M-3; *b* — M-5; *c* — M-7; *d* — M-10 structures (Kobe earthquake)  
 Source: made by authors

¹ Building Seismic Safety Council (BSSC) NEHRP guidelines for the seismic rehabilitation of building. Washington, DC, FEMA 273/274, FEMA, 1997.

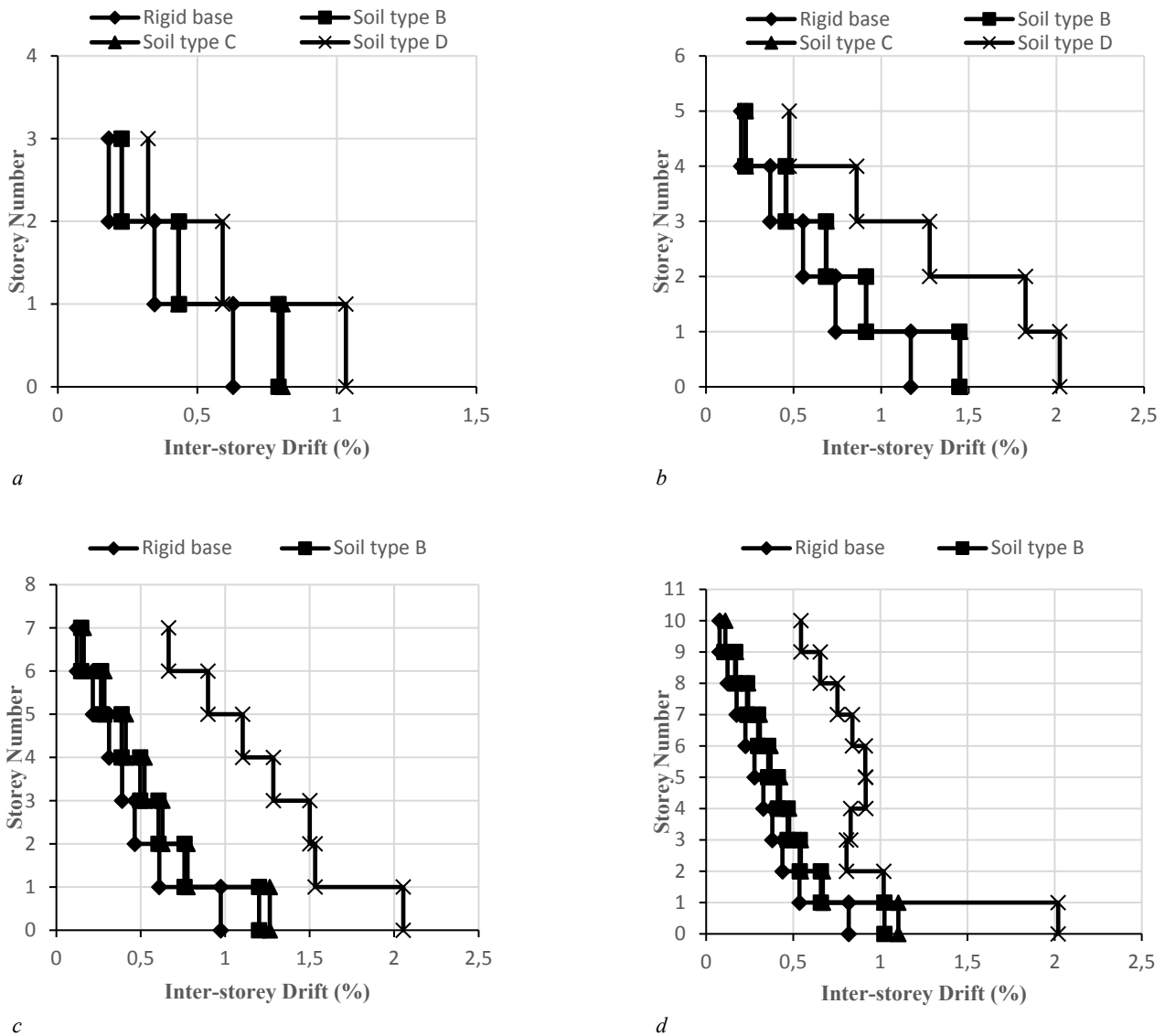


**Figure 9.** Inter-storey drift (%) of various buildings types and subsoil types (THx):  
*a* — M-3; *b* — M-5; *c* — M-7; *d* — M-10 structures (El Centro earthquake)  
 Source: made by authors

The different performance according to FEMA-356 are shown in Table 6.

Table 6

Performance level	
Performance level	Drift % (FEMA-356, BSSC-1997)
Slight damage	0.2
Moderate damage	0.5
Extensive damage	1.5
Near collapse	2.5
Collapse Prevention	4



**Figure 10.** Lateral deflection with various types of subsoil:  
*a* — M-3; *b* — M-5; *c* — M-7; *d* — M-10 structures (Gorkha earthquake)  
 Source: made by authors

The higher value of the interstorey drift occurred for the building located in Soil-D for all three ground records used in this study. As the soil class changes from *B* to *C* and *C* to *D*, the storey drift ratios was also shifted from life safety levels to the near collapse level. It can be seen from Figures 8–10 that the lower stories were found to be affected more by SSI than other stories. The maximum value of IS-drift % value were seen in Kobe earthquake among the selected three pairs of ground motion data.

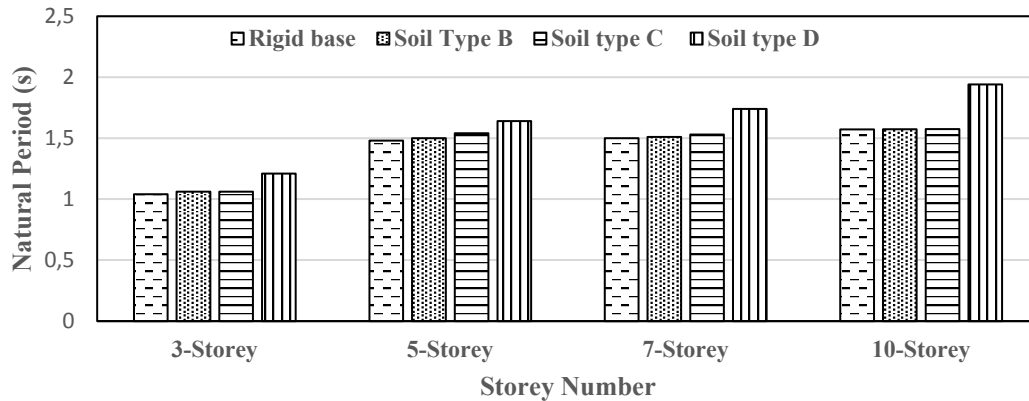
The maximum IS-drift value for M-3 fixed base structure is 0.78 % whereas corresponding values for soil type *B*, *C* and *D* is 1.50, 1.52 and 1.70 % respectively for Kobe earthquake. The maximum IS-drift value for M-5 fixed base structure is 0.87 % whereas corresponding values for soil type *B*, *C* and *D* is 1.75, 1.76 and 2.19 % respectively. The maximum IS-drift value for M-7 fixed base structure is 0.81 % whereas corresponding values for soil type *B*, *C* and *D* is 1.45, 1.52 and 2.47 % respectively.

The maximum IS-drift value for M-10 fixed base structure was 0.76 % whereas corresponding values for soil type *B*, *C* and *D* is 1.17, 1.24 and 2.63 % respectively. The study finds that, for nearly all the models pertaining to soil class *D*, there is a substantial amplification in building performance — from ensuring life safety to reaching the critical points of near-collapse or complete collapse. Hence, to enhance the safety and serviceability of building SSI should be account in order to design the buildings.

### 3.2. Time period

Seismic demands of the structure depend upon the fundamental time of the building (Figure 11). According to NBC 105:2020, the fundamental time period for moment resisting concrete frame building was a function of overall height of the building i.e.

$$T_a = 0.075h^{0.75} \tag{8}$$



**Figure 11.** Time chart for rigid base and flexible base considering different soil type  
Source : made by authors

According to [22] the time period of 12-storey building has been amplifying up to 100 % considering SSI effects. Result obtained from the structural analysis, the fundamental time period of first mode is increased only within 2 % for soil type B and C. But fundamental time period of soil type D is increased by 16, 11, 16 and 23 % for 3-, 5-, 7- and 10-storey building respectively.

### 3.3. Simplified procedure

**Criteria for consideration of SSI effects.** Criteria to consider SSI effects on the building is given by [9], which is as follow:

$$\frac{V_s}{fh} < 20, \tag{9}$$

where,  $f$  is the frequency of rigid base buildings using empirical code basis formula and  $h$  is the overall height of the structure. The above criteria were applied for all lateral force resisting system including both rigid and ductile structures [9]. The main factor for considering the SSI effects was rigidity of the structure against the soil-layers considered within the boundary area. The natural frequency of the structure considering soil-structure interaction was obtained only after analyzing the soil-structure model. Therefore, a formula based on a conventional code was proposed for the criteria given by Veletsos and Meek [23].

Table 7

Derivation of Criteria given by Veletsos and Meek

Soil Type	Storey Number	Storey Height, m	Natural Frequency of Structure Hz	$\frac{V_s}{fh}$
Type B ( $V_s = 600$ m/s)	3	9	2.566	25.98077
	5	15	1.749	22.87021
	7	21	1.359	21.02386
	10	30	1.04	19.23077



Ending of the Table 7

Soil Type	Storey Number	Storey Height, m	Natural Frequency of Structure Hz	$\frac{V_s}{fh}$
Type C ( $V_s = 320$ m/s)	3	9	2.566	13.85641
	5	15	1.749	12.19745
	7	21	1.359	11.21273
	10	30	1.04	10.25641
Type D ( $V_s = 52.9$ m/s)	3	9	2.566	2.290638
	5	15	1.749	2.01639
	7	21	1.359	1.853604
	10	30	1.04	1.695513

The Table 7 above shows that the specified criteria are not fulfilled for soil type *B*, so there is no need to consider SSI effects in the seismic analysis of the structure. The ratio of the maximum lateral deflection of the considering soil to the rigid base is known as the maximum lateral deflection increment factor ( $\beta$ ) which is given as:

$$\beta = \frac{\delta'}{\delta}, \quad (10)$$

where  $\delta'$  is the maximum lateral deflection of structure considering soil-structure interaction and  $\delta$  is the maximum lateral deflection of structure considering as rigid base. Tabatabaiefar and Massumi gave the relation between maximum lateral deflection ratio and the number of stories [2].

For soft soil sites (soil type *C*)

$$\beta = a + bs^3. \quad (11)$$

For very soft soil sites (soil type *D*)

$$\beta^2 = a + \frac{b}{s^2}. \quad (12)$$

The above equations were solved by curve fitting techniques, and the values can be presented in graphical form (Figures 12–14):

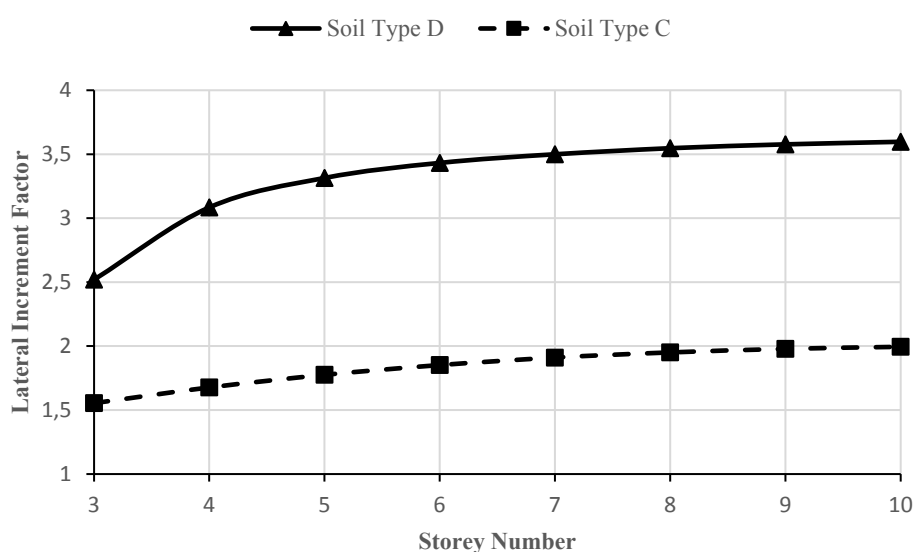
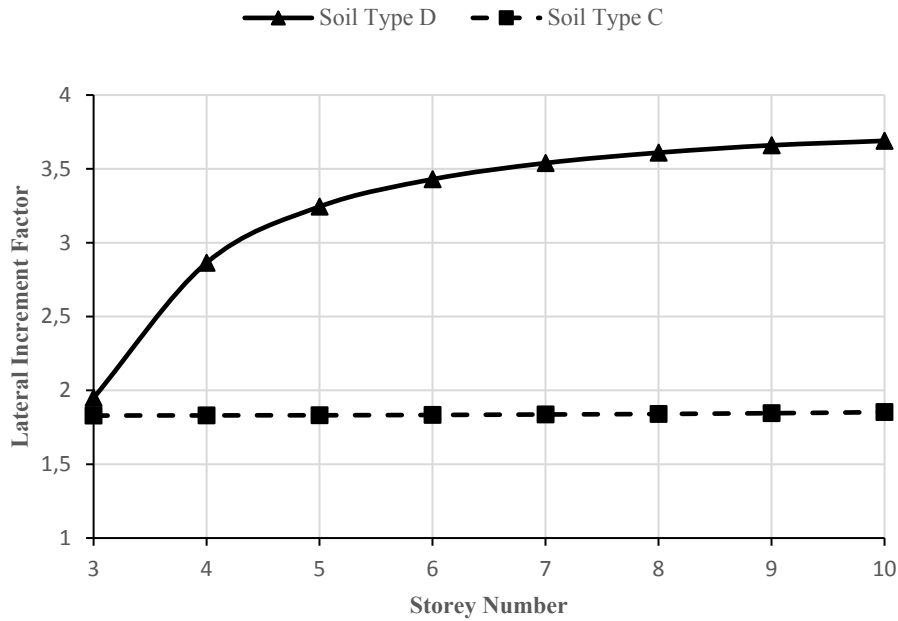
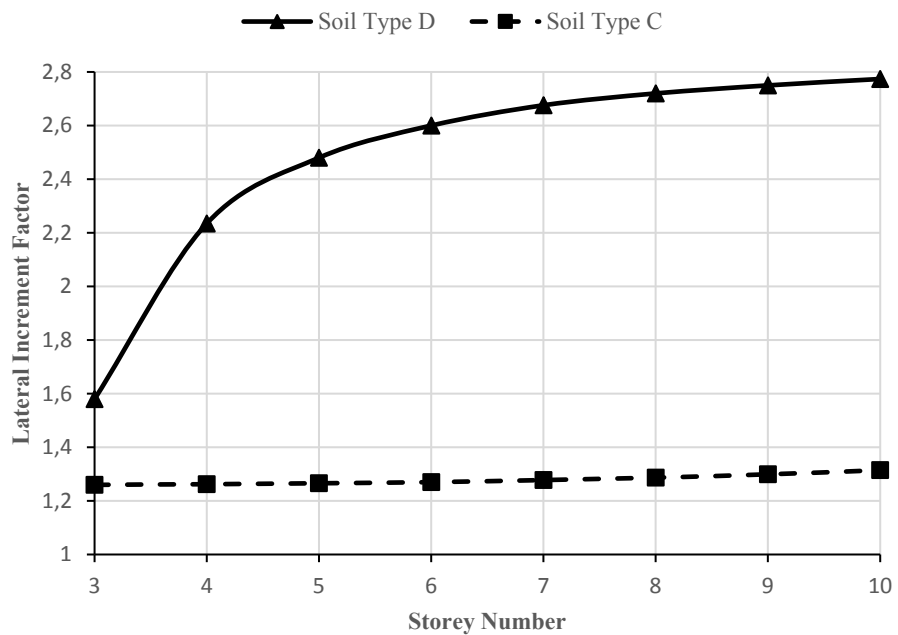


Figure 12. Maximum lateral deflection factor vs Storey number for Kobe earthquake  
Source: made by authors



**Figure 13.** Maximum lateral deflection factor vs Storey number for El Centro earthquake  
 Source : made by authors



**Figure 14.** Maximum lateral deflection factor vs Storey number for Gorkha earthquake  
 Source : made by authors

From Eqs. (10) the lateral increment factor can be derived. Among the considered three pairs of ground acceleration data, the maximum value of the lateral increment factor was obtained for Kobe.

The top deflection of each model was used to calculate the lateral increment factor by curve fitting techniques. The calculated  $\beta$  values along  $X$ -direction is greater than that of  $Y$ -direction. The maximum response value of selected earthquake pairs was incorporated, hence the values along  $X$ -direction are recommended in the simplified procedure. The incremental factor increased nonlinearly with storey height.

#### 4. Conclusion

This study aims to assess the influence of soil-structure interaction on the seismic behavior of reinforced concrete frame buildings. A set of forty-eight mid-rise building models with varying heights (ranging from 3 to 10 stories) were analyzed using linear dynamic analysis. These models were located on soft, medium, and hard soil conditions.

The structural response with and without considering soil-structure interaction was evaluated in terms of fundamental time period, stiffness, base shear, storey drift, and storey displacement. The findings from the analysis led to the following conclusions:

1. Incorporating soil flexibility led to a decrease in the base shear. This decrease was attributed to an increase in the structure's effective damping ratio and natural time period. Consequently, buildings with fixed bases exhibited higher base shear, while those situated on soft soil displayed the least base shear.

2. The fundamental time period of the structures decreased with higher soil spring stiffness. Soil-structure interaction significantly influenced the lateral stiffness of the structural system. Buildings with fixed base systems demonstrated longer time periods compared to those on soft soil.

3. Structures with flexible bases exhibited greater displacement compared to fixed base systems. This trend was consistent for inter-storey drift ratios across various building models. Inter-storey drift ratios were higher on soft soil and lowest for buildings with fixed bases. This effect was attributed to lower stiffness in soft soil conditions.

#### References

1. Dizhur D., Dhakal R.P., Bothara J., Ingham J.M. Building typologies and failure modes observed in the 2015 Gorkha (Nepal) earthquake. *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*. 2016;49:211–232.
2. Tabatabaiefar H.R., Fatahi B., Samali B. Seismic behavior of building frames considering dynamic soil-structure interaction. *International Journal Of Geomechanics*. 2013;3(4):409–420. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000231](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000231)
3. Stewart J.P., Seed R.B., Fenves G.L. Seismic soil-structure interaction in buildings. I: Analytical methods. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 1999;125(1):26–37. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1090-0241\(1999\)125:1\(26\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0241(1999)125:1(26))
4. Tabatabaiefar H.R., Clifton T. Significance of considering soil-structure interaction effects on seismic design of unbraced building frames on soft soils. *Australian Geomechanics*. 2016;51(1):55–64.
5. Tabatabaiefar S.H.R. Determining seismic response of mid-rise building frames considering dynamic soil-structure interaction. *Phd Thesis University of Technology Sydney (UTS)*. Sydney, 2012.
6. Ganainy H.E., Naggat M.E. Seismic performance of three-dimensional frame structures with underground stories. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2009;29(9):1249–1261. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2009.02.003>
7. Wolf J.P. Soil-structure-interaction analysis in time domain. *Nuclear Engineering and Design*. 1987;111;(3):381–393. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(89\)90249-5](https://doi.org/10.1016/0029-5493(89)90249-5)
8. Wolf J.P. *Dynamic soil-structure interaction*. Prentice Hall Publ.; 1985.
9. Veletsos A.S., Meek J.W. Dynamic behaviour of building-foundation systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 1974;3:121–138. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290030203>
10. Asli S.J., Saffari H., Zahedi M.J., Saadatinezhad M. Comparing the performance of substructure and direct methods to estimate the effect of SSI on seismic response of mid-rise structures. *International Journal of Geotechnical Engineering*. 2019;15(1):81–94. <https://doi.org/10.1080/19386362.2019.1597560>
11. Bohora P., Ghimire S. Analysis of Shallow Seismic Waves to determine geo-technical characterization of major earthquake affected sites of Kathmandu valley. *Proceedings of IOE Graduate Conference*. 2015:63–68.
12. Gaha T.B., Bhusal B., Paudel S., Saru S. Investigation of ground response analysis for Kathmandu valley: a case study of Gorkha earthquake. *Arabian Journal of Geosciences*. 2022;15:1354. <https://doi.org/10.1007/s12517-022-10597-2>
13. Raheem S.E.A., Ahmed M.M., Alazrak T.M.A. Evaluation of soil–foundation–structure interaction effects on seismic response demands of multi-story MRF buildings on raft foundations. *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2015;7:11–30. <https://doi.org/10.1007/s40091-014-0078-x>
14. Ghosh W.S. *Dynamic stress analysis of axisymmetric structures under arbitrary loading*. University of California, 1971.
15. Ouanani M., Tiliouine B. Effects of foundation soil stiffness on the 3-D modal characteristics and seismic response of a highway bridge. *KSCIE Journal of Civil Engineering*. 2015;19:1009–1023. <https://doi.org/10.1007/s12205-013-0435-5>
16. Jeremic B., Jie G., Preisig M., Tafazzoli N. Time domain simulation of soil–foundation–structure interaction in non-uniform soils. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 2009;38(5):699–718. <https://doi.org/10.1002/eqe.896>

17. Jingbo L., Yixin D., Xiuli D., Zhenyu W., Jun W. 3D viscous-spring artificial boundary in time domain. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*. 2006;5:93–102. <https://doi.org/10.1007/s11803-006-0585-2>
18. Hokmabadi A.S., Fatahi B. Influence of foundation type on seismic performance of buildings considering soil–structure interaction. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016; 16(08):1550043-(1-29). <https://doi.org/10.1142/S0219455415500431>
19. Rayhani M.H.T., Asce S.M., El Nagggar M.H. Numerical modeling of seismic response of rigid foundation on soft soil. *International Journal of Geomechanics*. 2008;8(6). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1532-3641\(2008\)8:6\(336\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1532-3641(2008)8:6(336))
20. Algreane G.A., Osman S.A., Karim O., Kasa A. Behavior of elevated concrete water tank subjected to artificial ground motion. *Electron J. Geotech Eng. EJGE*. 2011;16:387-406.
21. Zhang X., Far H. Seismic behaviour of high-rise frame-core tube structures considering dynamic soil–structure interaction. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2022;20(1):5073–5105. <https://doi.org/10.1007/s10518-022-01398-9>
22. Gazetas G., Mylonakis G. Seismic Soil-Structure Interaction: New Evidence and Emerging Issues. *Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics III*. 1998;2(75):1119–1174.
23. Samali B., Fatahi B., Tabatabaiefar H.R. Seismic behaviour of concrete moment resisting buildings on soft soil considering soil-structure interaction. *Incorporating Sustainable Practice in Mechanics of Structures and Materials: Proceedings of the 21st Australian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, Held in Melbourne, Australia, 7-10 December 2010*. 2011:407–412. <https://doi.org/doi:10.1201/b10571-72>

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ  
THEORY OF ELASTICITYDOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-577-582  
UDC 531:539.3  
EDN: TMWUVY

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Experimental-Theoretical Method for Assessing the Stiffness  
and Adhesion of the Coating on a Spherical SubstrateSamat N. Yakupov<sup>1</sup>  , Gabdrauf G. Gumarov<sup>1,2</sup> , Nukh M. Yakupov<sup>1</sup> <sup>1</sup> Federal Research Center «Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences», Kazan, Russian Federation<sup>2</sup> E.K. Zavoisky Physical-Technical Institute, Kazan, Russian Federation✉ [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

## Article history

Received: July 11, 2023  
Revised: September 12, 2023  
Accepted: September 21, 2023

## Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

## Authors' contribution

Undivided co-authorship.

**Abstract.** Known methods and approaches are ineffective or not applicable at all in the study of mechanical characteristics and adhesion of coatings of complex structure, initially formed on non-planar surfaces. A device has been developed that includes fragments of spherical substrates with rings for mounting along the contour, a pressure source of the working medium with a pressure gauge, a line with a valve for supplying the working medium, a measuring complex and a line for etching the working medium. In a fragment of a spherical substrate there is a small diameter hole, in the area of which a cover is formed according to a given technology. The working medium is fed through a small hole in the tray. A segment of the coating detached from the substrate forms a dome in the form of an ellipsoid fragment. A numerical model of deformation of a coating fragment in the form of a spherical segment with a complex contour is being developed using well-known software complexes. At each step of loading by the “targeting” method, varying the modulus of elasticity and the Poisson’s ratio, we approach the parameters of the experimental dome and determine the actual mechanical and stiffness properties of the coating under study. We calculate the normal separation forces through the radial forces determined by the current numerical model, and then determine the coupling stresses. The developed experimental-theoretical method is an effective tool for evaluating the mechanical properties and stiffness of coatings of complex structure, as well as the adhesion of the coating to a spherical substrate.

**Keywords:** complex structure, adhesive, coating stiffness, adhesion stresses

## For citation


Yakupov S.N., Gumarov G.G., Yakupov N.M. Experimental-theoretical method for assessing the stiffness and adhesion of the coating on a spherical substrate. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):577–582. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-577-582>

**Samat N. Yakupov**, PhD in Technical Sciences, senior researcher, Federal Research Center «Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences», Institute of Mechanics and Engineering, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0047-3679; E-mail: [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

**Gabdrauf G. Gumarov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Radiation Chemistry and Radiobiology, E.K. Zavoisky Physical-Technical Institute, Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation; Senior Researcher, Federal Research Center «Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences», Institute of Mechanics and Engineering, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6803-2330; E-mail: [ifoggg@gmail.com](mailto:ifoggg@gmail.com)

**Nukh M. Yakupov**, Dr. Sci. (Eng.), leading researcher, Federal Research Center «Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences», Institute of Mechanics and Engineering, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8248-1589; E-mail: [yzsrr@mail.ru](mailto:yzsrr@mail.ru)

© Yakupov S.N., Gumarov G.G., Yakupov N.M., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Экспериментально-теоретический метод оценки жесткости и адгезии покрытия на сферической подложке

С.Н. Якупов<sup>1</sup>  , Г.Г. Гумаров<sup>1,2</sup> , Н.М. Якупов<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Казанский научный центр РАН», Казань, Российская Федерация

<sup>2</sup> Казанский физико-технический институт имени Е.К. Завойского, Казань, Российская Федерация

✉ [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

## История статьи

Поступила в редакцию: 11 июля 2023 г.

Доработана: 12 сентября 2023 г.

Принята к публикации: 21 сентября 2023 г.

## Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

**Аннотация.** Известные методы и подходы, исходно сформированные на неплоских поверхностях, малоэффективны или вовсе неприменимы при исследовании механических характеристик и адгезии покрытий сложной структуры. Разработано устройство, включающее фрагменты сферических подложек с кольцами для крепления по контуру, источник давления рабочей среды с манометром, магистралью с вентилем для подачи рабочей среды, измерительного комплекса и магистрали для травления рабочей среды. Во фрагменте сферической подложки имеется отверстие малого диаметра, в области которого формируют покрытие по заданной технологии. Через небольшое отверстие в подложке подается рабочая среда. Оторванный от подложки сегмент покрытия образует купол в виде фрагмента эллипсоида. Разрабатывается численная модель деформирования фрагмента покрытия в виде шарового сегмента со сложным контуром, используя известные программные комплексы. На каждом шаге нагружения методом «пристрелки», варьируя модулем упругости и коэффициентом Пуассона, приближаемся к параметрам экспериментального купола и определяем актуальные механические и жесткостные свойства исследуемого покрытия. Вычисляем нормальные усилия отрыва через радиальные усилия, определенные по актуальной численной модели, и определяем далее напряжения сцепления. Разработанный экспериментально-теоретический метод является эффективным инструментом оценки механических свойств и жесткости покрытий сложной структуры, а также адгезии покрытия к сферической подложке.

**Ключевые слова:** сложная структура, адгезив, жесткость покрытия, напряжения сцепления

## Для цитирования

Yakupov S.N., Gumarov G.G., Yakupov N.M. Experimental-theoretical method for assessing the stiffness and adhesion of the coating on a spherical substrate // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 6. С. 577–582. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-577-582>

## 1. Introduction

One of the most developed approaches for protecting surfaces from environmental influences is coating. Surface coatings are widely used in all branches of production and life [1–3]. They provide protection and insulation of the surface of structures operating in various environments and under the influence of various physical fields.

Based on the operating conditions, various coatings and adhesives of complex structure are developed, providing the necessary qualities [4–8]. Active work is underway to create functional and intelligent coatings for corrosion protection [9–15].

**Якупов Самат Нухович**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Федеральное исследовательское учреждение «Казанский научный центр РАН», Институт механики и машиностроения, Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-0047-3679; E-mail: [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

**Гумаров Габдрауф Габдрашитович**, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией радиационной химии и радиобиологии, Казанский физико-технический институт имени Е.К. Завойского, Казань, Российская Федерация; старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения, Казань, Федеральное исследовательское учреждение «Казанский научный центр РАН», Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-6803-2330; E-mail: [ifoggg@gmail.com](mailto:ifoggg@gmail.com)

**Якупов Нух Махмудович**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Федеральное исследовательское учреждение «Казанский научный центр РАН», Институт механики и машиностроения, Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-8248-1589; E-mail: [yzsrr@mail.ru](mailto:yzsrr@mail.ru)

During the operation of structures, protective coatings fail first of all, which can lead to serious consequences, in particular, to intensive corrosion wear of the bearing elements of the structure. When choosing a coating, adhesive and its application technology, questions arise related to determining their necessary parameters, evaluating their mechanical properties and their service life depending on operating conditions.

*Methods for evaluating the mechanical properties of coatings.* Various approaches are used to study the mechanical characteristics of coatings [6–8]. The indenter method [16], which allows determining the properties of a material in the vicinity of a given point, has become widely used. There are studies based on the molecular approach [17], in which difficulties arise in describing the structure of the coating at the molecular level. However, for coatings of complex structure, the indenter method and the molecular approach are ineffective. There is a large variation in the results of the study by the standard uniaxial tensile testing method of coatings of a complex structure in the shape of a rectangle based on the Russian state standard GOST 14236-81. Polymer films. Tensile Test Method; ASTM D 412-41.

An effective approach to assessing the mechanical properties of films is the experimental — theoretical ETM method [18], which allows evaluating the integral properties of coatings. ETM is based on the synthesis of experimental data and relations from the theory of thin shells. Figure 1 shows a diagram of the device. The installation allows testing of round-shaped samples in plan.

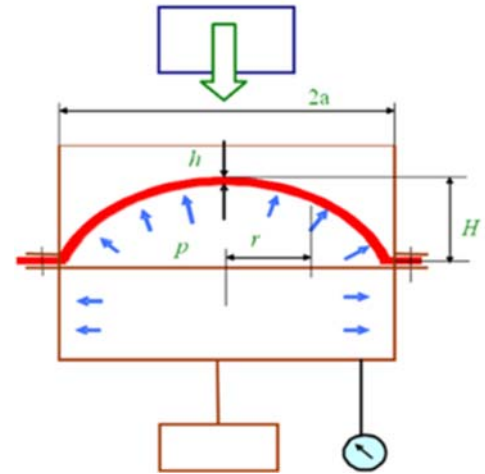
The sample is placed on the device, loaded with a uniform surface pressure  $p$  and the form of deformation of the sample is monitored. The dependence “pressure  $p$  — deflection  $H$ ” is obtained from the experiment, and then, using the relations of the theory of shells, the mechanical properties of the coating are determined [18].

*Methods for assessing the adhesion of coatings.* Various methods have been developed to determine the adhesion strength of the coating to the substrate. There are, for example, USSR copyright certificate No. 183459; RF patents No. 689411, No. 2207544. These developments have some disadvantages, in particular, technological difficulties and do not provide the necessary accuracy. A method is known for estimating the adhesion of an elastic coating to a substrate based on the parameters of the “bubble” [19].

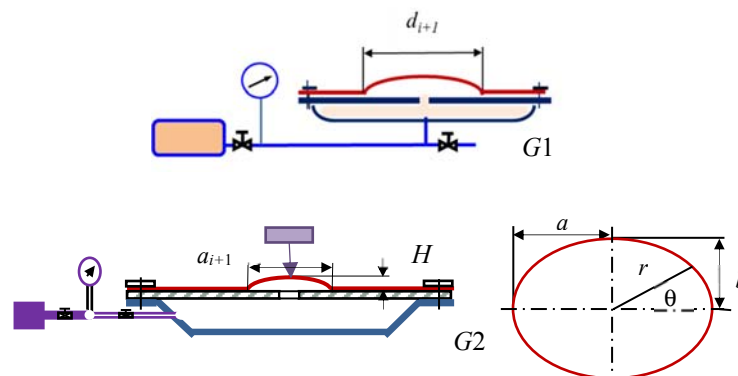
A method has been developed for determining the adhesion of rigid and flexible coatings to the substrate (RF Patent No. 2421707), which allows assessing the adhesive properties taking into account the mechanical characteristics and thickness of the coating (Figure 2). At the same time, the spread of results is reduced.

Modern coatings have a complex structure and are formed, as a rule, directly on the surfaces of structures of various shapes, in particular, on cylindrical, spherical and toroidal surfaces [20]. Known methods and approaches are ineffective or completely inapplicable in the study of the mechanical characteristics of coatings of complex structure, initially formed on non-planar surfaces.

The purpose of this work is to develop an effective tool for determining the stiffness properties of coatings of complex structure and adhesive on a spherical substrate.



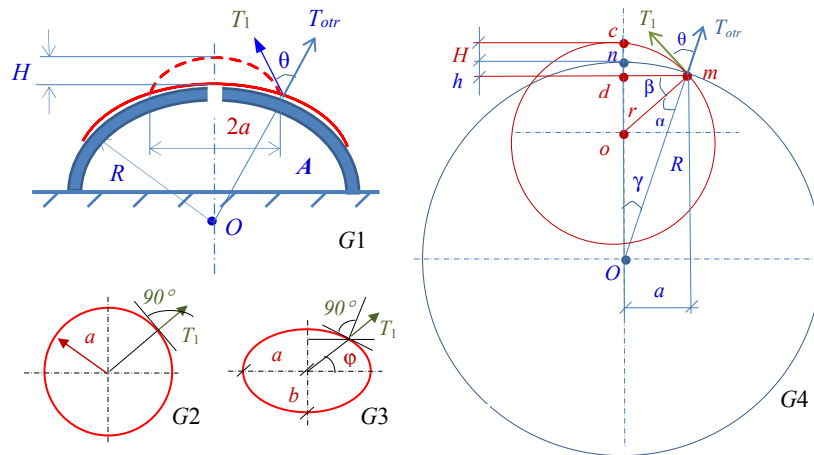
**Figure 1.** Fragment and installation diagram  
Source: made by N.M. Yakupov



**Figure 2.** Installation diagrams: G1 — for rigid coatings; G2 — for flexible coatings  
Source: made by N.M. Yakupov

## 2. Method for assessing the adhesion of the coating on a spherical substrate

The test device consists of a set of fragments of spherical substrates of various diameters, a pressure source of the working medium with a pressure gauge, a line with a valve for supplying the working medium, a measuring complex and a line for etching the working medium. There is a small diameter hole in the substrate, in the area of which a coating is formed according to a given technology. A fragment of the installation diagram is shown in Figure 3.



**Figure 3.** Diagram of the experimental setup (G1); dome parameters: the base of the spherical segment (G2), the base of the ellipsoid fragment in plan (G3), the diametrical section of the spherical segment (G4)

Source: made by N.M. Yakupov

*The algorithm of the method.* During the experiment, the working medium, in particular, air, is smoothly fed into the inner cavity of the spherical substrate — cavity A (Figure 3, G1). When the pressure reaches a certain value, the coating slowly comes off. At the same time, a dome is formed. In the simplest case, a dome is formed in the form of a spherical segment with radius  $r$  (axisymmetric variant) with a flat base in the form of a circle with radius  $a$  (Figure 3, G2). In a more general case, a dome is formed that is close in shape to an ellipsoid fragment; at the same time, the base of the dome is a spatial curve lying on a spherical surface of radius  $R$  and having in plan a shape close to an ellipse with semi-axes  $a$  and  $b$  (Figure 3, G3).

At the first stage, the stiffness property of the coating is investigated. At each step of loading  $p$ , the form of deformation of the coating under pressure  $p$  is monitored, the dome parameters are measured:  $a$ ,  $b$  and  $H$ . Next, numerical models of deformation of a coating fragment in the form of a spherical segment with radius  $r$ , in a particular case, or in the form of an ellipsoid fragment having a shape close to an ellipse with semi-axes  $a$  and  $b$  are developed. In this case, either well-known software systems, for example, ANSYS, or a spline version of the finite element method (CB FEM) are used [21; 22].

At each step of loading  $p$  by the “targeting” method, varying the properties of the material, for example, for an elastic coating with the elastic modulus  $E_j$  and the Poisson's ratio  $\nu_j$ , we approach the dome parameters corresponding to the experimental parameters  $a$ ,  $b$  and  $H$ . The mechanical parameters  $E$  and  $\nu$ , at which the maximum approximation of the numerical model to the experimental shape of the dome is observed, characterize the actual mechanical properties of the coating under study. Further, if necessary, it is possible to calculate the stiffness of the coating for stretching  $B$  and bending  $D$ :

$$B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (1)$$

Thus, we determine the actual mechanical properties of the coating under study and determine the stress-strain state of the coating. At the same time, special attention is paid to the determination of tangential forces  $T_1$  and deformation of the coating, in the radial (normal)  $\epsilon_1$  and tangential  $\epsilon_2$  directions near the contour of the dome.



At the second stage, we investigate the adhesive properties of the coating to the spherical surface of the substrate. Based on the radial forces

At the second stage, we investigate the adhesive properties of the coating to the spherical surface of the substrate. Based on the radial forces  $T_1$  obtained at the first stage, we determine the normal separation forces  $T_{otr}$ .

For a dome in the form of a spherical segment, based on Figure 3, the separation forces are the same along the entire contour and can be determined by the formula:

$$T_{otr} = T_1 \frac{2a(H+R-\sqrt{R^2-a^2})(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2})}{R[(H+R-\sqrt{R^2-a^2})^2+a^2]}. \quad (2)$$

For the more general case, the contour separation forces vary depending on the parameters  $a$  and  $b$ . However, if we take into account that the maximum forces of separation of the coating will be in the area of the small semi-axis  $b$ , then the separation forces can be determined by the formula:

$$T_{otr} = T_1 \frac{2b(H+R-\sqrt{R^2-b^2})(\sqrt{R^2-b^2}-\sqrt{r^2-b^2})}{R[(H+R-\sqrt{R^2-b^2})^2+b^2]}. \quad (3)$$

Further, according to certain normal separation forces  $T_{otr}$ , determine the coupling tension  $\eta_{otr}$  by the formula:

$$\eta_{otr} = \frac{T_{otr}}{h_0(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}. \quad (4)$$

Performing the procedure for calculating the coupling voltage  $\eta_{otr}(p_i)$  according to this algorithm for a number of pressures  $p_i$  ( $i = 1 \div n$ ), we determine the average values  $\eta_{otr-sr}$  by the formula:

$$\eta_{otr-sr} = (\sum \eta_{otr}(p_i)) / n. \quad (5)$$

### 3. Conclusion

1. A coating of a complex structure, initially formed on a fragment of a spherical substrate, is investigated. The working medium was fed through a small hole in the substrate. A segment of the coating torn from the substrate formed a dome in the form of an ellipsoid fragment.

2. A numerical model of deformation of a coating fragment in the form of a spherical segment has been developed using well-known software systems. At each step of loading by the “targeting” method, varying the modulus of elasticity and the Poisson’s ratio, when approaching the parameters of the experimental dome, the actual mechanical and stiffness properties of the coating under study were determined. According to the radial forces determined by the current numerical model, the normal separation forces are calculated and the coupling stresses are determined.

The developed experimental-theoretical method is an effective tool for assessing the mechanical properties and rigidity of coatings of complex structure, as well as the adhesion of the coating to a spherical substrate.

### References / Список литературы

1. Dry C. Procedures developed for self-repair of polymeric matrix composite materials. *Composite Structures*. 1996;35(3):263–269. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(96\)00033-5](https://doi.org/10.1016/0263-8223(96)00033-5)
2. Montemor M.F. Functional and smart coatings for corrosion protection: A review of recent advances. *Surface and Coatings Technology*. 2014;258:17–37. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.06.031>
3. Yakupov S.N., Yakupov N.M. Research of mechanical characteristics thin coating. *Scientific Technical Conference on Low Temperature Plasma during the Deposition of Functional Coatings 5–8 November 2018, Kazan University, Kazan, Russian Federation. Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1328:012103. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1328/1/012103>

4. Sripada J.V.S.N., Saha D.C., Saha G.C., Jahed H. Bonding mechanism and microstructural evolution in mechanically alloyed nanodiamond-reinforced Al6061 composite particle deposits in cold spray. *Surface and Coatings Technology*. 2023;466:129611. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2023.129611>
5. Bochenek K., Węglewski W., Morgiel J., Basista M. Influence of rhenium addition on microstructure, mechanical properties and oxidation resistance of NiAl obtained by powder metallurgy. *Materials Science and Engineering: A*. September 2018;735:121–130. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2018.08.032>
6. Liu S., Wu H., Xieetal X. Tribological properties of cold-sprayed 7075Al coatings reinforced with hybrid nano-TiB<sub>2</sub>/micro-SiC particles. *Surface and Coatings Technology*. 2023;458:129323. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2023.129323>
7. Maurya S.S., Pandey K.K., Sharma S., Kumari S., Mirche K.K., Kumar D., Pandey S.M., Keshri A.K. Microstructural, mechanical and tribological behavior of nanodiamonds reinforced plasma sprayed nickel-aluminum coating. *Diamond and Related Materials*. 2023;133:109714. <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2023.109714>
8. Awotunde M.A., Olubambi P.A., Chen D. Compressive deformation behaviour and toughening mechanisms of spark plasma sintered NiAl-CNT composites. *Ceramics International*. 2022;48(11):16072–16084. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.02.153>
9. Ahmad S., Gupta A.P., Sharmin E., Alam M., Pandey S.K. Synthesis, characterization and development of high performance siloxane-modified epoxy paints. *Progress in Organic Coatings*. 2005;54(3):248–255. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2005.06.013>
10. Qian M., Soutar A.M., Tan X.H., Zeng X.T., Wijesinghe S.L. Two-part epoxy-siloxane hybrid corrosion protection coatings for carbon steel. *Thin Solid Films*. 2009;517(17):5237–5242. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2009.03.114>
11. Xue D., Van Ooij W.J. Corrosion performance improvement of hot-dipped galvanized (HDG) steels by electro-deposition of epoxy-resin-ester modified bis-[tri-ethoxy-silyl] ethane (BTSE) coatings. *Progress in Organic Coatings*. 2013;76(7-8):1095–1102. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2013.03.004>
12. Diaz I., Chico B., de la Fuente D., Simancas J., Vega J.M., Morcillo M. Corrosion resistance of new epoxy-siloxane hybrid coatings. A laboratory study. *Progress in Organic Coatings*. 2010;69(3):278–286. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2010.06.007>
13. Holness R.J., Williams G., Worsley D.A., McMurray H.N. Polyaniline Inhibition of Corrosion-Driven Organic Coating Cathodic Delamination on Iron. *Journal of The Electrochemical Society*. 2005;152(2):B73. <https://doi.org/10.1149/1.1850857>
14. Hosseini M.G., Jafari M., Najjar R. Effect of polyaniline–montmorillonite nanocomposite powders addition on corrosion performance of epoxy coatings on Al 5000. *Surface and Coatings Technology*. 2011;206(2–3):280–286. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2011.07.012>
15. Zhang X., He Q., Gu H., Colorado H.A., Wei S., Guo Z. Flame-retardant electrical conductive nanopolymers based on bisphenol F epoxy resin reinforced with nano polyanilines. *ACS Application. Material. Interfaces*. 2013;5:898–910. <https://doi.org/10.1021/am302563w>
16. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*. 1992;7:1564–1583. <https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
17. Yanovsky Yu.G., Nikitina E.A., Nikitin S.M., Karnet Yu.N. Quantum mechanical studies of the mechanism of deformation of carbon nanotubes. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2009;15(3):345–368. (In Russ.)  
*Яновский Ю.Г., Никитина Е.А., Никитин С.М., Карнет Ю.Н.* Квантово-механические исследования механизма деформации углеродных нанотрубок // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2009. Т. 15. № 3. С. 345–368.
18. Galimov N.K., Yakupov N.M., Yakupov S.N. Experimental-Theoretical Method for Determining Mechanical Characteristics of Spherical Films and Membranes of Complex Structure. *Mechanics of Solids*. 2011;3:380–386. <https://doi.org/10.3103/S0025654411030058>
19. Taplin J. (ed.) *Fracture mechanics. The destruction of the materials*. Congressional reports, Waterloo. Canada, June 19–24, 1977. Moscow: Mir Publ.; 1979. (In Russ.)  
*Тэплин Д.* (ред.) *Механика разрушения. Разрушение материалов*. М.: Изд-во Мир. 1979. 239 с.
20. Yakupov S.N., Gubaidullin R.I. Rigidity, adhesion and delamination of the coating in the “substrate — coating” system. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):204–214. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-204-214>
21. Якупов С.Н., Губайдуллин Р.И. Жесткость, адгезия и расслоение покрытия в системе «подложка-покрытие» // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 3. С. 204–214. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-204-214>
22. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(9):2263–2271. <https://doi.org/10.1134/S1995080221090316>

## ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК THEORY OF THIN SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-583-592

UDC 539.3


EDN: TSSFHP

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Buckling of Steel Conical Panels Reinforced with Stiffeners

Alexey A. Semenov  , Lidia N. Kondratieva , Vladimir N. Glukhikh 

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, *Saint Petersburg, Russian Federation*

 sw.semenov@gmail.com

#### Article history

Received: September 5, 2023

Revised: November 17, 2023

Accepted: November 25, 2023

#### Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

#### Authors' contribution

Undivided co-authorship.

**Abstract.** Conical shells and their panels are important elements of building structures, but have not been studied sufficiently. This paper explores buckling of truncated steel conical panels reinforced with an orthogonal grid of stiffener plates. The panels are simply supported and are subjected to external uniformly distributed transverse load acting normal to the surface. A geometrically nonlinear mathematical model that takes into account lateral shearing is used. Two options of describing the effect of stiffener plates are considered: the refined discrete method and the method of structural anisotropy (the stiffness of the plates is “smeared”). The computational algorithm is based on the Ritz method and the method of continuing the solution using the best parameter. The algorithm is implemented using Maple analytical computing software. The values of critical buckling loads were obtained for two cases of conical panels with different stiffener options. The load-deflection curves are presented. The convergence of the methods for describing the effect of stiffeners with the increase in their number is discussed. It was found that for conical panels, when choosing a small number of unknown coefficients in the approximation, the value of the critical load may be “overshot”, and it is necessary to select a larger number of unknowns compared to cylindrical panels or flat shells of double curvature.


**Keywords:** shells, conical panels, buckling, stiffeners, Ritz method, refined discrete method, structural anisotropy method

#### For citation

Semenov A.A., Kondratieva L.N., Glukhikh V.N. Buckling of steel conical panels reinforced with stiffeners. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):583–592. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-583-592>

**Alexey A. Semenov**, Candidate of Technical Science, Associate Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9490-7364; E-mail: sw.semenov@gmail.com  
**Lidia N. Kondratieva**, Doctor of Technical Science, Professor of the Department of Geotechnical Engineering, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6174-5565; E-mail: kondratjevaln@yandex.ru  
**Vladimir N. Glukhikh**, Doctor of Technical Science, Professor of the Department of Structural Mechanics, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9912-506X; E-mail: vnglukhikh@mail.ru

© Semenov A.A., Kondratieva L.N., Glukhikh V.N., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Устойчивость стальных конических панелей, усиленных ребрами жесткости

А.А. Семенов , Л.Н. Кондратьева , В.Н. Глухих 

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,

Санкт-Петербург, Российская Федерация

✉ sw.semenov@gmail.com

### История статьи

Поступила в редакцию: 5 сентября 2023 г.

Доработана: 17 ноября 2023 г.

Принята к публикации: 25 ноября 2023 г.

### Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

**Аннотация.** Конические оболочки и их панели являются важными элементами строительных конструкций, однако изучены еще недостаточно. В работе представлено исследование устойчивости стальных усеченных конических панелей, подкрепленных ортогональной сеткой ребер жесткости. Конструкции закреплены шарнирно-неподвижно и находятся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки, действующей по нормали к поверхности. Используется геометрически нелинейная математическая модель, учитывающая поперечные сдвиги. Учет ребер жесткости рассматривается в двух вариантах: по уточненному дискретному методу и методу конструктивной анизотропии (жесткость ребер «размазывается»). Расчетный алгоритм основан на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру. Программная реализация выполнена в среде аналитических вычислений Maple. Для двух вариантов конических панелей получены значения критических нагрузок потери устойчивости при разных вариантах подкрепления ребрами жесткости. Показаны графики зависимостей «нагрузка — прогиб». Сделаны выводы о сходимости методов учета ребер жесткости при увеличении числа подкрепляющих элементов. Выявлено, что для конических панелей при выборе в аппроксимации малого числа неизвестных коэффициентов возможно «проскакивание» значения критической нагрузки и необходимо выбирать большее число неизвестных по сравнению с цилиндрическими панелями или пологими оболочками двойкой кривизны.

**Ключевые слова:** оболочки, конические панели, устойчивость, ребра жесткости, метод Ритца, уточненный дискретный метод, метод конструктивной анизотропии

### Для цитирования

Semenov A.A., Kondratieva L.N., Glukhikh V.N. Buckling of steel conical panels reinforced with stiffeners // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 6. С. 583–592. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-583-592>

## 1. Introduction

The analysis of deformation of thin-walled elements in structures is essential in various technical fields, including structural engineering. Thin-walled shell structures are used in constructing hangars, petroleum tanks, industrial reservoirs, as well as large span public facilities [1–5]. In analyzing such structures, special attention has to be given to buckling [6–9] and determining the critical loads. For example, H.M. Waqas et. al. [8] model the buckling process of shells with different dimensions and thickness using the first-order shear deformation

*Семенов Алексей Александрович*, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-9490-7364; E-mail: sw.semenov@gmail.com

*Кондратьева Лидия Никитовна*, доктор технических наук, профессор кафедры геотехники, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-6174-5565; E-mail: kondratjevaln@yandex.ru

*Глухих Владимир Николаевич*, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-9912-506X; E-mail: vnglukhikh@mail.ru

theory (FSDT). The program was developed in MATLAB environment. The results were compared with previous studies and FEM analysis.

Conical shells and their panels are common in building structures. However, they are more complex in terms of calculations compared to cylindrical or flat shells of double curvature. High-accuracy non-linear analysis of deformation of conical panels non-linearity is a topical problem [10–14].

S.N. Krivoshapko [1] points out that thin-walled structures are employed in construction in just about all countries, the difference generally being in the selected materials.

A. Sofiyev [12] presents an extensive review of studies on vibration and buckling of conical shells made of functionally graded materials (FGM). Therein, various design problems, for example, linear and non-linear vibrations and buckling due to different loadings and environments are discussed. The author highlights the potential of such structures in nuclear, space and marine engineering, electronics and biomedicine fields.

S.-R. Cho et. al. [14] conduct experimental and numerical investigations of the strength of steel conical shells under external hydrostatic pressure. Initial imperfections and other geometrical parameters were taken into account. The numerical analysis was performed using ABAQUS software.

Papers [12; 14–19] are devoted to buckling of conical panels. Article [15] contains a buckling analysis of truncated conical shells subjected to axial compression and uniform external pressure. The shells are reinforced by orthogonal stiffeners. The obtained equations are solved using the Galerkin method. The effect of material properties, dimensional parameters and stiffener plates on the buckling behavior of the shell is discussed.

A.K. Gupta et. al. [17] investigate progressive failure of multilayer conical panels under compression taking into account geometric non-linearity and damage propagation in the material. Non-linear equations are solved using the Newton–Raphson iterative method.

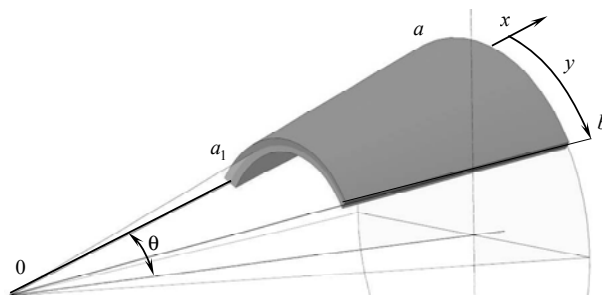
Using stiffener plates substantially increases the performance characteristics of shells. Such structures were studied, for example, in papers [20–23].

A.A. Dudchenko and V.N. Sergeev [24] present a mathematical model of the deformation of a stiffened conical shell. Nonlinear equilibrium equations for a shell stiffened by a discrete set of frames are derived using vector analysis. The shell and frame constitutive stiffness relationships are worked out.

The purpose of this study is to employ the previously developed mathematical models, analysis algorithm and the refined discrete method of accounting for the effect of stiffeners to evaluate buckling of conical shells and discuss their practical potential.

## 2. Methods

Let us consider a non-closed conical panel with segment angle  $b$  (Figure 1). The panel is simply supported along the contour and is subjected to uniform load  $q_0$ , which acts normal to the surface. Besides that, dead load is also taken into account. Thus, the total load along each axis of the local coordinate system is given by  $q = q_0 + q_{sv}$ ,  $P_x = P_{xsv}$ ,  $P_y = P_{ysv}$ .



**Figure 1.** Conical panel in the local coordinate system

Source: made by the authors

Let us use the geometrically non-linear mathematical model obtained in paper [25]. The model is based on the Timoshenko–Reissner hypotheses, considers lateral shearing and material orthotropy and allows to analyze shells of various shapes. Moreover, the model accounts for stiffening elements according to the refined discrete method (the contact of the shell and the stiffener occurs “along the strip”) and the structural anisotropy method

(smearing the stiffness of the stiffeners across the entire structure). Each of the many relationships of this model are not presented here, instead, let us only show the non-linear geometric relations and the full deformational potential energy functional:

$$E_s = E_s^0 + E_p^R, \tag{1}$$

where  $E_s^0$  is the part of the functional, which corresponds to the shell and the external force work:

$$E_s^0 = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[ N_x^0 \varepsilon_x + N_y^0 \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^0 + N_{yx}^0) \gamma_{xy} + M_x^0 \chi_1 + M_y^0 \chi_2 + (M_{xy}^0 + M_{yx}^0) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^0 (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^0 (\Psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW) \right] x \sin \theta dx dy, \tag{2}$$

and  $E_p^R$  is the part of the functional, which corresponds to the stiffeners:

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[ N_x^R \varepsilon_x + N_y^R \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^R (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^R (\Psi_y - \theta_2) \right] x \sin \theta dx dy. \tag{3}$$

The non-linear geometric relationships for conical panels have the following form:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{U}{x} - \frac{\text{ctg} \theta}{x} W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{V}{x} + \theta_1 \theta_2, \\ \theta_1 = - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \theta_2 = - \left( \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg} \theta}{x} V \right), \\ \chi_1 = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\Psi_x}{x}, \quad \chi_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \theta} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{\Psi_y}{x} \right], \tag{4}$$

where  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  are the strains along axes  $x, y$  of the middle surface;  $\gamma_{xy}$  is the shearing strain in plane  $xOy$ .

Functional (1) represents the difference of the potential energy of the system and the work of external loads  $P_x, P_y, q$ , and it is a function of five unknown displacement functions  $U, V, W, \Psi_x, \Psi_y$ .

According to the Lagrange variational principle, the equilibrium is reached when the energy is at minimum. For minimizing functional (1), let us use the Ritz method. For this purpose, the unknown functions are represented as a sum of products of the unknown numeric parameters and the basis functions:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^l, \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^l, \quad W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^l, \tag{5} \\ \Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xkl} X_4^k Y_4^l, \quad \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{ykl} X_5^k Y_5^l,$$

where  $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$  are the unknown coefficients;  $X_1^k - X_5^k, Y_1^l - Y_5^l$  are the known approximating functions of  $x$  and  $y$ , which satisfy boundary conditions at the contour of the shell;  $N = 1, 4, 9, 16, \dots$  is the number of decomposition terms.

With greater number of terms  $N$ , the solution accuracy increases, but the computational cost also rises.

By substituting expression (5) into functional (1), the functional is converted into a function, which has  $5N$  unknown parameters. Thus, we arrive at a function minimization problem: the derivatives with respect to all the unknown parameters need to be set to zero. As a result, we obtain a system of non-linear algebraic equations, the solution of which requires special techniques. The method of continuing the solution using the best parameter (the arc length of equilibrium states in multidimensional space) is recommended. A detailed description of this method for solving such class of problems is presented in [26].

The mathematical model and the algorithm are implemented using the Maple analytical computation software. All the relations in the program are defined with dimensionless parameters when performing the calculations.

### 3. Results and Discussion

Let us first consider truncated conical panels without stiffeners. Their geometric parameters, along with surface area  $S^0$  and volume  $V^0$  are given in Table 1.

Characteristics of the conical panels under consideration

Table 1

Case	Input data					Parameter	
	$h, m$	$a, m$	$b, rad$	$a_1, m$	$\theta, rad$	$S^0, m^2$	$V^0, m^3$
1	0.02	8	2.574	4	0.2618	16	0.32
2	0.01	25	$\pi$	5	0.78	663	6.63

Table 2 presents the critical buckling load for cases 1 and 2.

The panel material is S345 steel ( $E = 2.1 \cdot 10^5$  MPa,  $\mu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>).

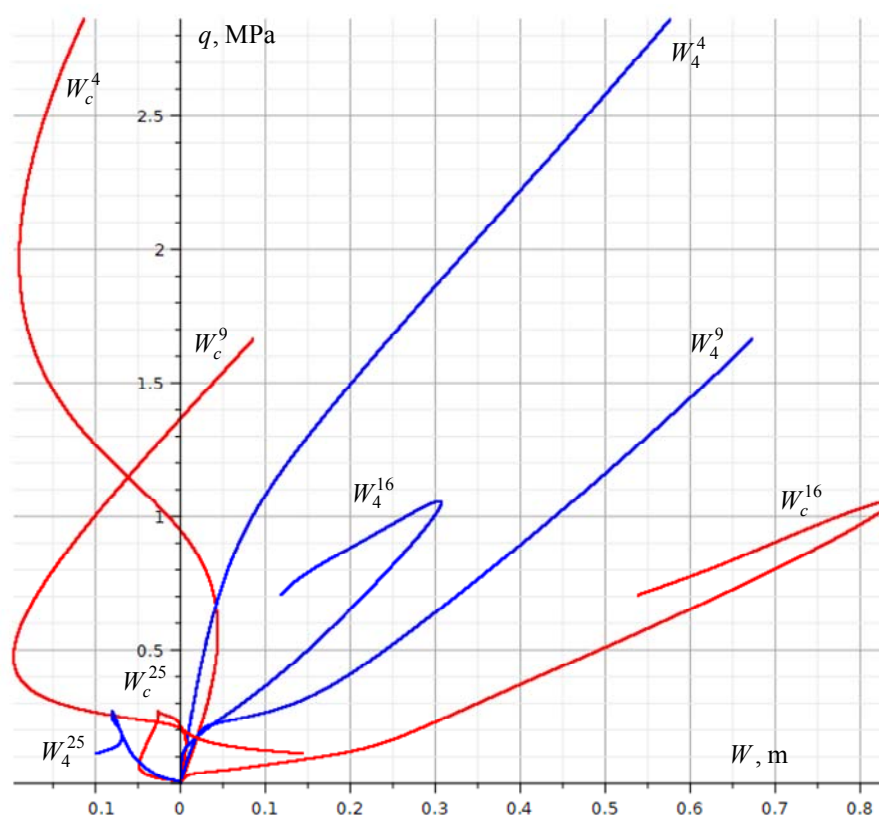
Critical buckling loads for steel conical panels (without stiffeners)

Table 2

Case	Material	$N$	Critical buckling load $q_{cr}, MPa$
1	Steel S345	9	+
		16	5.9667
2	Steel S345	4	+
		9	+
		16	1.0561
		25	0.2721

The convergence analysis of the Ritz method was performed by calculating the case 2 panel at different  $N$ . It showed that at small  $N$  the critical load cannot be traced, and it is necessary to retain at least 16 unknown variables for each unknown function.

Figure 2 demonstrates the load-deflection curves for the case 2 conical panel. As seen from the graph, the number of terms in the Ritz method has a significant effect on determining the critical load value. Moreover, it sometimes allows to find a point of local buckling before the global buckling.



**Figure 2.** Load-deflection curves for steel conical panel (case 2)  
 Source: made by the authors

Let us now consider conical panels with stiffeners. The orthogonal stiffener plate grid is located on the inside of the shell. The height and width of the plates are selected as  $h^i = h^j = 3h$ ,  $r_i = r_j = 2h$  respectively. The number of stiffeners is the same in both directions, increasing it by a factor of 2 or 4 for each new grid case.

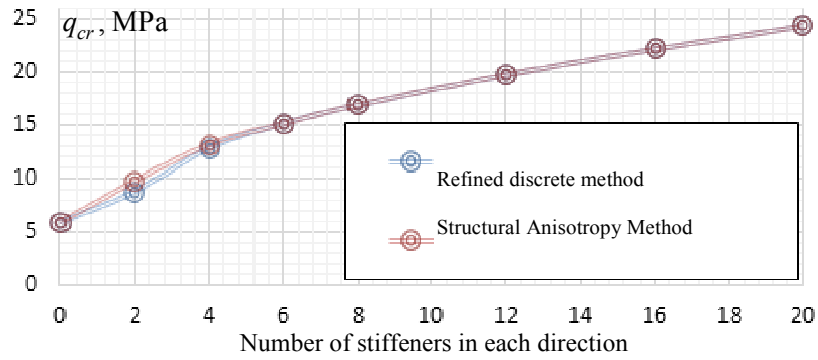
Table 3 shows the critical buckling loads for the considered steel conical panels. The distance between the stiffeners is denoted as  $x_r$ . The difference in the critical load values for the structural anisotropy method and the refined discrete method is given in percentage. These values are represented graphically in Figure 3.

Table 3

Values of critical buckling loads  $q_{cr}$  for conical panels

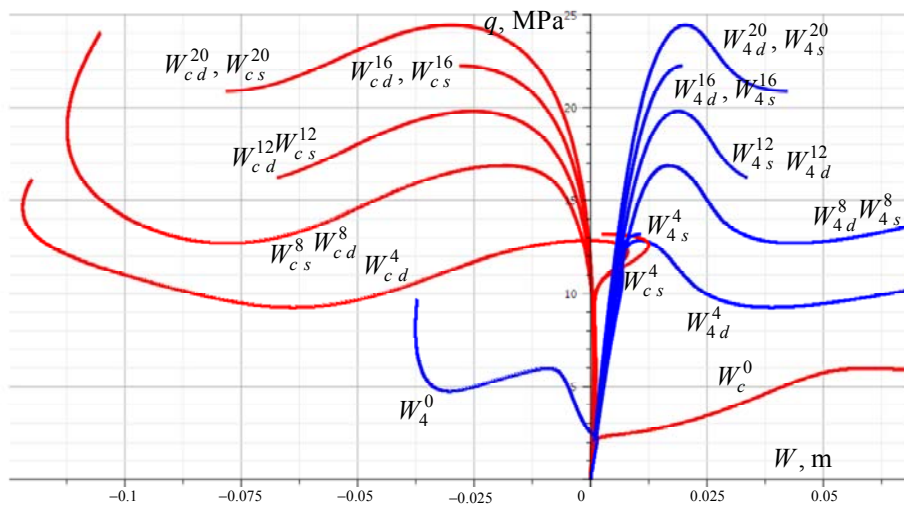
Method	N	$q_{cr}$ , MPa							
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
<b>Case 1</b>									
$x_r$ , m	–	–	1.96	0.98	0.65	0.49	0.32	0.24	0.19
Refined Discrete Method	9	+	+	15.43	17.01	18.59	21.50	24.10	26.47
	16	5.96	8.7915	12.84	15.16	16.88	19.79	22.23	24.40
Structural Anisotropy Method	9	+	+	15.42	17.02	18.60	21.51	24.11	26.48
	16	5.96	9.78	13.17	15.16	16.90	19.80	22.24	24.41
$ \Delta $ , %	9	+	+	0.09	0.02	0.06	0.05	0.03	0.03
	16	+	11.3	2.50	0	0.14	0.04	0.03	0.03





**Figure 3.** Comparison of methods for taking into account stiffeners for case 1 conical panel  
Source: made by the authors

Figure 4 shows the load  $q$  — deflection  $W$  relationship at different number of stiffeners for the case 1 panel. The curves for both the structural anisotropy method and the refined discrete method are given.



**Figure 4.** Load  $q$  — deflection  $W$  relationship at different numbers of stiffeners for the case 1 conical panel ( $N = 16$ )  
Source: made by the authors

#### 4. Conclusion

The object of this study is truncated conical panels reinforced with stiffeners.

The analysis methodology is based on the Ritz method, the method of continuing the solution using the best parameter, and the refined discrete method proposed earlier.

In the study, the mathematical model and analysis algorithm were adapted for a new class of problems. A corresponding program was implemented and computational experiments were carried out. As a result, the following conclusions can be drawn:

1. The presented approach can be applied to analyze conical plates with stiffeners and allows to study their buckling.

2. It can be seen from the obtained data for the case 1 panel, that the structural anisotropy method converges with the refined discrete method later than for the cylindrical panels studied previously by the authors. Possible

reasons may be that the conical panel has a more complex geometrical shape and is non-symmetrical, which requires to account for non-symmetrical terms in the approximation.

3. Increasing the number of terms in the approximation to  $N = 25$  leads to substantially greater computational cost (with the refined discrete method). However, it is reasonable to perform such analysis with the structural anisotropy method.

## References

1. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17:553–561. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>
2. Sysoeva E.V., Trushin S.I. History of the design and construction of circuses in Russia. *Construction and Reconstruction*. 2017:95–110. (In Russ.) EDN: ZAGQEN
3. Ren D., Qu Y., Yang L. The Analysis of wind vibration coefficient of long-span dome structures with different thickness. earth and space. *American Society of Civil Engineers*. 2012:1196–204. <https://doi.org/10.1061/9780784412190.130>
4. Razov I., Sokolov V., Dmitriev A., Ogorodnova J. Parametric vibrations of the underground oil pipeline. *E3S Web of Conferences*. 2022;363:01038. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236301038>
5. Karpov V., Kondratyeva L. Justification of Using Delta-Functions in the Theory of Shells Featuring Irregularities. *Applied Mechanics and Materials*. 2015;725–726:796–801. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.725-726.796>
6. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Begichev M.M. On the phenomenon of loss of stability of a longitudinally compressed circular cylindrical shell. Part I: On the post-critical equilibrium of the shell. *International Journal of Civil and Structural Analysis*. 2016;12:58–72. (In Russ.) <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2016-12-3-58-72>
7. Gelyukh P.A., Pashkov A.V., Ivanov S.A. Numerical study of the stability of a flat ribbed cylindrical shell using a variational-difference approach. *Natural and Technical Sciences*. 2021:187–95. (In Russ.) <https://doi.org/10.25633/ETN.2021.06.11>
8. Waqas H.M., Shi D., Khan S.Z., Helal M., Fathallah E. Analytical modeling of cross-ply cylindrical composite submersible shell with elastic buckling using first order shear deformation theory. *Frontiers in Materials*. 2022;9:1004752. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.1004752>
9. Taraghi P., Showkati H. Investigation of the Buckling Behavior of Thin-Walled Conical Steel Shells Subjected to a Uniform External Pressure. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*. 2019;43:635–648. <https://doi.org/10.1007/s40996-018-0213-1>
10. Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M., Pellicano F. On the buckling load estimation of grid-stiffened composite conical shells using vibration correlation technique. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2022;96:104667. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104667>
11. Salmanizadeh A., Kiani Y., Eslami M.R. Vibrations of functionally graded material conical panel subjected to instantaneous thermal shock using Chebyshev-Ritz route. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2022;144:422–432. <https://doi.org/10.1016/j.engabound.2022.08.040>
12. Sofiyev A.H. Review of research on the vibration and buckling of the FGM conical shells. *Composite Structures*. 2019;211:301–317. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.12.047>
13. Bakulin V.N. Model for a refined calculation of the stress-strain state of three-layer conical irregular shells of rotation. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2019;83:282–294. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0032823519020036>
14. Cho S.-R., Muttaqie T., Do Q.T., Park S.H., Kim S.M., So H.Y., et al. Experimental study on ultimate strength of steel-welded ring-stiffened conical shell under external hydrostatic pressure. *Marine Structures*. 2019;67:102634. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2019.102634>
15. Dung D.V., Chan D.Q. Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT. *Composite Structures*. 2017;159:827–841. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.006>
16. Karasev A.G. Initial imperfection influence on the buckling load of closed elastic isotropic shallow conical shells. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016;21:444–453. <https://doi.org/10.1177/1081286514526082>
17. Gupta A.K., Patel B.P., Nath Y. Progressive damage of laminated cylindrical/conical panels under meridional compression. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2015;53:329–341. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.05.013>
18. Shadmehri F., Hoa S.V., Hojjati M. Buckling of conical composite shells. *Composite Structures*. 2012;94:787–792. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.016>
19. Lavrenčič M., Brank B. Simulation of shell buckling by implicit dynamics and numerically dissipative schemes. *Thin-Walled Structures*. 2018;132:682–699. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.08.010>
20. Bakulin V.N., Nedbay A.Ya. Dynamic stability of a three-layer cylindrical shell, reinforced with annular ribs and a hollow cylinder, under the action of external pulsating pressure. *Reports of the Russian Academy of Sciences Physics, Technical Sciences*. 2021;498:46–52. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S2686740021030056>
21. Medvedsky A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V. Dynamics of a reinforced composite panel with mixed stacking of monolayers with internal damage under transient effects. *Bulletin of Bryansk State Technical University* 2019: 35–44. (In Russ.) [https://doi.org/10.30987/article\\_5d2d9231dd5853.89951988](https://doi.org/10.30987/article_5d2d9231dd5853.89951988)

22. Latifov F.S., Yusifov M.Z., Alizadeh N.I. Free vibrations of inhomogeneous orthotropic cylindrical shells reinforced with transverse ribs and filled with liquid. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020;61:198–206. (In Russ.) <https://doi.org/10.15372/PMTF20200321>
23. Kusyakov A.Sh. Probabilistic analysis of reinforced cylindrical composite shells. *Problems of Mechanics and Control: Nonlinear Dynamic Systems*. 2021:16–25. (In Russ.) EDN: DSTTWV
24. Dudchenko A.A., Sergeev V.N. Nonlinear equilibrium equations for a conical shell supported by a discrete set of frames. *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University Mechanics*. 2017:78–98. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.05>
25. Semenov A.A. A refined discrete method for calculating reinforced orthotropic shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2022:90–102. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.09>
26. Semenov A.A., Leonov S.S. Method of continuous continuation of the solution using the best parameter when calculating shell structures. *Scientists Notes of Kazan University Series: Physical and Mathematical Sciences*. 2019; 161:230–49. (In Russ.) <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2019.2.230-249>

### Список литературы

1. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021. Vol. 17. No. 6. P. 553–561. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>
2. Сыроева Е.В., Трушин С.И. История проектирования и строительства цирков России // *Строительство и реконструкция*. 2017. № 2 (70). С. 95–102. EDN: ZAGQEN
3. Ren D., Qu Y., Yang L. The Analysis of Wind Vibration Coefficient of Long-Span Dome Structures with Different Thickness // *Earth and Space*. American Society of Civil Engineers. 2012. P. 1196–1204. <https://doi.org/10.1061/9780784412190.130>
4. Razov I., Sokolov V., Dmitriev A., Ogorodnova J. Parametric vibrations of the underground oil pipeline // *E3S Web of Conferences*. 2022. Vol. 363. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236301038>
5. Karpov V., Kondratyeva L. Justification of Using Delta-Functions in the Theory of Shells Featuring Irregularities // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 725–726. P. 796–801. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.725-726.796>
6. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. О явлении потери устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки. Часть 1: О послекритическом равновесии оболочки // *Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*. 2016. Т. 12. № 3. С. 58–72. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2016-12-3-58-72>
7. Гелюх П.А., Пашков А.В., Иванов С.А. Численное исследование устойчивости пологой ребристой цилиндрической оболочки с применением вариационно-разностного подхода // *Естественные и технические науки*. 2021. № 6 (157). С. 187–195. <https://doi.org/10.25633/ETN.2021.06.11>
8. Waqas H.M., Shi D., Khan S.Z., Helal M., Fathallah E. Analytical modeling of cross-ply cylindrical composite submersible shell with elastic buckling using first order shear deformation theory // *Frontiers in Materials*. 2022. Vol. 9. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.1004752>
9. Taraghi P., Showkati H. Investigation of the Buckling Behavior of Thin-Walled Conical Steel Shells Subjected to a Uniform External Pressure // *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*. 2019. Vol. 43. No. 4. P. 635–648. <https://doi.org/10.1007/s40996-018-0213-1>
10. Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M., Pellicano F. On the buckling load estimation of grid-stiffened composite conical shells using vibration correlation technique // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2022. Vol. 96. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104667>
11. Salmanizadeh A., Kiani Y., Eslami M.R. Vibrations of functionally graded material conical panel subjected to instantaneous thermal shock using Chebyshev-Ritz route // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2022. Vol. 144. P. 422–432. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.08.040>
12. Sofiyev A.H. Review of research on the vibration and buckling of the FGM conical shells // *Composite Structures*. 2019. Vol. 211. P. 301–317. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.12.047>
13. Бакулин В.Н. Модель для уточненного расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных конических нерегулярных оболочек вращения // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83. № 2. С. 282–294. <https://doi.org/10.1134/S0032823519020036>
14. Cho S.-R., Muttaqie T., Do Q.T., Park S.H., Kim S.M., So H.Y., Sohn J.M. Experimental study on ultimate strength of steel-welded ring-stiffened conical shell under external hydrostatic pressure // *Marine Structures*. 2019. Vol. 67. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2019.102634>
15. Dung D.V., Chan D.Q. Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT // *Composite Structures*. 2017. Vol. 159. P. 827–841. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.006>

16. *Karasev A.G.* Initial imperfection influence on the buckling load of closed elastic isotropic shallow conical shells // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 21. No. 4. P. 444–453. <https://doi.org/10.1177/1081286514526082>
17. *Gupta A.K., Patel B.P., Nath Y.* Progressive damage of laminated cylindrical/conical panels under meridional compression // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2015. Vol. 53. P. 329–341. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.05.013>
18. *Shadmehri F., Hoa S.V., Hojjati M.* Buckling of conical composite shells // *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. No. 2. P. 787–792. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.016>
19. *Lavrenčič M., Brank B.* Simulation of shell buckling by implicit dynamics and numerically dissipative schemes // *Thin-Walled Structures*. 2018. Vol. 132. P. 682–699. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.08.010>
20. *Бакулин В.Н., Недбай А.Я.* Динамическая устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и пустотелым цилиндром, при действии внешнего пульсирующего давления // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2021. Т. 498. № 1. С. 46–52. <https://doi.org/10.31857/S2686740021030056>
21. *Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В.* Динамика подкрепленной композитной панели со смешанной укладкой монослоев с внутренними повреждениями при нестационарных воздействиях // *Вестник Брянского государственного технического университета*. 2019. № 7(80). С. 35–44. [https://doi.org/10.30987/article\\_5d2d9231dd5853.89951988](https://doi.org/10.30987/article_5d2d9231dd5853.89951988)
22. *Латифов Ф.С., Юсифов М.З., Ализаде Н.И.* Свободные колебания подкрепленных поперечными ребрами неоднородных ортотропных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // *Прикладная механика и техническая физика*. 2020. Т. 61. № 3(361). С. 198–206. <https://doi.org/10.15372/PMTF20200321>
23. *Кусяков А.Ш.* Вероятностный анализ подкрепленных цилиндрических оболочек из композитного материала // *Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы*. 2021. № 53. С. 16–25. EDN: DSTTWV
24. *Дудченко А.А., Сергеев В.Н.* Нелинейные уравнения равновесия конической оболочки, подкрепленной дискретным набором шпангоутов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2017. № 2. С. 78–98. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.05>
25. *Семенов А.А.* Уточненный дискретный метод расчета подкрепленных ортотропных оболочек // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2022. № 4. С. 90–102. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.4.09>
26. *Семенов А.А., Леонов С.С.* Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. 2019. Т. 161. № 2. С. 230–249. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2019.2.230-249>

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES


DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607

УДК 69.04

EDN: HIQWQW

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования

В.П. Агапов<sup>1</sup> , А.С. Маркович<sup>1,2</sup>  <sup>1</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация<sup>2</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация markovich-as@rudn.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 27 июля 2023

Доработана: 17 сентября 2023 г.

Принята к публикации: 3 октября 2023 г.

### Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### Вклад авторов

Нераздельное соавторство.


**Аннотация.** Разработан объемный конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования. При построении элемента в области напряженного состояния «сжатие — сжатие — сжатие» использован модифицированный критерий прочности Виллама — Варнке. Поведение бетона при растяжении принималось линейным вплоть до возникновения трещины. Современные строительные нормы и правила предписывают проводить расчеты бетонных и железобетонных конструкций в нелинейной постановке с учетом реальных свойств бетона и арматуры. В связи с этим разработана методика и построен объемный конечный элемент, адаптированный к ВК ПРИНС, позволяющий выполнять расчеты массивных железобетонных конструкций с учетом их действительной работы. Цель исследования — разработка методики расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, с учетом хрупкого разрушения сжатого бетона и трещинообразования в растянутом бетоне. Для верификации разработанного конечного элемента проведена серия тестовых расчетов балки, находящейся в условиях трехточечного изгиба. Сравнение результатов расчета с данными экспериментов, проведенных авторами, подтвердило высокую точность и достоверность полученных результатов. Разработанный объемный конечный элемент в составе ВК ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач, связанных с расчетами массивных железобетонных конструкций.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, строительные конструкции, массивные железобетонные сооружения, физическая нелинейность, пластичность, теория течения, механика деформируемых тел

**Агапов Владимир Павлович**, доктор технических наук, профессор департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-1749-5797; E-mail: agapovpb@mail.ru

**Маркович Алексей Семенович**, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; доцент кафедры фундаментального образования, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-3967-2114; E-mail: markovich-as@rudn.ru

© Агапов В.П., Маркович А.С., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

#### Для цитирования

Агапов В.П., Маркович А.С. Конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 6. С. 593–607. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607>

## Finite Element for the Analysis of Massive Reinforced Concrete Structures with Cracking

Vladimir P. Agapov<sup>1</sup> , Alexey S. Markovich<sup>1,2</sup>  

<sup>1</sup> RUDN University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ markovich-as@rudn.ru

#### Article history

Received: July 27, 2023

Revised: September 17, 2023

Accepted: October 3, 2023

#### Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

#### Authors' contribution

Undivided co-authorship.

**Abstract.** The solid finite element has been developed for the calculation of massive reinforced concrete structures with cracks. When constructing a finite element in the compression-compression-compression mode, the Willam & Warnke failure criterion was used. The tensile behavior of concrete was assumed to be linear before the crack initiation. Modern building codes require non-linear calculations of concrete and reinforced concrete structures, taking into account the real properties of concrete and reinforcement. In this regard, a technique has been developed and a solid finite element has been built, adapted to the PRINS software, which makes it possible to perform calculations of massive reinforced concrete structures, taking into account their actual work. Development of a method for calculating reinforced concrete structures under conditions of a three-dimensional stress state, taking into account the brittle fracture of compressed concrete and cracking in tensile concrete. Based on this technique, the implementation of a solid finite element in the PRINS software. To verify the developed finite element, a series of test calculations of a beam under three-point bending conditions was carried out. Comparison of the calculation results with the data of experiments by the authors confirmed the high accuracy and reliability of the results obtained. The developed solid finite element included in the PRINS software can be effectively used by engineers of design and scientific organizations to solve a wide class of engineering problems related to the calculations of massive reinforced concrete structures.

**Keywords:** finite element method, PRINS computational program, building structures, solid reinforced concrete structures, physical nonlinearity, plasticity, flow theory, structural mechanics

#### For citation

Agapov V.P., Markovich A.S. Finite element for the analysis of massive reinforced concrete structures with cracking. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):593–607. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607>

### 1. Введение

Предпосылки для расчета железобетонных конструкций в нелинейной постановке были обусловлены развитием компьютерных технологий, с одной стороны, и развитием численных методов строительной механики, в первую очередь метода конечных элементов — с другой [1–4]. При этом нелинейное деформирование бетона с учетом реальных упругопластических свойств в условиях объемного напряженного состояния исследовалось на протяжении XX в. как отечественными, так и зарубежными учеными [5–10].

Очевидно, что современные методы расчеты железобетонных конструкций должны разрабатываться на основании численных методов строительной механики с учетом нелинейных эффектов, присущих бетону и арматуре, установленных экспериментальным путем. Поэтому корректное моделирование объем-

*Vladimir P. Agapov*, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Engineering Academy, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1749-5797; E-mail: agapovpb@mail.ru

*Alexey S. Markovich*, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Engineering Academy, RUDN University, Moscow, Russian Federation; Associate Professor of the Department of Fundamental Education, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3967-2114; E-mail: markovich-as@rudn.ru

ного напряженного состояния бетона с учетом его упругопластических характеристик является ответственной задачей, и для повышения достоверности расчеты следует проводить с использованием нескольких вычислительных программ. В связи с этим разработка альтернативных методов расчета и соответствующих программ является актуальной задачей.

Для решения данной задачи в настоящей статье приводится методика расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, с учетом хрупкого разрушения бетона сжатой зоны, а также трещинообразования в растянутом бетоне. На основании данной методики построен объемный конечный элемент, реализованный в ВК ПРИНС<sup>1</sup>.

## 2. Метод

В ВК ПРИНС расчет физически нелинейных конструкций методом конечных элементов ведется в приращениях по уравнению [1]:

$$(K_0 + \Delta K)\Delta u = \Delta P, \quad (1)$$

где  $\Delta K = \frac{1}{2}(K_1 - K_0)$ .

Матрицы жесткости  $K_0$  и  $K_1$  вычисляются в начале и конце каждой итерации.

Уравнение (2) решается итерационным способом [11; 12]:

$$K_0\Delta u_i = \Delta P - \Delta K_{i-1}\Delta u_{i-1}, \quad (2)$$

где  $i$  — номер итерации.

При достижении сходимости итерационного процесса вычисляются полные значения перемещений и напряжений по формулам:

$$u = u_0 + \Delta u, \quad \sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma, \quad (3)$$

где  $\Delta u$  и  $\Delta \sigma$  — приращения перемещений и напряжений соответственно.

Приращения напряжений, обусловленные приращением деформаций  $\Delta \varepsilon$ , определяются по формуле

$$\Delta \sigma = C_{ep}\Delta \varepsilon, \quad (4)$$

где  $C_{ep}$  — упругопластическая матрица характеристик материала.

В общем случае на каждом шаге нагружения анализируется напряженное состояние материала и при возникновении пластических деформаций и (или) трещин производится корректировка напряжений с учетом принятых диаграмм деформирования. Это требует проведения процесса уравнивания конструкции. Итерации равновесия производятся по формуле (1), которая модифицируется к виду

$$K_j\Delta u_j^i = P_j - F_j^{i-1}. \quad (5)$$

В формуле (5) матрица жесткости принимается равной матрице  $K_j$ , найденной в конце шага при итерациях по формуле (2).

Таким образом, в формуле (3) итерируется матрица жесткости, а в формуле (6) — вектор узловых сил  $F_j^{i-1}$ , эквивалентный внутренним напряжениям.

Матрица жесткости  $K$  для отдельного конечного элемента находится по формуле [2]:

$$K = \int_V B^T C_e B dV. \quad (6)$$

где  $B$  — матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений (геометрическая матрица);  $C_e$  — матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций (физическая матрица).

Методика вычисления геометрической матрицы  $B$  хорошо известна (см., например, [3]).

<sup>1</sup> Разработка ВК ПРИНС была начата профессором В.П. Агаповым в 70-е гг. XX в. В настоящее время развитие этого вычислительного комплекса ведется профессором В.П. Агаповым совместно с его учеником доцентом А.С. Марковичем.

### Основные предпосылки анализа объемного напряженного состояния

Рассматриваются четыре вида напряженного состояния: сжатие — сжатие — сжатие, сжатие — сжатие — растяжение, сжатие — растяжение — растяжение, растяжение — растяжение — растяжение.

При этом учитываются следующие типы поведения материала: нагружение, разгрузка и догрузка. Соответствующие указанным типам поведения пути деформирования материала приведены на рис. 1.

Нагружение растянутого бетона после образования трещины (участок  $C — D — E$ ) происходит с модулем упругости

$$E_i = \frac{\sigma_{cr}}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_m$  — предельная деформация бетона с трещинами при растяжении,  $\sigma_{cr}$  и  $\varepsilon_{cr}$  — напряжение и деформация трещинообразования соответственно (см. рис. 1).

Разгрузка и догрузка бетона с трещинами (участки  $D — O$ ) подчиняются линейному закону с фиктивным модулем упругости

$$E'_i = \frac{1}{\varepsilon_D} \frac{\sigma_{cr} (\varepsilon_m - \varepsilon_D)}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}, \quad \varepsilon_{cr} < \varepsilon_D < \varepsilon_m, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_D$  — текущее значение деформации.

Напряжение в растянутом бетоне после возникновения трещины находится по формуле

$$\sigma = \sigma_{cr} \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_D}{\varepsilon_m - \varepsilon_{cr}}. \quad (9)$$

#### 2.1. Деформирование бетона в области «сжатие — сжатие — сжатие»

При построении физической матрицы принята упругая модель при хрупком разрушении бетона в режиме «сжатие — сжатие — сжатие». Поведение бетона считается линейно-упругим вплоть до достижения поверхности разрушения.

В качестве поверхности разрушения принята пятипараметрическая модель, предложенная Вилламом и Варнке [13]. На рис. 2 приведено девиаторное сечение этой поверхности, а на рис. 3 — главные меридианы растяжения и сжатия.

Условие прочности определяется формулой [13]

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \frac{1}{\bar{r}(\sigma_m, \theta)} \frac{\tau_m}{R_b} - 1 = 0, \quad (10)$$

где  $\sigma_m$  и  $\tau_m$  — средние значения нормальных и касательных напряжений в окрестности точки,  $\theta$  — угол вида напряженного состояния, а  $\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{r}{\sqrt{5}R_b}$  — радиус-вектор точки на поверхности разрушения в девиаторном сечении (см. рис. 2).

Радиус-вектор  $\bar{r}(\sigma_m, \theta)$  определяется формулой [13]

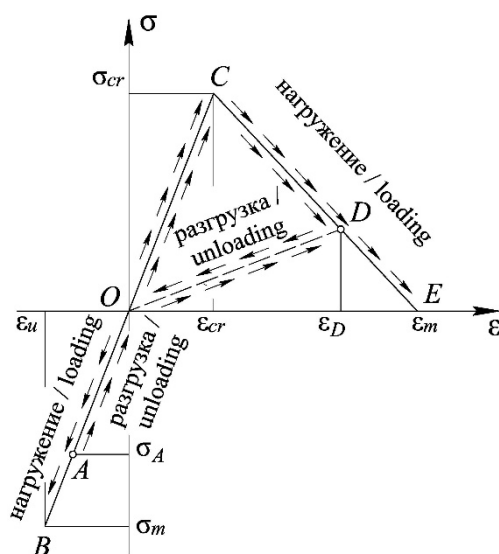
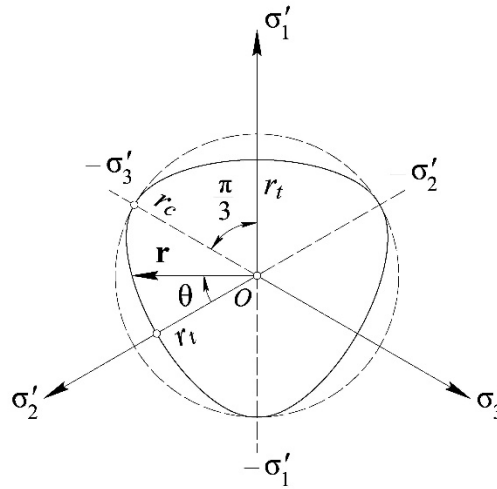


Рис. 1. Пути деформирования материала  
Источник: выполнено авторами  
Figure 1. Material Deformation Path  
Source: compiled by the authors



$$\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c)\sqrt{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c}}{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2} \quad (11)$$



**Рис. 2.** Девиаторное сечение поверхности разрушения:

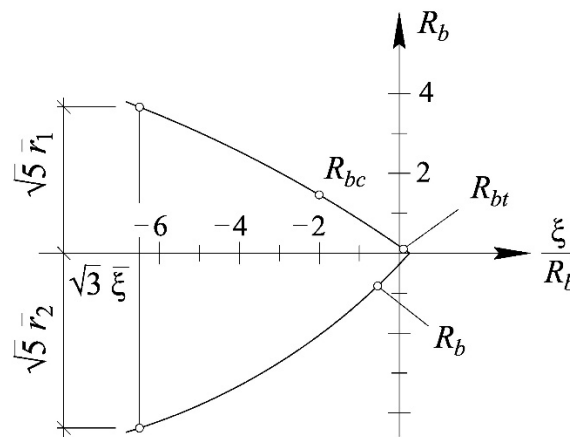
$r_t$  и  $r_c$  — меридианы растяжения и сжатия;  $\theta$  — угол вида напряженного состояния

И с т о ч н и к : выполнено авторами

**Figure 2.** Deviatoric section of the fracture surface:

$r_t$  and  $r_c$  — the meridians of tension and compression;  $\theta$  — the angle of the type of the stress state

S o u r c e : compiled by the authors



**Рис. 3.** Меридианы растяжения и сжатия поверхности разрушения:

$R_b$  и  $R_{bt}$  — пределы прочности бетона на осевое сжатие и растяжение;

$R_{bc}$  — предел прочности бетона на равномерное двухосное сжатие,  $r = \sqrt{5}\tau_m$ ,  $\xi = \sqrt{3}\sigma_m$

И с т о ч н и к : выполнено авторами

**Figure 3.** Tension and compression meridians of fracture surface:

$R_b$  and  $R_{bt}$  — ultimate strength of concrete for axial compression and tension;

$R_{bc}$  — ultimate strength of concrete for uniform biaxial compression,  $r = \sqrt{5}\tau_m$ ,  $\xi = \sqrt{3}\sigma_m$

S o u r c e : compiled by the authors

Радиус-векторы  $r_t$  и  $r_c$  (см. рис. 2) определяют меридианы растяжения ( $\theta = 0$ ) и сжатия ( $\theta = \pi/3$ ), которые являются квадратными параболами:

$$\frac{\tau_{m,t}}{R_b} = r_t = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{R_b} + a_2 \left( \frac{\sigma_m}{R_b} \right)^2, \quad \frac{\tau_{m,c}}{R_b} = r_c = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{R_b} + b_2 \left( \frac{\sigma_m}{R_b} \right)^2. \quad (12)$$

Коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  получены на основе экспериментальных данных и в зависимости от параметров модели, приведенных в табл. 1, определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{3} \bar{R}_{bc} a_1 - \frac{4}{9} \bar{R}_{bc}^2 a_2 + \sqrt{\frac{2}{15}} \bar{R}_{bc}, \quad a_1 = \frac{1}{3} (2\bar{R}_{bc} - \bar{R}_{bt}) a_2 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\bar{R}_{bt} - \bar{R}_{bc}}{2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt}},$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} \bar{\xi}_t (\bar{R}_{bt} - \bar{R}_{bc}) - \sqrt{\frac{6}{5}} \bar{R}_{bt} \bar{R}_{bc} + \bar{r}_t (2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt})}{(2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt}) \left( \bar{\xi}_t^2 - \frac{2}{3} \bar{R}_{bc} \bar{\xi}_t + \frac{1}{3} \bar{R}_{bt} \bar{\xi}_t - \frac{2}{9} \bar{R}_{bt} \bar{R}_{bc} \right)}, \quad (13)$$

$$b_0 = -\rho b_1 - \rho^2 b_2, \quad b_1 = \left( \bar{\xi}_c + \frac{1}{3} \right) b_2 + \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} - 3r_c}{3\bar{\xi}_c - 1}, \quad b_2 = \frac{r_c \left( \rho + \frac{1}{3} \right) - \sqrt{\frac{2}{15}} (\bar{\xi}_c + \rho)}{(\bar{\xi}_c + \rho) \left( \bar{\xi}_c - \frac{1}{3} \right) \left( \rho + \frac{1}{3} \right)}. \quad (14)$$

Таблица 1 / Table 1

**К определению параметров модели Виллама — Варнке /  
To the determination of the parameters of the Willam — Warnke model**

Вид напряженного состояния / Type of stress state		Критерий / Criterion	Напряжения / Stresses	Угол $\theta$ / Angle $\theta$
1.	Одноосное сжатие / Uniaxial compression	$R_b$	$\sigma_3 = -R_b,$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$\pi/3$
2.	Одноосное растяжение / Uniaxial tension	$R_{bt}$	$\sigma_1 = R_{bt},$ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$ $\bar{R}_{bt} = \frac{R_{bt}}{R_b}$	0
3.	Равномерное двухосное сжатие / Uniform biaxial compression	$R_{bc}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = -R_{bc},$ $\sigma_3 = 0,$ $\bar{R}_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_b} = 1,2$	0
4.	Трехосное сжатие в режиме высокой компрессии ( $\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2, \theta = 0$ ) / Triaxial compression in high compression mode ( $\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2, \theta = 0$ )	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_t,$ $\bar{\xi}_1 > 0,$ $\frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_t$	$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0,$ $\bar{\xi}_1 = 3,67^*, \bar{r}_t = 1,59^*$	0
5.	Трехосное сжатие в режиме низкой компрессии ( $\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$ ) / Triaxial compression in low compression mode ( $\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$ )	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_c,$ $\bar{\xi}_2 > 0,$ $\frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_c$	$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0,$ $\bar{\xi}_c = 3,67^*, \bar{r}_c = 1,94^*$	$\pi/3$

\* Согласно результатам экспериментов Лоне и Гашона [7].

В табл. 1 использованы следующие буквенные обозначения:  $R_b$  — прочность бетона на одноосное сжатие (призменная или кубиковая),  $R_{bt}$  — прочность бетона на одноосное растяжение,  $R_{bc}$  — прочность бетона на равномерное двухосное сжатие. При этом нормируемые значения прочности являются безразмерными величинами и задаются в долях от  $R_b$ .

Прочность бетона в условиях трехосного сжатия определяется для режимов низкой и высокой боковой компрессии с использованием соотношений  $\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_c$  и  $\frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_c$  на основании экспериментальных данных [7].

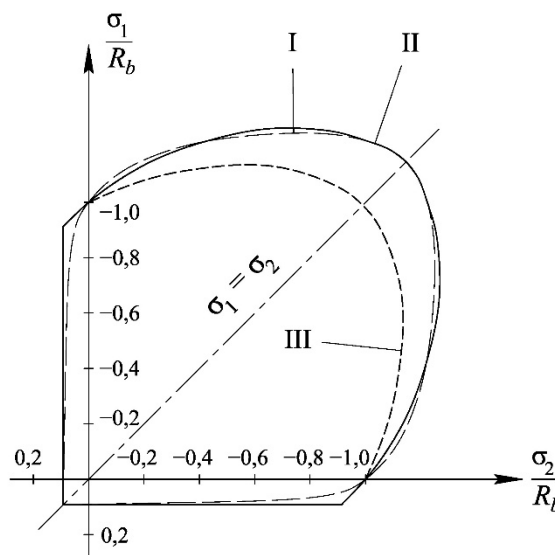
**2.2. Деформирование бетона в областях «сжатие — сжатие — растяжение», «сжатие — растяжение — растяжение» и «растяжение — растяжение — растяжение» (учет трещинообразования)**

Физическая матрица  $C_e$  для бетона с одной, двумя и тремя трещинами формируется следующим образом. При образовании трещины по первому главному направлению напряженное состояние бетона по двум другим направлениям рассматривается как плосконапряженное и используется модифицированный критерий прочности Мизеса — Губера [14], который сводится к виду

$$f[I_1(T_\sigma), I_2(D_\sigma)] = \sqrt{\beta[3I_2(D_\sigma) + \alpha I_1(T_\sigma)]} = \sigma_0, \tag{15}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — эмпирические коэффициенты, которые на основании экспериментальных данных принимаются равными 0,355 и 1,355 соответственно. Отметим, что при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$  уравнение (15) вырождается в критерий пластичности Мизеса — Губера [14].

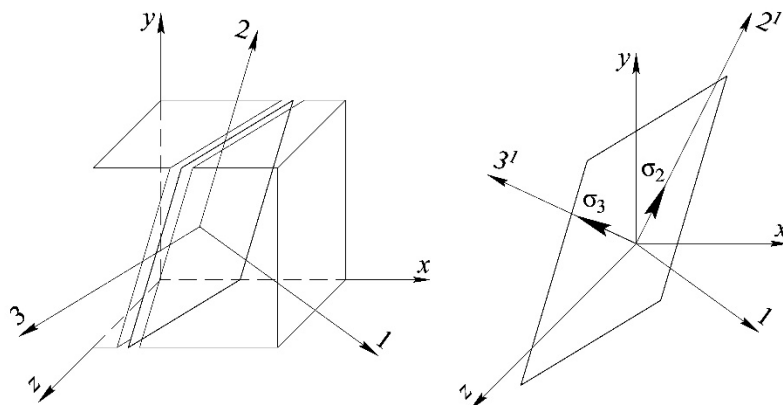
С принятыми значениями коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  критерий (15) достаточно хорошо согласовывается с результатами двухосных испытаний бетона (рис. 4).



**Рис. 4.** Геометрическая интерпретация критерия текучести (15):  
 I — поверхность разрушения согласно экспериментальным данным Купфера [6];  
 II — критерий (15); III — критерий пластичности Мизеса — Губера [14]  
 Источник: выполнено авторами

**Figure 4.** Geometric interpretation of the yield criterion (15):  
 I — the fracture surface according to the experimental data of Kupffer [6];  
 II — the criterion (15); III — the von Mises & Huber plasticity criterion [14]  
 Source: compiled by the authors

Первоначально напряжения в конечном элементе вычисляются в глобальных осях конструкции  $x — y — z$ . В момент возникновения первой трещины фиксируется положение главных осей  $1 — 2 — 3$  (рис. 5).



**Рис. 5.** Анализ напряженного состояния бетона при образовании одной трещины  
И с т о ч н и к : выполнено авторами

**Figure 5.** Analysis of the stress state of concrete during the formation of one crack  
S o u r c e : compiled by the authors

При возникновении первой трещины материал в объеме элемента распадается, согласно принятой гипотезе, на ряд плосконапряженных пластинок. В каждой такой пластинке существуют такие площадки с нормальными  $2^1$  и  $3^1$ , на которых нормальные напряжения имеют экстремальные значения. Дальнейший анализ трещинообразования производится по главным напряжениям  $\bar{\sigma}_2$  и  $\bar{\sigma}_3$ , действующим вдоль осей  $2^1$  и  $3^1$  (см. рис. 5). Данные напряжения, как и угол поворота осей  $2^1$  и  $3^1$  относительно осей 2 и 3, находятся по общим правилам сопротивления материалов. Дальнейший расчет конструкции выполняется в осях  $1 — 2^1 — 3^1$ , для чего предварительно вычисляется матрица направляющих косинусов этих осей в глобальных осях  $x — y — z$ .

При наличии двух трещин модуль упругости бетона по третьему направлению определяется по диаграмме «напряжение — деформация» для одноосного напряженного состояния, а модули сдвига принимаются по рекомендациям, приведенным в работе [15].

При этом физическая матрица будет выглядеть следующим образом:

$$C_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^c \end{bmatrix}. \quad (16)$$

При наличии трех трещин модуль упругости  $E$  равен нулю.

Модуль  $E$  в матрице  $C_e$  (16) принимается равным либо начальному модулю, если бетон в третьем главном направлении растянут, либо касательному модулю кривой «напряжение — деформация», если бетон по третьему главному направлению сжат.

Эксперименты показывают, что треснувший бетон с арматурой передает значительные касательные напряжения. При этом на величину сдвиговой жесткости влияют такие факторы, как ширина раскрытия трещины, коэффициент армирования, диаметр арматуры, структура бетона и др. [15]. Следуя рекомендациям [15], модуль сдвига примем как функцию текущей растягивающей деформации.

Так, для бетона с трещиной в первом главном направлении

$$G_{12}^c = 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{0,004}\right), G_{12}^c = 0, \text{ если } \varepsilon_1 > 0,004, G_{31}^c = G_{12}^c, \quad (17)$$

где  $G$  — модуль сдвига бетона без трещин;  $\varepsilon_1$  — растягивающая деформация по главному направлению 1.

Для бетона с трещиной в двух направлениях:

$$\begin{aligned} G_{13}^c &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{0,004}\right), G_{13}^c = 0, \text{ если } \varepsilon_1 > 0,004, \\ G_{23}^c &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{0,004}\right), G_{23}^c = 0, \text{ если } \varepsilon_2 > 0,004, \\ G_{12}^c &= \frac{1}{2} \min[G_{13}^c, G_{23}^c]. \end{aligned} \quad (18)$$

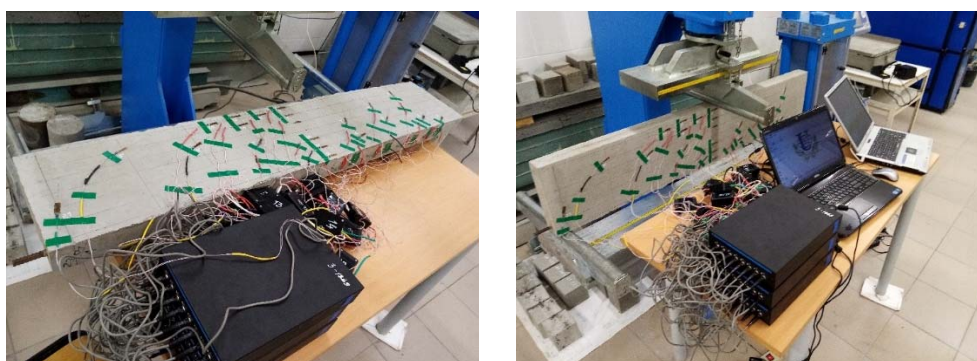
Для бетона с трещиной в трех направлениях:

$$\begin{aligned} G_1 &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{0,004}\right), G_1 = 0, \text{ если } \varepsilon_1 > 0,004, \\ G_2 &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{0,004}\right), G_2 = 0, \text{ если } \varepsilon_2 > 0,004, \\ G_3 &= 0,25G \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{0,004}\right), G_3 = 0, \text{ если } \varepsilon_3 > 0,004, \\ G_{12}^c &= G_{23}^c = G_{31}^c = \frac{1}{2} \min[G_1, G_2, G_3]. \end{aligned} \quad (19)$$

На основании приведенного алгоритма разработана программа, адаптированная к вычислительному комплексу ПРИНС [18–20].

### 3. Результаты и обсуждение

Для тестирования разработанного конечного элемента были использованы результаты собственных экспериментов авторов, выполненных в лаборатории строительных конструкций и материалов департамента строительства инженерной академии РУДН, в ходе которых исследовалось напряженно-деформированное состояние железобетонной балки (рис. 6).

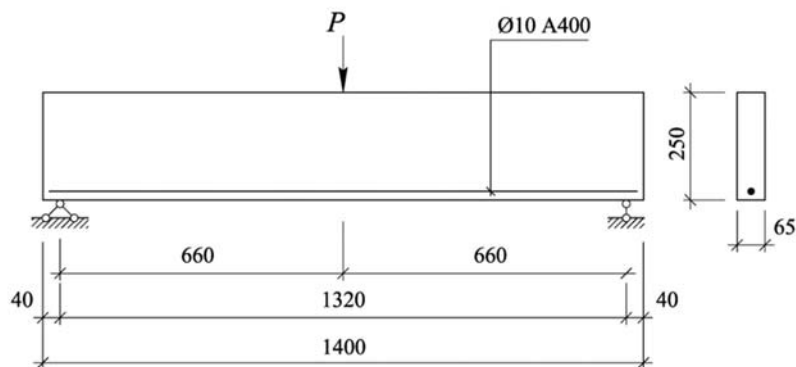


**Рис. 6.** Общий вид экспериментальной балки и использованного оборудования  
Источники: фото В.П. Агапова, А.С. Марковича

**Figure 6.** General view of the experimental beam and used equipment  
Source: photo by V.P. Agapov, A.S. Markovich

Для оценки напряженного состояния, в соответствии с методикой эксперимента, по направлению главных деформаций в 21 точке на поверхности балки были наклеены тензорезисторы BF120-20AA с базой 20 мм, подключаемые по полной мостовой схеме к 24-канальной тензостанции ZETLAB. Эксперимент проводился на испытательной установке Matest с постоянной скоростью нагружения 10 Н/с. При этом нагрузка, деформации и перемещения характерных точек балки записывались синхронно.

Материал балки — бетон класса В60. Балка имела продольное армирование арматурой класса А400 Ø10 (рис. 7).



**Рис. 7.** Геометрические размеры и схема армирования балки

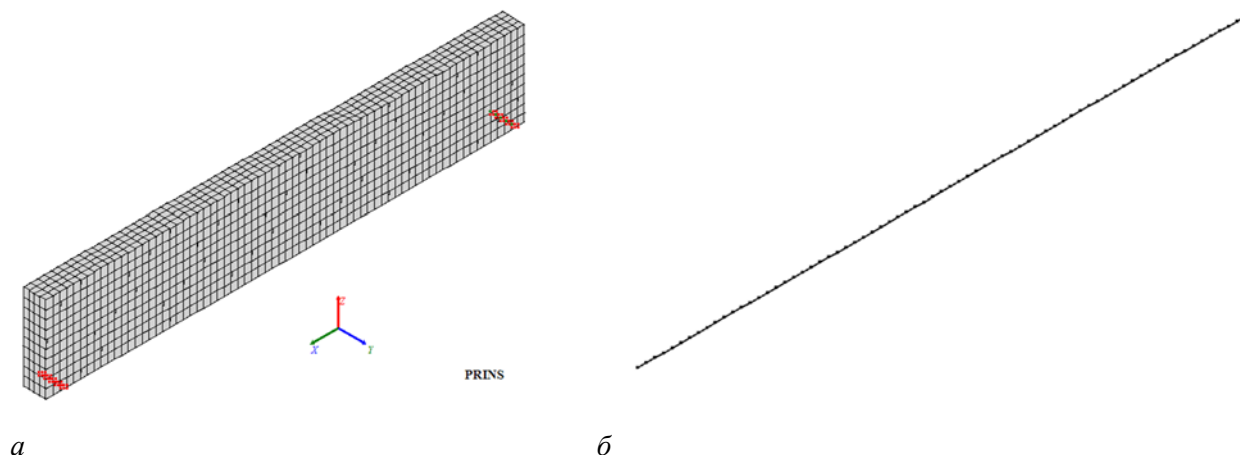
Источник: выполнено авторами

**Figure 7.** Geometric dimensions and reinforcement scheme of beam

Source: compiled by the authors

Конечно-элементная модель экспериментальной балки состояла из 2800 объемных восьмиузловых элементов (рис. 8). Армирование балки моделировалось одномерными стержневыми элементами с тремя степенями свободы в узле. Для продольной арматуры принималась гипотеза идеального упругопластического поведения, и учитывалось влияние квадратов углов поворота на продольные усилия. Стержни поперечного армирования находились в условиях линейно-упругого деформирования.

Нагружение и условия опирания балки соответствовали методике проведенных авторами экспериментов (см. рис. 9).

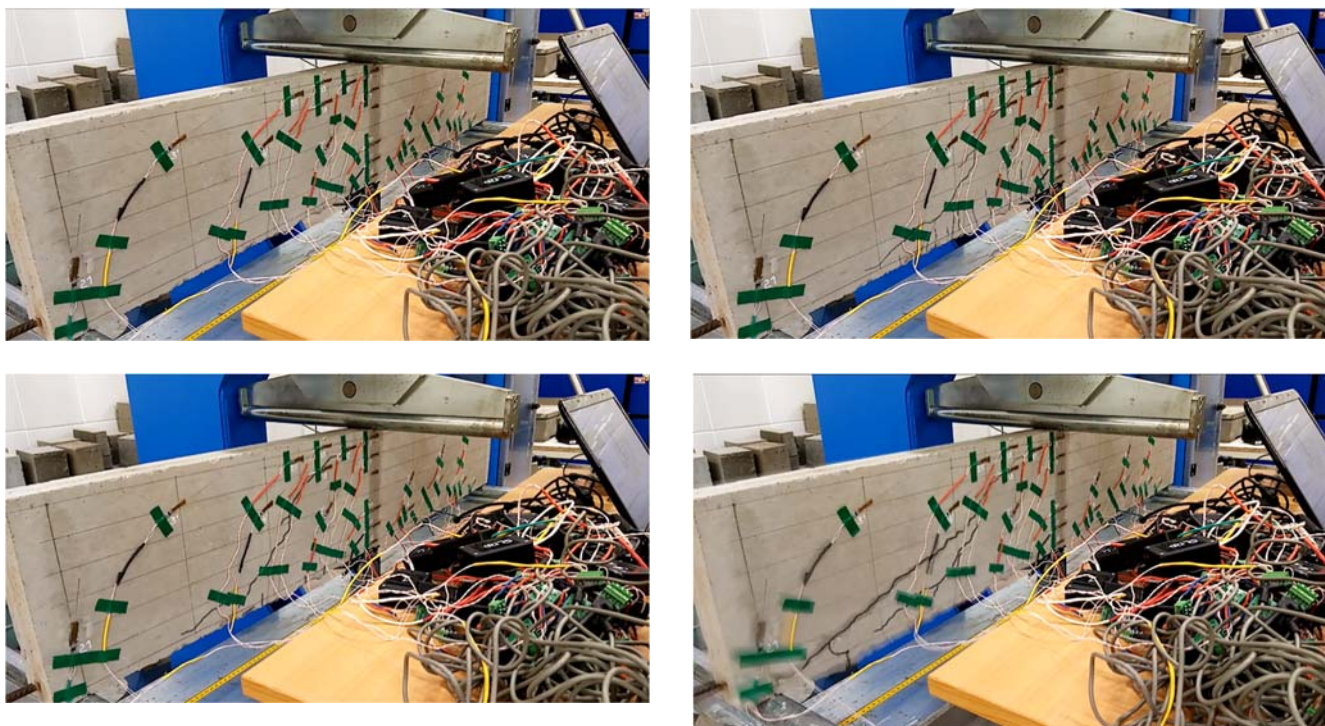


**Рис. 8.** Расчетная схема экспериментальной балки:

*a* — КЭ модель «тела» балки, *б* — схема армирования стержневыми КЭ  
Источник: выполнено авторами с использованием программы ПРИНС

**Figure 8.** FE scheme of the experimental beam:

*a* — FE model of the «body» of the beam, *b* — bar FE scheme of reinforcement  
Source: compiled by the authors using the PRINCE program



**Рис. 9.** Характер разрушения экспериментальной балки  
Источник: фото В.П. Агапова, А.С. Марковича

**Figure 9.** The fracture character of the experimental beam  
Source: photo by V.P. Agapov, A.S. Markovich

Суммарная нагрузка на балку была принята равной  $P = 36$  кН. Расчеты выполнялись шагово-итерационным методом. Был задан 41 шаг нагружения, коэффициент к нагрузке на первом шаге принимался равным 0,01, а на остальных шагах — 0,03.

По результатам расчетов исследовались процесс трещинообразования в бетоне, прогибы балки при фиксированных значениях нагрузки, а также предельная (разрушающая) нагрузка.

Результаты расчетов представлены в табл. 2

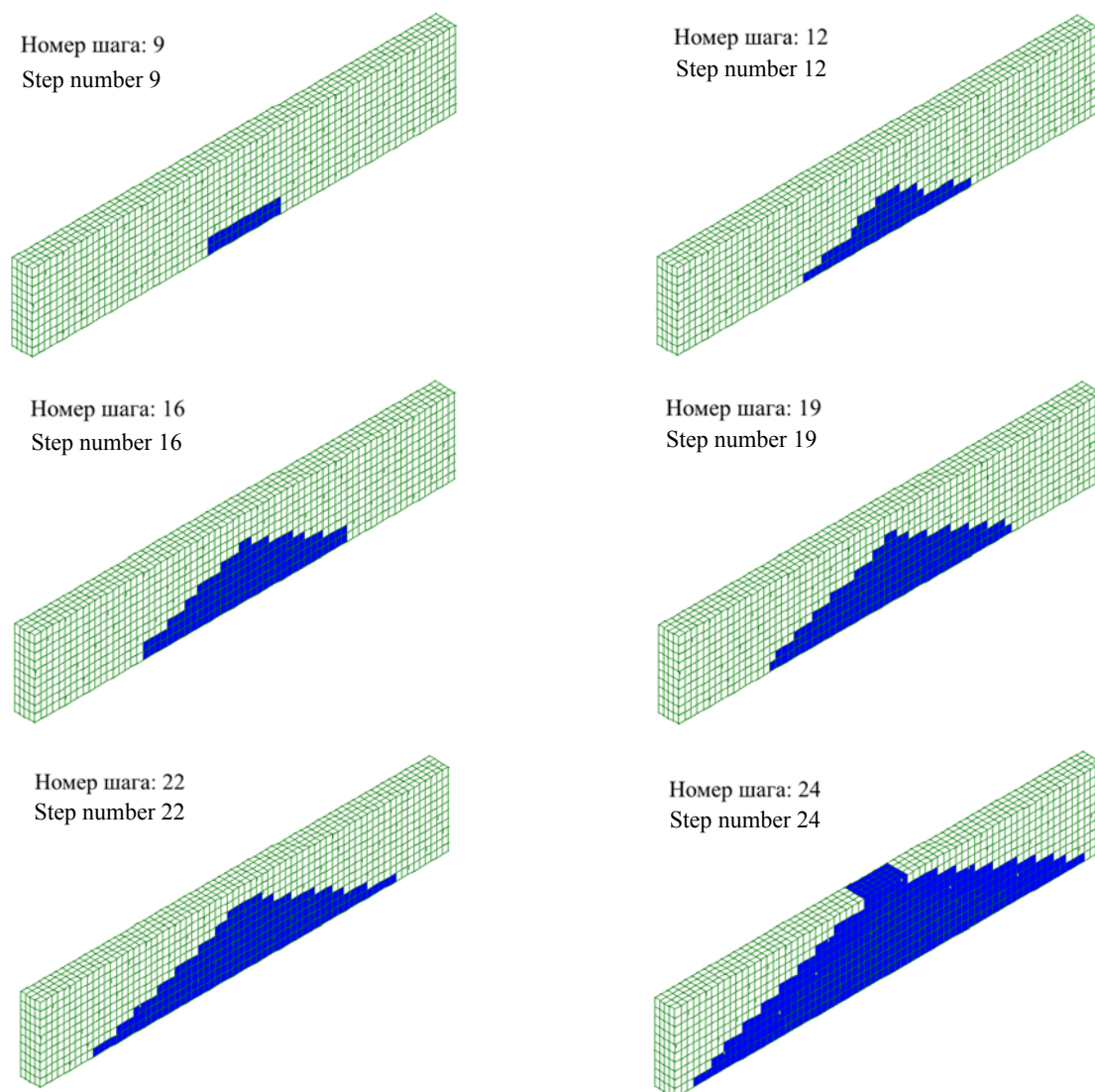
Таблица 2 / Table 2

Результаты расчета балки / Beam calculation results

Исследуемая величина / Researched value	Прогибы балки (мм) при нагрузке, кН / Displacements of beams (mm) under load, kN			Нагрузка трещино- образования, кН / Cracking load, kN	Разрушающая нагрузка, кН / Failure load, kN
	18	21	24		
Результаты экспериментов / Experimental results	0,96	1,170	1,488	9,375	28,849
Результаты расчета в ВК ПРИНС / Calculation results in the PRINS computer application	0,742	1,131	1,476	9,00	27,36
Погрешность, % / Divergence, %	29,4	3,33	0,81	4,17	5,44

Как видно из табл. 2, расхождение в значениях предельной (разрушающей) нагрузки, полученной по результатам расчетов в ВК ПРИНС, в сравнении с экспериментальными данными не превышает 5,44 %, что свидетельствует о высокой точности разработанного конечного элемента, а также о надежности и устойчивости используемых алгоритмов нелинейного расчета.

Процесс трещинообразования рассматриваемой балки, полученный с использованием ВК ПРИНС, показан на рис. 10.



**Рис. 10.** Трещинообразование рассматриваемой балки  
 Источник : выполнено авторами с использованием программы ПРИНС  
**Figure 10.** Cracking of the considered beam  
 Source : compiled by the authors using the PRINCE program

Прогибы балки, соответствующие суммарной нагрузке 18, 21 и 24 кН, приведены на рис. 11.

Авторами разработан и реализован физически нелинейный объемный конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций, позволяющий учитывать хрупкое разрушение бетона в области сжатия и процесс трещинообразования в растянутом бетоне.

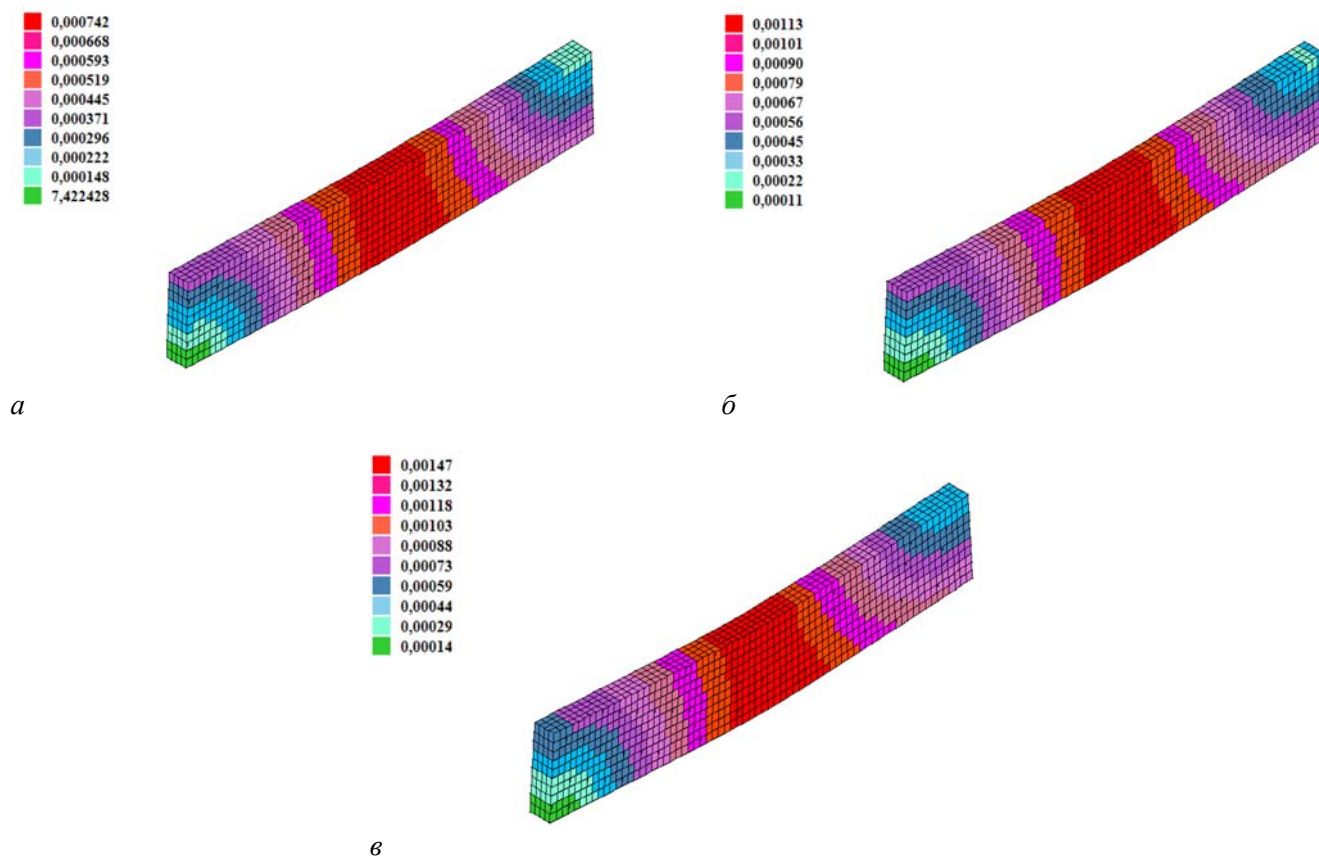
Для учета работы бетона в режиме «сжатие — сжатие — сжатие» используется критерий прочности Виллама — Варнке.

При возникновении в бетоне трещины по первому главному направлению напряженное состояние по двум другим направлениям рассматривается как плосконапряженное и применяется модифицированный критерий прочности Мизеса — Губера.

При наличии двух трещин модуль упругости бетона по третьему направлению определяется по диаграмме «напряжение — деформация» и при этом учитывается влияние касательных напряжений на работу бетона с трещинами.

Так как армирование конструкции может выполняться произвольным образом, его особенности в полной мере могут быть учтены включением в конечно-элементную схему конструкции одномерных стержневых элементов, характеризующих арматуру. При этом для арматурной стали возможно задание как упругой, так и упругопластической моделей деформирования.





**Рис. 11.** Прогобы балки:  
 а — при нагрузке 18 кН, б — при нагрузке 21 кН, в — при нагрузке 24 кН  
 И с т о ч н и к : выполнено авторами с использованием программы ПРИНС

**Figure 11.** Beam displacements:  
 а — at a load of 18 kN, б — at a load of 21 kN, в — at a load of 24 kN  
 S o u r c e : compiled by the authors using the PRINCE program

#### 4. Заключение

1. В процессе отладки программы для верификации разработанного конечного элемента была проведена серия тестовых расчетов балки, находящейся в условии трехточечного изгиба. Последующее сравнение результатов расчета с данными экспериментов, проведенных авторами, подтвердило высокую точность разработанного конечного элемента.

2. Данный конечный элемент адаптирован к ВК ПРИНС и в составе этого программного комплекса может быть использован инженерами проектных и научных организаций для практических расчетов железобетонных конструкций.

Таким образом, ВК ПРИНС может быть успешно использован для решения широкого класса инженерных задач.

#### Список литературы

1. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2005. 245 с.
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p.
3. Crisfield M.A. Non-linear finite element analysis of solids and structures. UK: John Wiley & Sons Ltd, 1977. 488 p.
4. Oden J.T. Finite elements in nonlinear continua. New York: McGraw, Hill Book Company, 1972. 464 p.
5. СЕВ, СЕВ-FIP Model Code 1990 / СЕВ Bulletin d'Information № 213/214. Lausanne: Comite Euro-International du Beton, 1993. 437 p.

6. Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H. Behavior of Concrete under Biaxial Stresses // *ACI Journal Proceedings*. 1969. Vol. 66. No. 8. P. 656–666.
7. Launay P., Gachon H. Strain and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Stress // *ACI Spec. Publ.* 1972. Vol. 34. P. 269–282.
8. Mills L.L., Zimmerman R.M. Compressive Strength of Plain Concrete under Multiaxial Loading Conditions // *ACI Journal*. October 1970. Vol. 67. No. 10. P. 802–807.
9. Корсун В.И., Недорезов А.В., Макаренко С.Ю. Сопоставительный анализ критериев прочности для бетонов // *Современное промышленное и гражданское строительство*. 2014. Т. 10. № 1. С. 65–78. EDN THXXCZ
10. Hansen T.C. Triaxial test with concrete and cement paste: Report № 319 // Lyngby: Technical University of Denmark, 1995. 54 p.
11. Dennis J., More J.J. Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory // *Siam Review*. January 1977. Vol. 19. No. 1. P. 46–89.
12. Matthies H., Strang G. The Solution of Nonlinear Finite Element Equations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1979. Vol. 14. P. 1613–1626.
13. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // *Proceedings of IABSE. Structural Engineering*. 1975. Report 19. Section III. P. 1–30.
14. von Mises R. *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand* // *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. (Mathematisch-Physikalische Klasse)*. 1913. Vol.1. P. 582–592.
15. Cedolin L., Deipoli S. Finite element studies of shear-critical R/C beams // *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*. June 1977. Vol. 103. No. EM3. P. 395–410.
16. Обернихин Д.В., Никулин А.И. Экспериментальные исследования прочности, трещиностойкости и деформативности железобетонных балок трапециевидного и прямоугольного поперечных сечений // *Инновационная наука*. 2016. № 8-2. С. 73–77.
17. Римишин В.И., Амелин П.А. Численный расчет изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения в программной среде Abaqus // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 6. С. 552–563. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563>
18. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable // *South Florida Journal of Development*. 2021. Vol. 2 No. 4. P. 5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007>
19. Агапов В.П., Маркович А.С. Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. No. 5. С. 380–389. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>
20. Агапов В.П., Маркович А.С. Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. No 6. С. 617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-671-627>

## References

1. Agapov V.P. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2005. (In Russ.)
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition*. McGraw-Hill; 2005.
3. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd; 1977.
4. Oden J.T. *Finite elements in nonlinear continua*. New York: McGraw, Hill Book Company; 1972.
5. CEB, *CEB-FIP Model Code 1990 / CEB Bulletin d'Information № 213/214*. Lausanne: Comite Euro-International du Beton, 1993.
6. Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H. Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. *ACI Journal Proceedings*. 1969;66(8):656–666.
7. Launay P., Gachon H. Strain and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Stress. *ACI Spec. Publ.* 1972;34: 269–282.
8. Mills L.L., Zimmerman R.M. Compressive Strength of Plain Concrete under Multiaxial Loading Conditions. *ACI Journal*. October 1970;67(10):802–807.
9. Korsun V.I., Nedorezov A.V., Makarenko S.Yu. Comparative analysis of strength criteria for concrete. *Modern Industrial and Civil Construction*. 2014;10(1):65–78. (In Russ.) EDN THXXCZ
10. Hansen T.C. Triaxial test with concrete and cement paste: Report № 319. Lyngby, "Technical University of Denmark", 1995.
11. Dennis J., More J.J. Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory. *Siam Review*. January 1977;19(1):46–89.
12. Matthies H., Strang G. The Solution of Nonlinear Finite Element Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1979;14:1613-1626.

13. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete. *Proceedings of IABSE. Structural Engineering*. 1975;19(III):1–30.
14. von Mises R. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand [Mechanics of Solid Bodies in Plastic Deformation State]. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. (Mathematisch-Physikalische Klasse)*. 1913;1:582–592.
15. Cedolin L., Deipoli S. Finite element studies of shear-critical R/C beams. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*. June 1977;103(EM3):395–410.
16. Obernikhin D.V., Nikulin A.I. Experimental studies of strength, crack resistance and deformability of reinforced concrete beams of trapezoidal and rectangular cross sections. *Innovative Science*. 2016;(8–2):73–77. (In Russ.)
17. Rimshin V.I., Amelin P.A. Numerical calculation of bent reinforced concrete elements of rectangular section in the Abaqus software. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):552–563. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563>
18. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007>
19. Agapov V.P., Markovich A.S. Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):380–389. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>
20. Agapov V.P., Markovich A.S. Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627>

## СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ CONSTRUCTION MATERIALS AND PRODUCTS

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-608-619

УДК 54.061

EDN: TWZPWW

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Структурные характеристики углеродных наноматериалов как компонентов модификатора для композитов строительного назначения

Ю.Н. Толчков  

Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Российская Федерация

✉ tolschkow@mail.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 29 мая 2023 г.

Доработана: 27 августа 2023 г.

Принята к публикации: 5 сентября 2023 г.

#### Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Аннотация.** Проанализированы структурные характеристики углеродных наноматериалов, полученных при различных временных параметрах синтеза на основании рентгеновской дифрактометрии, КР-спектроскопии и сканирующей микроскопии. По данным КР-спектроскопии и рентгеновского рассеяния рассчитано, что размеры кристаллита нанотрубок находятся в пределах от 9 до 38 нм. Размер кристаллита нанотрубок при длительности времени синтеза 90 минут остается минимальным в сравнении с другими образцами, что подтверждается в том числе и разными методами диагностики. По данным рентгеновской дифракции, по формуле Селякова — Шеррера были рассчитаны размеры кристаллитов  $L_c$  и  $L_a$ , продольное и перпендикулярное направление углеродных слоев. Размеры кристаллитов нанотрубок в результате роста времени синтеза находятся в пределах 9–12 нм в продольном направлении и 22–38 нм в перпендикулярном направлении. Дифракционные картины образцов не отражают наличие существенного количества графита, строение интенсивностей которого преимущественно в пиках (002) и (004), характерны для нанотрубок. В результате применения в качестве компонента-модификатора нанотрубок с длительностью синтеза от 40 до 90 минут наблюдается увеличение эксплуатационных показателей композита до 20–25 % относительно контрольного образца.

**Ключевые слова:** наноструктуры, наномодификатор, спектроскопия комбинационного рассеяния света, рамановская спектроскопия, КР-спектроскопия, многослойные углеродные нанотрубки, углеродные нанотрубки, графен, кристаллит, рентгеновская дифракция, сканирующая электронная микроскопия

#### Для цитирования

Толчков Ю.Н. Структурные характеристики углеродных наноматериалов как компонентов модификатора для композитов строительного назначения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 6. С. 608–619. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-608-619>

Толчков Юрий Николаевич, соискатель кафедры техники и технологии производства нанопроductов, Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Российская Федерация; ORCID: 0009-0001-2656-1434; E-mail: tolschkow@mail.ru

© Толчков Ю.Н., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Investigation of Structural Characteristics of Carbon Nanomaterials as Modifier Components for Construction Composites

Yuri N. Tolchkov  

Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation

✉ tolschkow@mail.ru

## Article history

Received: May 29, 2023

Revised: August 27, 2023

Accepted: September 5, 2023

## Conflicts of interest

The author declares that there is no conflict of interest.

**Abstract.** The study analyzed the structural characteristics of carbon nanomaterials obtained at different time parameters of the synthesis based on X-ray diffractometry, Raman spectroscopy, and scanning microscopy. According to the Raman spectroscopy and X-ray scattering data, the crystallite size of nanotubes is estimated to be in the range from 9 to 38 nm. With the synthesis time of 90 minutes, the nanotube crystallite size remains minimal in comparison with other samples, which is confirmed, among other things, by various diagnostic methods. Based on the X-ray diffraction data, the  $L_c$  and  $L_a$  crystallite sizes (longitudinal and perpendicular to the direction of the carbon layers) were calculated using the Selyakov–Scherrer formula. The sizes of nanotube crystallites as a result of increasing the synthesis time are in the range of 9–12 nm in the longitudinal direction and 22–38 nm in the perpendicular direction. The diffraction patterns of the samples do not reflect the presence of a significant amount of graphite; the intensity structure is predominantly in the (002) and (004) peaks, which are characteristic of nanotubes. As a result of the use of nanotubes as a modifier component with a synthesis duration from 40 to 90 minutes, an increase in the performance of the composite up to 20–25 % relative to the control sample is observed.

**Keywords:** nanostructures, nanomodifier, combined light scattering spectroscopy, Raman spectroscopy, multilayer carbon nanotubes, carbon nanotubes, graphene, crystallite, X-ray diffraction, scanning electron microscopy

## For citation

Tolchkov Yu.N. Investigation of structural characteristics of carbon nanomaterials as modifier components for construction composites. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):608–619. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-608-619>

## 1. Введение

Синтез и свойства композитов строительного назначения находятся в зависимости от входящих в их состав компонентов. Для материалов на основе вяжущих составляющих предопределяющее значение имеет дисперсно-кристаллитная структура новообразований надмолекулярного уровня, формирующихся в процессе твердения цементного камня. Поэтому необходимо учитывать размерные структурные единицы композита на уровне кристаллита (зерна) или агломерата, так как данные индивидуальные или укрупненные субмикроскопические и наноструктурные частицы зарождения твердой фазы через пространственно-геометрическую компоновку определяют прочностные показатели отдельно взятого участка и системы в целом. Отметим, что направленное регулирование указанных параметров структуры композита может быть достигнуто за счет применения методов наномодифицирования, которые задают определенное направление развития геометрии кристаллитной структуры с образованием поверхностных комплексов и новых химических связей. Степень реализации принципов наномодифицирования структуры строительного композита и их эффективность будут зависеть от характеристик и способов внесения наноразмерных частиц. Высокие удельные показатели поверхности наноматериалов способствуют проявлению капиллярных свойств (поглощение жидких сред под действием сил поверхностного натяжения). Для строительных материалов, обладающих преимущественно гетерогенной структурой и гидратационным принципом твердения, применение наноматериалов не только будет способствовать заполнению микропор, но и позволит существенно снизить количество свободной и капиллярно-связанной воды,

Yuri N. Tolchkov, Postgraduate student, Department of Engineering and Technology of Nanoproduct Manufacturing, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation; ORCID: 0009-0001-2656-1434; E-mail: tolschkow@mail.ru

придав системе уплотненную конструкцию. Эффективность применения такого рода наномодификаторов будет определяться размерными параметрами наноструктур и их строением (цилиндрическая, сферическая и др.), за счет чего реализация процесса связывания воды будет проходить не только адсорбционно, но и хемосорбционно. Например, углеродные нанотрубки обладают высокими характеристиками адсорбции и капиллярными свойствами (склонность материала поглощать внутрь своей поверхности жидкости, расплавы и др. под действием сил поверхностного натяжения). Одним из методов исследования кристаллического строения веществ является рентгеновская дифракция, которая позволяет получить информацию о структурных характеристиках рассматриваемых веществ.

Рентгеновские исследования углеродных нанотрубок представлены в [1–5], где рассмотрены дифракционные картины и характерные для этого материалы, интерференционные максимумы — (002), (100), (004). Для нанотрубок отличительной особенностью является наличие максимальных интенсивностей в значениях пиков (002) и (004). В разработках авторов [3–5] на основании параметров рентгенограмм оценивалась степень упорядоченности углеродных наноматериалов, в результате авторы приходят к выводу, что параметр находится в зависимости от максимума пика (002), при котором более упорядоченные структуры наблюдаются при снижении линии интенсивности. Выводы по работе сделаны на основании экспериментальных исследований и расчета модельных рентгенограмм на основании уравнений Дебая.

В [6] анализ фазового состава и рефлексов нанотрубок в сравнении с графитом подтвердил увеличение межплоскостного расстояния от 0,336 (графит) до 0,343 нм (УНТ) и смещение рефлекса УНТ в область меньших углов. Важным моментом в публикации является обоснование закономерностей преимущественного образования пика интенсивности (002), который в первую очередь связывают с наличием в нанотрубках искривленных участков. При условии отсутствия подобных дефектов УНТ пик (002) был бы не значительным или отсутствовал совсем, таким образом, метод рентгеновской дифракции раскрывает особенности строения рассматриваемого образца.

В [7] были проанализированы дифракционные картины рассматриваемых углеродных наноматериалов, строение и тип максимумов рентгенограмм (002), (004) подтвердил цилиндрическую структуру углеродных фаз. На основании полученных дифракционных рефлексов (002), (004) и уравнения Селякова — Шеррера определены структурные характеристики образцов, а именно размеры кристаллитов, которые находятся в диапазоне от 6 до 11 нм. В результате проведенного анализа авторы подтвердили, что в исследуемом углеродном композите присутствуют фазы, соответствующие нанотрубкам трубчатого типа строения, и рассчитали их кристаллические характеристики.

Рассмотренные опубликованные данные [6–8] говорят о том, что анализ рентгенограмм нанотрубок проводится в сочетании с другими методами (например, КР-спектроскопия), так как дифракционные картины неупорядоченных углеродных наноматериалов обладают некоторым сходством относительно исходных материалов. В связи с этим применение дополнительных методов качественного, количественного анализа и идентификации позволит однозначно установить наиболее полные характеристики строения исследуемых наноструктур. Например, в [8; 9] предложены алгоритмы автоматизации анализа рентгенограмм, которые основаны на вычислительных методах или компьютерных программах, в результате чего экспериментально полученные данные сравниваются с теоретически рассчитанными дифракционными картинками на основании методик Дебая. Однако не все подобные подходы оказываются однозначно описывающими все особенности сравниваемых дифрактограмм, а преимущественно применимы в области ограниченных характеристик (области малоуглового рассеяния, однослойные нанотрубки, графитоподобные материалы и др.), поэтому для получения полной картины строения вещества зачастую требуется использование комплексных данных сканирующей спектроскопии КР и рентгеновской дифракции.

Авторы [10] изучили размер кристаллитов графитов, технического углерода и углеродных волокон на основании отношений полос интенсивностей КР (1360 и 1580  $\text{см}^{-1}$ ) и рентгенограмм тех же материалов по формулам Вульфа — Брэгга, Шеррера и Уоррена. Для образца технического углерода размер кристаллита по рентгенометрическим данным находился в диапазоне от 3,8 до 38 нм, с другой стороны, зависимости параметров спектра КР приводят к значениям кристаллита от 4,1 до 29 нм. Несоответствие полученных значений размера областей когерентного рассеяния (КР и рентгеновской дифракции) нивелируется при расчете параметров на основании интегральных интенсивностей полос КР. В результате авторы установили линейную зависимость между средними значениями размера кристаллита и методами его определения (КР и рентгеновской дифракции), что позволяет в случае невозможности применения одного из способов ориентироваться на параметры доступного.

Вопросы о применимости соотношения пиковых интенсивностей линий ( $I_D/I_G$ ) для определения размеров кристаллитов рассматриваются уже достаточно давно и имеют существенное отражение в соответствующих публикациях [11–13] или полученных эмпирических зависимостях. В [13] методами рентгеновской дифрактометрии и КР-спектроскопии исследован цейлонский графит (так как содержит 99,9 % углерода). Сравнивая полученные результаты, ученые приходят к выводу, что эмпирические зависимости (соотношений  $D$  и  $G$  КР-спектра) являются ориентировочными сравнительными данными, которые могут помочь сопоставить различные образцы на структурном и качественном уровнях с точки зрения дефектности (дисперсности) углеродного материала. Также отмечается, что методы (рентгеновской дифрактометрии и КР-спектроскопии) не могут быть в полной мере сопоставимы (в том числе за счет физических различий в основе подходов) и не могут исключать, а, вероятнее, должны дополнять друг друга.

Разупорядоченность углеродных наноматериалов во многих случаях является следствием наличия в образце искривленных графеновых слоев и визуально достаточно точно определяется с помощью методов сканирующей электронной микроскопии.

В исследовании [14] была получена расчетная формула  $L_{eq} = 8,8(A_{2D}/A_D)$  на основании интенсивностей спектральных линий  $\approx 2450 \text{ см}^{-1}$  ( $A_{2D}$ ),  $\approx 1350 \text{ см}^{-1}$  ( $A_D$ ), для установления размера графеновых слоев с учетом их кривизны. В рамках эксперимента проводился сравнительный анализ природных фуллеренов Карельского происхождения, а именно оценивался размерный параметр графенового слоя ( $L_{eq}$ ) и размер кристаллита ( $L_a$ ) в большинстве случаев значение  $L_{eq} > L_a$ , что подтверждает искривление графенового слоя различными методами: КР, СЭМ. Эти выводы коррелируются с исследованиями авторов [15], которые были выполнены с помощью рамановской спектроскопии наноалмазных углеродов, полученных при высоких температурах. Установили, что полосы  $2D$  наблюдаются в образцах с температурой отжига (1900 К и выше), что приводит к формированию вытянутых форм графеновых фрагментов.

В проанализированных данных [16] рассмотрены рамановские спектры многослойных углеродных нанотрубок и их модификаций. Образцы нанотрубок отличались средними диаметрами, которые были проконтролированы просвечивающей электронной микроскопией. Структурные особенности материалов анализировались на основании отношений интенсивностей ( $I_{2D}/I_D$ ) от среднего диаметра нанотрубки, что продемонстрировало почти линейную зависимость, при которой рост диаметра нанотрубок сопровождался возрастанием значения ( $I_{2D}/I_D$ ).

Рассмотренные научные источники позволяют сделать вывод, что спектроскопия комбинационного рассеяния света и рентгеновская дифракция применяются в качестве средств диагностики структурных параметров и степени дефектности углеродных наноматериалов с достаточной точностью достоверности результатов. Полученные такими способами показатели помогут оценить прикладные свойства и размерные особенности наноструктур. Целью рассматриваемого исследования является анализ структурных особенностей углеродных наноматериалов и оценка возможного влияния данного фактора (размера кристаллита) на физико-механические характеристики строительного композита при использовании наноструктур в качестве компонента наномодифицирующей добавки. Для выполнения намеченных условий исследования планируется провести комплексное исследование углеродного наноматериала методами КР-спектроскопии, рентгеновской дифракции, сканирующей электронной микроскопии и выполнить испытания модифицированного гипса (проверяемыми наноструктурами) на физико-механические показатели.

## 2. Материалы и методы

В работе были исследованы углеродные наноматериалы «Таунит» (ООО «НаноТехЦентр», г. Тамбов), которые были получены при различных режимных параметрах синтеза. Нанотрубки синтезированы в процессе каталитического пиролиза (CVD) в среде углеводородов на катализаторах (Ni/Mg). Температура синтеза — 630 °С, расход пропан-бутановой смеси — 15 л/мин, время синтеза — 1–90 мин.

В качестве вяжущего вещества для подготовки образцов модифицированного композита использовался гипс строительный белый природного происхождения, Межгосударственный стандарт ГОСТ 125-2018<sup>3</sup>, торговая марка — Alabaster Paladium, Г-5, фасовка 5 кг.

<sup>3</sup> ГОСТ 125-2018. Вяжущие гипсовые. Технические условия. М.: Стандартинформ, 2018. 10 с. URL: [http://rosgps.ru/images/doc/gost\\_125-2018.pdf](http://rosgps.ru/images/doc/gost_125-2018.pdf) (дата обращения: 21. 02.2023).

Электронная сканирующая микроскопия выполнена на универсальном аналитическом комплексе, автоэмиссионном сканирующем электронном микроскопе Merlin (CarlZeiss). Структурно-морфологические параметры оценивали рентгенодифрактометрическим способом (CuK $\alpha$ -излучение,  $\lambda = 1.5406 \text{ \AA}$ , дифрактометр Bruker D2 Phaser) и методом спектроскопии комбинационного рассеяния (Raman Microscope (Thermo Scientific Instruments Group, Waltham, MA USA)).

### 3. Результаты и обсуждения

Структурные параметры углеродных наноматериалов на основании сканирующей электронной микроскопии показали (рис. 1), что частицы углеродного материала представляют собой пучки цилиндров различного диаметра, что соотносится с характеристиками углеродных нанотрубок серии «Таунит», которые представляют собой квазиодномерные, наномасштабные, нитевидные образования поликристаллического графита преимущественно цилиндрической формы с внутренним каналом.

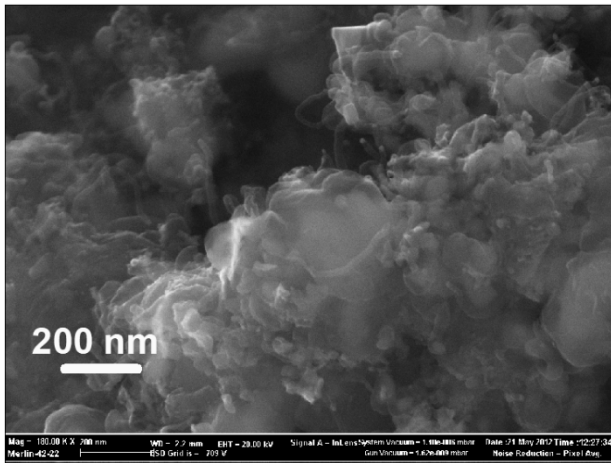
В зависимости от режима синтеза диаметр углеродных нанотрубок находится в различном интервале значений (S2–20 — 30–60 нм, S2–21 — 70–104 нм, S2–22 — 55–95 нм, S2–23 — 50–100 нм, S2–24 — 35–78 нм). Значение среднего диаметра наноматериалов S2–24 оказалось минимальным относительно других образцов и составляет не более 50 нм. При увеличении времени синтеза фиксируется сокращение не вступивших в реакцию или инкапсулированных катализаторов. Картина роста углеродных нанотрубок соответствует принципу вершинного роста, при котором частица катализатора перемещается вертикально совместно с растущим углеродным волокном. Наличие разветвления и сплетения материала S2–21–S2–23 (см. рис. 1) связано с делением катализатора на отдельные частицы. Значительного количества катализатора, которое может оказывать значимое воздействие на углеродный материал или модифицируемый им объект, остаточных продуктов не обнаружено [17].

Точная информация о структурных параметрах исследуемых материалов, включая колебательные характеристики атомов, дает возможность выявить степень упорядоченности и однородности структуры. Эти показатели будут играть существенную роль при оптимизации и разработке принципов наномодифицирования, так как физико-химические параметры объектов позволят прогнозировать взаимодействие модифицирующих компонентов и элементов матрицы. Далее для выявления закономерностей структурных параметров углеродных наноматериалов как компонентов состава модификатора были проведены их исследования на основании рентгеновской дифрактометрии и КР-спектроскопии.

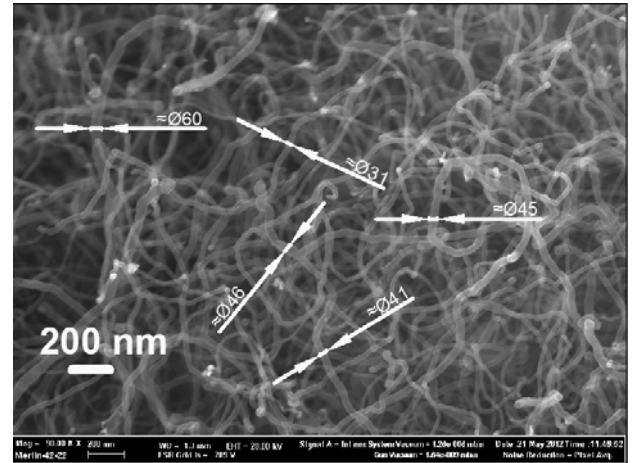
В зарегистрированных КР-спектрах образцов фиксируются пики (рис. 2), соответствующие нанотрубкам (группы интенсивностей  $G$  и  $D$ ). Остроугольное строение пика подтверждает происхождение углеродных наноматериалов на основе металлооксидных катализаторов. Среди других интенсивностей следует выделить наличие oTO-фононной моды, ее наличие отражает присутствие в материале искривленных графеновых слоев, которое системно снижается за счет увеличения длительности синтеза. Изменение интенсивности линии 2D находится в аналогичной зависимости от времени синтеза и при максимальной продолжительности 90 минут существенно сокращается. Такое поведение линии 2D связывают со значительной чувствительностью к формированию изменений графеновых слоев и содержанием в углеродных наноматериалах фаз двумерного и трехмерного строения компонентов системы.

На основании эмпирических зависимостей, полученных в исследованиях авторов [11–14], были рассчитаны средние размеры графенового фрагмента кристаллита углеродных наноматериалов с использованием данных комбинационного рассеяния света и соотношения  $I_D/I_G$ . В результате размеры кристаллитов нанотрубок находятся в диапазоне значений от 3 до 17 нм в зависимости от подхода расчета и времени синтеза (рис. 3). Сравнивая полученные значения с результатами сканирующей электронной микроскопии, можно сделать вывод, что размер кристаллита углеродного наноматериала зависит от диаметра наноструктур и возрастает одновременно с этим показателем. Материал под обозначением S2–24 относительно других рассматриваемых образцов наноматериалов определяется минимальными значениями от 3 до 11 нм. Исходя из этого можно предположить, что наличие существенной интенсивности линии  $D$  в нанотрубках S2–24 допускается характеризовать не только с дефектностью структуры, но и с меньшим показателем их диаметра и размера графеновых фрагментов кристаллитов относительно других образцов.

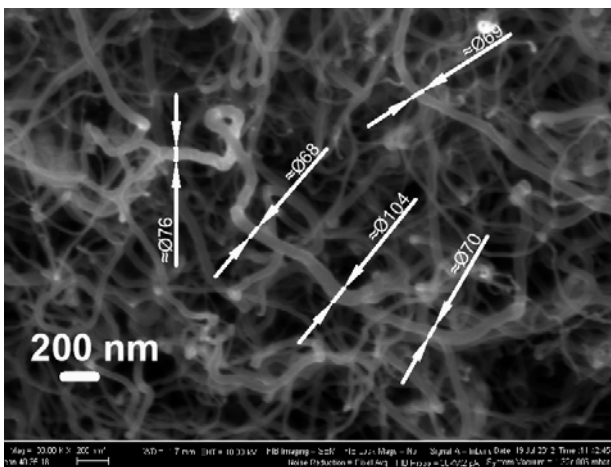




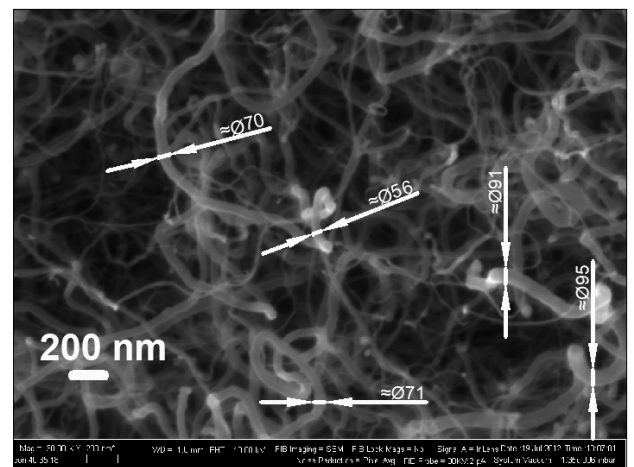
*a*



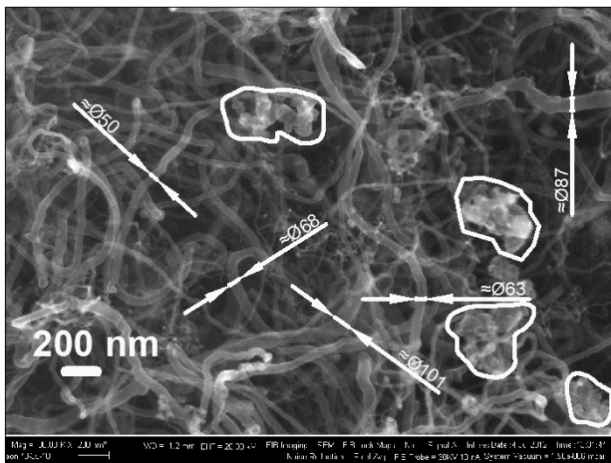
*б*



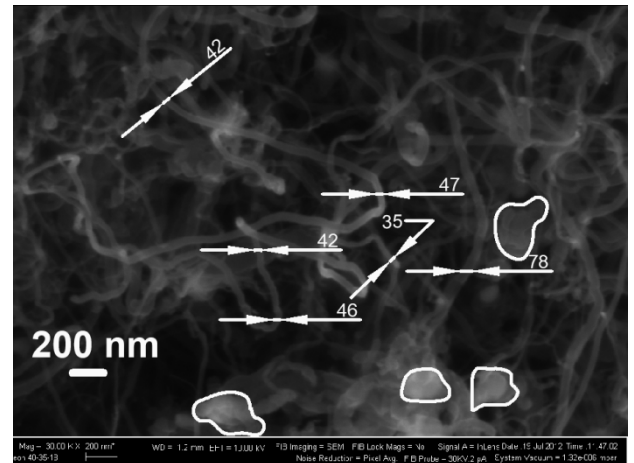
*в*



*г*



*д*



*е*

**Рис. 1.** СЭМ изображения УНТ «Таунит»:

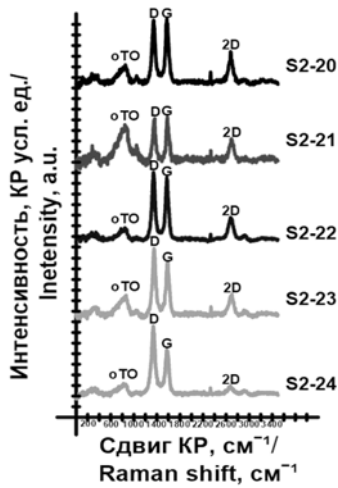
*a* — S2–19 (время синтеза — 1 минута); *б* — S2–20 (время синтеза — 5 минут); *в* — S2–21 (время синтеза — 10 минут); *г* — S2–22 (время синтеза — 20 минут); *д* — S2–23 (время синтеза — 40 минут); *е* — S2–24 (время синтеза — 90 минут)

Источник: выполнено автором

**Figure 1.** SEM images of CNT «Таунит»:

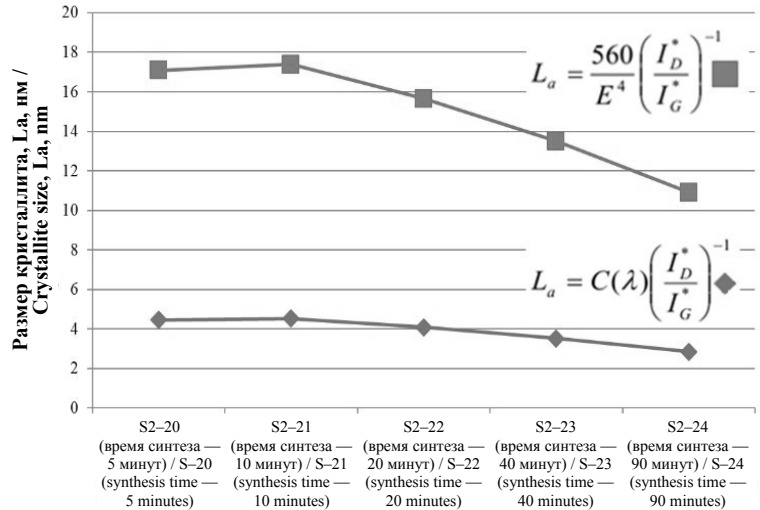
*a* — S2–19 (synthesis time — 1 minute); *б* — S2–20 synthesis time — 5 minutes; *в* — S2–21 (synthesis time — 10 minutes); *г* — S2–22 (synthesis time — 20 minutes); *д* — S2–23 (synthesis time — 40 minutes); *е* — S2–24 (synthesis time — 90 minutes)

Source: made by the author



**Рис. 2.** КР-спектры УНМ «Таунит» при различных интервалах времени синтеза  
 Источник: выполнено автором

**Figure 2.** Raman spectra of CNM “Taunit” at different synthesis time intervals  
 Source: made by the author



**Рис. 3.** Средний размер графенового фрагмента кристаллита для образцов МУНТ в зависимости от времени синтеза  
 Источник: выполнено автором

**Figure 3.** The average size of a graphene fragment of a crystallite for MWCNT samples depending on the synthesis time  
 Source: made by the author

На основе полученных рентгенографических исследований (рис. 4) углеродных наноматериалов по дифракционным данным отмечаются пики, характерные для нанотрубок — (002), (100), (004), (110). В интервале углов  $2\theta$  от  $26\text{--}26,5^\circ$  пик интенсивности формируется в виде максимального (особенно на поздних этапах синтеза), что соответствует дифракции на плоскостях графенового слоя. Строение характерных пиков (002), (004) подтверждает многослойную структуру углеродных наноматериалов, а возрастание рефлекса сопровождается увеличением времени синтеза и повышением области упорядоченности относительно других направлений. При времени синтеза наноструктур 90 минут наиболее явно проявляются максимумы рассматриваемых интенсивностей, остальные максимумы практически незаметны. Высокие и узкие пики интенсивностей характерны для нанотрубок при количестве формирующих слоев от 10 и более, что подтверждается данными производителя и не превышает 15–25. Учитывая, что число слоев фактически иллюстрирует внешний радиус нанотрубки, при некоторых условиях возможно ориентироваться на эти значения, но в нашем случае за счет увеличения длительности синтеза и протекания процессов формирования этот параметр не подходит, что также подтверждают исследования КР-спектроскопии и сканирующей электронной микроскопии.

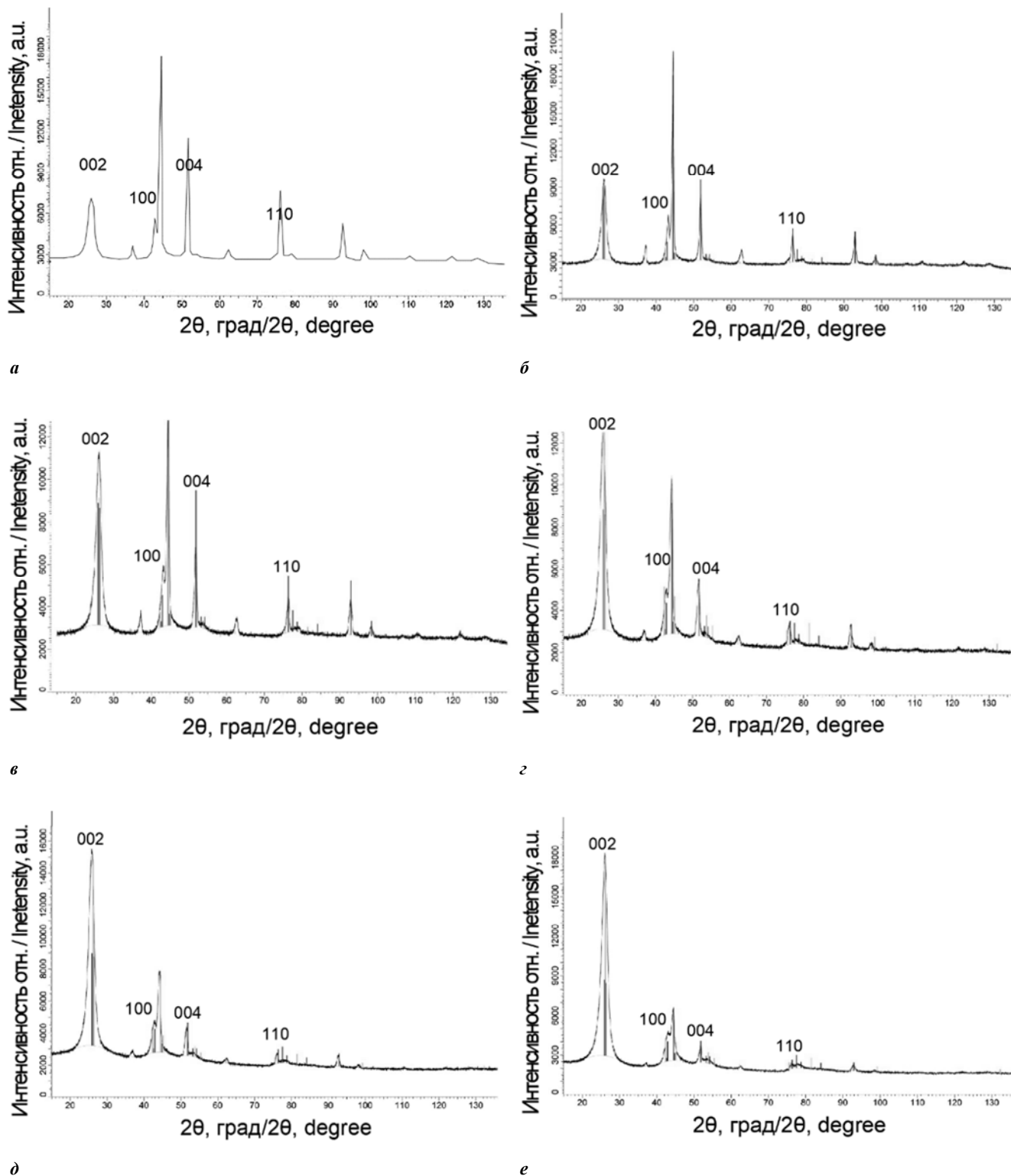
По дифракционным картинкам УНТ (рис. 4), не обнаружено существенного количества присутствующего графита (несмотря на близкое строение), так как в рентгенограммах наблюдается наибольший рост интенсивности преимущественно в пиках (002) и (004), а для графита характерно повышение большинства интерференционных максимумов.

Согласно данным анализа профилей рентгеновской дифракции, по формуле Селякова — Шеррера рассчитывали размеры кристаллитов  $L_c$  и  $L_a$ , соответственно в продольном и перпендикулярном направлении углеродных слоев. Используя экспериментальные данные по рефлексу (002) оценивали размер области когерентного рассеяния вдоль оси  $c$ , по рефлексу (110) — вдоль оси  $a$ :

$$L_{a,c} = \frac{K\lambda}{\beta \cos\theta}$$

где  $L_{a,c}$  — размеры кристаллитов;  $K$  — константа, близкая к 0,9–1;  $\lambda$  — длина волны;  $\beta$  — полуширина рентгеновской линии ( $hkl$ ), по которой выполнялся анализ;  $\theta$  — брэгговский угол для плоскости ( $hkl$ ).

Согласно расчетам, размеры кристаллитов нанотрубок в результате роста времени синтеза находятся в пределах 9–12 нм в продольном направлении и 22–38 нм в перпендикулярном направлении.



**Рис. 4.** Рентгенограммы УНТ «Таунит»:

*a* — S2-19, время синтеза — 1 минута; *б* — S2-20, время синтеза — 5 минут; *в* — S2-21, время синтеза — 10 минут; *г* — S2-22, время синтеза — 20 минут; *д* — S2-23, время синтеза — 40 минут; *е* — S2-24, время синтеза — 90 минут

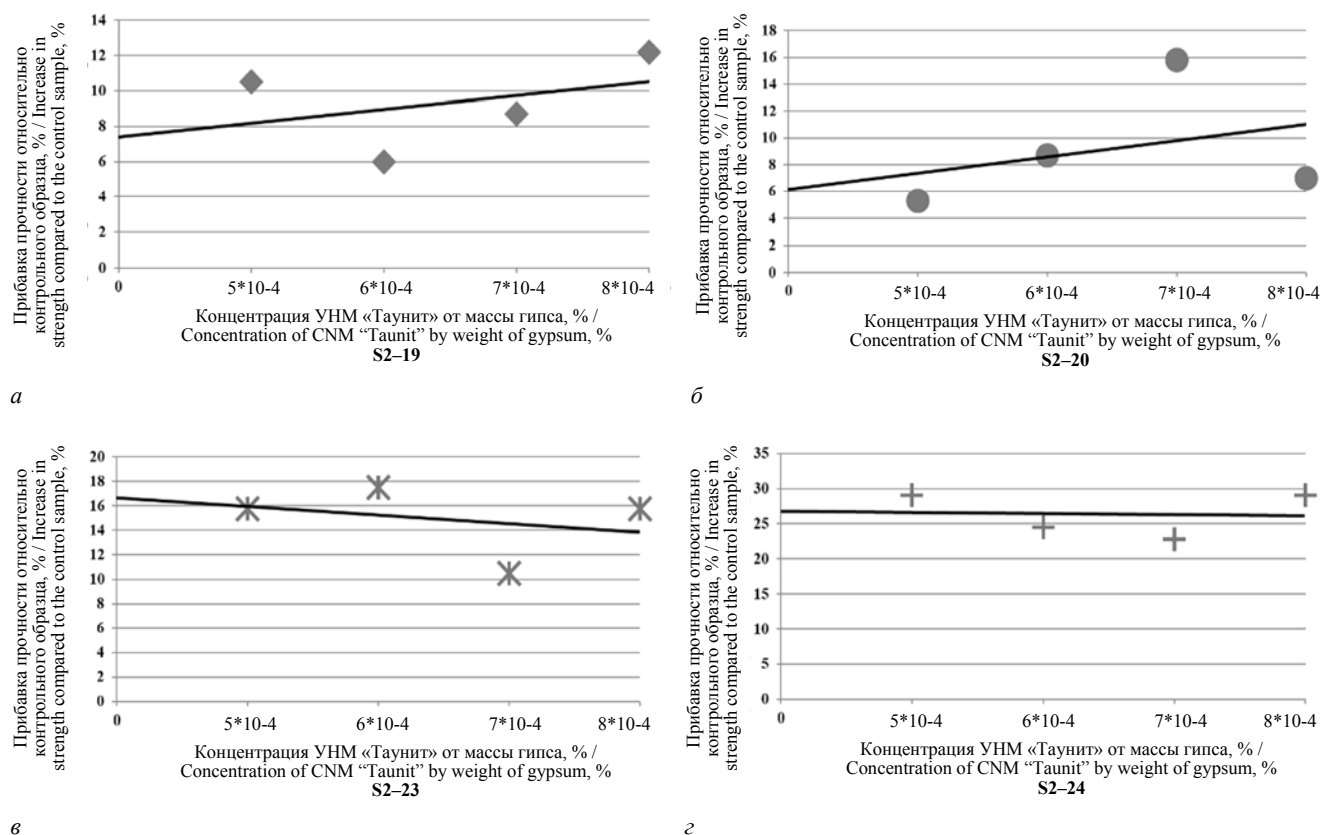
И с т о ч н и к : выполнено автором

**Figure 4.** Radiographs of CNT “Taunit”:

*a* — S2-19, synthesis time — 1 minute; *б* — S2-20, synthesis time — 5 minutes; *в* — S2-21, synthesis time — 10 minutes; *г* — S2-22, synthesis time — 20 minutes; *д* — S2-23, synthesis time — 40 minutes; *е* — S2-24, synthesis time — 90 minutes

S o u r c e : made by the author

Расчет и сравнение данных рентгенограмм и сканирующей электронной микроскопии для определения влияния длины нанотрубок на картину рассеяния показал, что значительного влияния не обнаружено. Однако строение рефлексов дифракционной картины, а именно узкие интенсивные пики, которые постепенно возрастают при увеличении времени синтеза, характерны для нанотрубок, в которых существенно (в 5–6 раз и более) значение протяженности превышает характеристики диаметра. Параметры решетки кристаллов и положения интенсивностей для каждого типа наноструктур соответствуют и сохраняют свои координаты в исходных значениях, независимо от периода синтеза. Наблюдаемые осцилляции (см. рис. 4) в виде «биения» интенсивностей на рентгенограммах (в основном начальные стадии синтеза) являются следствием того, что нанотрубки при синтезе представляют собой некоторую совокупность различных характеристик, которая со временем синтеза сглаживается за счет формирования образцов близкой формы и размера. Дифракционная картина (см. рис. 4) показывает, что сглаживание интерференционных максимумов происходит в основном на участке дальнего рассеяния, а область малоуглового распределения изменяется незначительно, и связано это в большей степени с варьированием размеров кристаллита.



**Рис. 5.** Изменение физико-механических показателей прочности модифицированных образцов гипса (относительно контрольного образца) при различных марках — УНМ «Таунита»: а — S2-19 (время синтеза — 1 минута); б — S2-20 (время синтеза — 5 минут); в — S2-23 (время синтеза — 40 минут); з — S2-24 (время синтеза — 90 минут)

И с т о ч н и к : выполнено автором

**Figure 5.** Changes in the mechanical strength parameters of modified gypsum samples (relative to the control sample) for different brands — CNM «Taunit»:

а — S2-19 (synthesis time — 1 minute); б — S2-20 (synthesis time — 5 minutes); в — S2-23 (synthesis time — 40 minutes); з — S2-24 (synthesis time — 90 minutes)

S o u r c e : made by the author

ченые результаты показали стабильное увеличение физико-механических и эксплуатационных свойств материала. Внесение наномодификатора осуществлялось с водой затворения, в части которой нанотрубки находились под воздействием ультразвуковой обработки [19], совмещались с остальной частью жидкости и смешивались с вяжущим для подготовки смеси. Диапазон внесения наноструктур был определен исходя из ранее выполненных собственных и сторонних работ [17–19] в пределах 0,0001–0,001 %, от массы цемента (рис. 5). Результирующим эффектом использования модифицирующей добавки является рост физико-механических характеристик строительного композита. Оценка влияния параметров композита подтвердила увеличение значений эксплуатационных показателей материала до 20–25 % относительно контрольного образца (см. рис. 5).

На основании полученных данных (см. рис. 5) и согласно предшествующим работам [17–19] предполагается, что структура композита при внесении наномодификатора приобретает более плотную упаковку частиц, что подтверждается ростом физико-механических характеристик материала и наличием новообразований с измененной морфологией кристаллогидратов [19]. В результате композиционный материал формируется из исходных компонентов системы, а дополнительные частицы в виде наноструктур выполняют роль прекурсоров, что обеспечивает стимулирование системы твердения в структуре композита. Следовательно, с помощью процессов наномодифицирования реализуются эффекты управления структурообразованием, связанные с проявлением влияния наноразмерных частиц как модификаторов, выполняющих роль зародышей структурообразования, центров кристаллизации и роста частиц новой фазы армирующих элементов матрицы.

#### 4. Заключение

1. Исследования углеродных наноматериалов, выполненные на основании рентгеновской дифрактометрии, КР-спектроскопии и сканирующей микроскопии, продемонстрировали возможность их использования в качестве дополнительных или контрольных методов при изучении наноструктурированных материалов.

2. Данные КР-спектроскопии и рентгеновского рассеяния обнаруживают, что в структурном аспекте размерного значения кристаллита нанотрубки находятся в пределах 9–12 нм в продольном направлении и 22–38 нм в перпендикулярном направлении. Размер кристаллита нанотрубок для материала S2–24 время синтеза 90 минут фиксируется в виде минимального значения в сравнении с другими образцами и сохраняют аналогичную тенденцию при разных методах диагностики.

3. Стабильность нанотрубок при различной длительности их синтеза (1–90 мин) отражается изменением формирующихся веществ размеров блоков. Системы, состоящие из больших блоков, обычно менее стабильны (имеют меньшую прочность на излом), чем системы, состоящие из меньших блоков. Сопоставление методов позволяет сделать вывод, что высокое положение линии интенсивности  $D$  для S2–24 в исследованиях КР-спектроскопии может быть связано не только с дефектностью структуры материала, но и с уменьшением размера графеновых фрагментов кристаллитов, что подтверждается взаимодополняющими данными дифракционных картин рентгеноструктурного анализа.

4. Исследованные углеродные наноматериалы, сформированные при различных режимах синтеза и структурно отличные по размерным характеристикам зерна, проанализированы на предмет влияния на физико-механические характеристики строительного композита в составе модификатора. В результате применения в качестве компонента модификатора нанотрубок с длительностью синтеза от 40 до 90 минут наблюдается увеличение значений эксплуатационных показателей композита до 20–25 % относительно контрольного образца. Исходя из этого можно сделать вывод, что уровень модифицирующего эффекта многих добавок, в том числе и нанодобавок, зависит в том числе и от размерного порядка активного компонента.

#### Список литературы

1. *Iakoubovskii K.* Techniques of aligning carbon nanotubes // Central European Journal of Physics. 2009. Vol. 7. Issue 4. P. 645–653. <https://doi.org/10.2478/s11534-009-0072-2>
2. *Zhu Y.Q., Zhang H.G., Zhang J.H., Liang J., Gao Z.D., Wei B.Q., Wu D.H., Hui M.J.* X-ray diffraction study of carbon microtubules // Journal of Materials Science Letters. 1994. Vol. 13. P. 1104–1105. <https://doi.org/10.1007/BF00633527>
3. *Cao A., Xu C., Liang J., Wu D., Wei B.* X-ray diffraction characterization on the alignment degree of carbon nanotubes // Chemical Physics Letters. 2001. Vol. 344. P. 13–17. [https://doi.org/10.1016/S0009-2614\(01\)00671-6](https://doi.org/10.1016/S0009-2614(01)00671-6)

4. Koloczeka J., Haweleka L., Buriana A., Dore J.C., Honkimäki V., Kyotani T. Modelling studies of carbon nanotubes — Comparison of simulations and X-ray diffraction data // *Journal of Alloys and Compounds*. 2005. Vol. 401. Issue 1. P. 46–50. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2005.02.068>
5. Reznik D., Olk C.H., Neumann D.A., Copley J.R. X-ray powder diffraction from carbon nanotubes and nanoparticles // *Physical Review B*. 1995. Vol. 52. Issue 1. P. 116–124. <https://doi.org/10.1103/physrevb.52.116>
6. Обьедков А.М., Петрова О.В., Некупелов С.В., Каверин Б.С., Семенов Н.М., Гусев С.А. Рентгеновские и синхротронные исследования гетерогенных систем на основе многостенных углеродных нанотрубок // *Нанопизика и наноэлектроника: труды XVIII Международного симпозиума*. Н. Новгород, 2014. Т. 18-1. С. 337–338. EDN: WBXTVX
7. Беленков Е.А., Байтунгер Е.М., Пермьяков О.В. О строении углеродного депозита, содержащего нанотрубки // *Химическая физика и мезоскопия*. 2000. Т. 2. № 2. С. 155–161. EDN: MIILNM
8. Неверов В.С. Использование графических процессоров для моделирования дифракционных характеристик наноразмерных структур // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2011. № 7. С. 973–982. EDN: TJTXBD
9. Billinge S.J.L., Levin I. The Problem with Determining Atomic Structure at the Nanoscale // *Science*. 2007. Vol. 316. No. 5824. P. 561–565. <https://doi.org/10.1126/science.1135080>
10. Abyzov A.M., Ivanova E.A., Smirnov E.P. Raman spectroscopic study of sp<sup>2</sup>-carbon materials // *Inorganic Materials*. 1987. Vol. 23. No. 10. P. 1664–1668.
11. Ferrari A.C., Meyer J.C., Scardaci V., Casiraghi C., Lazzeri M., Mauri F., Piscanec S., Jiang D., Novoselov K.S., Roth S., Geim A.K. Raman spectrum of graphene and graphene layers // *Physical review letters*. 2006. Vol. 97 No. 18. P. 187401–187403. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.187401>
12. Saito R., Jorio A., Souza Filho A.G., Grueneis A., Pimenta M.A., Dresselhaus G. Dispersive Raman spectra observed in graphite and single wall carbon nanotubes // *Physica B: Condensed Matter*. 2002. Vol. 323 (1–4). P. 100–106. [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(02\)00992-4](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(02)00992-4)
13. Букалов С.С., Михалицын Л.А., Зубавичус Я.В., Лейтес Л.А., Новиков Ю.Н. Исследование строения графитов и некоторых других sp<sup>2</sup> углеродных материалов методами микроскопии КР и рентгеновской дифрактометрии // *Российский химический журнал*. 2006. Т. 1. № 1. С. 83–91. EDN: HTUULH
14. Martins Ferreira E.H., Moutinho M.V.O., Stavale F., Lucchese M.M., Capaz R.B., Achete C.A., Jorio A. Evolution of the Raman spectra from single-, few-, and many-layer graphene with increasing disorder // *Physical Review B*. 2010. Vol. 82. No. 12. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.125429>
15. Bokova-Sirosh S.N., Pershina A.V., Kuznetsov V.L., Ishchenko A.V., Moseenkov S.I., Orekhov A.S., Obratsova E.D. Raman Spectra for characterization of onion-like carbon // *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*. 2013. Vol. 8. No. 1. P. 105–108. <https://doi.org/10.1166/jno.2013.1444>
16. Kuznetsov V.L., Bokova-Sirosh S.N., Moseenkov S.I., Ishchenko A.V., Krasnikov D.V., Kazakova M.A., Romanenko A.I., Tkachev E.N., Obratsova E.D. Raman spectra for characterization of defective CVD multi-walled carbon nanotubes // *Physica status solidi (b): Basic solid state physics*. 2014. Vol. 251. No. 12. P. 2444–2450. <https://doi.org/10.1002/pssb.201451195>
17. Толчков Ю.Н. Анализ структурных параметров углеродных наноматериалов «Таунит» методом комбинационного рассеяния света // *Материаловедение*. 2022. № 10. С. 38–47. <https://doi.org/10.31044/1684-579X-2022-0-10-38-47>
18. Толчков Ю.Н., Михалева З.А., Ткачев А.Г. Модифицирование строительных материалов углеродными нанотрубками // *Технологии бетонов*. 2012. № 7–8 (72–73). С. 65–66. EDN: SYTIKP
19. Ткачев А.Г., Слдозьян Р.Д.А., Михалева З.А., Толчков Ю.Н. Оценка влияния модификатора на основе углеродных нанотрубок с сурфактантами на физико-механические характеристики строительных композитов // *Вестник Тамбовского государственного технического университета*. 2019. Т. 25. № 4. С. 660–670. <https://doi.org/10.17277/vestnik.2019.04.pp.660-670>

## References

1. Iakoubovskii K. Techniques of aligning carbon nanotubes. *Central European Journal of Physics*. 2009;7(4):645–653. <https://doi.org/10.2478/s11534-009-0072-2>
2. Zhu Y.Q., Zhang H.G., Zhang J.H., Liang J., Gao Z.D., Wei B.Q., Wu D.H., Hui M.J. X-ray diffraction study of carbon microtubules. *Journal of Materials Science Letters*. 1994;13:1104–1105. <https://doi.org/10.1007/BF00633527>
3. Cao A., Xu C., Liang J., Wu D., Wei B. X-ray diffraction characterization on the alignment degree of carbon nanotubes. *Chemical Physics Letters*. 2001;344:13–17. [https://doi.org/10.1016/S0009-2614\(01\)00671-6](https://doi.org/10.1016/S0009-2614(01)00671-6)
4. Koloczeka J., Haweleka L., Buriana A., Dore J.C., Honkimäki V., Kyotani T. Modelling studies of carbon nanotubes — Comparison of simulations and X-ray diffraction data. *Journal of Alloys and Compounds*. 2005;401(1):46–50. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2005.02.068>
5. Reznik D., Olk C.H., Neumann D.A., Copley J.R. X-ray powder diffraction from carbon nanotubes and nanoparticles. *Physical Review B*. 1995;52(1):116–124. <https://doi.org/10.1103/physrevb.52.116>

6. Obedkov A.M., Petrova O.V., Nekipelov S.V., Kaverin B.S., Semenov N.M., Gusev S.A. X-ray and synchrotron studies of heterogeneous systems based on multi-walled carbon nanotubes. *Nanophysics and nanoelectronics: Proceedings of the XVIII International Symposium. Nizhny Novgorod, March 10-14, 2014*. Nizhny Novgorod, 2014:18-1:337–338. (In Russ.) EDN: WBXTVX
7. Belenkov E.A., Baitinger E.M., Permyakov O.V. On the structure of a carbon deposit containing nanotubes. *Chemical physics and mesoscopy*. 2000;2:155–163. (In Russ.) EDN: MIILNM
8. Neverov V.S. The use of graphics processors for modeling the diffraction characteristics of nanoscale structures. *Modern information technologies and IT-education*. 2011;7:973–982. (In Russ.) EDN: TJTXBD
9. Billinge S.J.L., Levin I. The Problem with Determining Atomic Structure at the Nanoscale. *Science*. 2007;316(5824):561–565. <https://doi.org/10.1126/science.1135080>
10. Abyzov A.M., Ivanova E.A., Smirnov E.P. Raman spectroscopic study of sp<sup>2</sup>-carbon materials. *Inorganic Materials*. 1987;23(10):1664–1668.
11. Ferrari A.C., Meyer J.C., Scardaci V., Casiraghi C., Lazzeri M., Mauri F., Piscanec S., Jiang D., Novoselov K.S., Roth S., Geim A.K. Raman spectrum of graphene and graphene layers. *Physical review letters*. 2006;97(18):187401–187403. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.187401>
12. Saito R., Jorio A., Souza Filho A.G., Grueneis A., Pimenta M.A., Dresselhaus G. Dispersive Raman spectra observed in graphite and single wall carbon nanotubes. *Physica B: Condensed Matter*. 2002;323(1–4):100–106. [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(02\)00992-4](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(02)00992-4)
13. Bukalov S.S., Mikhaliysyna L.A., Zubavichus Ya.V., Leites L.A., Novikov Yu.N. Investigation of the structure of graphite and some other sp<sup>2</sup> carbon materials by Raman microscopy and X-ray diffractometry. *Rossiyskij himicheskij zhurnal [Russian chemical journal]*. 2006;1(1):83–91. (In Russ.) EDN: HTUULH
14. Martins Ferreira E.H., Moutinho M.V.O., Stavale F., Lucchese M.M., Capaz R.B., Achete C.A., Jorio A. Evolution of the Raman Spectra from Single-, Few-, and Many-Layer Graphene with Increasing Disorder. *Physical Review B*. 2010;82(12):125429. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.125429>
15. Bokova-Sirosh S.N., Pershina A.V., Kuznetsov V.L., Ishchenko A.V., Moseenkov S.I., Orekhov A.S., Obratsova E.D. Raman Spectra for characterization of onion-like carbon. *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*. 2013;8(1):105–108. <https://doi.org/10.1166/jno.2013.1444>
16. Kuznetsov V.L., Bokova-Sirosh S.N., Moseenkov S.I., Ishchenko A.V., Krasnikov D.V., Kazakova M.A., Romanenko A.I., Tkachev E.N., Obratsova E.D. Raman spectra for characterization of defective CVD multi-walled carbon nanotubes. *Physica status solidi (b): Basic solid state physics*. 2014;251(12):2444–2450. <https://doi.org/10.1002/pssb.201451195>
17. Tolchkov Yu.N. Analysis of structural parameters of carbon nanomaterials “Taunit” by raman scattering of light. *Materialovedenie [Materials science]*. 2022;10:38–47. (In Russ.) <https://doi.org/10.31044/1684-579X-2022-0-10-38-47>
18. Tolchkov Yu.N., Mikhaleva Z.A., Tkachev A.G. Inoculation of building materials by carbon nanotubes. *Concrete Technologies*. 2012;7–8(72–73):65–66. (In Russ.) EDN: SYTIKP
19. Tkachev A.G., Sldozyan R.D.A., Mikhaleva Z.A., Tolchkov Yu.N. Assessment of the effect of a modifier based on carbon nanotubes with surfactants on the physicomechanical characteristics of building composites. *Transactions of the TSTU*. 2019;25(4):660–670. (In Russ.) <https://doi.org/10.17277/vestnik.2019.04.pp.660-670>

