Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

2023 Том 19 № 5

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5

http://journals.rudn.ru/structural-mechanics (открытый доступ)

Международный научно-технический журнал

Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, RSCI, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения (технические науки), 2.1.2. Основания и фундаменты, подземные сооружения (технические науки), 2.1.9. Строительная механика (технические науки)

Международный научно-технический журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

P

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск. Россия Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия Адилходжаев А.И., д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия Анореев Б.И., акад. ГААСН, дер тем. наук, проф., ТИГУ ИГСУ, Москва, госсия Базаров Д.Р., дер техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан Вании В.В., дер техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина Варум У., дер философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия Войцицкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

Волосухин В.А., д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия Галишникова В.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия Дуцев М.В., д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия Евкин А.Ю., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада Какоеи С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак Малайзия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Козлов Д.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия Кудрявцев С.А., чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия

Курбацкий Е.Н., д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия

Лазарев Ю.Г., д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

Перькова М.В., д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия Федюк Р.С., д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия Якупов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН,

Казань. Россия

Содержание

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИИ	
Зверяев Е.М., Рынковская М.И., Хоа В.Д. Построение решения уравне-	
ний теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых	
отображений	
Lebed E.V. Influence of the size of the upper ring on the stressed state of the	
ribbed-ring metal dome (Влияние размера верхнего кольца на напря-	
женное состояние ребристо-кольцевого металлического купола)	
Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудиына И.Е. Снижение чувствитель-	
ности к начальным несовершенствам при помощи изменения бифур-	
кационных диаграмм	
Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И. Частотный отклик конструкций	
оольшепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием	
АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ	
<i>Popov A.N., Lovtsov A.D.</i> Algorithm for calculating the problem of unilateral	
frictional contact with an increscent external load parameter (Алгоритм	
расчета задачи одностороннего контакта с трением с нарастающим	
параметром внешней нагрузки)	
Alzamili H.H., Elsheikh A.M. Performance of reinforced concrete elements	
strengthened with carbon fiber CFRP at elevated temperatures (Xapaĸ-	
теристики железобетонных элементов, усиленных углепластиком	
СFRР при повышенных температурах)	
<u>РАСЧЕТ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК</u>	
Тупикова Е.М. Оболочки в форме алгебраических линейчатых поверх-	
ностей на ромбическом плане	
2 AUUATA SEALUAN COODVOKELUAN IA KOLICTEVKLUAN	
Защита здании, сооружении и конструкции	
Аверкиев А.А., Васенин И.Е., Ефименко М.Н., Пащенко Ф.А., Харьков Н.С.	
Влияние гидрофобизации аэродромных покрытии на расход противо-	
гололедных реагентов	
СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ	
Hematibahar M Vatin NI Hamid TI Gebre TH Effect of using 3D.	
printed shell structure for reinforcement of ultra-high-performance concrete	
(Эффект от применения 3D-печатной оболочки для армирования	
сверхвысокопрочного бетона)	
П Панкратова	
ых текстов С.Л. Шамбина	
IN IO II Etanorea	

Дизайн обложки: Ю Компьютерная верстка: Н.В. Маркелова

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 25.10.2023. Выход в свет 31.10.2023. Формат 60×84/8.

Редактор И.Л Редактор англоязычных

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 15,1. Тираж 250 экз. Заказ № 2054. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, 2023 © Курылева А.А., фото на обложке (Музей науки им. принца Фелипе. Валенсия. Испания), 2023

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2023 VOLUME 19 NO. 5

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5

http://journals.rudn.ru/structural-mechanics (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machinebuilding structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal. The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-

text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatin, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia *Vitaly I. Kolchunov*, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia Vladimir I. Andreev, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc. Professor, TIIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dutsev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova DSc. Professor, MGSU Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malavsia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal Marearita V. Perkova Dr of Architecture SPbPU St Petersburg Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil Lisbon. Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

Copy Editor I.L. Pankratova English Texts' Editor S.L. Shambina Graphic Designer Iu.N. Efremova Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 2023 © Kuryleva A.A., photo on the cover of the journal (Prince Felipe Science Museum. Valencia. Spain), 2023

CONTENTS

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

Zveryaev E.M., Rynkovskaya M.I., Hoa V.D. Generation a solution the equations of elasticity theory for a layered strip basing on the principle of	
compressed mapping	421
Lebed E.V. Influence of the size of the upper ring on the stressed state of	
the ribbed-ring metal dome	450
<i>Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E.</i> Reducing sensitivity to initial imperfections by changing bifurcation diagrams	459

DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

 Kuzhakhmetova E.R., Sutyrin V.I. Frequency response of the construction of a large-span building with a cylindrical-and-slab roof
 469

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

 Popov A.N., Lovtsov A.D. Algorithm for calculating the problem of unilateral frictional contact with an increscent external load parameter.....
 491

 Alzamili H.H., Elsheikh A.M. Performance of reinforced concrete elements strengthened with carbon fiber CFRP at elevated temperatures.......
 502

ANALYSIS OF THIN SHELLS

<i>Tupikova E.M.</i> Shells in the form of algebraic ruled surfaces on a rhombic	
base	510

PROTECTION OF BUILDINGS AND STRUCTURES

CONSTRUCTION MATERIALS AND PRODUCTS



Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



PACYET И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449 УДК 539.3 EDN: FKHYLG

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений

Е.М. Зверяев¹[™], М.И. Рынковская¹[™], В.Д. Хоа²

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), *Москва, Российская Федерация* zveriaev@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 28 апреля 2023 г. Доработана: 18 августа 2023 г. Принята к публикации: 28 августа 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов Нераздельное соавторство.

Аннотация. Дано систематическое изложение модифицированного классического полуобратного метода Сен-Венана как итерационного на примере построения решения дифференциальных уравнений теории упругости для длинной слоистой полосы. Дифференциальные уравнения первого порядка плоской задачи сводятся к безразмерному виду и заменяются интегральными уравнениями относительно поперечной координаты подобно тому, как это делается в методе простых итераций Пикара. При этом в интегральных уравнениях перед знаком интеграла появляется как множитель малый параметр, с помощью которого обеспечивается сходимость решений в соответствии с принципом сжатых отображений Банаха. Уравнения и соотношения упругости преобразовываются к виду, позволяющему вычислять неизвестные последовательно, таким образом, что вычисленные в одном уравнении неизвестные являются входящими для следующего уравнения и т.д. Выполнение граничных условий на длинных краях приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для медленно и быстро меняющихся сингулярных компонент решения с шестнадцатью эффективными коэффициентами жесткости, определенными интегралами от заданных как ступенчатая функция модулей Юнга каждого слоя. Интегрирование этих обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет записать формулы для всех искомых неизвестных задачи, в том числе не определяемые в классической теории балки поперечные напряжения и решения типа краевого эффекта, и выполнить все граничные условия задачи теории

© Зверяев Е.М., Рынковская М.И., Хоа В.Д., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Зверяев Евгений Михайлович, профессор департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-8097-6684; E-mail: zveriaev@mail.ru

Рынковская Марина Игоревна, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-2206-2563; E-mail: rynkovskaya-mi@rudn.ru

Хоа Ван Донг, аспирант кафедры проектирования сложных механических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация; ORCID:0000-0002-8188-9408; E-mail: dong.hoavan@yandex.ru

упругости на коротких сторонах. Представлено решение трех краевых задач теории упругости полосы: двухслойная полоса со слоями одинаковой толщины и различной толщины и полоса с произвольным числом слоев. Получены формулы для всех неизвестных задачи.

Ключевые слова: метод Сен-Венана — Пикара — Банаха, принцип сжатых отображений, малый параметр, слоистая полоса, итерации, композит, краевой эффект

Для цитирования

Зверяев Е.М., Рынковская М.И., Хоа В.Д. Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 421–449. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449

Generation a solution to the equations of elasticity theory for a layered strip basing on the principle of compressed mappings²

Evgeny M. Zveryaev¹[™], Marina I. Rynkovskaya[™], V. Dong Hoa ²

¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation

² Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

🖾 zveriaev@mail.ru

Article history

Received: April 28, 2023 Revised: August 18, 2023 Accepted: August 28, 2023

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. A systematic presentation of the modified classical semi-inverse Saint-Venant method as an iterative one is given on the example of generating a solution to the differential equations of elasticity theory for a long layered strip. The firstorder differential equations of the plane problem are reduced to the dimensionless form and replaced by integral equations with respect to the transverse coordinate, just as it is done in the Picard method of simple iterations. In this case, a small parameter appears in the integral equations before the integral sign as a multiplying factor, which is used to ensure convergence of solutions in accordance with the Banach's principle of compressed mappings. The equations and elasticity relations are converted to a form that enables to calculate the unknowns consecutively, so that the unknowns being calculated in one equation are the inputs for the next equation, and etc. Fulfillment of the boundary conditions at the long edges leads to ordinary differential equations for slowly and rapidly changing singular components of the solution with sixteen effective stiffness coefficients that are defined by integrals from the given ones as a stepped function of Young's moduli for each layer. Integrating of these ordinary differential equations makes it possible to obtain the formulas for all the required unknowns of the problem, including transverse stresses that are not defined in the classical theory of the beam and solutions of the edge effect type, and to fulfill all the boundary conditions for the elasticity theory problem. The solution of three boundary value problems of the strip elasticity theory is provided such as for a two-layer strip with layers of the same thickness and different thicknesses, and a strip with an arbitrary number of layers. Formulas for all unknowns of the problem are obtained.

Keywords: Saint-Venant — Picard — Banach method, mapping contraction principle, small parameter, layered strip, iterations, composite, edge effect

For citation

Zveryaev E.M., Rynkovskaya M.I., Hoa V.D. Generation a solution to the equations of elasticity theory for a layered strip basing on the principle of compressed mapping. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):421–449. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449

Evgeny M. Zveryaev, DSc. In Engineering, Full Professor, Department of Construction, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8097-6684; E-mail: zveriaev@mail.ru

Marina I. Rynkovskaya, PhD, Associate Professor, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-2206-2563; E-mail: rynkovskaya-mi@rudn.ru

Van Dong Hoa, PhD student, Department of Design of Complex Technical Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-8188-9408; E-mail: dong.hoavan@yandex.ru

1. Введение

Изучение различных подходов к построению теорий тонкостенных тел позволяет рассматривать пластины, криволинейные и плоские балки как частные случаи некоторых общих построений. За последние четыре десятилетия было представлено значительное количество теорий композитных многослойных тонкостенных тел. Эти теории можно классифицировать по разным моделям, таким как эквивалентные однослойные, квазислойные и послойные модели. При этом теории разрабатывались в основном для пластин, реже для оболочек и в меньшей мере для такого тела, как балка.

Изотропные и анизотропные балки и плиты находят широкое применение в конструкциях, подверженных различным нагрузкам в суровых термических условиях, создающих в них дополнительные высокие термические напряжения. Чтобы описать правильную термическую реакцию тонких и толстых пластин, включая эффекты деформации сдвига, требуются уточненные теории. Считается, что классическая теория пластин неточна для толстых пластин из-за пренебрежения напряжениями сдвига. Чтобы преодолеть ограничения классической теории, обычно учитывается сдвиговая деформация с помощью дополнительных членов в перемещениях.

Методика образования уточненной сдвиговой теории балок и пластин была разработана Рейсснером [1] и Миндлином [2]. Поскольку в этих теориях поперечное распределение напряжения сдвига берется постоянным по толщине, в уточненной сдвиговой теории пластин, требуется поправочный коэффициент сдвига, который считается неадекватным для предсказания точных решений, например, для толстой изотропной пластины или тонкой, но анизотропной. Отсюда делается вывод, что необходимо построение теорий, учитывающих сдвиговую деформацию более высокого порядка. Кроме того, доступно множество исследований по построению уточненных сдвиговых теорий высокого порядка для слоистых пластин, например [3; 4], с помощью так называемой гиперболической сдвиговой теории. В [5; 6] предложены уточненные теории пластин экспоненциального типа. В [7] встречается изучение влияния теории деформации гиперболического сдвига на изгиб изотропных балок.

Статическое поведение балок из композиционного материала при использовании различных уточненных сдвиговых теорий произведено с помощью метода конечных элементов в [8; 10]. В [11–13] построены уточненные теории для решения задач пластин и оболочек, в том числе многослойных, переменной толщины, и приведено решение ряда примеров. За исключением [10–12] используются гипотезы Кирхгоффа для перехода к задачам уменьшенной размерности. Это приводит к проблемам при выполнении граничных условий, так как вследствие приближенного описания дифференциальные уравнения задач уменьшенной размерности не удовлетворяют всем граничным условиям и имеют решения, в которых могут наблюдаться разрывы, быстрые переходы, неоднородности и т. п.

Понижение порядка дифференциальных уравнений приближенных теорий в сочетании с потерей части граничных условий приводит к изучению асимптотических явлений. Цель асимптотического анализа задачи заключается в описании решения граничной задачи внутри переходного слоя [13]. Потребность в таких уточненных теориях связана с необходимостью более полного понимания самой классической теории после того, как становятся видны ее обобщения. Уточненные теории позволяют лучше охарактеризовать погрешность классических теорий. Однако построение тех или иных теорий последовательных приближений в смысле учета всех малых одного порядка крайне трудно осуществить, не располагая регулярными методами [14].

Считается, что возникающие при построении теории пластин и оболочек противоречия отсутствуют в задаче построения теории изгиба стержня. В основе такого представления лежит различие в методах построения классических определяющих уравнений. Если построение теорий пластин и оболочек осуществлялось на основе математической теории упругости путем упрощения ее уравнений с помощью гипотез Кирхгоффа, то построение теории балок выполнено на основе физических и геометрических соображений в усилиях и моментах без использования уравнений теории упругости. Однако, если эти теории тонкостенных тел, балок, пластин и оболочек строить на одной математической основе с помощью метода простых итераций, удовлетворяющего принципу сжатых отображений, и не переходить от уравнений в напряжениях к уравнениям в усилиях и моментах, различие исчезает [15].

Истоки метода простых итераций при желании можно найти еще и в полуобратном методе Сен-Венана [16]. Если в методе Сен-Венана использовать обычно принятые допущения в качестве величин начального приближения, по которым вычисляются остальные искомые неизвестные, можно по полученным величинам вычислить поправку к величинам начального приближения, и по тому, является ли эта поправка существенной или малой, сделать вывод о применимости исходных допущений. Малость поправки говорит о том, что начальные величины выбраны удачно и данные вычисления могут быть рассмотрены как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Построенный таким образом итерационный процесс нуждается в обосновании своей сходимости. Поскольку Сен-Венан применил свою идею к решению задачи кручения и изгиба длинного и узкого стержня, можно оценить сходимость вычислений к некоторому решению, используя наличие присущего стержню малого параметра, обеспечивающего асимптотическую сходимость. Таким образом, приходим к методу простых итераций, принципу сжатых отображений и теореме Банаха о неподвижной точке.

Теорема Банаха используется в теории дифференциальных уравнений для доказательства существования и единственности решения некоторых классов краевых задач. В теории интегральных уравнений теорема используется для доказательства существования и единственности решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода, некоторых видов нелинейных интегральных уравнений. Широкое применение теорема находит в численных методах, таких как метод Якоби, метод Гаусса — Зейделя. Метод Ньютона также можно рассматривать с позиции теоремы Банаха и понимать как абстрактную формулировку метода последовательных приближений Пикара [17; 18].

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений, формулируются в функциональном анализе в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений [19].

Отображение y = Ay метрического пространства M в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\varepsilon < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \le \varepsilon \rho(x, y)$, где ρ — метрика пространства M. Точка y называется неподвижной точкой отображения, если y = Ay. Иначе говоря, неподвижные точки — это решения уравнения y = Ay. Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения $y_{(0)}$. Если оператор Aявляется сжимающим, процедура сходится к некоторому решению y, независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}$... находятся с помощью формулы $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$.

Используемый в настоящей работе метод простых итераций сводится к последовательному применению метода Пикара для решения дифференциального уравнения первого порядка y' = f(x, y), разрешенного относительно производной. Это дифференциальное уравнение с условием $y(t_0) = y_0$ равносильно интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f[t, (y(t))]dt + y_0.$$
(1)

Для него на основании принципа сжатых отображений строится итерационный процесс по следующей схеме:

$$y_{(n+1)}(x) = \int_{x_0}^x f\left[t, (y_{(n)}(t))\right] dt + y_0.$$

Метод позволяет построить последовательность функций $y_{(n)}(t)$, сходящихся к решению уравнения, и эти функции получаются гладкими.

Ниже метод простых итераций, с помощью которого решен ряд задач теории упругости тонкостенных тел [20–23], описывается как общий метод Сен-Венана — Пикара — Банаха (SVPB) на примере наиболее простой задачи для прямоугольника — деформации длинной тонкой упругой слоистой полосы, уравнения которой содержат малый параметр, обеспечивающий асимптотическую сходимость метода в соответствии с принципом сжатых отображений.

2. Произвольно нагруженная по длинным сторонам слоистая полоса

Длинная прямоугольная полоса рассматривается в прямоугольной системе координат x^*, z^* , так что $0 \le x^* \le l, -h \le z^* \le h$. Длинные стороны полосы $z^* = \pm h$ несут произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть закреплены или нагружены. Известные уравнения плоской задачи теории упругости, записанные в отмеченных звездочкой размерных величинах

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} &= 0 , \qquad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} &= 0 , \\ E^* \varepsilon_x &= \sigma_x^* - v \sigma_z^* , \qquad E^* \varepsilon_z &= \sigma_z^* - v \sigma_x^* , \qquad \gamma = \frac{2(1+v)}{E^*} \tau^* , \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u^*}{\partial x^*} , \quad \varepsilon_z &= \frac{\partial w^*}{\partial z^*} , \qquad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} , \end{aligned}$$

описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы в безразмерных координатах $x = x^* / l$, $z = z^* / h$, перемещениях $u = u^* / h$, $w = w^* / h$ вдоль осей x^*, z^* , соответственно, и нормальных $\sigma_x = \sigma_x^* / E$, $\sigma_z = \sigma_z^* / E$ и касательных $\tau = \tau^* / E$ напряжениях принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \tau' = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \sigma_x' = 0;$$

$$\sigma_x = \frac{1}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z), \quad \tau = \frac{1}{2(1 + \nu)} \gamma, \quad \sigma_z = \frac{1}{1 - \nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon u', \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon w',$$
(2)

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона, считающиеся для анизотропного или композитного материала функциями координат; ε_x , ε_z – безразмерные продольная и поперечная деформации; γ — сдвиг. Штрихом обозначена операция дифференцирования по безразмерному аргументу x, и введено обозначение для малого параметра $\varepsilon = h/l$.

Примем

$$E^* = E(z)E_h,$$

где E_h — некоторое характерное постоянное среднее значение модуля Юнга; E(z) — безразмерная ступенчатая функция, заданная по слоям, $E(z) \sim \varepsilon^0$. Входящий в соотношение упругости безразмерный коэффициент Пуассона также можно в общем случае считать заданным ступенчатой функцией v = v(z).

Расположив уравнения системы (2) в определенной последовательности и задав в качестве известных величин начального приближения

$$w_{(0)} = w_0(x), \ \tau_{(0)} = \tau_0(x), \tag{3}$$

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

можно свести вычисления к методу последовательных приближений в соответствии со следующей схемой:

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_0, \qquad \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_0', \qquad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}',$$

$$\sigma_{x(0)} = E\varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = -\nu \varepsilon_{x(0)} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z(0)}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(0)}, \quad \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \sigma_{x(0)}', \quad \frac{\partial \sigma_{z(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_{(1)}',$$

где производные по координате *z* помещены в левых частях дифференциальных уравнений и в них нет малых параметров, но они есть в правых. Нижним индексом в скобках здесь и далее обозначен номер приближения.

Выбор величин начального приближения в форме (3) вытекает из тех соображений, что, записав уравнения (2) в интегральной форме

$$u = -\varepsilon \int_{0}^{z} w' dz + \int_{0}^{z} \frac{2(1+v)}{E} \tau dz + u_{0}(x),$$

$$\sigma_{z} = -\varepsilon \int_{0}^{z} \tau' dz + \sigma_{z0}(x), \quad \varepsilon_{x} = \varepsilon u',$$

$$\sigma_{x} = E\varepsilon_{x} + v\sigma_{z}, \quad \varepsilon_{z} = -v\varepsilon_{x} + \frac{1-v^{2}}{E}\sigma_{z},$$

$$w = \int_{0}^{z} \varepsilon_{z} dz + w_{0}(x), \quad \tau = -\varepsilon \int_{0}^{z} \sigma_{x}' dz + \tau_{0}(x),$$

$$\sigma_{z} = -\varepsilon \int_{0}^{z} \tau' dz + \sigma_{z0}(x), \cdots,$$

получаем произволы интегрирования $u_0(x)$, $\sigma_{z0}(x)$, $w_0(x)$, $\tau_0(x)$, любых двух из которых достаточно для организации итерационного процесса вида (1).

В силу независимости величин начального приближения от z, все неизвестные вычисляются в результате интегрирования по z:

$$u_{(0)} = -\varepsilon w_{0}' z + \tau_{0} \int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_{0}(x),$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^{2} w_{0}'' z + \varepsilon \tau_{0}' \int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_{0}',$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon \tau_{0}' z + \sigma_{z0}(x),$$

$$\sigma_{x(0)} = -E\varepsilon^{2} w_{0}'' z + \varepsilon \tau_{0}' \left[E \int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] + E\varepsilon u_{0}' + \nu \sigma_{z0},$$
(5)

$$\begin{split} & \varepsilon_{z(0)} = v\varepsilon^{2}w_{0}''z - \varepsilon\tau_{0}' \left[v\int_{0}^{z} \frac{2(1+v)}{E} dz - \frac{1-v^{2}}{E} z \right] - v\varepsilon u_{0}' + \frac{1-v^{2}}{E}\sigma_{z0} , \\ & w_{(1)} = \varepsilon^{2}w_{0}''\int_{0}^{z} vzdz - \varepsilon\tau_{0}' \left[\int_{0}^{z} \frac{1-v^{2}}{E} zdz + \int_{0}^{z} v\int_{0}^{z} \frac{2(1+v)}{E} dzdz \right] + \sigma_{z0}\int_{0}^{z} \frac{1-v^{2}}{E} dz - \varepsilon u_{0}'\int_{0}^{z} vdz + w_{0}(x) , \\ & \tau_{(1)} = \varepsilon^{3}w_{0}'''\int_{0}^{z} Ezdz - \varepsilon^{2}\tau_{0}'' \left[\int_{0}^{z} E\int_{0}^{z} \frac{2(1+v)}{E} dzdz - \int_{0}^{z} vzdz \right] - \varepsilon^{2}u_{0}''\int_{0}^{z} Edz - \varepsilon\sigma_{z0}'\int_{0}^{z} vdz + \tau_{0}(x) , \\ & \sigma_{z(1)} = -\varepsilon^{4}w_{0}'''''\int_{0}^{z} Ezdzdz + \varepsilon^{3}\tau_{0}''' \left[\int_{0}^{z} \int_{0}^{z} E\int_{0}^{z} \frac{2(1+v)}{E} dzdz - \int_{0}^{z} \frac{2(1+v)}{E} dzdz dz - \int_{0}^{z} \int_{0}^{z} vzdz dz \right] + \\ & + \varepsilon^{3}u_{0}''''\int_{0}^{z} Edzdz + \varepsilon^{2}\sigma_{z0}''\int_{0}^{z} \sqrt{z} vdz dz - \varepsilon\tau_{0}'z + \sigma_{z0} . \end{split}$$

Нижним индексом 0 без скобок обозначены произвольные функции интегрирования $u_0 = u_0(x)$, $\sigma_{z0} = \sigma_{z0}(x)$, $w_0 = w_0(x)$, $\tau_0 = \tau_0(x)$, зависящие только от продольной координаты. Две из них w_0 , τ_0 были ранее выбраны в качестве величин начального приближения (3) в первых двух уравнениях системы (4).

В списке формул (5) заданные величины начального приближения $w_0(x)$ и $\tau_0(x)$ вычисляются также в первом приближении $w_{(1)}(x)$ и $\tau_{(1)}(x)$ с тем, чтобы вычислить поправку к величинам нулевого (начального) приближения и выполнить граничные условия на длинных сторонах с помощью выражений, содержащих все новые основные неизвестные τ_0 , σ_{z0} , w_0 , u_0 . Величины τ , σ_z , w записаны в первом приближении, остальные — в нулевом. При этом все неизвестные выражены в зависимости от произвольных функций интегрирования $\tau_0(x)$, $\sigma_{z0}(x)$, $w_0(x)$, $u_0(x)$, относительные порядки которых по ε будут определены из граничных условий на длинных сторонах и концах полосы.

3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы

На лицевых поверхностях полосы $z^* = \pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения.

В безразмерном виде эти условия записываются как

$$σz = Z+(x), τ = X+(x) при z = 1,
σz = Z-(x), τ = X-(x) при z = -1,$$
(6)

где безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость E_h . Нагрузки считаются медленно изменяющимися функциями координаты x. Условия (6) будем удовлетворять величинами первого приближения из общих решений (5), в предположении, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины. Полученная таким образом система уравнений

$$\epsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime} \int_{0}^{1} Ezdz - \epsilon^{2} \tau_{0}^{\prime\prime} \left[\int_{0}^{1} E \int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dzdz - \int_{0}^{1} \nu zdz \right] - \epsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime} \int_{0}^{1} Edz - \epsilon \sigma_{z0}^{\prime} \int_{0}^{1} \nu dz + \tau_{0} = X_{+},$$

$$\epsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime} \int_{0}^{-1} Ezdz - \epsilon^{2} \tau_{0}^{\prime\prime} \left[\int_{0}^{-1} E \int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dzdz - \int_{0}^{-1} \nu zdz \right] - \epsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime} \int_{0}^{-1} Edz - \epsilon \sigma_{z0}^{\prime} \int_{0}^{-1} \nu dz + \tau_{0} = X_{-},$$

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

$$-\epsilon^{4}w_{0}^{\prime\prime\prime\prime}\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}Ezdzdz + \epsilon^{3}\tau_{0}^{\prime\prime\prime}\left[\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}E\int_{0}^{z}\frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz - \int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\nu zdzdz\right] + \\ +\epsilon^{3}u_{0}^{\prime\prime\prime}\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}Edzdz + \epsilon^{2}\sigma_{z0}^{\prime\prime}\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\nu dzdz - \epsilon\tau_{0}^{\prime} + \sigma_{z0} = Z_{+},$$

$$-\epsilon^{4}w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime}\int_{0}^{-1}\int_{0}^{z}Ezdzdz + \epsilon^{3}\tau_{0}^{\prime\prime\prime}\left[\int_{0}^{-1}\int_{0}^{z}E\int_{0}^{z}\frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz - \int_{0}^{-1}\int_{0}^{z}\nu zdzdz\right] + \\ +\epsilon^{3}u_{0}^{\prime\prime\prime\prime}\int_{0}^{-1}\int_{0}^{z}Edzdz + \epsilon^{2}\sigma_{z0}^{\prime\prime}\int_{0}^{-1}\int_{0}^{z}\nu dzdz + \epsilon\tau_{0}^{\prime} + \sigma_{z0} = Z_{-}$$

$$(7)$$

может быть разрешена относительно основных неизвестных $\tau_0(x)$, $\sigma_{z0}(x)$, $w_0(x)$, $u_0(x)$ после вычисления в общем случае шестнадцати интегральных коэффициентов

$$\begin{cases} \int_{0}^{1} Ezdz & \int_{0}^{1} E\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dzdz - \int_{0}^{1} \nu zdz & \int_{0}^{1} Edz & \int_{0}^{1} \nu dz \\ \int_{0}^{-1} Ezdz & \int_{0}^{-1} E\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dzdz - \int_{0}^{-1} \nu zdz & \int_{0}^{-1} Edz & \int_{0}^{-1} \nu dz \\ \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} Ezdzdz & \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} E\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} \nu zdzdz & \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} Edzdz & \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} \nu dzdz \\ \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} Ezdzdz & \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} E\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} \nu zdzdz & \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} Edzdz & \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} \nu dzdz \end{cases}$$
(8)

от заданных функций E(z) и v(z).

4. Двухслойная полоса со слоями одинаковой толщины

Рассмотрим случай полосы, состоящей из двух слоев одинаковой толщины (рис. 1).



Рис. 1. Полоса из двух слоев одинаковой толщины **Figure 1.** Strip of two layers with equal thickness

Примем, что верхний слой при $0 \le z \le 1$, $0 \le x \le 1$ имеет жесткость E_1 и в общем случае коэффициент Пуассона v_1 , нижний при $0 \le z \le -1$, $0 \le x \le 1$ имеет жесткость E_2 и коэффициент Пуассона v_2 , E_1 и E_2 — константы, $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$. Положим для сокращения вычислений $v_1 = v_2 = v = const$. Вычислим входящие в уравнения (7) интегральные коэффициенты (8):

$$\int_{0}^{1} E_{1}zdz = \frac{1}{2}E_{1}, \int_{0}^{1} E_{1}\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E_{1}}dzdz - \int_{0}^{1}\nu zdz = \frac{2+\nu}{2}, \int_{0}^{1} E_{1}dz = E_{1}, \int_{0}^{1}\nu dz = \nu,$$

$$\int_{0}^{-1} E_{2}zdz = \frac{1}{2}E_{2}, \int_{0}^{-1} E_{2}\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E_{2}}dzdz - \int_{0}^{-1}\nu zdz = \frac{2+\nu}{2}, \int_{0}^{-1} E_{2}dz = -E_{2}, \int_{0}^{-1}\nu dz = -\nu,$$

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{z} E_{1}zdzdz = \frac{1}{6}E_{1}, \quad \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} E_{1}\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E_{1}}dzdzdz - \int_{0}^{1} \int_{0}^{z}\nu zdzdz = \frac{2+\nu}{6}, \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} E_{1}dzdz = \frac{1}{2}E_{1}, \int_{0}^{1} \int_{0}^{z}\nu dzdz = \frac{1}{2}\nu,$$

$$\int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} E_{2}zdzdz = -\frac{1}{6}E_{2} \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} E_{2}\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E_{2}}dzdzdz - \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z}\nu zdzdz = -\frac{2+\nu}{6}, \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} E_{2}dzdz = \frac{1}{2}E_{2}, \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z}\nu dzdz = \frac{1}{2}\nu,$$

и подставим их в уравнения

$$\epsilon^{3} w_{0}^{"'} E_{1} \frac{1}{2} - \epsilon^{2} \tau_{0}^{"'} \frac{2 + v}{2} - \epsilon^{2} u_{0}^{"} E_{1} - v \epsilon \sigma_{z0}^{'} + \tau_{0} = X_{+},$$

$$\epsilon^{3} w_{0}^{"''} E_{2} \frac{1}{2} - \epsilon^{2} \tau_{0}^{"} \frac{2 + v}{2} + \epsilon^{2} u_{0}^{"} E_{2} + v \epsilon \sigma_{z0}^{'} + \tau_{0} = X_{-},$$

$$-\epsilon^{4} w_{0}^{"'''} E_{1} \frac{1}{6} + \epsilon^{3} \tau_{0}^{"''} \frac{2 + v}{6} + \epsilon^{3} u_{0}^{"''} E_{1} \frac{1}{2} + v \epsilon^{2} \sigma_{z0}^{"} \frac{1}{2} - \epsilon \tau_{0}^{'} + \sigma_{z0} = Z_{+},$$

$$\epsilon^{4} w_{0}^{"'''} E_{2} \frac{1}{6} - \epsilon^{3} \tau_{0}^{"''} \frac{2 + v}{6} + \epsilon^{3} u_{0}^{"''} E_{2} \frac{1}{2} + v \epsilon^{2} \sigma_{z0}^{"} \frac{1}{2} + \epsilon \tau_{0}^{'} + \sigma_{z0} = Z_{-}.$$

Сложив и вычтя попарно первые два и последние два уравнения и поменяв порядок записи уравнений, получим

$$\epsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{2} (E_{1} + E_{2}) - (2 + \nu) \epsilon^{2} \tau_{0}^{\prime\prime\prime} - \epsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime\prime} (E_{1} - E_{2}) + 2\tau_{0} = X_{+} + X_{-},$$

$$- \epsilon^{4} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{6} (E_{1} + E_{2}) + \frac{1}{3} (2 + \nu) \epsilon^{3} \tau_{0}^{\prime\prime\prime\prime} + \epsilon^{3} u_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) - 2\epsilon \tau_{0}^{\prime} = Z_{+} - Z_{-}$$

$$\epsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) - \epsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime\prime} (E_{1} + E_{2}) - 2\nu \epsilon \sigma_{z0}^{\prime} = X_{+} - X_{-},$$

$$- \epsilon^{4} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{6} (E_{1} - E_{2}) + \frac{1}{2} \epsilon^{3} u_{0}^{\prime\prime\prime\prime} (E_{1} + E_{2}) + \nu \epsilon^{2} \sigma_{z0}^{\prime\prime\prime} + 2\sigma_{z0} = Z_{+} + Z_{-}.$$

Примем в соответствии с описанием метода SVPB [23] $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ в первой паре уравнений, где τ_0^s — медленно меняющаяся функция, τ_0^q — быстро меняющаяся функция. (Медленно меняющейся функцией называется такая функция, применение к которой оператора $\frac{d}{dx}$ не меняет ее асимптотического порядка по ε . Быстро меняющейся функцией называется такая, применение к которой оператора $\varepsilon \frac{d}{dx}$

также не меняет ее асимптотического порядка по ε .)

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{2} (E_{1} + E_{2}) - (2 + \nu) \varepsilon^{2} \tau_{0}^{s\prime\prime} - (2 + \nu) \varepsilon^{2} \tau_{0}^{q\prime\prime\prime} - \varepsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime\prime} (E_{1} - E_{2}) + 2\tau_{0}^{s} + 2\tau_{0}^{q} = X_{+} + X_{-},$$

$$-\varepsilon^{4} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{6} (E_{1} + E_{2}) + \frac{1}{3} (2 + \nu) \varepsilon^{3} \tau_{0}^{s\prime\prime\prime} + (2 + \nu) \varepsilon^{3} \tau_{0}^{q\prime\prime\prime} + \varepsilon^{3} u_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) - 2\varepsilon \tau_{0}^{s\prime} - 2\varepsilon \tau_{0}^{q\prime} = (Z_{+} - Z_{-}).$$

и запишем их раздельно для быстро меняющихся

$$-(2+\nu)\varepsilon^{2}\tau_{0}^{q''}+2\tau_{0}^{q}=0,$$

$$(2+\nu)\varepsilon^{3}\tau_{0}^{q'''}-6\varepsilon\tau_{0}^{q'}=0,$$
(9)

отмеченных верхним индексом q, и медленно меняющихся неизвестных

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \frac{1}{2} (E_{1} + E_{2}) - \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} (E_{1} - E_{2}) + 2\tau_{0}^{s} = X_{+} + X_{-},$$

$$-\varepsilon^{4} w_{0}^{s''''} \frac{1}{6} (E_{1} + E_{2}) + \varepsilon^{3} u_{0}^{s'''} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) - 2\varepsilon \tau_{0}^{s'} = (Z_{+} - Z_{-}),$$

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{s''''} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) - \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} (E_{1} + E_{2}) - 2\nu \varepsilon \sigma_{z0}^{s} = X_{+} - X_{-},$$

$$-\varepsilon^{4} w_{0}^{s'''''} \frac{1}{6} (E_{1} - E_{2}) + \frac{1}{2} \varepsilon^{3} u_{0}^{s'''} (E_{1} + E_{2}) + 2\sigma_{z0}^{s} = Z_{+} + Z_{-},$$
(10)

отмеченных верхним индексом S. Первые два уравнения дают

$$\varepsilon^{4} w_{0}^{s''''} \frac{1}{3} (E_{1} + E_{2}) - \varepsilon^{3} u_{0}^{s'''} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) = (Z_{+} - Z_{-}) + \varepsilon (X_{+}' + X_{-}').$$

Из четвертого уравнения следует, что $\sigma_{z0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$. Поэтому в третьем уравнении величина $2\nu\varepsilon\sigma_{z0}^s \sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^6 w_0^s$ и может быть отброшена как малая второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда это уравнение

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) - \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} (E_{1} + E_{2}) = X_{+} - X_{-}$$
(11)

с отброшенным членом $2\nu \epsilon \sigma_{z0}^{s'}$ и третье из системы (10) сводятся к двум разрешающим

$$\varepsilon^{4} C w_{0}^{s''''} = Z_{+} - Z_{-} + \varepsilon \left(X_{+}' + X_{-}' \right) - \varepsilon \frac{E_{1} - E_{2}}{2(E_{1} + E_{2})} \left(X_{+}' - X_{-}' \right), \tag{12}$$

где $C = \frac{1}{3} (E_1 + E_2) \left[1 - \frac{3(E_1 - E_2)^2}{4(E_1 + E_2)^2} \right]$ и $\epsilon^2 u_0^{s''} (E_1 + E_2) = \epsilon^3 w_0^{s'''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - (X_+ - X_-).$

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

(13)

Если в уравнении (12) отбросить производные от продольной нагрузки и принять $Z_{-} = X_{-} = X_{+} = 0$, $Z_{+} = p$, $E_{1} = E_{2} = E$, $w_{0}^{s} = y$, получим классическое уравнение изгиба изотропной балки $\varepsilon^{4} \frac{2}{3} E y^{\prime\prime\prime\prime} = p$, нагруженной распределенной нагрузкой p, где w_{0}^{s} — перемещение поперечного сечения полосы как жесткого целого для фиксированного значения аргумента z заменено величиной прогиба оси балки y.

Неизвестные σ_{z0}^{s} и τ_{0}^{s} находятся из первого и четвертого уравнений системы (10)

$$2\sigma_{z0}^{s} = Z_{+} + Z_{-} + \varepsilon^{4} w_{0}^{s''''} \frac{1}{6} (E_{1} - E_{2}) - \frac{1}{2} \varepsilon^{3} u_{0}^{s'''} (E_{1} + E_{2}),$$

$$2\tau_{0}^{s} = X_{+} + X_{-} - \varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \frac{1}{2} (E_{1} + E_{2}) + \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} (E_{1} - E_{2})$$
(14)

прямыми действиями без интегрирования.

Из уравнений (12)–(14) вытекают асимптотические оценки искомых величин относительно нагрузки Z (при $X_+ = X_- = 0$):

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-4} Z, \ u_0^s \sim \varepsilon w_0^s \wedge \varepsilon^{-3} Z, \ \sigma_{z0}^s \sim Z, \ \tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^{s'''}.$$
⁽¹⁵⁾

Для уравнений (12), (13) надо сформулировать условия на концах полосы x = 0 и x = 1. Примем их как условия жесткого защемления: перемещения u = w = 0 в каждой точке $z \in -1$;1 поперечного края x = 0, 1. С помощью формул (8) запишем условия

$$\begin{aligned} u_{(0)}\Big|_{x=0,1} &= -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu)\tau_0 \int_0^z \frac{1}{E} dz + u_0 = 0, \\ w_{(1)}\Big|_{x=0,1} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z 2(1+\nu) dz dz \right] + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + w_0 = 0. \end{aligned}$$

Этими выражениями задаются перемещения как при $z \ge 0$:

$$-\varepsilon w_{0}' z + \frac{2(1+\nu)}{E^{+}} \tau_{0} z + u_{0} = 0,$$

$$\nu \varepsilon^{2} w_{0}'' \frac{z^{2}}{2} - \varepsilon \tau_{0}' \left[\frac{1-\nu^{2}}{E^{+}} + 2\nu (1+\nu) \right] \frac{z^{2}}{2} + \sigma_{z0} \frac{1-\nu^{2}}{E^{+}} z - \nu \varepsilon u_{0}' z + w_{0} = 0,$$
(16)

так и при *z* ≤ 0 :

$$\varepsilon w_{0}' z - \frac{2(1+\nu)}{E^{-}} \tau_{0} z + u_{0} = 0 \ \nu \varepsilon^{2} w_{0}'' \frac{z^{2}}{2} - \varepsilon \tau_{0}' \left[\frac{1-\nu^{2}}{E^{-}} + 2\nu (1+\nu) \right] \frac{z^{2}}{2} - \sigma_{z0} \frac{1-\nu^{2}}{E^{-}} z + \nu \varepsilon u_{0}' z + w_{0} = 0.$$
(17)

Теперь потребуем обращения каждого коэффициента при различных степенях z в ноль в выражениях (16) при $z \ge 0$:

$$u_0 = 0, \tag{18}$$

$$-\varepsilon w_{0}' + \frac{2(1+\nu)}{E^{+}}\tau_{0} = 0, \qquad (19)$$

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

431

$$w_0 = 0, (20)$$

$$\sigma_{z0} \frac{1-v^2}{E^+} - v\varepsilon u_0' = 0, \qquad (21)$$

$$\nu \varepsilon^{2} w_{0}^{"} - \varepsilon \tau_{0}^{'} \left[\frac{1 - \nu^{2}}{E^{+}} + 2\nu \left(1 + \nu \right) \right] = 0, \qquad (22)$$

и (17) при *z* ≤ 0

$$u_0 = 0, (23)$$

$$\varepsilon w_0' - \frac{2(1+\nu)}{E^-} \tau_0 = 0, \qquad (24)$$

$$w_0 = 0, (25)$$

$$-\sigma_{z0} \frac{1-v^2}{E^-} + v \varepsilon u_0' = 0, \qquad (26)$$

$$\nu \varepsilon^{2} w_{0}^{"} - \varepsilon \tau_{0}^{'} \left[\frac{1 - \nu^{2}}{E^{-}} + 2\nu \left(1 + \nu \right) \right] = 0.$$
⁽²⁷⁾

Перепишем условия (19) и (22) с учетом того, что $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$,

$$-\varepsilon w_{0}' + \frac{2(1+\nu)}{E^{+}} (\tau_{0}^{s} + \tau_{0}^{q}) = 0, \qquad (28)$$

$$\nu \varepsilon^{2} w_{0}^{"} - \varepsilon \left(\varepsilon \tau_{0}^{s'} + \varepsilon \tau_{0}^{q'} \right) \left[\frac{1 - \nu^{2}}{E^{+}} + 2\nu \left(1 + \nu \right) \right] = 0$$
⁽²⁹⁾

и обратим внимание на то, что на основании последней оценки из (15) члены с τ_0^s могут быть отброшены как малые второго порядка по сравнению с главными в обоих уравнениях. В то же время τ_0^q и $\varepsilon \tau_0^{q'}$ являются величинами одного порядка. Для того чтобы уравнения (28) и (29) были совместными, надо принять $\tau_0^q \sim \varepsilon^2 w_0$. И тогда также будет $\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 w_0$. Следовательно, в уравнении (28) член τ_0^q можно отбросить как малый по сравнению с первым $\varepsilon w_0'$. Полученная оценка быстро меняющейся неизвестной

$$\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 w_0 \vee \varepsilon^{-2} Z \tag{30}$$

дополняет ранее полученные оценки (15) для медленно меняющихся неизвестных.

Окончательно условия (28) и (29) при $z \ge 0$ перепишутся так:

$$w_0' = 0,$$
 (31)

$$\nu \varepsilon^{2} w_{0}^{\prime \prime} - \varepsilon \tau_{0}^{\prime \prime} \left[\frac{1 - \nu^{2}}{E^{+}} + 2\nu \left(1 + \nu \right) \right] = 0.$$
(32)

Точно такие же рассуждения справедливы для условий (24) и (27) при $z \le 0$.

Условия (20), (25), (31) при x = 0,1 имеют одну и ту же запись и при $z \ge 0$, и при $z \le 0$, образовывая таким образом вместе с уравнением (12) разрешимую *w*-задачу. Так, например, приняв, что верхний край z = 1 несет только равномерно распределенную нагрузку $Z_+ = p$, получим решение *w*-задачи:

$$w_0^s = \frac{p}{\epsilon^4 C} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} \right)$$

и сформированной из уравнения (13) с условиями (18) и (24) решение и-задачи

$$u_0^s = \frac{p}{\epsilon^3 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right).$$

При известных W_0^s и U_0^s выражения (14) принимают вид

$$2\sigma_{z0}^{s} = p - \frac{1}{12} \frac{p}{C} (E_{1} - E_{2}),$$

$$2\tau_{0}^{s} = -\frac{p}{2\varepsilon C} \left(x - \frac{1}{2} \right) (E_{1} + E_{2}) \left[1 + \frac{(E_{1} - E_{2})^{2}}{(E_{1} + E_{2})^{2}} \right]$$

Вклад величины $\sigma_{z0} \sim \varepsilon^0 Z$ в выполнение условий (21) и (26) по сравнению с величиной $\varepsilon u_0' = \varepsilon^{-3} Z$ в рассматриваемом приближении пренебрежим. Можно показать, что условия $u_0' = 0$ можно выполнить в следующем приближении, где появляется еще одно быстроменяющееся решение u_0^q .

Условия вида (32) выполняются за счет величины краевого эффекта τ_0^q , являющейся решением первого уравнения (9). Следуя [23], запишем его решение:

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_1 \exp(-kx/\varepsilon) & \text{при } x = 0\\ C_2 \exp(k(1-x)/\varepsilon) & \text{при } x = 1 \end{cases}, \ k^2 = 2/(2+\nu)$$
(33)

для участка края x=0, $z \ge 0$

$$\tau_0^{q+} = C_1^+ \exp\left(-kx/\varepsilon\right)$$

и для участка края x = 0, $z \le 0$

$$\tau_0^{q-} = C_1^- \exp\left(-kx/\varepsilon\right).$$

Подставив $\epsilon \tau_0^{q+'}$ в условие (32), получим

$$C_1^+ = -\frac{\nu p E^+}{12\varepsilon^2 Ck \left(1+\nu\right) \left(1-\nu+2\nu E^+\right)}$$

Таким же путем находим

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

$$C_1^- = -\frac{\nu p E^-}{12\epsilon^2 Ck (1+\nu)(1-\nu+2\nu E^-)}.$$

Подставив C_1^+ и C_1^- в выражение (33) для τ_0^q , получим выражение для краевого эффекта

$$\tau_0^q = -\frac{\nu p}{12\varepsilon^2 Ck(1+\nu)} \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) \left\{ \frac{\frac{E^+}{1-\nu+2\nu E^+}}{\frac{E^-}{1-\nu+2\nu E^-}} \right\}$$

на защемлённом краю x = 0. Решение краевого эффекта на краю x = 1 записывается аналогично.

Из последней формулы следует асимптотическая оценка краевого эффекта

$$\tau_0^q \sim \varepsilon^{-2} p. \tag{34}$$

Наибольший вклад краевого эффекта имеет место в напряжении σ_x . Вкладом в остальные искомые величины можно пренебречь [23]. Окончательно для σ_x имеем формулы: при $z \ge 0$

$$\sigma_{x(0)} = -E^{+} \frac{p}{\epsilon^{2}C} \left(\frac{x^{2}}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \epsilon \tau_{0}^{q+\prime} (2 + \nu) z + E^{+} \frac{p}{\epsilon^{2}C} \frac{E_{1} - E_{2}}{2(E_{1} + E_{2})} \left(\frac{x^{2}}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right)' + \nu \sigma_{z0}$$

и при $z \leq 0$

$$\sigma_{x(0)} = -E^{-} \frac{p}{\epsilon^{2}C} \left(\frac{x^{2}}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \epsilon \tau_{0}^{q-\prime} (2 + \nu) z + E^{-} \frac{p}{\epsilon^{2}C} \frac{E_{1} - E_{2}}{2(E_{1} + E_{2})} \left(\frac{x^{2}}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right)' + \nu \sigma_{z0}$$

дает вклад, соизмеримый с первым членом в силу условия (32). Из этих выражений следует оценка $\tau_0^{q+} \wedge \tau_0^{q-} \sim \varepsilon^{-2} p$.

Подстановка вычисленных величин w_0^s , u_0^s , τ_0^s , σ_{z0} в формулы (5) дает выражения для всех остальных неизвестных рассмотренного примера: напряжений, деформаций и перемещений:

$$\begin{split} u_{(0)} &= -\frac{p}{\varepsilon^{3}C} \bigg(\frac{x^{3}}{6} - \frac{x^{2}}{4} + \frac{x}{12} \bigg) z + \frac{p(E_{1} + E_{2})}{4\varepsilon C} \bigg[-1 + \frac{(E_{1} - E_{2})^{2}}{(E_{1} + E_{2})^{2}} \bigg] \bigg(x - \frac{1}{2} \bigg) \int_{0}^{z} \frac{2(1 + \nu)}{E} dz + \\ &+ \frac{p}{2\varepsilon^{3}C} \frac{(E_{1} - E_{2})}{(E_{1} + E_{2})} \bigg(\frac{x^{3}}{6} - \frac{x^{2}}{4} + \frac{x}{12} \bigg), \\ \varepsilon_{x(0)} &= -\frac{p}{\varepsilon^{2}C} \bigg(\frac{x^{2}}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg) z + \frac{p(E_{1} + E_{2})}{4C} \bigg[-1 + \frac{(E_{1} - E_{2})^{2}}{(E_{1} + E_{2})^{2}} \bigg] \int_{0}^{z} \frac{2(1 + \nu)}{E} dz + 9 \\ &+ \frac{p}{2\varepsilon^{2}C} \frac{(E_{1} - E_{2})}{(E_{1} + E_{2})} \bigg(\frac{x^{2}}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg), \end{split}$$

$$\begin{split} & \sigma_{z(0)} = -\frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \Bigg[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \Bigg] z + \frac{p}{2} \Big(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \Big), \\ & \sigma_{x(0)} = -E \frac{p}{e^2 C} \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg) z + \frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \Bigg[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \Bigg] \Bigg[E_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(1 + \mathbf{v})}{E} dz - \mathbf{v}z \Bigg] + \\ & +E \frac{p}{2e^2 C} \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg) + \mathbf{v} \frac{p}{2} \bigg(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \bigg), \\ & \varepsilon_{z(0)} = \mathbf{v} \frac{p}{e^2 C} \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg) z - \frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \Bigg[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \Bigg] \Bigg[\mathbf{v}_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(1 + \mathbf{v})}{E} dz - \frac{1 - \mathbf{v}^2}{E} z \Bigg] - \\ & - \mathbf{v} \frac{p}{2e^2 C} \bigg(\frac{E_1 - E_2}{(E_1 + E_2)} \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg) + \frac{1 - \mathbf{v}^2}{E} \frac{p}{2} \bigg(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \bigg), \\ & w_{(0)} = \frac{p}{e^2 C} \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg) \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} dz - \frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \bigg[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{12C} \bigg] \Bigg[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \mathbf{v}^2}{E} z dz + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} \int_0^{\frac{1}{2}} 2(1 + \mathbf{v}) dz dz \Bigg] + \\ & + \frac{p}{2} \bigg(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \bigg) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \mathbf{v}^2}{E} dz - \frac{p}{2e^2 C} \bigg(\frac{E_1 - E_2}{E} \bigg) \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg) \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} dz - \frac{p}{2e^2 C} \bigg(\frac{E_1 - E_2}{E} \bigg) \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \bigg) \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} dz + \frac{p}{e^4 C} \bigg(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} \bigg), \\ & \tau_{(1)} = \frac{p}{e^C} \bigg(x - \frac{1}{2} \bigg) \int_0^{\frac{1}{2}} Ez dz - e^2 \tau_0'' \bigg[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E}{0} \frac{2(1 + \mathbf{v})}{E} dz dz - \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} dz dz - \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{v} dz dz \bigg] - \\ & -\frac{p}{2eC} \bigg(x - \frac{1}{2} \bigg) \int_0^{\frac{1}{2}} Ez dz dz + e^3 \tau_0''' \bigg[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E}{0} \frac{2(1 + \mathbf{v})}{4eC} \bigg] \bigg[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \bigg] \bigg(x - \frac{1}{2} \bigg), \\ & \sigma_{z(1)} = -\frac{p}{C} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E}{0} z dz dz + e^3 \tau_0'''' \bigg[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E}{0} \frac{2(1 + \mathbf{v})}{4eC} \bigg] \bigg[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \bigg] \bigg(x - \frac{1}{2} \bigg), \end{aligned}$$

5. Двухслойная полоса со слоями различной толщины

Рассмотрим случай полосы, состоящей из двух слоев различной толщины, как на рис. 2.



Рис. 2. Полоса из двух слоев различной толщины Figure 2. Strip made of two layers with different thickness

Примем, что нижний слой при $-1 \le z \le z_1$, $0 \le x \le 1$ имеет жесткость E_1 , верхний слой при $z_1 \le z \le 1$, $0 \le x \le 1$ имеет жесткость E_2 ; E_1 и E_2 — константы, $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$. Положим опять для сокращения вычислений v = const во всей полосе. Вычислим входящие в уравнения (7) интегральные коэффициенты (8) при искомых неизвестных w_0 , u_0 , τ_0 и σ_{z0} при $z \ge 0$:

$$\int_{0}^{1} Ezdz = (E_{1} - E_{2})\frac{z_{1}^{2}}{2} + E_{2}\frac{1}{2}, \int_{0}^{1} E\int_{0}^{z}\frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_{0}^{1} \nu zdz = \frac{2+\nu}{2},$$

$$\int_{0}^{1} Edz = (E_{1} - E_{2})z_{1} + E_{2}, \int_{0}^{1} \nu dz = \nu;$$

при *z* ≤ 0

$$\int_{0}^{-1} Ezdz = \frac{1}{2}E_{1}, \int_{0}^{-1} E\int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E}dzdz - \int_{0}^{-1} \nu zdz = \frac{2+\nu}{2}, \int_{0}^{-1} Edz = -E_{1}, \int_{0}^{-1} \nu dz = -\nu;$$

при *z* ≥ 0

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{z} Ezdzdz = (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6}, \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} E \int_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E} dzdzdz - \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} \nu zdzdz = \frac{2+\nu}{6},$$

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{z} Edzdz = \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2-z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2}, \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} \nu dzdz = \frac{1}{2} \nu;$$

при *z* ≤ 0

$$\int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} Ezdzdz = -\frac{1}{6}E_{1}, \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} E_{0}^{z} \frac{2(1+\nu)}{E}dzdzdz - \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} \nu zdzdz = -\frac{2+\nu}{6}, \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} E_{1}dzdz = \frac{1}{2}E_{1}, \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} \nu dzdz = \frac{1}{2}\nu;$$

и подставим их в уравнения (7)

$$\begin{split} \varepsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) \frac{z_{1}^{2}}{2} + E_{2} \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^{2} \tau_{0}^{\prime\prime} \frac{2 + v}{2} - \varepsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) z_{1} + E_{2} \right] - v \varepsilon \sigma_{z0}^{\prime} + \tau_{0} = X_{+} , \\ \varepsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime} E_{1} \frac{1}{2} - \varepsilon^{2} \tau_{0}^{\prime\prime} \frac{2 + v}{2} + \varepsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime\prime} E_{1} + v \varepsilon \sigma_{z0}^{\prime} + \tau_{0} = X_{-} , \\ -\varepsilon^{4} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) \left(\frac{z_{1}^{2}}{2} - \frac{z_{1}^{3}}{3} \right) + E_{2} \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^{3} \tau_{0}^{\prime\prime\prime} \frac{2 + v}{6} + \\ +\varepsilon^{3} u_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \left[\frac{1}{2} \left(E_{1} - E_{2} \right) \left(2 - z_{1} \right) z_{1} + E_{2} \frac{1}{2} \right] + v \varepsilon^{2} \sigma_{z0}^{\prime\prime} \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_{0}^{\prime} + \sigma_{z0} = Z_{+} , \\ \varepsilon^{4} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime} E_{1} \frac{1}{6} - \varepsilon^{3} \tau_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{2 + v}{6} + \varepsilon^{3} u_{0}^{\prime\prime\prime\prime} E_{1} \frac{1}{2} + v \varepsilon^{2} \sigma_{z0}^{\prime\prime} \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_{0}^{\prime} + \sigma_{z0} = Z_{-} . \end{split}$$

Сложив и вычтя их попарно, получим, изменив порядок записи, уравнения

$$\begin{split} & \varepsilon^{3} w_{0}^{'''} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) \frac{z_{1}^{2}}{2} + \left(E_{1} + E_{2} \right) \frac{1}{2} \right] - \left(2 + \nu \right) \varepsilon^{2} \tau_{0}^{''} - \varepsilon^{2} u_{0}^{'''} \left(E_{1} - E_{2} \right) \left(z_{1} + 1 \right) + 2 \tau_{0} = X_{+} + X_{-}, \\ & - \varepsilon^{4} w_{0}^{'''''} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) \left(\frac{z_{1}^{2}}{2} - \frac{z_{1}^{3}}{3} \right) + \left(E_{1} + E_{2} \right) \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^{3} \tau_{0}^{'''} \frac{2 + \nu}{3} + \\ & + \varepsilon^{3} u_{0}^{''''} \frac{1}{2} \left(E_{1} - E_{2} \right) \left(2z_{1} - z_{1}^{2} - 1 \right) - 2\varepsilon \tau_{0}^{'} = Z_{+} - Z_{-}, \\ & \varepsilon^{3} w_{0}^{''''} \left(E_{1} - E_{2} \right) \left(\frac{z_{1}^{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon^{2} u_{0}^{''} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) z_{1} - \left(E_{1} - E_{2} \right) \right] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z0}^{'} = X_{+} - X_{-}, \\ & - \varepsilon^{4} w_{0}^{'''''} \left(E_{1} - E_{2} \right) \left(\frac{z_{1}^{2}}{2} - \frac{z_{1}^{3}}{3} - \frac{1}{6} \right) + \\ & + \varepsilon^{3} u_{0}^{''''} \frac{1}{2} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) \left(2 - z_{1} \right) z_{1} + E_{1} + E_{2} \right] + \nu \varepsilon^{2} \sigma_{z0}^{''} + 2\sigma_{z0} = Z_{+} + Z_{-}. \end{split}$$

Примем $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ в первой паре уравнений

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime} \frac{1}{2} \Big[(E_{1} - E_{2}) z_{1}^{2} + (E_{1} + E_{2}) \Big] - (2 + \nu) \varepsilon^{2} \Big(\tau_{0}^{s\prime\prime} + \tau_{0}^{q\prime\prime} \Big) - \\ - \varepsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime\prime} \Big[(E_{1} - E_{2}) z_{1} + E_{1} + E_{2} \Big] + 2 \Big(\tau_{0}^{s} + \tau_{0}^{q} \Big) = X_{+} + X_{-} , \\ - \varepsilon^{4} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime} \Big[(E_{1} - E_{2}) \Big(\frac{z_{1}^{2}}{2} - \frac{z_{1}^{3}}{3} \Big) + (E_{1} + E_{2}) \frac{1}{6} \Big] + \frac{2 + \nu}{3} \varepsilon^{3} \Big(\tau_{0}^{s\prime\prime\prime\prime} + \tau_{0}^{q\prime\prime\prime\prime} \Big) + \\ + \varepsilon^{3} u_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{2} \Big(E_{1} - E_{2} \Big) \Big(2z_{1} - z_{1}^{2} - 1 \Big) - 2\varepsilon \Big(\tau_{0}^{s\prime} + \tau_{0}^{q\prime} \Big) = Z_{+} - Z_{-} .$$

и запишем их, как и в предыдущем параграфе, раздельно для быстрых

$$-(2+\nu)\varepsilon^{2}\tau_{0}^{q''}+2\tau_{0}^{q}=0,$$
$$(2+\nu)\varepsilon^{3}\tau_{0}^{q'''}-6\varepsilon\tau_{0}^{q'}=0$$

и медленных неизвестных

$$\epsilon^{3} w_{0}^{s'''} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) \frac{z_{1}^{2}}{2} + \left(E_{1} + E_{2} \right) \frac{1}{2} \right] - \epsilon^{2} u_{0}^{s''} \left[\left(E_{1} - E_{2} \right) z_{1} + E_{1} + E_{2} \right] + 2\tau_{0}^{s} = X_{+} + X_{-},$$
(35)

$$-\varepsilon^{4}w_{0}^{s''''}\left[\left(E_{1}-E_{2}\right)\left(\frac{z_{1}^{2}}{2}-\frac{z_{1}^{3}}{3}\right)+\left(E_{1}+E_{2}\right)\frac{1}{6}\right]+\varepsilon^{3}u_{0}^{s'''}\frac{1}{2}\left(E_{1}-E_{2}\right)\left(2z_{1}-z_{1}^{2}-1\right)-2\varepsilon\tau_{0}^{s'}=Z_{+}-Z_{-},$$
 (36)

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) (z_{1}^{2} - 1) - \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} [(E_{1} - E_{2}) z_{1} + (E_{1} + E_{2})] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z0}^{s'} = X_{+} - X_{-}, \qquad (37)$$

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

$$-\varepsilon^{4}w_{0}^{s''''}(E_{1}-E_{2})\left(\frac{z_{1}^{2}}{2}-\frac{z_{1}^{3}}{3}-\frac{1}{6}\right)+\varepsilon^{3}u_{0}^{s'''}\left[(E_{1}-E_{2})(2-z_{1})z_{1}+(E_{1}+E_{2})\right]+2\sigma_{z0}^{s}=Z_{+}+Z_{-}.$$
(38)

Продифференцируем первое уравнение по x и умножим на ε . Затем исключим $\tau_0^{s'}$ из первых двух

$$\epsilon^{4} w_{0}^{s''''} \left[(E_{1} + E_{2}) + (E_{1} - E_{2}) \frac{1}{3} \left(z_{1}^{3} - \frac{z_{1}^{2}}{2} \right) \right] + \epsilon^{3} u_{0}^{s'''} \left[(E_{1} - E_{2}) \left(2z_{1} - \frac{z_{1}^{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_{1} + E_{2}) \right] = (Z_{+} - Z_{-}) + \epsilon \left(X_{+}^{\prime} + X_{-}^{\prime} \right).$$

$$(39)$$

Так же как и в предыдущем параграфе, из четвертого уравнения (38) следует, что $\sigma_{z0}^{s} \sim \varepsilon^{3} u_{0}^{s} \wedge \varepsilon^{4} w_{0}^{s}$. Поэтому в уравнении (37) величина $v \varepsilon \sigma_{z0}^{s}' \sim \varepsilon^{4} u_{0}^{s} \wedge \varepsilon^{6} w_{0}^{s}$ и может быть отброшена как малая второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда это уравнение

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) (z_{1}^{2} - 1) - \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} [(E_{1} - E_{2}) z_{1} + (E_{1} + E_{2})] = X_{+} - X_{-}$$

с отброшенным членом $2\nu \epsilon \sigma_{z_0}^{s'}$ вместе с уравнением (39) сводятся к двум разрешающим

$$\varepsilon^{2} u_{0}^{s''} \Big[(E_{1} - E_{2}) z_{1} + (E_{1} + E_{2}) \Big] = \varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \frac{1}{2} (E_{1} - E_{2}) (z_{1}^{2} - 1) - (X_{+} - X_{-}), \qquad (40)$$

$$\epsilon^{4}Cw_{0}^{s''''} = (Z_{+} - Z_{-}) + \epsilon \left(X_{+}' + X_{-}'\right) + \left[(E_{1} - E_{2}) \left(2z_{1} - \frac{z_{1}^{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_{1} + E_{2}) \right] \frac{\epsilon \left(X_{+}' - X_{-}'\right)}{(E_{1} - E_{2})z_{1} + (E_{1} + E_{2})},$$

$$(41)$$

где

$$C = (E_1 + E_2) + (E_1 - E_2)\frac{1}{3}\left(z_1^3 - \frac{z_1^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[(E_1 - E_2)\left(2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - (E_1 + E_2)\right]\frac{(E_1 - E_2)(z_1^2 - 1)}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)}$$

Полученные уравнения (40) и (41) имеют тот же смысл, что и уравнения (12) и (13). Неизвестные $\sigma_{z_0}^s$ и τ_0^s находятся из уравнений системы (35) и (38):

$$2\tau_{0}^{s} = X_{+} + X_{-} - \varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \left[(E_{1} - E_{2}) \frac{z_{1}^{2}}{2} + (E_{1} + E_{2}) \frac{1}{2} \right] + \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} \left[(E_{1} - E_{2}) z_{1} + E_{1} + E_{2} \right],$$

$$2\sigma_{z0}^{s} = Z_{+} + Z_{-} + \varepsilon^{4} w_{0}^{s''''} (E_{1} - E_{2}) \left(\frac{z_{1}^{2}}{2} - \frac{z_{1}^{3}}{3} - \frac{1}{6} \right) - \varepsilon^{3} u_{0}^{s'''} \left[(E_{1} - E_{2}) (2 - z_{1}) z_{1} + (E_{1} + E_{2}) \right]$$

$$(42)$$

прямыми действиями без интегрирования. Заметим, что и в этом случае остаются справедливыми оценки основных неизвестных W_0^s , u_0^s , τ_0^s , σ_{z0}^s по формулам (15). Решение уравнений (40) и (41) находится, так же как и в предыдущем параграфе, при соответствующих граничных условиях.

6. Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины

Полосу отнесем, как и в предыдущих примерах, к системе безразмерных прямоугольных координат x, z (рис. 3), считая, что ее верхняя часть при $0 \le z \le 1$ состоит из n слоев различных толщин и различных жесткостей E_i , $i = 1 \div n$, границы которых заданы координатами $z_i = z_0 \div z_n$. При этом будет $z_0 = 0$ и $z_n = 1$. Примем, что нижняя часть полосы $-1 \le z \le 0$ состоит из m слоев различных толщин и различных жесткостей E_i , $i = 1 \div m$, границы которых заданы координатами $z_i = (-z_0) \div (-z_m)$. При этом будет $z_m = -1$. То есть значения координат берутся по модулю и присваивается знак минус.



Рис. 3. Полоса с произвольным количеством слоев различной тощины **Figure 3.** Strip of an arbitrary number of layers with different thickness

Для решения системы уравнений (7) надо вычислить коэффициенты (8) для случая произвольного числа слоев. Предположим, как и в предыдущих параграфах, что коэффициент Пуассона ν не зависит от

координаты z. Таким образом остается вычислить четыре коэффициента $\int_{0}^{1} Edz$, $\int_{0}^{1} Ezdz$, $\int_{0}^{1} \frac{z}{z} Edzdz$, $\int_{0}^{1} \int_{0}^{z} Edzdz$, $\int_{0}^{1} Edz$, $\int_{0}^{1} Ed$

 $\int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} Ezdzdz$ для нижней части $-1 \le z \le 0$. После вычислений для них можно записать следующие фор-

мулы:

$$\begin{split} \tilde{E}_{z}^{+} &= \int_{0}^{1} Ezdz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} E_{i}h_{i}^{2}, \ \tilde{E}^{+} = \int_{0}^{1} Edz = \sum_{i=1}^{n} E_{i}h_{i}; \\ \tilde{E}_{z}^{-} &= \int_{0}^{-1} Ezdz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} E_{i}h_{i}^{2}, \ \tilde{E}^{-} = \int_{0}^{-1} Edz = -\sum_{i=1}^{m} E_{i}h_{i}; \\ \tilde{E}_{z}^{+} &= \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} Ezdzdz = (E_{1} - E_{2}) \left(\frac{z_{1}^{3}}{6} + \frac{z_{1}^{2}}{2}h_{2}\right) + E_{2}\frac{1}{6}; \\ \tilde{E}_{z}^{-} &= \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} Ezdzdz = -(E_{1} - E_{2}) \left(\frac{z_{1}^{3}}{6} + \frac{z_{1}^{2}}{2}h_{2}\right) - E_{2}\frac{1}{6}; \\ \tilde{E}^{+} &= \int_{z_{0}}^{1} \int_{z_{0}}^{z} Edzdz = \frac{1}{2}E_{1}h_{1}^{2} + E_{1}h_{1}h_{2} + \frac{1}{2}E_{2}h_{2}^{2}; \\ \tilde{E}^{-} &= \int_{z_{0}}^{-1} \int_{z_{0}}^{z} Edzdz = \frac{1}{2}E_{1}h_{1}^{2} + E_{1}h_{1}h_{2} + \frac{1}{2}E_{2}h_{2}^{2}. \end{split}$$

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Запишем уравнения (7), воспользовавшись введенными обозначениями для интегральных коэффициентов:

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime} \tilde{E}_{z}^{+} - \varepsilon^{2} \tau_{0}^{\prime\prime} \frac{1}{2} (2+\nu) - \varepsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime} \tilde{E}^{+} - \nu \varepsilon \sigma_{z0}^{\prime} + \tau_{0} = X_{+}, \qquad (44)$$

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \tilde{E}_{z}^{-} - \varepsilon^{2} \tau_{0}^{\prime\prime\prime} \frac{1}{2} (2+\nu) + \varepsilon^{2} u_{0}^{\prime\prime} \tilde{E}^{-} + \nu \varepsilon \sigma_{z0}^{\prime} + \tau_{0} = X_{-}; \qquad (44)$$

$$-\varepsilon^{4} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime} \tilde{E}_{z}^{+} + \varepsilon^{3} \tau_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{6} (2+\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^{3} u_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \tilde{E}^{+} + \frac{1}{2} \varepsilon^{2} \nu \sigma_{z0}^{\prime\prime} - \varepsilon \tau_{0}^{\prime} + \sigma_{z0} = Z_{+}, \qquad (45)$$

$$\varepsilon^{4} w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime} \tilde{E}_{z}^{-} - \varepsilon^{3} \tau_{0}^{\prime\prime\prime\prime} \frac{1}{6} (2+\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^{3} u_{0}^{\prime\prime\prime} \tilde{E}^{+} + \frac{1}{2} \varepsilon^{2} \nu \sigma_{z0}^{\prime\prime} + \varepsilon \tau_{0}^{\prime} + \sigma_{z0} = Z_{-}. \qquad (45)$$

Сложим и вычтем первые два и последние два уравнения попарно и запишем их в следующем порядке:

$$\varepsilon^{3}w_{0}^{\prime\prime\prime}(\tilde{E}_{z}^{+}+\tilde{E}_{z}^{-})-(2+\nu)\varepsilon^{2}\tau_{0}^{\prime\prime}-\varepsilon^{2}u_{0}^{\prime\prime}(\tilde{E}^{+}-\tilde{E}^{-})+2\tau_{0}=X_{+}+X_{-},$$

$$-\varepsilon^{4}w_{0}^{\prime\prime\prime\prime}(\tilde{E}_{z}^{+}+\tilde{E}_{z}^{-})+\frac{1}{3}(2+\nu)\varepsilon^{3}\tau_{0}^{\prime\prime\prime\prime}+\varepsilon^{3}u_{0}^{\prime\prime\prime\prime}(\tilde{E}^{+}-\tilde{E}^{+})-2\varepsilon\tau_{0}^{\prime}=Z_{+}-Z_{-};$$

$$\varepsilon^{3}w_{0}^{\prime\prime\prime\prime}(\tilde{E}_{z}^{+}-\tilde{E}_{z}^{-})-\varepsilon^{2}u_{0}^{\prime\prime}(\tilde{E}^{+}+\tilde{E}^{-})-2\nu\varepsilon\sigma_{z0}^{\prime}=X_{+}-X_{-},$$

$$-\varepsilon^{4}w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime}(\tilde{E}_{z}^{+}-\tilde{E}_{z}^{-})+\varepsilon^{3}\tau_{0}^{\prime\prime\prime\prime}\frac{1}{3}(2+\nu)+\varepsilon^{3}u_{0}^{\prime\prime\prime}(\tilde{E}^{+}+\tilde{E}^{+})+\varepsilon^{2}\nu\sigma_{z0}^{\prime\prime\prime}+2\sigma_{z0}=Z_{+}+Z_{-}.$$
(46)
$$(47)$$

Примем, так же как и в случае с двухслойной полосой, в соответствии с описанием метода SVPB $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ в первой паре уравнений, где τ_0^s — медленно меняющаяся функция, τ_0^q — быстро меняющаяся функция:

$$\epsilon^{3}w_{0}^{\prime\prime\prime\prime}\left(\tilde{E}_{z}^{+}+\tilde{E}_{z}^{-}\right)-(2+\nu)\left(\epsilon^{2}\tau_{0}^{s\prime\prime}+\epsilon^{2}\tau_{0}^{q\prime\prime\prime}\right)-\epsilon^{2}u_{0}^{\prime\prime\prime}\left(\tilde{E}^{+}-\tilde{E}^{-}\right)+2\left(\tau_{0}^{s}+\tau_{0}^{q}\right)=X_{+}+X_{-},\\-\epsilon^{4}w_{0}^{\prime\prime\prime\prime\prime}\left(\tilde{E}_{z}^{+}+\tilde{E}_{z}^{-}\right)+\frac{1}{3}(2+\nu)\epsilon^{3}\left(\epsilon^{2}\tau_{0}^{s\prime\prime\prime}+\epsilon^{2}\tau_{0}^{q\prime\prime\prime\prime}\right)+\epsilon^{3}u_{0}^{\prime\prime\prime\prime}\left(\tilde{E}^{+}-\tilde{E}^{+}\right)-2\left(\epsilon\tau_{0}^{s\prime}+\epsilon\tau_{0}^{q\prime}\right)=Z_{+}-Z_{-}$$

и запишем уравнения для быстро меняющихся функций

$$-(2+\nu)\varepsilon^{2}\tau_{0}^{q''}+2\tau_{0}^{q}=0,$$

$$(2+\nu)\varepsilon^{3}\tau_{0}^{q'''}-6\varepsilon\tau_{0}^{q'}=0$$
(48)

и медленно меняющихся

$$\epsilon^{3} w_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} + \tilde{E}_{z}^{-} \right) - \epsilon^{2} u_{0}^{s''} \left(\tilde{E}^{+} - \tilde{E}^{-} \right) + 2\tau_{0}^{s} = X_{+} + X_{-},$$

$$-\epsilon^{4} w_{0}^{s''''} \left(\tilde{\tilde{E}}_{z}^{+} + \tilde{\tilde{E}}_{z}^{-} \right) + \epsilon^{3} u_{0}^{s'''} \left(\tilde{\tilde{E}}^{+} - \tilde{\tilde{E}}^{+} \right) - 2\epsilon \tau_{0}^{s'} = Z_{+} - Z_{-},$$
(49)

$$\epsilon^{3} w_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-} \right) - \epsilon^{2} u_{0}^{s''} \left(\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{-} \right) - 2 \nu \epsilon \sigma_{z0}^{s'} = X_{+} - X_{-},$$

$$-\epsilon^{4} w_{0}^{s''''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-} \right) + \epsilon^{3} u_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{+} \right) + \epsilon^{2} \nu \sigma_{z0}^{s''} + 2 \sigma_{z0}^{s} = Z_{+} + Z_{-}.$$

Из первых двух уравнений получаем

$$\epsilon^{4} w_{0}^{s''''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} + \tilde{E}_{z}^{-} - \tilde{\tilde{E}}_{z}^{+} - \tilde{\tilde{E}}_{z}^{-} \right) - \epsilon^{3} u_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}^{+} - \tilde{E}^{-} - \tilde{\tilde{E}}^{+} + \tilde{\tilde{E}}^{+} \right) = Z_{+} - Z_{-} + \epsilon \left(X_{+}^{'} + X_{-}^{'} \right).$$
(50)

Из четвертого уравнения, как и ранее в п. 3, следует, что $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$. Поэтому в третьем уравнении величина $2\nu\varepsilon\sigma_{z_0}^{s'} \sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^6 w_0^s$ и может быть отброшена как малая второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда это уравнение

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-} \right) - \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} \left(\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{-} \right) = X_{+} - X_{-}$$

с отброшенным членом $2\nu \varepsilon \sigma_{z0}^{s'}$ и уравнение (50) сводятся к двум разрешающим

$$\varepsilon^{4}Cw_{0}^{s''''} = Z_{+} - Z_{-} + \varepsilon \left(X_{+}' + X_{-}'\right) + \varepsilon \frac{1}{\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{-}} \left(X_{+}' - X_{-}'\right),$$
(51)

где
$$C = \left[\left(\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- - \tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^- \right) + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left(\tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^+ \right) \right]$$
и

 $\varepsilon^{2} u_{0}^{s''} \left(\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{-} \right) = \varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-} \right) - \left(X_{+} - X_{-} \right).$ (52)

Неизвестные σ_{z0}^{s} и τ_{0}^{s} находятся из первого и четвертого уравнений системы (49):

$$2\sigma_{z_{0}}^{s} = Z_{+} + Z_{-} + \varepsilon^{4} w_{0}^{s''''} \left(\tilde{\tilde{E}}_{z}^{+} - \tilde{\tilde{E}}_{z}^{-}\right) - \varepsilon^{3} u_{0}^{s'''} \left(\tilde{\tilde{E}}^{+} + \tilde{\tilde{E}}^{+}\right),$$

$$2\tau_{0}^{s} = X_{+} + X_{-} - \varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} + \tilde{E}_{z}^{-}\right) + \varepsilon^{2} u_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}^{+} - \tilde{E}^{-}\right)$$
(53)

прямыми действиями без интегрирования. Вытекающие из формул (51)—(53) оценки основных неизвестных совпадают с оценками в выражении (15).

7. Условия на коротких сторонах полосы

Пример. Рассмотрим консольную полосу, жестко закрепленную на конце x = 0. Конец x = 1 будем считать свободным от какой-либо нагрузки. Верхний край z = 1 несет только равномерно распределенную нагрузку $Z_+ = p$. Для простоты изложения рассмотрим четырехслойную полосу (рис. 4) и примем одинаковыми коэффициенты Пуассона каждого слоя.

Разрешающие уравнения (51)—(53) приводятся к виду

$$\varepsilon^4 C w_0^{s''''} = p \,, \tag{54}$$

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

441

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} = \varepsilon^3 w_0^{s'''} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-}.$$
(55)

$$2\sigma_{z_{0}}^{s} = p + \varepsilon^{4} w_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-}\right) - \varepsilon^{3} u_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{+}\right),$$

$$2\tau_{0}^{s} = -\varepsilon^{3} w_{0}^{s'''} \left(\tilde{E}_{z}^{+} + \tilde{E}_{z}^{-}\right) + \varepsilon^{2} u_{0}^{s''} \left(\tilde{E}^{+} - \tilde{E}^{-}\right).$$
(56)



Рис. 4. Консольная полоса **Figure 4**. Cantilever strip

На конце *x* = 0 на основании формул (5) запишем условия защемления

$$u_{(0)}\Big|_{x=0} = \left[-\varepsilon w_0' z + \tau_0 2(1+\nu) \int_0^z \frac{1}{E} dz + u_0\right]_{x=0} = 0,$$
(57)

$$w_{(1)}\Big|_{x=0} = \left\{ \nu \varepsilon^2 w_0'' \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' \left[\left(1 - \nu^2 \right) \int_0^z \frac{1}{E} z dz + 2\nu \left(1 + \nu \right) \frac{z^2}{2} \right] + \left(1 - \nu^2 \right) \sigma_{z_0} \int_0^z \frac{1}{E} dz - \varepsilon u_0' \nu z + w_0 \right\}_{x=0} = 0 \quad (58)$$

и на конце *x* = 1 — условия свободного края

$$\sigma_{x(0)}\Big|_{x=1} = \left\{ \left[-E\epsilon^2 w_0'' + \epsilon \tau_0' (2+\nu) \right] z + E\epsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} \right\}_{x=1} = 0,$$
(59)

$$\tau_{(1)}\Big|_{x=1} = \left\{ \epsilon^3 w_0^{\prime\prime\prime} \int_0^z Ez dz - \epsilon^2 \tau_0^{\prime\prime} (2+\nu) \frac{z^2}{2} - \epsilon^2 u_0^{\prime\prime} \int_0^z E dz - \nu \epsilon \sigma_{z0}^{\prime} z + \tau_0 \right\}_{x=1} = 0.$$
(60)

Запишем условия (57), (58) для первого слоя $z_0 \le z \le z_1$ при x = 0:

$$\left[-\varepsilon w_{0}' + 2(1+\nu)\tau_{0}\frac{1}{E_{1}}\right](z-z_{0}) + u_{0} = 0, \qquad (61)$$

$$\left\{ \mathbf{v}\varepsilon^{2}w_{0}^{\prime\prime} - \varepsilon\tau_{0}^{\prime} \left[\frac{1}{E_{1}} \left(1 - \mathbf{v}^{2} \right) + 2\mathbf{v} \left(1 + \mathbf{v} \right) \right] \right\} \left(\frac{z^{2}}{2} - \frac{z_{0}^{2}}{2} \right) + \left[\left(1 - \mathbf{v}^{2} \right) \sigma_{z0} \frac{1}{E_{1}} - \mathbf{v}\varepsilon u_{0}^{\prime} \right] \left(z - z_{0} \right) + w_{0} = 0 \quad (62)$$

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

и для второго слоя $z_1 \le z \le z_2$ при x = 0:

$$-\varepsilon w_{0}' \Big[(z_{1} - z_{0}) + (z - z_{1}) \Big] + 2(1 + \nu) \tau_{0} \Big[\frac{1}{E_{1}^{+}} (z_{1} - z_{0}) + \frac{1}{E_{2}^{+}} (z - z_{1}) \Big] + u_{0} = 0, \qquad (63)$$

$$\mathbf{v}\epsilon^{2}w_{0}''\left[\left(\frac{z_{1}^{2}}{2}-\frac{z_{0}^{2}}{2}\right)+\left(\frac{z^{2}}{2}-\frac{z_{1}^{2}}{2}\right)\right]-\epsilon\tau_{0}'\left\{\left(1-\mathbf{v}^{2}\right)\left[\frac{1}{E_{1}^{+}}\left(\frac{z_{1}^{2}}{2}-\frac{z_{0}^{2}}{2}\right)+\frac{1}{E_{2}^{+}}\left(\frac{z^{2}}{2}-\frac{z_{1}^{2}}{2}\right)\right]+2\mathbf{v}\left(1+\mathbf{v}\right)\left[\left(\frac{z_{1}^{2}}{2}-\frac{z_{0}^{2}}{2}\right)+\left(\frac{z^{2}}{2}-\frac{z_{1}^{2}}{2}\right)\right]\right\}\right\}$$

$$+\left[\left(1-\mathbf{v}^{2}\right)\boldsymbol{\sigma}_{z0}-\mathbf{v}\epsilon\boldsymbol{u}_{0}'\right]\left[\frac{1}{E_{1}^{+}}\left(z_{1}-z_{0}\right)+\frac{1}{E_{2}^{+}}\left(z-z_{1}\right)\right]+w_{0}=0.$$
(64)

Вычитая из уравнения (63) уравнение (61) и из уравнения (64) уравнение (62) при $z = z_1$, получим условия на конце x = 0 для второго слоя:

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0 \frac{1}{E_2^+} \end{bmatrix} (z-z_1) + u_0 = 0,$$

$$\int v \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau \left[(1-\nu^2) \frac{1}{E_2^+} + 2\nu(1+\nu) \right] \left[(\frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2}) + \left[(1-\nu^2)\sigma - \nu \varepsilon u_0' \right] \frac{1}{E_2^+} + 2\nu(1+\nu) \right]$$
(65)

$$\left\{ \mathbf{v}\varepsilon^{2}w_{0}^{*} - \varepsilon\tau_{0}^{*} \left[\left(1 - \mathbf{v}^{2}\right)\frac{1}{E_{2}^{*}} + 2\mathbf{v}\left(1 + \mathbf{v}\right) \right] \right\} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] + \left[\left(1 - \mathbf{v}^{2}\right)\sigma_{z0} - \mathbf{v}\varepsilon u_{0}^{*} \right] \frac{1}{E_{2}^{*}} (z - z_{1}) + w_{0} = 0.$$
(66)

Сравнивая условия (61), (62) с условиями (65), (66), замечаем, что они однотипны. То есть условия защемления ставятся для каждого слоя. Легко видеть, что эти рассуждения могут быть продолжены для полосы с произвольным числом слоев как при z > 0, так и при z < 0.

Таким образом, для слоев при z > 0 имеем восемь условий на концах полосы:

$$u_0 = 0, (67)$$

$$-\varepsilon w_{0}' + \frac{2(1+\nu)}{E_{i}^{+}} \left(\tau_{0}^{s} + \tau_{0}^{q}\right) = 0, \ i = 1, 2,$$
(68)

$$w_0 = 0, (69)$$

$$\sigma_{z0} \frac{1 - v^2}{E_i^+} - v \varepsilon u_0' = 0, \quad i = 1, 2,$$
(70)

$$\nu \varepsilon^{2} w_{0}^{"} - \left(\varepsilon \tau_{0}^{s'} + \varepsilon \tau_{0}^{q'}\right) \left[\frac{1 - \nu^{2}}{E_{i}^{+}} + 2\nu \left(1 + \nu\right)\right] = 0, \quad i = 1, 2,$$
(71)

где условия (68), (70), (71) записаны для первого и второго слоев. Здесь, как и ранее, предполагается, что $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$. Из выражения (56) следует, что $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0$ и поэтому в уравнениях (68) и (71) член τ_0^s может быть отброшен как величина порядка ε^2 по сравнению с w_0^s . Кроме того, поскольку в уравнении (71) $\varepsilon \tau_0^{q'} \sim v \varepsilon^2 w_0^{"}$, в уравнении (68) второй член τ_0^q также иможет быть отброшен. Это дает возможность использовать условия

$$w_0 = w_0' = u_0 = 0 \tag{72}$$

на конце x = 0 при нахождении решения уравнений (54), (55).

Условия свободного края (59), (60) в рассматриваемом приближении представляются в следующем виде:

$$-E_{i}\varepsilon^{2}w_{0}^{\prime\prime}+\varepsilon\tau_{0}^{q\prime}(2+\nu)=0,\ i=1,2,$$
(73)

$$E_i \varepsilon u_0' + v \sigma_{z_0} = 0, \ i = 1, 2,$$
(74)

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0, (75)$$

$$-\varepsilon^2 u_0^{\prime\prime} \int_0^z E dz - \nu \varepsilon \sigma_{z0} z = 0, \qquad (76)$$

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{\prime \prime \prime} \int_{0}^{z} Ezdz - \varepsilon^{2} \tau_{0}^{q \prime \prime} (2+\nu) \frac{z^{2}}{2} = 0.$$
(77)

Здесь, как и ранее, в условиях жесткого защемления член τ_0^s отброшен в условиях (73) и (77) как величина ε^2 по сравнению с w_0^s , поскольку в силу оценок (15) $u_0^s \sim \varepsilon^{-3}Z$, $\sigma_{z0}^s \sim Z$, в условии (74) величина σ_{z0}^s может быть отброшена по сравнению с $\varepsilon u_0'$. Из таких же соображений в условии (76) величина $\varepsilon \sigma_{z0}^{s'}$ может быть отброшена по сравнению с $\varepsilon^2 u_0''$. После отбрасывания и вычисления интегралов получим:

$$-E_{1}\varepsilon^{2}w_{0}''+\varepsilon\tau_{0}^{q'}(2+\nu)=0 \text{ при } 0 \le z \le z_{1},$$
(78)

$$-E_{2}\varepsilon^{2}w_{0}^{\prime\prime}+\varepsilon\tau_{0}^{q\prime}(2+\nu)=0 \text{ при } z_{1}\leq z\leq 1,$$
(79)

$$E_1 \varepsilon u_0' = 0$$
, при $0 \le z \le z_1$, (80)

$$E_2 \varepsilon u_0' = 0 \operatorname{пpu} z_1 \le z \le 1, \tag{81}$$

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0 \text{ при } 0 \le z \le 1,$$
(82)

$$-\varepsilon^2 u_0'' E_1 = 0 \text{ при } 0 \le z \le z_1, \tag{83}$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' E_2 = 0 \text{ при } z_1 \le z \le 1, \tag{84}$$

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{'''} E_{1} - \varepsilon^{2} \tau_{0}^{q''} (2 + \nu) = 0 \text{ при } 0 \le z \le z_{1},$$
(85)

$$\varepsilon^{3} w_{0}^{\prime \prime \prime \prime} E_{1} - \varepsilon^{2} \tau_{0}^{q \prime \prime} (2 + \nu) = 0 \text{ при } z_{1} \le z \le 1.$$
(86)

Условия (83) и (84) выполняются, если $u_0'' = 0$, что на основании формулы (55) приводит к условию $w_0''' = 0$. (87)

После этого перепишем условия (78)—(86), справедливые на конце для x = 1 при $0 \le z \le 1$:

$$w_0'' = 0$$
, (88)

$$u_0' = 0,$$
 (89)

$$\tau_0^s = 0 , \qquad (90)$$

$$\tau_0^q = 0. \tag{91}$$

Последнее условие показывает, что краевой эффект на свободном краю отсутствует. Условие (90) в силу соотношения (55) совпадает с условием (87). В итоге оставшихся трех условий (87)— (90) на конце x=1 и трех условий (72) на конце x=0 достаточно для определения шести постоянных интегрирования уравнений (54) и (55). После вычислений получим основные неизвестные

$$w_{0}^{s} = \frac{p}{\epsilon^{4}C} \left(\frac{x^{4}}{24} - \frac{x^{3}}{6} + \frac{x^{2}}{4} \right), \ u_{0}^{s} = \frac{p}{\epsilon^{3}C} \frac{\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-}}{\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{-}} \left(\frac{x^{3}}{6} - \frac{x^{2}}{12} - \frac{x}{3} \right),$$
$$\tau_{0}^{s} = -\frac{p}{2\epsilon C} (x-1) \left(\tilde{E}_{z}^{+} + \tilde{E}_{z}^{-} \right), \ \sigma_{z0}^{s} = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-}}{C} \right).$$

Подстановка этих выражений в формулы (5) дает выражения для всех неизвестных рассмотренного примера: напряжений, деформаций и перемещений:

$$\begin{split} u_{(0)} &= \frac{p}{C} \bigg[-\bigg(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \bigg) z - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (x - 1) \big(\tilde{E}_z^* + \tilde{E}_z^- \big)_0^z \frac{2(1 + v)}{E} dz + \frac{\tilde{E}_z^* - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^* + \tilde{E}^*} \bigg(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} \bigg) \bigg], \\ \varepsilon_{x(0)} &= -\frac{p}{\varepsilon^2 C} \bigg[\bigg(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \bigg) z - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \big(\tilde{E}_z^* + \tilde{E}_z^- \big)_0^z \frac{2(1 + v)}{E} dz + \frac{\tilde{E}_z^* - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^* + \tilde{E}^*} \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \bigg) \bigg], \\ \sigma_{z(0)} &= -E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \bigg(\frac{\tilde{E}_z^* + \tilde{E}_z^-}{C} z + 1 + \frac{\tilde{E}_z^* - \tilde{E}_z^-}{2C} \bigg), \\ \sigma_{x(0)} &= -E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \bigg(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \bigg) z - \frac{p}{2C} \bigg(\tilde{E}_z^* + \tilde{E}_z^- \big) \big(2 + v \big) z + \\ &+ E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^* - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^* + \tilde{E}^*} \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \bigg) + v \frac{p}{2} \bigg(1 + \frac{\tilde{E}_z^* - \tilde{E}_z^-}{C} \bigg), \\ \varepsilon_{z(0)} &= v \frac{p}{\varepsilon^2 C} \bigg(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \bigg) z - \frac{p}{2C} \bigg(\tilde{E}_z^* + \tilde{E}_z^- \bigg) \bigg[v_0^z \frac{2(1 + v)}{E} dz - \frac{1 - v^2}{E} z \bigg] - \\ &- v \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^* - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^* + \tilde{E}^*} \bigg(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \bigg) + \frac{1 - v^2}{E} \frac{p}{2} \bigg(1 + \frac{\tilde{E}_z^* - \tilde{E}_z^-}{C} \bigg), \\ w_{(1)} &= \frac{pv}{\varepsilon^2 C} \bigg(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \bigg) \frac{z^2}{2} + \frac{p}{2C} \bigg(\tilde{E}_z^* + \tilde{E}_z^- \bigg) \bigg[z_0^z \bigg[\frac{1 - v^2}{E} z dz + 2v (1 + v) \frac{z^2}{2} \bigg] + \end{split}$$

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

$$\begin{split} &+ \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-}}{C} \right)_{0}^{z} \frac{1 - v^{2}}{E} dz - \frac{p}{\varepsilon^{2}C} \frac{\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-}}{\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{-}} \left(\frac{x^{2}}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right)_{0}^{z} v dz + \frac{p}{\varepsilon^{4}C} \left(\frac{x^{4}}{24} - \frac{x^{3}}{6} + \frac{x^{2}}{4} \right) \right) \\ &\tau_{(1)} = \frac{p}{\varepsilon^{2}C} (x - 1) \int_{0}^{z} Ez dz - \varepsilon^{2} \tau_{0}^{q''} (2 + v) \frac{z^{2}}{2} - \\ &- \frac{p}{\varepsilon^{4}C} (x - 1) \frac{\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-}}{\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{-}} \int_{0}^{z} Edz - \frac{p}{2\varepsilon C} (x - 1) \left(\tilde{E}_{z}^{+} + \tilde{E}_{z}^{-} \right), \\ &\sigma_{z(1)} = - \frac{p}{C} \int_{0}^{z} \int_{0}^{z} Ez dz dz + \varepsilon^{3} \tau_{0}^{q'''} (2 + v) \frac{z^{3}}{6} + \\ &+ \frac{p}{\varepsilon^{2}C} \frac{\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-}}{\tilde{E}^{+} + \tilde{E}^{-}} \int_{0}^{z} Edz dz + \frac{p}{2C} \left(\tilde{E}_{z}^{+} + \tilde{E}_{z}^{-} \right) - \varepsilon \tau_{0}^{q'} z + \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\tilde{E}_{z}^{+} - \tilde{E}_{z}^{-}}{C} \right), \end{split}$$

в которых вычисленные по формулам (43) коэффициенты жесткости имеют значения

$$\begin{split} \tilde{E}_{z}^{+} &= \int_{0}^{1} Ezdz = \frac{1}{2} \Big(E_{1}^{+}h_{1}^{2} + E_{2}^{+}h_{2}^{2} \Big), \ \tilde{E}^{+} = \int_{0}^{1} Edz = E_{1}^{+}h_{1} + E_{2}^{+}h_{2}, \\ \tilde{E}_{z}^{-} &= \int_{0}^{-1} Ezdz = \frac{1}{2} \Big(E_{1}^{-}h_{1}^{2} + E_{2}^{-}h_{2}^{2} \Big), \ \tilde{E}^{-} &= \int_{0}^{-1} Edz = -E_{1}^{-}h_{1} - E_{2}^{-}h_{2} \\ \tilde{E}_{z}^{+} &= \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} Ezdzdz = \Big(E_{1}^{+} - E_{2}^{+} \Big) \frac{z_{1}^{3}}{6} + \Big(E_{1}^{+} - E_{2}^{+} \Big) \frac{z_{1}^{2}}{2}h_{2} + E_{2}^{+}\frac{1}{6}, \\ \tilde{E}^{+} &= \int_{0}^{1} \int_{0}^{z} Edzdz = \frac{1}{2} E_{1}^{+}h_{1}^{2} + E_{1}^{+}h_{1}h_{2} + \frac{1}{2} E_{2}^{+}h_{2}^{2}, \\ \tilde{E}_{z}^{-} &= \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} Ezdzdz = -\Big(E_{1}^{-} - E_{2}^{-} \Big) \frac{z_{1}^{3}}{6} - \Big(E_{1}^{-} - E_{2}^{-} \Big) \frac{z_{1}^{2}}{2}h_{2} - E_{2}^{-}\frac{1}{6}, \\ \tilde{E}^{-} &= \int_{0}^{-1} \int_{0}^{z} Edzdz = \frac{1}{2} E_{1}^{-}h_{1}^{2} + E_{1}^{-}h_{1}h_{2} + \frac{1}{2} E_{2}^{-}h_{2}^{2}. \end{split}$$

8. Заключение

Полуобратный метод Сен-Венана предполагает построение решения уравнений теории упругости путем задания части неизвестных из каких-либо соображений и вычисления по ним остальных неизвестных. В статье он продолжен до итерационного, совпадающего с методом простых итераций. Для этого оператор исходных уравнений преобразован так, чтобы он позволял вычислять неизвестные величины последовательно: вычисленные в одном уравнении величины входят в следующее уравнение как известные, при этом умноженные на малый параметр. Такая последовательность обеспечивается операторами Пикара и выбором величин начального приближения, не зависящих от поперечной координаты, называемыми гипотезами Кирхгоффа или гипотезами недеформируемой нормали. В течение одной итерации вычисляются путем прямого интегрирования все неизвестные задачи, содержащие четыре произвольные функции интегрирования, зависящие от продольной координаты и играющие роль коэффициентов в полиномах по степеням поперечной координаты. В случае изотропного материала уравнения, описывают

щие изгиб и растяжение — сжатие, разделяются. Заметим, что для случая произвольного слоистого материала разделения не происходит.

В процессе последовательного вычисления неизвестных в течение нулевой итерации имеет место четырехкратное интегрирование по поперечной координате и четырехкратное дифференцирование по продольной. Однако это дифференцирование имеет символический характер, так как при выполнении граничных условий на длинных сторонах производные приравниваются к нагрузке, которая считается величиной O(1), и соответствующие уравнения интегрируются, обеспечивая вместе с однородными сингу-

лярно возмущенными уравнениями непрерывность и ограниченность решения в любом случае. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление исходного сложного оператора на четыре оператора относительно поперечной координаты и четыре — относительно продольной. Близость полученного решения к точному решению оценивается порядком первого отброшенного члена по ε . Предложенное решение свободно от недостатков классической теории, построенной на гипотезах и допущениях:

1) в возможности пренебрежения поперечными напряжениями;

2) «гипотезы прямой нормали» для перемещений в полосе;

 об эквивалентности замены напряжений исходной задачи на принятые в сопротивлении материалов усилия и моменты;

4) в возможности пренебрежения граничными условиями на длинных сторонах;

5) в пренебрежении быстро затухающими компонентами решений на торцевых поверхностях;

6) в пренебрежении понижения порядка системы дифференциальных уравнений и невыполнении части граничных условий вследствие этого;

7) в силу большей общности описанный метод позволяет однообразно рассматривать новые задачи как для изотропного, так анизотропного и композиционного материала.

Список литературы

1. Reissner E. Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics. London: Jones & Bartlett Publishers, Inc. 1996. 624 p. ISBN 0867209682

2. *Mindlin R.D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // Journal Applied Mechanics // Transaction of American Society of Mechanical Engineers. 1951. Vol. 18. Issue 1. P. 31–38. https://doi.org/ 10.1115/1.4010217

3. *Ghugal Y.M., Kulkarni S.K.* Thermal stress analysis of cross-ply laminated plates using refined shear deformation theory // Journal of Experimental and Applied Mechanics. 2011. Vol. 2. P. 47–66. https://doi.org/10.1504/IJAUTOC.2016. 078100

4. *Ghugal Y.M., Pawar M.D.* Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear deformation theory // Journal of Aerospace Engineering & Technology. 2011. Vol. 1–1. P. 1–12. URL: https://techjournals.stmjournals.in/index.php/JoAET/ article/view/724 (дата обращения: 12.02.2023).

5. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory // Applied and Computational Mechanics. 2012. Vol. 6. Issue 1. P. 65–82. URL: https://www.kme. zcu.cz/acm/acm/article/view/171 (дата обращения: 22.11.2022).

6. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Buckling analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory // Applied and Computational Mechanics. 2012. Vol. 6. Issue 2. P. 185–196. URL: https://www.kme.zcu.cz/acm/acm/article/view/185 (дата обращения: 22.11.2022).

7. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Flexure of thick beams using new hyperbolic shear deformation theory // International Journal of Mechanics. 2011. Vol. 5–3. P. 113–122. https://doi.org/10.1590/S1679-78252011000200005

8. VoT.P., Thai H.-T. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories // Composite Structures. 2012. Vol. 94. Issue 8. P. 2513–2522. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.010

9. Lyu Y.-T., Hung T.-P., Ay H.-C., Tsai H.-A., Chiang Y.-C. Evaluation of Laminated Composite Beam Theory Accuracy // Materials. 2022. Vol. 15. https://doi.org/10.3390/ma15196941

10. Фирсанов Вал.В., Фам В.Т., Чан Н.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 114. С. 1–26. https://doi. org/10.34759/trd-2020-114-07

11. *Firsanov V.V.* Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. Vol. 5. Issue 6. P. 515–522. https://doi.org/10.3103/S1052618816060078

12. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Краевое напряженное состояние круглой пластины переменной толщины при термомеханическом нагружении на основе уточненной теории // Тепловые процессы в технике. 2020 Т. 12. № 1. С. 39–48. https://doi.org/10.34759/tpt-2020-12-1-39-48

13. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bulletin of the American Mathematical Society. 1955. Vol. 61. Issue 6. P. 485–504. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1955-09976-2

14. Григолюк Э.И. Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек. Серия «Механика твердого деформируемого тела». М.: ВИНИТИ, 1973. Т. 5. 272 с. URL: https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/ mechanics/solid.htm (дата обращения: 22.11.2022).

15. Zveryayev Ye.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beams and plates // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2003. Vol. 67. Issue 3. P. 425–434. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90026-8

16. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927. 662 p. URL: https://archive.org/details/atreatiseonmath01lovegoog/page/n12/mode/2up (дата обращения: 12.02.2023).

17. *Kamke E.* Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Band I. Leipzig. 1942, 642 p. (in Deutsch) URL: https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.362343/page/n1/mode/2up (дата обращения: 12.02.2023).

18. Zveryaev E.M. Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method. In: Pietraszkiewicz W., Szymczak C. (eds.) Shell Structures: Theory and Application. London: Taylor & Francis Group; 2006. P. 191–198.

19. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Dover: Dover Dover Books on Mathematics Publ.; 1999. 128 p. URL: https://archive.org/details/elementsoftheory0000kolm_17l2/page/140/ mode/2up (дата обращения: 12.02.2023).

20. Zveryayev E.M. A consistent theory of thin elastic shells // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. April 2017. Vol. 80. Issue 5. P. 409–420. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech

21. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 95. С. 1–29. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ipmp&paperid=1947&option_lang=rus EDN: TBEVXL

22. Zveryayev E.M., Makarov G.I. A general method for constructing Timoshenko-type theories // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. Vol. 72. Issue 2. P. 197–207. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.004

23. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55. Issue 7. P. 1042–1050. https://doi.org/10.3103/S0025654420070225

References

1. Reissner E. Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics. London. Jones & Bartlett Publ.; 1996. ISBN 0867209682

2. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *American Society* of Mechanical Engineers Journal Applied Mechanics. 1951;18(1):31–38. https://doi.org/10.1115/1.4010217

3. Ghugal Y.M., Kulkarni S.K. Thermal stress analysis of cross-ply laminated plates using refined shear deformation theory. *Journal of Experimental and Applied Mechanics*. 2011;2:47–66. DOI:10.1504/IJAUTOC.2016.078100

4. Ghugal Y.M., Pawar M.D. Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear deformation theory. *Journal of Aerospace Engineering & Technology*. 2011;1–1:1–12. Available from: https://techjournals.stmjournals.in/index.php/JoAET/article/view/724 (accessed: 12.02.2023).

5. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Applied and Computational Mechanics*. 2012;6(1):65–82. Available from: https://www.kme.zcu.cz/ acm/acm/article/view/171 (accessed: 12.02.2023).

6. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Buckling analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Applied and Computational Mechanics*. 2012;6(2):185–196. Available from: https://www.kme.zcu.cz/acm/acm/article/view/185 (accessed: 12.02.2023).

7. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Flexure of thick beams using new hyperbolic shear deformation theory. *International Journal of Mechanics*. 2011;5–3:113–122. https://doi.org/10.1590/S1679-78252011000200005

8. Vo T.P., Thai H.-T. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories. *Composite Structures*. 2012;94 (8):2513–2522. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.010

9. Lyu Y.-T., Hung T.-P., Ay H.-C., Tsai H.-A., Chiang Y.-C. Evaluation of Laminated Composite Beam Theory Accuracy. *Materials*. 2022;15:6941. https://doi.org/10.3390/ma15196941

10. Firsanov Val.V., Pham V.T., Tran N.D. Strain-stress state analysis of multilayer composite spherical shells based on the refined theory. *Trudy MAI [Works of MAI]*. 2020;114:1–26. (In Russ.) https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07

11. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016;45(6):515–521. https://doi.org/10.3103/S1052618816060078

12. Firsanov V.V., Zoan K.Kh. Edge stress state of a circular plate of variable thickness under thermo-mechanical loading on the basic of refined theory. *Teplovye processy v tekhnike [Thermal processes in engineering]*. 2020;12(1):39–48. (In Russ.) https://doi.org/10.34759/tpt-2020-12-1-39-48

13. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1955;61(6):485–504. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1955-09976-2

14. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Nonclassical theories of the vibrations of beams, plates, and shells. In: *Progress in Science and Technology: Mechanics of Deformable Solids* (vol. 5). Moscow; 1973. (In Russ.) Available from: https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm (accessed: 12.02.2023).

15. Zveryayev Ye.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beams and plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003;67(3):425–434. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90026-8

16. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927. Available from: https://archive.org/details/atreatiseonmath01lovegoog/page/n12/mode/2up (accessed: 12.02.2023).

17. Kamke E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Band I. Leipzig. 1942. (In Deutsch) Available from: https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.362343/page/n1/mode/2up (accessed: 12.02.2023).

18. Zveryaev E.M. Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method. In: Pietraszkiewicz W., Szymczak C. (eds.) *Shell Structures: Theory and Application*. London: Taylor & Francis Group; 2006. P. 191–198.

19. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Mineola, N.Y.: Dover Publ.; 1999. Available from: https://archive.org/details/elementsoftheory0000kolm_17l2/page/140/mode/2up (accessed: 12.02.2023).

20. Zveryayev E.M. A consistent theory of thin elastic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. April 2017;80(5):409–420. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech

21. Zveriaev E.M., Olekhova L.V. Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle. *Keldysh institute preprints*. 2014;95:1–29. (In Russ.) Available from: https://www.mathnet.ru/php/ Earchive.phtml?wshow=paper&jrnid=ipmp&paperid=1947&option lang=rus (accessed: 12.02.2023).

22. Zveryayev E.M., Makarov G.I. A general method for constructing Timoshenko-type theories. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008;72(2):197–207. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.004

23. Zveryaev E.M. Saint-Venant-Picard-Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity. *Mechanics of Solids*. 2020;55(7):1042–1050. https://doi.org/10.3103/S0025654420070225



Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-450-458 UDC 624.074.2 EDN: DTILTG

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Influence of the size of the upper ring on the stressed state of the ribbed-ring metal dome

Evgeny V. Lebed[™]

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation ⊠ evglebed@mail.ru

Article history

Received: July 6, 2023 Revised: September 27, 2023 Accepted: September 30, 2023

Conflicts of interest The author declares that there is no conflict of interest.

Abstract. Studies of several metal ribbed-ring large-span domes on computer models have been carried out. All elements of the dome frames are made of steel I-beams. The dome frames have the same number of ribs and rings, but they have different size of the upper ring. The frame elements cross-sections are oriented normally to the dome surfaces, with the exception of the upper ring. The joints of the frame elements with each other are assumed to be rigid in the normal direction and hinged in the tangential direction. The frames are mounted on support nodes at the level of the lower ring pivotally. All the domes are subjected to the same nodal loads from the weight of the enclosing structures and the weight of snow. The snow load is assumed to be asymmetrical, located only on one side of the dome. Under the combined action of these loads, the dimensions of the upper ring of the domes influence the stress-strain state of their frames. As a result of the research, graphs have been generated representing the stress level in the meridional ribs and in the upper rings of the domes. The conclusion has been made that the stress state of metal dome frames depends on the size of the upper ring. The necessity of increasing the cross-section of the upper ring with an increase in its size has been noted.

Keywords: ribbed-ring dome, meridional rib, upper ring, computer model, statical calculations, stress state

For citation

Lebed E.V. Influence of the size of the upper ring on the stressed state of the ribbed-ring metal dome. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2023;19(5):450-458. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-450-458

© Lebed E.V., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Evgeny V. Lebed, PhD in Engineering, Associate Professor in the Department of Metal and Wooden Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3926-8701; E-mail: evglebed@mail.ru

Влияние размера верхнего кольца на напряженное состояние ребристо-кольцевого металлического купола

Е.В. Лебедь 🖸 🖾

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация evglebed@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 6 июля 2023 г. Доработана: 27 сентября 2023 г. Принята к публикации: 30 сентября 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Аннотация. Выполнены исследования нескольких ребристо-кольцевых металлических большепролетных куполов на компьютерных моделях. Все элементы купольных каркасов приняты из стальных двутавров. Купольные каркасы имеют одинаковое количество ребер и колец, но отличаются друг от друга размером верхнего кольца. Сечения элементов каркасов ориентированы нормально к купольным поверхностям, за исключением верхнего кольца. Сопряжения элементов каркаса друг с другом приняты жесткими в нормальном направлении и шарнирными в тангенциальном направлении. Каркасы установлены на опорные узлы в уровне нижнего кольца шарнирно. На все купола приложены одинаковые узловые нагрузки от веса ограждающих конструкций и веса снега. Снеговая нагрузка принята несимметричной, расположенной только с одной стороны купола. При совместном действии этих нагрузок размеры верхнего кольца куполов отражаются на напряженно-деформированном состоянии их каркасов. В результате исследований построены графики, отражающие уровень напряжений в меридиональных ребрах и в верхних кольцах куполов. Сделан вывод о зависимости напряженного состояния каркасов металлических куполов от размеров верхних колец. Отмечена необходимость увеличения сечения верхнего кольца с увеличением его размера.

Ключевые слова: ребристо-кольцевой купол, меридиональное ребро, верхнее кольцо, компьютерная модель, статический расчет, напряженное состояние

Для цитирования

Lebed E.V. Influence of the size of the upper ring on the stressed state of the ribbed-ring metal dome // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 450–458. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-450–458

1. Introduction

Domes are used as coverings of buildings and structures both because of the expressiveness of their geometric shape and reliability of their structural systems. Due to their spatial rigidity and cost-effective metal consumption, they occupy a leading position among spatial coverings [1-3].

Geometric schemes of metal dome frames are diverse, depending on the overlapping spans and the purpose of the structure [4; 5]. Also, there can be different geometrical schemes of frames in ribbed-ring domes, for example, related to the number of sectors or tiers. One of the essential features of this difference is the size of the upper ring. Although the size of the upper ring often depends on the aesthetic or technological concept of a designer.

Many publications considered various aspects of ribbed-ring domes by means of various computer programs. For example, stress state of the dome frame was analyzed with changing parameters of its geometric scheme [6], with different dome height-to-diameter ratios for different spans [7], when brick filling of the frame cells between steel ribs and rings [8], with different dome height ratios and different cross-sections of core elements [9], and with different heights compared to the span of the dome frame with connections [10]. However, there are no publications devoted to the study of ribbed-ring domes with relatively different sizes of the upper ring.

Лебедь Евгений Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-3926-8701; E-mail: evglebed@mail.ru

Asymmetric load has the greatest influence on the stress-strain state of the frames of spatial structures. This load includes the second variant of the snow load on the dome cover¹. It determines the required cross-sections of the main bearing elements of the dome frames.

Six frames of spherical ribbed-ring domes with a curvature radius of 23 m, a span of 39.3 m and a height of 11.0 m (h/D = 0.28) were considered as objects of the research. Domes' frames consisted of 24 ribs, had 6 tiers, and differed from each other by the size of the upper ring. The smallest ring had a diameter of 4 m (d_{\min}), the largest one had a diameter of 14 m (d_{\max}), and the step of changing the diameter of the upper ring was 2 m. Due to the increase in the diameter of the upper ring, the lengths of the meridional ribs elements between the rings varied from 3.42 m to 2.75 m. The length of the upper ring elements varied from 0.78 m to 1.81 m.

All elements of the dome frames were made of steel I-beams: the ribs are made of I 50III1, the upper ring was made of I 50III4, the remaining rings were made of I 20III1. The cross sections of the frame elements were oriented normally to the dome's surfaces, with the exception of the upper ring, a cross section of which was oriented vertically (Figure 1). It was assumed that the conjugations of the upper ring to the meridional ribs, as well as conjugations of the other rings to the ribs, are rigid in the normal direction and hinged in the tangential direction. The frames are pivotally mounted on the supporting nodes at the level of the lower ring.



Figure 1. Investigated models of dome frames

¹ CR 20.13330.2016. Loads and impacts. Updated version of CNR 2.01.07–85*. Moscow: Ministry of Construction of Russia, 2016. (In Russ.) Available from: https://www.minstroyrf.gov.ru/docs/13673/

2. Methodology

The study of the stress state of the ribbed-ring dome's frame was carried out in the SCAD program [11] using computer models of spatial rod systems [12]. The study of dome type rod systems is usually carried out by scientists in various computer programs. Previously, the author performed a comparative study of ribbed-ring domes with various mounting methods [13; 14], as well as on the number of installed connections between meridional ribs [15]. The material presented in this paper has been obtained by the author in full compliance with the generally accepted principles of research for similar states in spatial rod systems.

Dome frames are spatial rod systems pivotally mounted on supports under the meridional ribs at the level of the lower ring. It is with such computational models that they were presented in these computer studies. All computer models of domes differed from each other only in the size of the upper ring. The same nodal loads were applied to all dome frames: from the weight of the enclosing structures, which was symmetrical relative to the axis of the domes; from the weight of snow, located only on one side of the domes and being asymmetrical (Figure 2).



Figure 2. Asymmetric snow load on the dome frames

The combined effect of these loads creates a stress-strain state of the dome frames, which determine their bearing capacity. Despite the fact that the loads are the same, the stress-strain states in the elements of the dome frames with different sizes of the upper ring of the domes differ from each other.

The outlines of deformed schemes of dome frames with different sizes of the upper rings do not differ from each other, but the values of deformations are not the same. If the maximum deflection in the most loaded part of the dome with the smallest size of the upper ring (d_{\min}) is equal to f = 9.5 cm, then it increases by 1.6 times in the dome with the largest size of the upper ring (d_{\max}) (Figure 3).

The graphs of longitudinal forces N in the elements of dome frames with different sizes of the upper rings differ from each other insignificantly. And the diagrams of bending moments in the elements of dome frames with different sizes of upper rings show significant differences. These differences are associated with a change in the ratio between the values of moments M_x in the upper rings and those at the meridional ribs (Figure 4).



Figure 4. Diagrams of bending moments $\,M_{\,x}\,$ in elements of dome frames
3. Example

With an increase in the size of the upper rings, the values of bending moments M_x and longitudinal forces N in the meridional ribs change, but these changes are different and insignificant in magnitude (Figure 5): M_x first increases within 11% of the initial value, then decreases; N first decreases, then stabilizes within 19%.



A different pattern of changes in bending moments M_x and longitudinal forces N, as well as in moments M_y , is observed in the upper ring. At the same time, the internal forces along the axis of the one-sided asymmetric snow load ($\beta = 0^\circ$) and in the direction perpendicular to this axis ($\beta = 90^\circ$) differ from each other. For $\beta = 0^\circ$ as the size of the upper rings increases, the bending moments M_x increase significantly, reaching the value that is 3.1 times more than the moments at d_{max} than the moments at d_{min} (Figure 6). At the same time, the longitudinal forces N and moments M_y decrease, reaching values of 0.38 N and 0.26 M_y compared to the forces at d_{min} . For $\beta = 90^\circ$ with an increase in the size of the upper rings, the bending moments M_x also increase significantly, reaching 2.7 times higher values at d_{max} compared to the moments at d_{min} (Figure 7). At the same time, the longitudinal forces N and moments M_y decrease, reaching values at d_{max} of 0.46 N and 0.38 M_y compared to the forces at d_{min} .



Figure 7. The ratio of forces $N_{d_i} / N_{d_{\min}}$ and $M_{d_i} / M_{d_{\min}}$ in the upper rings at $\beta = 90^{\circ}$

Since the internal forces N, M_x , M_y in the meridional ribs and in the upper rings of the dome frames change differently when the size of the rings is changed, the studies of the normal stresses σ_i in them were carried out. The stress values were determined by the formula:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \pm \frac{M_{x,i}}{W_{x,i}} \pm \frac{M_{y,i}}{W_{y,i}}$$

With an increase in the size of the upper rings in the dome frames, the initial stresses (12.51 kN/cm²) at d_{\min} in the meridional ribs change insignificantly, within 9% with no tendency to rise (Figure 8). The initial stresses (15.05 kN/cm²) in the upper rings at d_{\min} change significantly, within 26% and have a tendency to increase (see Figure 8).



4. Conclusions

1. As a result of the research, it has been shown that with an increase in the size of the upper rings in the frames of ribbed-ring domes, the bending moments in the vertical plane in these rings increase several times, but the longitudinal forces and moments from the vertical plane decrease.

2. The normal stresses in the meridional ribs increase slightly at first, then decrease without reaching the initial values. The normal stresses in the upper rings increase significantly with an increase in their size, with a tendency to further increase.

3. With increasing the size of the upper rings in metal ribbed-ring domes, it is necessary to increase their cross-section. The reliability of metal domes mainly depends on calculations for a combination of loads considering asymmetric force influences.

References

1. Tur V.I. Dome Structures: Morphogenesis, Analysis, Design, Increase in Effectiveness. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.) ISBN 5-93093-249-2

2. Krivoshapko S.N. Metal ribbed-and-circular and lattice shells from the 19th until the first half of the 20th centurie. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;6:4–15. (In Russ.) EDN: SYZJFN

3. Krivoshapko S.N. On application of parabolic shells of revolution in civil engineering in 2000-2017. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;4:4–14. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-4-14

4. Kuznetsov V.V., Metal Structures. Vol. 2. Steel structures of buildings and constructions. Reference book the designer. Moscow: ASV publ., 1998. 512 p. (In Russ.)

5. Lebed E.V., Alukaev A.U. Large-span metal dome roofs and their construction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(1):4–16. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-1-4-16

6. Chandiwala A. Analysis and design of steel dome using software. *International Journal of Research in Engineering and Technology (IJRET)*. 2014;03(03):35–39. https://doi.org/10.15623/ijret.2014.0303006

7. Chacko P., Dipu V.S., Manju P.M. Finite Element Analysis of Ribbed Dome. *International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)*. 2014, ISSN: 2248-9622. P. 25–32.

8. Jasim N.A., Saleh I.S., Faleh S.K. Structural Analysis of Ribbed Domes Using Finite Element Method. *International Journal of Civil Engineering Research*. 2017;8(2):113–130. Available from: https://ripublication.com/ijcer17/ijcerv8n2_04.pdf (accessed: 22.03.2023).

9. Anu J.S., Preethi M. Parametric Analysis of Single layer Ribbed dome with Diagonal members. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*. 2017;04(08):870–877. Available from: https://www.irjet.net/archives/V4/i8/IRJET-V4I8150.pdf (accessed: 22.03.2023)

10. Merilmol E., Rajesh A.K., Ramadass S. Finite Element Analysis and Parametric Study of Schwedler Dome Using ABAQUS Software. *International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT*). 2015;28(7):333–338. Available from: https://ijettjournal.org/archive/ijett-v28p264 (accessed: 22.03.2023).

11. Karpilovskiy V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Perel'muter A.V., Perel'muter M.A. SCAD Office. Computer system SCAD. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)

12. Gorodetskiy A.S., Evzerov I.D. Computer models of structures. Kiev: Fakt Publ.; 2005. (In Russ.)

13. Lebed E.V. Influence of the height of the ribbed-ring dome on the stress state of its frame during the overhang mounting process. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):452–464. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-452-464

14. Lebed E. Analysis of the stress state of the ribber-ring metal dome under different methods of installation. XXIV International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2021). Moscow, 2021; 263:02046. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126302046

15. Lebed E.V. The influence of bracing on the stress state of the ribbed-ring dome framework. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(5):417–427. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-417-427

Список литературы

1. *Тур В.И*. Купольные конструкции: формообразование, расчет, конструирование, повышение эффективности: М.: Изд-во ACB. 2004. 96 с. ISBN 5-93093-249-2

2. *Кривошапко С.Н.* Металлические ребристо-кольцевые и сетчато-стержневые оболочки XIX — первой половины XX-го веков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 4–15. EDN: SYZJFN 3. Кривошапко С.Н. К вопросу о применении параболических оболочек вращения в строительстве в 2000–2017 годах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений 2017. № 4. С. 4–14. https://doi.org/ 10.22363/1815-5235-2017-4-4-14

4. *Кузнецов В.В.* Справочник проектировщика. Том 2(3): Стальные конструкции зданий и сооружений. М.: Изд-во АСВ, 1998. 512 с.

5. Лебедь Е.В., Алукаев А.Ю. Большепролетные металлические купольные покрытия и их возведение // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 1. С. 4–16. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-1-4-16

6. *Chandiwala A*. Analysis and design of steel dome using software // International Journal of Research in Engineering and Technology (IJRET). 2014. Vol. 03. Issue 03. P. 35–39. https://doi.org/10.15623/ijret.2014.0303006

7. Chacko P., Dipu V.S., Manju P.M. Finite Element Analysis of Ribbed Dome. International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA). 2014. P. 25–32.

8. Jasim N.A., Saleh I.S., Faleh S.K. Structural Analysis of Ribbed Domes Using Finite Element Method. *International Journal of Civil Engineering Research*. 2017. Vol. 8. No 2. P. 113–130. Available from: https://ripublication.com/ijcer17/ ijcerv8n2 04.pdf (accessed: 22.03.2023).

9. Anu J.S., Preethi M. Parametric Analysis of Single layer Ribbed dome with Diagonal members // International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET). 2017. Vol. 4. No 8. P. 870–877. Available from: https://www.irjet. net/archives/V4/i8/IRJET-V4I8150.pdf (accessed: 22.03.2023)

10. Merilmol E., Rajesh A.K., Ramadass S. Finite Element Analysis and Parametric Study of Schwedler Dome Using ABAQUS Software // International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT). October 2015. Vol. 28. № 7. P. 333–338. http://www.ijettjournal.org.

11. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD. М.: Изд-во ACB, 2004. 592 с. ISBN 978-5903686-02-4.

12. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт, 2005. 344 с. ISBN 966-359-027-0

13. Лебедь Е.В. Влияние высоты ребристо-кольцевого купола на напряженное состояние его каркаса в процессе навесного монтажа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 6. С. 452– 464. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-452-464

14. *Lebed E.* Analysis of the stress state of the ribber-ring metal dome under different methods of installation // XXIV International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2021). Moscow. 2021. Vol. 263. P. 02046. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126302046

15. Лебедь Е.В. Влияние связей на напряженное состояние каркаса ребристо-кольцевого купола // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 5. С. 417–427. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-417-427



Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-459-468 УДК 539.3 EDN: DTMAGZ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Снижение чувствительности к начальным несовершенствам при помощи изменения бифуркационных диаграмм

Г.А. Мануйлов[®], С.Б. Косицын[®], И.Е. Грудцына[®]⊠

Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация grudtsyna_ira90@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 5 июля 2023 г. Доработана: 14 сентября 2023 г. Принята к публикации: 25 сентября 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Представлен подход к построению диаграмм равновесных состояний с целью снижения чувствительности к начальным несовершенствам для задачи устойчивости подкрепленных пластин (перенос точки бифуркации, соответствующей волнообразованию ребер и обшивки). Получены новые соотношения геометрических параметров для двух вариантов подкрепленных пластин, при которых первой по величине является критическая нагрузка общей формы потери устойчивости, а следующая критическая нагрузка соответствует местной форме волнообразования (ребер или обшивки). Для решения поставленных задач использовался конечноэлементный комплекс MSC PATRAN — NASTRAN. Для моделирования использованы плоские четырехузловые конечные элементы. Проведены расчеты с учетом геометрической нелинейности. Материал считался абсолютно упругим. Построены кривые чувствительности критических нагрузок к амплитудам начальных несовершенств. Результаты показали, что перенос точек бифуркации волнообразования пластины или ребер позволил получить кривые с менее выраженным падением критической нагрузки по сравнению с исходными, и, следовательно, представленный алгоритм изменения геометрических параметров подкрепленных пластин, полученных в соответствии с новыми диаграммами равновесных состояний, реализует возможность рационального проектирования упомянутых тонкостенных систем.

Ключевые слова: устойчивость равновесия, подкрепленная пластина, начальные геометрические несовершенства, критическая нагрузка

Для цитирования

© Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Снижение чувствительности к начальным несовершенствам при помощи изменения бифуркационных диаграмм // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 459–468. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-459-468

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0009-0002-4170-586X; E-mail: gajk.manuilov@yandex.ru

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, советник РААСН, заведующий кафедрой теоретической механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-3241-0683; E-mail: kositsyn-s@mail.ru

Грудиына Ирина Евгеньевна, ассистент кафедры теоретической механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-6319-3909; E-mail: grudtsyna_ira90@mail.ru

Reducing sensitivity to initial imperfections by changing bifurcation diagrams

Gaik A. Manuylov[®], Sergey B. Kositsyn[®], Irina E. Grudtsyna^{®⊠}

Russian University of Transport, *Moscow, Russian Federation* grudtsyna_ira90@mail.ru

Article history

Received: July 5, 2023 Revised: September 14, 2023 Accepted: September 25, 2023

Conflicts of interest The authors declare that there

is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. An approach to the construction of equilibrium state diagrams is presented in order to reduce the sensitivity to initial imperfections for the problem of stability for reinforced plates (transfer of the bifurcation point corresponding to the wave formation of ribs and cladding). New ratios of geometric parameters for two variants of strengthened plates have been obtained, where the first critical load of the general form of stability loss is the first by value, and the next critical load corresponds to the local form of wave formation of ribs or cladding. The finite element complex MSC PATRAN - NASTRAN was used to solve the stated above problems. Flat four-node finite elements were applied for modeling. The calculations were performed with account of geometric nonlinearity. The material was considered to be absolutely elastic. Curves of critical load sensitivity to the amplitudes of the initial imperfections were generated. The results demonstrate that transposition of bifurcation points of wave formation in the plate or ribs enabled to obtain curves with less significant decrease of critical load as compared to the initial ones. Consequently, the presented algorithm for changing the geometric parameters of reinforced plates obtained in accordance with new equilibrium state diagrams implements the possibility of rational design of the specified thin-walled systems.

Keywords: equilibrium stability, reinforced plate, initial geometric imperfections, critical load

For citation

Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Reducing sensitivity to initial imperfections by changing bifurcation diagrams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):459–468. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-459-468

1. Введение

Теория устойчивости играет ключевую роль в современном инженерном деле, так как почти все известные конструктивные разрушения содержат в себе элементы явления неустойчивости равновесия. Понимание докритического и послекритического поведения тонкостенных элементов конструкций позволяет оценивать их реальную несущую способность, а также чувствительность к начальным несовершенствам. За последние три десятилетия проведены обширные численные и экспериментальные исследования устойчивости и предельной несущей способности тонких подкрепленных пластин с продольными ребрами жесткости [1–3]. Одной из основополагающих работ по данной теме является статья В. Твергарда [4], в которой рассмотрено равновесие бесконечно широкой пластины, ученые ЦАГИ [5; 6] за последние годы провели ряд численных и экспериментальных расчетов устойчивости и взаимодействия собственных форм стрингерных панелей из углепластика с учетом влияния начальных несовершенств, авторами [7–12] исследовано докритическое и начальное послекритическое равновесие упругих тонких подкрепленных пластин с учетом взаимодействия собственных форм, а также представлена классификация нелинейных решений задачи устойчивости упомянутых пластин.

Несмотря на большое количество работ в этом направлении, решения по изменению геометрии таких систем с целью снижения чувствительности критической нагрузки к влиянию начальных несовершенств металлических подкрепленных пластин показаны не были. В [13] приводятся интересные экспе-

Gaik A. Manuylov, Ph.D., Associate Professor, Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0009-0002-4170-586X; E-mail: gajk.manuilov@yandex.ru

Sergey B. Kositsyn, D.Sc. in Engineering, Counselor of RAACS, Head of the Department "Theoretical Mechanics", Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-3241-0683; E-mail: kositsyn-s@mail.ru

Irina E. Grudtsyna, Assistant Professor, Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-6319-3909; E-mail: grudtsyna_ira90@mail.ru

риментальные исследования сжатых подкрепленных пластин, в [14–17] показаны основы численного и аналитического методов расчета на устойчивость подкрепленных пластин, в [18] показаны решения задач устойчивости для подкрепленных пластин конечных размеров при нагружении сжимающими силами и изгибающим моментом, в [19] исследованы подкрепленные пластины с ребрами z-образного сечения, получены матрицы жесткости для решения краевых задач.

Согласно асимптотической теории В.Т. Койтера [20] различают следующие случаи потери устойчивости:

- простое выпучивание (несвязанное), когда одному собственному значению соответствует одна собственная форма;
- сложное выпучивание (связанное), когда две или более собственных форм имеют одно или близкие собственные значения.

Развитие явления сложного (связанного) выпучивания в результате взаимодействия собственных форм зачастую является причиной неустойчивого послекритического поведения тонкостенных систем. Взаимодействие форм порождает большую чувствительность к начальным геометрическим несовершенствам. Это резко снижает несущую способность системы, что особенно заметно в задачах устойчивости тонких подкрепленных пластин. Во избежание данного эффекта предложен алгоритм изменения диаграмм равновесных состояний, который заключается в следующем:

- перенести точки бифуркации, соответствующие местному волнообразованию, выше значения критической нагрузки бифуркации, отвечающей общей потере устойчивости, путем соответствующего изменения геометрических параметров подкрепленных пластин;
- 2) провести оценку критических нагрузок из линейного расчета, соответствующих общей форме потери устойчивости и местной форме волнообразования (в ребрах или пластине). Критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости, должна быть выше по значению критической нагрузки, соответствующей общей форме. Чем более существенна разница между критической нагрузкой волнообразования (в ребрах или пластине) по отношению к критической нагрузке общей формы, тем менее выражен эффект влияния взаимодействия форм.

Подход к построению диаграмм равновесных состояний (перенос точки бифуркации, соответствующей волнообразованию ребер и пластины) показан на рис. 1 и 2.

При решении данных задач учитывалось взаимодействие общей формы потери устойчивости с каждой местной формой в отдельности.



Рис. 1. Представление подхода к построению диаграмм равновесных состояний (перенос точки бифуркации, соответствующей волнообразованию ребер)
 Figure 1. Representation of the approach to the generation of equilibrium state diagrams (transposition of the bifurcation point corresponding to the wave formation in ribs)



 Рис. 2. Представление подхода к построению диаграмм равновесных состояний (перенос точки бифуркации, соответствующей волнообразованию пластины)
 Figure 2. Representation of the approach to the generation of equilibrium state diagrams (transposition of the bifurcation point corresponding to the wave formation in a plate)

2. Методы и материалы

Рассматривается бесконечно широкая регулярная подкрепленная пластина (см. рис. 1), сжатая центрально приложенными силами.

Физические характеристики материала: $E = 2 \cdot 10^6 \kappa r/cm^2$, $\nu = 0.3$.

Граничные условия: пластина шарнирно оперта по торцам, продольные края — свободные.

Это позволяет исследовать устойчивость подкрепленной пластины при помощи анализа равновесия одного регулярного Т-образного фрагмента (по аналогии с В. Твергардом и А.И. Маневичем [4; 21], равноустойчивого с остальными Т-образными фрагментами (рис. 3).



Рис. 3. Поперечное сечение подкрепленной пластины **Figure 3**. Cross-section of a strengthened plate

Размеры Т-образного фрагмента пластины следующие: b — ширина (расстояние между ребрами в осях), δ — толщина пластины, b_1 — высота ребра, t_1 — толщина ребра, L — длина фрагмента (подкрепленной пластины).

Граничные условия Т-образного фрагмента пластины: шарнирное опирание вдоль коротких сторон, вдоль длинных сторон — плавающие заделки. Нагрузка приложена в виде сосредоточенной силы в центре тяжести сечения (рис. 4).



Рис. 4. Граничные условия и нагружение Т-образного фрагмента **Figure 4.** Boundary conditions and loading of the T-shaped fragment

Введем безразмерный параметр:

$$\mu_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1},\tag{1}$$

где λ — параметр нагрузки, λ₁ — критический параметр нагрузки, полученный из линейного расчета для общей формы выпучивания по типу эйлеровой стойки.

Рассмотрим пример реализации построения новых диаграмм равновесных состояний с целью снижения чувствительности критических нагрузок подкрепленных пластин к начальным несовершенствам. Исходными геометрическими соотношениями Т-образного фрагмента являются:

$$\frac{b}{h} = 25;$$
 $\frac{b_1}{t_1} = 20;$ $\frac{b_1t_1}{bh} = \frac{1}{5};$ $\frac{L}{b} = 5.$

При данных геометрических параметрах Т-образного фрагмента первой критической нагрузкой потери устойчивости является нагрузка, соответствующая местной форме волнообразования в ребре, а следующей — нагрузка, соответствующая общей форме потери устойчивости, относительная нагрузка, соответствующая численному нелинейному решению, составила $\mu_1 = 0,758$. Будем варьировать соотношения $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$. Соотношение $\frac{b}{h}$ управляет формой волнообразования, а соотношение $\frac{L}{b}$ управляет критической нагрузкой, соответствующей общей форме. В итоге получим новые соотношения геометрических параметров, при которых первой по величине является критическая нагрузка общей формы потери устойчивости ($P_{\kappa p}^9 = 980,91$ кH), а следующая критическая нагрузка соответствует волнообразования ребра ($P_{\kappa p}^8 = 1655,61$ кH).

$$\frac{b}{h} = 35;$$
 $\frac{b_1}{t_1} = 20;$ $\frac{b_1t_1}{bh} = \frac{1}{5};$ $\frac{L}{b} = 7,$

и новые геометрические параметры Т-образного фрагмента:

$$h = 1$$
 см, $b = 35$ см, $t_1 = 0,6$ см, $b_1 = 12$ см, $L = 245$ см.

Изменение геометрических параметров с помощью вариаций соотношений $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$ позволило получить разницу значений критических нагрузок общей формы потери устойчивости и местной формы волнообразования в ребре в 1,7 раза.

Аналогичное представление геометрических параметров регулярного фрагмента реализовано для случая взаимодействия общей формы потери устойчивости с местной формой волнообразования пластины.

Исходными геометрическими соотношениями Т-образного фрагмента являются

$$\frac{b}{h} = 100;$$
 $\frac{b_1}{t_1} = 20;$ $\frac{b_1t_1}{bh} = \frac{1}{5};$ $\frac{L}{b} = 6,67$

Соотношения геометрических параметров с учетом варьирования $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$:

$$\frac{b}{h} = 90;$$
 $\frac{b_1}{t_1} = 20;$ $\frac{b_1t_1}{bh} = \frac{1}{5};$ $\frac{L}{b} = 10.$

Новые геометрические параметры Т-образного фрагмента подкрепленной пластины для случая, когда осуществлен перенос точки бифуркации волнообразования пластины:

Из линейного расчета получены значения критических нагрузок. Значение нагрузки, соответствующее общей форме потери устойчивости, составило $P_{\kappa p}^{\vartheta} = 465,6$ кН. Для местной формы волнообразования пластины значение критической нагрузки P^B_{кр} = 681,60 кН. Изменение геометрических параметров позволило получить разницу значений критических нагрузок в 1,5 раза.

3. Результаты и обсуждение

Решение в программном комплексе с учетом геометрической нелинейности показало следующие результаты: нагрузка в предельной точке $P_{\kappa p}$ на рис. 5. Значения критических нагрузок из линейных расчетов представлены в [9]. $P_{\kappa p} = 979,21$ кН ($\mu_1 = 0,998$). Прогиб развивается в сторону пластины. Следовательно, ребро оказывается в сжатой зоне, однако бифуркации волнообразования не наблюдается, так как она достаточно далеко. Значение максимального прогиба в предельной точке составило $\xi_1 = -1,5$ см. Для построения кривой равновесий взята точка на оси симметрии Т-образного фрагмента в середине пластины. Деформированный вид пластины и кривая равновесных состояний представлены на рис. 5.



Рис. 5. Деформированный вид пластины и кривая равновесных состояний из решения задачи с учетом изменения геометрических параметров Т-образного фрагмента (исключение бифуркации ребер)



В табл. 1 приведены значения относительных нагрузок μ_1 в зависимости от величины начального прогиба, полученные в результате численных нелинейных решений для двух вариантов соотношений геометрических параметров Т-образного фрагмента (исходного и с учетом варьирования $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$). На рис. 6 приведены кривые чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам в зависимости от их амплитуд, построенные по результатам численных нелинейных решений при исходных параметрах, и решения для плиты с параметрами, измененными при помощи предложенного алгоритма.

Проведем аналогичное исследование чувствительности критических нагрузок волнообразования пластины к начальным геометрическим несовершенствам и сравним результаты численных нелинейных решений для двух вариантов геометрических соотношений Т-образного фрагмента подкрепленной пластины.

Для другой пластины решение той же задачи в геометрически нелинейной постановке позволило получить значение критической нагрузки в предельной точке: $P_{kp} = 456,25$ кH, $\mu_1 = 0,979$. Прогиб развивается в сторону ребра. Таким образом, пластина оказывается в сжатой зоне. Максимальное значение прогиба в предельной точке составило: $\xi_1 = 14,7$ см. Для построения кривой равновесий взята точка на оси симметрии T-образного фрагмента в середине пластины. Деформированный вид пластины и кривая равновесных состояний из решения задачи с учетом изменения геометрических параметров T-образного фрагмента (исключение бифуркации пластины) представлены на рис. 7.

Таблица 1 / Table 1

Значения относительных нагрузок μ_1 / Values of relative loads μ_1





Рис. 6. Кривые чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам в зависимости от их амплитуд Figure 6. Curves of critical loads sensitivity to initial imperfections as a function of their amplitudes



Рис. 7. Деформированный вид пластины и кривая равновесных состояний **Figure 7.** Deformed view of the plate and the equilibrium curve

В табл. 2 приведены значения относительных нагрузок μ_1 в зависимости от величины начального прогиба, полученные в результате численных нелинейных решений для двух вариантов соотношений геометрических параметров Т-образного фрагмента; исходного и с учетом варьирования $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$. На рис. 8 приведены кривые чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам в зависимости от их амплитуд, построенные по результатам численных решений при исходных параметрах и решения для плиты с параметрами, измененными при помощи предложенного алгоритма.

Таблица 2 / Table 2



Значения относительных нагрузок μ_1 в зависимости от величины начального прогиба / Values of relative loads μ_1 depending on the value of the initial deflection



Рис. 8. Кривые чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам в зависимости от их амплитуд Figure 8. Curves of critical loads sensitivity to initial imperfections as a function of their amplitudes

4. Заключение

Анализируя результаты, приходим к выводу, что перенос точки бифуркации волнообразования в ребре позволил получить кривую чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам с менее выраженным падением критических нагрузок.

 Падение критической нагрузки для Т-образного фрагмента подкрепленной пластины с исходными геометрическими параметрами составило 57,92 %, тогда как падение критической нагрузки с измененными геометрическими параметрами составило 31,26 %. Аналогичные результаты получены при переносе точек бифуркации волнообразования пластины (см. рис. 2). Падение критической нагрузки для Т-образного фрагмента подкрепленной пластины с исходными геометрическими параметрами составило 11,34 %, тогда как падение критической нагрузки с измененными геометрическими параметрами составило 9,8 %.

Это показывает, что подкрепленная пластина, в которой возможно волнообразование в обшивке, менее чувствительна к влиянию начальных несовершенств, чем аналогичная пластина, в которой возможно волнообразование в ребрах.

Тем не менее результаты решения с учетом переноса точек бифуркации волнообразования показали, что чем выше значение нагрузки местной потери устойчивости волнообразования по отношению к нагрузке общей формы, тем меньше эффект взаимодействия форм и, соответственно, чувствительность упомянутой пластины к влиянию начальных несовершенств.

Список литературы

1. Aalberg A., Langseth M., Larsen P.K. Stiffened Aluminium Panels Subjected to Axial Compression // Thin-Walled Structures. 2001. Vol. 39. Issue 10. P. 861–885. https://doi.org/10.1016/S0263-8231(01)00021-0

2. *Byklum E.A., Steen E., Amdahl J.* Semi-analytical model for global buckling and post buckling analysis of stiffened panels // Thin-Walled Structures. 2004. Vol. 42. Issue 5. P. 701–717. https://doi.org/10.1016/j.tws.2003.12.006`

3. Cox H.L., Riddell J.R. Buckling of a Longitudinally Stiffened Flat Panel // Aeronaut. 1949. Vol. 1. P. 225-244. https://doi.org/10.1017/S0001925900000172

4. *Tvergaard V*. Imperfection sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression // International Journal of Solids and Structures. 1973. Vol. 9. Issue 1. P. 177–192. https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90040-1

5. Дударьков Ю.И., Лимонин М.В., Левченко Е.А.Некоторые особенности оценки несущей способности стрингерных панелей из ПКМ // Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т. 25. № 2. С. 192–206. EDN: XBAWCT

6. Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., Шевченко А.В. Расчетные исследования влияния некоторых видов эксплуатационно-технологических повреждений на несущую способность стрингерных панелей из ПКМ // Труды МАИ. 2019. № 106. С. 2. EDN: NLSATO

7. Sridharan S., Zeggane M. Stiffened Plates and Cylindrical Shells under Interactive Buckling // Finite Elements in Analysis and Design. 2001. Vol. 38. Issue 2. P. 155–178. https://doi.org/10.1016/s0168-874x(01)00056-7

8. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ критического равновесия гибкой подкрепленной пластины с учетом влияния начальных геометрических несовершенств // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 1. С. 30–36. EDN: FFRKDX

9. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Геометрически нелинейный расчет на устойчивость подкрепленной пластины с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 3–18. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18

10. Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical and analytical investigation of the stability of the reinforced plate // Communications — Scientific Letters of the University of Žilina. 2021. Vol. 23 (4). P. 102–111. https:// doi.org/10.26552/com.C.2021.4.B278-B287

11. Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Stability Investigation of a Stiffened Plate by Using Numerical Methods // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series. Moscow, 2020. Vol. 1425. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012031

12. Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometric representations of equilibrium curves of a compressed stiffened plate // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021. № 17(3). P. 83–93. https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-3-83-93

13. *Maquoi R., Massonnet C.* Interaction between local plate buckling and overall buckling in thin-walled compression members -Theories and Experiments // Part of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg. 1976. P. 365–382. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50992-6_28

14. *Pignatoro M., Gioncu V.* Phenomenological and Mathematical modelling of structural instability. Part of the book series: CISM International Centre for Mechanical Sciences. New York: Springer Publ., 2005.

15. *Kubiak T*. Static and Dynamic Buckling of Thin-Walled Plate Structures. Springer International Publishing Switzerland, 2013. 188 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00654-3

16. *Bloom F., Coffin D.W.* Handbook of thin plate buckling and postbuckling. Chapman & Hall, Boca Raton, 2001. 786 p. https://doi.org/10.1201/9780367801649

17. Beg D., Kuhlmann U., Davaine L., Braun B. Design of Plated Structures: Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-5: Design of Plated Structures. First Edition. 2011. 290 p. https://doi.org/10.1002/9783433601143.fmatter

18. *Sheikh I.A., Elwi A.E., Grondin G.Y.* Stiffened steel plates under combined compression and bending // Journal of Constructional Steel Research. 2003. Vol. 59. Issue 7. P. 1061–1080. https://doi.org/10.1016/s0143-974x(02)00079-2

19. Wittrick W.H. A Unified Approach to the Initial Buckling of Stiffened Panels in Compression // Aeronautical Quarterly. 1968. Vol. 19. Issue 3. P. 265–283. https://doi.org/10.1017/S0001925900004662

20. Koiter's W.T. Elastic stability of solids and structures. Cambridge University Press, 2009. 230 p. https://doi.org/ 10.1017/CBO9780511546174

21. Маневич А.И. Нелинейная теория устойчивости подкрепленных пластин и оболочек с учетом взаимодействия форм выпучивания: дис. ... д-ра тех. наук: 01.02.04. Днепропетровск, 1986. 423 с.

References

1. Aalberg A., Langseth M., Larsen P.K. Stiffened Aluminium Panels Subjected to Axial Compression. *Thin — Walled Structures*. 2001;39(10):861–885. https://doi.org/10.1016/S0263-8231(01)00021-0

2. Byklum E.A., Steen E., Amdahl J. Semi-analytical model for global buckling and post buckling analysis of stiffened panels. *Thin-Walled Structures*. 2004;42(5):701–717. https://doi.org/10.1016/j.tws.2003.12.006

3. Cox H.L., Riddell J.R. Buckling of a Longitudinally Stiffened Flat Panel. Aeronaut. 1949;1(3):225-244. https://doi.org/10.1017/S0001925900000172

4. Tvergaard V. Imperfection sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression. *International Journal of Solids and Structures*. 1973;9(1):177–192. https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90040-1

5. Dudarkov Y.I., Levchenko E.A., Limonin M.V. Some features of CFRP stringer panels load bearing capacity estimation. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii [Journal on composite mechanics and design]*. 2019;25(2):192–206. (In Russ.) EDN: XBAWCT

6. Dudarkov Yu.I., Levchenko E.A., Limonin M.V., Shevchenko A.V. Computational studies of some types of operational and technological damages impact on bearing capacity of stringer panels made of composite fiber reinforced plastic. *Trudy MAI [Works of MAI]*. 2019;106:2. EDN: NLSATO

7. Sridharan S., Zeggane M. Stiffened Plates and Cylindrical Shells under Interactive Buckling. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2001;38(2):155–178. https://doi.org/10.1016/s0168-874x(01)00056-7

8. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical analysis critical equilibrium of flexible supported plate with allowance for influence initial geometrical imperfections. *Structural mechanics and analysis of constructions*. 2020; 1:30–36. (In Russ.) EDN: FFRKDX

9. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):3–18. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18

10. Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical and analytical investigation of the stability of the reinforced plate. *Communications — Scientific Letters of the University of Zilina*. 2021;23(4):B278–B287. https://doi.org/10.26552/com.C.2021.4.B278-B287

11. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):3–18. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18

12. Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometric representations of equilibrium curves of a compressed stiffened plate. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021;17(3):83–93. https://doi. org/10.22337/2587-9618-2021-17-3-83-93

13. Maquoi R., Massonnet C. Interaction between local plate buckling and overall buckling in thin-walled compression members — Theories and Experiments. *Part of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1976:365–382. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50992-6_28

14. Pignatoro M., Gioncu V. Phenomenological and Mathematical modelling of structural instability. Part of the book series: CISM International Centre for Mechanical Sciences. New York: Springer Publ.; 2005.

15. Kubiak T. Static and Dynamic Buckling of Thin-Walled Plate Structures. Springer International Publishing Switzerland. 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00654-3

16. Bloom F., Coffin D.W. *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*. Chapman & Hall, Boca Raton; 2001. https://doi.org/10.1201/9780367801649

17. Beg D., Kuhlmann U., Davaine L., Braun B. *Design of Plated Structures: Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-*5: Design of Plated Structures, First Edition. 2011. https://doi.org/10.1002/9783433601143.fmatter

18. Sheikh I.A., Elwi A.E., Grondin G.Y. Stiffened steel plates under combined compression and bending. *Journal of Constructional Steel Research*. 2002;58(7):1061–1080. https://doi.org/10.1016/s0143-974x(02)00079-2

19. Wittrick W.H. A Unified Approach to the Initial Buckling of Stiffened Panels in Compression. *Aeronautical Quat*terly. 1968;19(3):265–283. https://doi.org/10.1017/S0001925900004662

20. Koiter's W.T. *Elastic stability of solids and structures*. Cambridge University Press; 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511546174

21. Manevich A.I. Nonlinear theory of stability of the reinforced plates and shells taking into account the interaction of convexity forms: Cand. Sci. 01.02.04. Dnepropetrovsk; 1986. (In Russ.)



Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-469-490 УДК 69.01 EDN: HKRYFA

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Частотный отклик конструкции большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием

Э.Р. Кужахметова¹⁰⁰, В.И. Сутырин²⁰⁰

¹ Акционерное общество «Конструкторско-технологическое бюро бетона и железобетона» (АО КТБ «Железобетон»), Москва, Российская Федерация

² Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта (БФУ им. И. Канта),

Калининград, Российская Федерация

⊠ elja_09@bk.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 23 апреля 2023 г. Доработана: 19 сентября 2023 г. Принята к публикации: 26 сентября 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Актуальность. Приведены численные исследования частотного отклика конструкций большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием как большой механической системы. Конечно-элементная модель № 1 «Здание — жесткая заделка» представляет надземную часть здания с жесткой заделкой опорных элементов на обрезе фундамента. Цель исследования заключалась в отработке методики модального анализа конструкции большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием как механической системы с большим числом степеней свободы. Методы. Численный анализ динамики здания проводился с применением программного комплекса CAE (Computer-aided engineering) — класса Femap NX NASTRAN, реализующего метод конечных элементов. Результаты. Выявлены «опасные» резонансные частоты и формы гармонических колебаний конструкции, проанализирована чувствительность реакций здания к различным конструктивным изменениям. Частотный анализ гармонического отклика (harmonic response) здания позволил получить зависимости амплитудных значений узловых перемещений (ускорений) и напряжений в конечных элементах от частоты вынуждающей внешней силы. В следующей статье на данную тему предполагается провести динамический анализ большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием на сейсмическое воздействие.

Ключевые слова: метод конечных элементов, расчетная схема здания, система, здание, сооружение, большепролетное здание, пространственное покрытие, цилиндро-плитное покрытие, гармонический анализ, частотный анализ, колебания, частота колебаний, здание — фундамент — основание, здание — жесткая заделка

Для цитирования

Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И. Частотный отклик конструкции большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 469–490. http://doi.org/ 10.22363/1815-5235-2023-19-5-469-490

© Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Кужахметова Эльвира Рафаэльевна, инженер, главный специалист КТБ «Железобетон», Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-0907-786X; E-mail: elja_09@bk.ru

Сутырин Валерий Игоревич, доктор технических наук, доцент, профессор ОНК «Институт высоких технологий», Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Российская Федерация; ORCID 0000-0002-4911-8515; E-mail: vsutyrin@mail.ru

Frequency response of the construction of a large-span building with a cylindrical-and-slab roof

Elvira R. Kuzhakhmetova¹[™], Valerii I. Sutyrin²

¹ KTB Beton Group, Moscow, Russian Federation

² Immanuel Kant Baltic Federal University (IK BFU), *Kaliningrad, Russian Federation* elja 09@bk.ru

Article history

Received: April 23, 2023 Revised: September 19, 2023 Accepted: September 26, 2023

Conflicts of interest The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. *Relevance of the research.* Numerical studies of structural frequency response of a large-span building with cylindrical-and-slab roof as a large mechanical system were carried out. Finite element model No. 1 "Superstructure–Fixed-end". *The purpose* of the study was to develop the methodology for modal analysis of a large-span building structure with a cylindrical-and-slab roof as a mechanical system with a large number of degrees of freedom. *Methods.* Numerical analysis of the building dynamics was carried out with the use of the CAE (Computer-aided engineering) software package Femap NX NASTRAN, which implements the finite element method. Results. The "dangerous" resonant frequencies and forms of harmonic oscillations of the structure were revealed, and the sensitivity of the buildings' reactions to various structural changes was analyzed. Frequency analysis of harmonic response of the building allowed to obtain dependences of amplitude values of nodal displacements (accelerations) and stresses in finite elements from the frequency of the inducing external force. In the next article, it is proposed to conduct a dynamic analysis of a large-span building with a cylindrical-and-slab roof for seismic effects.

Keywords: finite element method, system, building, structure, large-span building, large-span space structures, cylindrical roof, cylindrical-and-slab roof, frequency response, harmonic response, oscillation, "Superstructure — Fixed-end", "Superstructure — Pile foundation — Soil base"

For citation

Kuzhakhmetova E.R., Sutyrin V.I. Frequency response of the construction of a large-span building with a cylindrical-and-slab roof. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):469–490. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/ 1815-5235-2023-19-5-469-490

1. Введение

В последние годы при проектировании сложных зданий и сооружений [1–7] как больших механических систем все большее внимание уделяется оценкам их динамического поведения под нагрузками, изменяющимися во времени [8–15]. При этом важными проектно-конструкторскими ограничениями являются предельно допустимые деформации и напряжения в конструктивных элементах. Наиболее достоверные оценки модальных параметров конструкции могут быть получены экспериментальным путем. С этой целью используются конструкции-прототипы, создаются сложные экспериментальные установки и измерительные комплексы. Однако особенность экспериментальных исследований состоит в том, что их результаты оказываются верными лишь для конкретных условий [16-23]. Обобщение получаемых результатов и их распространение на объекты с новыми конструктивными решениями, различными граничными условиями, нагрузками и физико-механическими характеристиками материалов оказываются весьма затруднительными. Указанная проблема может быть решена путем инженерного анализа трехмерных (3D) конечно-элементных моделей. Однако необходимая точность расчетных оценок не может быть гарантирована априори. По этой причине лучшим вариантом решения проблемы является совместное использование расчетного и экспериментального методов исследований [24-27]. Конечно-элементная модель обеспечивает необходимую полноту, комплексность и многовариантность инженерного анализа динамики строительного объекта. Используя результаты экспериментов [28, 29], можно откорректиро-

Elvira R. Kuzhakhmetova, Engineer, Chief Specialist, KTB Beton Group, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0907-786X; E-mail: elja_09@bk.ru

Valerii I. Sutyrin, Dr. Sci. Eng., Associate Professor, Professor in "Institute of High Technologies", Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russian Federation; ORCID 0000-0002-4911-8515; E-mail: vsutyrin@mail.ru

вать характеристики модели для того, чтобы сделать ее более точной и максимально приспособленной для расчетного конструирования и прогнозирования динамики поведения строительного объекта того или иного типа.

Настоящее исследование посвящено вопросам построения и анализа динамики поведения конечноэлементной модели большепролетного здания с цилиндро-плитным (ЦП) покрытием. *Цель работы* заключалась в отработке методики модального анализа конструкции здания как большой механической системы с большим числом степеней свободы. Особый интерес к анализу динамики указанного объекта возник в связи с необходимостью выявления наиболее «опасных» резонансных частот и форм конструкций указанного типа. Определенный научный интерес был связан также с анализом чувствительности динамических реакций конструкции к разнообразным конструктивным изменениям здания [30; 31].

1.1. Общая характеристика большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием

Центральная часть здания представляет собой в плане прямоугольник с размерами $40(B) \times 84(L)$ м. Пространственным покрытием центральной части выбрана монолитная железобетонная цилиндрическая оболочка нулевой гауссовой кривизны (поз. 2), имеющая высоту h = 4 м, толщину $\delta = 0,15$ м и радиус кривизны, равный R = 52 м. Бортовыми элементами цилиндрической оболочки являются две торцевые железобетонные арки и продольные балки прямоугольного сечения с размерами b = 0,5 м. h = 0,8 м. По контуру здания установлены опорные колонны (поз. 1) квадратного поперечного сечения с шагом 6 м. Высота колонн в продольном направлении (по длине прямоугольника) принята равной 12 м, а в поперечном направлении — от 12 до 16 м.

К центральной части здания с двух сторон примыкают двухэтажные помещения с плитами плоского покрытия. Высота каждого этажа равна 6 м. Толщины железобетонных плит покрытий и перекрытий (поз. 3) приняты равными t = 0,2 м. Плиты также опираются на колонны (поз. 1), установленные с шагом и высотой H = 6 м. В продольном и поперечном направлении в центре и по торцам здания расположены диафрагмы жесткости в виде монолитных железобетонных стен (поз. 4). Их толщина равна 0,5 м, длина 6 и 12 м. В крайних помещениях здания расположены лифтовые шахты. Толщина их монолитных железобетонных стен принята 0,5 м. Толщина монолитных железобетонных площадок лестничных клеток составляет t = 0,2 м, а толщина лестничных маршей — t = 0,22 м [30–33].



a—General view of the building; δ —Finite Element Model No. 1 "Superstructure — Fixed-end";

I = columns; 2 = cylindrical shell of zero Gaussian curvature; 3 = fat slabs and floor slabs;

4 — longitudinal and transverse diaphragms; 5 — Rigid element; 6 — Fixed-master node

¹ Вертикальные элементы: колонны (поз. 1) и диафрагмы (поз. 4) соединены с помощью жесткого элемента Rigid (поз. 5). Опорный (центральный) узел 1 (поз. 6) закреплен жестко по всем направлениям: ТХ, ТҮ, ТZ, RX, RY, RZ.

2. Материалы и методы

В расчетном исследовании использованы исходные данные, аналогичные данным ранее опубликованных работ [30–33]. Цилиндро-плитное покрытие и каркас здания выполнены из тяжелого бетона класса B25. Расчетные характеристики бетона приняты в соответствии с российскими нормами СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции»². Плотность тяжелого бетона $\rho = 2500$ кг/м³ (п. 6.1.1). Модуль упругости тяжелого бетона B25 при сжатии и растяжении $E_b = 30 \times 10^3$ МПа (принят по таблице 6.11), модуль сдвига бетона $G_b = 0, 4E_b = 0, 4 \times 30 \times 10^3 = 12 \times 10^3$ МПа (п. 6.1.15). Коэффициент Пуассона бетона v = 0,2 (п. 6.1.17).

Внешние постоянные и временные поперечные нагрузки на цилиндро-плитное покрытие большепролетного здания приняты из статьи [32; 33] (определены в соответствии с СП 17.13330.2017³ «Кровли» и СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия»⁴).

Метод конечных элементов (МКЭ) является универсальным средством численного инженерного анализа больших пространственных механических систем [34; 35]. Он позволяет комбинировать в моделях стержневые (Beam и Bar), пластинчатые (оболочечные) (Plate) и объемные (Volume Elements типа Solid) конечные элементы с различными аппроксимирующими функциями полей перемещений [36; 37]. В исследовании расчетных моделей большепролетного здания авторами применен расчетный комплекс Femap with NX Nastran, реализующий весьма широкий набор расчетных подходов и методов инженерного анализа. Конструкция здания аппроксимирована комбинацией из 30 348 конечных элементов с 30 469 узлами с шестью степенями свободы в каждом. В конечно-элементной модели представлены все основные конструктивные узлы реального объекта.

Динамический анализ основывается на решении общего уравнения движения исследуемой конструкции здания (как системы со многими степенями свободы), которое в матричной форме имеет следующий вид [36]:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f(t)\},$$
(1)

где [M] — матрица масс конструкции; [C] — матрица демпфирования; [K] — матрица жесткости; $\{f\}$ — известный вектор внешней нагрузки, зависящий от времени t; $\{u\}$ — неизвестный вектор узловых перемещений конечно-элементной модели, зависящий от времени. Аналогичное уравнение, полученное путем преобразования (1) из временной области в область переменных Лапласа (p) при нулевых начальных условиях, можно представить так:

$$(p^{2}[M] + p[C] + [K]) \{X(p)\} = \{F(p)\},$$
(2)

где $\{F(t)\}$ — вектор внешней нагрузки; $\{X(p)\}$ — вектор отклика (реакции).

Динамический анализ разделяется на два этапа. На первом этапе выполняется модальный анализ, результатами которого являются частотные (модальные) характеристики системы: собственные формы и частоты. Расчетному анализу подвергается также долевой вклад каждой моды в колебательный процесс (эффективная модальная масса).

Построение матриц жесткости, массы и демпфирования, а также включение их в обобщенное уравнение движение системы позволяют решать задачу по определению частот собственных колебаний в следующем виде [38]:

$$\begin{pmatrix} p \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \end{pmatrix} \{Y\} = \{0\}.$$

$$(3)$$

² СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения [Concrete and reinforced concrete structures. General provisions]. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. Москва: Стройинформ, 2019.

³ СП 17.13330.2017. Кровли [The roofs]. Актуализированная редакция СНиП II-26-76. Москва, 2017

⁴ СП 20. 13330.2016. Нагрузки и воздействия [Loads and actions]. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. Москва. 2016.

Собственные значения находятся путем раскрытия определителя следующего вида:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} = 0.$$

$$\tag{4}$$

Решением (4) является ряд собственных значений в виде комплексно-сопряженных пар вида $\lambda_r \pm i\omega_r$ (r = 1-N, где N — число степеней свободы), содержащие коэффициенты затухания и собственные частоты. Каждому собственному значению соответствует вектор формы. Последние значения также являются комплексно-сопряженными. Собственные векторы находятся путем решения следующего уравнения:

$$\left(\lambda_r^2 \left[M\right] + \lambda_r \left[C\right] + \left[K\right]\right) \{\psi\}_r = \{0\}.$$

В настоящей работе собственные частоты и формы колебаний были определены методом Ланцоша (Lanczos) (в составе программного комплекса *Femap with NX Nastran*), сочетающим лучшие свойства метода обратной степени, модифицированного метода обратной степени Штурмана и методов приведения, таких как метод Гивенса, метод Хаусхолдера, модифицированный метод Гивенса, модифицированный метод Хаусхолдера [31; 36].

На втором этапе выполняется анализ частотного отклика на установившееся колебательное возбуждение, определенное в частотной области. По существу, речь идет о численном эксперименте, реализующем технику «фазового резонанса», которая заключается в поочередном возбуждении расчетной модели на каждой из «важных» резонансных частотах и определении соответствующих откликов системы [36]. Приложенная нагрузка задается в форме вынужденных ускорений и носит синусоидальный характер. В результате анализа определяются смещения, силы и напряжения элементов. Вычисляемые отклики представляют собой комплексные числа, определяемые как величина и фаза (по отношению к приложенной нагрузке). В анализе частотных характеристик альтернативными решениями являются прямой и модальный методы [36].

Прямым методом решаются связанные уравнения движения в зависимости от частоты воздействия. В случае с демпфированием, моделирующим рассеяние энергии в конструкциях здания, общий коэффициент структурного демпфирования G и коэффициент элементного структурного демпфирования G_E , определяемый в свойствах строительного материала, формируют комплексную матрицу жесткости следующего вида:

$$[K_E] = (1+iG)[K] + i\sum_{j=1}^N G_E^j [K_E^j],$$
⁽⁵⁾

где $[K_E]$ — матрица жесткости конечного элемента. Таким образом, в анализе прямого частотного отклика структурный отклик вычисляется на дискретных частотах возбуждения путем решения системы связанных матричных уравнений с использованием комплексной алгебры. Уравнения движения на каждой входной частоте решаются способом, аналогичным задаче статики, с использованием сложной арифметики.

Модальный метод использует собственные формы структуры. В результате уравнения движения распадаются, а общее анализируемое их число уменьшается. При этом решение для заданной частоты воздействия формируется путем суммирования заданных модальных откликов. Формы мод (тонов) рассчитываются заранее. Расчетная практика показала, что уравнения движения в модальной форме с частотной характеристикой решаются гораздо быстрее, в сравнении с решением прямым методом, поскольку расчетному анализу подвергается серия несвязанных систем с одной степенью свободы. При решении рассматриваемой задачи было использовано структурное демпфирование, что устраняло свойство ортогональности форм. Модальный частотный подход позволил решить связанную проблему в терминах модальных координат с использованием прямого частотного подхода.

3. Результаты

В результате модального анализа модели № 1 «Здание — жесткая заделка» были определены частоты f_i (Гц) и формы (Mode) собственных колебаний конструкции с учетом всех шести узловых степеней свободы: поступательных (T1, T2, T3) вдоль осей *X*, *V*, *Z*, а также вращательных (R1, R2, R3), вокруг указанных осей [31].

На рис. 2 для расчетных резонансных частот дополнительно указаны соответствующие эффективные массы в долях от суммарной массы, принятой за 1 (100 %).





Согласно сейсмическим строительным нормам СП 14.13330.2018⁵, действующим в РФ при расчете усилий в конструкциях зданий и сооружений, проектируемых для строительства в сейсмических районах, рекомендуется учитывать формы собственных колебаний с суммарной эффективной модальной массой, составляющей не менее 90 % общей массы системы для горизонтальных воздействий и не менее 75 % — для вертикального воздействия. При этом должны быть учтены все формы собственных колебаний, эффективная модальная масса которых превышает 5 %. На рис. 3 обозначен уровень отсекаемых форм рассматриваемой конструкции по критерию минимальных эффективных масс, участвующих в колебаниях. Моды (тона) с наиболее высокими значениями эффективной массы сведены в табл. 1. Соответствующие им формы собственных колебаний конструкции здания представлены на рис. 4–9.

⁵ СП 14.13330.2018. Строительство в сейсмических районах [Seismic building design code]. Актуализированная редакция СНиП II-7-81*. Москва: Стандартинформ, 2018. 122 с.





Таблица 1 / Table 1

Номер моды (тона) / Number mode	Направление перемещения / Direction of movement	Частота <i>fi</i> , Гц/ Frequency <i>fi</i> , Hz	Эффективная масса/ Effective Masses Fraction, %
1	Перемещение по оси $Z(T3)$ / Displacement along Z axis (T3)	2,5279	34,0
	Поворот вокруг оси $X(R1) / Rotation$ around X-axis (R1)	2,5279	9,6
2	Перемещение по оси $X(T1) / Displacement along X-axis (T1)$	2,5825	12,7
4	Поворот вокруг оси $X(R1) / Rotation$ around X-axis (R1)	3,7019	27,7

Наибольшие модальные эффективные массы конструкции здания / The largest modal effective masses of a building structure

Окончание табл. 1 / Ending of the table 1

Номер моды (тона) / Number mode	Направление перемещения / Direction of movement	Частота <i>fi</i> , Гц/ Frequency <i>fi</i> , Hz	Эффективная масса/ Effective Masses Fraction, %
6	Перемещение по оси $X(T1)$ / Displacement along X-axis (T1)	5,1489	50,8
	Поворот вокруг оси $Y(R2)$ / Rotation around Y axis (R2)	5,1489	31,6
	Поворот вокруг оси $Z(R3)$ / Rotation around Z axis (R3)	5,1489	29,7
7	Перемещение по оси $Z(T3)$ / Displacement along Z axis (T3)	5,2805	6,0
16	Перемещение по оси $Z(T3)$ / Displacement along Z axis (T3)	6,5973	30,5
24	Перемещение по оси $Y(T2)$ / Displacement along Y axis (T2)	6,8054	30,8
25	Поворот вокруг оси $Y(R2)$ / Rotation around Y axis (R2)	7,0184	2,9
	Поворот вокруг оси $Z(R3)$ / Rotation around Z axis (R3)	7,0184	19,2



Рис. 4. Перемещение T1 по оси X. Моды и частоты собственных колебаний деформированной модели: a - Mода 2, частота $f_2 = 2,58253$ Гц, эффективная суммарная масса - 12,7 %; $\delta - Mода 6$, частота $f_6 = 5,148898$ Гц, эффективная суммарная масса - 50,8 % Figure 4. T1 Translation. Modes and frequencies of natural oscillations of the deformed model: a - Mode 2, Frequency $f_2 = 2.58253$ Hz, Mass Frac - 12.7 %;

 δ — Mode 6, Frequency $f_6 = 5.148898$ Hz, Mass Frac — 50.8 %



а

Рис. 5. Поворот R1 вокруг оси X. Формы и частоты собственных колебаний деформированной модели: a - Moga 1, частота $f_1 = 2,527898$ Гц, эффективная суммарная масса — 9,6 %; $\delta - Moga 4$, частота $f_4 = 3,701951$ Гц, эффективная суммарная масса — 27,7 % Figure 5. R1 Rotation. Modes and frequencies of natural oscillations of the deformed model: a - Mode 1, Frequency $f_1 = 2.527898$ Hz, Mass Frac — 9.6 %;

 δ — Mode 4, Frequency $f_4 = 3.701951$ Hz, Mass Frac — 27.78 %

DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS



Рис. 6. Перемещение Т2 по оси У. Моды и частоты собственных колебаний деформированной модели: *а* — Мода 16, частота *f*₁₆ = 6,597294 Гц, эффективная суммарная масса — 30,5 %; б — Мода 24, частота f₂₄ = 6,80543 Гц, эффективная суммарная масса — 30,8 % Figure 6. T2 Translation. Modes and frequencies of natural oscillations of the deformed model:

a — Mode 16, Frequency $f_{16} = 6.597294$ Hz, Mass Frac — 30.5 %; δ — Mode 24, Frequency $f_{24} = 6.80543$ Hz, Mass Frac — 30.8 %



Рис. 7. Поворот R2 вокруг оси Y. Формы и частоты собственных колебаний деформированной модели: a — Мода 6, частота $f_6 = 5,148898$ Гц, эффективная суммарная масса — 31,6 %; б — Мода 25, частота f₂₅ = 7,018378 Гц, эффективная суммарная масса — 2,9 % Figure 7. R2 Rotation. Modes and frequencies of natural oscillations of the deformed model: *a* — Mode 6, Frequency $f_6 = 5.148898$ Hz, Mass Frac — 31.6 %;

b — Mode 25, Frequency *f*₂₅ = 7.018378 Hz, Mass Frac — 2.9 %



а

Рис. 8. Перемещение Т3 по оси Z. Моды и частоты собственных колебаний деформированной модели: a – Мода 1, частота f_1 = 2,527898 Гц, эффективная суммарная масса — 34 %; δ – Мода 7, частота f_7 = 5,280518 Гц, эффективная суммарная масса — 6 % Figure 8. T3 Translation. Modes and Frequencies of Natural oscillations of the Deformed model:

a — Mode 1, Frequency $f_1 = 2.527898$ Hz, Mass Frac — 34 %; δ — Mode 7, Frequency $f_7 = 5.280518$ Hz, Mass Frac — 6 %



Рис. 9. Поворот R3 вокруг оси Z. Формы и частоты собственных колебаний деформированной модели: a - Moдa 6, частота $f_6 = 5,148898$ Гц, эффективная суммарная масса — 29,7 %; $\delta - Moda 25$, частота $f_{25} = 7,018378$ Гц, эффективная суммарная масса — 19,2 % Figure 9. R3 Rotation. Modes and frequencies of natural oscillations of the deformed model: a - Mode 6, Frequency $f_6 = 5.148898$ Hz, Mass Frac — 29.7 %; $\delta - Mode 25$, Frequency $f_{25} = 7.018378$ Hz, Mass Frac — 19.2 %

В процессе проектирования здания собственные частоты и формы могут служить основой для оценки влияния соединения здания с другими строительными конструкциями, а также для оптимизации его динамического поведения. При этом может решаться ряд практически важных задач. Например, в случае модификации существующего проекта здания важны влияния конструктивных изменений на динамику системы в целом. Численный анализ конечно-элементной модели может показать, какие модальные параметры в наибольшей мере изменяются вследствие принятых изменений конструкции. Большое практическое значение может иметь отстройка системы от возможных резонансов.

Определение модальных параметров системы (резонансных частот и собственных форм) позволяет приступить к более полному изучению ее динамического поведения. Актуальность приобретают оценки реакций конструкции на нагрузки динамического характера. Например, особый интерес проектировщика может быть связан:

✤ с определением максимальных ускорений и напряжений в конкретных точках конструкции в экстремальных условиях нагружения (сейсмические и ветровые воздействия);

- с выявлением преобладающих резонансов в реакциях системы;
- ✤ величиной и характером деформаций на той или иной частоте колебаний и др.

В качестве примера приведены результаты частотного анализа гармонического отклика модели «здание — жесткая заделка». Внешняя единичная нагрузка (в виде единичного ускорения $1g = 9,8m/c^2$) прикладывалась в центральной точке (узел 1) основания, стянутой с опорными точками колонн при помощи стержней типа Rigid, последовательно по направлению осей *X*, *Y*, *Z*. На рис. 10–24 приведены зависимости гармонических откликов в виде амплитудных значений реактивных сил (H) и реактивных монентов (Hм) в опорном узле 1, а также напряжений в характерных точках конструкции от частоты вынуждающей нагрузки. Частота вынуждающей силы изменялась в диапазоне от 0 до 8,5 Гц. Общий коэффициент структурного демпфирования принимался *G* = 0,05. Далее представлены результаты динамического расчета большепролетного здания цилиндро-плитного покрытия на гармоническое воздействие по осям *X*, *Y*, *Z*.

3.1. Единичное гармоническое вынуждающее ускорение по оси Х

На рис. 10 показан график «Опорная сила, Н — частота, Гц», который демонстрирует опасные отклики по осям *X*, *Y*, *Z*. При частоте 5,1489 Гц максимальная опорная сила по оси *X* составила 503 491 кН. Аналогично, с графиком «Опорный момент, Нм — частота, Гц» (рис. 11).

Судя по результатам модального анализа [31], наиболее опасными собственными формами вдоль оси Х являются Mode 2 с эффективной массой 13% и собственной частотой $f_2 = 2,58253$ Гц и Mode 6 с эффективной массой 51 % и собственной частотой $f_2 = 5,148898$ Гц (см. рис. 12).



Рис. 10. Гармоническая нагрузка по оси *X*. Зависимость амплитуды силы опорного узла 1 в осях (T1)*X*, (T2)*Y*, (T3)*Z* от частоты приложенной нагрузки.

Figure 10. Harmonic Load AX. (T1)X, (T2)Y, (T3)Z Constraint Force (Node 1) vs Frequency







Figure 11. Harmonic Load AX. (R1)X, (R2)Y, (R3)Z Constraint Moment (Node 1) vs Frequency



Рис. 12. Наиоолее опасные сооственные формы в здании по оси X: $a - Mода 2; эффективная масса - 13 %; <math>f_2 = 2.58253$ Hz; $\delta - Mода 6; эффективная масса - 51 %; <math>f_6 = 5.148898$ Hz **Figure 12.** The most dangerous Modes in the building along the X-axis: a - Mode 2; Mass FRAC - 13 %; $f_2 = 2.58253$ Hz; $\delta - Mode 6;$ Mass FRAC - 51 %; $f_6 = 5.148898$ Hz Далее приведен график «Ускорение, м/с² — частота, Гц» для узла 857 в колонне и узла 22 194 в цилиндрической оболочке (рис. 13). При максимальной частоте 5,01649 Гц оболочки узла 22 194 получено ускорение 26,1289 м/с² = 2,7 g. Для колонны узла 857 при максимальной частота 5,23853 Гц ускорение составило 189,309 м/с² = 19 g. На рис. 14 представлен частотный отклик напряжения в верхних и нижних волокнах цилиндрической оболочки нулевой гауссовой кривизны в узле 22 194 с максимальным перемещением 0,000788 м и колонны в узле 857 с максимальным перемещением 0,000878 м.



Рис. 13. Гармоническая нагрузка по оси *X*. Зависимость ускорения по оси (T1)*X* узлов 857, 22194 от частоты **Figure 13.** Harmonic Load AX. (T1)*X* Acceleration (Nodes: 857, 22194) vs Frequency



Зависимость напряжения в колонне (857), оболочки (22194) от частоты Figure 14. Harmonic Load AX. Bar Stress (Element 857), Plate VonMises Stress (Element 22194) vs Frequency

3.2. Единичное гармоническое вынуждающее ускорение по оси У

В данном расчете к опорному узлу 1 приложена гармоническая сила по оси У с ускорением 1 g. На рис. 15 и 16 изображены следующие зависимости: «Опорная сила, Н — частота, Гц» и «Опорный момент, Нм — частота, Гц». На рис. 17 — опасные формы (Mode 16 и Mode 24) и их частоты собственных колебаний по оси *Y*, которые в дальнейшем определяют максимальный частотный отклик ускорения и напряжения в узлах 740 и 772 колонн.

На рис. 18 и 19 приведены максимальные отклики ускорения (616,547 м/с² = 63 g) и нормального напряжения (136750 кН) колонн в узлах 740 и 772 при частоте 6,67627 Гц. По сути график «ускорение — частота» является расчетным коэффициентом динамичности β — отношение значений динамического к статическому расчету (отношение частоты возбуждающей силы к частоте собственных колебаний).







в осях (T1)X, (T2)Y, (T3)Z от частоты приложенной нагрузки. Figure 15. Harmonic Load AY. (T1)X, (T2)Y, (T3)Z Constraint force (Node 1) vs frequency





Figure 16. Harmonic Load AY. (R1)X, (R2)Y, (R3)Z Constraint moment (Node 1) vs Frequency



б — Мода 24; эффективная масса — 30,8 %; f₂₄ = 6.80543Hz Figure 17. The most dangerous Modes in the building along the *Y*-axis: *a* — Mode 16; Mass FRAC — 30,5 %; $f_{16} = 6.597294$ Hz; δ — Mode 24; Mass FRAC — 30,8 %; $f_{24} = 6.80543$ Hz



Рис. 18. Гармоническая нагрузка по оси *Y*. Зависимость ускорения по оси (T2)*Y* узлов 740 и 772 от частоты **Figure 18.** Harmonic Load AY. T2 Acceleration (Element 740 and 772) vs Frequency



Рис. 19. Гармоническая нагрузка по оси *Y*. Зависимость напряжения узлов 740 и 772 от частоты **Figure 19.** Harmonic Load AY. Bar EndA Pl1 Bend Stress (Element 740 and 772) vs Frequency



3.3. Единичное гармоническое вынуждающее ускорение по оси Z

Рис. 20. Гармоническая нагрузка по оси *Z*. Зависимость амплитуды силы опорного узла *1* в осях (T1)*X*, (T2)*Y*, (T3)*Z* от частоты приложенной нагрузки

Figure 20. Harmonic Load AZ. (T1)X, (T2)Y, (T3)Z Constraint force (Node 1) vs Frequency



Рис. 21. Гармоническая нагрузка по оси *Z*. Зависимость опорного момента узла *1* в осях (R1)*X*, (R2)*Y*, (R3)*Z* от частоты приложенной нагрузки.
 Figure 21. Harmonic Load AZ. (R1)*X*, (R2)*Y*, (R3)*Z* Constraint moment (Node 1) vs Frequency



Рис. 22. Наиболее опасная собственная форма 1 в здании по оси Z; эффективная масса — 33,8 %; $f_2 = 2.527898$ Hz Figure 22. The most dangerous Mode 1 in the building along the Z-axis; Mass FRAC — 33,8 %; $f_1 = 2.527898$ Hz



Рис. 23. Гармоническая нагрузка по оси Z. Зависимость ускорения по оси (T3)Z узла 31360 от частоты **Figure 23.** Harmonic Load AZ. T3 Acceleration (Node 31360) vs Frequency



Figure 24. Harmonic Load AZ. Plate VonMises Stress (Element 31360) vs Frequency

4. Обсуждение

В настоящем исследовании выполнен анализ собственной и вынужденной вибрации конструкции надземной части большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием. При этом опорные конструктивные элементы (колонны и диафрагмы жесткости) здания имели жесткую заделку на уровне обреза фундамента. Полученные данные могут характеризовать динамическое поведение реальной системы лишь в первом приближении.

Как известно, существенное влияние на результаты расчета динамики здания оказывают граничные условия, определяемые свойствами основания (грунта на площадке строительства) и фундамента (мелкого или глубокого заложения), взаимодействующего с грунтовыми массивами различной реологии [30; 31]. По этой причине на следующем этапе исследований авторы планируют перейти к расчетам полной системы — модели № 2 «здание — фундамент — основание». Особую сложность при этом представляет учет физико-механических и диссипативных (демпфирующих) свойств грунта, которые должны быть учтены при выполнении расчетов вынужденных колебаний конструктивных решений рассматриваемых зданий при сейсмических нагрузках. Указанные свойства могут быть определены лишь с помощью комплекса экспериментальных исследований [24–29, 39–63]. Ввод в расчет упрощенных (априорных) граничных условий, не учитывающих свойства и характеристики реальных фундаментов и грунтов, может приводить к серьезным ошибкам. Экспериментальные исследования помогут уточнить параметры расчетной модели конструкции, сделать модель более пригодной для практики расчетного конструирования зданий указанного типа.

Поскольку расчетное конструирование связано с многовариантным перебором возможных конструктивных решений целесообразным является преобразование (упрощение) расчетной схемы здания без потери точности результатов [64]. Эффективным решением может оказаться применение внешнего суперэлемента на границе подземной части здания с его надземной частью. Дополнительным упрощением может стать использование ограниченного числа расчетных узлов (обобщенных масс), распределенных по покрытию здания с таким расчетом, чтобы получаемая преобразованная расчетная схема с максимальной точностью отслеживала модальные формы в диапазоне «опасных» резонансных частот.

5. Заключение

1. Применение численных методов, реализованных в современных программных комплексах САЕкласса, позволяет получить обоснованные оценки динамики поведения конструкции здания с цилиндроплитным покрытием как большой механической системы. 2. В результате модального анализа конечно-элементной модели здания получен спектр ее собственных (резонансных) частот, а также соответствующих эффективных масс. Полученные оценки позволяют искючить возможные ошибки расчетов вынужденной вибрации конструкции здания модальным методом, связанные с пропуском ряда значимых ее форм собственных колебаний.

3. Результаты данного исследования могут быть учтены при проектировании и модификации зданий указанного типа.

Список литературы

1. *Кужахметова* Э.Р., *Сапожников А.И*. Архитектурная выразительность и физиологическая целесообразность зданий с криволинейными поверхностями // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2012. № 11 (166). С. 42–45. EDN: SKDXXH

2. *Кужахметова* Э.Р. Большепролетное здание с купольно-плитно-вантовым покрытием // Патент РФ № 2740506. 2021. Бюл. № 2. 7 с.

3. *Мамиева И.А.* Линейчатые алгебраические поверхности с главным каркасом из трех суперэллипсов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 4. С. 387–395. https://doi.org/10.22363/ 1815-5235-2022-18-4-387-395

4. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 150–165. EDN: KNYKTY

5. *Мамиева И.А.* Аналитические поверхности в архитектуре Москвы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 4. С. 9–15. EDN: QCXPUD

6. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Зонтичные поверхности и поверхности зонтичного типа в архитектуре // Промышленное и гражданское строительство. 2011. № 7–1. С. 27–30. EDN: NXOUOP

7. *Mamieva I.A.* Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures // Building and Reconstruction. 2019. No. 5 (85). P. 23–34. https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-85-5-23-34

8. Сапожников А.И. Особенности колебания зданий и сооружений при динамических воздействиях различной природы // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2015. № 1(192). С. 27–32. EDN: THXVEF

9. Chen G.Q., Lu J.X., Wu H. Dynamic behavior and retrofitting of RC frame building under vehicular bomb explosion // Engineering Failure Analysis. 2023. Vol. 143. https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2022.106925

10. Santos F. On the dynamic response of a building model equipped with multiple curved-surface sliders // Mechanics Research Communications. 2023. Vol. 128. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104058

11. Tulebekova S., Malo K.A., Rønnquist A., Nåvik P. Modeling stiffness of connections and non-structural elements for dynamic response of taller glulam timber frame buildings // Engineering Structures. 2022. Vol. 261. https://doi.org/ 10.1016/j.engstruct.2022.114209

12. Kamal M., Inel M., Cayci B.T. Seismic behavior of mid-rise reinforced concrete adjacent buildings considering soil-structure interaction // Journal of Building Engineering. 2022. Vol. 51. Article 104296. https://doi.org/10.1016/j.jobe.2022.104296.

13. Zhi Xu-D., Fan F., Shen S.-ZH. Failure mechanism of single-layer cylindrical reticulated shells under earthquake motion // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2012. Vol. 12 (02). P. 233–249. https://doi.org/10. 1142/S0219455412500022

14. Bayraktar A., Hökelekli E., Yang T.T.Y. Seismic failure behavior of masonry domes under strong ground motions // Engineering Failure Analysis. 2022. Vol. 142. Article 106749. https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2022.106749

15. Vasheghani M., Sadeghi J., Ghaffarpour S., Mahmoudi M. Modal based method to predict subway train-induced vibration in buildings // Structures. 2023. Vol. 47. P. 557–572. https://doi.org/10.1016/j.istruc. 2022.11.092

16. Au S.-K., Zhang F.-L., To P. Field observations on modal properties of two tall buildings under strong wind // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2012. Vol. 101. P. 12–23. https://doi.org/10.1016/j.jweia.2011.12.002

17. Au S.-K., Zhang F.-L. On assessing the posterior mode shape uncertainty in ambient modal identification // Probabilistic Engineering Mechanics. 2011. Vol. 26. P. 427–434. https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2010.11.009

18. Brownjohn J.M.W. Ambient vibration studies for system identification of tall buildings // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 2003. Vol. 32. P. 71–95.

19. Tetlak T.B., Gattas J.M., Maluk C. Experimental study on the effects of scale on the static and dynamic behaviour of Glulam and hybrid-Glulam beams // Construction and Building Materials. 2023. Vol. 369. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.130563

20. Peeters B., Roeck G.D. Stochastic system identification for operational modal analysis: A Review // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME. 2001. Vol. 123. Issue 4. P. 659–667. https://doi. org/10.1115/1.1410370

21. Azzara R.M., Girardi M., Padovani C., Pellegrini D. Experimental and numerical investigations on the seismic behaviour of the San Frediano bell tower in Lucca // Annals of Geophysics. 2019. Vol. 62. No. 3. https://www.annalsofgeophysics.eu/index.php/annals/article/view/8025

22. Ashayeri I., Biglari M., Formisano A., D'Amatoc M. Ambient vibration testing and empirical relation for natural period of historical mosques. Case study of eight mosques in Kermanshah, Iran // Construction and Building Materials. 2021. Vol. 289. Article 123191. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.123191

23. *Cavalieri F., Correia A.A., Crowley H., Pinho R.* Seismic fragility analysis of URM buildings founded on piles: influence of dynamic soil–structure interaction models // Bulletin of Earthquake Engineering. 2020. Vol. 18. P. 4127–4156. https://doi.org/10.1007/s10518-020-00853-9

24. Сутырин В.И., Кужахметова Э.Р., Шинкаренко И.А. Устройство для определения коэффициента демпфирования сыпучих материалов и жидкостей // Патент РФ № 184676. 2018. Бюл. № 31. 7 с.

25. Сутырин В.И., Кужахметова Э.Р. Экспериментальная установка (стенд) для изучения многофакторной зависимости коэффициента демпфирования сваи при взаимодействии с грунтом. Патент РФ № 2646540. Бюл. № 7. 9 с.

26. Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И., Шинкаренко И.А. Способ определения демпфирующих характеристик жидкостей и сыпучих материалов. Патент РФ № 2699311. 2019. Бюл. № 25. 11с.

27. Сутырин В.И., Шинкаренко И.А., Кужахметова Э.Р. Экспериментальный стенд для определения демпфирующих свойств материалов // Известия КГТУ. 2019. № 52. С. 177–183.

28. Сутырин В.И., Кужахметова Э.Р., Шинкаренко И.А. Экспериментальное определение коэффициентов демпфирования грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2022. № 4. С. 19–25. EDN: PSFNPB

29. Sutyrin V.I., Kuzhakhmetova E.R., Shinkarenko I.A. Experimental Determination of Soil Damping Coefficients // Soil Mech. Found. Eng. 2022. Vol. 59. P. 362–370. https://doi.org/10.1007/s11204-022-09823-6

30. *Кужахметова Э.Р. Сутырин В.И.* Влияние грунтового основания на напряженно-деформированное состояние большепролетного здания с цилиндро-плитным // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 5. С. 444–457. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-444–457.

31. *Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И.* Модальный анализ большепролетного здания с разными граничными условиями // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 17–34. http://doi. org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-17-34.

32. *Кужахметова Э.Р.* Конструктивные решения расположения вант в цилиндро-плитно-вантовом (ЦПВ) покрытии здания (сооружения) // Вестник БГТУ имени В.Г. Шухова. 2019. № 5. С. 77–89. http://doi.org/10.34031/ article 5ce292ca24bc23.91006970

33. Кужахметова Э.Р. Напряженно-деформированное состояние цилиндро-плитно-вантового покрытия здания (сооружения) с различными формами наружного опорного контура // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 95–110. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-95-110

34. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Изд-во «Мир», 1975. 540 с.

35. Strang G., Fix G.J. The finite element method in one dimension. An analysis of the finite element method. Englewood Cliffs, 1973. P. 51–62.

36. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. М.: ДМК Пресс, 2013. 784 с.

37. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. М.: ДМК Пресс, 2003. 448 с.

38. Fox R.L., Kapoor M.P. Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors // AIAA Journal. 1968. Vol. 6 (12). P. 2426–2429. doi:10.2514/3.5008

39. Ahmadi E., Khoshnoudian F., Hosseini M. Importance of soil material damping in seismic responses of soil-MDOF structure systems // Soils and Foundations. 2015. Vol. 55. P. 35–44. https://doi.org/10.1016/j.sandf.2014.12.003

40. Zhang Z., Wei H., Qin X. Experimental study on damping characteristics of soil-structure interaction system based on shaking table test // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2017. Vol. 98. P. 183–190. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2017.04.002

41. Lu Y., Hajirasouliha I., Marshall A.M. Performance-based Seismic Design of Flexible-Base Multi-Storey Buildings Considering Soil-Structure Interaction // Engineering Structures. 2016. Vol. 108. P. 90–103. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.031

42. Mason H.B., Trombetta N.W., Chen Z., Bray J.D., Hutchinson T.C., Kutter B.L. Seismic soil-foundation-structure interaction observed in geotechnical centrifuge experiments // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2013. Vol. 48. P.162–174. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2013.01.014

43. *Nazarimofrad E., Zahrai S.M.* Fuzzy control of asymmetric plan buildings with active tuned mass damper considering soil-structure interaction // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2018. Vol. 115. P. 838–852. https:// doi.org/10.1016/j.soildyn.2017.09.020

44. Arboleda-Monsalve L.G., Mercado J.A., Terzic V., Mackie K.R. Soil-structure interaction effects on seismic performance and earthquake-induced losses in tall buildings // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2020. Vol. 146 (5). https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0002248

45. Sarcheshmehpour M., Estekanchi H.E., Ghannad M.A. Optimum placement of supplementary viscous dampers for seismic rehabilitation of steel frames considering soil-structure interaction // Structural Design of Tall and Special Buildings. 2020. Vol. 29 (1). https://doi.org/10.1002/tal.1682.

46. Aydin E., Ozturk B., Bogdanovic A., Farsangi E.N. Influence of soil-structure interaction (SSI) on optimal design of passive damping devices // Structures. 2020. Vol. 28. P. 847–862. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.09.028

47. Aydin E., Ozturk B., Dutkiewicz M. Analysis of efficiency of passive dampers in multistorey buildings // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 439. P.17–28. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.09.031

48. Wu Q., Ding X., Zhang Ya., Chen Z., Zhang Y. Numerical simulations on seismic response of soil-pile-superstructure in coral sand // Ocean Engineering. 2021. Vol. 239. Article 109808. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021. 109808

49. Ferdosi B., James M., Aubertin M. Effect of waste rock inclusions on the seismic stability of an upstream raised tailings impoundment: a numerical investigation // Canadian Geotechnical Journal. 2015. Vol. 52 (12). P. 1930–1944. https://doi.org/10.1139/cgj-2014-044

50. *Murao H., Nakai K., Noda T., Yoshikawa T.* Deformation-failure mechanism of saturated fill slopes due to resonance phenomena based on 1g shaking-table tests // Canadian Geotechnical Journal. 2018. Vol. 55 (11). P. 1668–1681. https://doi.org/10.1139/cgj-2017-0385

51. *Nakai K., Noda T., Kato K.* Seismic assessment of sheet pile reinforcement effect on river embankments constructed on a soft foundation ground including soft estuarine clay // Canadian Geotechnical Journal. 2017. Vol. 54 (10). P. 1375– 1396. https://doi.org/10.1139/cgj-2016-0019

52. *Yazdandoust M.* Seismic performance of soil-nailed walls using a 1g shaking table // Canadian Geotechnical Journal. 2017. Vol. 55 (1). P. 1–18. https://doi.org/10.1139/cgj-2016-0358

53. Uzdin A.M, Frolova E.D. On the Experimental Determination of Soil Damping Coefficients // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2022. Vol. 59 (4). P. 371–375

54. *Bogdanovic A., Rakicevic Z., Farsangi E.N.* Shake table tests and numerical investigation of a resilient damping device for seismic response control of building structures // Structural Control and Health Monitoring. 2019. Vol. 26 (11). https://doi.org/10.1002/stc.2443

55. Chatterjee K., Choudhury D., Poulos H.G. Seismic analysis of laterally loaded pile under influence of vertical loading using finite element method // Computers and Geotechnics. 2015. Vol. 67. P. 172–186. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.03.004

56. *Chiou J.-S., Hung W.-Y., Lee Y.-T., Young Z.-H.* Combined dynamic structure-pile-soil interaction analysis considering inertial and kinematic effects // Computers and Geotechnics. 2020. Vol. 125. https://doi.org/10.1016/j.compgeo. 2020.103671

57. Le Y., Wang N., Hu W., Geng D., Jiang Y. Torsional dynamic impedance of a stepped pile based on the wedged soil model // Computers and Geotechnics. 2020. Vol. 128. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103854

58. Ferdosi B., James M., Aubertin M. Numerical simulations of seismic and post-seismic behavior of tailings // Canadian Geotechnical Journal. 2015. Vol. 53 (1). P. 85–92. https://doi.org/10.1139/cgj-2014-0345

59. *Hasheminezhad A., Bahadori H.* Seismic response of shallow foundations over liquefiable soils improved by deep soil mixing columns // Computers and Geotechnics. 2019. Vol. 110. P. 251–273. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2019. 02.019

60. *He B., Zhang J.-M., Wang W.Li, R.* Numerical analysis of LEAP centrifuge tests on sloping liquefiable ground: influence of dilatancy and post-liquefaction shear deformation // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2020. Vol. 137. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2020.106288

61. *Lim H., Jeong S.* Effect of bedrock acceleration on dynamic and pseudo-static analyses of soil-pile systems // Computers and Geotechnics. 2020. Vol. 126. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103657

62. Zou Y. X., Zhang J. M., Wang R. Seismic analysis of stone column improved liquefiable ground using a plasticity model for coarse-grained soil // Computers and Geotechnics. 2020. Vol. 125. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020. 103690

63. *Hu X., Zhang R., Ren X., Pan C., Zhang X., Li H.* Simplified design method for structure with viscous damper based on the specified damping distribution pattern // Journal of Earthquake Engineering. 2020. Vol. 26 (3). P. 1367–1387. https://doi.org/10.1080/13632469.2020.1719239

64. *Kuzhakhmetova E.R., Sutyrin V.I.* Study of the strength of a reinforced concrete cylindrical shell in a large span building (structure) with a cylinder-slab-cable-stayed roof // AIP Conference Proceedings 2497: Proceedings of the ii scientific conference "Modelling and methods of structural analysis"; 2021, 11–13 November; Moscow. Russian Federation 2023. https://doi.org/10.1063/5.0103610

References

1. Kuzhakhmetova E.R., Sapozhnikov A.I. Architectural expressiveness and physiological expediency of buildings with curvilinear surfaces. *Building Materials, Equipment, Technologies of the 21st Century*. 2012;11(166):42–45. (In Russ.) EDN: SKDXXH

2. Kuzhakhmetova E.R. Patent of the Russia No. 2740506. Long-span building with a dome-slab-cable-stayed roof. 2021;(2).

3. Mamieva I.A. Ruled algebraic surfaces with a main frame from three superellipses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):387–395. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-387–395

4. Mamieva I.A. Analytical surfaces for parametric architecture in contemporary buildings and structures. *Academia*. *Architecture and Construction*. 2020;(1):150–165. (In Russ.) EDN: KNYKTY

5. Mamieva I.A. Analytical surfaces in the architecture of Moscow. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013;(4):9–15. (In Russ.) EDN: QCXPUD

6. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. Umbrella surfaces and surfaces of umbrella type in architecture. *Industrial and Civil Construction*. 2011;(7–1):27–30. (In Russ.) EDN: NXOUOP

7. Mamieva I.A. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures. *Building and Reconstruction*. 2019;5(85):23–34. (In Russ.) https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-85-5-23-34

8. Sapozhnikov A.I. Features of the emergence of buildings and structures in the event of special natural phenomena. *Building Materials, Equipment, Technologies of the 21st Century.* 2015;1(192):27–32. (In Russ.) EDN: THXVEF

9. Chen G.Q., Lu J.X., Wu H. Dynamic behavior and retrofitting of RC frame building under vehicular bomb explosion. *Engineering Failure Analysis*. 2023;143:106925. https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2022.106925

10. Santos F. On the dynamic response of a building model equipped with multiple curved-surface sliders. *Mechanics Research Communications*. 2023;128:104058. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104058

11. Tulebekova S., Malo K. A., Rønnquist A., Nåvik P. Modeling stiffness of connections and non-structural elements for dynamic response of taller glulam timber frame buildings. *Engineering Structures*. 2022;261:114209. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114209

12. Kamal M., Inel M., Cayci B.T. Seismic behavior of mid-rise reinforced concrete adjacent buildings considering soil-structure interaction. *Journal of Building Engineering*. 2022;51:104296. https://doi.org/10.1016/j.jobe.2022.104296.

13. Zhi Xu-D., Fan F. and Shen S.-ZH. Failure mechanism of single-layer cylindrical reticulated shells under earthquake motion. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2012;12(02):233–249. https://doi.org/10.1142/S0219455412500022

14. Bayraktar A., Hökelekli E., Yang T.T.Y. Seismic failure behavior of masonry domes under strong ground motions. *Engineering Failure Analysis*. 2022;142:106749. https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2022.106749

15. Vasheghani M., Sadeghi J., Ghaffarpour S., Mahmoudi M. Modal based method to predict subway train-induced vibration in buildings. *Structures*. 2023;47:557–572. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.11.092

16. Au S.-K., Zhang F.-L., To P. Field observations on modal properties of two tall buildings under strong wind. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2012;101:12–23. https://doi.org/10.1016/j.jweia.2011.12.002

17. Au S.-K., Zhang F.-L. On assessing the posterior mode shape uncertainty in ambient modal identification. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2011;26:427–434. https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2010.11.009

18. Brownjohn J.M.W. Ambient vibration studies for system identification of tall buildings. *Earthquake Engineering* and Structural Dynamics.2003;32:71–95.

19. Tetlak T.B., Gattas J.M., Maluk C. Experimental study on the effects of scale on the static and dynamic behaviour of Glulam and hybrid-Glulam beams. *Construction and Building Materials*. 2023;369:130563. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.130563

20. Peeters B., Roeck G.D. Stochastic system identification for operational modal analysis: A Review. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 2001;123(4):659–667. https://doi.org/10.1115/1.1410370

21. Azzara R.M., Girardi M., Padovani C., Pellegrini D. Experimental and numerical investigations on the seismic behaviour of the San Frediano bell tower in Lucca. *Annals of Geophysics*. 2019;62(3):SE342. https://doi.org/10.4401/ ag-8025

22. Ashayeri I., Biglari M., Formisano A., D'Amatoc M. Ambient vibration testing and empirical relation for natural period of historical mosques. Case study of eight mosques in Kermanshah, Iran. *Construction and Building Materials*. 2021;289:123191. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.123191

23. Cavalieri F., Correia A.A., Crowley H., Pinho R. Seismic fragility analysis of URM buildings founded on piles: influence of dynamic soil-structure interaction models. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2020;18:4127–4156. https://doi.org/10.1007/s10518-020-00853-9

24. Sutyrin V.I., Kuzhakhmetova E.R., Shinkarenko I.A. Patent of the Russia No. 184 676. Device for determining the damping coefficient of bulk materials and liquids. 2018;(31).

25. Sutyrin V.I., Kuzhakhmetova E.R. Patent of the Russia No. 2 646 540. Experimental setup (stand) for studying the multifactorial dependence of the damping coefficient of a pile when interacting with soil.2018;(7):9.

26. Kuzhakhmetova E.R., Sutyrin V.I., Shinkarenko I.A. Patent of the Russia No. 2 699 311. Method for determining damping characteristics of liquids and bulk materials. 2019;(25):11.

27. Sutyrin V.I., Shinkarenko I.A., Kuzhakhmetova E.R. Experimental stand for determining the damping properties of materials. *Izvestiya KSTU*. 2019;(52):177–183. (In Russ.)

28. Sutyrin V.I., Kuzhakhmetova E.R., Shinkarenko I.A. Experimental determination of soil damping coefficients. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2022;(4):19–25. (In Russ.) EDN: PSFNPB

29. Sutyrin V.I., Kuzhakhmetova E.R., Shinkarenko I.A. Experimental determination of soil damping coefficients. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2022;59:362–370. https://doi.org/10.1007/s11204-022-09823-6

30. Kuzhakhmetova E.R., Sutyrin V.I. Influence of the soil base on the stress-strain state of a large — span building with a cylinder-and-slab roof. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(5):444–457. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-444-457.

31. Kuzhakhmetova E.R., Sutyrin V.I. Modal analysis of a large-span building with different boundary conditions. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):17–34. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-17-34.

32. Kuzhakhmetova E.R. Constructive solutions of guys location in cylindrical-slab-guy covering of building (construction). *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov.* 2019;(5):77–89. (In Russ.) http://doi.org/10.34031/article_5ce292ca24bc23.91006970

33. Kuzhakhmetova E.R. Stress-strain state cylinder-plate-cable-stayed roof buildings (structures) with various forms of external support contour. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):95–110. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-95-110

34. Zienkiewich O.C. The finite element method in engineering science. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)

35. Strang G., Fix G.J. The finite element method in one dimension. An analysis of the finite element method. Englewood Cliffs; 1973. P. 51–62.

36. Rychkov S.P. Structural modeling in Femap with NX Nastran. Moscow: DMK Press; 2013. (In Russ.)

37. Shimkovich D.G. Structural analysis in MSC/NASTRAN for Windows. Moscow: DMK Press; 2003. (In Russ.)

38. Fox R.L., Kapoor M.P. Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. *AIAA Journal*. 1968;6(12):2426–2429. https://doi.org/10.2514/3.5008

39. Ahmadi E., Khoshnoudian F., Hosseini M. Importance of soil material damping in seismic responses of soil-MDOF structure systems. *Soils and Foundations*. 2015;55:35–44. https://doi.org/10.1016/j.sandf.2014.12.003

40. Zhang Z., Wei H., Qin X. Experimental study on damping characteristics of soil-structure interaction system based on shaking table test. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2017;98:183–190. https://doi.org/10.1016/j.soildyn. 2017.04.002

41. Lu Y., Hajirasouliha I., Marshall A.M. Performance-based Seismic Design of Flexible-Base Multi-Storey Buildings Considering Soil-Structure Interaction. *Engineering Structures*. 2016;108:90–103. https://doi.org/10.1016/j.engstruct. 2015.11.031

42. Mason H.B., Trombetta N.W., Chen Z., Bray J.D., Hutchinson T.C., Kutter B.L. Seismic soil-foundation-structure interaction observed in geotechnical centrifuge experiments. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2013;48:162–174. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2013.01.014

43. Nazarimofrad E., Zahrai S.M. Fuzzy control of asymmetric plan buildings with active tuned mass damper considering soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018;115:838–852. https://doi.org/ 10.1016/j.soildyn.2017.09.020

44. Arboleda-Monsalve L.G., Mercado J.A., Terzic V., Mackie K.R. Soil-structure interaction effects on seismic performance and earthquake-induced losses in tall buildings. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2020;146(5):04020028. https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0002248

45. Sarcheshmehpour M., Estekanchi H. E., Ghannad M. A. Optimum placement of supplementary viscous dampers for seismic rehabilitation of steel frames considering soil–structure interaction. *Structural Design of Tall and Special Buildings*. 2020;29(1):e1682. https://doi.org/10.1002/tal.1682

46. Aydin E., Ozturk B., Bogdanovic A., Farsangi E.N. Influence of soil-structure interaction (SSI) on optimal design of passive damping devices. *Structures*. 2020;28:847–862. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.09.028

47. Aydin E., Ozturk B., Dutkiewicz M. Analysis of efficiency of passive dampers in multistorey buildings. *Journal of Sound and Vibration*. 2019;439:17–28. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.09.031

48. Wu Q., Ding X., Zhang Ya., Chen Z., Zhang Y. Numerical simulations on seismic response of soil-pile-superstructure in coral sand. *Ocean Engineering*. 2021;239:109808. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109808

49. Ferdosi B., James M., Aubertin M. Effect of waste rock inclusions on the seismic stability of an upstream raised tailings impoundment: a numerical investigation. *Canadian Geotechnical Journal*. 2015;52(12):1930–1944. https://doi.org/10.1139/cgj-2014-044

50. Murao H., Nakai K., Noda T., Yoshikawa T. Deformation-failure mechanism of saturated fill slopes due to resonance phenomena based on 1g shaking-table tests. *Canadian Geotechnical Journal*. 2018;55(11):1668–1681. https://doi.org/10.1139/cgj-2017-0385

51. Nakai K., Noda T., Kato K. Seismic assessment of sheet pile reinforcement effect on river embankments constructed on a soft foundation ground including soft estuarine clay. *Canadian Geotechnical Journal*. 2017;54(10):1375–1396. https://doi.org/10.1139/cgj-2016-0019

52. Yazdandoust M. Seismic performance of soil-nailed walls using a 1g shaking table. *Canadian Geotechnical Journal*. 2017;55(1):1–18. https://doi.org/10.1139/cgj-2016-0358

53. Uzdin A. M, Frolova E. D. On the Experimental Determination of Soil Damping Coefficients. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2022;59(4):371–375. https://doi.org/10.1007/s11204-022-09824-5

54. Bogdanovic A., Rakicevic Z., Farsangi E. N. Shake table tests and numerical investigation of a resilient damping device for seismic response control of building structures. *Structural Control and Health Monitoring*. 2019;26(11). https://doi.org/10.1002/stc.2443

55. Chatterjee K., Choudhury D., Poulos H.G. Seismic analysis of laterally loaded pile under influence of vertical loading using finite element method. *Computers and Geotechnics*. 2015;67:172–186. https://doi.org/10.1016/j.compgeo. 2015.03.004

56. Chiou J.-S., Hung W.-Y., Lee Y.-T., Young Z.-H. Combined dynamic structure-pile-soil interaction analysis considering inertial and kinematic effects. *Computers and Geotechnics*. 2020;125:103671. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103671

57. Le Y., Wang N., Hu W., Geng D., Jiang Y. Torsional dynamic impedance of a stepped pile based on the wedged soil model. *Computers and Geotechnics*. 2020;128:103854. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103854

58. Ferdosi B., James M., Aubertin M. Numerical simulations of seismic and post-seismic behavior of tailings. *Canadian Geotechnical Journal*. 2015;53(1):85–92. https://doi.org/10.1139/cgj-2014-0345

59. Hasheminezhad A., Bahadori H. Seismic response of shallow foundations over liquefiable soils improved by deep soil mixing columns. *Computers and Geotechnics*. 2019;110:251–273. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2019.02.019

60. He B., Zhang J.-M., Wang W., Li R. Numerical analysis of LEAP centrifuge tests on sloping liquefiable ground: influence of dilatancy and post-liquefaction shear deformation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2020; 137:106288. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2020.106288

61. Lim H., Jeong S. Effect of bedrock acceleration on dynamic and pseudo-static analyses of soil-pile systems, *Computers and Geotechnics*. 2020;126:103657. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103657

62. Zou Y.X., Zhang J. M., Wang R. Seismic analysis of stone column improved liquefiable ground using a plasticity model for coarse-grained soil. *Computers and Geotechnics*.2020;125:103690. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020. 103690

63. Hu X., Zhang R., Ren X., Pan C., Zhang X., Li H. Simplified design method for structure with viscous damper based on the specified damping distribution pattern. *Journal of Earthquake Engineering*. 2020;26(3):1367–1387. https://doi.org/10.1080/13632469.2020.1719239

64. Kuzhakhmetova E.R., Sutyrin V.I. Study of the strength of a reinforced concrete cylindrical shell in a large span building (structure) with a cylinder-slab-cable-stayed roof. *AIP Conference Proceedings 2497*: Proceedings of the ii scientific conference "Modelling and methods of structural analysis"; 2021, 11–13 November; Moscow. Russian Federation 2023. Article 020058. https://doi.org/10.1063/5.0103610


Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-491-501 UDC 69.04 EDN: HSRVMZ

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Algorithm for calculating the problem of unilateral frictional contact with an increscent external load parameter

Alexander N. Popov[®], Alexander D. Lovtsov[®]

Pacific National University, Khabarovsk, Russian Federation SanyaPov@mail.ru

Article history

Received: June 12, 2023 Revised: August 27, 2023 Accepted: September 15, 2023

Conflicts of interest The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. The subject of the study is the contact interaction of deformable elements of building structures. Variational formulations are usually used to solve the problem of modeling of unilateral interaction taking into account friction in the contact zone. An alternative to the popular formulations of discretized problems and iterative methods for their solution is proposed. The problem of contact with friction is expanded in the form of a linear complementarity problem (LCP). To solve the linear complementarity problem, the Lemke method with the introduction of an increasing parameter of external loading is used. The proposed approach solves the degenerated matrix in a finite number of steps, while the dimensionality of the problem is limited to the area of contact. To solve the problem, the initial table of the Lemke method is generated using the contact matrix of stiffness and the contact load vector. The unknowns in the problem are mutual displacements and interaction forces of contacting pairs of points of deformable solids. The proposed approach makes it possible to evaluate the change in working schemes as the parameter of external load increases. The features of the proposed formulation of the problem are shown, the criteria for stopping the stepwise process of solving such problems are considered. Model examples for the proposed algorithm are given. The algorithm has shown its efficiency in application, including for complex model problems. Recommendations on the use of the proposed approach are given.

Keywords: building structures, structural nonlinearity, unilateral links, linear complementarity problem, numerical models, finite element method, increasing load

For citation

Popov A.N., Lovtsov A.D. Algorithm for calculating the problem of unilateral frictional contact with an increscent external load parameter. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2023;19(5):491-501. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-491-501

© Popov A.N., Lovtsov A.D., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Alexander N. Popov, Lecturer-researcher at the Higher school of Industrial and Civil Engineering, Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6762-5476; E-mail: SanyaPov@mail.ru

Alexander D. Lovtsov, Dr. of Engineering, Professor at the Higher school of Industrial and Civil Engineering, Pacific State University, Khabarovsk, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5050-466X; E-mail: lad@pnu.edu.ru

Алгоритм расчета задачи одностороннего контакта с трением с нарастающим параметром внешней нагрузки

А.Н. Попов ВМ, А.Д. Ловцов

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Российская Федерация SanyaPov@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 12 июня 2023 г. Доработана: 27 августа 2023 г. Принята к публикации: 15 сентября 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Предметом исследования является контактное взаимодействие деформируемых элементов строительных конструкций. Для решения задачи моделирования одностороннего взаимодействия с учетом трения в зоне контакта чаще всего используются вариационные постановки. Предлагается альтернатива популярным постановкам дискретизованных задач и итерационным методам их решения. Задача контакта с трением расширяется в виде линейной задачи дополнительности. Для решения линейной задачи дополнительности применяется метод Лемке с введением нарастающего параметра внешнего нагружения. В предлагаемом подходе решается вырожденная матрица за конечное число шагов, при этом размерность задачи ограничена областью контакта. Для решения задачи формируется начальная таблица метода Лемке с использованием контактной матрицы жесткости и контактного грузового вектора. В качестве неизвестных в задаче выступают взаимные перемещения и усилия взаимодействия контактирующих пар точек, деформируемых тел. Предлагаемый подход позволяет оценить смену рабочих схем по мере роста параметра внешнего воздействия. Показаны особенности предлагаемой постановки задачи, рассмотрены критерии остановки шагового процесса решения таковых задач. Приведены модельные примеры для предлагаемого алгоритма. Алгоритм показал свою эффективность в применении, в том числе и на сложных модельных задачах. Даны рекомендации по использованию предлагаемого подхода.

Ключевые слова: строительные конструкции, конструктивная нелинейность, односторонние связи, линейная задача дополнительности, численные модели, метод конечных элементов, нарастающая нагрузка

Для цитирования

Popov A.N., Lovtsov A.D. Algorithm for calculating the problem of unilateral frictional contact with an increscent external load parameter // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 491–501. http://doi.org/ 10.22363/1815-5235-2023-19-5-491-501

1. Introduction

One of the important tasks of the strength calculation of building structures is the task of determining the parameters of the stress-strain state (SSS) while changing the parameters of external loading [1]. The object of this study is the contact interaction of deformable building structures under increasent external load.

Constructively nonlinear problems have been popular since 1970s in works of Kravchuk, Bathe, Kikuchi, Glowinski [2–6]. Klarbring, Hlaváček and Cottle considered variational formulations [7–10]. A step-by-step algorithm is used in the most popular software systems in case of force incrimination problems for non-linear calculation of building structures. According to this algorithm the loading process is divided by the user into several stages (the method of successive loadings). Iterative methods are used at each stage of loading to determine the increments of the structure's SSS parameters. It is necessary to solve the problem of contact interaction in these problems at each stage. Such tasks have been popular since the 1980s [11–15] and have

Попов Александр Николаевич, преподаватель-исследователь высшей школы промышленного и гражданского строительства, Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-6762-5476; E-mail: SanyaPov@mail.ru

Ловцов Александр Дмитриевич, доктор технических наук, профессор высшей школы промышленного и гражданского строительства, Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-5050-466X; E-mail: lad@pnu.edu.ru

maintained their popularity until the present [16–20]. These problems are stated in the form of variational inequalities [21–24], and the following numerical methods were used to solve them: Lagrange multipliers [25–27], penalty functions [28; 29] and their combinations [30–32]. And other methods using contact finite elements [32–33]; quadratic programming approach [34–36]; finite element methods (Spigot-algorithms) [37–39]; and other [40–46].

The user should specify the following parameters at the stage of a problem modeling:

- 1. The final value of the external load.
- 2. The number of loading stages (the value of load increment).
- 3. Method for solving the contact problem and its parameters.

The purpose of this work is to create an algorithm that allows tracking the change of working schemes at the parametric increment in external load. The problem expansion parameter, whose physical meaning was the "tightening weight" in contact pairs, was used in [47] in the algorithm for solving the linear complementarity problem (LPC). In this paper, it was proposed to take the external load growth parameter as the parameter of the problem expansion. This approach enables automating the process of load splitting into stages, within each of them a linear problem can be solved. The following tasks arising from this:

1. Program implementation of the algorithm for solving similar problems.

2. Description of the solution peculiarities.

3. Testing the algorithm.

2. Methods

The formulation of the calculation of frictional contact problems proposed below considers a node-to-node contact (contact pair). Let *m* denote the number of contact pairs. It is assumed that the points in each contact pair are connected by unilateral constraints. The constraint that is normal to the contact zone works only on compression and is enabled when these points are in contact and disabled otherwise. Tangential connection to the contact zone is enabled if the interaction forces are less than the ultimate friction forces and disabled if the interaction forces. This means that slippage of the contact pair points is not possible when the connection is on, whereas it is possible when the connection is off.

The following rule for the use of signs has been adopted:

> for forces and displacements normal to the contact surface: compressive force of interaction of points of the contact pair $x_{ni} > 0$; mutual displacement of points of the contact pair $z_{ni} > 0$ (Figure 1, *a*);

 \succ for forces and displacements tangential to the contact surface: if the points of the contact pair



Figure 1. Unilateral constraints. The signs' rule for interaction forces *x* and mutual displacements *z*

are conditionally separated normally to the contact zone, then the interaction forces $x_{\tau i} > 0$ will create a pair of forces with a clockwise moment; mutual displacement $z_{\tau i} > 0$, if it coincides in direction with $x_{\tau i} > 0$ (Figure 1, *b*, *c*).

Papers [47] and [48] proposed a LCP formulation for frictional contact considering initial gaps:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{n}} \\ \mathbf{x}_{\tau}^{+} \\ \mathbf{x}_{\tau}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} & \mathbf{R}_{\mathbf{n}\tau} & -\mathbf{R}_{\mathbf{n}\tau} \\ \mathbf{R}_{\tau\mathbf{n}} + f \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} & \mathbf{R}_{\tau\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}\tau} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} - f \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}\tau} \\ -\mathbf{R}_{\tau\mathbf{n}} + f \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}\tau} & \mathbf{R}_{\tau\tau} - f \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{n}\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\mathbf{n}} \\ \mathbf{z}_{\tau}^{+} \\ \mathbf{z}_{\tau}^{-} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{F}\mathbf{n}} - \mathbf{R}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} \cdot \mathbf{\eta} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{F}\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{\mathbf{F}\mathbf{n}} - \mathbf{R}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} \cdot \mathbf{\eta} - \mathbf{R}_{\mathbf{n}\tau} \cdot \mathbf{\eta} \\ -\mathbf{R}_{\mathbf{F}\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{\mathbf{F}\mathbf{n}} - \mathbf{R}_{\mathbf{n}\mathbf{n}} \cdot \mathbf{\eta}) + \mathbf{R}_{\mathbf{n}\tau} \cdot \mathbf{\eta} \end{bmatrix};$$
(1)
$$\mathbf{z}_{\mathbf{n}} \ge 0; \quad \mathbf{x}_{\mathbf{n}} \ge 0; \quad \mathbf{z}_{\mathbf{n}}^{T} \cdot \mathbf{x}_{\mathbf{n}} = 0; \\ \mathbf{x}_{\tau}^{+} \ge 0; \quad \mathbf{x}_{\tau}^{-} \ge 0; \quad \mathbf{z}_{\tau}^{+} \ge 0; \quad \mathbf{z}_{\tau}^{-} \ge 0; \quad \mathbf{z}_{\tau}^{+T} \cdot \mathbf{x}_{\tau}^{+} = 0; \quad \mathbf{z}_{\tau}^{-T} \cdot \mathbf{x}_{\tau}^{-} = 0, \end{cases}$$

Аналитические и численные методы расчета конструкций

493

where: $\mathbf{x_n}, \mathbf{z_n}$ are vectors $[m \times 1]$ of interaction forces and mutual displacements of contact pairs along the normal to the contact zone; $\mathbf{x_\tau} = (\mathbf{x_\tau^+} - \mathbf{x_\tau^-})/2$ is the vector $[m \times 1]$ of interaction forces of contact pairs along the tangent to the contact zone; $\mathbf{z_\tau} = (\mathbf{z_\tau^+} - \mathbf{z_\tau^-})/2$ is the vector $[m \times 1]$ of mutual displacements of contact pairs tangentially to the contact zone; $\mathbf{R_{nn}}$ is the contact stiffness matrix (CSM) $[m \times m]$ for the constraints in the contact pairs along the normal to the assumed contact zone from a single dislocation of nodes of contact pairs along the normal to the specified contact zone; $\mathbf{R_{\tau\tau}}$ is the CSM $[m \times m]$ for the links introduced in the contact zone; f is a coefficient of friction between the nodes of the contact pair; $\mathbf{R_{Fn}}$ is a contact load vector (CLV) $[m \times 1]$ for the links which are normal to the contact zone; $\mathbf{R_{F\tau}}$ is a CLV for the links which are tangential to the contact zone; $\mathbf{R_{F\tau}}$ is a CLV for the links which are tangential to the contact zone; $\mathbf{R_{F\tau}}$ is a CLV for the links which are tangential to the contact zone; are normal to the contact zone; $\mathbf{R_{F\tau}}$ is a CLV for the links which are tangential to the contact zone; are required to determine the parameters of the stress-strain state (SSS) in the contact pair: one is responsible for the interaction along the normal and two are responsible for the interaction along the tangent.

The system of equations and inequalities (1) can be written in the following reduced form:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{R}_{\mathbf{F}};$$

$$\mathbf{z} \ge 0; \ \mathbf{x} \ge 0; \ \mathbf{z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} = 0.$$
 (2)

It was assumed that the external influences are: force influence $\mathbf{R}_{\mathbf{f}}$, kinematic influence \mathbf{R}_{Δ} and temperature influence $\mathbf{R}_{\mathbf{t}}$. The external influence was divided as follows:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{f}} + \mathbf{R}_{\mathbf{A}} + \mathbf{R}_{\mathbf{f}} = \mathbf{R}_{\mathbf{c}} + p \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{v}},$$

where: p is the vector increment parameter; $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}, \mathbf{R}_{\mathbf{c}}$ are vectors of contact loads from any combination of external influences.

Therefore, assuming that $\mathbf{R}_{\mathbf{v}} = \mathbf{R}_{\mathbf{f}}$ and $\mathbf{R}_{\mathbf{c}} = \mathbf{R}_{\Delta} + \mathbf{R}_{\mathbf{t}} = 0$, the parametric incrimination of the force load is modeled. It is proposed to extend the formulation (2) by introducing the parameter p of force load increment:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} + p \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{v}};$$
$$\mathbf{z} \ge 0; \ \mathbf{x} \ge 0; \ \mathbf{z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} = 0; \ p \ge 0.$$

To solve the problem, we use the Lemke method [49], [50]. Then, the initial table of the Lemke method takes the form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{R} & -\mathbf{R}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ p \end{vmatrix} = 0,$$

where **E** is a diagonal identity matrix $[3m \times 3m]$.

To initialize the solution process (selection of the leading row), an artificial compression (tightening weight) pc of all unilateral links is introduced, and the initial table takes the form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{R} & -\mathbf{R}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ p \end{bmatrix} = pc \cdot \mathbf{e}, \qquad (3)$$

where: $\mathbf{e} = [1,1,...,1]$ is a vector with dimension $[3m \times 1]$.

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

There are peculiarities of the solution by the Lemke algorithm with an increasing parameter of the external influence. First, it is necessary to select $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}$ as the leading column. The leading row is chosen by the rule of minimum ratio. Then the standard steps of Lemke algorithm are performed. There are two criteria for stopping the stepped process of the solution:

Criterion 1. Suppose that at step k the parameter became more than one: p > 1. The criterion is used if it is necessary to obtain a solution for a given load value (the load at which the contact load vector $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}$ was formed). In order to get a solution to the linear complementarity problem (LCP) it is necessary to return to the previous step; take p out of the basis and determine the values of basis variables by the formula $-p \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{v}}$, where p = 1.

Criterion 2. Suppose that at step k a ray solution is obtained (including the first step of the algorithm) for any non-negative value of p_k . In this case, in order to get a solution to LCP it is necessary to take the parameter p out of the basis by choosing the corresponding leading line.

> If the leading element is not equal to zero, then p should be removed from the basis δ and the values of the basis variables should be determined by formula $-p \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{v}}$, where $p > p_k$. From physical point of view, the result obtained should be interpreted as impossibility to change the working scheme at further load increment. If the ray solution is obtained at $p_k < 1$, and the solution is to be obtained for a given load value, then the parameter p = 1.

> If the leading element is equal to zero, then removing the parameter p from the basis leads to the undefined basis variables. In this case, at the current step, the values of the basic variables should be obtained as: $-p \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{v}}$. From physical point of view, obtained result is interpreted as the transformation of the system into a mechanism in case of a further increment of the load. We obtain the ultimate value of the load parameter corresponding to the transition of the system into a mechanism.

3. Results and discussions

Many test problems have been solved to verify the algorithm's operation. Some of the problems with the description of the algorithm operation are given below.

Example 1. The scheme of the problem is a beam on three unilateral supports (Figure 2). The load is a vertical concentrated force in the middle of the right span. The algorithm with an increment external influence parameter is implemented within 2 steps. To initialize the stepped process, an artificial compression is introduced in each assumed contact pair $F_c = 1$.



Figure 2. Scheme of the beam with unilateral supports

Leading rows and columns are highlighted in gray in all the tables below, the initial table of the problem is shown in Table 1.

At the first step (Figure 3, *a*), the parameter increases to p=10.(6) (Table 2). At this value of the parameter of the external load, the moment of detachment of the left support occurs (x_{n1} is eliminated from the basis), which indicates that the interaction force x_{n1} is equal to zero.

At the second step, z_{n1} should be introduced into the basis. The components of the leading column are negative with the exception of two small positive values. These values are the result of round-off errors, so they are assumed to be equal to zero. Thus, there are no positive components in the leading column, so it means that a ray solution is obtained. In this case, the ray solution can be represented as the impossibility of changing the working scheme with further increase of the load parameter (Figure 3, b). To obtain the solution, the parameter p should be taken out of the basis, and only the variable part of the external influence should be considered: $p \cdot F_v$; $F_c = 0$. The final table is shown in Table 3.

For this example, it is possible to obtain the solution of the problem for any value of parameter p. For example: for load $p \cdot F_v = 1$, after removing the parameter p from the basis, it is possible to take p = 1 and obtain the basis variables respectively $-1 \cdot \mathbf{R_v} = 1$ (Figure 3, c). As can be seen from Table 2, round-off errors can lead to values that are close to zero. In order to stop the algorithm in time, a user-defined parameter of the problem accuracy [47] is introduced.

Initial table of Lemke algorithm

Basis	X _{n1}	X _{n2}	X _n 3	$x_{\tau 1}{}^+$	$x_{\tau 2}^+$	$X_{\tau 3}^+$	$x_{\tau 1}$	$X_{\tau 2}$	$X_{\tau 3}$	Z _{n1}	\mathbf{Z}_{n2}	Z _n 3	$z_{\tau 1}^+$	$z_{\tau 2}^+$	$Z_{\tau 3}^+$	$z_{\tau 1}$	$\mathbf{Z}_{\tau 2}^{-}$	Z ₇₃ -	pRv	Rc	Min ratio
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.1875	0.375	-0.1875	0	0	0	0	0	0	0.09375	1	10.6666
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.375	-0.75	0.375	0	0	0	0	0	0	-0.688	1	
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0.1875	0.375	-0.1875	0	0	0	0	0	0	-0.4063	1	
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.1125	0.225	-0.1125	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0.05625	1	17.7777
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.225	-0.45	0.225	0.5	-1	0.5	-0.5	1	-0.5	-0.413	1	
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.1125	0.225	-0.1125	0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	-0.2438	1	
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.1125	0.225	-0.1125	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	0	0.05625	1	17.7777
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.225	-0.45	0.225	-0.5	1	-0.5	0.5	-1	0.5	-0.413	1	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-0.1125	0.225	-0.1125	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	-0.2438	1	

Table for Step 1 of Lemke algorithm

Basis	Xn1	Xn2	Xn3	$X_{\tau 1}^+$	$X_{\tau 2}^+$	$X_{\tau 3}^+$	Xτ1 ⁻	$X_{\tau 2}$	Xτ3 ⁻	Zn1	Zn2	Zn3	$Z_{\tau 1}^+$	$Z_{\tau 2}^+$	$Z_{\tau 3}^+$	Z ₁	Ζτ2	Ζτ3	pRv	Rc	Min ratio
19	10.667	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	4	-2	0	0	0	0	0	0	1	10.667	
1	7.3333	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	8.3333	
2	4.3333	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	5.3333	
3	-0.6	0	0	1	0	0	0	0	0	1E-17	0	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0	0.4	
4	4.4	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.6	1.2	-0.6	0.5	-1	0.5	-0.5	1	-0.5	0	5.4	
5	2.6	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1.2	-1	0	0.5	-1	0	-1	0.5	0	3.6	
6	-0.6	0	0	0	0	0	1	0	0	1.4E-17	0	0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	0	0	0.4	
7	4.4	0	0	0	0	0	0	1	0	-0.6	1.2	-0.6	-0.5	1	-0.5	0.5	-1	0.5	0	5.4	
8	2.6	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1.2	-1	0	-1	0.5	0	0.5	-1	0	3.6	

Table 3

Table for Step 2 of Lemke algorithm

Basis	Xn1	Xn2	Xn3	$X_{\tau 1}^+$	$X\tau 2^+$	$X_{\tau 3}^+$	X ₇₁ -	Xτ2 ⁻	Xτ3 ⁻	Zn1	Zn2	Zn3	$Z_{\tau 1}^+$	$Z_{\tau 2}^+$	$Z_{\tau 3}^+$	$Z_{\tau 1}$	$Z_{\tau 2}^{-}$	$Z_{\tau 3}$	pRv	Rc	Min ratio
9	-5.33333	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	-0.5	-5.33333	
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4E-15	-7E-16	0	0	0	0	0	0	-0.5	3	
2	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-3.1E-15	1.33E-15	0	0	0	0	0	0	-0.5	-1.8E-15	
3	-0.6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3E-17	-1E-17	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	7E-18	0.4	
4	1.2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3E-15	-3E-16	0.5	-1	0.5	-0.5	1	-0.5	-0.3	2.2	
5	-0.6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-2E-15	8E-16	0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	-0.3	0.4	
6	-0.6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3E-17	-0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	0	7E-18	0.4	
7	1.2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3E-15	-0	-0.5	1	-0.5	0.5	-1	0.5	-0.3	2.2	
8	-0.6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-2E-15	8E-16	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	-0.3	0.4	

Table 1

Table 2

Table 4

Example 2. An analytical solution of the following frictional contact problem at known friction limit forces was obtained in [1]. A cantilevered beam of length L=260 m was considered, which was placed on a rigid base (Figure 4, *a*). The load is a constant pressing vertical uniformly distributed load q = 3975 N/m, the longitudinal force at the right end $F_v = 243750N$ was considered as a load with increasing parameter.

The analytical solution is compared with the numerical solution obtained by the proposed method. The foundation is modeled by a set of discrete rigid supports. A plane frame finite element (FE) with three degrees of freedom at a node is used to model the console. The cantilevered beam is divided into n = 10 elements. The FE nodes contact the supports according to the Coulomb friction scheme. The concentrated vertical pressing force in the node is

$$F_c = q \cdot \frac{L}{n} = 114833.33 N$$
.

The friction coefficient is assumed to be f = 0.3.

The results for the longitudinal displacements of the beam are shown in Figure 4, *b*.

The dependence of the error on the number of accepted elements is shown in Table 4. The error is calculated by the formula:

$$u_{err} = abs(analytical - numerical)/analytical$$
.

Due to round-off errors, there is no clear correlation.

Error calculation									
п	5	10	20	40	80	160			
U, error, %	0.016	0.085	0.036	0.91	0.021	0.84			

Example 3. The problem of plane deformation of a sheet pile wall in soil with an underlying layer of rocky soil is considered (Figure 5). The sheet pile wall interacts with the soil on its two sides according to the Coulomb friction scheme. The sheet pile wall and the soil are conventionally separated in Figure 5. A horizontal concentrated force at the top of the sheet pile wall is taken as a variable load, which is affected by the increasing external load parameter; the dead weight of the soil is not considered. Horizontal displacements for the soil are forbidden on the sides, vertical and horizontal displacements are forbidden at the base, and the pile has a hinge immobile support at the base.

A frame element of plane problem with 3 degrees of freedom at a node is used to model the sheet pile wall, and a 4 node element of plane problem of elasticity theory is used for soil. The coefficient of friction between steel and soil is assumed to be f = 0.4.



Figure 3. Mutual displacements (z) and forces of interaction (x) in a beam



Figure 4. The console scheme and results



Figure 5. Scheme of sheet piling in soil

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

The area of cross section of one meter of sheet pile is $Ap = 1.831 \cdot 10^{-2} m^2$, modulus of elasticity is $Ep = 2 \cdot 10^{11} Pa$, moment of inertia $I_x = 1.016 \cdot 10^{-5} m^4$. For soil modulus of elasticity is $E = 4.5 \cdot 10^7 Pa$, Poisson's ratio is $\mu = 0.27$, soil thickness is t = 1 m.

In this example, the external load parameter increases until a ray solution is obtained at $p \cdot F_v = 213518$ N. The zones of sheet pile detachment from soil appear at the top of the sheet to the left and at the bottom of the sheet pile to the right. Zones of contact appear at the top of the sheet pile to the right and at the bottom of the sheet pile to the left. In this case, the adhesion zone occurs only on the left side in two nodes. On the right, the soil slides along the sheet pile (Figure 6).



Figure 6. Results for Problem 3. Interaction forces x, mutual displacements z

It should be noted that according to the results of solving the testing problems, the following feature of the algorithm was revealed. During the step-by-step process of the Lemke algorithm, the problem of comparison with zero arises. The occurrence of small values is due either to the "physics" of the problem (small load increment leading to a change in the working scheme of the structure) or to round-off errors. This leads to the problem of finding a criterion for the difference of these small values from zero. For this purpose, a single artificial parameter for the accuracy of stopping the step-by-step process was introduced. It determines how much the obtained value of the ultimate desired external load $p \cdot F_v$ will differ from the exact value within the framework of the discretized problem.

The necessity of comparison with zero appears, as a rule: 1) at the last stage if several variables, including the parameter p, tend to leave the basis simultaneously; 2) in the case if the values are close to zero in the leading column or close to zero and negative in the load column. In the first case, one should act according to *Criterion 2* for stopping the step-by-step process. In the second case, small values are interpreted as the result of round-off errors and should be assumed to be zero. It has been experimentally determined that the optimum range for the value of the parameter is from 10^{-14} to 10^{-4} in the most difficult cases. This describes an absolute error in external load increment parameter.

The examples presented in the paper have been selected, among other reasons, to show the effect of round-off errors on the interpretation of the algorithm's solution results. Thus, in *Example 1* (Table 2) small values appeared in the leading column, and in *Example 2* (Table 4) the tendency of the numerical solution to the

analytical one is not monotonous. due to rounding errors. The value of the external load that gives the ray solution in Example 3 due to the accumulation of round-off errors, it was necessary to decrease the parameter for stopping the step process to 10^{-4} , which did not affect the accuracy of the solution.

4. Conclusions

An algorithm for tracking the change of working schemes at parametric increment of external load for structurally nonlinear contact problems with friction has been developed. The algorithm has shown its effectiveness in solving problems with large contact interaction forces. The physical meaning of the algorithm is a sequential change of working schemes (differing one from another by switching of unilateral constraints) at parametric increment of force load. This enables to automate the process of load dividing into stages, within each of which a linear problem is solved. The use of the proposed approach makes it possible to fulfill strictly the condition of mutual non-penetration of contacting bodies. However, if there is a frequent change of working schemes with a small increase in the parameter of external influence, then this leads to the accumulation of round-off errors and to the complication of determining of the criterion for stopping the step process. The algorithm shows good results for problems with a small contact area and large interaction forces in the assumed contact area. The accuracy of calculating the results remains high enough even in difficult conditions for the algorithm.

In the process of the work the following tasks have been fulfilled:

1. A Python program has been written that implements the Lemke algorithm with an increment parameter of external influence.

2. A number of features of the algorithm solution have been described, i.e., the beginning of the step process of the solution, its completion and interpretation.

3. The process of solution has been shown and described for a number of testing problems. The peculiarities of the algorithm operation have been identified and shown in examples.

References

1. Migórski S. Optimal Control of History-Dependent Evolution Inclusions with Applications to Frictional Contact. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2020;185:574–596. https://doi.org/10.1007/s10957-020-01659-0

2. Kikuchi N., Oden J.T. *Contact Problems in Elasticity*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. 1988. https://doi.org/10.1137/1.9781611970845

3. Duvaut G., Lions J.-L. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg; 1976. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66165-5

4. Glowinski R., Lions J.-L., Trémolières R. Numerical Analysis of Variational Inequalities. Elsevier Science; 1981. https://doi.org/10.1016/S0168-2024(08)70201-7

5. Kravchuk A.S. The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009;73(3):351–357. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech. 2009.07.004

6. Bathe K.J., Chaudhary A.A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1985;21:65–88. https://doi.org/10.1002/nme.1620210107

7. Klarbring A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1986;58:175–200. https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90095-2

8. Klarbring A. On discrete and discretized non-linear elastic structures in unilateral contact (stability, uniqueness and variational principles). *International Journal of Solids and Structures*. 1988;24(5):459–479. https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90002-9

9. Hlaváček J., Haslinger J., Necas J., Lovishek J. Solution of Variational Inequalities in Mechanics. New York: Springer; 1986. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1048-1

10. Cottle R.W., Giannessi F., Lions J.- L. Variational Inequalities and Complementary Problems in Mathematical Physics and Economics. New York: John Wiley; 1979.

11. Eck C., Jarusek J., Krbec M. Unilateral Contact Problems. New York: CRC Press; 2005. https://doi.org/10.1201/ 9781420027365

12. Reclitis G., Raivindran A., Regsdel K. *Optimization in the technique*. In 2 books, Part. 2. Moscow: Mir Publ.; 1986. Available from: http://padabum.com/d.php?id=39920 (Accessed 12.03.2023)

13. Panagiotopoulos P.D. Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Nonconvex Energy Functions. Birkhäuser: Boston-Base-Stuttgart; 1985. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5152-1

Аналитические и численные методы расчета конструкций

14. Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J. Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer Netherlands. 2007. Vol. 147. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6377-0

15. Mitra G., Cottle R.W., Giannessi F., Lions J.L. Variational Inequalities and Complementarity Problems — Theory and Application. *The Journal of the Operational Research Society*. 1981;32(9):848. https://doi.org/10.2307/2581414

16. Acary V., Brémond M., Huber O. On solving contact problems with coulomb friction: Formulations and numerical comparisons. *Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics: Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics.* 2018:375–457. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75972-2_10

17. Noor M.A., Noor K.I., Rassias M.T. New Trends in General Variational Inequalities. Acta Appl Math. 2020; 170(1):981–1064. https://doi.org/10.1007/S10440-020-00366-2/TABLES/3

18. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M. *Contact Mechanics Interaction*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2001. (In Russ.) Available From: https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_460?FILTER_ID=23@2. (accessed 12.03.2023).

19. Raous M. Art of Modeling in Contact Mechanics. In: *The Art of Modeling Mechanical Systems*. Springer. 2016;570:203–276. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40256-7_4

20. Sofonea M., Matei A. *Mathematical Models in Contact Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press; 2012. https://doi.org/10.1017/CBO9781139104166

21. Souleiman Y., Barboteu M. Numerical Analysis of a Sliding Frictional Contact Problem with Normal Compliance and Unilateral Contact. *Open Journal of Modelling and Simulation*. 2021;9:391–406. https://doi.org/10.4236/ojmsi. 2021.94025

22. Sofonea M., bin Xiao Y. Well-Posedness of Minimization Problems in Contact. Journal of Optimization Theory and Applications. 2021;188(3):650–672. https://doi.org/10.1007/s10957-020-01801-y

23. Sofonea M., bin Xiao Y. Weak formulations of quasistatic frictional contact problems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul.* 2021;101:105888. https://doi.org/10.1016/J.CNSNS.2021.105888

24. Sofonea M., Shillor M. Tykhonov Well-Posedness and Convergence Results for Contact Problems with Unilateral Constraints. *Technologies*. 2021;9(1):1. https://doi.org/10.3390/TECHNOLOGIES9010001

25. Leturcq B., Tallec P. le, Pascal S., Fandeur O., Pacull J. NTFA inspired model order reduction including contact and friction. *HAL open science*. 2021. Available from: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03202024 (accessed: 12.03.2023).

26. Antolin P., Buffa A., Fabre M., Fabre M.A. A priori error for unilateral contact problems with Lagrange multipliers and IsoGeometric Analysis. *HAL open science*. 2018. Available from: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01710816 (accessed: 12.03.2023).

27. Parisch H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis. Int Journal Numerical Methods in Engineering. 1989;28(8):1803–1812. https://doi.org/10.1002/nme.1620280807

28. Sofonea M., Souleiman Y. Analysis of a sliding frictional contact problem with unilateral constraint. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017;22(3):324–342. https://doi.org/10.1177/1081286515591304

29. Lu L., Li L., Sofonea M. A generalized penalty method for differential variational-hemivariational inequalities. *Acta Mathematica Scientia*. 2022;42(1):247–264. https://doi.org/10.1007/S10473-022-0114-Z

30. Arghir M., Benchekroun O. A simplified structural model of bump-type foil bearings based on contact mechanics including gaps and friction. *Tribol Int.* 2019;134:129–144. https://doi.org/10.1016/j.triboint.2019.01.038

31. Peng L., Feng Z.Q., Joli P., Renaud C., Xu W.Y. Bi-potential and co-rotational formulations applied for real time simulation involving friction and large deformation. *Computational Mechanics*. 2019;64(3):611–623. https://doi.org/10.1007/S00466-019-01672-9

32. Lukashevich A.A. Computational modelling of stiffness and strength properties of the contact seam. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;81(5):149–159. https://doi.org/10.18720/MCE.81.15

33. Lukashevich A.A., Rozin L.A. On the decision of contact problems of structural mechanics with unilateral constraints and friction by step-by-step analysis. *Magazine of Civil Engineering*. 2013;1(36):75–81. https://doi.org/10. 5862/MCE.36.9

34. Gholami F., Nasri M., Kövecses J., Teichmann M. A linear complementarity formulation for contact problems with regularized friction. *Mechanism and Machine Theory*. 2016;105:568–582. https://doi.org/10.1016/J.MECHMACHTHEORY. 2016.07.016

35. Tasora A., Anitescu M. A fast NCP solver for large rigid-body problems with contacts, friction, and joints. *Computational Methods in Applied Sciences*. 2009;12:45–55. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8829-2_3

36. Zheng H., Li X. Mixed linear complementarity formulation of discontinuous deformation analysis. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2015;75:23–32. https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2015.01.010

37. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Onischenko E.V. Analysis of Systems with Unilateral Constraints through the Finite Element Method in the Form of a Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*. 2016;150:1754–1759. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.166

38. Morozov N.F., Tovstik P.Y. Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between the layers. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2011;75(1):77–84. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.04.012

39. Berezhnoi D.V., Sagdatullin M.K. Calculation of interaction of deformable designs taking into account friction in the contact zone by finite element method. *Contemporary Engineering Sciences*. 2015;8(23):1091–1098. https://doi.org/ 10.12988/ces.2015.58237

40. Kudawoo A.D., Abbas M., De-Soza T., Lebon F., Rosu I. Computational Contact Problems: Investigations on the Robustness of Generalized Newton Method, Fixed-Point method and Partial Newton Method. *Int J for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2018;19(4):268–282. https://doi.org/10.1080/15502287.2018.1502217

41. Averin A.N., Puzakow A.Yu. Design of systems with uniateral constraints. *Structural mechanics and structures*. 2015;1(10):15–32. (In Russ.) Available from: http://nauteh-journal.ru/files/4403ce61-ea9d-4dcf-abbd-ac90a11aec39 (accessed: 12.04.2023).

42. Fabre M., Pozzolini C., Renard Y. Nitsche-based models for the unilateral contact of plates. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 2021;55:941–967. https://doi.org/10.1051/M2AN/2020063

43. Brogliato B., Kovecses J., Acary V. The contact problem in Lagrangian systems with redundant frictional bilateral and unilateral constraints and singular mass matrix. The all-sticking contacts problem. *Multibody System Dynamics*. 2020;48(2):151–192. https://doi.org/10.1007/S11044-019-09712-1

44. Streliaiev Yu.M. A nonlinear boundary integral equations method for the solving of quasistatic elastic contact problem with Coulomb friction. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2016;20(2):306–327. (In Russ.) https://doi.org/10.14498/vsgtu1471

45. Zhiltsov A.V. Modified duality scheme for numerical simulation of the contact between elastic bodies. *Mathematical notes of NEFU*. 2016;23(4):99–114. (In Russ.) Available from: http://www.mzsvfu.ru/index.php/mz/article/view/modified-duality-scheme-for-numerical-simulation-of-the-contact-between-elastic-bodies (accessed: 12.04.2023).

46. Landenberger A., El-Zafrany A. Boundary element analysis of elastic contact problems using gap finite elements. *Comput Struct*. 1999;71(6):651–661. https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00303-4

47. Popov A., Lovtsov A. Frictional contact problem in building constructions analysis. *Magazine of Civil Engineering*. 2020;100(8):1–11. https://doi.org/10.18720/MCE.100.1

48. Popov A N., Lovtsov A.D. Frictional contact in the linear complementarity problem with gaps account. *Structural mechanics and analysis of constructions*. 2021;297(4):36–43. https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.4.36.43

49. Lemke C.E. Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming. *Manage Sci.* 1965;11(7):681–689. https://doi.org/10.1287/mnsc.11.7.681

50. Lemke C.E. Some pivot schemes for the linear complementarity problem. *Complementarity and Fixed Point Problems*. 1978;7:15–35. https://doi.org/10.1007/bfb0120779



Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-502-509 UDC 69:502.131.1 EDN: HXKXDM

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Performance of reinforced concrete elements strengthened with carbon fiber CFRP at elevated temperatures

Hadeal H. Alzamili¹⁰, Asser M. Elsheikh^{1,2}¹⁰

¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation ² Mansoura University, Mansoura, Egypt delsheykh_am@pfur.ru

Article history

Received: May 29, 2022 Revised: August 24, 2023 Accepted: August 28, 2023

Conflicts of interest The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. The importance of the research topic is established by the problems that occur in structural buildings when exposed to fire accidents, where the concrete loses much part of its mechanical properties and therefore becomes out of service. Because reconstruction of damaged buildings has a high financial cost, it is necessary to focus on the restoration of damaged concrete members with performant techniques and proven efficiency in terms of increasing the strength of concrete and its resistance to high temperatures. The authors conduct a numerical investigation on the use of carbon fiber-reinforced polymer sheeting CFRP to restore various structural concrete elements such as beams, columns, and slabs damaged in fire accidents for two types of normal and high-strength concrete, in addition to studying the behavior of concrete after strengthening it with CFRP sheets. The results by showed that load capacity, stiffness index, and absorption energy index have been improved by using CFRP in comparison with undamaged and fire-damaged elements.

Keywords: Beam, column, slab, carbon fiber, concrete

For citation

Alzamili H.H., Elsheikh A.M. Performance of reinforced concrete elements strengthened with carbon fiber CFRP at elevated temperatures. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2023;19(5):502-509. http://doi.org/10.22363/ 1815-5235-2023-19-5-502-509

© Alzamili H.H., Elsheikh A.M., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Alzamili Hadeal Hakim, PhD student, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8109-3381; E-mail: HadealHakim8@gmail.com

Elsheikh Asser Mohamed, Assistant professor, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; Assistant professor, Department of Civil Engineering, Mansoura University, Mansoura, Egypt; ORCID: 0000-0002-1212-2924; E-mail: elsheykh_am@pfur.ru

Характеристики железобетонных элементов, усиленных углепластиком CFRP, при повышенных температурах

Х.Х. Альзамили¹⁰, А.М. Эльшейх^{1,2}⁰⊠

¹ Российский университет дружбы народов, *Москва, Российская Федерация* ² Мансура университет, *Мансура, Египет* Selsheykh am@pfur.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 29 мая 2023 г. Доработана: 24 августа 2023 г. Принята к публикации: 28 августа 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Актуальность темы исследования обусловлена проблемами, возникающими в несущих зданиях при пожарах, когда бетон теряет большую часть своих механических свойств и, следовательно, выходит из строя. Поскольку реконструкция поврежденных зданий требует высоких финансовых затрат, необходимо сосредоточиться на восстановлении поврежденных бетонных элементов с использованием надежных методов и доказанной эффективности с точки зрения восстановления прочности бетона и повышения устойчивости к высоким температурам. В исследовании численно исследуется использование углепластика CFRP, для восстановления различных структурных бетонных элементов, таких как балки, колонны и плиты, поврежденных в результате пожара, для двух типов нормального и высокопрочного бетона, а также изучается поведение бетона после укрепления его листами углепластика. Результаты показали, что несущая способность, индекс жесткости и индекс энергии поглощения были улучшены при использовании углепластика по сравнению с неповрежденными и поврежденными огнем элементами.

Ключевые слова: балка, колонна, плита, углепластик, бетон

Для цитирования

Alzamili H.H., Elsheikh A.M. Performance of reinforced concrete elements strengthened with carbon fiber CFRP at elevated temperatures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 502–509. http://doi.org/ 10.22363/1815-5235-2023-19-5-502-509

1. Introduction

Concrete is the most often used man-made material and the second most consumed substance in the world, next to water, due to its necessity for various construction applications and the long-term demand for them [1]. Concrete is a composite material comprised of various components, including aggregates, water, cement, and other cementitious elements as binder ingredients [2].

Concrete's preserved qualities after cooling from being subjected to high temperatures are typically referred to as residual properties. The period of exposure, the features, and the material composition of concrete can all have an impact on how these properties change significantly within the high temperature range associated with an exposed fire [3]. Compressive strength, tensile strength, elastic modulus, and stress-strain response are the principal mechanical parameters of concrete that are of interest after exposure to high temperatures. These characteristics are frequently used to evaluate how much strength concrete loses and degrades at high temperatures [4].

When heated to 300 °C, concrete loses around 25 % of its initial compressive strength, and when subjected to temperatures beyond 600 °C, it loses about 75 % [5; 6]. The tensile strength decreases in concrete with an increase in temperature [7]. The mechanical property of concrete that is commonly regarded as being most impacted by exposure to high temperatures is its modulus of elasticity. In comparison to compressive and tensile strength, the degradation of elastic modulus occurs much more quickly [8]. While considering the critical heating

Альзамили Хадиль Хаким, аспирант департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-8109-3381; E-mail: HadealHakim8@gmail.com

Эльшейх Ассер Мохамед, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; доцент департамента строительства, Университет Мансуры, Мансура, Египет; ORCID: 0000-0002-1212-2924; E-mail: elsheykh_am@pfur.ru

level for residual mechanical strength characteristics of fiber-reinforced concrete, Eidan et al. [9] showed that, at 400 °C, the residual factors for fiber-reinforced concrete are often better than those of plain concrete.

At high temperatures under 1000 °C, the compressive strength significantly decreased, but steel fiberreinforced concrete with a 1 % addition outperformed non-steel fiber-reinforced concrete [10]. Moghadam & Izadifard [11] compared the impact of steel fiber and glass fiber on the strength of concrete at high temperatures. While no chemical changes were observed at this temperature range, both for steel and glass fiber at tested temperatures up to 800 °C, they noticed that the compressive strength of normal, steel, and glass fiber concrete decreased as the temperature rose to 100 °C.

Fixing damaged concrete members frequently involves building an external reinforced concrete support or concrete jacket or epoxy-bonding metal plates for damaged component, among other methods [12]. Using a laminate made of fiber-reinforced composite materials, such as carbon and glass fiber-reinforced polymers, in place of the steel plates is a unique technology. In structural repairs and the restoration of reinforced concrete components, the use of high-performance fiber-reinforced cementitious composites has gained significance [13]. The CFRP has been extensively employed to strengthen various structural elements, such as beams, columns, and slabs, from the outside [14]. Due to the low weight, corrosion-resistance, and tensile strength of FRP materials, which were employed in the space industry in the 1970s, this application became quite popular. The RC columns are passively contained by the CFRP jacket, which is only stressed when a column is subjected to an additional axial force that produces dilatation. Several factors affect the degree of confinement and the overall improvement in strength of confined concrete columns' sizes, shapes, and fiber modulus, as well as their thickness and fiber rupture strain (circular, square, or rectangular) [15].

Several scholars, for example, Ashteyat et al. [16], Shehata et al. [17], and Mhanna et al. [18], have thoroughly studied carbon fiber-reinforced polymers. They investigated the effects of corner roundness, column height, cross-section form, layer count, and wrapping method (full or partial) on the strength and ductility of the RC column. They discovered that when the corner radius was rounded until it approached the circular section, and as the CFRP's thickness rose, the strength improved. When exposed to repeated loading, CFRP has the benefit of displaying a much higher tensile strength. They can also be easy to use on site without the need for specialized tools or labor and are highly resistant to corrosive effects due to the many properties of CFRP, including mechanical properties, spacing, dimensions, and configuration [16–18].

According to the previous analysis of the literature, it should be noted that while numerous studies have been conducted to examine the behavior of concrete members when exposed to fire, little is known about the behavior of these members when strengthened with CFRP. Hence, this study is devoted to the effectiveness of employing CFRP to repair damaged concrete elements.

2. Methodology

The obtained results from the numerical simulation for the beam, slab, and column under ambient temperatures, elevated temperatures, and, lastly, after strengthening the fire-damaged concrete element, will be included in this study. Each concrete element has two concrete strength types (normal 25 MPa and high 65 MPa), in addition to two thicknesses for CFRP. The simulations shall be divided into the referenced undamaged models, the fire-damaged models, and the strengthened models. ABAQUS offers a variety of material attributes that reflect how those materials behave under various simulations. The Poisson's ratio and the modulus of elasticity are two parameters that are frequently used to describe the elastic phase in isotropic materials. The concrete damaged plasticity model CDP is utilized in this study to characterize the concrete plastic phase because of its effectiveness in predicting the behavior of the concrete under a variety of conditions, including monolithic and repeated loadings, plain and reinforced concrete, and application, which depends on the material loading rate.

In this paper, the behavior of the various concrete elements under various thermal conditions and repair techniques will be presented and discussed in detail, showing the level of degradation and improvement in the elements' performance in terms of various flexural indices. Each concrete member category was designated according to the type of the element.

The concrete beam has a full-scale dimension of 5500 mm in length, 300 mm in width, and 500 mm in thickness, which is one of the three main concrete components that make up the majority of such constructions. The beam was strengthened with three steel bars, top and bottom, using 16 mm steel bars, stirrups along the length of the beam with consistent spacing using steel bars with a diameter of 10 mm each at 200 mm, and three

steel bars at the top and bottom using 16 mm steel bars. While for the concrete column element, the dimensions were selected to ensure that the column is classified as a short column, and the failure will occur due to concrete crushing.

The concrete column cross section dimensions are 300 mm by 400 mm and the length is 3000 mm; the longitudinal steel reinforcement was six bars with a diameter of 16 mm; and the transverse reinforcement (ties) was steel bars with a diameter of 10 mm and 200 mm spacing.

The slab's concrete proportions were also chosen to guarantee that its behavior qualifies as a two-way action slab. The slab's thickness was 200 mm, its aspect ratio was 1, and its dimensions were 5500 mm by 5500 mm. Two steel bar meshes (top and bottom) with a 12 mm diameter and a 200 mm spacing made up the embedded steel reinforcement.

Each member's concrete strength needs to be examined, as each type of concrete member shows a varied level of fire temperature decrease. The thermal destruction carried on by subjecting the faces of the concrete elements to the ISO-834 standards differs since there are four, three, and one subjected face in column, beam, and slab elements, respectively. The effects of high temperatures also differ depending on the type of concrete. The temperature starts to rise from the bottom of the exposed face [19].

3. CFRP material's characterization and modeling

In ABAQUS, the damage initiation criteria for fiber-reinforced composites are based on Hashin's theory (see Hashin and Rotem, 1973). The Hashin damage model predicts anisotropic damage in elastic-brittle materials [21]. It is primarily intended for use with fiber-reinforced composite materials and takes into account four different failure modes: fiber tension, fiber compression, matrix tension, and matrix compression [20]. Below are the equations for these failure modes (ABAQUS manual).

Fiber tensile failure criteria:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1u}^t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12u}}\right)^2 = 1(\sigma_1 > 0). \tag{1}$$

Fiber compressive failure criteria:

$$\frac{|\sigma_1|}{\sigma_{1u}^c} = 1(\sigma_1 < 0).$$
⁽²⁾

Matrix tensile failure criteria:

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2u}^t}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12u}}\right)^2 = 1(\sigma_2 > 0). \tag{3}$$

Matrix compressive failure criteria:

$$\left(\frac{\sigma_2}{2\tau_{23u}}\right)^2 + \left[\left(\frac{\sigma_{2u}^c}{2\tau_{23u}}\right)^2 - 1\right]\frac{\sigma_2}{\sigma_{2u}^c} + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12u}}\right)^2 = 1,\tag{4}$$

where σ_1 is the stress in direction 1, $\sigma_1 ut$ is the ultimate tensile stress in direction 1 (maximum tensile longitudinal strength), $\sigma_1 uc$ is the ultimate compressive stress in direction 1 (maximum compressive longitudinal strength), σ_2 is the stress in direction 2, $\sigma_2 ut$ is the ultimate tensile stress in direction 2 (maximum tensile transversal strength), $\sigma_2 uc$ is the ultimate compressive stress in direction 2 (maximum compressive transversal strength), σ_3 is the stress in 3 direction 3, τ_{13} is the shear stress in plane 1–3, τ_{23} is the shear stress in plane 2–3, $\tau_{23}u$ is the inter laminar ultimate shear strength in plane 2–3 (maximum shear strength in plane 2–3), τ_{12} is the shear stress in plane 1–2, $\tau_{12}u$ is the ultimate shear stress in plane 1–2 (maximum shear strength in plane 1–2).

Such a model requires defining the elastic properties matrix, such as the elastic and shear modulus for both directions (E1, E2, G11, G13, and G23), in addition to the longitudinal and transverse Poisson ratio of the

composite. The damage initiation can be defined by assigning the damage variables as listed in Table 1, they are the longitudinal and transverse values for tensile, compressive, and shear strength. In total, six parameters should be assigned to define the elastic properties in addition to six parameters to define the damage initiation response of the CFRP sheet.

Table 1

Parameter	Quantity
Elastic modulus of fabric, E_1 , E_2 , respectively	230 and 16.58GaPa
Longitudinal and transverse Poisson's ratio	0.30
Shear modulus G_{12} , G_{13} , G_{23} , respectively	9188.5, 12259 and 5911 MPa
Longitudinal tensile and compressive strength	3900 and 3120 MPa
Transverse tensile and compressive strength	210.6 and 64.5 MPa
Longitudinal and transverse shear strength	210.6 and 276.9 MPa

Elastic and failure parameters of used CFRP laminate [22]

In this study, the obtained results shall be presented in detail in the main part. This part includes the results of the numerical simulation after the verification process for the beam, slab, and column under different conditions, i.e., phase 1, under ambient temperatures; phase 2, under elevated temperatures, and finally, phase c, after strengthening of the fire damaged concrete element. The simulation works shall be divided into three phases or stages: Phase 1 for the referenced undamaged models, Phase 2 for the fire-damaged models, and finally Phase 3 for the strengthened models.

4. Analysis and Results

The indicators (ultimate load capacity, stiffness, ductility, and toughness) were tested at each of the three stages of work for all structural elements and for both types of concrete (NSC and HSC). The ultimate load capacity results of the reference and fired and after strengthening of normal and high strength concrete for three elements (beam, column, slab) are illustrated in Table 2. (R) refers to the reference undamaged concrete member, and (F) refers to the concrete member after exposure to fire.

Table 2

	Ultimate load capacity								
Structural member cases	Col	umn	Be	am	Slab				
	NSC	HSC	NSC	HSC	NSC	HSC			
R	4783.3	8480	2521.2	4181.4	5941.6	10190.5			
F	2582.6	7179.7	1236.8	2937.0	4143.7	8411.1			
CFRP 1.5	3040	9676	1787.2	3666.8	5080.7	9599.9			
CFRP 2.5	3826	10945	1975.8	4011.4	6405	11149.8			

The effect of high temperature on ultimate load capacity

In HSC beams, the enhancement in stiffness is higher than the fire-damaged beam by about 150%. While an enhancement in stiffness was found to be approximately the same in terms of NSC beams, in the case of the stiffness index in slabs, neither the NSC slabs nor the HSC slabs succeed in recovering the initial stiffness, so it can be concluded that even with increasing the CFRP sheet layer thickness to 166 %, the stiffness was the same. For NSC columns, increasing CFRP layer thickness by 166 % resulted in increasing the level of performance by 130 %. While for the HSC column, increasing the CFRP layer thickness by 166 % resulted in increasing the level of performance by 175 %. For both of the concrete strength classes, the stiffness index results of the reference, fired, and post-strengthened elements (beam, column, slab) are illustrated in Table 3.

	Stiffness index									
Structural	Co	lumn	Be	am	SI	Slab				
member cases	NSC	HSC	NSC	HSC	NSC	HSC				
R	790.67	1716.67	143.10	188.74	216.53	376.14				
F	249.3	1188.46	54.85	98.39	115.42	300.75				
CFRP 1.5	603	1798	56.36	155.61	115.87	299.65				
CFRP 2.5	699	1922	69.08	140.94	116.74	300.36				

The effect of high temperature on stiffness index

CFRP has a greater impact on the ductility performance of the beam in normal-strength concrete beams than in the high-strength class. On the other hand, for high-strength concrete, a 166 % increase in the thickness of the CFRP layer resulted in an 188 % increase in column ductility. Compared to normal-strength concrete, which received no benefit from the increase, for both normal and high-strength concrete slabs, the 1.5 mm CFRP layer thickness had the same efficiency. Compared to the 2.5 mm thickness, which showed that the improvement in the normal strength was nearly 1.5 times greater than the high-strength slab. These findings regarding the ductility index on the CFRP-treated columns reveal that a notable improvement has been made with this treatment, and full recovery of the column's ductility has been achieved for both types of concrete strength. The ductility index results of the reference and fired and after strengthening of normal and high-strength concrete for three elements (beam, column, slab) are illustrated in Table 4.

Table 4

	Ductility index								
Structural	Co	lumn	Be	am	Slab				
member cases	NSC	HSC	NSC	HSC	NSC	HSC			
R	2.07	1.68	2.63	2.79	4.54	3.46			
F	2.09	1.99	2.79	3.12	3.71	3.15			
CFRP 1.5	3.13	4.20	3.69	3.02	3.65	3.20			
CFRP 2.5	2.81	7.93	6.02	3.77	8.24	4.62			

The effect of high temperature on ductility index

The CFRP-strengthened members have sufficiently improved for normal-strength concrete when compared to the fire-damaged beam type. Furthermore, in high-strength concrete, the improved beams' toughness was approximately 138 % and 117 %, respectively, higher than the reference undamaged beam. In terms of columns, the absorption energy has been recovered successfully for both types of concrete strengths. Moreover, for normal and high-strength concrete slabs, respectively, increasing the CFRP layer thickness by 166 % increased the slab's capacity for absorption energy by around 581 and 238 %, respectively. The absorption energy index results of the reference and fired and after strengthening of normal and high-strength concrete for three elements (beam, column, slab) are illustrated in Table 5.

The effect of high temperature on absorption energy index

Table 5

	Absorption energy index									
Structural	Colu	mn	Be	am	Slab					
member cases	NSC	HSC	NSC	HSC	NSC	HSC				
R	39.199	51.335	84.352	189.001	513.427	591.032				
F	23.120	43.956	48.188	133.99	314.974	491.251				
CFRP 1.5	51.318	118	166.444	261.718	278.399	509.853				
CFRP 2.5	200.310	385	413.190	221.522	1617.729	1217.200				

Аналитические и численные методы расчета конструкций

5. Conclusion

The use of CFRP as effective reinforcement and repair techniques for improving the characteristics of various reinforced concrete members both before and after exposure to high temperatures was discussed in this research. We draw the following conclusions from this study:

1. HSC fire damaged columns, confined with 1.5 and 2.5 mm of CFRP layer thickness, improved the load capacity significantly by about 134 and 152 %, respectively. While NSC Column, confined with 1.5 and 2.5 mm CFRP layer thickness resulted in improving the load capacity significantly by about 117 and 148 % respectively.

2. The load carrying capacities were enhanced by about 144 and 159 % for 1.5 mm and 2.5 mm CFRP strengthened NSC beams, respectively. The 1.5 and 2.5 mm CFRP strengthened HSC beams have reflected load capacities higher than the fire damaged beam by about 124 and 136 %, respectively.

3. It can be noticed that the load capacity has been recovered in the NSC slab by about 122 % and fully recovered by 154 % for the 1.5 and 2.5 mm CFRP thickness layers, respectively. While in HSC slabs, load capacity has been recovered to about 114 % and fully recovered to 132 % for 1.5 and 2.5 mm CFRP thickness layers.

References

1. Miliozzi A., Chieruzzi M., Torre L. Experimental investigation of a cementitious heat storage medium incorporating a solar salt/diatomite composite phase change material. *Applied Energy*. 2019;250:1023–1035. http://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.05.090

2. Ni S., Gernay T. Predicting residual deformations in a reinforced concrete building structure after a fire event. *Engineering Structures*. 2020;202:109853. http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109853

3. Sharma N.K., Kumar P., Kumar S., Thomas B.S., Gupta R.C. Properties of concrete containing polished granite waste as partial substitution of coarse aggregate. *Construction and Building Materials*. 2017;151:158–163. http://doi.org/ 10.1016/j.conbuildmat.2017.06.081

4. Kodur V. Properties of concrete at elevated temperatures. *ISRN Civil Engineering*. 2014(2):1–15. http://doi.org/ 10.1155/2014/468510

5. Yonggui W., Shuaipeng L., Hughes P., Yuhui F. Mechanical properties and microstructure of basalt fibre and nano-silica reinforced recycled concrete after exposure to elevated temperatures. *Construction and Building Materials*. 2020;247(7): 118561. http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118561

6. Xie J., Zhang Z., Lu Z., Sun M. Coupling effects of silica fume and steel-fiber on the compressive behaviour of recycled aggregate concrete after exposure to elevated temperature. *Construction and Building Materials.* 2018;184:752–764. http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.07.035

7. Khaliq W., Waheed F. Mechanical response and spalling sensitivity of air entrained high-strength concrete at elevated temperatures. *Construction and Building Materials*. 2017;150:747–757. http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017. 06.039

8. Chen G.M., He Y.H., Yang H., Chen J.F., Guo Y.C. Compressive behavior of steel fiber reinforced recycled aggregate concrete after exposure to elevated temperatures. *Construction and Building Materials*. 2014;71:1–15. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.08.012

9. Eidan J., Rasoolan I., Rezaeian A., Poorveis D. Residual mechanical properties of polypropylene fiber-reinforced concrete after heating. *Construction and Building Materials*. 2019;198:195–206. http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat. 2018.11.209

10. Lau A., Anson M. Effect of high temperatures on high performance steel fibre reinforced concrete. *Cement and concrete research*. 2006;36(9):1698–1707. http://doi.org/10.1016/j.cemconres.2006.03.024

11. Moghadam M.A., Izadifard R.A. Effects of steel and glass fibers on mechanical and durability properties of concrete exposed to high temperatures. *Fire Safety Journal*. 2020;113(7):102978. http://doi.org/10.1016/j.firesaf.2020. 102978

12. Naqi A.W., Al-zuhairi A.H. Nonlinear Finite Element Analysis of RCMD Beams with Large Circular Opening Strengthened with CFRP Material. *Journal of Engineering*. 2020;26(11):170–183. http://doi.org/10.31026/j.eng.2020.11.11

13. Banerji S., Kodur V. Effect of temperature on mechanical properties of ultra-high performance concrete. *Fire and Materials*. 2022;46(1):287–301. http://doi.org/10.1002/fam.2979

14. Abadel A.A., Alharbi Y.R. Confinement effectiveness of CFRP strengthened ultra-high performance concrete cylinders exposed to elevated temperatures. *Materials Science-Poland*. 2021;39(4):478–490. http://doi.org/10.2478/msp-2021-0040

15. Mazzotti C., Bilotta A., Carloni C., Ceroni F., D'Antino T., Nigro E., Pellegrino C. Bond between EBR FRP and concrete. Design Procedures for the Use of Composites in Strengthening of Reinforced Concrete Structures: 2016; State-of-

the-Art Report of the RILEM Technical Committee 234-DUC. Springer Publ.; 2016:39–96. http://doi.org/10.1007/978-94-017-7336-2_3

16. Ashteyat A.M., Obaidat Y.T., Al-Btoush A.Y., Hanandeh S. Experimental and numerical study of strengthening and repairing heat-damaged RC circular column using hybrid system of CFRP. *Case Studies in Construction Materials*. 2021;15(6):e00742. http://doi.org/10.1016/j.cscm.2021.e00742

17. Shehata I.A., Carneiro L.A., Shehata L.C. Strength of short concrete columns confined with CFRP sheets. *Materials and structures*. 2002;35:50–58. http://doi.org/10.1617/13686

18. Mhanna H.H., Hawileh R.A., Abdalla J.A. Shear strengthening of reinforced concrete beams using CFRP wraps. *Procedia Structural Integrity*, 2019;17:214–221. http://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.08.029

19. Elsheikh A., Alzamili H.H. Post Fire Behavior of Structural Reinforced Concrete Member (Slab) Repairing with Various Materials. *Civil Engineering Journal*. 2023;9(8):2012–2031. http://doi.org/10.28991/CEJ-2023-09-08-013

20. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*. 1980;47(2):329–334. https://doi.org/10.1115/1.3153664

21. Hashin Z., Rotem A. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. *Journal of Composite Materials*. 1973;7(4):448-64. http://doi.org/10.1177/002199837300700404

22. Hochard C., Aubourg P.A., Charles J.P. Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure. *Composites science and technology*. 2001;61(2):221–230.



Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



РАСЧЕТ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-5-510-519 УДК 69:624.074:624.012.4 EDN: INGGHL

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Оболочки в форме алгебраических линейчатых поверхностей на ромбическом плане

Е.М. Тупикова

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация emelian-off@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 29 февраля 2023 г. Доработана: 14 мая 2023 г. Принята к публикации: 22 мая 2023 г.

Заявление о конфликте интересов Автор заявляет об отсутствии

конфликта интересов.

Аннотация. Одними из перспективных к внедрению в архитектурной и строительной практике объектов являются аналитически заданные формы конструкций в виде тонких упругих оболочек со срединной поверхностью в форме алгебраических линейчатых поверхностей на ромбическом плане на основе различных кривых. В частности, в данной работе рассматриваются три поверхности, имеющие одинаковые образующие линии каркаса из суперэллипсов с использованием каркасных кривых, имеющих вид ватерлинии, мидельшпангоута, килевой линии - линий, которые изначально были получены и применяются в судостроении. Рассмотрены формы сооружений на ромбовидном плане. В статье произведено геометрическое моделирование данных объектов, построение конечноэлементных моделей и их расчет. Проведено сравнение величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние для трех разных форм с одинаковым пролетом и стрелой подъема (вариантное проектирование с оптимальным выбором). С точки зрения теории представляется интересным результатом возможность построения трех разных поверхностей на одинаковом каркасе. С точки зрения прочностного анализа из трех полученных оболочек выбрана та, у которой наиболее равномерное распределение напряжений, как наиболее экономичная по затратам материала.

Ключевые слова: тонкая упругая оболочка, статический расчет, суперэллипс, метод конечного элемента

Для цитирования

Тупикова Е.М. Оболочки в форме алгебраических линейчатых поверхностей на ромбическом плане // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 510-519. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-510-519

© Тупикова Е.М., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Тупикова Евгения Михайловна, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-8742-3521; E-mail: emelian-off@yandex.ru

Shells in the form of algebraic ruled surfaces on a rhombic base

Evgenia M. Tupikova^{D⊠}

RUDN University, *Moscow, Russian Federation* emelian-off@yandex.ru

Article history Received: February 29, 2023 Revised: May 14, 2023 Accepted: May 22, 2023	Abstract. One of the promising objects for application in architectural and construction practice are analytically determined structural shapes in the form of thin elastic shells with a median surface in the form of algebraic ruled surfaces on a rhombic plan on the basis of various curves. In particular, this study considers three surfaces with identical framework forming lines of superellipses using framework curves that have the appearance of waterline,
Conflicts of interest The author declares that there is no conflict of interest.	midships section, and main buttock lines — lines that have been initially generated and used in shipbuilding. The shapes of structures on a rhombic base were considered. The study contains geometric modeling of such structures, creation of finite element models and their computation. A comparison of the values characterizing the stress-strain state for three different shapes with the same span and lifting arm (variant designing with optimized choice) has been carried out. From the theoretical point of view, the possibility of generating three different surfaces on the same frame seems to be an interesting result. From the viewpoint of strength analysis, one of the three obtained shells was chosen as it has the most uniform stress distribution, which is the most economical in terms of material cost. Keywords: thin elastic shell, static structural analysis, superellipse, finite element method

For citation

Tupikova E.M. Shells in the form of algebraic ruled surfaces on a rhombic base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):510–519. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-510-519

1. Введение

В настоящее время в связи с появлением новых материалов и технологий в строительстве стало возможно более широкое внедрение новых форм, в частности, в виде аналитических поверхностей. С появлением 3D-принтеров, различных добавок для бетонов с заданными характеристиками, существующими возможностями торкретирования, усовершенствования технологии тентовых сооружений многие архитекторы и проектировщики усиленно развивают тему поиска новых геометрических форм для решения как утилитарных, так и эстетических задач, с тем чтобы отобрать наиболее удачные оптимальные конфигурации сооружений для применения на практике. Получив уравнение новой поверхности, представляется интересным провести прочностной расчет для предварительного проектирования и анализа работы такой конструкции под нагрузкой. В [1] предложены для внедрения пять типов линейчатых алгебраических поверхностей с главным каркасом из трех суперэллипсов.

Суперэллипс представляет собой замкнутую кривую, состоящую из четырех дуг, симметричную относительно большой и малой полуосей [2]. Дуги могут быть выпуклыми или вогнутыми. Суперэллипс находится внутри прямоугольника. Явные и параметрические уравнения алгебраических поверхностей общего вида с главным каркасом из трех суперэллипсов получены в [3–5]. На основе этих уравнений, как частные случаи, получены линейчатые алгебраические поверхности.

Если задать плоские кривые главного каркаса поверхностей в виде:

> кривая 1 (ватерлиния в судостроении) расположена в плоскости z = 0:

$$|y|^r = W^r \left(1 - \frac{|x|^t}{L^t} \right),\tag{1}$$

> кривая 2 (мидельшпангоут в судостроении) расположена в плоскости x = 0:

$$|z|^n = T^n \left(1 - \frac{|y|^m}{w^m} \right),\tag{2}$$

РАСЧЕТ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Evgenia M. Tupikova, PhD, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8742-3521; E-mail: emelian-off@yandex.ru

> кривая 3 (килевая линия в судостроении) расположена в плоскости y = 0:

$$|z|^{s} = T^{s} \left(1 - \frac{|x|^{k}}{L^{k}}\right),\tag{3}$$

где для выпуклых кривых *r*, *t*, *n*, *m*, *s*, k > 1; для вогнутых кривых *r*, *t*, *n*, *m*, *s*, k < 1, то явные уравнения тройки алгебраических поверхностей с заданным каркасом (1)–(3) будут иметь вид [3]: с образующим семейством сечений x = const:

$$|z| = T \left(1 - |x|^k / L^k \right)^{1/s} \left[1 - |y/W|^m / (1 - |x/L|^t)^{m/r} \right]^{1/n},$$
(4)

с образующим семейством сечений y = const:

$$|z| = T(1 - |y|^m / W^m)^{1/n} \left[1 - |x/L|^k / (1 - |y/W|^r)^{k/t} \right]^{1/s},$$
(5)

и с образующим семейством сечений z = const:

$$|y| = W(1 - |z|^n / T^n)^{1/m} \left[1 - |x/L|^t / (1 - |z/T|^s)^{t/k} \right]^{1/r},$$
(6)

где — $L \le x \le L$, $-W \le y \le W$, $0 \le z \le T$.

Явные уравнения поверхностей (4)-(6) можно перевести в параметрическую форму задания:

$$x = x(u) = \pm uL, \quad y = y(u,v) = vW[1 - u']^{1/r}, \quad z = z(u,v) = T[1 - u^k]^{1/s}[1 - |v|^m]^{1/n},$$
(4a)

$$x = x(u,v) = vL[1-u^r]^{1/t}, \quad y = y(u) = \pm uW, \quad z = z(u) = T[1-u^m]^{1/n}[1-|v|^k]^{1/s},$$
(5a)

$$x = x(u,v) = vL[1-u^{s}]^{1/k}, \quad y = y(u,v) = \pm W[1-u^{n}]^{1/m}[1-|v|^{t}]^{1/r}, \quad z = z(u) = uT,$$
(6a)

где $0 \le u \le 1, -1 \le v \le 1; u, v$ — безразмерные параметры.

Если принять r = t = 1, n = m = 1, s = k = 1, то кривые (1)–(3) вырождаются в прямые линии, объединенные в ромб.

2. Метод

2.1. Цель исследования. Учитывая активное внедрение новых форм оболочечных структур [6; 7] в рамках современных архитектурных стилей оболочек (параметрическая [8], дигитальная [9], нелинейная [10] архитектура, архитектура многогранников [11], архитектура свободных форм и др.), появление новых поверхностей, пригодных для строительных большепролетных структур, приветствуется архитекторами [12]. В настоящей статье изучается возможность использования линейчатых алгебраических поверхностей с каркасом из двух ромбов и одной произвольной плоской кривой в архитектуре строительных оболочек. Дается информация о статическом расчете на прочность тонких оболочек в форме рассматриваемых линейчатых поверхностей.

2.2. Геометрические исследования поверхности для случая вырождения суперэллипсов (1) и (2) в ромбы. Рассмотрим линейчатые поверхности как частный случай поверхностей (4а)–(6а). Пусть суперэллипс (1) вырождается в ромб, то есть r = t = 1, суперэллипс (2) вырождается в прямые линии, то есть n = m = 1, а кривая (3) остается без изменений (рис. 1), тогда имеем три поверхности на плоском ромбическом плане:

$$z = T \left(1 - |x|^k / L^k \right)^{1/s} \left[1 - |y/W| / (1 - |x/L|) \right], \tag{7}$$

$$z = T(1 - |y|/W)[1 - |x/L|^{k}/(1 - |y/W|)^{k}]^{1/s},$$
(8)

$$|y| = W(1 - z/T) \left[1 - |x/L| / (1 - z^s/T^s)^{1/k} \right],$$
(9)

ANALYSIS OF THIN SHELLS



Рис. 1. Каркас рассматриваемых поверхностей **Figure 1.** The frame of the considered surfaces

Явные уравнения поверхностей (7)-(9) можно перевести в параметрическую форму задания:

$$x = x(u) = \pm uL, \quad y = y(u,v) = vW[1-u], \quad z = z(u,v) = T[1-u^k]^{1/s}[1-|v|] \text{ (рис. 2, a)},$$
(7a)

$$x = x(u,v) = vL[1-u], \quad y = y(u) = \pm uW, \quad z = z(u) = T[1-u][1-|v|^k]^{1/s}$$
 (рис. 2, б), (8a)

$$x = x(u,v) = vL[1-u^{s}]^{1/k}, \quad y = y(u,v) = \pm W[1-u][1-|v|], \quad z = z(u) = uT \text{ (рис. 2, 6)}.$$
(9a)



Рис. 2. Поверхности на плоском ромоическом плане: a — по уравнению 7а; δ — по уравнению 76; s — по уравнению 7в [1] **Figure 2.** Surfaces on a plane rhombic base: a — according to equation 7a; δ — according to equation 7b [1]

При построении поверхностей, показанных на рис. 2, предполагалось, что длина поверхности вдоль оси $Ox \ 2L = 12$ м, ее ширина вдоль оси $Oy \ 2W = 10$ м и высота T = 5 м. Все поверхности имеют s = k = 2. Следовательно, килевая линия является полуэллипсом.

Определим порядок алгебраических уравнений (7)–(9) при *s* = *k* = 2, для чего запишем эти уравнения в виде

$$\frac{z^2}{T^2} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{|x|}{L} + 2\frac{|y|}{W}\right) - \frac{y^2}{W^2} \left(1 + \frac{|x|}{L}\right) = 0,$$
(76)

РАСЧЕТ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

$$\frac{z^2}{T^2} \left(1 + \frac{|y|}{W} \right) - \left(1 - \frac{|y|}{W} \right)^2 \left(1 + \frac{|y|}{W} \right) + \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{|y|}{W} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{|y|}{W} - 1 + \frac{z}{T} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{T} \right) - \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{z}{T} \right) = 0.$$
(86)
(96)

Коэффициенты основных квадратичных форм A^2 , B^2 , *F*, *L*, *M*, *N* поверхностей (7а)–(9а) будут иметь вид для случая s = k = 2:

> для поверхности (7а):
$$A^{2} = L^{2} + v^{2}W^{2} + T^{2}(1-v)^{2}u^{2}/(1-u^{2}), F = T^{2}(1-v)u - vW^{2}(1-u), B^{2} = W^{2}(1-u)^{2} + T^{2}(1-u^{2}),$$

$$A^{2}B^{2} - F^{2} = L^{2}[W^{2}(1-u)^{2} + T^{2}(1-u^{2})] + W^{2}T^{2}(1-u)(v+u)^{2}/(1+u);$$

$$L = \pm TWL[(1-|v|)(1-u)/(1-u^{2})^{3/2}]/(A^{2}B^{2} - F^{2})^{1/2},$$

$$M = [\pm LTW(1-u)/(1-u^{2})^{1/2}]/(A^{2}B^{2} - F^{2})^{1/2}, N = 0;$$

> для поверхности (8a):
$$A^{2} = v^{2}L^{2} + W^{2} + T^{2}(1-v^{2}), F = (1-v)v(T^{2}-L^{2}), B^{2} = L^{2}(1-v)^{2} + T^{2}(1-v^{2})v^{2}/(1-v^{2})$$

$$\begin{aligned} A^2 &= v^2 L^2 + W^2 + T^2 (1 - v^2), F = (1 - u)v(T^2 - L^2), B^2 = L^2 (1 - u)^2 + T^2 (1 - u)^2 v^2 / (1 - v^2) \\ A^2 B^2 - F^2 &= (1 - u)^2 L^2 [W^2 + T^2 / (1 - v^2)], \\ L &= M = 0, N = \pm W L T (1 - u)^2 / [(A^2 B^2 - F^2)^{1/2} (1 - v^2)^{3/2}], \end{aligned}$$

▶ для поверхности (9а):

$$\begin{aligned} A^2 &= T^2 + W^2 (1 - |v|)^2 + v^2 L^2 u^2 / (1 - u^2), \ F &= W^2 (1 - |v|) (1 - u) - uv L^2, \ B^2 &= L^2 (1 - u^2) + W^2 (1 - u)^2, \\ L &= \pm WTL (1 - u) v / [(A^2 B^2 - F^2)^{1/2} (1 - u^2)^{3/2}], \\ M &= \pm WTL (u - 1) / [(A^2 B^2 - F^2)^{1/2} (1 - u^2)^{1/2}], \ N &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, криволинейные координаты u, v на рассматриваемых поверхностях будут неортогональными ($F \neq 0$) и для поверхностей (7a), (9a) — несопряженными ($M \neq 0$).

Площадь фрагмента или всей срединной поверхности оболочки можно вычислить по формуле

$$S = \iint \sqrt{A^2 B^2 - F^2} \, du dv.$$

Координатные линии v на поверхности, изображенной на рис. 2, a, будут совпадать с прямолинейными образующими поверхности (N = 0). Координатные линии v на поверхности, изображенной на рис. 2, e, тоже совпадают с прямолинейными образующими поверхности (N = 0), а координатные линии u на поверхности (8a) (рис. 2, δ) будут совпадать с прямыми на поверхности.

Гауссова кривизна $K = (LN - M^2)/(A^2B^2 - F^2)$ поверхности (8а) (рис. 2, б) равна нулю, следовательно — это конус. Кроме того, эта поверхность при T = L будет иметь F = 0, следовательно, криволинейная координатная сеть *u*, *v* на ней будет в линиях кривизн, так как F = 0 и M = 0. Такое положение возникнет, если килевую линию (3) взять в виде окружности.

Очевидно, что на основе поверхностей, изображенных на рис. 2, *a*, 2, *б* и 2, *в*, легко запроектировать тентовое покрытие, учитывая, что поверхность образована семейством прямых линий [13], а поверхность, представленная на рис. 2, *б*, полностью развертывается на плоскость.

Место рассматриваемых линейчатых поверхностей в классификации линейчатых поверхностей пока не определено [5–14]. Две поверхности, изображенные на рис. 2, *a*, и 2, *b*, можно отнести к коноидам [6–15], а поверхность на рис. 2, *б* — к коническим поверхностям.

На рис. 3 показаны поверхности, задаваемые уравнениями (7а)–(9а), с геометрическими параметрами: T = L = 6 м, W = 3 м, s = k = 0.8.

На рис. 4 показаны поверхности, задаваемые уравнениями (7б)–(9б), с геометрическими параметрами: L = 6 м, W = 6 м, T = 8 м, s = k = 1,5.



Рис. 3. Поверхности, соответствующие уравнениям (7а)–(9а), с параметрами T = L = 6 м, W = 3 м, s = k = 0,8Figure 3. Surfaces corresponding to equations (7а)–(9a) with parameters T = L = 6 m, W = 3 m, s = k = 0.8



Рис. 4. Поверхности, соответствующие уравнениям (7б)–(9б), с параметрами L = 6 м, W = 6 м, T = 8 м, s = k = 1,5Figure 4. Surfaces corresponding to equations (7б)–(96), with parameters L = 6 m, W = 6 m, T = 8 m, s = k = 1.5

2.3. Статический расчет оболочек со срединными поверхностями (7а)–(9а). Для расчета на собственный вес были выбраны три оболочки, построенные согласно формулам (7а)–(9а), с геометрическими параметрами T = L = 6 м, W = 3 м, s = k = 1,5 (см. рис. 4). Компьютерный комплекс ANSYS APDL хорошо зарекомендовал себя в ранее проведенных исследованиях автора [16; 17], поэтому он был выбран для исследования рассматриваемых линейчатых оболочек. Были построены модели оболочек в программе ANSYS APDL, к моделям приложена нагрузка в виде собственного веса. Характеристики материала: условный железобетон с модулем упругости E = 325000 МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.17$, плотность 2 500 кг/м³.

Толщина оболочки 12 см. Для построения модели применялись оболочечные конечные элементы типа shell181, конечные элементы другого типа применялись в [16–18].

3. Результаты и обсуждение

При расчете оценивались максимальный прогиб оболочки, нормальные напряжения по разным осям и эквивалентные напряжения.

3.1. Оболочка со срединной поверхностью, показанной на рис. 3, б (тип 1)

Максимальное эквивалентное напряжение 216 257 Н/м². Распределение напряжений отличается относительной равномерностью.

Изополя вертикальных перемещений представлены на рис. 5, а изополя эквивалентных напряжений на рис. 6.

3.2. Оболочка со срединной поверхностью, показанной на рис. 4 (тип 2). Получен максимальный прогиб 0,26×10⁻⁴ м, максимальное напряжение 313 726 Н/м².

Изополя вертикальных перемещений представлены на рис. 7, а изополя эквивалентных напряжений на рис. 8.

3.3. Оболочка со срединной поверхностью, показанной на рис. 4 (тип 3). Получены максимальные вертикальные перемещения 0,693×10⁻⁴ м.

Максимальные эквивалентные напряжения 401 179 Н/м².

Изополя вертикальных перемещений представлены на рис. 9, а изополя эквивалентных напряжений на рис. 10.



Рис. 5. Изополя перемещений вдоль оси *z*. Максимальный прогиб $0,347 \times 10^{-4}$ м. Figure 5. Isofields of deflections along the *z*-axis. The maximum deflection is 0.347×10^{-4} m.



Рис. 7. Изополя перемещений вдоль оси *z*. Максимальный прогиб $0,260 \times 10^{-4}$ m Figure 7. Isofields of deflections along the *z*-axis. The maximum deflection is 0.260×10^{-4} m



Рис. 9. Перемещения вдоль неподвижной оси *z*. Максимальный прогиб $0,219 \times 10^{-4}$ m. Figure 9. Isofields of deflections along the fixed *z*-axis. The maximum deflection is 0.219×10^{-4} m.



Рис. 6. Изополя эквивалентных напряжений Figure 6. Isofields of equivalent stresses



Рис. 8. Изополя эквивалентных напряжений. Figure 8. Isofields of equivalent stresses



Рис. 10. Изополя эквивалентных напряжений. Figure 10. Isofields of equivalent stresses

Сравнение показало, что все оболочки имеют выраженные максимумы перемещений. Максимальные напряжения у оболочек 2 и 3 сконцентрированы и значительно превышают средние по всей поверхности в верхней части около ребер, у оболочки 1 распределены более равномерно, что можно считать более выгодным для практического применения.

Наибольшие напряжения и прогибы получены в оболочке третьего типа, минимальные в оболочке второго типа.

В [19] отмечается, что все выдающиеся сооружения, построенные и получившие известность в последнее время, являются тонкими оболочками или оболочечными структурами. А.В. Коротич [20] предлагает использовать линейчатые поверхности в качестве модулей для создания новых сложных архитектурных форм. Вероятно, как вариант линейчатого модуля можно применить и рассматриваемые в данной статье линейчатые поверхности (7)–(9). Исследованиям оболочек, применяющихся в судостроении, посвящены статьи [21–25].

4. Заключение

1. Исследована геометрия одного из видов линейчатых алгебраических поверхностей на ромбовидном плане.

2. Доказано и проиллюстрировано, что, имея одинаковый главный каркас поверхности, можно построить три разные поверхности. Взяв эти три разные линейчатые поверхности в качестве срединных поверхностей тонких строительных оболочек, можно расширить число архитектурных форм, приемлемых для строительной практики.

3. Показана возможность статического расчета рассматриваемых оболочек и намечены пути выбора оптимальных форм линейчатых оболочек выбранного типа в автоматизированном режиме.

Список литературы

1. *Мамиева И.А.* Линейчатые алгебраические поверхности с главным каркасом из трех суперэллипсов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 4. С. 387–395. https://doi.org/10.22363/ 1815-5235-2022-18-4-387-395

2. Weisstein E.W. Superellipse // From MathWorld. A Wolfram Web Resource. URL: https://mathworld.wolfram.com/ Superellipse.html (дата обращения: 22.01.2023).

3. *Кривошапко С.Н.* Тентовая архитектура // Строительство и реконструкция. 2015. № 3 (59). С. 100–109. EDN: TQTUPZ

4. *Карневич В.В.* Построение гидродинамических поверхностей каркасами из кривых Ламе на примере корпуса подводной лодки // Вестник РУДН. Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 1. С. 30–37. https://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-1-30-37

5. Krivoshapko S.N. Tangential developable and hydrodynamic surfaces for early stage of ship shape design // Ships and Offshore Structures. 2022. Vol. 18. Issue 5. P. 660–668. https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2062165

6. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures // Строительство и реконструкция. 2019. № 5(85). С. 23–34. https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-85-5-23-34

7. Коротич А.В. Новые архитектурные формы линейчатых квазимногогранников // Архитектон: известия вузов. 2015. № 2 (50). С. 31–46. EDN: TZXCOB

8. *Мамиева И.А.* Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 150–165. EDN: KNYKTY

9. Shelden D.R. Digital surface representation and the constructability of Gehry's architecture // Thesis (PhD). Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Architecture, 2002. 340 p. URL: http://hdl.handle.net/1721.1/16899 (accessed: 22.01.2023)

10. Воличенко О.В. Концепции нелинейной архитектуры // Архитектон: известия вузов. 2013. № 44. С. 21–39. EDN: RRZMFX

11. *Hecker Z*. The cube and the dodecahedron in my polyhedric architecture // Leonardo. 1980. Vol. 13. P. 272–275. URL: https://muse.jhu.edu/article/599543/pdf (accessed: 22.01.2023).

12. Бондаренко И.А. Об уместности и умеренности архитектурных новаций // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 13–18. EDN: PCRPPG

13. *Кривошапко С.Н.* Гидродинамические поверхности // Судостроение. 2021. № 3. С. 64–67. http://dx.doi.org/ 10.54068/00394580_2021_3_64

14. Кривошапко С.Н. Классификация линейчатых поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2006. № 1. С. 10–20. EDN: JSISGF 15. *Krivoshapko S.N.* The application of conoid and cylindroid in forming of buildings and structures of shell type // Building and Reconstruction. 2017. № 5 (73). P. 34–44. EDN: ZUCUTX

16. *Тирікоva Е.М., Ershov М.Е.* Trial design of umbrella type shell structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 4. С. 414–424. https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-414-424

17. *Тупикова Е.М.* Выбор оптимальной оболочки покрытия на квадратном плане в виде поверхности переноса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 5. С. 367–373. http://doi.org/10. 22363/1815-5235-2019-15-5-367-373

18. Алёшина О.О., Иванов В.Н., Кахамарка-Сунига Д. Анализ напряженного состояния оболочки одинакового ската при действии равномерно распределенной касательной нагрузки различными методами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 51–62. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62

19. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Выдающиеся пространственные сооружения последних 20 лет // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2012. № 12. С. 8–14. EDN: UDJITZ

20. Коротич А.В. Архитектоника плотнейших пространственных компоновок из модулей с линейчатыми поверхностями // Дизайн и технологии. 2021. № 83-84 (125-126). С. 6-12. EDN: HPYTEX

21. *Kwang H.K.* A survey: application of geometric modeling techniques to ship modeling and design // International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2010. Vol. 2. P. 177–184. https://doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0034

22. Janson C., Larsson L. A method for the optimization of ship hulls from a resistance point of view // Twenty-First Symposium on Naval Hydrodynamic. Washington: The National Academies Press. 1997. P. 680–696. https://doi.org/ 10.17226/5870

23. *Tober H.* Evaluation of drag estimation methods for ship hulls. Stockholm: KTH Royal Institute of Technology, School of Engineering Sciences. 2020. 67 p.

24. Oetter R., Barry C.D., Duffty B., Welter J. Block construction of small ships and boats through use of developable panels // Journal of Ship Production. 2002. Vol. 18. Issue 02. P. 65–72. http://doi.org/10.5957/jsp.2002.18.2.65

25. *Perez-Arribas F., Fernandez-Jambrina L.* Computer-aided design of developable surfaces: Designing with developable surfaces. surfaces // Journal of Computers. 2018. Vol. 13. Issue 10. P. 1171–1176. http://doi.org/10.17706/jcp.13.10 1171–1176

References

1. Mamieva I.A. Ruled algebraic surfaces with main frame from three superellipses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):387–395. (In Russ.) https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-387-395

2. Weisstein E.W. Superellipse. From MathWorld. A Wolfram Web Resource. Available from: https://mathworld. wolfram.com/Superellipse.html (accessed: 22.01.2023)

3. Krivoshapko S.N. Tent Architecture. Building and reconstruction. 2015;3(59):100–109. EDN: TQTUPZ

4. Karnevich V.V. Generating hydrodynamic surfaces by families of Lame curves for modelling submarine hulls. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2022;23(1):30–37. https://doi.org/.22363/2312-8143-2022-23-1-30-37

5. Krivoshapko S.N. Tangential developable and hydrodynamic surfaces for early stage of ship shape design. *Ships and Offshore Structures*. 2022:18(5):660–668 https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2062165

6. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures. *Building and Reconstruction*. 2019;5(85):23–34. https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-85-5-23-34

7. Korotich A.V. New architectural forms of ruled quasipolyhedrons. *Architecton: Proceedings of higher education*. June 2015;50:31–46. (In Russ.) EDN: TZXCOB

8. Mamieva I.A. Analytical surfaces for parametric architecture in contemporary buildings and structures. *Academia*. *Archiecture and Construction*. 2020;1:150–165. (In Russ.) EDN: KNYKTY

9. Shelden D.R. *Digital surface representation and the constructability of Gehry's architecture*. Thesis (PhD). Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Architecture, 2002. Available from: http://hdl.handle.net/1721.1/16899 (accessed: 22.01.2023)

10. Volichenko O.V. Conceptions of nob-linear architecture. *Architecton: Proceedings of higher education*. 2013; 44:21–39 (In Russ.) EDN: RRZMFX

11. Hecker Z. The cube and the dodecahedron in my polyhedric architecture. *Leonardo*. 1980;13:272–275. Available from: https://muse.jhu.edu/article/599543/pdf (accessed: 22.01.2023)

12. Bondarenko I.A. On the appropriateness and moderation of architectural innovation. *Academia. Architecture and construction.* 2020;1:13–18. (In Russ.) EDN: PCRPPG

13. Krivoshapko S.N. Hydrodynamic surfaces. Sudostroeniye. 2021;(3):64-67. (In Russ.) http://doi.org/10.54068/ 00394580_2021_3_64 14. Krivoshapko S.N. Classification of ruled surfaces. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2006;1:10–20.

15. Krivoshapko S.N. The application of conoid and cylindroid in forming of buildings and structures of shell type. *Building and Reconstruction*. 2017;5(73):34–44. EDN: ZUCUTX

16. Tupikova E.M., Ershov M.E. Trial design of umbrella type shell. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(4):414–424. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-414-424

17. Tupikova E.M. Optimization study of shape of translational shell of square plan. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):367–373. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-367-373

18. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):51–62. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62

19. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. The outstanding spatial erections of the last 20 years. *Montazhnye i Spetsial'nye Raboty v Stroitel'stve [Installation and special works in construction]*. 2012;12:8–14. (In Russ.) EDN: UDJITZ

20. Korotich A.V. Architectonics of densest modules filling space with linear surfaces. *Dizain i Techologii [Design and Technologies]*. 2021;83-84(125–126):6–12 (In Russ.) EDN: HPYTEX

21. Kwang H.K. A survey: application of geometric modeling techniques to ship modeling and design. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2010;2:177–184. http://doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0034 12

22. Janson C., Larsson L. A method for the optimization of ship hulls from a resistance point of view. *Twenty-First Symposium on Naval Hydrodynamic. Washington: The National Academies Press.* 1997;680–696 https://doi.org/10.17226/5870

23. Tober H. Evaluation of drag estimation methods for ship hulls. *Stockholm: KTH Royal Institute of Technology, School of Engineering Sciences*, 2020.

24. Oetter R., Barry C.D., Duffty B., Welter J. Block construction of small ships and boats through use of developable panels. *Journal of Ship Production*. 2002;18(2):65–72. http://doi.org/10.5957/jsp.2002.18.2.65

25. Perez-Arribas F., Fernandez-Jambrina L. Computer-aided design of developable surfaces: Designing with developable surfaces. *Journal of Computers*. 2018;13(10):1171–1176. http://doi.org/10.17706/jcp.13.10 1171–1176



Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



ЗАЩИТА ЗДАНИЙ, СООРУЖЕНИЙ И КОНСТРУКЦИЙ PROTECTION OF BUILDINGS AND STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-520-533 УДК 699.88 EDN: IEBBCE

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Влияние гидрофобизации аэродромных покрытий на расход противогололедных реагентов

А.А. Аверкиев¹⁰, И.Е. Васенин²⁰, М.Н. Ефименко³, Ф.А. Пащенко³, Н.С. Харьков³

¹ Федеральное агентство воздушного транспорта, Москва, Российская Федерация

² Всероссийский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства и океанографии, Москва, Российская Федерация

³ Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт воздушного транспорта «Ленаэропроект»,

Санкт-Петербург, Российская Федерация

☑ E-mail: vshuk1@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 7 июля 2023 г. Доработана: 23 сентября 2023 г. Принята к публикации: 27 сентября 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Вопрос снижения затрат на эксплуатационное содержание аэродромных покрытий сегодня стоит особенно остро в связи с увеличением интенсивности внутренних авиаперевозок. Значительная часть затрат на эксплуатационное содержание аэродромов расходуется на приобретение противогололедных реагентов (ПГР), используемых для защиты аэродромных покрытий от обледенения. За счет применения гидрофобизирующих пропиток (ГФП) для цементобетонных аэродромных покрытий существует возможность сокращения объемов затрачиваемых ПГР. Предположение о возможном сокращении расходов на приобретение ПГР за счет применения ГФП подтверждено лабораторными испытаниями над образцами цементобетонных плит. В ходе лабораторных испытаний моделировался процесс обледенения аэродромных покрытий и удаления льдообразований. По результатам экспериментальных исследований определено, что расход ПГР на образцах цементобетонных плит, обработанных ГФП, снижается на 35 % по сравнению с аналогичными образцами, не обработанными ГФП. Для экономической оценки сокращения расходов на приобретение ПГР проанализированы расходы применяемых ПГР на гражданских аэродромах Россий-

Харьков Никита Сергеевич, кандидат технических наук, заместитель генерального директора по науке, Проектно-изыскательский и научноисследовательский институт воздушного транспорта «Ленаэропроект», Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-7175-0296; E-mail: nkharkov@mail.ru



© Аверкиев А.А., Васенин И.Е., Ефименко М.Н., Пащенко Ф.А., Харьков Н.С., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Аверкиев Александр Андреевич, начальник управления аэропортовой деятельности, Федеральное агентство воздушного транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0009-0009-8475-2608; E-mail: xemona@bk.ru

Васенин Игорь Евгеньевич, аспирант, Всероссийский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства и океанографии, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0009-0003-8458-2553; E-mail: m_vasenina@mail.ru

Ефименко Михаил Николаевич, кандидат военных наук, Руководитель испытательного центра, Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт воздушного транспорта «Ленаэропроект», Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0009-0009-9864-8780; Е-mail: vshuk1@mail.ru

Пащенко Федор Александрович, кандидат технических наук, генеральный директор, Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт воздушного транспорта «Ленаэропроект», Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0009-0001-2947-5291; E-mail: fedor.p@ my.com

ской Федерации с учетом их принадлежности к различным климатическим зонам. Проведенная оценка показала, что экономия затрат на приобретение ПГР может достигать 29,1%.

Ключевые слова: цементобетонные аэродромные покрытия, кремнийорганические соединения, водопоглощение цементобетона, водопроницаемость цементобетона, морозостойкость цементобетона, долговечность цементобетона

Для цитирования

Аверкиев А.А., Васенин И.Е., Ефименко М.Н., Пащенко Ф.А., Харьков Н.С. Влияние гидрофобизации аэродромных покрытий на расход противогололедных реагентов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 520–533. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-520-533

Effect of hydrophobization of airfield coatings on the consumption of deicing reagents

Alexander A. Averkiev¹, Igor E. Vasenin², Mikhail N. Efimenko³, Fedor A. Pashchenko³, Nikita S. Kharkov³

¹Federal Agency for Air Transport, *Moscow, Russian Federation*

² Russian Federal Research Institute of Fisheries and Oceanography, *Moscow, Russian Federation*

³ Design and Research Institute of Air Transport "Lenaeroproject", Saint Petersburg, Russian Federation

E-mail: vshuk1@mail.ru

Article history

Received: July 7, 2023 Revised: September 23, 2023 Accepted: September 27, 2023

Conflicts of interest The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution Undivided co-authorship. **Abstract.** The issue of reducing costs for the maintenance of airfield coatings is particularly important nowadays due to the increase in the intensity of domestic air transportation. A significant part of the costs of the operational maintenance of airfields is spent on the purchase of deicing reagents (DIR) used to protect airfield pavements from icing. There is a possibility to reduce the required amount DIR by using of hydrophobizing impregnations (HPI) for cement concrete airfield pavements. The assumption about possibility to reduce costs for DIR by using HPI was proven by laboratory tests on specimens of cement concrete slabs. In the course of laboratory tests the process of airfield pavement icing and de-icing was modeled. According to the results of experimental studies it was determined that the consumption of DIR for cement concrete slabs specimens treated with HPI was reduced by 35% compared to similar specimens without HPI treatment. For the economic evaluation of cost reduction for the purchase of DIRs, the costs of applied DIRs used at civil airfields of the Russian Federation were analyzed, taking into account their location in different climatic zones. The assessment has revealed that the cost savings for the purchase of DIRs can be up to 29.1 %.

Keywords: cement concrete airfield coatings, silicon-organic compounds, water absorption of cement concrete, water permeability of cement concrete, frost resistance of cement concrete, durability of cement concrete

For citation

Averkiev A.A., Vasenin I.E., Efimenko M.N., Pashchenko F.A., Kharkov N.S. Effect of hydrophobization of airfield coatings on the consumption of deicing reagents. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):520–533. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-520-533

Alexander A. Averkiev, Head of the Airport Operations Department, Federal Air Transport Agency, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0009-0009-8475-2608; E-mail: xemona@bk.ru

Igor E. Vasenin, postgraduate student, Russian Federal Research Institute of Fisheries and Oceanography, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0009-0003-8458-2553; E-mail: m_vasenina@mail.ru

Mikhail N. Efimenko, Ph.D., Head of the Test Center, Design and Research Institute of Air Transport "Lenaeroproject", St. Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0009-0009-9864-8780; E-mail: vshuk1@mail.ru

Fedor A. Paschenko, Ph.D., General Director, Design and Research Institute of Air Transport "Lenaeroproject", St. Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0009-0001-2947-5291; E-mail: fedor.p@my.com

Nikita S. Kharkov, Ph.D., Deputy General Director for Science, Design and Research Institute of Air Transport "Lenaeroproject", St. Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7175-0296; E-mail: nkharkov@mail.ru

1. Введение

Применение гидрофобизирующих пропиток (далее — ГФП) на аэродромных покрытиях способствует повышению их стойкости к воздействию внешних климатических факторов за счет улучшения физико-механических характеристик последних, таких как: водопоглощение, водопроницаемость и морозостойкость [1–3]. Улучшение данных характеристики, в конечном итоге, приводит к возрастанию долговечности аэродромных покрытий [4–6].

Снижение затрат на эксплуатационное содержание аэродромов на сегодняшний день особенно актуально по причине активно растущей интенсивности полетов воздушных судов, а значит и интенсивности использования аэродромных покрытий [7–9].

Вопрос повышения долговечности цементобетонных покрытий аэродромов наиболее важен в связи с тем, что последние, в отличие от бетонных конструкций эксплуатируемых в других отраслях, подвержены воздействию значительно большего числа негативных факторов: интенсивное воздействие ультрафиолетового облучения, увлажнение за счет атмосферной влаги и грунтовых вод с последующим высушиванием; воздействие агрессивных сред в виде противогололедных реагентов (далее — ПГР), противообледнительных жидкостей, проливов топлива и машинного масла, растворов моющих средств, используемых при удалении отложений резины на участках торможения воздушных судов; замораживанию-оттаиванию в зимний период; воздействию горячих реактивных струй от работы двигателей воздушных судов [10–12].

За основной *объект исследования* данной работы принято комплексное взаимодействие гидрофобизирующей пропитки и противогололедных реагентов в гранулированном и жидком виде на процесс образования льда и его удаление.

Основная цель исследования — проверка возможности сокращения расхода противогололедных реагентов при их применении на цементобетонных покрытиях, обработанных гидрофобизирующими пропитками в сравнении с аналогичными покрытиями, но не обработанными гидрофобизирующими пропитками при реализации процесса удаления льдообразований.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

➤ анализ существующих методов повышения эксплуатационных свойств бетонных покрытий аэродромов за счет обработки последних ГФП и выбор наиболее эффективных из них;

➢ проведение серии экспериментов по удалению льдообразований с поверхности цементобетонных покрытий обработанных и необработанных ГФП при варьируемом количестве ПГР и оценка полученных результатов;

≻ исследование достигаемого экономического эффекта за счет возможного снижения ПГР на цементобетонных покрытиях аэродромов, обработанных ГФП.

В современных условиях содержания аэродромных покрытий накоплен богатый опыт повышения их защитных свойств за счет применения различных типов ГФП. В качестве основных ГФП обычно используют кремнийорганические соединения (далее — КОС) двух классов:

растворимые в воде силиконаты, используемые в виде водных растворов [13];

≻ нерастворимые в воде силоксаны, силаны, силиконы, используемые в виде водных эмульсий или растворов на органическом растворителе [14–16].

Многолетний опыт проверки ГФП на основе КОС различных производителей, накопленный в АО «ПИиНИИ ВТ «Ленаэропроект», доказывает тезис о том, что обработка поверхности цементобетонных покрытий аэродромов КОС повышает их эксплуатационные свойства.

В табл. 1 в качестве примера показано, какие изменения происходят с цементобетонным покрытием после его обработки ГФП на основе КОС. Из анализа результатов сравнительных испытаний цементобетонных образцов, обработанных ГФП на основе КОС, с образцами, не подвергавшимися обработке, следует, что гидрофобизационная обработка цементобетона приводит к существенному улучшению его физическо-механических свойств.

Основные показатели, характеризующие степень повышения физико-механических свойств цементобетонных покрытий: морозостойкость, водопоглощение, водонепроницаемость, глубина проникновения ГФП внутрь цементобетонного покрытия. И так как гидрофобизирующие материалы на основе КОС не являются пленкообразующими, такой важный показатель цементобетонов, как его паропроницаемость, практически не изменяется. Помимо основных физико-механических свойств, приведены *дополнительные показатели*, необходимые для оценки пригодности ГФП к применению на аэродромных покрытиях (см. табл. 1). Продолжительность сохранения гидрофобизирующих свойств аэродромных покрытий зависит от содержания полезных кремнийорганических соединений в концентрате. Безопасность эксплуатации аэродромного покрытия обеспечивает показатель уменьшения коэффициента сцепления на мокрой поверхности.

Таблица 1

Пример результатов испытаний образцов с гидрофобизирующей пропиткой

Тип показателей	Наименование показателей	Фактическое значение
	Снижение величины водопоглощения цементобетона при обработке гидрофобизирующей пропиткой, раз	5,5
	Увеличение параметра водонепроницаемости цементобетона после обработки пропиткой, раз	3
Основные	Отношение величины морозостойкости цементобетонной поверхности, обра- ботанной пропиткой по отношению к необработанной, имеющей морозостой- кость F200, раз	2,1 (морозостойкость поверхностного слоя покрытия более F300)
	Глубина проникновения ГФП, мм	10,3
	Содержание полезных кремнийорганических соединений в концентрате, %	55
дополнительные	Уменьшение коэффициента сцепления на мокрой поверхности	Без снижения

Table 1

Example of test results of specimens with hydrophobic impregnation

Type of indicators	Name of indicators	Actual value
	Decrease in the amount of water absorption of cement concrete after treatment with hydrophobic impregnation, times	5.5
	Increase in the waterproofness parameter of cement concrete after treatment by impregnation, times	3
Main	Ratio of frost resistance value of cement concrete surface treated with impregnation in comparison with untreated surface with frost resistance F200, times	2.1 (frost resistance of the surface layer of the coating is more than F300)
	HPI penetration depth, mm	10.3
Additional	The content of useful silicon-organic compounds in the concentrate, %	55
Additional	Reduction of the adhesion coefficient on wet surfaces	No reduction

В [17–19] при обсуждении положительных эффектов, достигаемых после обработки покрытий ГФП, отмечается, что придание поверхности покрытия гидрофобных свойств приводит также и к снижению адгезии льда к данной поверхности. Последнее, в свою очередь, может способствовать снижению расхода ПГР в процессе удаления льдообразований. Для проверки данного предположения проведена серия лабораторных исследований.

2. Методы

В качестве метода исследования зависимости расхода ПГР в процессе удаления льдообразований от состояния цементобетонного покрытия (гидрофобизированного и негидрофобизированного) проведен лабораторный эксперимент, имитирующий процесс образования ледяной корки и ее последующее удаление за счет использования ПГР.

Для моделирования процесса удаления льда с поверхности цементобетонного покрытия изготовлены два образца цементобетонных плит из бетона класса В30 размером 400×450 мм и толщиной 25 мм. Схема лабораторной установки представлена на рис. 1.

В ходе эксперимента одна из плит подвергалась обработке ГФП. В качестве ГФП использовалась пропитка на основе КОС с характеристиками, представленными в табл. 1. Количество ГФП при обработке цементобетонных плит определялось исходя из инструкции по ее применению и составляло 0,35 кг/м², что соответствовало 63 граммам пропитки на поверхность плиты площадью 0,18 м².

Перед началом испытаний обработанные и не обработанные гидрофобизирующей пропиткой плиты подверглись полному водонасыщению. После завершения процесса водонасыщения на каждую из плит равномерно выливалось и распределялось 250 г воды. После этого плиты помещались в камеру холода тепла и влаги (КХТВ-1.0), где они охлаждались при температуре -15 ^оС в течение 1 ч. По истечении данного времени происходило образование ледяной корки на поверхности цементобетонных плит (рис. 2).

После образования ледяной корки ее поверхность подвергалась обработке противогололедными реагентами. В качестве ПГР использованы эффективные с точки зрения их плавящей способности материалы на основе солей карбоновых кислот — гранулированный противогололедный реагент и жидкий противогололедный реагент. Жидкий ПГР в количестве 10 г и гранулированный ПГР в количестве 50 г нанесены и равномерно распределены по поверхности обеих плит.

Далее образцы плит с нанесенными на них реагентами вновь помещались в климатическую камеру и выдерживались в ней в течение 40 минут при температуре –5 °С. По прошествии указанного времени образовавшийся «рассол» из смеси расплавленного льда и остатков ПГР сливался, а поверхность цементобетонных плит счищалась жесткой щеткой.







Рис. 2. Ледяная корка после замораживания плит при температуре –15 °С в течение 1 ч. **Figure 2.** Ice crust after freezing of slabs at temperature of –15 °C during 1 hour

(1)

Качество процесса удаления льда с поверхности плит оценивалось по показателю массы удаленного льда М_л, рассчитываемого по формуле

$$M_{\pi} = M_{\pi\pi}^{\pi} - M_{\pi\pi}^{\text{oct}},$$

где М^л_{пл} — масса плиты с ледяной коркой, г; М^{ост} — масса плиты после удаления «рассола» и остатков ПГР.

В ходе проведения эксперимента установлено, что количество удаленного льда на плите, обработанной ГФП, в 1,6 раза выше аналогичного количества на плите, не обработанной ГФП. Для исследования зависимости массы удаленного льда от расхода ПГР эксперимент повторялся при постоянном количестве ПГР на негидрофобизированной плите и варьируемом количестве твердого ПГР на гидрофобизированной плите. Варьирование количества наносимого гранулированного ПГР на гидрофобизированную плиту осуществлялось в диапазоне от 35 до 50 г. Соотношения гранулированного и жидкого ПГР от 3,5/1 до 5/1 взяты из опыта эксплуатации аэродромов.

3. Результаты и обсуждение

Полученные в ходе исследований результаты представлены в табл. 2 и на рис. 3.

В результате проведенного лабораторного эксперимента установлено, что вследствие ослабления сил сцепления льда с гидрофобизированной поверхностью цементобетонного покрытия расход ПГР сокращается по сравнению с аналогичным расходом для негидрофобизированных цементобетонных покрытий на 35 %.

Номер эксперимента	Этап эксперимента	Образец плиты	Суммарная масса ПГР, г	М _{пл} , г	$M_{\pi\pi}^{oct}$, r	Мл, г
1	1	С ГФП	60	13373	13247	126
		Без ГФП	60	13079	12999	80
	2	С ГФП	55	13368	13256	112
		Без ГФП	60	13079	12999	80
	3	С ГФП	45	13358	13264	94
		Без ГФП	60	13079	12999	80
2	1	С ГФП	60	13371	13248	123
		Без ГФП	60	13079	13000	79
	2	С ГФП	55	13367	13257	110
		Без ГФП	60	13079	13000	79
	3	С ГФП	45	13357	13265	92
		Без ГФП	60	13079	13000	79
3	1	С ГФП	60	13374	13246	128
		Без ГФП	60	13080	12999	81
	2	С ГФП	55	13370	13256	114
		Без ГФП	60	13080	12999	81
	3	С ГФП	45	13358	13263	95
		Без ГФП	60	13080	12999	81

Результаты испытаний по удалению льда

Таблица 2

Table 2

Results of ice removal tests

 M_{sl}^{rem} , gr Test number Stage of test Specimen of a slab Total weight of DIR, gr M_{sl}^i , gr Mi, gr With HPI Without HPI

Защита зданий, сооружений и конструкций



Рис. 3. Зависимость массы удаленного льда на двух образцах цементобетонных плит от массы гранулированного реагентаFigure 3. Dependence of the weight of the removed ice on two specimens of cement concrete slabs on the weight of the granular reagent

Основываясь на результатах экспериментов, поставлена задача оценки экономического эффекта от возможного сокращения расходов ПГР для цементобетонных аэродромных покрытий, обработанных ГФП.

Для оценки возможного экономического эффекта проведен анализ расхода применяемых ПГР на гражданских аэродромах Российской Федерации за 2021–2022 год с учетом их принадлежности к различным климатическим зонам (рис. 4, табл. 3).



Рис. 4. Карта среднегодовой температуры в Российской Федерации Источник: https://geographyofrussia.com/temperatura-vozduxa/ (дата обращения: 12.02.2023 г.) Figure 4. Map of the average annual temperature in the Russian Federation Source: https://geographyofrussia.com/temperatura-vozduxa/ (accessed: 12.02.2023)
Таблица 3

Среднегодовая температура, °С	Аэродром	Количество расходуемого ПГР (гранулированный/жидкий), т/год
	Якутск	0/68
Huma 4	Алроса	0/50
Ниже –4	Сабетта	0/136
	Анадырь	39/137
	Саратов	46/51
	Череповец	167/161
От 4 до +-6	Санкт-Петербург	1940/1645
	Москва (Внуково)	2807/1869
	Барнаул	91/51
	Волгоград	120/100
D	Ростов-на-Дону	110/88
рете +0	Грозный (Северный)	40/28
	Анапа (Витязево)	47/0

Количество используемых противогололедных реагентов на аэродромах РФ

Table 3

Average annual temperature, °C Airfield name		Amount of consumable DIR (granular/liquid), tons per year
	Yakutsk	0/68
Lass than 4	Alrosa	0/50
Less than -4	Sabetta	0/136
	Anadyr	39/137
	Saratov	46/51
	Cherepovets	167/161
From -4 to $+6$	Saint-Petersburg	1940/1645
	Moscow (Vnukovo)	2807/1869
	Barnaul	91/51
	Volgograd	120/100
	Rostov-on-Don	110/88
More than +6	Grozny (Northern)	40/28
	Anapa (Vityazevo)	47/0

The amount of deicing reagents used on airfields of the Russian Federation

Из сводной табл. 4 видно, что в климатических зонах со среднегодовой температурой ниже –4 °C для борьбы с льдообразованием в преобладающем количестве используются жидкие ПГР. В климатических зонах со среднегодовой температурой от –4 до +6 °C в среднем гранулированных ПГР используется больше, чем жидких. В регионах со среднегодовой температурой выше +6 °C больше используются гранулированные ПГР.

Характер применения жидких и гранулированных ПГР существенно зависит от климатических условий региона расположения аэродрома и состояния аэродромных покрытий в периоды возможного появления наледи. В случае образования наледи при низкой влажности применяются как жидкие ПГР, так и комбинация жидких и гранулированных ПГР. В случае выпадения твердых осадков и в случае повышенной влажности применяют гранулированные ПГР.

Суммарный объем применяемых ПГР существенно зависит от интенсивности полетов воздушных судов, что видно из табл. 3. В связи с этим в дальнейшем процессе экономического анализа целесообразно аэродромы с высокой и умеренной интенсивностью полета воздушных судов рассматривать отдельно.

Таблица 4

Экономический эффект от сокращения расхода ПГР

Аэродром	Продолжительность сохранения гидрофобизирующих свойств, г	Экономический эффект, млн руб.	Экономический эффект, %
	1	45,6	11,5
	2	180,9	23,3
Аэропорты с высокой интенсивностью полетов	3	316,2	27,2
	4	451,6	29,1
	1	-4,5	-66,9
A	2	-0,1	-15,9
Аэропорты с умереннои интенсивностью полетов	3	4,4	1,0
	4	8,9	9,5

Table 4

The economic effect due to reduction of DIR consumption

Airfield	Duration of preservation of hydrophobic properties, year	Economic effect, million rubles	Economic effect, %
	1	45.6	11.5
Airports with high flight intensity	2	180.9	23.3
All ports with high high litensity	3	316.2	27.2
	4	451.6	29.1
	1	-4.5	-66.9
A imports with modium flight intensity	2	-0.1	-15.9
Airports with medium hight intensity	3	4.4	1.0
	4	8.9	9.5

Механизм воздействия как жидких, так и гранулированных ПГР на процесс удаления льдообразований на практике мало отличается друг от друга. По этой причине при дальнейших расчетах принималось, что величина сокращения расхода ПГР, полученная в ходе экспериментальных исследований для гранулированных ПГР, распространяется также и на жидкие ПГР.

Последующая экономическая оценка основывается на ценовых показателях, принятых из опыта эксплуатации аэродромов РФ. При расчете экономического эффекта от возможного сокращения расхода ПГР применительно к аэродромным покрытиям, обработанным ГФП, учитывался удельный расход ГФП на единицу площади аэродромных покрытий, средняя стоимость ПГР и ГФП, продолжительность сохранения гидрофобизирующих свойств аэродромных покрытий, обработанных ГФП, средний годовой расход ПГР, площади аэродромов.

В связи с тем что продолжительность сохранения гидрофобизирующих свойств аэродромных покрытий, обработанных ГФП, зависит от многих факторов и не подтверждается экспериментально в ходе проверок ПГР на их пригодность к применению, оценка срока очередной обработки ГФП представляется затруднительной. Возможны ситуации, когда гидрофобизирующие свойства покрытий уже утрачены, а срок очередной обработки покрытий ГФП еще не наступил. В этом случае возможен рост расхода ПГР, а его величина должна определяться в ходе дальнейших расчетов.

Прогнозируемая продолжительность сохранения гидрофобизирующих свойств, принимаемая к расчету, имеет диапазон значений от 1 до 4 лет, исходя из рекомендаций производителей ГФП и опыта их применения на аэродромах.

Экономический эффект от сокращения расхода ПГР на аэродромных покрытиях, не обработанных ГФП, млн руб., рассчитывается из следующего выражения:

$$Q = P_{\text{fesf}\Phi\Pi}^{\Pi\Gamma\text{P}} - P_{\Gamma\Gamma\Phi\Pi}^{\Pi\Gamma\text{P}},$$

где $P_{6e3\Gamma\Phi\Pi}^{\Pi\GammaP}$ — суммарная стоимость ПГР для аэродромных покрытий, не обработанных ГФП, млн руб.; $P_{\Gamma\Gamma\Phi\Pi}^{\Pi\GammaP}$ — суммарная стоимость ПГР и ГФП для аэродромных покрытий, обработанных ГФП, млн руб.

Относительный экономический эффект от сокращения расхода ПГР для аэродромных покрытий, не обработанных ГФП, %:

$$Q_{\%} = \frac{Q}{P_{\text{6es}\Gamma\Phi\Pi}^{\Pi\GammaP}} 100 \%.$$
(3)

Суммарная стоимость ПГР для аэродромных покрытий, не обработанных ГФП, млн руб.:

$$P_{\text{fes}\Gamma\Phi\Pi}^{\Pi\GammaP} = (V^{\mathcal{K}\Pi\GammaP}P^{\mathcal{K}\Pi\GammaP} + V^{\Gamma\Pi\GammaP}P^{\Gamma\Pi\GammaP})T, \tag{4}$$

где $V^{\text{ЖПГР}}$ — расход жидкого ПГР в год, т/год; $P^{\text{ЖПГР}}$ — стоимость тонны жидкого ПГР, млн. руб.; $V^{\text{ГПГР}}$ — расход гранулированного ПГР в год, т/год; $P^{\text{ГПГР}}$ — стоимость тонны гранулированного ПГР, млн руб.; T — продолжительность сохранения гидрофобизирующих свойств аэродромных покрытий, год.

Суммарная стоимость ПГР и ГФП для аэродромных покрытий, обработанных ГФП, млн руб.:

$$P_{\Gamma\Gamma\Phi\Pi}^{\Pi\GammaP} = (1 - k_{\Im\Phi}) (V^{\Im\Pi\GammaP} P^{\Im\Pi\GammaP} + V^{\Gamma\Pi\GammaP} P^{\Gamma\Pi\GammaP}) T + q^{\Gamma\Phi\Pi} S^A P^{\Gamma\Phi\Pi},$$
(5)

где $k_{3\phi}$ — коэффициент эффективности сокращения расхода ПГР при применении ГФП, принятый по результатам эксперимента, $k_{3\phi} = 0.35$; $q^{\Gamma\Phi\Pi}$ — удельный расход ГФП, л/м²; S^A — площадь обрабатывае-мого аэродромного покрытия, м² $P^{\Gamma\Phi\Pi}$ — стоимость ГФП, руб./л.

Результаты расчетов представлены в виде сводной таблицы и графиков зависимости экономического эффекта от сокращения расхода ПГР при отсутствии гидрофобизирующих свойств аэродромных покрытий в зависимости от его срока службы (см. табл. 4, рис. 5).



а

Рис. 5. Экономический эффект при сокращении расхода противогололедных реагентов от использования гидрофобизатора:
 a — в млн руб.; *б* — в %
 Figure 5. The economic effect from reducing deicing reagents when using a hydrophobizer:
 a — in mln rubles; *б* — in %

По результатам проведенных исследований установлено, что наибольший экономический эффект от сокращения расхода ПГР для аэродромных покрытий, обработанных ГФП, достигается для аэродромов с высокой интенсивностью полета воздушных судов.

Для аэродромов с умеренной интенсивностью полетов воздушных судов положительный эффект достигается только в том случае, если продолжительность сохранения гидрофобизирующих свойств аэродромных покрытий, обработанных ГФП, составляет не менее 3 лет.

Помимо полученного в результате исследований положительного экономического эффекта от снижения расхода ПГР для аэродромных покрытий, обработанных ГФП, необходимо указать и на дополнительный положительный эффект — повышение коррозионной стойкости цементобетонных аэродромных покрытий [20-22]. Последнее наиболее актуально в тех случаях, когда для борьбы с льдообразованием применяются контрафактные ПГР, а также ПГР, не прошедшие проверку на коррозионную стойкость бетонов. Высокая агрессивность ПГР к бетонам приводит к негативным факторам в виде разрушений поверхностного слоя цементобетонного покрытия [23-25]. На рис. 6 представлен характер разрушений цементобетонных образцов в ходе проведения испытаний в ИЦ АО «ПИиНИИ ВТ «Ленаэропроект» одного из ПГР с коррозионными свойствами, соизмеримыми со свойствами 5 % раствора поваренной соли.



Рис. 6. Вид цементобетонных образцов после проведения испытаний на коррозионную стойкость (образцы 1–3 подвергались воздействию ПГР, образцы 4–6 подвергались воздействию 5% раствора поваренной соли)
Figure 6. View of cement concrete specimens after corrosion resistance tests (specimens 1–3 were exposed to DIR, specimens 4–6 were exposed to 5% salt solution)

4. Заключение

1. Полученные результаты исследований подтверждают предположение о возможном сокращении расхода ПГР применительно к цементобетонным поверхностям плит, обработанных ГФП. В результате лабораторного эксперимента, имитирующего процесс льдообразования и последующего удаления ледяной корки с применением ПГР, установлено, что величина возможного сокращения расхода ПГР для цементобетонных плит, обработанных ГФП, достигает величины 35 % по отношению к аналогичному расходу ПГР для цементобетонных плит, не обработанных ПГР.

2. Результаты оценки достигаемого экономического эффекта от сокращения расхода ПГР для аэродромных покрытий, обработанных ГФП, показали, что наибольший экономический эффект 29,1 % достигается применительно к аэродромам с высокой интенсивностью полетов воздушных судов. Для аэродромов с умеренной интенсивностью полетов воздушных судов положительный экономический эффект достигается при условии того, что продолжительность сохранения гидрофобизирующих свойств аэродромных поверхностей, обработанных ГФП, будет составлять не менее 3 лет.

3. В связи с тем, что в настоящее время отсутствуют объективные сведения о продолжительности сохранения гидрофобизирующих свойств для цементобетонных покрытий, обработанных ГФП, подтвержденные результатами независимых испытаний на климатических установках, становится актуальной задача проведения таких исследований.

4. При проведении исследований на климатических установках, имитирующих процессы воздействия негативных факторов окружающей среды, с целью определения реальных сроков сохранения гидрофобизирующих свойств аэродромных покрытий необходимо также предусмотреть возможность исследования фактора химической совместимости ПГР и ГФП. Последнее, в свою очередь, позволит не только максимально приблизить экспериментальные условия с реальными, но и сделать более точной оценку достигаемого экономического эффекта.

Список литературы

1. Salam M., Mamat R., Rusnardi R. Effect of The Composition of Hydrophobic Agents on The Contact Angle and Strength of Mortal Cement // Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2309. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2309/1/012010

2. Septiana D., Ratnawulan R., Syaputri O., Salam M. The Effect of Calcium Carbonate (CaCO₃) and Polystyrene (PS) Composition on Contact Angle and Compressive Strength of Hydrophobic Cement Mortar // Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2309. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2309/1/012003

3. *Szafraniec M., Omiotek Z., Barnat-Hunek D.* Water absorption prediction of nanopolymer hydrophobized concrete surface using texture analysis and machine learning algorithms // Construction and Building Materials. 2023. Vol. 375. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.130969

4. Wang J., Li P., Yu P., Leydecker T., Bayer I., Losic D., Neogi A., Wang Z. Efficient photothermal deicing employing superhydrophobic plasmonic MXene composites // Advanced Composites and Hybrid Materials. 2022. Vol. 5. P. 3035-3044. https://doi.org/10.1007/s42114-022-00549-5

5. Wang D., Zhu Q., Xing Z., Fang L. Control of chloride ion corrosion by MgAlOx/MgAlFeOx in the process of chloride deicing // Environmental Science and Pollution Research. 2022. Vol. 29. P. 9269–9281. https://doi.org/10.1007/s11356-021-16205-2

6. Konovalova V. Investigation of the Effect of Volumetric Hydrophobization on the Kinetics of Mass Transfer Processes Occurring in Cement Concretes during Corrosion // Materials. 2023. Vol. 16. P. 3827. https://doi.org/10.3390/ma16103827

7. Álvarez A., Ordieres-Meré J., Loreiro A., Marcos L. Opportunities in airport pavement management: Integration of BIM, the IoT and DLT // Journal of Air Transport Management. 2021. Vol. 90. https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2020. 101941

8. *Nam B*. In-situ super accelerated pavement test for the fatigue evaluation of in-service airfield rigid pavement — A case study at Mecham Airport // Construction and Building Materials. 2022. Vol. 353. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.129115

9. Armeni A., Loizos A. Preliminary evaluation of the ACR-PCR system for reporting the bearing capacity of flexible airfield pavements // Transportation Engineering. 2022. Vol. 8. https://doi.org/10.1016/j.treng.2022.100117.

10. Shill S., Al-Deen S., Ashraf V., Elahi M., Subhani M., Hutchison W. A comparative study on the performance of cementitious composites resilient to airfield conditions // Construction and Building Materials. 2021. Vol. 282. https:// doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.122709

11. Wu Y., Dong L., Shu X., Yang Y., She W., Ran Q. A review on recent advances in the fabrication and evaluation of superhydrophobic concrete // Composites Part B: Engineering. 2022. Vol. 237. https://doi.org/10.1016/j.compositesb. 2022.109867

12. Zhang C., Zhang S., Yu J., Kong X. Water absorption behavior of hydrophobized concrete using silane emulsion as admixture // Cement and Concrete Research. 2022. Vol. 154. https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2022.106738

13. *Xue X., Li Y., Yang Z., He Z., Dai J., Xu L., Zhang W. A* systematic investigation of the waterproofing performance and chloride resistance of a self-developed waterborne silane-based hydrophobic agent for mortar and concrete // Construction and Building Materials. 2017. Vol. 155. P. 939–946. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.08.042

14. Materak K., Wieczorek A., Bednarska D., Koniorczyk M. Internal hydrophobization of cement-based materials by means of silanes // Journal of Physics: Conference Series. 2023. Vol. 2521. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2521/ 1/012009

15. *Feng C., Janssen H.* Impact of water repellent agent concentration on the effect of hydrophobization on building materials // Journal of Building Engineering. 2021. Vol. 39. https://doi.org/10.1016/j.jobe.2021.102284.

16. Zarzuela R., Luna M., Coneo J., Gemelli G., Andreouli D., Kaloidas V., Mosquera M. Multifunctional silane-based superhydrophobic/impregnation treatments for concrete producing C-S-H gel: Validation on mockup specimens from European heritage structures // Construction and Building Materials. 2023. Vol. 367. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat. 2022.130258

17. Пшембаев М., Ковалев Я., Яглов В., Гиринский В. Способы борьбы с зимней скользкостью // Наука и техника. 2020. Т. 19. № 3. С. 230–240. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-3-230-240

18. *Zhang Y., Chen L., Liu H.* Study on ice adhesion of composite anti-/deicing component under heating condition // Advanced Composites Letters. 2020. Vol. 29. https://doi.org/10.1177/2633366X20912440

19. Boinovich L., Emelyanenko K., Emelyanenko A. Superhydrophobic versus SLIPS: Temperature dependence and the stability of ice adhesion strength // Journal of Colloid and Interface Science. 2022. Vol. 606. Part 1. P. 556–566. https:// doi.org/10.1016/j.jcis.2021.08.030

20. Szymańska A., Dutkiewicz M., Maciejewski H., Palacz M. Simple and effective hydrophobic impregnation of concrete with functionalized polybutadienes // Construction and Building Materials. 2022. Vol. 315. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.125624

21. Tkach E., Semenov V, Tkach S., Rozovskaya T. Highly Effective Water-repellent Concrete with Improved Physical and Technical Properties // Procedia Engineering. 2015. Vol. 111. P. 763–769. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.143

22. *Gao D., Yang L., Pang Y., Li Z., Tang Q.* Effects of a novel hydrophobic admixture on the sulfate attack resistance of the mortar in the wet-dry cycling environment // Construction and Building Materials. 2022. Vol. 344. https://doi.org/ 10.1016/j.conbuildmat.2022.128148

23. Gruber M. R., Hofko B., Hoffmann M., Stinglmayr D., Seifried T. M., Grothe H. Deicing performance of common deicing agents for winter maintenance with and without corrosion-inhibiting substances // Cold Regions Science and Technology. 2023. Vol. 208. https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2023.103795

24. Gruber M.R., Hofko B., Hoffmann M., Stinglmayr D., Grothe H. Analysis of metal corrosion methods and identification of cost-efficient and low corrosion deicing agents // Corrosion Engineering Science and Technology. 2023. Vol. 58. P. 452–463. https://doi.org/10.1080/1478422X.2023.2200008

25. Zhang J., Wang W., Liu J., Wang S., Qin X., Yu B. Pavement Performance and Ice-Melting Characteristics of Asphalt Mixtures Incorporating Slow-Release Deicing Agent // Buildings. 2023. Vol. 13. Issue 2. https://doi.org/10.3390/buildings13020306

References

1. Salam M., Mamat R., Rusnardi R. Effect of The Composition of Hydrophobic Agents on The Contact Angle and Strength of Mortal Cement. *Journal of Physics: Conference Series*. 2022;2309:012010. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2309/1/012010.

2. Septiana D., Ratnawulan R., Syaputri O., Salam M. The Effect of Calcium Carbonate (CaCO₃) and Polystyrene (PS) Composition on Contact Angle and Compressive Strength of Hydrophobic Cement Mortar. *Journal of Physics: Conference Series*. 2022;2309:012003. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2309/1/012003

3. Szafraniec M., Omiotek Z., Barnat-Hunek D. Water absorption prediction of nanopolymer hydrophobized concrete surface using texture analysis and machine learning algorithms. *Construction and Building Materials*. 2023;375:130969. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.130969

4. Wang J., Li P., Yu P., Leydecker T., Bayer I., Losic D., Neogi A., Wang Z. Efficient photothermal deicing employing superhydrophobic plasmonic MXene composites. *Advanced Composites and Hybrid Materials*. 2022;5:3035–3044. https://doi.org/10.1007/s42114-022-00549-5

5. Wang D., Zhu Q., Xing Z., Fang L. Control of chloride ion corrosion by MgAlOx/MgAlFeOx in the process of chloride deicing. *Environmental Science and Pollution Research*. 2022;29:9269–9281. https://doi.org/10.1007/s11356-021-16205-2

6. Konovalova V. Investigation of the Effect of Volumetric Hydrophobization on the Kinetics of Mass Transfer Processes Occurring in Cement Concretes during Corrosion. *Materials*. 2023;16:3827. https://doi.org/10.3390/ma16103827

7. Álvarez A., Ordieres-Meré J., Loreiro A., Marcos L. Opportunities in airport pavement management: Integration of BIM, the IoT and DLT. *Journal of Air Transport Management*. 2021;90:101941. https://doi.org/10.1016/j.jairtraman. 2020.101941

8. Nam B. In-situ super accelerated pavement test for the fatigue evaluation of in-service airfield rigid pavement — A case study at Mecham Airport. *Construction and Building Materials*. 2022;353:129115. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.129115

9. Armeni A., Loizos A. Preliminary evaluation of the ACR-PCR system for reporting the bearing capacity of flexible airfield pavements. *Transportation Engineering*. 2022;8:100117. https://doi.org/10.1016/j.treng.2022.100117

10. Shill S., Al-Deen S., Ashraf V., Elahi M., Subhani M., Hutchison W. A comparative study on the performance of cementitious composites resilient to airfield conditions. *Construction and Building Materials*. 2021;282:122709. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.122709

11. Wu Y., Dong L., Shu X., Yang Y., She W., Ran Q. A review on recent advances in the fabrication and evaluation of superhydrophobic concrete. *Composites Part B: Engineering*. 2022;237:109867. https://doi.org/10.1016/j.compositesb. 2022.109867

12. Zhang C., Zhang S., Yu J., Kong X. Water absorption behavior of hydrophobized concrete using silane emulsion as admixture. *Cement and Concrete Research*. 2022;154:106738. https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2022.106738

13. Xue X., Li Y., Yang Z., He Z., Dai J., Xu L., Zhang W. A systematic investigation of the waterproofing performance and chloride resistance of a self-developed waterborne silane-based hydrophobic agent for mortar and concrete. *Construction and Building Materials*. 2017;155:939–946. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.08.042

14. Materak K., Wieczorek A., Bednarska D., Koniorczyk M. Internal hydrophobization of cement-based materials by means of silanes. *Journal of Physics: Conference Series*. 2023;2521:012009. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2521/ 1/012009

15. Feng C., Janssen H. Impact of water repellent agent concentration on the effect of hydrophobization on building materials. *Journal of Building Engineering*. 2021;39:102284. https://doi.org/10.1016/j.jobe.2021.102284

16. Zarzuela R., Luna M., Coneo J., Gemelli G., Andreouli D., Kaloidas V., Mosquera M. Multifunctional silane-based superhydrophobic/impregnation treatments for concrete producing C-S-H gel: Validation on mockup specimens from European heritage structures. *Construction and Building Materials*. 2023;367:130258. https://doi.org/10.1016/j.con buildmat.2022.130258

17. Pshembaev M., Kovalev Ya., Yaglov V., Girinsky V. Ways to combat winter slipperiness. *Science & Technique*. 2020;19(3):230–240. (In Russ.) https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-3-230-240

18. Zhang Y., Chen L., Liu H. Study on ice adhesion of composite anti-/deicing component under heating condition. *Advanced Composites Letters*. 2020;29. https://doi.org/10.1177/2633366X20912440

19. Boinovich L., Emelyanenko K., Emelyanenko A. Superhydrophobic versus SLIPS: Temperature dependence and the stability of ice adhesion strength. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2022;606(1):556–566. https://doi.org/10. 1016/j.jcis.2021.08.030

20. Szymańska A., Dutkiewicz M., Maciejewski H., Palacz M. Simple and effective hydrophobic impregnation of concrete with functionalized polybutadienes. *Construction and Building Materials*. 2022;315:125624. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.125624

21. Tkach E., Semenov V., Tkach S., Rozovskaya T. Highly Effective Water-repellent Concrete with Improved Physical and Technical Properties. *Procedia Engineering*. 2015;111:763–769. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.143

22. Gao D., Yang L., Pang Y., Li Z., Tang Q. Effects of a novel hydrophobic admixture on the sulfate attack resistance of the mortar in the wet-dry cycling environment. *Construction and Building Materials*. 2022;344:128148. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.128148

23. Gruber M.R., Hofko B., Hoffmann M., Stinglmayr D., Seifried T.M., Grothe H. Deicing performance of common deicing agents for winter maintenance with and without corrosion-inhibiting substances. *Cold Regions Science and Technology*. 2023;208:103795. https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2023.103795

24. Gruber M.R., Hofko B., Hoffmann M., Stinglmayr D., Grothe H. Analysis of metal corrosion methods and identification of cost-efficient and low corrosion deicing agents. *Corrosion Engineering Science and Technology*. 2023;58:452–463. https://doi.org/10.1080/1478422X.2023.2200008

25. Zhang J., Wang W., Liu J., Wang S., Qin X., Yu B. Pavement Performance and Ice-Melting Characteristics of Asphalt Mixtures Incorporating Slow-Release Deicing Agent. *Buildings*. 2023;13(2):306. https://doi.org/10.3390/buildings13020306



Строительная механика инженерных конструкций и сооружений

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ CONSTRUCTION MATERIALS AND PRODUCTS

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-534-547 UDC 624 EDN: IYOMTO

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Effect of using 3D-printed shell structure for reinforcement of ultra-high-performance concrete

Mohammad Hematibahar¹^[D], Nikolai I. Vatin^{2,4}^[D], Hamid Taheri Jafari³^[D], Tesfaldet H. Gebre⁴^[D]

¹Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

³ Ramsar Branch, Islamic Azad University, Ramsar, Iran

⁴ RUDN University, Moscow, Russian Federation

deng.m.hematibahar1994@gmail.com

Article history

Received: February 16, 2023 Revised: May 22, 2023 Accepted: June 5, 2023

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. This study aims to investigate the effect of 3D-printed polymer shell reinforcemen ton ultra-high-performance concrete. The mechanical properties of ultra-high-performance polymer reinforced concrete have been investigated. At first, the 3D-printed shell reinforcements were designed using 3D Max and Rhino 6 software. Then, each was fabricated through the fused deposition modeling method and positioned into the cubic, cylindrical, and prismatic molds. In the next step, the prepared Ultra-High-Performance Concrete mixture was poured into the molds, and the samples were cured for 28 days. Finally, the compressive, tensile, and flexural strength tests were carried out on the samples. The results indicated that the compressive, tensile, and flexural strengths of reinforced samples were lower than that of the unreinforced ones, respectively. Although including 3D-printed reinforcement decreased the mechanical properties of the Ultra-High-Performance Concrete samples, it changed the fracture mechanism of concrete from brittle to ductile.

Keywords: Fused Deposition Modeling, mechanical properties, fracture mechanism

Acknowledgements

This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment No. 075-03-2022-010 dated 14 January, 2022 and No. 075-01568-23-04 dated 28 March 2023 (Additional agreement 075-03-2022-010/10 dated 09 November 2022, Additional agreement 075-03-2023-004/4 dated 22 May 2023), FSEG-2022-0010.

© Hematibahar M., Vatin N.I., Hamid T.J., Gebre T.H., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Mohammad Hematibahar, Ph.D. students, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0090-5745; E-mail: eng.m.hematibahar1994@gmail.com

Nikolai I. Vatin, D.Sc. (Eng.), Professor of the Higher School of Industrial Civil and Road Construction, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1196-8004; E-mail: vatin@mail.ru

Hamid Taheri Jafari, Ph.D., Researcher at Department of Civil Engineering, Ramsar Branch, Islamic Azad University, Ramsar, Iran. ORCID: 0009-0009-5816-3009; E-mail: hamidtahery2002@yahoo.co.uk

Tesfaldet Hadgembes Gebre, Ph.D. (Eng.), Researcher at the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7168-5786; E-mail: tesfaldethg@gmail.com

For citation

Hematibahar M., Vatin N.I., Hamid T.J., Gebre T.H. Effect of using 3D-printed shell structure for reinforcement of ultra-high-performance concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*.2023;19(5):534–547. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-534-547

Эффект от применения 3D-печатной оболочки для армирования сверхвысокопрочного бетона

М. Хематибахар¹ М. Н.И. Ватин^{2,4}, Т.Д. Хамид³, Т.Х. Гебре⁴

¹Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

³ Рамсарский архитектурный университет Азад, Abass monfared Blv, *Рамсар, Иран,*

⁴ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

☑ eng.m.hematibahar1994@gmail.com

История статьи Поступила в редакцию: 16 февраля 2023 г. Доработана: 22 мая 2023 г. Принята к публикации: 5 июня 2023 г.	Аннотация. Объект исследования — это сверхвысокопрочный бетон оболочечной 3D-печатной полимерной арматурой. Экспериментально и следованы механические свойства полимерно-армированного бетона. З печатные арматурные оболочки были созданы в 3D Мах и Rhino 6, из товлены методом наплавленного осаждения и помещены в кубическ цилиндрические и призматические опалубочные формы. Экспериментал но исследована прочность на сжатие, растяжение и изгиб. Прочности а мированных образцов оказалась меньше, чем неармированных, но включние 3D-печатной арматуры изменило механизм разрушения бетона с хру
Заявление о конфликте интересов Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.	
Вклад авторов Нераздельное соавторство.	кого на вязкии. Ключевые слова: моделирование наплавлением, механические свойства, механизм разрушения

Финансирование:

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-03-2022-010 от 14.01.2022 г. и № 075-01568-23-04 от 28.03.2023 года (Дополнительное соглашение 075-03-2022-010/10 от 09.11.2022 г., Дополнительное соглашение № 075-03-2023-004/4 от 22.05.2023 г.), FSEG-2022-0010.

Для цитирования

Hematibahar M., Vatin N.I., Hamid T.J., Gebre T.H. Effect of 3D-printed shell structure on reinforcement ultra-high-performance concrete // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 534–547. http://doi.org/ 10.22363/1815-5235-2023-19-5-534-547

1. Introduction

The most widely used building material in the world is concrete. Structures made of cement are more immune to environmental exposure than those built with different materials, for example, lumber or steel [1]. Concrete is used in many projects, from small ones like sidewalks and home foundations to some of the world's largest and most difficult engineering projects. Steel rebar cages are typically used to reinforce concrete and can be designed to withstand various scenarios, but their application has some restrictions. If structural elements are

Мохаммад Хематибахар, аспирант кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-0090-5745; E-mail: eng.m.hematibahar1994@gmail.com

Ватин Николай Иванович, доктор технических наук, профессор высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-1196-8004; E-mail: vatin@mail.ru

Хамид Тахери Джафари, Ph.D., научный сотрудник департамента гражданского строительства Рамсарского филиала, Исламский университет Азад, Рамсар, Иран; ORCID: 0009-0009-5816-3009; E-mail: hamidtahery2002@yahoo.co.uk

Гебре Тесфалдет Хадгембес, кандидат технических наук, ассистент департамента строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-7168-5786; E-mail: tesfaldethg@gmail.com

details may not be sufficient to withstand severe impact like seismic or blast loading. In addition, pouring concrete into rebar cages with high reinforcing bar ratios is challenging and takes a lot of time and effort. Steel reinforcement is also costly and has a significant carbon footprint [2]. Utilizing fibers is yet another method for enhancing the properties of cementitious composites [3–10]. However, controlling how the fibers in fiber-reinforced composites are distributed isn't easy. Furthermore, fiber orientation is affected by execution boundaries, for example, the size of the underlying member and the bearing of the substantial stream during projecting [11].

An alternative method for creating intricate geometries that can be used as reinforcement in concrete has recently emerged. Small and large-scale fabrication of three-dimensional elements from various materials is made possible by the additive manufacturing (AM) process, which is also referred to as "3D printing" [12–14]. Thanks to recent advancements [15], complex geometries can now be created for polymers using 3D printing techniques like Fused Deposition Modeling (FDM). The digitally controlled processes by which material is joined to create a new object are the foundation of 3D printing. Low costs, safety, the ability to print aesthetically pleasing structures in any design, and minimizing environmental impact are just a few benefits of 3D construction printing [16]. For instance, the reinforcing Cementitious Backfill Composite (CBC) with a variety of 3D Printed Polymeric Lattice (3D-PPL) shapes increases its ductility [17]. The researchers used the digital image correlation technique and found that 3D-PPL can make CBC's brittle behavior ductile without affecting its hardening properties. Farina and others [18] carried out Three Point Bending Tests (TPBT) on a cement mortar reinforced with polymeric and metallic 3D-printed fibers with various surface morphology and roughness. It was claimed that samples reinforced with fibres with a high surface roughness had a stronger interfacial connection compared to samples that were left unreinforced and samples reinforced with smooth fibres.

Another uniform testing technique was introduced in view of consolidated Twist Hub force (TORAX) test for accurate reflection of mechanical properties of 3D-printed cement and mortar [19]. It was discovered that 3D-printed concrete lacks the characteristics of cast concrete because the shear stress is only transferred through the adhesive properties of the cement matrix. The three distinct types of fibers (carbon, glass, and basalt) were used to reinforce 3D-printed concrete and various tests were conducted on the fiber-reinforced specimens [20]. It was found that the samples' flexural performance was significantly improved by a 1 % volumetric fraction of carbon fibers aligned along the printing direction. In contrast, glass and basalt fibers had no effect. The results also showed that the improved combination's flexural and compressive strength rises up to 30 and 80 MPa respectively. Different authors showed that 3 percent by volume of carbon fibers with a length of 3 millimeters can significantly increase the flexural strength of concrete up to 120 MPa [21]. Similarly, a study shows that 3D-printable Ultra-High-Performance Concrete (UHPC) had a lower compressive strength (32–56 %) than mold-cast UHPC [22].

Printed specimens may have a compressive strength of up to 22 % lower than those placed in molds [23]. In a previous study, the mechanical characteristics of high-performance printing concrete with steel fibre reinforcement of varied lengths and volume contents were examined [24]. It was found that printed concrete had lower compressive and flexural strengths than the cast concrete. As such, the compressive and flexural qualities of printed concrete were in the range of 70-111 MPa and 6-15 MPa, respectively, while the compressive and flexural qualities of cast concrete were 90-113 MPa and 11-14 MPa. The steel fiber orientation distribution in 3D-printed UHPC is quantitatively investigated [25]. According to this, the fibre alignment parallel to the printing direction was greatly enhanced by the large fibre volume percentage. The mechanical performance of the printed specimens was superior to that of the mold-cast ones because of this fiber alignment. Various spatial distributions of 3D-printed fibers were analyzed to show how reinforcement orientation and distribution affected created reinforcement networks of interconnected photopolymer resin fibers [26]. Subsequently, it was shown that when a triangulated reinforcing structure with a denser mesh was utilized in places with higher tensile stresses, the peak flexural strength rose. However, they were unable to observe the ductile behavior in the samples because it only utilised a small percentage of polymer reinforcement in their studies. The study improved the cementitious material's performance by using bio-inspired polymeric structures that were 3Dprinted as reinforcement for cement mortar [27]. The impact of 3D-printed spatial support on flexural properties of conventional mortar was studied [28]. The study discovered that the flexural behavior of specimens is significantly affected by the shape and size of a spatial 3D-printed element.

However, concrete's Modulus of Elasticity (ME) and Energy Absorption Capacity (EAC) are two crucial deformation parameters. ME is an important parameter in the design of concrete structures because it shows the material's resistance to deformation under load. ME of concrete is a good indicator of strength because it

measures the stiffness of the concrete. The concrete is more rigid the higher the ME value. ME is influenced by various factors, including the concrete's density, moisture content, the Interfacial Transition Zone (ITZ) thickness, mixture homogeneity, reinforcement material, cement matrix, bonding between aggregates, and porosity in each part. EAC measures the material's capacity to absorb energy during deformation. Particularly in locations where concrete structures are subjected to frequent loads and seismic activity, the energy-absorbing properties of concrete can beneficially reduce the likelihood of their failure. In addition, impact loads must be protected against important infrastructure buildings, such as nuclear power plants and smaller technical facilities, as failure can result in significant damage. Thus, common fields are interested in a suitable structure material with an extraordinary energy retention limit.

As previously stated, there is a lot of interest in utilizing AM methods to create reinforcing elements that conventional steel cages or fibers could replace. Despite these efforts, additional research is required to strengthen concrete using 3D printing. A novel approach to strengthening concrete was utilized in this study by using 3D printing technology. The present study uses 3D-printed shell Polylactic Acid (PLA) structures as UHPC reinforcements, focusing on a unique class of composites. It examined the fracture characteristics, deformation parameters, and mechanical features like compressive, tensile, and flexural strengths of UHPC reinforced with 3D-printed PLA shells. Using FDM, a popular 3D printing technique, the reinforcement was created in the shape of a shell.

2. Methods, Materials, and Sample Preparation

2.1. *Methods.* Even though 3D-printing concrete has received the most attention in civil engineering, there has recently been a lot of interest in 3D-printing reinforcements. The mechanical properties (such as compressive, tensile, and flexural strengths), as well as the fracture mechanism of various samples, were analyzed in this paper after UHPC was reinforced with 3D-printed PLA. The approach taken in this study is depicted in Figure 1. The 3D-printed reinforcement shells were initially plotted using 3D Max and Rhino 6 software. The FDM process produced the PLA materials, which were then inserted into the molds. The samples were then subjected to various tests, and the results were examined and discussed.



Figure 1. The methodology of the current study

Figure 2. Design of shell reinforcement

The 3D Max and Rhino 6 software were utilized to design the shell reinforcement. The concept was initially created in 3D Max before being completed using the architectural software Rhino 6. The honeycomb openings were provided on the shell surface to allow concrete mixture penetrate through them before its setting. In addition, Figure 2 shows how the concrete mixture can adhere appropriately to the shell surface and fill these holes. These honeycombs were chosen to be small enough to be incorporated into the shell surface and to allow the concrete mix to flow readily through it. Honeycombs are made topologically by connecting regular or random polygons with a specific thickness in a plane. The honeycomb structure has the advantages of simplicity, high porosity, lightweight, and simple manufacturing, all indicating high impact resistance potential.

In most cases, structures use honeycomb or honeycomb-like shells as their core to increase their capacity for carrying loads and absorbing energy. As a result, it is necessary to investigate the mechanical properties of honeycombs or honey-comb-composed composite structures under various loading conditions. In addition, one of the goals of using UHPC is to reduce the amount of cement and CO_2 emissions required for a particular load [29]. As a result, utilizing a reinforcement strategy with a significant non-cementitious volume fraction can also

significantly enhance this advantage. The ongoing review examines UHPC's behavior, supported with a 3D-printed honeycomb PLA shell structure under compressive, tensile, and flexural loads.

Three samples were taken into consideration for each of the compressive and tensile tests. Two of the samples were reinforced using the 3D-printing method, and one of the samples was unreinforced concrete. The first reinforced 3D-printed sample had more honeycomb holes at the shell's top, while the second sample had more honeycomb holes at its bottom. The purpose of considering this modification to the arrangement of the holes was to investigate the effect of the bonding that existed between the aggregates and the cement matrix in the 3D-printed shell structure. The proper movement of the concrete mixture through these holes required consideration of various hole sizes. For flexural tests, two examples were considered. One was unreinforced, and another was built up using a 3D-printing technique.

The thickness of the shells was 2 cm, and their dimensions were $8 \times 8 \times 8$ cm³ for compressive, $8 \times 8 \times 13$ cm³ for tensile, and $58 \times 8 \times 8$ cm³ for flexural strength tests, as sown in Figure 3.



Figure 3. Dimensions of shell reinforcements for: a — compressive; b — tensile; c — flexural strength tests

PLA material was printed using the FDM 3Dprinting method to create concrete reinforcement. This study chose PLA because of its appropriate mechanical properties, such as its excellent printability, mechanical properties, and environmental friendliness. Because being reinforced with a polymeric substance rather than steel, polymer-reinforced constructions are

	The mechanical pro	operties of PLA [3	Table 1 [51]
Material	Ultimate Tensile Strength, MPa	Yield Strength, MPa	Maximum, Strain, %
PLA	57.16 ±0.35	52.47 ± 0.35	2.35 ± 0.05

stronger, lighter, and more thermally insulated [30]. Table 1 shows the mechanical properties of PLA. PLA reinforcement meshes were made using Quantum, a commercially available FDM 3D-printer. The model is printed layer by layer, bottom to top, using FDM. The printing parameters may affect the final structure's mechanical characteristics. As a result, they remained constant throughout this investigation. At 60 °C for the build platform and 190 °C for the extruder, all parts were printed with identical parameters. The stress transfer and, ultimately, the sample's overall mechanical characteristics may be impacted by the specified printing path, which substantially impacts the mechanical behavior of printed reinforcements.

Figure 4 shows the process of fabricating 3D-printed reinforcements. The shell formation is constructed layer by layer using 3D-printed PLA materials. Figure 5 demonstrates the completed forms of the shells.



Figure 4. The 3D-printing process of reinforcements for: a — compressive; b — tensile; c — flexural strength tests



Figure 5. The completed 3D-printed shells for: a — compressive; b — tensile; c — flexural strength tests

2.2. *Materials and Sample Preparation.* Ordinary Portland Cement (OPC) from Sabzevar factory, Sabzevar, Iran, micro silica manufactured by Novolipetsk Company (NLMK), Novolipetsk, Russia, quartz sand (as fine aggregates), crushed granite (as coarse aggregates) superplasticizer and tap water were used to prepare concrete samples. The OPC compositions are depicted in Table 2. It should be noted that the initial and final setting time of the OPC was 30 and 600 min, respectively. Besides, due to its micro-filling property, microsilica was used to fill the voids between the 3D-printed structure and the cementitious matrix [32; 33]. Table 3 presents the chemical constituents of microsilica. Fine aggregates with a specific gravity of 2.38 and coarse aggregates with a specific gravity of 2.65 were collected from the Semnan region, Iran. Figure 6 shows the gradation curves of fine and coarse aggregates.



Figure 6. Gradation curves of fine and coarse aggregates

Table 2

Table 3

Value, %

90-92

0.68

0.69

1.58

1.01

0.61

1.23

0.98

0.26

Chemical composition of micro silica

Chemical Composition

Silicon dioxide (SiO₂)

Calcium oxide (CaO)

Sodium oxide (Na₂O)

Carbon (C)

Sulfur (S)

Potassium oxide (K2O)

Magnesium oxide (MgO)

Alumina (Al₂O₃)

Iron oxide (Fe₂O₃)

Chemical composition of OPC

			Oxic	le, %				Blaine m ² /leg	Specific Creatity
SiO ₂	Fe ₂ O ₃	MgO	SO ₃	Al ₂ O ₃	CaO	K ₂ O	L.O.I.	Blaine, m ⁻ /kg	Specific Gravity
19.52	4.04	4.36	2.89	4.81	62.18	0.6	1.62	387	3.14

The UHPC was selected in this study as the concrete material due to its superior strength to normal concrete. Although UHPC has been commercially available for over a decade, the knowledge of its use in 3D-printing is just beginning to become more widely available. UHPC is more brittle than normal concrete, and thus it may be expected to be more difficult to improve its ductility using 3D-printed reinforcement. It is, therefore, necessary to investigate whether the same degree of ductility improvement can be obtained in UHPC as in normal concrete or not. The water/cement ratio was 0.25 in the preparation of this type of concrete, according to the suggestion of Chen et al. [34]. Besides, the micro silica to cement percentage was selected to be 15 %, as it was the optimum percentage based on paper [35]. Table 4 shows the mixture design of UHPC in the present research. The mentioned materials were mixed using a pan mixer at a constant rate of 48 rpm. For this purpose, aggregates were mixed with each other for about 2 min. Then, water, cement, silica fume, and superplasticizer were added and mixed until a homogeneous mix was achieved. Next, the molds were polished with oil, and the 3D-printed shell reinforcements were positioned inside them. For cylindrical samples, molds with diameters of 100 mm and heights of 200 mm were applied. Moreover, for cubic and prismatic samples, molds with dimensions of $100 \times 100 \times 100$ mm³ and $600 \times 100 \times 100$ mm³ were utilized, respectively (Figure 7). The prepared mixture was poured into the molds (Figure 8). The samples were placed in a water tank at a temperature of about 20 °C to cure the concrete specimens (Figure 9). After curing for 28 days, 3D-printed reinforced UHPC samples were tested for determination of their compressive, flexural, and tensile strengths based on Russian State Standard GOST 10180-2012 "Concretes"¹, Standard Test Method for Flexural Strength of Concrete ASTM C293/C293M², and ASTM C496³, respectively.

Table -	4
---------	---

Material	Cement, kg/m ³	Micro silica, kg/m ³	Sand, kg/m ³	Gravel, kg/m ³	Superplasticizer, kg/m ³	Water, kg/m ³	
UHPC	420	65	945	635	105	105	

Mixture design of UHPC



Figure 7. Concrete molds: *a* — cube; *b* — cylinder; *c* — prism

3. Results and Discussion

3.1. *Compressive Strength.* Table 5 presents the compressive strength values of the samples. As seen from the table, the unreinforced sample had the maximum compressive strength value.

Compressive strength values					
Specimen	Unreinforced sample	First reinforced sample	Second reinforced sample		
Ultimate Strength, MPa	36	33.2	27.5		

As shown in Figure 8, the compressive properties of the 3D-printed reinforced UHPC were lower than those of the unreinforced concrete. Nonetheless, it showed a more expanded elaxation curve.

There may be various reasons why 3D-printed reinforced specimens have a lower compressive strength than unreinforced specimens. One reason is the existence of weak boundary connections between concrete and 3D-

¹ GOST10180 Concretes. Methods for Determination of Strength by Control Samples. Standartinform: Moscow, Russia. 2013. (In Russ.) https://docs.cntd.ru/document/1200100908 (accessed: 14.03.2023).

² ASTM C293/C293M-16 Standard Test Method for Flexural Strength of Concrete (Using Simple Beam with Center-Point Loading). American Society for Testing of Materials: West Conshohocken PA USA 2016.

³ ASTM C496 Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Cylindrical Concrete Specimens. American Society for Testing of Materials: West Conshohocken PA USA, 2017.

printed reinforcement. Compared to the unreinforced sample, this may result in material fracture under compression at lower stress levels. Printed reinforcement may introduce numerous interfacial zones between the matrix and reinforcement, facilitating the crack initiation in reinforced specimens. In addition, the spacing regions of the printed reinforcement make matrix compaction slightly more challenging in the reinforced specimens, possibly resulting in more imperfections than in the unreinforced specimens. One more justification for the lower strength of reinforced specimens in comparison with the unreinforced one might be because of the weak bond between the reinforcement surface and the cement.



Figure 8. Variation of compressive stress with strain for cubic samples

It should be noted that the printed shell exhibited only natural roughness because no specific measures were taken to improve the bond in the tests. However, if necessary, printing the reinforcement with a specific surface roughness and morphology will undoubtedly increase the bond significantly. In previous research, it was also found that reinforced samples had a lower compressive strength. Salazar et al., for example [29] utilized 3D-printed polymeric lattices made of either Acrylonitrile Butadiene Styrene (ABS) or PLA to reinforce UHPC. Their findings demonstrated that the reinforced sample had a lower compressive strength than the unreinforced sample. The strength was decreased because less of the high compressive-modulus UHPC was incorporated into the specimens due to using lattice reinforcement.

In contrast to the unreinforced sample, the reinforced sample's core did not yield, and only the cover was separated from the reinforced portion, as shown in Figure 9. The 3D-printed reinforcement had the possibility to help the center of the specimen. In addition, the first reinforced sample had a stronger connection to the cementitious matrix than the second. In the first reinforced specimen, because the lower part of the support has fewer openings, most of the aggregates are in the center and inside the shell. However, additional holes are at the bottom of the reinforcement in the second case. As a result, most of the aggregates will be found in the center of the sample because the concrete was poured through the holes. Consequently, the strength will be greater if more aggregates are in the sample center.







Figure 9. Sample after compression tests: — unreinforced; *b* — first reinforced; *c* — second reinforced

3.2. Tensile Strength. Because the printed PLA shell in reinforced specimens constitutes a part of the crosssection in tension tests, Table 6 demonstrates that the unreinforced sample has the highest tensile strength value of all the samples. As a result, reinforced specimens have a lower tensile strength because the matrix's actual cross-section area is smaller than the unreinforced specimen. In addition, because the reinforced specimens were shaken externally to eliminate internal air bubbles and evenly distribute the mixture throughout the mold, the reinforced sample has less compaction than the unreinforced specimen. Be that as it may, for the unreinforced example, the mixture layers were compacted with steel bars. Other possible explanations for the higher tensile strength of the unreinforced specimen in comparison to the reinforced ones include the printed reinforcement's higher geometrical variability and less homogenous microstructure.

Гhe	values	of	tensile	strength
i ne	, muco	•••	constic	Strength

Table 6

Specimens	Unreinforced sample	First reinforced sample	Second reinforced sample
Tensile strength, MPa	5.49	4.11	2.86

The unreinforced specimen split into two different fragments, as depicted in Figure 10. The fragments demonstrate the brittle nature of the unreinforced specimen, which fractures catastrophically and without warning. However, because the reinforcement was 3D-printed, the reinforced samples' cores remained intact, only the concrete cover failed. In other words, when subjected to tension, the unreinforced specimen displayed the typical brittle behavior of cementitious materials. It only developed one crack and has a low strain capacity. However, specimens reinforced with a 3D-printed PLA shell can withstand greater strains. The concrete samples' ductility significantly increased due to the 3D-printed PLA reinforcement's ability to prevent complete splitting. It very well may be likewise seen that a single shear plane developed in the unreinforced specimen.



Figure 10. Sample after tension tests: a — unreinforced; b — first reinforced; c — second reinforced

In contrast, reinforced specimens contained many longitudinal cracks oriented parallel or nearly parallel to the external tensile stresses near the failure zone. Cementitious composites' deflection and tensile strain capacity were significantly increased when PLA reinforcement was used compared to the control specimen. Zhang et al.'s findings are consistent with this finding [36]. By conducting Brazilian splitting tests, it was demonstrated that 3D-PP reinforced cemented tailings backfill (CTB) samples have higher strains. In addition, the study discovered that adding 3D-PP effectively mitigates the damage process inherent in conventional CTB and enhances the strength property of the backfill. In another review, Mechtcherine et al. [37] also showed that the tensile strength of 3D-printed steel bars was about 20 % lower than that of conventional reinforcement bars. However, 3D-printed steel bars outperformed conventional bars in terms of yielding and strain capacity.

3.3. Flexural Strength. Figure 11 shows the variation of flexural stress with strain for prismatic samples. As seen from the figure, the inclusion of 3D-printed reinforcement does not fundamentally alter the behavior of the UHPC prior to the maximum stress, but it significantly enhances the post-cracking behavior of UHPC. The conventional concrete had linear behavior, while the reinforced concrete had nonlinear behavior. Figure 12 shows that the deformation of the reinforced was more than conventional concrete.



Figure 11. Variation of flexural stress with strain for prismatic samples



Figure 12. The deformation versus curve

The flexural strength of the unreinforced sample was greater than that of the 3D-printed reinforcement sample, as shown in Table 7. Compared to the unreinforced sample, the neutral axis of the reinforced sample is shifted closer to the sample's top side due to the reinforcement's lower elastic modulus than the cementitious matrix. Consequently, the reinforced sample's bottom side will experience higher tensile stress at the same bending moment. Likewise, because the reinforced specimen might contain imperfections, for example, trapped air voids because of poorly performed vibration, the flexural resistance strength in the unreinforced specimen is generally higher than the reinforced one. Similarly, Le et al. [38] demonstrated that 3D-printed reinforcement had lower strength values (compressive strength of 75–102 MPa and flexural strength of 6–17 MPa). In contrast, unreinforced concrete had high strengths (107 MPa in compression and 11 MPa in bending).

The values of flexural strength

Specimens	Unreinforced sample	Reinforced sample
Flexural Strength (KN)	248	147

Figure 13 demonstrates the failure of an unreinforced prismatic sample. The failure of this sample during the flexure test was immediate. The sample was broken into two parts after cracks appeared as the load increased. In other words, it showed classic brittle material behavior. The fracture was catastrophic and sudden at low deformation, with failure characterized by one full-depth crack near the center of the beam.

The gradual failure of the 3D-printed reinforcement sample is shown in Figure 14. There was a time lag between the cracks appearing and the sample failure. On the sample's surface, the crack propagation can be seen. The crack had a narrow width at the start of the loading. The cracks spread throughout the sample and got wider as the loading progressed. As it moved toward the compression zone, the numerous cracks widen in the tension zone. The observed cracks begin in the middle of the beam's span and move upward. The bottom of the



Figure 13. Unreinforced sample after failure

reinforced specimen experiences significant tensile stresses during the flexural process. Cracks will appear when the material reaches its tensile strength. One of the multiple cracks eventually becomes the dominant crack, significantly decreasing the sample's load capacity. The failure occurred in the reinforced specimen without the sample collapsing, making it challenging to distinguish the two sections from one another. This response clearly demonstrates that the reinforcement significantly altered the brittle cracking failure of cementitious mortar to ductile failure. Cracking and tortuous crack paths are associated with the ductility-enhancing mechanisms that occur during bending. 3D-printed shell can restrict the spread of breaks and give the concrete, effective resistance against more intense loadings after the presence of breaks (Figure 15). The findings are consistent with those of previous investigations. Salazar and others [29] stated that the 3D-printed reinforcement successfully converted the UHPC's brittle behavior into a ductile one. Mechtcherine and others [37] demonstrated that using 3D-printed steel bars in concrete enhanced ductility and strain capacity compared to conventional bars. Farina and others [18] concluded that the unreinforced specimens fail brittlely and have no residual strength after the crack has begun.

In contrast, specimens reinforced with polymeric and metallic 3D-printed fibers demonstrated residual load carrying capacity. Flexural studies by Xu and Šavija [1] revealed that unreinforced specimens displayed a brittle response with a comparatively modest deflection at failure. Then again, all specimens built up with 3D-printed polymeric lattices could withstand considerably higher displacement. Xu et al. [39] utilized 3D-printed polymeric octet cross-section structures to reinforce cementitious composites and noted higher flexibility compared to the unreinforced test.



Figure 14. 3D-printed reinforced sample: a — cracking moment; b — crack propagation; c — appearance of more cracks; d — failure



Figure 15. The 3D-printed reinforcement specimen failure mode

4. Conclusions

The main goal of the current study was to improve the mechanical properties and fracture mechanism of concrete by using 3D-printed reinforcement instead of steel bars, etc. For this purpose, the compressive, tensile, and flexural strength values of different 3D-printed reinforcement and unreinforced samples were determined and analyzed. The achieved findings of this research can be summarized as follows:

1. The UHPC samples with 3D-printed reinforcements showed poor mechanical properties compared to the unreinforced ones. The compressive, tensile, and flexural strengths of reinforced samples were less than those of unreinforced.

2. The reinforced samples indicated ductile behavior, while the behavior of the unreinforced samples was brittle. In other words, although the 3D-printed samples had weaker mechanical properties than the unreinforced ones, they could carry a load even after failure. The weakness of 3D-printed polymer reinforcement can be they by creating a very complicated spatial shape with artificially created roughness of its surfaces. Such spatial reinforcement, the creation of which is not possible using steel bars, would match the strength properties of steel cages.

3. The fracture mechanism of concrete improved by using 3D-printed reinforcement. The ductility of UHPC can be efficiently increased with 3D-printed reinforcement made from PLA, which is widely utilized in AM and is available at a reasonable cost.

4. The current study presents a new method for reinforcing concrete. The obtained results prove that 3Dprinting can convert ideas into reality.

Hence, it can be concluded that using a 3D-printed honeycomb PLA shell structure as reinforcement in concrete results in energy absorption improvement, weight reduction, and good symmetry. It should be noted that the polymer required for a 3D-printer can also be obtained from waste polymers. Utilization of large amounts of recycled polymer for 3D-printed reinforcements would be advantageous in terms of both the construction industry and environmental protection. Furthermore, it allows to control the reinforcement distribution within a structure precisely.

References

1. Xu Y., Šavija B. Development of strain hardening cementitious composite (SHCC) reinforced with 3D printed polymeric reinforcement: Mechanical properties. *Composites Part B: Engineering*. 2019;(174):107011. https://doi.org/10. 1016/j.compositesb.2019.107011

2. Jaimes W., Maroufi S. Sustainability in steel making. *Current opinion in green and sustainable chemistry*. 2020; (24):42–47. https://doi.org/10.1016/j.cogsc.2020.01.002

3. Hasanzadeh A., Vatin N.I. Hematibahar M., Kharun M. Shooshpasha I. Prediction of the mechanical properties of basalt fiber reinforced high-performance concrete using machine learning techniques. *Materials*. 2022;(15):7165. https://doi.org/10.3390/ma15207165

4. Ji Y., Xu W., Sun Y., Ma Y., He Q., Xing Z. Grey correlation analysis of the durability of steel fiber-reinforced concrete under environmental action. *Materials*. 2022;(15):4748. https://doi.org/10.3390/ ma15144748

5. Mu Y., Xia H., Yan Y., Wang Z., Guo R. Fracture behavior of basalt fiber-reinforced airport pavement concrete at different strain rates. Materials. 2022;(15):7379. https://doi.org/10.3390/ma15207379

6. Mohtasham Moein M., Saradar A., Rahmati K., Shirkouh A.H. Sadrinejad I., Aramali V., Karakouzian, M. Investigation of impact resistance of high-strength portland cement concrete containing steel fibers. *Materials*. 2022;(15): 7157. https://doi.org/10.3390/ma15207157

7. Eskandarinia M., Esmailzade M., Hojatkashani A., Rahmani A., Jahandari S. Optimized alkali-activated slag-based concrete reinforced with recycled tire steel fiber. *Materials* 2022(15);6623: https://doi.org/10.3390/ma15196623

8. Hematibahar M., Vatin N.I., Alaraza H.A.A., Khalilavi A., Kharun M. The prediction of compressive strength and compressive stress–strain of basalt fiber reinforced high-performance concrete using classical programming and logistic map algorithm. *Materials* 2022;19:6975. https://doi.org/10.3390/ ma15196975

9. Hasanzadeh A., Shooshpasha I. A study on the combined effects of silica fume particles and polyethylene terephthalate fibres on the mechanical and microstructural characteristics of cemented sand. *International Journal of Geosynthetics and Ground*. 2021;(7):98. https://doi.org/10.1007/s40891-021-00340-4

10. Hasanzadeh A., Shooshpasha I. Influences of silica fume particles and polyethylene terephthalate fibers on the mechanical characteristics of cement-treated sandy soil using ultrasonic pulse velocity. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*. 2022;(81)14. https://doi.org/10.1007/s10064-021-02494-x

11. Stähli P., Van Mier J.G. Manufacturing fibre anisotropy and fracture of hybrid fibre concrete. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007;(74):223–242. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.01.028

12. Kim T.G., Shin G.Y., Shim D.S. Study on the interfacial characteristics and crack propagation of 630 stainless steel fabricated by hybrid additive manufacturing (additional DED building on L-PBFed substrate). *Materials Science and Engineering*. 2022;(835):142657. https://doi.org/10.1016/j.msea.2022.142657

13. Ning X., Liu T., Wu C., Wang C. 3D printing in construction: current status implementation hindrances and development agenda. *Advances in Civil Engineering*. 2021;(2):6665333. https://doi.org/10.1155/2021/6665333

14. Tan W., Wang P. Experimental study on seepage properties of jointed rock-like samples based on 3D printing techniques. *Advances in Civil Engineering*. 2020:9403968. https://doi.org/10.1155/2020/9403968

15. Boparai K.S., Singh R., Singh H. Development of rapid tooling using fused deposition modeling: a review. *Rapid Prototyping Journal*. 2016;(22):281–299. https://doi.org/10.1108/RPJ-04-2014-0048

16. Mansouri A., Binali A., Aljawi A., Alhammadi A., Almir K., Alnuaimi E., Alyousuf H., Rodriguez-Ubinas E. Thermal modeling of the convective heat transfer in the large air cavities of the 3D concrete printed walls. *Cogent Engineering*. 2022;9(1):2130203. https://doi.org/10.1080/23311916.2022.2130203

17. Qin S., Cao S., Yilmaz E., Li J. Influence of types and shapes of 3D printed polymeric lattice on ductility performance of cementitious backfill composites. *Construction and Building Materials*. 2021;307:124973. https://doi.org/ 10.1016/j.conbuildmat.2021.124973

18. Farina I., Fabbrocino F., Carpentieri G., Modano M., Amendola A., Goodall R., Feo L., Fraternali F. On the reinforcement of cement mortars through 3D printed polymeric and metallic fibers. *Composites Part B: Engineering*. 2016;(90): 76-85. http://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.12.006

19. Meurer M., Classen M., Mechanical properties of hardened 3D printed concretes and mortars-development of a consistent experimental characterization strategy. *Materials*. 2021;14(4):752. https://doi.org/10.3390/ma14040752

20. Hambach M., Volkmer D. Properties of 3D-printed fiber-reinforced portland cement paste. Cement and *Concrete Composites*. 2017;79:62–70. https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2017.02.001

21. Hambach M., Möller H., Neumann T., Volkmer D. Portland cement paste with aligned carbon fibers exhibiting exceptionally high flexural strength (>100MPa). *Cement and Concrete Research*. 2016;89:80–86. https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2016.08.011

22. Medicis C., Gonzalez S., Alvarado Y.A., Vacca H.A., Mondragon I.F., Garcia R., Hernandez G. Mechanical performance of commercially available premix UHPC-based 3D printable concrete. *Materials*. 2022;15:6326. https://doi. org/10.3390/ma15186326

23. Rehman A.U., Kim J.H. 3D Concrete printing: A systematic review of rheology mix designs mechanical microstructural and durability characteristics. *Materials*. 2021;(14):3800. https://doi.org/10.3390/ma14143800

24. Pham L., Tran P. Sanjayan J. Steel fibres reinforced 3D printed concrete: influence of fibre sizes on mechanical performance. *Construction and Building Materials*. 2020;(250):118785. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118785

25. Arunothayan A.R., Nematollahi B., Ranade R., HauBong S., Sanjayan J.G., Khayat K.H. Fiber orientation effects on ultra-high performance concrete formed by 3D printing. *Cement and Concrete Research*. 2021;(143);106384. https://doi. org/10.1016/j.cemconres.2021.106384

26. Nam Y.J., Hwang Y.K., Park J.W., Lim Y.M. Feasibility study to control fiber distribution for enhancement of composite properties via three-dimensional printing. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019;(26):465–469. https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1432809

27. Rosewitz J.A., Choshali H.A., Rahbar N. Bioinspired design of architected cement-polymer composites. Cement and Concrete Composites. 2019;(96):252-265. https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2018.12.010

28. Katzer J., Szatkiewicz T. Effect of 3D printed spatial reinforcement on flexural characteristics of conventional mortar. *Materials*. 2020;(13):3133. https://doi.org/10.3390/ma13143133

29. Salazar B., Aghdasi P., Williams I.D., Ostertag C.P., Taylor H.K. Polymer lattice-reinforcement for enhancing ductility of concrete. *Materials & Design*. 2020;(196):109184. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.109184

30. Liu Y., Zwingmann B., Schlaich M. Carbon fiber reinforced polymer for cable structures—a review. *Polymers*. 2015;(7):2078-2099. https://doi.org/10.3390/polym7101501

31. Wittbrodt B., Pearce J.M. The Effects of PLA Color on Material Properties of 3-D Printed Components. Additive Manufacturing. 2015;(8):110–116. http://doi.org/10.1016/j.addma.2015.09.006

32. Hasanzadeh A., Shooshpasha I. Effects of silica fume on cemented sand using ultrasonic pulse velocity. *Journal of Adhesion Science and Technology*. 2019;(33):1184–1200. https://doi.org/10.1080/01694243.2019.1582890

33. Hasanzadeh A., Shooshpasha I. Influence of silica fume on the geotechnical characteristics of cemented sand. *Geotechnical and Geological Engineering*. 2020;(38):6295–6312. https://doi.org/10.1007/s10706-020-01436-w

34. Chen Y., Matalkah F., Soroushian P., Weerasiri R., Balachandra A. Optimization of ultra-high performance concrete quantification of characteristic features. *Cogent Engineering*. 2019;(6):1558696. https://doi.org/ 10.1080/23311916.2018. 1558696

35. Shihada S., Arafa M. Effects of silica fume ultrafine and mixing sequences on properties of ultra high performance concrete. *Asian Journal of Materials Science*. 2010;(2):137-146. http://doi.org/10.3923/ajmskr.2010.137.146

36. Zhang H., Cao C., Yilmaz E. Influence of 3D-printed polymer structures on dynamic splitting and crack propagation behavior of cementitious tailings backfill. *Construction and Building Materials*. 2022;(343):128137. http://doi. org/10.1016/j.conbuildmat.2022.128137

37. Mechtcherine V., Grafe J., Nerella V.N., Spaniol E., Hertel M., Füssel U. 3D-printed steel reinforcement for digital concrete construction — Manufacture mechanical properties and bond behaviour. *Construction and Building Materials*. 2018;(179):125-137. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.05.202

38. Le T.T., Austin S.A., Lim S., Buswell R.A., Law R., Gibb A.G.F., Thorpe T. Hardened properties of high-performance printing concrete. *Cement and Concrete Research*. 2012;(42):558–566. https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2011. 12.003

39. Xu Y., Zhang H., Gan Y., Šavija B. Cementitious composites reinforced with 3D printed functionally graded polymeric lattice structures: Experiments and modelling. *Additive Manufacturing*. 2021;(39):101887. https://doi.org/10.1016/j.addma. 2021.101887