

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия*Калачнов В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия*Адишходжаев А.И.*, д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан*Андреев В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия*Базаров Д.Р.*, д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан*Ванин В.В.*, д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина*Варум У.*, д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия*Войццкий З.*, проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша*Волосухин В.А.*, д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия*Галишикова В.В.*, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия*Дуцев М.В.*, д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия*Евакин А.Ю.*, д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада*Какоен С.*, д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия*Карпенко Н.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия*Козлов Д.В.*, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия*Красич С.*, канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия*Кудрявцев С.А.*, чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия*Курбацкий Е.Н.*, д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия*Лазарев Ю.Г.*, д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия*Магуле Ф.*, проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюлепек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция*Мендонка П.*, д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия*Перькова М.В.*, д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия*Сантос Р.*, исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия*Травуш В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия*Федюк Р.С.*, д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия*Якулов Н.М.*, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

- Lalin V.V., Semenov D.A.* Torsion problem: stress statement and solution by the boundary element method (Задача о кручении: постановка в напряжениях и решение методом граничных элементов) ... 339
- Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М.* Упругопластический расчет оболочек вариационным методом на основе полиномов высокой степени 349

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

- Kirsanov M.N.* The formula for the first natural frequency and the frequency spectrum of a spatial regular truss (Формула для первой частоты собственных колебаний и спектр частот пространственной регулярной фермы) 362
- Зылев В.Б., Платнов П.О.* Усиление свойств демпфирования после начального пластического деформирования: статические и динамические испытания 372
- Морозов Ю.А., Абрамов А.Г.* Критический радиус изгиба трубы, обусловленный разрушением материала 386

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ

- Федосов С.В., Красильников И.В., Румянцева В.Е., Красильникова И.А.* Физические особенности проблем жидкостной коррозии железобетона с позиций теории тепломассопереноса 392

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

- Khazov P.A., Erofeev V.I., Nikitina E.A., Pomazov A.P.* Experimental and analytical models of longitudinal deformation in pipe-concrete specimens with small cross-sections (Экспериментальные и аналитические модели продольного деформирования трубобетонных образцов малогабаритных сечений) 410

Редактор И.Л. Панкратова

Редактор англоязычных текстов С.Л. Шамбина

Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова

Компьютерная верстка: Н.В. Маркелова

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 11.07.2023. Выход в свет 25.08.2023. Формат 60x84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 10,0. Тираж 250 экз. Заказ № 1624. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2023 VOLUME 19 No. 4

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatın, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Vladimir I. Andreev, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dutsev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

Lalin V.V., Semenov D.A. Torsion problem: stress statement and solution by the boundary element method 339

Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Elastic-plastic analysis of shells by variational method on the basis of high-degree polynomials 349

DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

Kirsanov M.N. The formula for the first natural frequency and the frequency spectrum of a spatial regular truss 362

Zylev V.B., Platnov P.O. Strengthening of damping properties after initial plastic deformation: static and dynamic tests 372

Morozov Yu.A., Abramov A.G. Critical radius of pipe bending caused by the material destruction 386

CONSTRUCTION MATERIALS AND PRODUCTS

Fedosov S.V., Krasilnikov I.V., Rumyantseva V.E., Krasilnikova I.A. Physical features of the problems of liquid corrosion of reinforced concrete from the standpoint of the theory of heat and mass transfer..... 392

EXPERIMENTAL RESEARCH

Khazov P.A., Erofeev V.I., Nikitina E.A., Pomazov A.P. Experimental and analytical models of longitudinal deformation in pipe-concrete specimens with small cross-sections 410

Copy Editor I.L. Pankratova
English Texts' Editor S.L. Shambina
Graphic Designer Iu.N. Efremova
Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 2023
© Perkova M.V., photo on the cover of the journal
(Heydar Aliyev Center, Baku, Azerbaijan), 2023



АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-339-348


EDN: WXVNUL

UDC 69.04

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Torsion problem: stress statement and solution by the boundary element method

Vladimir V. Lalin^{1,2}  , Daniil A. Semenov¹ 

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation² RUDN University, Moscow, Russian Federation vllalin@yandex.ru

Article history

Received: June 26, 2023

Revised: August 02, 2023

Accepted: August 10, 2023

For citation

Lalin V.V., Semenov D.A. Torsion problem: stress statement and solution by the boundary element method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(4):339–348. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-339-348>

Abstract. The formulation of the problem of torsion regarding stresses and its solution by the boundary elements method are described. The main advantage of the problem formulation in stresses is direct determination of stresses in the cross-section, unlike the classical formulation, when the result of the approximate solution is the Prandtl stress function values, and the determination of stresses is brought down to numerical differentiation. The boundary integral equation of the second kind is obtained to formulate the problem with respect to stresses. The procedure for solving the problem by the boundary elements method is described, the system of solving equations is compiled. Solutions of test problems on torsion of rods with rectangular and channel cross-sections are presented. Comparison of the calculation results with known analytical solutions illustrates the reliability and permissible engineering accuracy of the obtained solutions.

Keywords: Elastic Rod Torsion, Poisson's equation, Integral Representation of Stresses, Boundary Integral Equation, Integral Equation of the second kind

Vladimir V. Lalin, Dr.Sc., Professor of the Higher School of Industrial, Civil and Road Construction of the Institute of Civil Engineering, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3850-424X; E-mail: vllalin@yandex.ru

Daniil A. Semenov, PhD student of the Higher School of Industrial, Civil and Road Construction of the Institute of Civil Engineering, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9144-1412; E-mail: dan290797@gmail.com

© Lalin V.V., Semenov D.A., 2023




This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Задача о кручении: постановка в напряжениях и решение методом граничных элементов

В.В. Лалин^{1,2}  , Д.А. Семенов¹ 

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

² Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

 vllalin@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 26 июня 2023 г.

Доработана: 2 августа 2023 г.

Принята к публикации: 10 августа 2023 г.

Для цитирования

Lalin V.V., Semenov D.A. Torsion problem: stress statement and solution by the boundary element method // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 4. С.339–348. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-339-348>

Аннотация. Приводится постановка задачи о кручении относительно напряжений и ее решение методом граничных элементов. Основным достоинством данной постановки задачи является непосредственное определение напряжений в сечении, в отличие от классической постановки, где результатом приближенного решения являются значения функции напряжений Прандтля, а определение напряжений сводится к численному дифференцированию. Для постановки задачи относительно напряжений получено граничное интегральное уравнение второго рода. Описана процедура решения задачи методом граничных элементов, составлена система разрешающих уравнений. Представлены решения тестовых задач о кручении стержней прямоугольного и швеллерного сечений. Сопоставление результатов расчета с известными аналитическими решениями иллюстрирует достоверность и допустимую инженерную точность полученных решений.

Ключевые слова: кручение упругих стержней, уравнение Пуассона, интегральное представление напряжений, граничное интегральное уравнение, интегральное уравнение второго рода

1. Introduction

The torsion problem for elastic prismatic rods is one of the oldest problems in the theory of elasticity. It was mathematically formulated by Saint-Venant in the middle of the 19th century. Before the broad spread of ECM, many problems for bars with relatively simple shapes of cross-section were solved analytically. The obtained solutions were summarized in the monograph [1].

With the creation of ECM, it became possible to obtain numerical solutions to the problem of torsion for bars with an arbitrary cross-section. This led to the rapid development of numerical methods for solving torsion problems and problems of potential theory that are similar in their mathematical formulation. In spite of their considerable age, these problems are still the subject of research for many scientists and engineers. These works contain formulations and methods for solving problems for inhomogeneous bars [2; 3], nanosized bars [4], problems of dynamics [5] and others.

One of the widely used numerical methods for solving torsion problems is the boundary elements method (BEM) [7–13]. This method has been actively developed since the 70s of the 20th century, but up to now its new formulations continue to appear, including those for torsion problems of bars [14–18].

The traditional mathematical formulation of the torsion problem consists of finding the stress function¹ [1; 19], and the stresses themselves are subsequently found by differentiation of the stress function [20; 21]. From the point of view of determining the stresses in a cross-section in numerical solution, the formulation of the problem regarding the stress function has two significant disadvantages. Since the result of the approximate solution of the problem in such a formulation is actually the values of the stress function in the nodes of boundary elements, then the determination of stresses is reduced to numerical differentiation. This leads to an additional source of computational error. The second reason reducing the accuracy of the solution is the fact that the boundary integral equation regarding the stress function is a numerically unstable equation of the first kind².

Лалин Владимир Владимирович, доктор технических наук, профессор Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства Инженерно-строительного института, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-3850-424X; E-mail: vllalin@yandex.ru

Семенов Даниил Аркадьевич, аспирант Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства Инженерно-строительного института, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-9144-1412; E-mail: dan290797@gmail.com

¹ Timoshenko S.P., Goodyear D. Theory of elasticity. Moscow: Nauka Publ.; 1975. (In Russ.)

² Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical methods. Moscow: Laboratoriya znanii Publ.; 2020. (In Russ.)

This paper presents a formulation of the torsion problem in stresses, derives the boundary integral equation regarding stresses, and describes the procedure for solving the problem by the boundary elements method. In difference from the classical formulation, the proposed formulation leads to an integral equation of the second kind, and its numerical algorithm is a stable one². The verification of the methodology was carried out on the example of two cross-sections by means of comparing the numerical solution of the problem with the known analytical one.

2. Methods

Formulation of the torsion problem regarding stresses

Consider the problem of torsion for a prismatic bar of an arbitrary cross-section under the action of two external moments which lie in the plane of its outermost cross-sections. We consider the volumetric forces to be equal to zero and the lateral surface to be free of external loads.

The following coordinate system has been chosen: the z -axis coincides with the axis of torsion, i.e., the axis that remains unmoved when the bar is twisted; the x - and y -axes are mutually orthogonal and located randomly in the plane of the cross-section.

The problem of torsion of a bar with cross-section S and contour Γ , is formulated in terms of the Prandtl stress function F in the following way³ [24]:

$$S: \Delta F = -2, \quad (1)$$

$$\Gamma: F = \text{const}, \quad (2)$$

where $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ is Laplace operator on a plane; $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$.

If the area confined by the contour is single-linked, then the constant in equation (2) can be assumed to be an arbitrary one, since it does not affect the values of stresses. Hereinafter we take F at the boundary Γ to be equal to zero.

Required tangential stresses τ_{zx} and τ_{zy} are expressed via the function F by the formulas:

$$\tau_{zx} = G\theta\partial_y F, \quad \tau_{zy} = -G\theta\partial_x F, \quad (3)$$

where G is the shear modulus; θ is an angle of the bar twisting per the unit of length.

In the numerical solution of problem (1), the determination of stresses will require numerical differentiation according to formulas (3). The next step is to state the problem formulation, where the unknowns will be stresses directly.

Equation (1) can be rewritten using equation (3):

$$\partial_x \tau_{zy} - \partial_y \tau_{zx} = 2G\theta. \quad (4)$$

The functions τ_{zy} and τ_{zx} should satisfy the equation of equilibrium

$$\partial_x \tau_{zx} + \partial_y \tau_{zy} = 0. \quad (5)$$

Boundary condition on the surface Γ :

$$n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} = 0, \quad (6)$$

where n_x and n_y are projections of the vector of unit external normal to the contour Γ .

Finally, the following formulation of the torsion problem relative to stresses is obtained:

³ Alexandrov A.V., Potapov V.D. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1990. (In Russ.)

$$S: \begin{cases} \partial_x \tau_{zx} + \partial_y \tau_{zy} = 0 \\ \partial_x \tau_{zy} - \partial_y \tau_{zx} = 2G\theta \end{cases} \quad (7)$$

$$\Gamma: n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} = 0. \quad (8)$$

Then it is possible to find the tangential stresses in the cross-section without finding the values of the stress function F by solving the system of equations (7)–(8).

The vector notation of the formulation (7)–(8) was given below with necessary explanations. It was supposed that vector $\boldsymbol{\tau}$ with components τ_{zx}, τ_{zy} , ∇ is a gradient operator in the plane, \mathbf{n} is a vector of external unit normal to the boundary Γ , vector $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ is a vector $\boldsymbol{\tau}$. rotated by $\pi/2$ clockwise when viewed from the z -axis. Thus, the formulation of the problem (7)–(8) acquires the following form:

$$S: \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} = 2G\theta \end{cases} \quad (9)$$

$$\Gamma: \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \equiv \tau_n = 0. \quad (10)$$

Boundary integral equations regarding the stress function

Let ξ, β be two arbitrary points in the plane, $\mathbf{R}_\xi, \mathbf{R}_\beta$ are their radius vectors. Then the following notations can be introduced:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\xi - \mathbf{R}_\beta, \quad R = |\mathbf{R}| = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}. \quad (11)$$

Also, the function $v(x, y)$ were introduced, which is the fundamental solution of the Laplace equation in the plane⁴:

$$v = \ln R. \quad (12)$$

By definition of a fundamental solution:

$$\Delta_\xi v = -2\pi\delta(\xi, \beta), \quad (13)$$

where Δ_ξ is the Laplace operator, with differentiation on the coordinates of the point ξ ; $\delta(\xi, \beta)$ is a Dirac delta function with the following basic property [7]:

$$\int_S g(\beta) \delta(\xi, \beta) dS(\beta) = g(\xi) c(\xi), \quad (14)$$

Here $g(\beta)$ is an arbitrary continuous function; the notation $dS(\beta)$ underlines that integration was performed on the coordinates of the point β :

$$c(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in S, \\ 0.5, & \xi \in \Gamma, \\ 0, & \xi \notin S + \Gamma. \end{cases} \quad (15)$$

The next step was to write the second Green's formula for the functions $v(x, y)$ and $F(x, y)$ [25]:

$$\int_S [-v(\Delta F) + F\Delta v] dS = \int_\Gamma \left(F \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial F}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (16)$$

The following form was obtained using equations (13)–(14):

⁴ Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of mathematical physics*: 6th ed. Moscow: House of Moscow State University Publ.; 1999. (In Russ.)

$$2\pi c(\xi)F(\xi) = \int_S -v(\Delta F) dS + \int_\Gamma \left(v \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Gamma.$$

Let us place the point ξ on the boundary of Γ , and take the value of the function $c(\xi)$ according to (15):

$$\pi F(\xi) = \int_S -v(\Delta F) dS + \int_\Gamma \left(v \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Gamma. \quad (17)$$

The sought function in equation (17) in solving the torsion problem is the normal derivative of the stress function F at the boundary Γ . Thus, equation (17) with respect to $\frac{\partial F}{\partial n}$ is a Fredholm equation of the first kind. The numerical solution of the equation of the first kind can lead to highly inaccurate results, since equations of this type are predominantly poorly specified and numerically unstable⁵.

Boundary integral equations regarding stresses

To obtain the boundary integral equations regarding stresses, it is necessary to have an integral representation on the plane for the stress vector $\boldsymbol{\tau}$.

Suppose \mathbf{a} is a unit tensor in the plane, \mathbf{c} is a basis co-symmetric tensor in the plane. If $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ are orthants of the Cartesian coordinate system, then the introduced tensors have the following dyadic representation:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{c} = \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x.$$

The main property of the introduced tensors:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}},$$

where \mathbf{b} is an arbitrary vector.

Let us write the following representation of the Laplacian from an arbitrary vector $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\Delta \boldsymbol{\varphi} = \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{c} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}). \quad (18)$$

Equation (18) was multiplied scalarly by the arbitrary vector \mathbf{f} , transforming the right part using equality [19]:

$$\mathbf{f} \cdot \nabla \cdot \mathbf{Q} = \nabla \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{f}) - \mathbf{Q}^T \cdot \nabla \mathbf{f}, \quad (19)$$

where \mathbf{Q} is an arbitrary tensor of the second rank; symbol “ \cdot ” means the double scalar product of two tensors [19].

The obtained equation has the form:

$$\mathbf{f} \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi} = \nabla \cdot (\mathbf{f} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \tilde{\mathbf{f}} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \nabla \cdot \mathbf{f} - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}}. \quad (20)$$

By integrating (20) over area S and using the formula of Ostrogradsky-Gauss [19]

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{b} dS = \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} d\Gamma, \quad (21)$$

which is valid for any vector \mathbf{b} , the following formula was obtained:

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi} dS = \int_\Gamma (f_n \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + f_t \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) d\Gamma - \int_S (\nabla \cdot \mathbf{f} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) dS, \quad (22)$$

where $f_n \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$, $f_t \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{f}$ are projections of the vector \mathbf{f} on the normal and tangent to the contour Γ .

⁵ Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical methods. Moscow: Laboratoriya znaniy Publ.; 2020. (In Russ.)

If using equations (11)–(13) and assuming that $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{b} \ln R$ in equality (22), where \mathbf{b} is an arbitrary constant vector, then the following formula for vector $\boldsymbol{\varphi}$ is got:

$$\Delta_{\beta} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{b} 2\pi \delta(\xi, \beta), \quad \nabla_{\beta} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^2}, \quad \nabla_{\beta} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{b} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{R}}}{R^2}. \quad (23)$$

Substituting this formula into (22) and using property (14), the next equation was obtained (if discarding an arbitrary vector \mathbf{b}):

$$2\pi c(\xi) \mathbf{f}(\xi) = \int_{\Gamma} \left(f_n \frac{\mathbf{R}}{R^2} - f_t \frac{\tilde{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d\Gamma(\beta) + \int_S \left(\frac{\tilde{\mathbf{R}}}{R^2} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}} - \frac{\mathbf{R}}{R^2} \nabla \cdot \mathbf{f} \right) dS(\beta). \quad (24)$$

Equality (24) is the required integral representation of an arbitrary vector \mathbf{f} in the plane. After replacing the arbitrary vector \mathbf{f} by the vector of tangential stresses $\boldsymbol{\tau}$ and using equations (9), (10), formula (24) can be written in the form:

$$2\pi c(\xi) \boldsymbol{\tau}(\xi) = - \int_{\Gamma} \tau_t \frac{\tilde{\mathbf{R}}}{R^2} d\Gamma(\beta) + \int_S \frac{\tilde{\mathbf{R}}}{R^2} 2G\theta dS(\beta). \quad (25)$$

Using formula (25), it is possible to determine the value of vector $\boldsymbol{\tau}$ at any point of cross-section S if its tangent projection τ_t is known at the boundary Γ . To find the function τ_t , it is necessary to multiply (25) scalarly by the vector \mathbf{t}_{ξ} (that is a unit vector tangent to the contour Γ at the point ξ) and impose the condition $\xi \in \Gamma$. Thus, the following integral equation with respect to the function τ_t ($\mathbf{t}_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = -\mathbf{n}_{\xi} \cdot \mathbf{R}$) can be obtained:

$$\tau_t(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \tau_t \frac{\mathbf{n}_{\xi} \cdot \mathbf{R}}{R^2} d\Gamma(\beta) = - \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\mathbf{n}_{\xi} \cdot \mathbf{R}}{R^2} 2G\theta dS(\beta). \quad (26)$$

Equation (26) is an integral equation of the second kind, unlike the formulation with the use of the stress function F (17).

The next step is to convert the integral in the right part of equation (26) into an integral over the contour:

$$\int_S \frac{\mathbf{n}_{\xi} \cdot \mathbf{R}}{R^2} dS(\beta) = \int_S \mathbf{n}_{\xi} \cdot \nabla_{\beta} \ln R dS(\beta) = \int_{\Gamma} \mathbf{n}_{\xi} \cdot \mathbf{n}_{\beta} \ln R d\Gamma(\beta).$$

As a result, equation (26) takes the form:

$$\tau_t(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \tau_t \frac{\mathbf{n}_{\xi} \cdot \mathbf{R}}{R^2} d\Gamma(\beta) = - \frac{2G\theta}{\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{n}_{\xi} \cdot \mathbf{n}_{\beta} \ln R d\Gamma(\beta). \quad (27)$$

The solution of equation (27) is the tangential stresses on the contour Γ , and one of them is the maximum tangential stress in the section [19].

Boundary elements method

After that the discrete form of the integral equation (27) is written, using the so-called “constant” boundary elements. The nodes, where the values of the unknown function are calculated, are in the middle of each element. The value of the sought function within one boundary element is assumed to be constant. The boundary was divided into N elements, and equation (27) was transformed into the form:

$$\tau_{ti} - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \tau_{tj} \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^2} d\Gamma(j) = - \frac{2G\theta}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \cdot \ln R_{ij} d\Gamma(j), \quad (28)$$

where i is the number of the boundary element.

The function τ_{tj} in equation (28) under the sign of the integral has the constant values in the area of each element and, therefore, can be taken out of the sign of integral:

$$\tau_{ti} - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \tau_{tj} \int_{\Gamma_j} \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^2} d\Gamma(j) = -\frac{2G\theta}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \cdot \ln R_{ij} d\Gamma(j).$$

If points i and j are located on the same element, then the integral

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^2} d\Gamma(j)$$

is identically equal to zero due to orthogonality of vectors $\mathbf{n}_i, \mathbf{R}_{ij}$, and the integral

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \cdot \ln R_{ij} d\Gamma(j)$$

can be calculated analytically:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \int_{\Gamma_j} \mathbf{n}_j \ln R_{ij} d\Gamma(j) &= \frac{1}{2} l \int_{-1}^1 \ln \frac{l|\xi|}{2} d\xi = \frac{1}{2} l \left(\int_{-1}^1 \ln \frac{l}{2} d\xi + \int_{-1}^1 \ln |\xi| d\xi \right) = \\ &= \frac{1}{2} l \left(2 \ln \frac{l}{2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln |\xi| d\xi + \int_{\varepsilon}^1 \ln \xi d\xi \right) \right) = \frac{1}{2} l \left(2 \ln \frac{l}{2} + 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\xi \ln \xi - \xi) \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = l \left(\ln \frac{l}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

The following notations were introduced:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^2} d\Gamma(j), \\ B_i &= -\frac{2G\theta}{\pi} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_{\Gamma_j} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \cdot \ln R_{ij} d\Gamma(j) + l \left(\ln \frac{l}{2} - 1 \right) \delta_{ij} \right], \end{aligned}$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta.

The obtained system of equations can be represented in a matrix form:

$$\underset{N \times N}{\mathbf{H}} \underset{N \times 1}{\mathbf{T}} = \underset{N \times 1}{\mathbf{B}},$$

where \mathbf{T} is a vector, whose components are unknown values of tangential stresses at the boundary.

3. Results and discussion

The calculations for two cross-sections (a rectangular and channel ones) were performed in order to verify the described formulation of the problem. The dimensions of these cross-sections are shown in Figure 1.

To simplify the interpretation of the results, it was assumed that the values of the angle of section's torsion θ (rad/cm) and shear modulus G (N/cm²) are equal to one, since their values do not affect the distribution of stresses in the cross-section. The distribution of maximum tangential stresses along the boundaries of the cross-sections was studied next. Only a part of the boundaries was considered due to the symmetrical distribution of stresses along the cross-section: there are two edges for a rectangular cross-section (from point 1 to point 3, according to Figure 1), and four edges for a channel section (from point 1 to point 5, according to Figure 1).

The results of the calculation were compared with the known analytical solution of the Poisson equation describing the torsion of bars with constant profile⁶ [1]. The calculations were performed with consecutive reduction of the boundary element size: 1, 0.5, 0.25 cm.

Figure 2 shows the results of the calculation of the rectangular cross-section.

Figure 3 presents the results of the calculation for the channel cross-section.

The table contains the comparative values of stresses for several nodes of the calculated cross-sections.

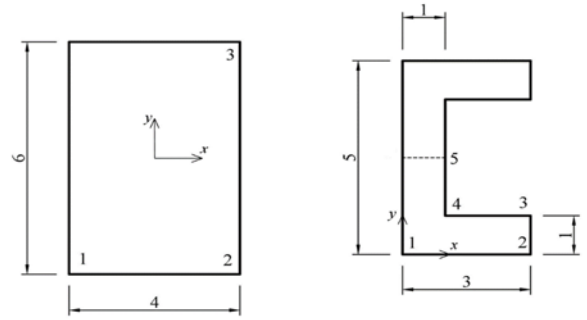
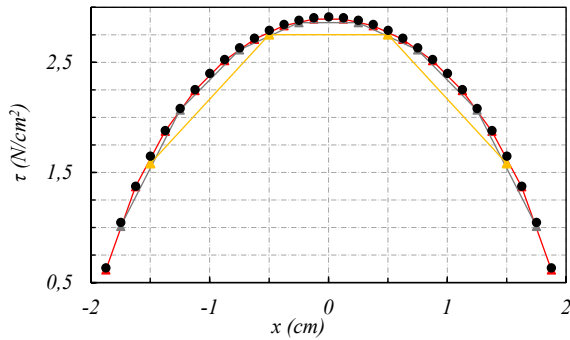
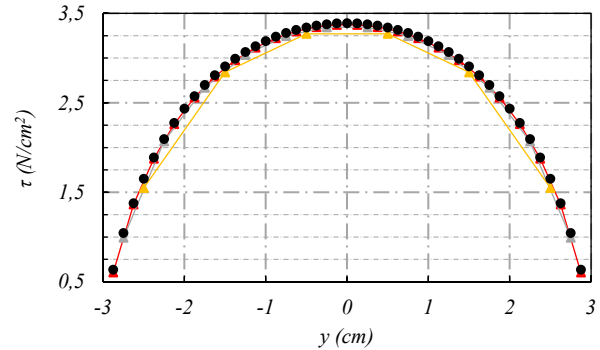


Figure 1. Dimensions of design sections, cm



a



b

Figure 2. Distribution of tangential stresses along the boundary of a rectangular cross-section:

a — edge between points 1 and 2; b — edge between points 2 and 3

● — analytical solution; ▲ — 0.25 cm mesh; ▲ — 0.5 cm mesh; ▲ — 1 cm mesh

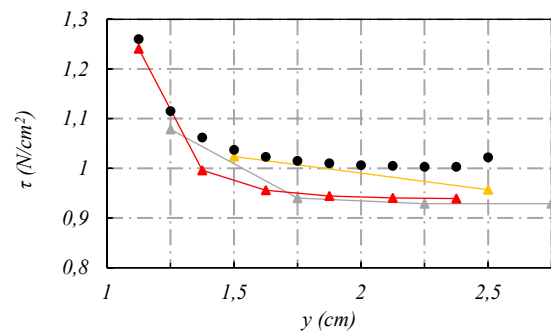
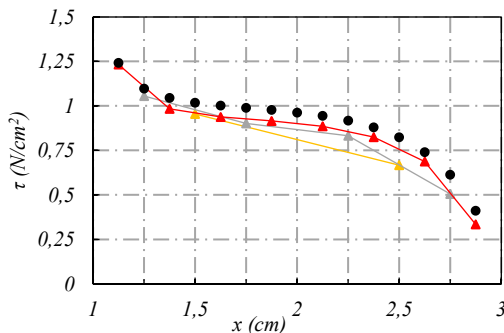
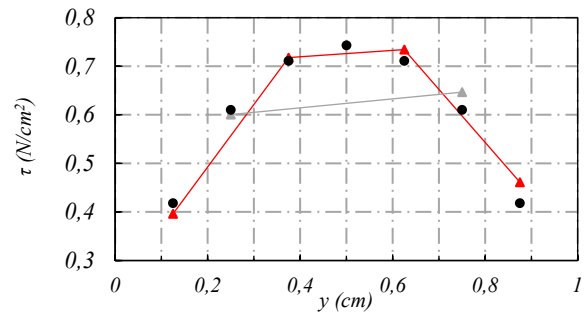
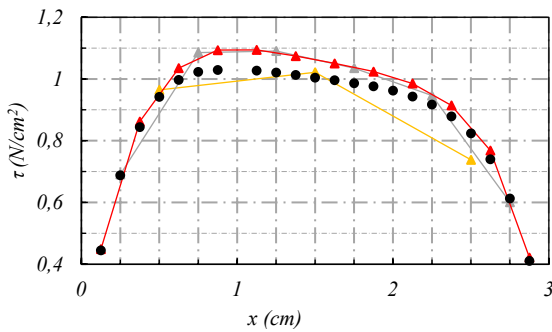


Figure 3. Distribution of tangential stresses along the boundary of a channel cross-section:

a — edge between points 1 and 2; b — edge between points 2 and 3;

c — edge between points 3 and 4; d — edge between points 4 and 5;

● — analytical solution; ▲ — 0.25 cm mesh; ▲ — 0.5 cm mesh; ▲ — 1 cm mesh

⁶ Timoshenko S.P., Goodyear D. *Theory of elasticity*. Moscow: Nauka Publ.; 1975. (In Russ.)

Values of tangential stresses at the boundaries of design cross-sections

Cross-section	Coordinate of node		Size of boundary element			Analytical solution of the Poisson equation	Relative inaccuracy of the numerical method, %
	x, cm	y, cm	1 cm	0.5 cm	0.25 cm		
Rectangle	-1.5	-3	1.582	–	–	1.648	4
	2	0.25	–	3.345	–	3.378	1
	2	0.125	–	–	3.371	3.387	0.5
Channel	1.5	0	1.022	–	–	1.004	1.8
	3	0.75	–	0.647	–	0.610	1.5
	1.125	1	–	–	1.232	1.242	0.8
	1	1.125	–	–	1.241	1.260	1.5

The analysis of the obtained results demonstrates the acceptable inaccuracy for solving the problem by the method of boundary elements in stresses. On the basis of comparison of the calculation results with the analytical solution, it has been shown that satisfactory accuracy was achieved on the coarsest mesh of boundary elements. It has also been shown that acceptable accuracy was achieved in the nodes that are most important from the point of view of evaluating the strength of the cross-section, which are located in the zones of extreme stresses along the cross-section.

4. Conclusion

In this paper we have presented a formulation of the torsion problem in stresses, have derived the boundary integral equation regarding stresses, and have described the procedure for solving the problem by the boundary elements method. The main results are:

1. The integral representation of an arbitrary vector f in the plane.
2. The integral representation of a stress vector τ in the rod torsion problem.
3. The boundary integral equation of the second kind for the rod torsion problem.
4. The procedure for solving the proposed formulation using the boundary elements method.
5. The verification of the method on the example of two cross-sections.

It has been shown that the numerical solution satisfactory accuracy was achieved in comparison with the analytical solution.

References / Список литературы

1. Arutyunyan N.H., Abramyan B.L. *Torsion of elastic bodies*. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1963. (In Russ.)
Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 688 с.
2. Chen H., Gomez J., Pindera M.J. Saint Venant's torsion of homogeneous and composite bars by the finite volume method. *Composite Structures*. 2020;242:112–128. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112128>
3. Chen K.H., Kao J.H., Chen J.T., Liao J.F. A new error estimation technique for solving torsion bar problem with inclusion by using BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020;115:168–211. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.02.012>
4. Ma X., Kiani K. Spatially nonlocal instability modeling of torsionally loaded nanobeams. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2023;154:29–46. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.05.012>
5. Labaki J., A Barros P.L., Mesquita E. A model of the time-harmonic torsional response of piled plates using an IBEM-FEM coupling. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021;125:241–249. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.01.010>
6. Sapountzakis E.J., Tsipiras V.J., Argyridi A.K. Torsional vibration analysis of bars including secondary torsional shear deformation effect by the boundary element method. *Journal of Sound and Vibration*. 2015;355:208–231. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.04.032>
7. Katsikadelis J.T. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists. Theory and Applications*. Athens: School of Civil Engineering, National Technical University of Athens; 2016.
8. Fairweather G., Rizzo F.J., Shippy D.J., Wu Y.S. On the numerical solution of two-dimensional potential problems by an improved boundary integral equation method. *Journal of computational physics*. 1979;31:96–112.
9. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. SpringerLink; 1984. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3>
10. Kazakova A.O. Application of the boundary element method to numerical modeling of rod torsion. *Nauchnye issledovaniya: ot teorii k praktike [Scientific research: from theory to practice]*. 2016;(9):25–30. (In Russ.)

Казакова А.О. Применение метода граничных элементов к численному моделированию кручения стержня // Научные исследования: от теории к практике. 2016. Т. 3. № 9. С. 25–30.

11. Chen F. Solution of torsional problems by BEM. *WIT Transactions of Modelling and Simulations*. 1993;1:1–9.

12. Igumnov L.A. Variants of boundary-element method and boundary-integral equation method in linear theory of elasticity. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 2000;3(2):11–21. (In Russ.)

Игумнов Л.А. Варианты метода граничных элементов и метода граничных интегральных уравнений в линейной теории упругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Механика. 2000. Т. 3. № 2. С. 11–21.

13. Temis Y.M., Karaban V.V. Boundary element technique in torsion problems of beams with multiply connected cross-sections. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2001;5(2):39–51.

14. Dumont N.A. Complex-variable, high-precision formulation of the consistent boundary element method for 2D potential and elasticity problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2023;152:552–574. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.04.024>

15. Dumont N.A. The consistent boundary element method for potential and elasticity: Part I – Formulation and convergence theorem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2023;149:127–142. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.01.017>

16. Gil-Martin L.M., Palomares A., Hernandez-Montes E. Approximate expression of the Prandtl membrane analogy in linear elastic pure torsion of open thin-walled cross sections and regular polygons. *International Journal of Solids and Structures*. 2021;210-211:109–118. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.11.020>

17. Tsiptsis I.N., Sapountzakis E.J. Bars under nonuniform torsion – Application to steel bars, assessment of EC3 guidelines. *Engineering Structures*. 2014;60:133–147. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.12.027>

18. Sapountzakis E.J. Nonuniform torsion of multi-material composite bars by the boundary element method. *Computers & Structures*. 2001;79:2805–2816. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00147-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00147-X)

19. Lurie A.I. *Theory of Elasticity*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; 2005.

20. Friedman Z., Kosmatka J.B. Torsion and flexure of a prismatic isotropic beam using the boundary element method. *Computers & Structures*. 2000;74(4):479–494. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00045-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00045-0)

21. Cruz J.M.F., Mendonça A.V. Torsional analysis of thin-walled beams of open sections by the direct boundary element method. *Computers & Structures*. 2014;136:90–97. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.02.002>



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-349-361

EDN: WYVDDH

УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Упругопластический расчет оболочек вариационным методом на основе полиномов высокой степени

Ф.С. Хайруллин , О.М. Сахбиев  

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация

✉ somkazan@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 7 января 2023 г.

Доработана: 24 мая 2023 г.

Принята к публикации: 27 мая 2023 г.

Для цитирования

Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Упругопластический расчет оболочек вариационным методом на основе полиномов высокой степени // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 4. С. 349–361. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-349-361>

Аннотация. Цель исследования — развитие вариационного метода расчета трехмерных конструкций на основе аппроксимирующих функций с конечными носителями произвольной степени аппроксимации. В ранних работах авторов метод представлялся в линейной постановке, причем была показана возможность расчета, как трехмерных составных конструкций, так и тонких оболочек. Предложен алгоритм расчета на прочность толстых и тонких оболочек, в которых возникают упругопластические деформации. Геометрия оболочек описывается в криволинейной ортогональной системе координат; в цилиндрической, сферической или конической. В методике расчета использованы основные соотношения малых упругопластических деформаций для криволинейной системы координат. В алгоритм расчета закладывалась модель материала с линейным упрочнением. Для получения разрешающей системы нелинейных уравнений используется вариационный принцип Лагранжа. Задача решается итерационно. Первая итерация соответствует линейной задаче. На каждой итерации после разрешения системы уравнений подсчитываются интенсивности деформаций в каждой точке интегрирования. Эти интенсивности деформации подставляются в матрицы упругости на последующих итерациях. Итерационный процесс характеризуется пересчетом матрицы упругости на каждой итерации в каждой точке интегрирования. Исследования показали устойчивую сходимость итерационного процесса. Производилось тестовое решение задач упругопластического деформирования толстой трубы и тонкой оболочки. Результаты расчетов хорошо согласовывались с результатами, полученными как по классическим формулам для упругопластического деформирования, так и с результатами расчетов в программе Ansys Mechanical.

Ключевые слова: упругопластические деформации, трехмерное тело, конечные носители, конечные элементы

Хайруллин Фарид Сагитович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-5455-6659; E-mail: x_farid@mail.ru

Сахбиев Олег Миргасимович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-1670-4013; E-mail: somkazan@yandex.ru


© Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Elastic-plastic analysis of shells by variational method on the basis of high-degree polynomials

Farid S. Khayrullin , Oleg M. Sakhbiev  

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation

 somkazan@yandex.ru

Article history

Received: January 7, 2023

Revised: May 24, 2023

Accepted: May 27, 2023

For citation

Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Elastic-plastic analysis of shells by variational method on the basis of high-degree polynomials. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(4):349–361. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-349-361>

Abstract. The purpose of the research is to develop a variational method for calculation of three-dimensional structures based on approximating functions with finite carriers of an arbitrary degree of approximation. In the early papers of the authors, the method was presented in a linear formulation, and the possibility of calculating both three-dimensional compound structures and thin shells was shown. This paper proposes an algorithm for strength calculation of thick and thin shells with elastic-plastic deformations. The geometry of shells is described in a curvilinear orthogonal coordinate system, e.g., in cylindrical, spherical, or conical ones. The calculation method uses the basic equations of small elastic-plastic deformations for the curvilinear coordinate system. The calculation algorithm was based on a model of material with linear strengthening. To obtain a resolving system of nonlinear equations, the Lagrange variational principle is used. The problem is solved by means of iteration. The first iteration corresponds to a linear problem. At each iteration, after solving the system of equations, the intensities of deformations at each point of integration are calculated. These intensities of deformations are substituted into the matrices of elasticity at the following iterations. The process of iteration is characterized by recalculation of the elasticity matrix at each iteration in each integration point. The researches have shown a stable convergence of the process of iteration. A testing solution of elastic-plastic deformation problems of a thick pipe and a thin shell was carried out. The calculation results were in good agreement with the results obtained both by classical formulas for elastic plastic deformation and with the results of calculations in the Ansys Mechanical program.

Keywords: elastic-plastic deformations, three-dimensional solid, finite carriers, finite elements

1. Введение

В [1–3] авторами был представлен метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций. При выводе основных соотношений предполагалось, что перемещения и деформации малы. Как было показано в этих работах представленную методику возможно использовать как для трехмерных конструкций, так и для расчета тонких пластин и оболочек. Однако круг задач, решаемых вариационным методом расчета, основанным на функциях произвольной степени аппроксимации с конечными носителями, ограничивался лишь решением линейных задач. Это ограничение было преодолено в [4], где была показана возможность применения представленной методики для расчета на прочность массивных тел с учетом физической нелинейности материала. В данной работе представлен алгоритм расчета, в котором определяющие уравнения задаются в криволинейной ортогональной системе координат, что дает возможность удобного описания геометрии оболочек, в частности, цилиндрических, сферических и конических.

Совершенствование методик упругопластических расчетов является актуальной и важной задачей, что подтверждается множеством свежих работ по данной тематике [5–7]. Внимание исследователей уделяется расчетам тонкостенных элементов конструкций в нелинейной постановке [8], расчетам больших прогибов [9], а также расчетам железобетонных элементов конструкций с учетом физической нелиней-

Farid S. Khayrullin, Doctor in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Fundamentals of Structural Engineering and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5455-6659; E-mail: x_farid@mail.ru

Oleg M. Sakhbiev, PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Department of Fundamentals of Structural Engineering and Applied Mechanics Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-1670-4013; E-mail: somkazan@yandex.ru

ности [10]. Оценка прочностных характеристик с учетом нелинейности поведения материалов позволяет более точно определять предельные допустимые нагрузки для проектируемых изделий. Существенное увеличение прочности деталей из металлов можно добиться методами интенсивного пластического деформирования. Вопросам оптимального формирования сверхтонких материалов методами пластического деформирования посвящены работы [11; 12]. Такие материалы, как правило, обладают субультрамелкозернистой структурой [13]. В таких задачах очень важны методики оценки пластического деформирования. В [14] оцениваются величины начальной пластической деформации, и изучается влияние начальной деформации на последующее упрочнение. В [15] рассматриваются некоторые аспекты компьютерного моделирования развития мелкозернистых структур в материале. Достаточно подробный анализ методик интенсивного пластического деформирования приводится в [16]. В [17] разработан подход к определению напряженного состояния шарообразных заготовок в закрытой матрице при пластическом деформировании. Таким образом, разработка и совершенствование методики упругопластических расчетов для произвольной формы конструкции и деталей является актуальной задачей и позволяет получать более экономичные решения.

2. Методы исследования

Деформации ε_{ij} , заданные в ортогональной криволинейной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, определяются по формулам [4]:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_{ij} u_j + k_{il} u_l,$$

$$\gamma_{ij} = 2 \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - k_{ij} u_i - k_{ji} u_j, \quad i = \overline{1,3}, \quad (1)$$

где u_i ($i = \overline{1,3}$) — компоненты перемещения; k_{ij} — главные кривизны; $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ — углы сдвига, A_i — коэффициенты Ляме, в левой части соотношений нет суммирования по индексам, индексы j, l получают круговой перестановкой индексов i, j, l .

Для получения разрешающих уравнений воспользуемся известными гипотезами из теории малых упругопластических деформаций [18].

Девiator напряжений D_σ выражается через девiator деформаций D_ε следующим образом:

$$D_\sigma = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} \cdot D_\varepsilon, \quad (2)$$

где σ_o — интенсивность напряжений; ε_o — интенсивность деформаций, которые определяются по формулам:

$$\sigma_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)},$$

$$\varepsilon_o = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6 \cdot (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)},$$

где $\sigma_{ii}, \varepsilon_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$ — соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Запишем равенство (2) в компонентном виде:

$$(\sigma_{ii} - \sigma_c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_c),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_o}{3 \cdot \varepsilon_o} \cdot \gamma_{ij}, \quad i \neq j. \quad (3)$$

Здесь нет суммирования $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$, $\sigma_c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$ — среднее нормальное напряжение, $\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}$ — средняя деформация, которые связаны известным соотношением [18]:

$$\sigma_c = K \cdot \theta = K \cdot 3 \cdot \varepsilon_c, \quad (4)$$

$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}$ — модуль объёмной деформации; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Интенсивность напряжений σ_o является функцией интенсивности деформаций ε_o при любых видах напряженного состояния [18]:

$$\sigma_o = \Phi(\varepsilon_o). \quad (5)$$

Используя соотношения (4), (5) соотношения (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{\varepsilon_o} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_c) + 3 \cdot K \cdot \varepsilon_c, \\ \sigma_{22} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{\varepsilon_o} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_c) + 3 \cdot K \cdot \varepsilon_c, \\ \sigma_{33} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{\varepsilon_o} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_c) + 3 \cdot K \cdot \varepsilon_c, \\ \sigma_{12} &= \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{3 \cdot \varepsilon_o} \cdot \gamma_{12}, \quad \sigma_{23} = \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{3 \cdot \varepsilon_o} \cdot \gamma_{23}, \quad \sigma_{13} = \frac{\Phi(\varepsilon_o)}{3 \cdot \varepsilon_o} \cdot \gamma_{13}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматривается упругопластический материал с линейным упрочнением (рис. 1, 2). Нелинейная часть диаграммы $\sigma - \varepsilon$ для такого материала заменяется линейной частью (рис. 1) с целью упрощения расчетов. Для такого материала также и расчетная диаграмма в осях $\sigma_o - \varepsilon_o$ имеет аналогичный кусочно-линейный вид (рис. 2) по тем же причинам.

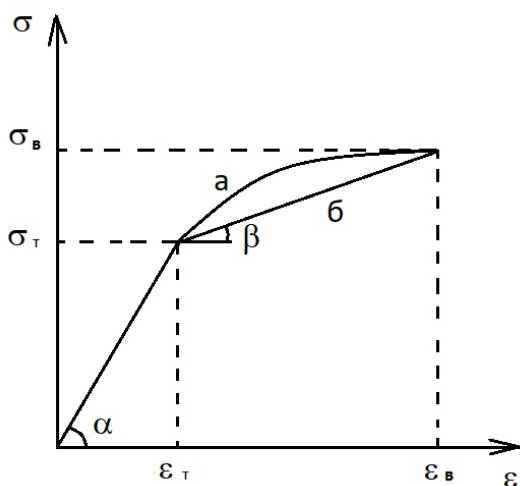


Рис. 1. Схематичная диаграмма растяжения материала:
a — условная диаграмма; *б* — расчетная диаграмма
Figure 1. Schematic diagram of the material tension:
a — conditional diagram; *b* — calculation diagram

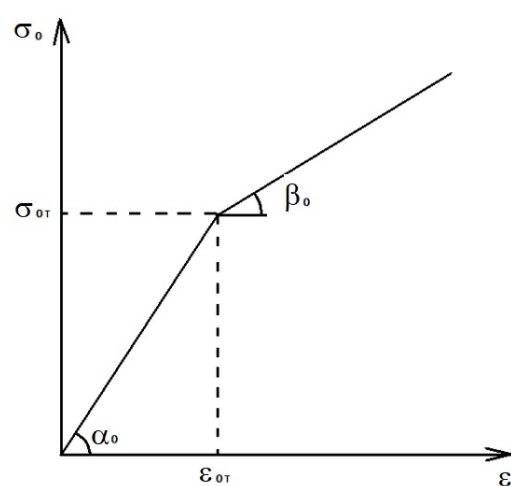


Рис. 2. Диаграмма деформирования материала
Figure 2. Material deformation diagram

Между углами наклона $\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0$, модулем упругости E , модулем пластического упрочнения при растяжении E_T , модулем пластического упрочнения E_0' и упругой постоянной E_0 существуют зависимости:

$$E = tg(\alpha), \quad E_T = tg(\beta), \quad E_0 = tg(\alpha_0), \quad E_0' = tg(\beta_0), \quad E_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(1+\nu)} E, \quad E_0' = \frac{E_T}{1 - \frac{1-2 \cdot \nu}{3} \cdot \frac{E_T}{E}}.$$

С учетом этих соотношений для материала с линейным упрочнением соотношение (5) можно записать в следующем виде [19]:

$$\sigma_o = \Phi(\epsilon_o) = E_0 \cdot \epsilon_o \cdot [1 - \omega(\epsilon_o)]. \tag{7}$$

Здесь

$$\omega(\epsilon_o) = \begin{cases} 0, & \text{если } \epsilon_o \leq \epsilon_{0T} \\ \lambda_0 \cdot (1 - \frac{\epsilon_{0T}}{\epsilon_o}), & \text{если } \epsilon_o > \epsilon_{0T} \end{cases},$$

$$\lambda_0 = 1 - \frac{E_0'}{E_0}, \quad \epsilon_{0T} = \frac{2}{3} \cdot (1 + \nu) \cdot \epsilon_T, \quad \sigma_{0T} = \sigma_T,$$

где ϵ_{0T} и σ_{0T} — соответственно интенсивности деформаций и напряжений, при которых возникают пластические деформации.

В качестве условия пластичности используется условие пластичности Губера – Мизеса. Согласно этой гипотезе, в материале возникают пластические деформации, когда интенсивность напряжений достигает величины, равной пределу текучести:

$$\sigma_o = \sigma_T.$$

Трехмерная конструкция разбивается на подобласти V_k (рис. 3), которые представляют собой криволинейные шестигранники с гранями в виде кусочно-гладких поверхностей ($\Omega_i, i = \overline{1,6}$).

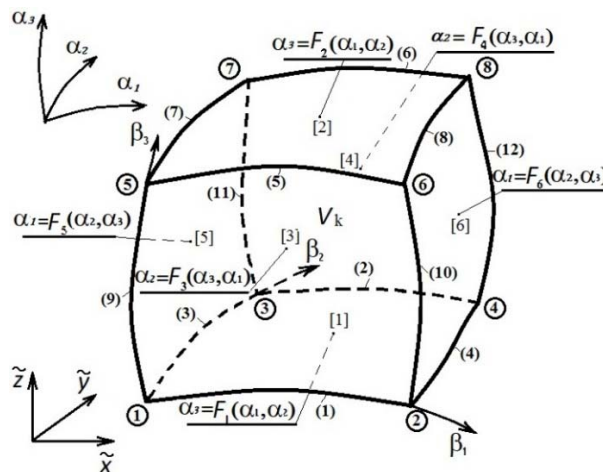


Рис. 3. Нумерация узлов подобласти
Figure 3. Numbering of nodes in the subsection

Узлы, грани и стороны нумеруются, как указано на рис. 3. Вводятся глобальная декартова система координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ и ортогональная криволинейная система координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, чтобы уравнения граней можно было задать относительно соответствующих координатных плоскостей в следующем виде [4]:

$$\alpha_3 = F_1(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_3 = F_2(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_2 = F_3(\alpha_3, \alpha_1), \alpha_2 = F_4(\alpha_3, \alpha_1),$$

$$\alpha_1 = F_5(\alpha_2, \alpha_3), \alpha_1 = F_6(\alpha_2, \alpha_3),$$

где $F_i, i = \overline{1,6}$ — однозначные функции класса C^1 .

Для тонких оболочек системы координат обычно выбираются таким образом, чтобы две противоположные грани подобласти совпадали с поверхностями оболочки.

Для каждой подобласти V_k вводится криволинейная система координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. В общем случае эта система координат не является ортогональной и задается с помощью соотношений:

$$\alpha_1 = F_5(\alpha_{25}(\beta_2, \beta_3), \alpha_{35}(\beta_2, \beta_3))(1 - \beta_1) + F_6(\alpha_{26}(\beta_2, \beta_3), \alpha_{36}(\beta_2, \beta_3))\beta_1 + \alpha_{10}(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

$$\alpha_2 = F_3(\alpha_{33}(\beta_1, \beta_3), \alpha_{13}(\beta_1, \beta_3))(1 - \beta_2) + F_4(\alpha_{34}(\beta_1, \beta_3), \alpha_{14}(\beta_1, \beta_3))\beta_2 + \alpha_{20}(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (8)$$

$$\alpha_3 = F_1(\alpha_{11}(\beta_1, \beta_2), \alpha_{21}(\beta_1, \beta_2))(1 - \beta_3) + F_2(\alpha_{12}(\beta_1, \beta_2), \alpha_{22}(\beta_1, \beta_2))\beta_3 + \alpha_{30}(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

где функции $\alpha_{25}(\beta_2, \beta_3), \alpha_{35}(\beta_2, \beta_3), \alpha_{10}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ специально подобранные функции [4].

Соотношения (8) заданы так, чтобы в подобласти V_k выполнялись условия $0 \leq \beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 1$, грани Ω_i задавались уравнениями $\beta_l = 0$ или $\beta_l = 1, l = \overline{1,3}$, граничные линии γ_i задавались только одной координатой $\beta_j, j = \overline{1,3}$.

Перемещения, заданные в глобальной системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, в границах подобласти V_k запишем с помощью аппроксимации:

$$\tilde{u}_i = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_{inml}^k t_l(\beta_1) t_m(\beta_2) t_n(\beta_3), \quad i = \overline{1,3}, \quad (9)$$

где $t_l(\beta_1)$ — функции формы, имеющие следующий вид: $t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, t_2(\beta_1) = \beta_1, t_l(\beta_1) = t_1(\beta_1)[t_2(\beta_1)]^{l-2}, (l = \overline{3, L}), D_{inml}^k$ — неизвестные константы.

Аппроксимацию (9) можно записать в матричной форме:

$$\{\tilde{u}^k\} = [D^k] \{t^k\}, \quad (10)$$

где $\{t^k\}^T = \{t_1^k, t_2^k, \dots, t_J^k\}$ — функции форм, заданные в локальной системе координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\{\tilde{u}^k\}^T = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$, $[D^k]$ — матрица неизвестных постоянных размерностью $3 \times J, J = N \cdot M \cdot L$.

Перемещения в локальной криволинейной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выражаются с помощью матрицы направляющих косинусов $[C^k]$ через перемещения в глобальной декартовой системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ [20]:

$$\{u^k\} = [C^k] \cdot \{\tilde{u}^k\}, \quad (11)$$

В дальнейшем индекс k , который указывает на принадлежность к области V_k , будем упускать для удобства изложения.

Компоненты тензора деформации записываем через перемещения в известном матричном виде [21]:

$$\{\varepsilon\} = [A]\{u\}, \quad (12)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13}\}$; $\{u\}^T = \{u_1, u_2, u_3\}$; $\gamma_{12} = 2 \cdot \varepsilon_{12}$; $\gamma_{23} = 2 \cdot \varepsilon_{23}$; $\gamma_{13} = 2 \cdot \varepsilon_{13}$; $\gamma_{23} = 2 \cdot \varepsilon_{23}$; $[A]$ – известная дифференциальная матрица [4].

Подставляя в соотношения (6) соотношения (7), записываем напряжения в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [E']\{\varepsilon\}, \quad (13)$$

где $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}\}$.

Матрица $[E']$ для каждой конкретной точки имеет следующий вид:

$$[E'] = \begin{bmatrix} \frac{4}{9}E_1 + K & E_2 & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & \frac{4}{9}E_1 + K & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & E_2 & \frac{4}{9}E_1 + K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{3} \end{bmatrix},$$

где $E_1 = E_0 \cdot [1 - \omega(\varepsilon_0)]$, $E_2 = -\frac{2}{9}E_1 + K$. Легко заметить, что при отсутствии пластических деформаций в точке, то есть при $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{0T}$, матрица E' совпадает с матрицей упругости E , которая приводится в [4].

Для получения основных разрешающих уравнений используется вариационный принцип Лагранжа [22]. Согласно этому принципу, должно выполняться условие

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{k=1}^K \int_{V_k} (\delta \Pi_k - \delta A_k) dV = 0, \quad (14)$$

где \mathcal{E} — полная энергия всей конструкции; Π_k , δA_k , — удельная потенциальная энергия деформации и вариация работы внешних сил на единице объема подобласти V_k .

Удельная потенциальная энергия деформации, записанная в матричном виде:

$$\Pi_k = \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}. \quad (15)$$

Последовательно подставляя (10)→(11)→(12)→(13)→(15), получаем удельную потенциальную энергию деформации, записанную через функции формы и матрицу констант $[D^k]$:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \{t^k\} [D^k]^T [C^k]^T [A]^T [E'] [A] [C^k] [D^k] \{t^k\} \quad (16)$$

Из уравнения (14) следует условие $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial D_{ij}^k} = 0$, что позволяет с учетом (16) получить нелинейную систему уравнений

$$[K] D = P, \quad (17)$$

где $[K]$ — матрица жесткости всей конструкции, $P = \sum_{k=1}^K \int_{V_k} \frac{\partial A_k}{\partial D_{ij}^k} dV$ — вектор правой части, который включает работу внешних сил A_k , D — вектор неизвестных постоянных.

Нелинейность системы (17) обусловлена наличием в матрице $[E']$ интенсивности деформаций. Матрица жесткости всей конструкции собирается на основе матриц жесткостей подобластей V_k , которые имеют вид

$$K_{nl} = \int_{V_k} \left(\{R\} [A]^T [E'] [A] \{c_{*i} t_j\} \right) dV; \quad (18)$$

здесь

$$n = (i-1) \cdot J + j; l = (m-1) \cdot J + r,$$

$$i = \overline{1,3}; j = \overline{1,J}; m = \overline{1,3}; r = \overline{1,J};$$

$$\{R\} = \{t_r \cdot c_{1m}, t_r \cdot c_{2m}, t_r \cdot c_{3m}\};$$

$$\{c_{*i} t_j\} = \begin{Bmatrix} c_{1i} t_j \\ c_{2i} t_j \\ c_{3i} t_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ t_j \\ 0 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{в } i\text{-й строке } i = \overline{1,3}.$$

Интегрирование в соотношении (18) производится численно методом Гаусса.

Нелинейная система (17) решается итерационно. На первой итерации решается упругая задача, поэтому система (17) в этом случае становится линейной и возможно найти вектор неизвестных постоянных D . Линейная система решается методом Холетского [23]. С помощью найденных неизвестных определяются перемещения, деформации, напряжения и интенсивности напряжений в расчетных точках (точки Гаусса и дополнительные точки) подобластей конструкции. Далее в каждой расчетной точке проверяется условие пластичности и в зависимости от условий формируется матрица $[E']$. Эта матрица используется на последующей итерации.

Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока разность между двумя последующими решениями не достигает необходимой точности.

3. Результаты и обсуждение

С целью проверки предложенной методики был произведен упругопластический расчет двух задач, в которых в качестве криволинейной ортогональной системы координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выбрана цилиндрическая система координат. Порядок аппроксимации в соотношении (9) брался следующим: $N=M=L=6$.

Первая задача представляет собой толстую цилиндрическую трубу под внутренним равномерным давлением. Предполагалось, что материал трубы идеально-пластичный (без упрочнения). В силу симметрии рассматривалась четверть трубы (рис. 4). Внешний радиус трубы 0,5 м, внутренний радиус 0,3 м, длина трубы 1 м. Модуль упругости 2×10^5 МПа, коэффициент Пуассона 0,3, предел текучести 300 МПа, $E_T = 0$. Граничные условия: при $z = 1$ м и при $z = 0$ — перемещения вдоль оси z равны нулю, с внешней

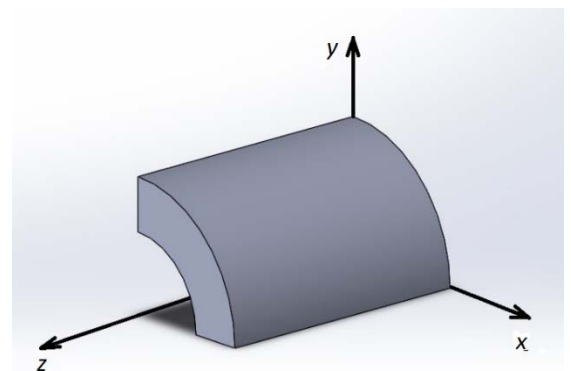


Рис. 4. Толстая цилиндрическая труба
Figure 4. Thick cylindrical tube

стороны трубы — свободный край, на поверхности $y = 0$ — перемещения вдоль оси y равны нулю, на поверхности $x = 0$ — перемещения вдоль оси x равны нулю, на внутренней поверхности — равномерное давление 170 МПа.

Для аналогичной задачи, в которой материал несжимаем (коэффициент Пуассона 0,5) известно аналитическое решение. Также известно, что при сжатии материала, как в нашем случае при коэффициенте Пуассона 0,3, известные аналитические формулы могут быть использованы с пренебрежительно малой погрешностью. Результаты, которые получены по известным формулам, можно сравнивать с результатами расчетов, полученных по представленной методике. Также результаты, полученные по представленной методике, сравнивались с результатами расчета в Ansys Mechanical APDL.

При расчете в Ansys использовался трехмерный 8-узловой конечный элемент (solid 185) в количестве 57 624 штуки.

При расчете по представленной методике использовалась одна подобласть, которая ограничивалась криволинейными координатами

$$r = 30 \text{ см}; r = 50 \text{ см}; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{2}; z = 0 \text{ см}; z = 100 \text{ см}.$$

В обоих случаях материал брался без упрочнения.

На рис. 5 приведено распределение напряжений σ_{yy} , которые были получены путем расчета в Ansys. Из рисунка видно, что максимальные напряжения равны 298 МПа. Максимальные напряжения, полученные по представленной методике, также составили 297,99 МПа. Максимальные напряжения возникают в зоне пластичности, причем в точках, наиболее удаленных от центра трубы, то есть в точках, где зона пластичности переходит в зону упругости. Для данной задачи переход зоны пластичности в зону упругости согласно аналитическому решению происходит при $r_T = 0,43096$ м, причем в этих точках возникают максимальные (окружные) напряжения, равные 301,88 МПа. Согласно расчету по представленной методике $r_T = 0,432$ м. На рис. 5 видно, что согласно расчету в Ansys максимальные напряжения возникают как раз около r_T . Максимальные напряжения по представленной методике отличаются от аналитического решения в пределах 1 %. Граница между пластическими и упругими деформациями r_T отличается от аналитического решения на 0,2 %. Таким образом, можно сделать вывод, что расчет этой задачи по представленной методике совпал с Ansys с точностью до тысячных долей процента и совпал с известным аналитическим решением с точностью до 1 %.

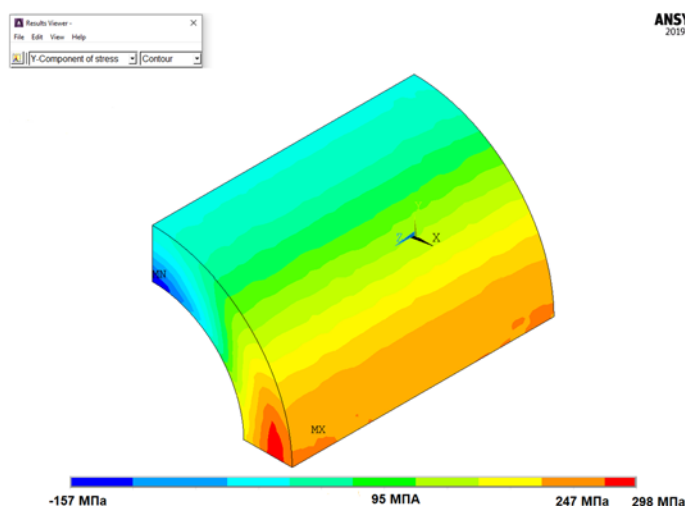


Рис. 5. Распределение напряжений в толстой цилиндрической трубе, полученное в Ansys
Figure 5. Distribution of stresses in a thick cylindrical tube, generated in the Ansys

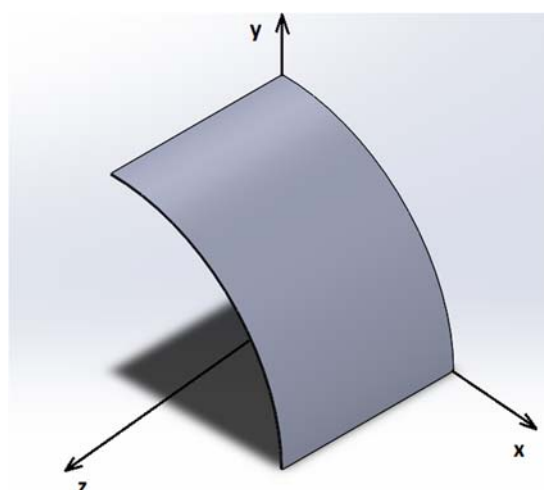


Рис. 6. Тонкая цилиндрическая оболочка
Figure 6. Thin cylindrical shell

Во второй задаче рассчитывалась тонкая цилиндрическая оболочка, которая находится под равномерным внутренним давлением. Материал оболочки с упрочнением. Модуль упругости 2×10^5 МПа, коэффициент Пуассона 0,3, предел текучести 300 МПа, $E_T = 10^5$ МПа. Рассматривалась четверть оболочки (рис. 6). Внешний радиус трубы 0,5 м, внутренний радиус 0,495 м, длина оболочки 0,5 м. Граничные условия: перемещения вдоль оси z равны нулю при $z = 0,5$ м, заделка при $z = 0$, свободный край с внешней стороны оболочки, перемещения вдоль оси y равны нулю на поверхности $y = 0$, перемещения вдоль оси x равны нулю на поверхности $x = 0$, на внутренней стороне поверхности равномерное давление $q = 3,5$ МПа.

При расчете в Ansys Mechanical использовался 8-узловой конечный элемент (solid 185) в количестве 6 699 945 штук. Результаты расчета, а именно характер распределения напряжений σ_{zz} , приведены на рис. 7. Из рисунка видно, что максимальные (MX = 693 МПа) и минимальные (MN) напряжения возникают в заделке.

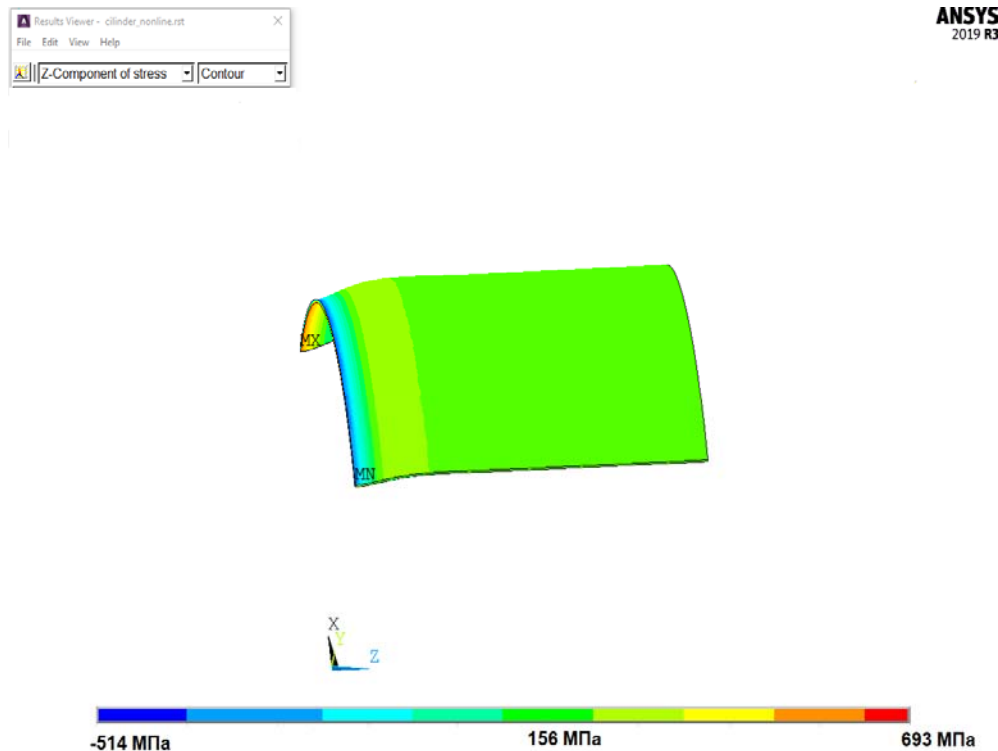


Рис. 7. Распределение напряжений в тонкой цилиндрической оболочке, полученное в Ansys
Figure 7. Distribution of stresses in a thin cylindrical shell, generated in Ansys

При расчете по представленной методике использовались две подобласти, которые ограничивались криволинейными координатами:

$$1\text{-я подобласть } r = 0,495 \text{ м}; r = 0,5 \text{ м}; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{2}; z = 0 \text{ м}; z = 0,05 \text{ м},$$

$$2\text{-я подобласть } r = 0,495 \text{ м}; r = 0,5 \text{ м}; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{2}; z = 0,05 \text{ м}; z = 0,5 \text{ м}.$$

Для этой задачи в заделке будет зона повышенных напряжений (зона концентрации напряжений), поэтому в соответствии с представленной методикой берется еще один конечный элемент как раз в том месте, где предполагается концентрация напряжений. Размер этого дополнительного элемента можно брать с размерами примерно 1 к 10 от размера всей подобласти. Порядок аппроксимации в соотношении (9) брался следующим: $N = M = L = 8$. Максимальные окружные напряжения, полученные по представленной методике, равны 711,47 МПа, что на 2,6% отличается от максимальных окружных напряжений, которые получены путем расчета этой задачи в Ansys.

4. Заключение

1. Предложенный авторами ранее метод расчета трехмерных конструкций был существенно доработан и появилась возможность расчета упругопластических деформаций тонких оболочек. Для описания геометрии оболочек используется криволинейная система координат.

2. Показано, что точность расчета труб и оболочек практически такая же, как и при расчете в Ansys, однако в представленной методике не требуется задание густой сетки конечных элементов. Например, тонкая оболочка по представленной методике была рассчитана двумя конечными элементами, в то время как в Ansys использовалось очень большое число конечных элементов.

3. Было продемонстрировано, что расчет по представленной методике полностью совпадает с классическим расчетом упругопластических деформаций толстой трубы.

Список литературы

1. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О методе расчета трехмерных конструкций сложной формы // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 23. С. 328–330. EDN: TCCWZJ

2. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Расчет ортотропных конструкций вариационным методом на основе трехмерных функций с конечными носителями // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 195–207. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.11>

3. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Об использовании вариационного метода на основе аппроксимирующих функций с конечными носителями для расчета трехмерных тонкостенных конструкций // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов: в 4-х томах. Уфа: Издательство: Башкирский государственный университет, 2019. С. 215–217. EDN: GNAXHE

4. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О расчете упругопластических деформаций вариационным методом на основе функций с конечными носителями // Вестник Технологического университета. 2021. Т. 24. № 4. С. 102–106. EDN: EPHBJZ

5. Ашкеев Ж.А., Андреященко В.А., Абишкенов М.Ж., Буканов Ж.У. Определение напряженного состояния и усилия деформации шарообразных заготовок в закрытой матрице // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 4. С. 5–12. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.01>

6. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 4. С. 60–70. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.07>

7. Богданов Н.П. Методика расчета упругопластического кручения цилиндрических стержней в сборнике: фундаментальная и прикладная наука: состояние и тенденции развития // Сборник статей XI Международной научно-практической конференции. Петрозаводск, 2021. С. 14–18. EDN: GEWJKU

8. Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П. Определяющие соотношения для нелинейно упругих тел и их реализация в расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения на основе смешанного МКЭ // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 157. № 2. С. 28–39.

9. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У., Абдрахманова А.И. Об одном алгоритме расчета больших упруго-пластических деформаций МКЭ // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), Алушта, 25–31 мая 2016 года. М.: Изд-во МАИ, 2016. С. 324–326.

10. Рыбаков В.А., Купечков А.М., Бикбаева Н.А. Физическая нелинейность при расчете железобетонных элементов в сборнике: проблемы обеспечения функционирования и развития наземной инфраструктуры комплексов систем вооружения // Материалы всероссийской научно-технической конференции «Проблемы обеспечения функционирования и развития наземной инфраструктуры комплексов систем вооружения». СПб.: Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, 2018. С. 55–61.

11. Naizabekov A., Andreyachshenko V., Kliber J. Forming of microstructure of the Al-Si-Fe – Mn system alloy by equal channel angular pressing with backpressure // Conf. Proc. 21st International Conference on Metallurgy and Materials (Metal-2012), Brno, Czech Republic. 2012. P. 391–395.

12. Andreyachshenko V.A., Naizabekov A.B. Microstructural and mechanical characteristics of AlSiMnFe alloy processed by equal channel angular pressing // Metalurgija. 2016. Vol. 55. No. 3. P. 353–356.

13. Дорофеев О.В., Курдюмова Л.Н., Родин Н.Н. Формирование градиентных субмикро- и нанокристаллических структур в объемных конструкционных материалах // Труды 3-й Международной научно-технической конференции. Металлофизика, механика материалов, наноструктур и процессов деформирования. МЕТАЛЛДЕФОРМ – 2009. В 2 томах. Т. 1. Самара. 2009. С. 229–232.

14. De Faria C.G., Almeida N.G.S., Balzuweit K., Aguilar M.T.P., Cetlin P.R. The effect of initial strain in the severe plastic deformation of aluminum on the subsequent work hardening regeneration through low strain amplitude multi-directional forging // Materials Letters. 2021. Vol. 290(1). Article 129462. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.129462>

15. Syvetlichnyy D.S., Majta J., Kuziak R., Muszka K. Experimental and modelling study of the grain refinement of Fe-30wt % Ni-Nb austenite model alloy subjected to severe plastic deformation process // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 21(1). P. 1–14. <https://doi.org/10.1007/s43452-021-00178-7>
16. Segal V. Review: Modes and Processes of Severe Plastic Deformation (SPD) // *Materials*. 2018. Vol. 11 (7). Article 1175. <https://doi.org/10.3390/ma11071175>
17. Ашкеев Ж.А., Андреев В.А., Абишкенов М.Ж., Буканов Ж.У. Определение напряженного состояния и усилия деформации шарообразных заготовок в закрытой матрице // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 4. С. 5–12. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.01>
18. Ишинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит. 2003. 704 с.
19. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Клочков Ю.В., Гуреева Н.А., Ищанов Т.Р. Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений // *Известия саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022. Т. 22. № 1. С. 48–61. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>
20. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 371 с.
22. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
23. Фролов А.В., Воеводин В.В., Коньшин И.Н., Теплов А.М. Исследование структурных свойств алгоритма разложения Холецкого: от давно известных фактов до новых выводов // *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*. 2015. Т. 19. № 4(70). С. 149–162. EDN: WAHOER

References

1. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. On the method of calculating three-dimensional structures of complex shape. *Bulletin of Kazan Technological University*. 2014;17(23):328–330. (In Russ.)
2. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Computing orthotropic constructions using the variation method based on three-dimensional functions with final carriers. *PNRPU mechanics bulletin*. 2017;2:195–207. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.11>
3. Khairullin F.S., Sakhbiev O.M. On the use of a variational method based on approximating functions with finite carriers for calculating three-dimensional thin-walled structures. *XII All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied Mechanics*. Collection of works. In 4 volumes. Ufa. Publisher: Bashkir State University. 2019;3: 215–217. (In Russ.)
4. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Calculation of the elastoplastic deformations by the variational method based on functions with finite carriers. *Herald of Technological University*. 2021;24(4):102–106. (In Russ.)
5. Ashkeev Zh.A., Andreyachshenko V.A., Abishkenov M.Zh., Bukanov Zh.U. Determination of the stress state and the force of deformation of ball-shaped billets in a closed matrix. *PNRPU mechanics bulletin*. 2021;4:5–12. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.01>
6. Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov VO. Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder with a coating based on the gradient model of thermoelasticity. *PNRPU mechanics bulletin*. 2021;4:60–70. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.07>
7. Bogdanov N.P. Method of calculation of elastic-plastic torsion of cylindrical rods. *Collection of articles of the XI International Scientific and practical Conference*. Petrozavodsk. 2021;3:14–18. (In Russ.) EDN: GEWJKU
8. Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Defining relations for nonlinear elastic bodies and their implementation in the calculation of axisymmetrically loaded shells of rotation based on a mixed FEM. *Scientific notes of Kazan University. Series: Physical and mathematical Sciences*. 2015;157(2):28–39. (In Russ.) EDN: UBGLNX
9. Davydov R.L., Sultanov L.U., Abdrakhmanova A.I. On an algorithm for calculating large elastic-plastic deformations of FEM in the collection. *Proceedings of the XI International Conference on Nonequilibrium Processes in Nozzles and Jets (NPNJ'2016)*, Alushta, May 25–31, 2016. Moscow: MAI Publ.; 2016:324–326. (In Russ.)
10. Rybakov V.A., Kupchekov A.M., Bikbaeva N.A. Physical nonlinearity in the calculation of reinforced concrete elements in the collection: problems of ensuring the functioning and development of ground infrastructure of weapon systems complexes. *Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference "Problems of ensuring the functioning and development of the ground infrastructure of weapons systems complexes"*. Publishing house: Military Space Academy named after A.F. Mozhaisky. Saint-Petersburg. 2018;3:55–61. (In Russ.)
11. Naizabekov A., Andreyachshenko V., Kliber J. Forming of microstructure of the Al–Si–Fe – Mn system alloy by equal channel angular pressing with backpressure. In: *Conf. Proc. 21st International Conference on Metallurgy and Materials (Metal–2012)*, Brno, Czech Republic. 2012:391–395.
12. Andreyachshenko V.A., Naizabekov A.B. Microstructural and mechanical characteristics of AlSiMnFe alloy processed by equal channel angular pressing. *Metalurgija*. 2016;55 (3):353–356.
13. Dorofeev O.V., Kurdyumova L.N., Rodin N.N. Formation of gradient submicro- and nanocrystalline structures in bulk structural materials. *Proceedings of the 3rd International Scientific and Technical Conference. Metallophysics*,

mechanics of materials, nanostructures and deformation processes. METALLDEFORM — 2009. In 2 volumes. Vol. 1. Samara; 2009:229–232. (In Russ.)

14. De Faria C.G., Almeida N.G.S., Balzuweit K., Aguilar M.T.P., Cetlin P.R. The effect of initial strain in the severe plastic deformation of aluminum on the subsequent work hardening regeneration through low strain amplitude multi-directional forging. *Materials Letters*. 2021;290(1):129462. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.129462>

15. Svyetlichnyy D.S., Majta J., Kuziak R., Muszka K. Experimental and modelling study of the grain refinement of Fe-30wt % Ni-Nb austenite model alloy subjected to severe plastic deformation process. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2021;21(1):1–14. <https://doi.org/10.1007/s43452-021-00178-7>

16. Segal V. Review: Modes and Processes of Severe Plastic Deformation (SPD). *Materials*. 2018;11(7):1175. <https://doi.org/10.3390/ma11071175>

17. Ashkeev Z.A., Andreyashchenko V.A., Abishkenov M.Zh., Bukanov Zh.U. Determination of the stress state and the force of deformation of ball-shaped billets in a closed matrix. *PNRPU mechanics bulletin*. 2021;4:5–12. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.01>

18. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Mathematical theory of plasticity*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2003. (In Russ.)

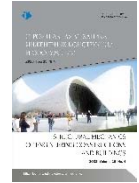
19. Dzhabrailov A.Sh., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Gureeva N.A., Ishchanov T.R. Nonlinear deformation of axisymmetrically loaded rotation shell based on fem with different variants of definitional equations. *Izvestiya of Saratov university. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022;22(1):48–61. (In Russ.) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>

20. Novatsky V. *The Theory of elasticity*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)

21. Novozhilov V.V. *Theory of elasticity*. Leningrad: Sudpromgiz Publ.; 1958. (In Russ.)

22. Abovsky N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. *Variational principles of elasticity theory and shell theory*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. (In Russ.)

23. Frolov A.V., Voevodin V.V., Konshin I.N., Teplov A.M. Investigation of the structural properties of the Cholesky decomposition algorithm: from long-known facts to new conclusions. *Vestnik UGASTU*. 2015;19(4):149–162. (In Russ.) EDN: WAHOER



ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-362-371

EDN: WCETZI

UDC 624.04:531.391.3

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

The formula for the first natural frequency and the frequency spectrum of a spatial regular truss

Mikhail N. Kirsanov 

National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation

✉ c216@ya

Article history

Received: May 16, 2023

Revised: August 14, 2023

Accepted: August 20, 2023

Acknowledgements

This work was financially supported by RSF 22-21-00473.

For citation

Kirsanov M.N. The formula for the first natural frequency and the frequency spectrum of a spatial regular truss. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(4):362–371. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-362-371>

Abstract. A scheme of a statically determinate spatial truss is proposed. The gable cover of the structure is formed by isosceles rod triangles with supports in the form of racks on the sides. A formula is derived for the lower boundary of the structure’s first natural frequency under the assumption that its mass is concentrated in the nodes. To calculate the stiffness of the truss according to the Maxwell — Mohr formula, the forces in the rods are found by cutting out the nodes in an analytical form. The lower limit of the fundamental frequency is calculated using the Dunkerley partial frequency method. A series of solutions obtained for trusses with a different number of panels is generalized to an arbitrary order of a regular truss by induction using Maple symbolic mathematics operators. Comparison of the analytical solution with the numerical value of the first frequency of the spectrum shows good agreement between the results. The spectra of a series of regular trusses of various orders are analyzed. Two spectral constants of the problem are found, one of which is the highest frequency of truss vibrations, which does not depend on their order.

Keywords: spatial truss, Dunkerley method, fundamental frequency, analytical solution, natural oscillations, regular construction, spectrum, spectral constant, induction method, Maxwell — Mohr formula

Mikhail N. Kirsanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-8588-3871; E-mail: c216@ya

© Kirsanov M.N., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Формула для первой частоты собственных колебаний и спектр частот пространственной регулярной фермы

М.Н. Кирсанов 

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Российская Федерация

✉ c216@ya

История статьи

Поступила в редакцию: 16 мая 2023 г.

Доработана: 14 августа 2023 г.

Принята к публикации: 20 августа 2023 г.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Для цитирования

Kirsanov M.N. The formula for the first natural frequency and the frequency spectrum of a spatial regular truss // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 4. С. 362–371. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-362-371>

Аннотация. Предложена схема статически определимой пространственной фермы. Двускатное покрытие конструкции образовано равнобедренными стержневыми треугольниками с опорами в виде стоек по боковым сторонам. Выводится формула для нижней границы первой собственной частоты сооружения в предположении, что его масса сконцентрирована в узлах. Для расчета жесткости фермы по формуле Максвелла — Мора усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов в аналитической форме. Нижняя граница основной частоты рассчитывается методом частичных частот Донкерлея. Серия решений, полученных для ферм с различным числом панелей, обобщается на произвольный порядок регулярной фермы методом индукции с привлечением операторов символьной математики Maple. Сравнение аналитического решения с численным значением первой частоты спектра показывает хорошее совпадение результатов. Анализируются спектры серии регулярных ферм различного порядка. Обнаружены две спектральные константы задачи, одна из которых — высшая частота колебаний ферм, не зависящая от их порядка.

Ключевые слова: пространственная ферма, метод Донкерлея, основная частота, аналитическое решение, собственные колебания, регулярная конструкция, спектр, спектральная константа, метод индукции, формула Максвелла — Мора

1. Introduction

The calculation of natural frequencies of structures in practice is carried out by the finite element method [1–3]. In this way, it is possible to calculate the entire spectrum of natural frequencies of rather complex, including statically indeterminate, structures, taking into account various types of fastening, material inhomogeneities, errors in mounting and manufacturing of structural elements, etc. For simple statically determinate constructions, analytical solutions for the lower and upper bounds of the first frequency are also possible. Such solutions are of particular value for regular constructions with a periodic structure. This is achieved by using the induction method [4–6]. Solutions to deformation problems for planar regular trusses with an arbitrary number of panels using the Maple computer mathematics system were obtained in [7; 8]. Formulas for deflections of some spatial rod systems are derived in [9; 10]. For the first time, the question of the existence of schemes of bar statically determinate structures was raised by Hutchinson R.G. and Fleck N.A. [11; 12], Zok F.W., Latture R.M., and Begley M.R. [13]. The optimization and classification of regular trusses was carried out by Kaveh A. [14; 15]. Analytical methods for calculating elements of building structures using the Maple system are considered in [16; 17]. The handbook [18] contains diagrams of various planar regular trusses and formulas for calculating their deflections, displacements of movable supports, and forces in characteristic rods. An analytical calculation of the deflection of a planar externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels was performed using the computer mathematics system in [19]. The formula for the dependence of the deflection of a planar truss on the number of panels was derived by induction in [20]. In [21], a lower bound for the first natural oscillation frequency of a flat truss was obtained using the Dunkerley method. The frequency spectrum of a family of regular trusses is also numerically analyzed here. A simplified Dunkerley method for estimating the first natural frequency of a planar truss was proposed in [22]. When simplifying the desired calculation formula for the first frequency, it is proposed here to calculate the sum of the members of the sequence by the average value of its element. The analytical dependence of the deflection of the spatial console of a triangular profile on

Кирсанов Михаил Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-8588-3871; E-mail: c216@ya

the number of panels was derived in [23]. The formula for the deflection of a cantilever truss with a cruciform lattice, depending on the redistribution of the cross-sectional areas of the rods and the number of panels, was obtained by induction in [24]. In [25], some exact solutions were found for the problems of deflection of arch-type planar trusses.

The number of schemes of rod statically determinate regular constructions that are attractive from the point of view of the possibility of obtaining analytical solutions is very limited. In [11], the problem of finding such constructions was even called “hunting”. There are especially few schemes of regular statically determinate spatial trusses. In this paper, we propose a scheme of a spatial truss and derive a formula for the lower limit of its first natural frequency.

2. Construction

The truss consists of n panels of length $2a$ and height h (Fig. 1) of six rods each. The sides of the panel are isosceles rod triangles connected at the bottom by a horizontal rod of length $2b$. The side supports of the structure are racks with a height d on one side and buildings with additional horizontal connections on the other. The construction is asymmetrical. In hinge A , it is fixed on a spherical support.

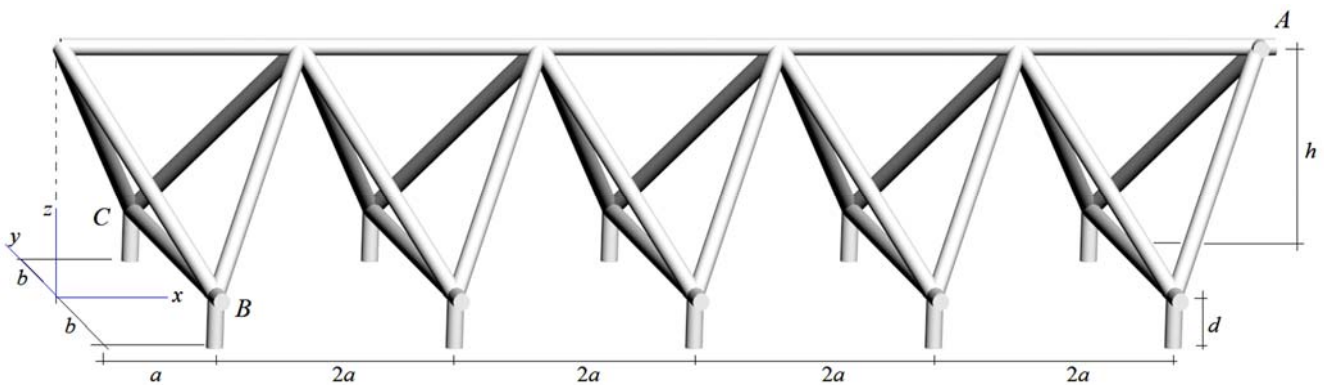


Figure 1. Truss scheme, $n = 5$

A truss of n panels $\eta = 9n + 3$ contains rods, of which n rods of length $2a$ in the upper chord, $4n$ inclined side rods of length $c = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$, $2n$ support posts of height d , n horizontal external support braces, n horizontal braces of length $2b$, and three rods simulating the spherical hinge A in upper belt. The number of internal nodes endowed with masses is equal to $K = 3n + 1$. The inertial properties of the structure are modeled by concentrated masses in the nodes, oscillating along the vertical z axis.

3. Methods

To calculate the forces in the elements, the coordinates of the truss hinges are entered into the Maple system program:

$$x_i = x_{i+n} = a(2i - 1), y_i = -y_{i+n} = -b, z_i = z_{i+n} = d, i = 1, \dots, n.$$

The coordinates of the hinges of the supports on the base:

$$\begin{aligned} x_{i+3n+1} &= x_{i+4n+1} = x_{i+5n+1} = x_i, \\ y_{i+3n+1} &= -y_{i+4n+1} = -b, z_{i+3n+1} = z_{i+4n+1} = 0, \\ y_{i+5n+1} &= -s, z_{i+5n+1} = d. \end{aligned}$$

Here s is the length of the lateral horizontal support links. This value will not be included in the calculation, since for the selected type of mass oscillations in the nodes (vertically), the force in these rods will be zero. The structure of the lattice, determined by the order of connection of the rods into nodes (hinges), is programmed by lists of the numbers of the ends of the rods:

$$\begin{aligned}
 N_i &= [i, i + 2n], N_{i+n} = [i, i + 2n + 1], \\
 N_{i+2n} &= [i + n, i + 2n], N_{i+3n} = [i + n, i + 2n + 1], \\
 N_{i+4n} &= [i + 2n, i + 2n + 1], N_{i+5n} = [i, i + n], \\
 N_{i+6n} &= [i, i + 3n + 1], N_{i+7n} = [i + n, i + 4n + 1], \\
 N_{i+8n} &= [i, i + 5n + 1], i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

The numbering order of the nodes and the choice of the beginning of the bar and its end does not affect either the force or its sign.

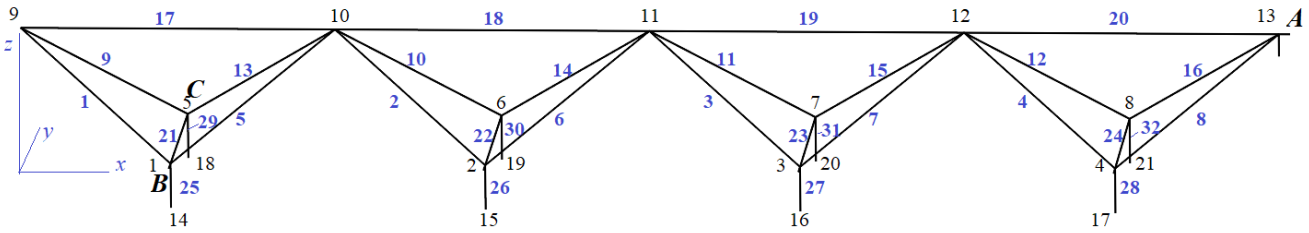


Figure 2. Numbering of knots and elements, $n = 4$

Based on the data on the coordinates and structure of the lattice, a matrix of a system of linear equations is compiled to determine the forces in the rods by cutting out nodes.

The system of linear equations for the equilibrium of nodes in projections onto the coordinate axes x, y, z is written in matrix form $\mathbf{GS} = \mathbf{B}$. Here \mathbf{G} — is the matrix of direction cosines in the projection equations, \mathbf{S} — is the force vector in the rods, including the support reactions, \mathbf{B} is the load vector. The projections of the conditional vectors of the rods look like $l_{x,i} = x_{N_{i,1}} - x_{N_{i,2}}, l_{y,i} = y_{N_{i,1}} - y_{N_{i,2}}, l_{z,i} = z_{N_{i,1}} - z_{N_{i,2}}$. Since the forces are applied to one end of the rod and the other in opposite directions, the direction cosines have different signs:

$$\begin{aligned}
 G_{3N_{i,1}-2,i} &= l_{x,i} / l_i, G_{3N_{i,1}-1,i} = l_{y,i} / l_i, G_{3N_{i,1},i} = l_{z,i} / l_i, \\
 G_{3N_{i,2}-2,i} &= -l_{x,i} / l_i, G_{3N_{i,2}-1,i} = -l_{y,i} / l_i, G_{3N_{i,2},i} = -l_{z,i} / l_i.
 \end{aligned}$$

where $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2 + l_{z,i}^2}$ — is the length of the rod. Rows of the matrix \mathbf{G} with numbers $3j - 2, j = 1, \dots, K$ contain the coefficients of the projection equation on the horizontal x axis, rows with numbers $3j - 1$ correspond to the projection equation on the y axis, and those with numbers $3j$ correspond to the projection equation on the vertical z axis.

The solution of the system of equations — the forces in the elements, is searched for in symbolic form using the Maple system.

Calculation of the natural vibration frequencies of the structure is carried out according to a simplified, but widespread truss model, in which the mass is evenly distributed over all internal nodes. If we assume only vertical motions of masses along the z axis, then the number of degrees of freedom of the considered structure is equal to K . In an analytical form for such a system, one can obtain a lower estimate of the first frequency using the Donkerley method. The Donkerley formula [26; 27] for the lower frequency limit has the form

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}. \tag{1}$$

where ω_p — are partial frequencies. Here, in fact, the problem of the eigenvalues of a matrix is replaced by the calculation of its trace. The equation of vertical oscillations of a separate mass m , has the form

$$m\ddot{z}_p + D_p z_p = 0, p = 1, \dots, K, \tag{2}$$

where D_p — is stiffness, the reciprocal of compliance $\delta_p = 1 / D_p$. Compliance (linear displacement along the z -axis) is determined by the Maxwell–Mohr formula. Assuming that the stiffnesses of all rods EF are the same, we have the expression:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{j=1}^{\eta} (S_j^{(p)})^2 l_j / (EF), \quad (3)$$

where $S_j^{(p)}$ — is the force in the rod with number j from the action of a vertical unit force applied to the node p , in which the mass is located. The value of the stiffness coefficient and the partial frequency are affected by the location of the mass. For harmonic oscillations: $z_p = U_p \sin(\omega t + \varphi)$, formula $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$ follows from (2). Substitution of this expression in (1) gives a formula for calculating the partial frequency:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta(n). \quad (4)$$

4. Results and discussion

4.1. The Dunkerley's method. Calculations of the frequencies of trusses with a different number of panels show that the coefficient $\Delta(n)$ in (4) has the form

$$\Delta(n) = \frac{C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 h^2 d}{EFh^2}. \quad (5)$$

Only the coefficients in the numerator depend on the order of the truss n in this expression. Sequential calculation of trusses with a different number of panels gives the following expressions:

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= (a^3 + 2b^3 + c^3 + 6h^2 d) / (EFh^2), \\ \Delta(2) &= (6a^3 + 6b^3 + 3c^3 + 13h^2 d) / (EFh^2), \\ \Delta(3) &= (12a^3 + 12b^3 + 6c^3 + 22h^2 d) / (EFh^2), \\ \Delta(4) &= (20a^3 + 20b^3 + 10c^3 + 33h^2 d) / (EFh^2), \dots \end{aligned}$$

To identify patterns in the formation of coefficients in these expressions, the sequence should be extended to eight. In this case, the operators of the Maple system can derive formulas for the common members: $C_1 = C_2 = n(n+1)$, $C_3 = n(n+1) / 2$, $C_4 = n^2 + 4n + 1$.

Thus, the dependence of the lower limit of the first frequency on the number of panels in the truss has the form:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(n(1+n)(a^3 + b^3 + c^3 / 2) + (n^2 + 4n + 1)dh^2)}}. \quad (6)$$

The solution can be checked against a numerical one in the Maple system using the Eigenvalues operator from the Linear Algebra package of linear algebra. In this case, the same program is used, according to which formula (6) was derived.

For example, the following parameters of a steel structure with masses $m = 200$ kg at the nodes were chosen: modulus of elasticity $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, cross-sectional area of the rods 9 cm^2 , dimensions $a = 3$ m, $h = 4$ m, $b = 8$ m, $d = 0.5$ m. Figure 3 shows the dependence curves of the first frequency on the number of panels, obtained numerically and analytically by formula (6).

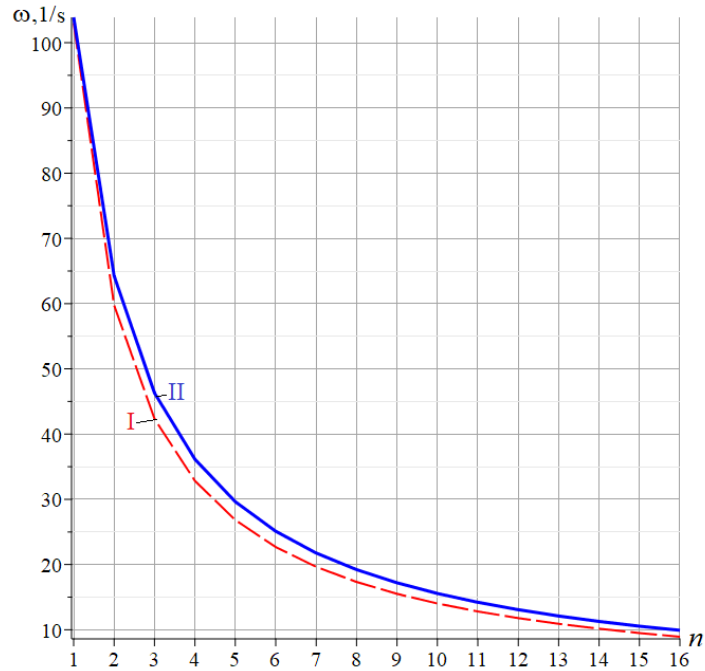


Figure 3. Dependence of the fundamental oscillation frequency on the number of panels:
I — solution (6); II — numerical solution

The frequency values obtained by the Dunkerley method, as expected, are less than the first frequency of the entire spectrum of natural frequencies calculated numerically.

The error of the proposed solution (6) can be refined by introducing the value of the relative error $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ (Figure 4). For trusses with a higher height h , the accuracy of the approximate analytical solution is less. With an increase in the number of panels, the error slightly increases, asymptotically approaching an acceptable value of 10% for the chosen dimensions.

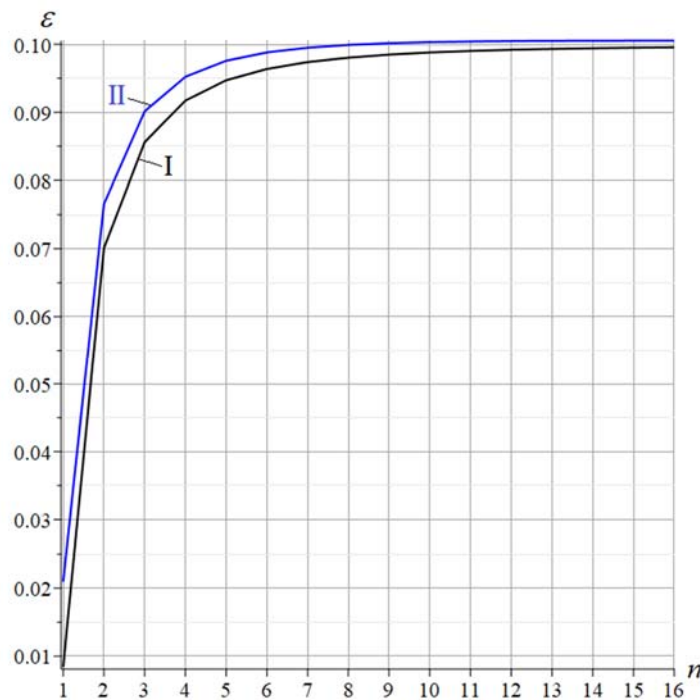


Figure 4. Dependence of the relative error on the number of panels:
I — $h = 4$ m; II — $h = 8$ m

4.2. Natural frequency spectrum of a family of regular trusses. If the frequency spectra of a series of trusses with a different number of panels are placed in the same coordinate axes, then certain regularities are found in the resulting picture. In Figure 5, dots indicate frequencies. Spectra of trusses of different orders are conditionally united by curves of the same color. Curve 1 corresponds to all four truss frequencies with one panel. The abscissa shows the numbers of frequencies in the ordered spectra. A characteristic feature is obvious: a frequency jump in all spectra after a frequency with a number equal to the truss order. Another feature is the presence of the upper boundary of the spectra. Regardless of the construction order, the highest frequency remains the same. This is the spectral constant of the construction. Another spectral constant is a straight line approached by frequencies with numbers n in the spectrum, where n is the order of the truss (Figure 6). The corresponding points lie on a curve of almost hyperbolic shape (spectral isoline), the asymptote of which, for the chosen dimensions of the truss, the rigidity of the rods, and the magnitude of the masses at the nodes, is equal to $143s^{-1}$.

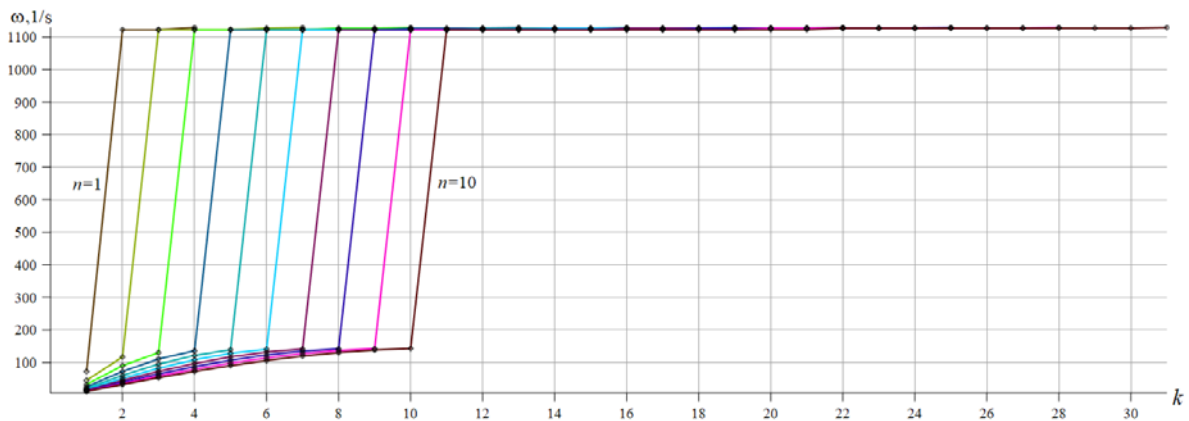


Figure 5. Spectra of Regular Trusses

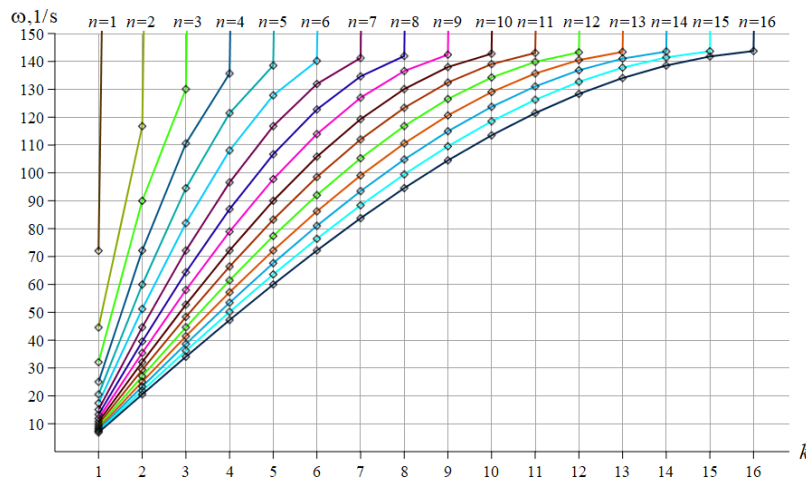


Figure 6. Spectra of Regular Trusses. First n frequencies

The frequency jump from frequency ω_n to frequency ω_{n+1} , where n is the order of the truss, is large enough. The frequency interval $[\omega_n, \omega_{n+1}]$ forms a certain resonant safety zone in the sense of ensuring the absence of resonance in the event of external periodic disturbances. In particular, if an engine with a natural frequency from this interval is installed on the truss, then, regardless of the number of panels, resonance phenomena in the truss-engine system can be avoided.

When changing the geometric parameters of the structure, the constants change in different ways, depending on the variable size. So, if you change the longitudinal dimension a from 3m to 16m, the upper

frequency limit decreases by only 0.5%. Similarly, changing the size of b within the same limits changes this frequency by 3.8%. When the truss height is changed from 4m to 17m, the highest frequency increases by 2%.

Only two spectral constants and one clearly defined spectral isoline are found here. For comparison, in [28], up to eight isolines were found in the spectrum of a family of planar regular trusses of the same type. A distinctive feature of the dependence of the first frequency on the number of panels found here is that the accuracy of the analytical estimate does not increase with increasing construction order, but decreases. However, a positive factor is the limited growth of the error and the relatively high accuracy, which is not typical for the known solutions [29; 30] according to Dunkerley. In the Dunkerley frequency calculation of a spatial L-shaped truss [31], where an analytical solution was also obtained, the accuracy varies from 28% for a small number of panels to several percent for a large number. In the resulting solution, on the contrary — from 1% to 10% with a large number of panels.

5. Conclusion

A model of a spatial regular truss is constructed and a formula for the dependence of the first frequency on the number of panels is derived. The statement of the problem of dynamics is simplified to one degree of freedom for each mass in the node. Accounting for the remaining degrees of freedom practically does not change the algorithm used, nor does it change the qualitative side of the results, but somewhat complicates the form of the solution and is not presented here. Compared with the known similar solutions, the resulting formula is much simpler and noticeably more accurate when compared with the numerical solution obtained without simplification by the Dunkerley method. The spectrum of a family of regular trusses is also simpler than in other problems.

The main results of the work:

1. A model of a spatial regular truss is proposed and, using well-known algorithms, a formula for the dependence of the first frequency on the number of panels is derived.
2. In the frequency spectrum of the truss family, two clearly defined spectral constants are found, one of which is the upper boundary of the spectrum.
3. Resonant safety zone of a family of regular trusses is found.

References

1. Han Q.H., Xu Y., Lu Y., Xu J., Zhao Q.H. Failure Mechanism of Steel Arch Trusses: Shaking Table Testing and FEM Analysis. *Engineering Structures*. 2015;82:186–198. <https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2014.10.013>
2. Colajanni P., La Mendola L., Latour M., Monaco A., Rizzano G. FEM Analysis of Push-out Test Response of Hybrid Steel Trussed Concrete Beams (HSTCBs). *Journal of Constructional Steel Research*. 2015;111:88–102. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2015.04.011>
3. Macareno L.M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. FEM Subsystem Replacement Techniques for Strength Problems in Variable Geometry Trusses. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008;44:346–357. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>
4. Belyankin N.A., Boyko A.Yu. Formulas for the deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels under uniform loading. *Structural mechanics and structures*. 2019;1(20):21–29. (In Russ.) EDN: YZOZGH
5. Tkachuk G.N. The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019;2(21):32–39. (In Russ.) EDN: JKKMFY
6. Boyko A.Yu., Tkachuk G.N. Derivation of formulas for the dependence of the deflection of a flat articulated-rod frame on the number of panels in the Maple system. *Structural mechanics and structures*. 2019;4(23):15–25. (In Russ.) EDN: ZJDBGW
7. Kirсанov M.N. Stress state and deformation of a rectangular spatial rod coating. *Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture*. 2016;1(41):93–100. (In Russ.) EDN: VNXUON
8. Buka-Vaivade K., Kirсанov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2020;15(4):510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>
9. Kirсанov M.N. Evaluation of the deflection and stability of a spatial beam truss. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2016;5(268):19–22. (In Russ.)
10. Larichev S.A. Inductive analysis of the effect of building lift on the rigidity of a spatial beam truss. *Collection of scientific and methodological articles "Trends in Applied Mechanics and Mechatronics"*. Moscow: Infra-M Publ.; 2015;(1):4–8. (In Russ.) EDN: AZKRYX
11. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2005;85(9):607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>

12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006;54(4):756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>
13. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016;96:184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
14. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. *Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods*. Springer Cham Publ.; 2020, 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>
15. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerreza A. Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Civil Engineering*. 2020;45(2):513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1>
16. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016;10(54):2647–2660. <https://doi.org/10.12988/ams.2016.67211>
17. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings*. 2015: 382–385. <https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342169>
18. Kirsanov M.N. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing, Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK; 2019. ISBN: (13):978-1-5275-3531-2
19. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021;2(29):29–37. (In Russ.) EDN: LJWUOW
20. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021;17:1701. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>
21. Kirsanov M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels. *AlfaBuild*. 2022;25:2507. <https://doi.org/10.57728/ALF.25.7>
22. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023;108:10801. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>
23. Domanov E.V. Analytical dependence of the deflection of a spatial cantilever of a triangular profile on the number of panels. *Science Almanac*. 2016;6-2(19):214–217. (In Russ.) <https://doi.org/10.17117/na.2016.06.02.214>
24. Petrichenko E.A. On the deflection of a cantilever truss with a cross-shaped lattice depending on the redistribution of the areas of the rods and the number of panels. *Science Almanac*. 2016;6-2(19):279–266. (In Russ.) <https://doi.org/10.17117/na.2016.06.02.279>
25. Osadchenko N.V. Analytical solutions to the problems of deflection of flat arch-type trusses. *Structural mechanics and structures*. 2018;1(16):12–33. (In Russ.) EDN: YSLUGL
26. Rutenberg A. A Lower Bound for Dunkerley’s Formula in Continuous Elastic Systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1976;45(2):249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X)
27. Low K.H. A Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000;42(7):1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1)
28. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analytical estimation of the fundamental frequency of natural vibrations of a regular truss. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):17–26. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002>
29. Shchigol E.D. Formula for the Lower Estimation of the Natural Oscillations of a Planar Regular Beam Truss with a Rectilinear Upper Chord. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):46–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>
30. Manukalo A.S. Analysis of the value of the first frequency of natural vibrations of a flat trussed truss. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):54–60. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006>
31. Komerzan E.V., Maslov A.N. Estimation of the fundamental oscillation frequency of an L-shaped spatial truss. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):35–45. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004>

Список литературы

1. Han Q.H., Xu Y., Lu Y., Xu J., Zhao Q.H. Failure Mechanism of Steel Arch Trusses: Shaking Table Testing and FEM Analysis // *Engineering Structures*. 2015. Vol. 82. P. 186–198. <https://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2014.10.013>
2. Colajanni P., La Mendola L., Latour M., Monaco A., Rizzano G. FEM Analysis of Push-out Test Response of Hybrid Steel Trussed Concrete Beams (HSTCBs) // *Journal of Constructional Steel Research*. 2015. Vol. 111. P. 88–102. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2015.04.011>
3. Macareno L.M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. FEM Subsystem Replacement Techniques for Strength Problems in Variable Geometry Trusses // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008. Vol. 44. P. 346–357. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>
4. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 1 (20). С. 21–29. EDN: YZozGH
5. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2 (21). С. 32–39. EDN: JKkMFY

6. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // Строительная механика и конструкции. 2019. № 4 (23). С. 15–25. EDN: ZJDBGW
7. Курсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93–100. EDN: VNXUON
8. Vuka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 4. С. 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>
9. Курсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19–22.
10. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Сборник научно-методических статей “Trends in Applied Mechanics and Mechatronics”. М.: Инфра-М., 2015. Т. 1. С. 4–8. EDN: AZKRYX
11. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2005. Vol. 85. Is. 9. P. 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. № 4. P. 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>
13. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. P. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
14. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. Springer Cham Publ.; 2020. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>
15. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerreza A. Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization // Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Civil Engineering. 2020. No. 45 (2). P. 513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1>
16. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle // Applied Mathematical Sciences. 2016. No. 10 (54). P. 2647–2660 <https://doi.org/10.12988/ams.2016.67211>
17. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. 2015. P. 382–385. <https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342169>
18. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK; 2019. 198 p. ISBN (13): 978-1-5275-3531-2
19. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. № 2 (29). С. 29–37. EDN: LJWUOW
20. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. No. 17. Article 1701. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>
21. Kirsanov M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels // AlfaBuild. 2022. No. 25. Article 2507. <https://doi.org/10.57728/ALF.25.7>
22. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 108. Article 10801. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>
23. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. 2016. № 6–2(19). С. 214–217. <https://doi.org/10.17117/na.2016.06.02.214>
24. Петриченко Е.А. О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. № 6–2(19). С. 279–266. <https://doi.org/10.17117/na.2016.06.02.279>
25. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. № 1 (16). С. 12–33. EDN: YSLUGL
26. Rutenberg A. A Lower Bound for Dunkerley’s Formula in Continuous Elastic Systems // Journal of Sound and Vibration. 1976. Vol. 45. Is. 2. P. 249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X)
27. Low K.H. A Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. Vol. 42. Is. 7. P. 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1)
28. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 17–26. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002>
29. Щиголь Е.Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>
30. Манукало А.С. Анализ значения первой частоты собственных колебаний плоской шпренгельной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 54–60. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006>
31. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 35–45. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004>



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-372-385

EDN: WMEUPV


УДК 624.04:004

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Усиление свойств демпфирования после начального пластического деформирования: статические и динамические испытания

В.Б. Зылев , П.О. Платнов  

Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация

 manuntdfan@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 12 мая 2023 г.

Доработана: 18 августа 2023 г.

Принята к публикации: 22 августа 2023 г.

Для цитирования

Зылев В.Б., Платнов П.О. Усиление свойств демпфирования после начального пластического деформирования: статические и динамические испытания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 4. С. 372–385. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-372-385>

Аннотация. Экспериментально изучался эффект влияния начальной пластической деформации на свойства демпфирования малоуглеродистой стали, что соответствует изменению диаграммы деформирования. Под диаграммой деформирования понимаются также гистерезисные петли, которые расширяются после начальной пластической деформации, называемой в работе «пластическая экзекуция». При построении петель гистерезиса и при записи затухающих колебаний рассмотрены амплитудные значения циклов загрузки, не превышающие 200 МПа. В качестве образцов использовались стержни прямоугольного коробчатого поперечного сечения. Дано описание статической и динамической лабораторных установок, которые реализуют схему чистого изгиба образца. Замеры производились тензометрическими датчиками с фиксацией отсчетов в памяти компьютера с частотой 100 Гц. При колебаниях в образце возникали циклические симметричные загрузки с частотой 2,62 Гц. В ходе испытаний был обнаружен и количественно обследован эффект сильного увеличения петель гистерезиса после сообщения образцу начальной пластической деформации. Получены параметры петель в зависимости от значения амплитудного напряжения. Записанные графики убывания амплитуд со временем (до 1000 периодов) хорошо согласуются с полученными при статических испытаниях гистерезисными петлями. Начальная пластическая деформация также была циклической с амплитудами деформаций, на 17 % превышающими предел текучести материала. Обнаружен эффект восстановления пластической деформации образца после колебаний с амплитудами напряжений 200 МПа. Колебания вызывают восстановление пластической деформации более чем на 40 %.

Ключевые слова: отступления от закона Гука, гистерезисные петли, начальная пластическая деформация, пластическая экзекуция, деградация приобретенных демпфирующих свойств, восстановление пластической деформации после колебаний, лабораторная установка, затухающие колебания, внутреннее трение

Зылев Владимир Борисович, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-5160-0389; E-mail: zylevzb@ya.ru

Платнов Павел Олегович, аспирант кафедры строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-9765-7417; E-mail: manuntdfan@mail.ru

© Зылев В.Б., Платнов П.О., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Strengthening of damping properties after initial plastic deformation: static and dynamic tests

Vladimir B. Zylev^{ID}, Pavel O. Platnov^{ID}✉

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

✉ manuntdfan@mail.ru

Article history

Received: May 12, 2023

Revised: August 18, 2023

Accepted: August 22, 2023

For citation

Zylev V.B., Platnov P.O. Strengthening of damping properties after initial plastic deformation: static and dynamic tests. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(4):372–385. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-372-385>

Abstract. The effect of the initial plastic deformation on the damping properties of low-carbon steel is experimentally studied, which corresponds to a change in the deformation diagram. The deformation diagram also refers to hysteresis loops that expand after the initial plastic deformation, called “plastic execution” in the work. When constructing hysteresis loops and recording damped oscillations, the amplitude values of loading cycles not exceeding 200 MPa are considered. Rods of rectangular box-shaped cross-section were used as samples. A description of static and dynamic laboratory installations that implement a pure bending scheme of the sample is given. Measurements are made by load cells with the fixation of counts in the computer memory with a frequency of 100 Hz. Cyclic symmetrical loads with a frequency of 2,62 Hz occur during oscillations in the sample. During the tests, the effect of a strong increase in hysteresis loops after the initial plastic deformation was reported to the sample was detected and quantitatively explored. The parameters of the loops are obtained depending on the value of the amplitude stress. The recorded graphs of decreasing amplitudes over time (up to 1000 periods) are in good agreement with the hysteresis loops obtained during static tests. The initial plastic deformation was also cyclic with deformation amplitudes 17% higher than the yield strength of the material. The effect of restoring the plastic deformation obtained by the sample after oscillations with stress amplitudes of 200 MPa was found. The oscillations cause the plastic deformation to be restored by more than 40%.

Keywords: deviations from Hooke’s law, hysteresis loops, initial plastic deformation, plastic execution, strengthening of damping properties, degradation of acquired damping properties, restoration of plastic deformation after oscillations, laboratory installation, damping oscillations, internal friction

1. Введение

Проблема правильного учета внутреннего трения при колебаниях по-прежнему остается актуальной, однако до сих пор является мало изученной. Многие работы затрагивают математическую сторону вопроса и посвящены различным модификациям дифференциальных уравнений движения [1–6] с точки зрения учета внутреннего трения в материале. Однако следует отметить, что установившихся подходов к учету внутреннего трения в материале, имеющих достаточно полное экспериментальное подтверждение, в настоящее время еще не получено. Общепринятым положением в настоящее время является утверждение о том, что в реальном материале закон Гука не идеально выполняется, что и приводит к рассеянию энергии [7–10]. В связи с этим экспериментальное изучение отклонений от закона остается актуальным.

В предыдущих работах авторов [11–13] демпфирование изучалось путем рассмотрения записей убывания амплитуд при свободных колебаниях. В соответствии с мнением многих специалистов силы внутреннего трения не зависят от скорости деформаций [14–16], а также являются зависимыми от амплитуды цикла колебаний [17–19], и для их изучения можно привлекать статические методы испытаний. Статические методы заключаются прежде всего в построении диаграмм деформирования материала, включающих участки нагружения и разгрузки, с построением соответствующих петель гистерезиса, которые дают потерю энергии за один цикл колебаний и, соответственно, характеризуют демпфирование. В настоящей работе приведены результаты, как статических, так и динамических испытаний для оценки отступлений от закона Гука и, соответственно, внутреннего трения в материале.

Vladimir B. Zylev, Doctor of Science (Technical), Head of Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5160-0389; E-mail: zylevzb@ya.ru

Pavel O. Platnov, PhD student, Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9765-7417; E-mail: manuntdfan@mail.ru

К сожалению для специалистов по внутреннему трению, диаграмма деформирования (петля гистерезиса) не является чем-то стабильным для конкретного материала и даже для конкретного образца. Очертание гистерезисной петли зависит от множества разнообразных факторов, среди которых отметим лишь некоторые: уровень амплитуд напряжений в цикле деформирования; параметры асимметрии цикла нагружений; установившаяся петля, или неустановившаяся и др.

Настоящая работа посвящена исследованию относительно небольших деформаций с рассмотрением лишь одноосного напряженного состояния. И даже в этой очень узкой области исследования возникают сложности полного описания диаграммы деформирования, которые представляются в настоящий момент труднопреодолимыми. В данной работе авторы воспользовались упрощенной характеристикой гистерезисных петель, а именно относительной шириной петли b/c , где b есть остаточная деформация в образце после снятия нагрузки, а c есть амплитуда упругой деформации (рис. 1, б).

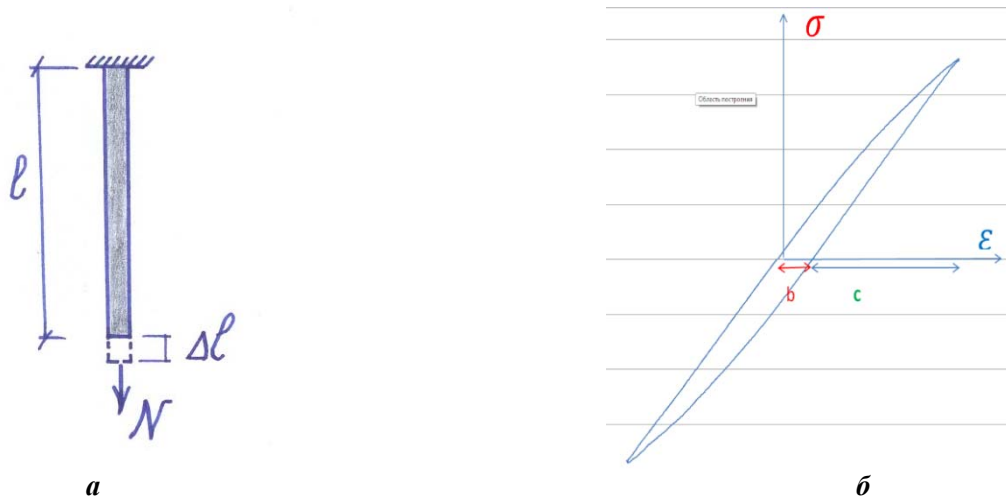


Рис. 1. Испытание стержня на растяжение-сжатие:
 b/c — отношение остаточного удлинения к упругому — характеристика ширины петли гистерезиса;
 а — идеализированная схема растяжения-сжатия образца;
 б — петля гистерезиса с указанием ее относительной ширины

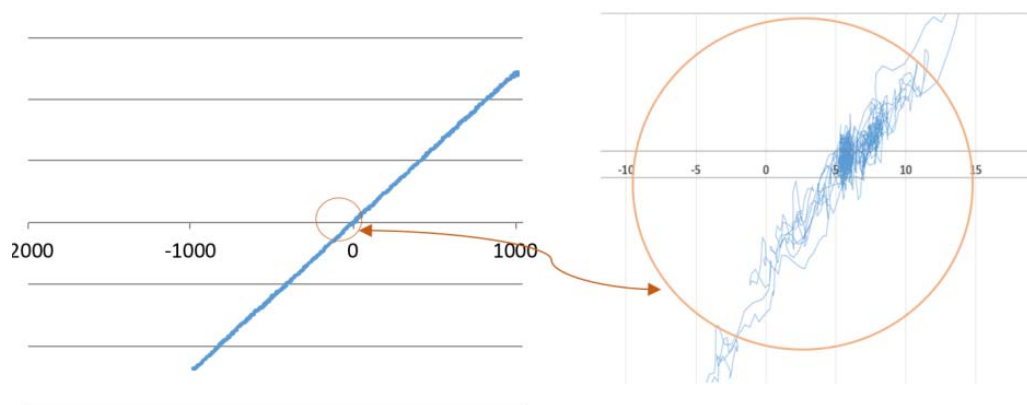
Figure 1. Rod tension-compression test:
 b/c — the ratio of residual elongation to elastic — characteristic of the width of the hysteresis loop;
 а — idealized tension-compression scheme of the sample;
 б — hysteresis loop with indication of its relative width

В соответствии с целями работы величина отношения b/c является достаточно малой, например, $b/c = 0,04$ будет для нас уже весьма существенной величиной. Отметим, что петля, изображенная на рис. 1, б, хотя и представляет инструментальную запись для исследуемого в работе стального образца, но получена при создании принудительной начальной деформации с напряжениями, превышающими предел текучести материала на 17 %.

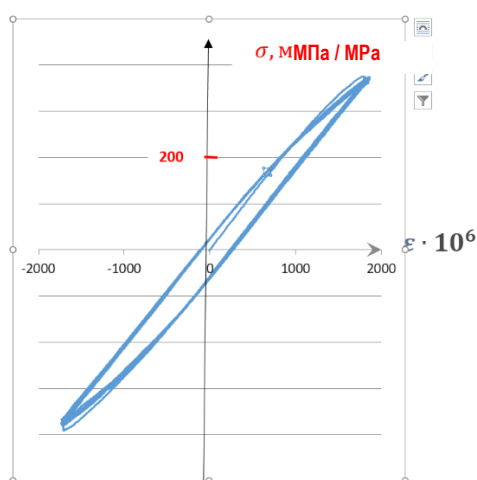
Рассмотрим рис. 2, который приведен для пояснения целей работы и одновременно демонстрирует основные ее результаты.

На рис. 2, а, показана гистерезисная петля для малоуглеродистой стали, когда амплитуда симметричного цикла деформаций составляла $\varepsilon = 1000 \cdot 10^{-6}$, соответственно напряжения достигали 200 МПа. Последнее значение обычно принято считать пределом пропорциональности для малоуглеродистой стали. Образец до этого испытания не был подвержен никаким нагрузкам. Мало того, после поставки образец был выдержан в течение полутора лет без напряжений. Последнее условие также является весьма существенным.

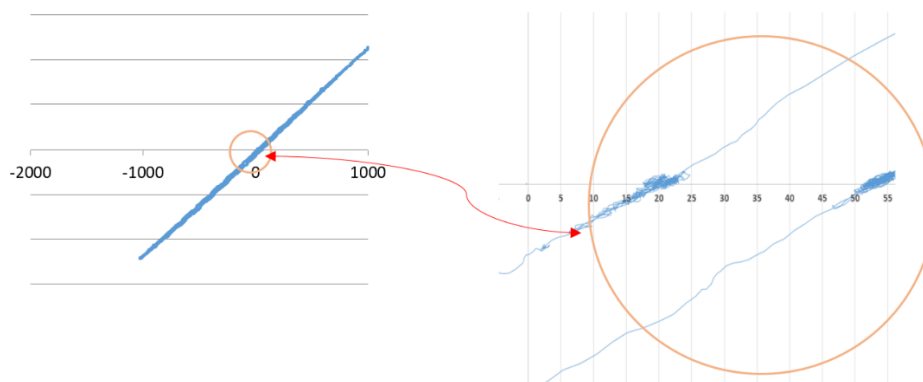
Тензометрическая аппаратура, которой пользовались авторы, позволяет выдавать минимальное цифровое значение для деформации $1 \cdot 10^{-6}$, что соответствует значению напряжения 0,2 МПа. Петля на рис. 2, а смотрится как идеальная прямая и свидетельствует о хорошем выполнении закона Гука в данном случае. Здесь трудно говорить о ширине петли, так как точности и стабильности тензометрической аппаратуры в данном случае не хватает (см. увеличенный фрагмент петли на рис. 2, а). Ее относительная ширина $b/c \approx 0,002$. Это настолько малая величина, что она становится практически неуловимой как в



a



б



в

Рис. 2. Гистерезисные петли, полученные экспериментальным путем:

- a* — петля для стали образца после поставки от производителя и выдержки в течение 1,5 лет;
- б* — петля гистерезиса, соответствующая интенсивной пластической циклической деформации образца с пятикратным выходом за пределы текучести материала при растяжении и сжатии;
- в* — расширенная петля гистерезиса (отношение *b/c* увеличилось в 17 раз по сравнению с исходным состоянием образца)

Figure 2. Hysteresis loops obtained experimentally:

- a* — loop for sample steel after delivery from the manufacturer and exposure for 1,5 years;
- б* — a hysteresis loop corresponding to intense plastic cyclic deformation of the sample with five-time exceeding of the yield strength of the material during tension and compression;
- в* — extended hysteresis loop (the *b/c* ratio increased 17 times compared to the initial state of the sample)

статическом, так и в динамическом испытании. В определенном смысле здесь можно утверждать, что закон Гука идеален, и гистерезис отсутствует. При выполнении статического эксперимента выполнялись и медленные загрузки, когда время одного цикла доходило до 20 минут. Ожидаемого уширения петли гистерезиса при этом однако не наблюдалось.

На рис. 2, б, показаны гистерезисные петли при больших амплитудах циклических деформаций. При внимательном рассмотрении рисунка можно увидеть первую петлю, которая отличается от остальных установившихся петель. Амплитудные значения относительной деформации при растяжении и сжатии по модулю составляли $1,17 \cdot \varepsilon_T = 1750 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, при 5 циклах загрузок напряжения в материале выходили за предел текучести.

Целью этой стадии загрузки являлось не изучение формы петли гистерезиса, а внесение во внутреннюю структуру образца существенных изменений. Этому циклу загрузок в данной статье дается условное наименование «пластическая экзекуция». Как видно по результатам испытаний, «пластическая экзекуция» вызывает существенные нарушения закона Гука в области малых деформаций. Под малыми деформациями здесь понимаются деформации, не превышающие стандартное значение предела пропорциональности. Конкретно в данном случае $\varepsilon_{\text{пц}} = 1000 \cdot 10^{-6}$, что соответствует $\sigma_{\text{пц}} = 200$ МПа, т.е. традиционная область действия закона Гука для малоуглеродистой стали.

На рис. 2, в, показана петля гистерезиса уже после «пластической экзекуции». Отметим, что внешне она выглядит почти так же, как и первоначальная петля на рис. 2, а, однако ее относительная ширина увеличилась в 17 раз. Различие можно видеть на увеличенном фрагменте петли (см. рис. 2, в, справа). Такое нарушение упругих характеристик материала является наиболее важным принципиальным результатом настоящей работы. Отметим, что при $b/c \approx 0,0339$ гистерезисная петля зрительно остается достаточно узкой, однако этой петле будет соответствовать существенное демпфирование (подробнее об этом далее).

2. Методика исследований

Остановимся на способах выполнения экспериментов достаточно подробно, так как только подробное описание позволит давать оценку достоверности полученных инструментальных замеров и сделанных при их обработке допущений.



Рис. 3. Образец с коробчатым прямоугольным сечением:
а — фото; б — некоторые характеристики сечения

Figure 3. Sample with box-shaped rectangular cross-section:
а — photo; б — some characteristics of cross-section

Отметим, что по многим соображениям обычная испытательная машина, предназначенная для построения диаграмм растяжения, здесь не может быть использована. Перемещения, соответствующие небольшим пластическим деформациям, существенно меньше, чем необратимые смещения и подвижки в стандартных захватах образца. Вообще схема, где образец подвергается растяжению и сжатию, реально очень сложна в использовании, поскольку при сжатии образец будет терять устойчивость. Использовать

короткие образцы также невозможно, так как неравномерное напряженное состояние у областей закрепления будет искажать получаемые результаты.

По указанным соображениям приходится отказаться от идеализированной схемы растяжения-сжатия. Фактически выполнялись испытания образцов коробчатого сечения (рис. 3, а) на чистый изгиб. На рис. 3, б, дано поперечное сечение образца и приведены некоторые его характеристики. Преимущество такого типа образца заключается в том, что его сечение при изгибе относительно горизонтальной оси близко к идеальному двутавру. В пределах данной работы будет с некоторым приближением принято, что сечение образца есть идеальный двутавр.

Испытательная установка, которая была запроектирована и изготовлена в лаборатории имени Л.Д. Проскуракова кафедры строительной механики РУТ (МИИТ), показана на рис. 4. Эта установка предназначена для статических испытаний.

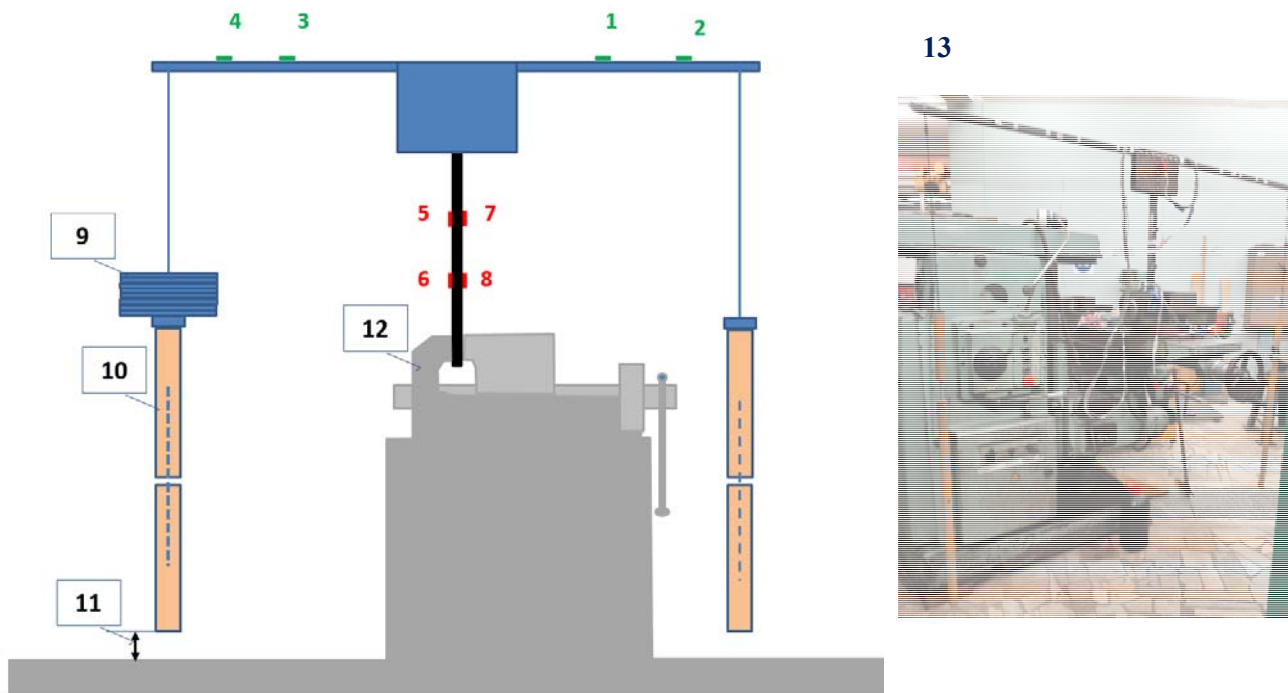


Рис. 4. Установка для статических испытаний:

1–4 — тензодатчики-силоизмерители; 5–8 — тензодатчики, измерители деформаций на образце (образцом является вертикальный стержень); 9 — тарированные грузы по 1 кг; 10 — штанги регулируемой длины; 11 — выставяемый зазор до пола; 12 — штатные большие тиски фрезерного станка; 13 — фото установки

Figure 4. Installation for static tests:

1–4 — load cells-dynamometers; 5–8 — load cells, deformation gauges on the sample (the sample is a vertical rod); 9 — rated loads of 1 kg; 10 — adjustable length rods; 11 — exhibited clearance to the floor; 12 — regular large milling machine vise; 13 — installation photo

Укладывая грузы 9 (см. рис. 4), можно вызвать в правой полке вертикально расположенного образца растяжение. Плечи в Т-образной установке равны 1 м. Положив любое удобное количество грузов (в данном случае грузы варьировались от 1 до 20 кг), можно выставить нужный зазор (см. рис. 4) под штангами. Таким образом, желательный изгибающий момент можно будет получить, опустив штангу до касания с полом. Последний способ позволяет увеличить скорость загрузки по сравнению с укладкой тарированных грузов.

Кроме изгибающего момента в образце возникает небольшая продольная сила. Напряжение от нее составляет менее одного процента от напряжения изгиба. В рамках настоящей статьи эти напряжения не учитывались. Датчики 1–4 служат силоизмерителями. Фактически использовались показания датчиков 2 и 4, которые пропорциональны действующему в образце изгибающему моменту. Сечения, в которых наклеены датчики 2 и 4, испытывают изгибающий момент, в четыре раза меньший, чем в образце, поэтому здесь для измерения нагрузки можно пользоваться законом Гука.

Показания всех тензодатчиков записываются в память компьютера с частотой 100 Гц (при необходимости до 1000 Гц), что позволяет строить соответствующие графики, определяющие характер приложения нагрузки во времени. Консоли установки изготовлены из того же профиля, что и образец (см. рис. 4). Заделка осуществляется при помощи крупногабаритных тисков фрезерного станка. На уровне губок тисков в образец вставляется стальной вкладыш, воспринимающий усилие затяжки, так что заделка получается качественной. Все тензодатчики имели рабочую длину 70 мм.

Тензодатчики 7 и 8, измеряющие деформацию, удалены от заделки, напряженное состояние в месте их установки близко к равномерному растяжению (или сжатию). Укладывая грузы на правую штангу установки, в этих же точках можно получить равномерное сжатие. При проектировании установки был выполнен конечно-элементный анализ устойчивости равновесия прямоугольного профиля при чистом изгибе как коробчатой пластинчатой системы [20]. Этот анализ показал, что образец имеет 8-кратный запас по устойчивости, выпучивание полок образца не будет иметь место.

2.1. План статических испытаний

1. Получение гистерезисных петель при циклическом нагружении (5 симметричных циклов). Уровень амплитудных напряжений в порядке возрастания составляет 50, 100, 150 и 200 МПа. Образец был взят от поставщика с выдержкой 1,5 года. Загружение осуществлялось по ускоренной схеме с использованием выставленных зазоров под штангами.

2. Сильное пластическое циклическое нагружение до уровня $1,17\varepsilon_T$, где $\varepsilon_T = 0,0015$. По результатам ранее выполненных испытаний материала образца предел текучести оказался близок к 300 МПа. На рис. 5 показана инструментальная запись деформации во времени при «пластической экзекуции». Материал образца получает интенсивную пластическую деформацию, составляющую более 20 % от упругой. Но подчеркнем здесь, что это не те остаточные деформации, которые являются основной целью данных исследований. В данной работе изучаются отступления от закона Гука при сравнительно небольших напряжениях ($\sigma < 200$ МПа).

3. Далее снова выполняется получение гистерезисных петель по пункту 1.

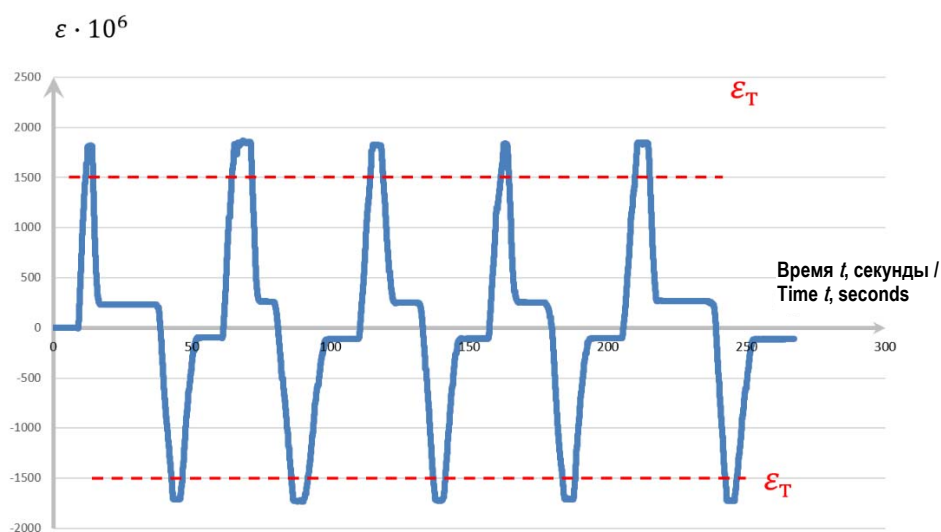


Рис. 5. Изменение деформаций на поверхности образца при интенсивной «пластической экзекуции»

Figure 5. Change of deformations on the sample surface during intensive “plastic execution”

2.2. Результаты статических испытаний

На рис. 5 показан график «пластической экзекуции» по записи датчика № 8. Остальные датчики, наклеенные на образец, дают практически тождественные результаты. Как видно из рис. 5, пять циклов нагружения при «пластической экзекуции» заняли около 5 минут. Соответствующая «экзекуции» петля гистерезиса показана на рис. 2, б. При построении петель гистерезиса характер изменения деформаций во времени был примерно таким же, а амплитуды были, естественно, меньше.

На рис. 6 представлены характеристики ширины петель при различных значениях амплитуд циклов. Здесь следует констатировать, что свойства физической нелинейности после «пластической экзекуции» принципиально изменились. Действительно, относительная ширина петли для всех исследованных значений амплитуд увеличилась *более чем в 10 раз*. Заметим, что и после «пластической экзекуции» гистерезисная петля остается все же достаточно узкой (см. рис. 2, в), остаточные деформации составляют максимум 3,8 % от упругой, однако до «экзекуции» петля практически отсутствовала.

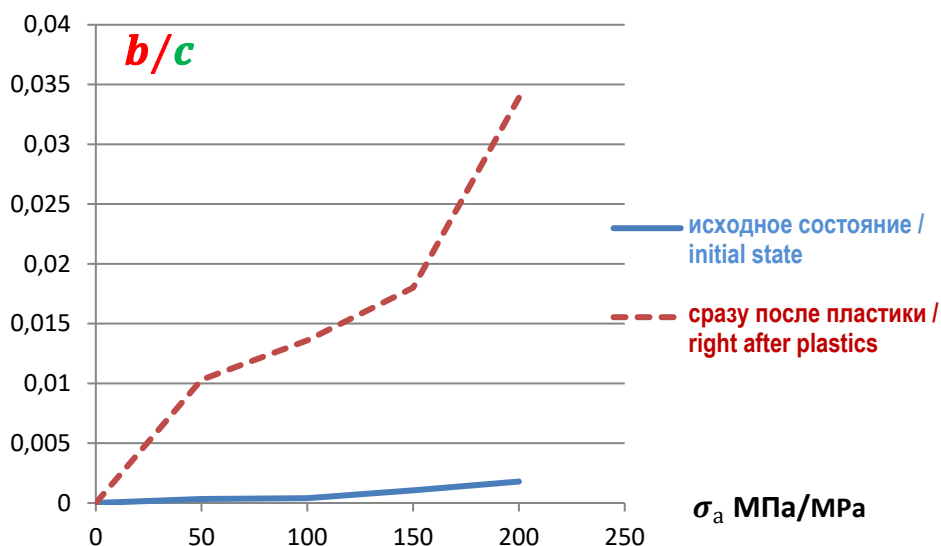


Рис. 6. Характеристики ширины петель гистерезиса до и после «пластической экзекуции»
Figure 6. Characteristics of the width of hysteresis loops before and after “plastic execution”

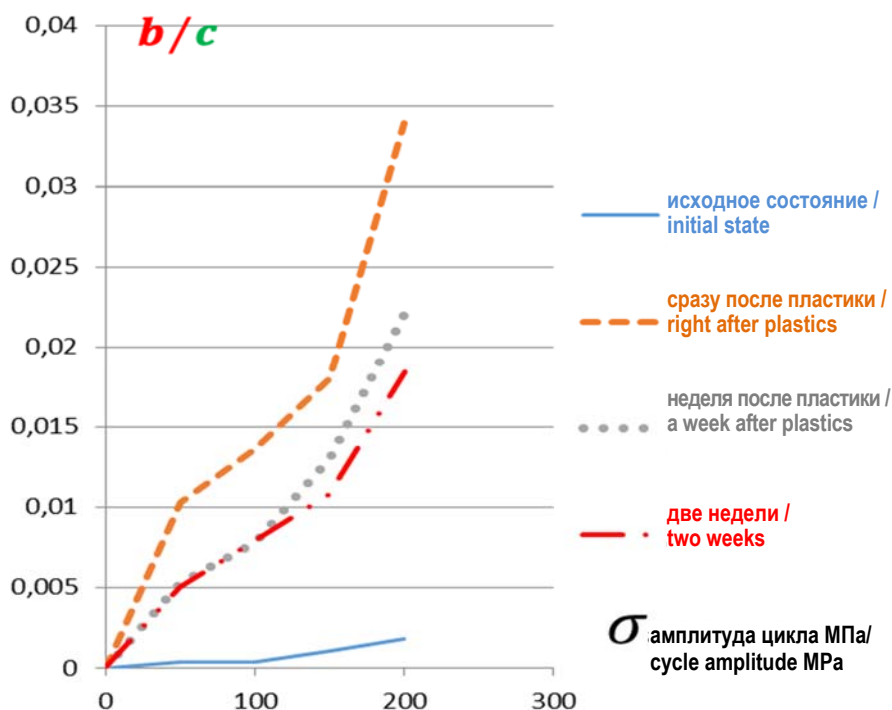


Рис. 7. Дegradация свойств, приобретенных после «пластической экзекуции»
Figure 7. Degradation of properties acquired after “plastic execution”

Также был исследован вопрос о деградации свойств пластичности, приобретенных после «экзакуции» (см. рис. 7). С этой целью были построены гистерезисные петли через неделю и две недели после «экзакуции». Рассматривая рис. 7, можно убедиться, что приобретенные свойства малой пластичности довольно быстро теряются. В незагруженном стальном образце происходят некоторые необратимые процессы, и последствия «пластической экзакуции» залечиваются. Отметим, что этот эффект был уже отмечен в работе авторов [12], однако там это было сделано на основании динамических испытаний.

2.3. Динамические испытания

Из того же стержня прямоугольного профиля, который использовался для статических испытаний, был вырезан образец длиной 180 см, динамические испытания которого рассмотрены далее (см. рис. 8). Этот образец уже ранее был испытан на колебания с амплитудами напряжений около 300 МПа. Подробное описание конструктивных особенностей лабораторной установки, разработанной авторами для динамических испытаний, дано в [11–13]. Также установка была доукомплектована оснасткой для производства «пластической экзакуции», которая также контролировалась при помощи тензодатчиков, наклеенных на образец.



Рис. 8. Затухающие свободные колебания динамической установки, подвешенной на подшипниках качения в точках покоя
Figure 8. Damped free oscillations of a dynamic installation suspended on rolling bearings at fixed points

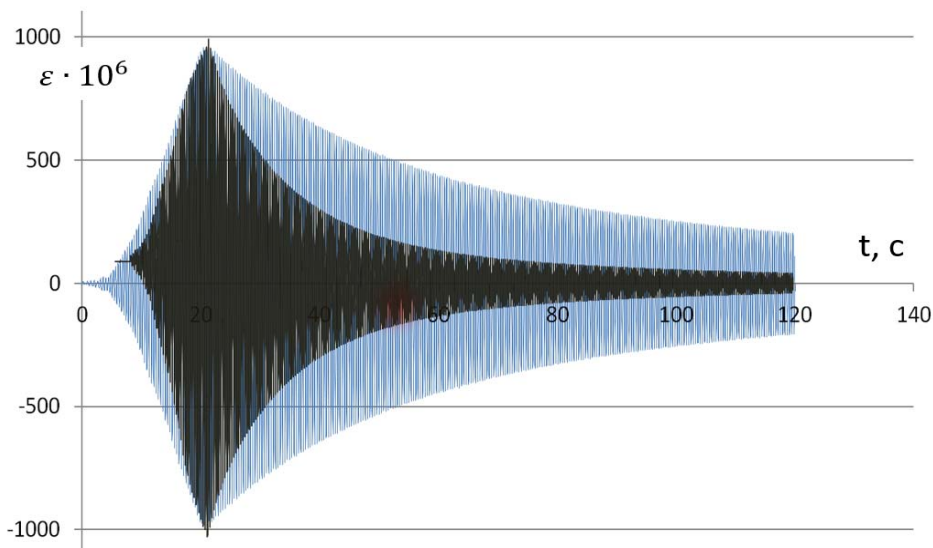


Рис 9. Запись деформации на поверхности полки образца при свободных колебаниях (включая участки разгона): голубой график — исходный образец динамической установки; черный график — образец после «пластической экзакуции»
Figure 9. Graph of deformation of the sample shelf surface under free oscillations (including acceleration sections): blue graph — the initial sample of a dynamic installation; black graph — sample after «plastic execution»

Сначала путем раскачки вручную в установке вызывалась форма колебаний, показанная на рис. 8. Амплитуда колебаний устанавливалась такой, чтобы напряжения в полках образца составляли 200 МПа, далее система совершала затухающие колебания. На рис. 9 голубым цветом показан график изменения деформации на поверхности полки образца. Показания тензодатчика снимались с частотой 100 Гц. График

на рис. 9 содержит 314 периодов (включая участок разгона, когда амплитуда нарастает). На рисунке приведена запись для 120 секунд динамического процесса. Экспериментальное значение технической частоты оказалось равным 2,62 Гц.

Далее выполнялась интенсивная «пластическая экзекуция», параметры которой были тождественны «экзекуции», создаваемой в статической установке. На рис. 10 представлена запись относительной деформации на поверхности полки образца во время этого процесса.

Данная «экзекуция» была реализована подобно выполненной в статической установке, но она заняла существенно большее время (см. рис. 10).

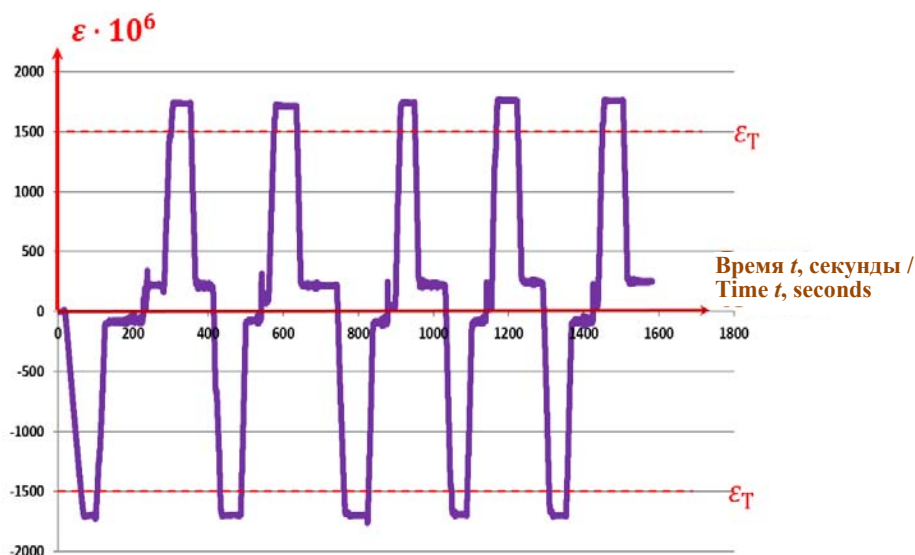


Рис. 10. «Пластическая экзекуция» образца в динамической установке
Figure 10. «Plastic execution» of a sample in a dynamic installation

Непосредственно после выполнения «экзекуции» с установки демонтировалась необходимая для этого оснастка. Путем раскачки вручную установка вновь выводилась из равновесия до колебаний с амплитудными напряжениями 200 МПа. Черный график на рис. 9 показывает, как в этом случае нарастали и убывали амплитуды при свободных затухающих колебаниях. Для удобства сравнения графики затухающих колебаний до и после «экзекуции» наложены друг на друга, причем черный график пришлось сместить по горизонтали и по вертикали. Смещение по горизонтали обеспечивало совпадение максимальных амплитуд. Смещение по вертикали обеспечивало совпадение графиков в момент выхода системы на положение равновесия. Прежде всего, обсудим необходимость смещения черного графика по вертикали. Оно связано с некоторым физическим эффектом, который представляет самостоятельный интерес. Авторами не было найдено его описание в опубликованных работах.

Полка образца, на которую наклеен датчик, фиксирующий переменную деформацию, непосредственно перед рассматриваемыми колебаниями получила большое остаточное удлинение, которое, как можно видеть на рис. 10, составляет $252 \cdot 10^{-6}$. Если образец оставить ненагруженным, эта остаточная деформация будет очень незначительно уменьшаться за счет известного явления упругого последствия. Как видно, колебания с амплитудой 200 МПа резко ускоряют этот процесс, и свежеполученная пластическая деформация уменьшается до значения $81,5 \cdot 10^{-6}$. На рис. 11, а, график затухания после «экзекуции» показан отдельно, на нем отчетливо видно его смещение вниз. Кроме того, на этом графике показано большее количество колебаний (1000 периодов), что также может представлять интерес. На рис. 11, б, представлен график логарифмического декремента колебаний. Ни о каком постоянстве этой величины во времени говорить не приходится. При уменьшении амплитуды в процессе рассматриваемого колебательного процесса логарифмический декремент колебаний уменьшается более чем в 10 раз.

Рис. 9 отчетливо показывает, какое существенное влияние оказывает начальная пластическая деформация на затухание колебаний, обусловленное внутренним трением. Как было отмечено выше, образец, использованный нами для динамических испытаний, ранее уже испытывался на колебания с амплитудой

порядка 300 МПа. Если бы образец имел нетронутую начальную структуру, синий график на рис. 9 показывал бы еще меньшее затухание.

Явление усиления демпфирующих свойств стали после начальной пластической деформации было ранее отмечено авторами [12]. С точки зрения живучести конструкций этот эффект является положительным, так как гашение колебаний усиливается с нарастанием динамических напряжений. Если говорить о задаче создания адекватных моделей внутреннего трения в материале, то эту задачу он очевидно усложняет, так как недостаточным становится точное определение материала, необходимо знать еще предварительную историю его нагружений. С этой точки зрения любая теория внутреннего трения, игнорирующая этот эффект, является всегда уязвимой.

Уровень предварительной деформации (уровень «пластической экзекуции»), рассматриваемый в данной работе, является достаточно высоким, однако следует отметить, что реальная конструкция всегда имеет достаточное количество областей с концентраторами напряжений, в которых рассматриваемый уровень может достигаться. В этом случае потребуются учет неоднородности свойств демпфирования по объему конструкции.

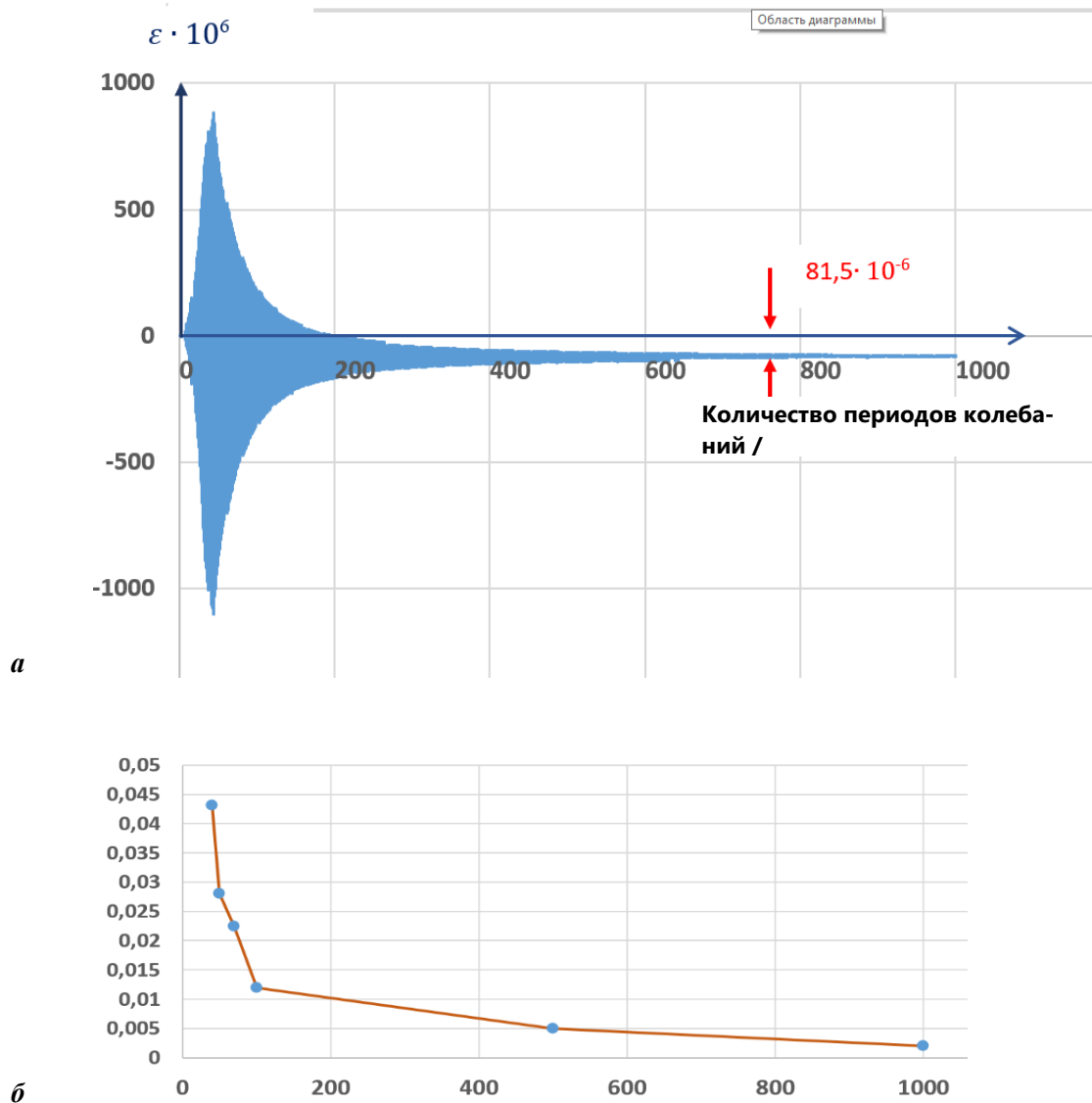


Рис. 11. Затухающие колебания после «пластической экзекуции»: *a* — колебания, вызвавшие уменьшение начальной пластической деформации; *б* — изменение логарифмического декремента колебаний с уменьшением амплитуды

Figure 11. Damping oscillations after «plastic execution»: *a* — oscillations that caused a decrease in the initial plastic deformation; *б* — change in the logarithmic decrement of oscillations with decreasing amplitude

Важно убедиться в том, что гистерезисные петли, которые были получены в первой части работы, соответствуют потерям амплитуд, которые представлены в динамических испытаниях второй части. Для сравнения будем рассматривать состояние образцов из статической и динамической установок после «пластической экзекуции».

При заполнении таблицы площади гистерезисных петель определялись в программе Excel по данным статических испытаний. После получения площадей петель вычислялась относительная потеря энергии за цикл $\Psi = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}}$, и далее, с учетом фактической малости потерь, относительная потеря амплитуды, $\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Psi}{2}$. Данные о потере амплитуды за цикл колебаний при динамическом испытании определялись непосредственно по записанным показаниям датчиков.

Отношения потери амплитуды к текущей амплитуде за цикл колебаний на основании статических и динамических испытаний

Текущее значение амплитуды напряжений при колебаниях σ_a , МПа	Статические испытания	Динамические испытания
	$\frac{A_n - A_{n+1}}{A_n}$ на основании использования площади петли гистерезиса	$\frac{A_n - A_{n+1}}{A_n}$ по записи колебаний с графика с рис. 11, а
200	0,0431	0,0355
150	0,0280	0,0285
100	0,0224	0,0230
50	0,0160	0,0160
4	–	0,005

The ratio of the amplitude loss to the current amplitude per oscillation cycle based on static and dynamic tests

The current value of the stress amplitude during oscillations σ_a , MPa	Static tests	Dynamic tests
	$\frac{A_n - A_{n+1}}{A_n}$ based on the use of the hysteresis loop area	$\frac{A_n - A_{n+1}}{A_n}$ by recording oscillations from the graph from Figure 11, a
200	0.0431	0.0355
150	0.0280	0.0285
100	0.0224	0.0230
50	0.0160	0.0160
4	–	0.005

Как видно, результаты статических и динамических испытаний, несмотря на неизбежные погрешности в экспериментах, удовлетворительно согласуются. Это в очередной раз подтверждает гипотезу о частотной независимости внутреннего трения.

3. Заключение

1. В ходе лабораторных испытаний образцов из малоуглеродистой стали получен эффект сильного увеличения свойств демпфирования после начальной пластической деформации.

2. Полученная зависимость демпфирующих свойств от начальной пластической деформации позволяет сделать вывод о том, что теории внутреннего трения, игнорирующие этот эффект, уже по этой причине содержат в себе существенный недостаток.

3. Выполнено сравнение потери амплитуды за цикл при статических испытаниях с потерями при затухающих колебаниях. Это сравнение показало, что, выполнив статические испытания и получив таким образом площади соответствующих гистерезисных петель, можно определить и потери амплитуд при колебаниях. Таким образом, небольшие пластические деформации малоуглеродистой стали и соответствующие изменения в ее диаграмме деформирования и определяют демпфирующие свойства этого материала.

4. В ходе динамических испытаний обнаружен эффект частичного восстановления остаточных деформаций после колебаний с амплитудами, значение которых не превышает традиционного значения предела пропорциональности для стали.

Список литературы

1. Вешкин М.С., Гребенюк Г.И. Об использовании комплексной модели внутреннего трения в расчетах стержневых систем на импульсные воздействия // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2019. № 5. С. 5–17. EDN: JDRXJD
2. Гребенюк Г.И., Вешкин М.С. Расчет упругих стержневых систем на динамические воздействия с использованием модели «комплексной жесткости» для внутреннего трения в материалах // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2020. № 5. С. 18–30. <http://doi.org/10.32683/0536-1052-2020-737-5-18-30>
3. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Корягин С.И. Внутреннее трение при продольных колебаниях троса // Вестник Балтийского Федерального университета им. И. Канта. Серия: физико-математические и технические науки. 2017. № 3. С. 84–92. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vnutrennee-trenie-pri-prodolnyh-kolebaniyah-trosa> (дата обращения: 12.02.2023)
4. Вронская Е.С. Динамический расчет призматических систем с учетом внутреннего трения // Градостроительство и архитектура. 2017. № 3. С. 24–27. <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2017.03.5>
5. Воронай А.В., Гришакин В.Т. Моделирование внутреннего вязкого трения в материале пластины при ее нестационарном нагружении с помощью дифференциальных и интегральных операторов // Труды МАИ. 2019. № 109. С. 3. <https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-3>
6. Bielak J., Karaoglu H., Taborda R. Memory-efficient displacement-based internal friction for wave propagation simulation // Geophysics. 2011. Vol. 76. No. 6. P. 131–145. URL: <https://www.sceec.org/publication/1468> (дата обращения: 12.02.2023)
7. Писаренко Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. Киев: Издательство Академии Наук Украинской ССР, 1955. 240 с.
8. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 193 с. URL: <https://djvu.online/file/TWuQdyEARXlqh> (дата обращения: 12.02.2023)
9. Сорокин Е.С. Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания // Исследования по динамике сооружений. М.: Госстройиздат, 1951. С. 5–90.
10. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 154 с.
11. Зылев В.Б., Платнов П.О. Использование точек покоя при экспериментальном изучении внутреннего трения в материале // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 5. С. 399–404. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-19-5-399-404>
12. Зылев В.Б., Платнов П.О. Экспериментальное исследование зависимости параметров демпфирования от начальной пластической деформации, уровня напряжений и частоты // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли РФ в 2019 году: в 2 томах. 2020. Т. 2. С. 197–203.
13. Зылев В.Б., Платнов П.О. Модели, эквивалентные по демпфированию, в экспериментах по определению параметров внутреннего трения в материалах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 45–53. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-45-53>
14. Кочнева Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях. М.: Наука, 1979. 96 с.
15. Мальшев А.П. Построение модели частотно-независимого демпфирования по амплитудной характеристике коэффициента поглощения // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. № 1. С. 134. EDN: OOMUEZ
16. Гребенюк Г.И., Роев В.И. О расчете диссипативных систем с частотно-независимым внутренним трением // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2002. № 7. С. 21–27.
17. Мальшев А.П. Моделирование интенсивного амплитудно-зависимого внутреннего демпфирования динамических процессов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 2. С. 103.
18. Malygin G.A. Amplitude-dependent internal friction and similarity of temperature dependences of microflow and macroflow stresses of a crystal // Physics of the Solid State. 2000. Vol. 42. Is. 4. P. 706–711. <https://doi.org/10.1134/1.1131276>
19. Nazarov V.E., Kiyashko S.B. Amplitude-dependent internal friction and harmonic generation in media with hysteresis nonlinearity and linear dissipation // Radiophysics and quantum electronics. 2014. Vol. 56. Is. 10. P. 686–696. <https://doi.org/10.1007/s11141-014-9473-1>
20. Зылев В.Б., Платнов П.О., Алферов И.В. Устойчивость прямоугольного тонкостенного профиля при нагружении по схеме чистого изгиба // Качество. Инновации. Образование. 2020. № 2 (166). С. 41–45. <http://doi.org/10.31145/1999-513x-2020-2-41-45>

References

1. Veshkin M.S., Grebenyuk G.I. On the use of the complex model of internal friction in calculations of rod systems on pulse impacts. *News of higher educational institutions. Construction*. 2019;(5):5–17. (In Russ.) EDN: JDRXJD

2. Grebenyuk G.I., Veshkin M.S. Calculation of elastic rod systems for dynamic influences using the complex rigidity model for internal friction in materials. *News of higher educational institutions. Construction*. 2020;(5):18–30. (In Russ.) <http://doi.org/10.32683/0536-1052-2020-737-5-18-30>
3. Velikanov N.L., Naumov V.A., Koryagin S.I. The internal friction in longitudinal oscillations of the wire rope. *Journal of I. Kant Baltic Federal University. Series: Physical, Mathematical and Technical Sciences*. 2017;(3):84–92. (In Russ.) Available from: <https://cyberleninka.ru/article/n/vnutrennee-trenie-pri-prodolnyh-kolebaniyah-trosa> (accessed: 12.02.2023)
4. Vronskaya E.S. Dynamic calculation of prismatic systems taking into account internal friction. *Urban construction and architecture*. 2017;(3):24–27. (In Russ.) <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2017.03.5>
5. Voropay A.V., Grishakin V.T. Viscous friction modelling in material of a plate under its non-stationary loading with differential and integral operators. *Trudy MAI [Works of MAI]*. 2019;(109):3. (In Russ.) <https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-3>
6. Bielak J., Karaoglu H., Taborda R. Memory-efficient displacement-based internal friction for wave propagation simulation. *Geophysics*. 2011;76(6):131–145. Available from: <https://www.scec.org/publication/1468> (accessed: 12.02.2023)
7. Pisarenko G.S. *Oscillations of elastic systems taking into account the energy dissipation in the material*. Kiev: Izdatel'stvo Akademii Nauk Ukrainskoj SSR Publ.; 1955. (In Russ.)
8. Panovko Ya.G. *The internal friction at oscillations of elastic systems*. Moscow: Izdatel'skij dom fiziko-matematicheskij literatury Publ.; 1960. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/TWuQdyEARXlqh> (accessed: 12.02.2023)
9. Sorokin E.S. Method of accounting for inelastic resistance of the material in the calculation of structures under vibrations. In: *Research on the Dynamics of Structures*. Moscow: Gosstroizdat Publ.; 1951. p. 5–90. (In Russ.)
10. Sorokin E.S. *On the theory of internal friction at oscillations of elastic systems*. Moscow: Gosstroyizdat Publ.; 1960. (In Russ.)
11. Zylev V.B., Platnov P.O. The use of fixed points in experimental research of the internal friction of material. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):399–404. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-399-404> (In Russ.)
12. Zylev V.B., Platnov P.O. Experimental research of the dependence of damping parameters on the initial plastic deformation, stress level and frequency. *Fundamental, exploratory and applied research of the RAASN on scientific support for the development of architecture, urban planning and construction industry of the Russian Federation in 2019. In 2 volumes*. (Vol. 2). 2020;2:197–203. (In Russ.)
13. Zylev V.B., Platnov P.O. Models equivalent in damping in experiments for determining the parameters of internal friction in materials. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):45–53. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-45-53>
14. Kochneva L.F. *Internal friction in solids during vibrations*. Moscow: Nauka Publ.; 1979. (In Russ.)
15. Malyshev A.P. Modeling of frequency-independent damping based on the amplitude characteristic of absorption coefficient. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003;67(1):134. (In Russ.) EDN: OOMUEZ
16. Grebenyuk G.I., Roev V.I. On the calculation of dissipative systems with frequency-independent internal friction. *News of higher educational institution. Construction*. 2002;(7):21–27. (In Russ.)
17. Malyshev A.P. Modeling of intensive amplitude-dependent internal damping of dynamic processes. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2003;(2):103. (In Russ.)
18. Malygin G.A. Amplitude-dependent internal friction and similarity of temperature dependences of microflow and macroflow stresses of a crystal. *Physics of the Solid State*. 2000;42(4):706–711. <https://doi.org/10.1134/1.1131276>
19. Nazarov V.E., Kiyashko S.B. Amplitude-dependent internal friction and harmonic generation in media with hysteresis nonlinearity and linear dissipation. *Radiophysics and quantum electronics*. 2014;56(10):686–696. <https://doi.org/10.1007/s11141-014-9473-1>
20. Zylev V.B., Platnov P.O., Alferov I.V. The stability of rectangular thin-walled profile with loading according to the scheme of pure bending. *Quality. Innovation. Education*. 2020;2(166):41–45. (In Russ.) <http://doi.org/10.31145/1999-513x-2020-2-41-45>



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-386-391

EDN: WXDWNC

УДК 621.774.63


НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Критический радиус изгиба трубы, обусловленный разрушением материала

Ю.А. Морозов¹  , А.Г. Абрамов² 

¹ Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

² Московский политехнический университет (Московский Политех), Москва, Российская Федерация

 akafest@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 29 февраля 2023 г.

Доработана: 12 июня 2023 г.

Принята к публикации: 28 июня 2023 г.

Для цитирования

Морозов Ю.А., Абрамов А.Г. Критический радиус изгиба трубы, обусловленный разрушением материала // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 4. С. 386–391. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-386-391>

Аннотация. Исследована возможность интенсификации гибки труб, путем создания минимальной кривизны с учетом тонкостенности профиля, находящегося на грани исчерпания несущей способности материала (разрушение). Рассмотрена кольцевая оболочка (труба) под действием чистого изгибающего момента, при допущении гипотезы плоских сечений и с учетом эффекта Т. Кармана. Установлено деформационное изменение геометрических параметров (овализация профиля, утонение стенки). Рассчитываются сжимающая (радиальная) и растягивающая (тангенциальная) деформации с учетом их неразрывности на основании условия постоянства объема. В соответствии с принятыми допущениями математического моделирования, принимается известная из теории листовой штамповки зависимость радиального напряжения на кромке гибочного сегмента, где наиболее удобным критерием пластичности принимается гипотеза энергии формоизменения теории Мора, характеризующая интенсивностью деформаций в гнущем участке трубы, определяющая разрушение материала. Используя критерий пластичности, конкретные механические свойства материала, полученные в испытаниях на растяжение (пределы текучести и прочности, относительное удлинение) и аппроксимированные степенной зависимостью, дается совокупная оценка влияния геометрических параметров (тонкостенность, овализация профиля, деформационное утонение стенки) на осуществление гибки минимальной кривизны, характеризующей потерей устойчивости стенок с последующим разрушением ввиду исчерпания несущей способности материала, обладающего конкретными пластическими свойствами. Обобщение результатов минимального (гофрообразование) и критического (разрушение) радиусов гибки, позволяет установить предельную степень интенсификации гибки.

Ключевые слова: гибка труб, овализация, сплющивание, интенсификация гибки, пластическая потеря устойчивости, разрушение материала

Морозов Юрий Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры МТ-13 Технологии обработки материалов, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-9229-7398; E-mail: akafest@mail.ru

Абрамов Алексей Геннадиевич, магистрант, кафедра «Обработка материалов давлением и аддитивные технологии», Московский политехнический университет (Московский Политех), Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-0984-5697; E-mail: bender.reutov@mail.ru

© Морозов Ю.А., Абрамов А.Г., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Critical radius of pipe bending caused by the material destruction

Yury A. Morozov¹  , Alexey G. Abramov² 

¹Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Russian Federation

²Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

✉ akafest@mail.ru

Article history

Received: February 29, 2023

Revised: June 12, 2023

Accepted: June 28, 2023

For citation

Morozov Yu.A., Abramov A.G. Critical radius of pipe bending caused by the material destruction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(4):386–391. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-386-391>

Abstract. The authors investigate the possibility of intensification of pipe bending by creating a minimum curvature considering the thin-wall profile, which is on the limit of exhausting the material's bearing capacity (destruction). They consider an annular shell (pipe) under the action of pure bending moment, assuming the hypothesis of planar cross-sections and regarding the effect of T. Karman. The deformation changes of geometrical parameters (profile ovalization, wall thinning) are found. The compressive (radial) and tensile (tangential) deformations are calculated with account of their continuity based on the condition of volume constancy. In accordance with the accepted assumptions of mathematical modeling, the dependence of the radial stress on the edge of the bending segment, known from the theory of sheet stamping, is taken, where the most convenient criterion for plasticity is the hypothesis of the energy of shape change of the Mohr's theory, characterized by the intensity of deformations in the bent section of the pipe, which determines the destruction of the material. The criterion of plasticity, specific mechanical properties of the material obtained in tensile tests (yield and strength limits, relative elongation) and approximated by a step dependence are used for making a combined estimation of the influence of geometric parameters (thinness, ovalization of the profile, deformation thinning of the wall) on the realization of bending of minimum curvature, characterized by loss of wall stability with subsequent failure due to exhaustion of the bearing capacity of the material possessing specific plasticity. Summarizing the results of the minimum (corrugation) and critical (destruction) bending radii, makes it possible to establish the ultimate degree of bending intensification.

Keywords: pipe bending, ovalization, flattening, intensification of bending, plastic loss of stability, material destruction

1. Введение

Проектирование строительных конструкций в подавляющем большинстве случаев включает использование не только несущего металлопрофиля, но и применение гнутых деталей из тонкостенных сварных и бесшовных труб в качестве облегченных элементов силового каркаса или иных облегченных конструкций, допускающих нагрузку без потери прочности и устойчивости [1–4].

Процесс гибки труб технологически является весьма простой операцией и заключается в изменении кривизны профиля с получением требуемого угла и радиуса гибки, что является достаточно освещенным в работах отечественных и зарубежных авторов [5–8].

Следует отметить, что большая часть исследований касается допустимых параметров гибки в условиях упругих деформаций. Например, при проектировании деталей трубопроводов, где важно обеспечить целостность металла без его подлома или сплющивания (овализации), искажающих продольное или поперечное сечение профиля [9–14].

Однако для силовых конструкций может возникнуть необходимость гнуть трубы с наименьшим возможным критическим радиусом изогнутой поверхности, при котором заготовка находится на грани исчерпания несущей способности материала (рис. 1).

Решение данной задачи требует комплексного рассмотрения кинематики процесса изгиба, связанного с механизмом искажения поперечного сечения трубы и возникающим при этом деформированном состоянии, приводящим к увеличению напряжений в материале до полного исчерпания его ресурса пластичности.

Yury A. Morozov, PhD, Associate Professor, Department Materials Processing Technologies (MT-13), Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9229-7398; E-mail: akafest@mail.ru

Alexey G. Abramov, Graduate student, Department of Materials Processing by Pressure and Additive Technologies, Moscow Polytechnic University, Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0984-5697; E-mail: bender.reutov@mail.ru



Рис. 1. Гибка труб разной кривизны
Figure 1. Bending of pipes with different curvatures

Следует отметить, что если вопрос искажения (овализации, сплющивания) трубы достаточно изучен, то реализация напряженно-деформированного состояния материала и пластичность кольцевого профиля при гибке требует дополнительного исследования [15–18].

2. Методы

Рассматривая чистый изгиб тонкостенной кольцевой оболочки при допущении гипотезы плоских сечений и с учетом эффекта Т. Кармана (*Th. Karman*), деформация контура трубы (овализация) определяется действием продольных (тангенциальных) σ_θ и радиальных сжимающих σ_r напряжений, аналогично теории листовой штамповки (рис. 2) [19; 20].

Подобный характер распределения напряжений вызывает появление равнодействующих поперечных сил T , направленных к оси трубы и определяющих ее поперечную осадку, т.е. сплющивание — уменьшение высоты поперечного сечения в плоскости изгиба, и увеличение размера поперечного сечения в перпендикулярной плоскости (рис. 3) [8].

Рассмотрим гибку тонкостенной трубы диаметром $D = 30$ мм и толщиной стенки $S = 1,0$ мм, из алюминиевого деформируемого сплава АМг6 [21].

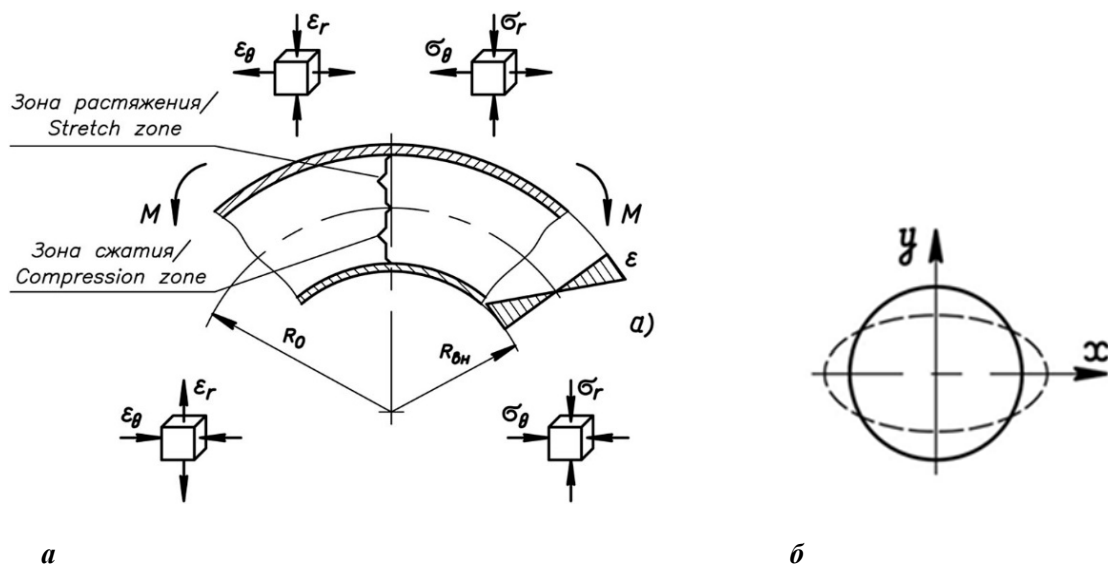


Рис. 2. Расчетная схема участка на изгиб:
 a — с учетом гипотезы плоских сечений; b — с учетом эффекта Т. Кармана

Figure 2. Calculation scheme of the section in bending:
 a — taking into account the hypothesis of planar cross-sections; b — taking into account the effect of T. Karman

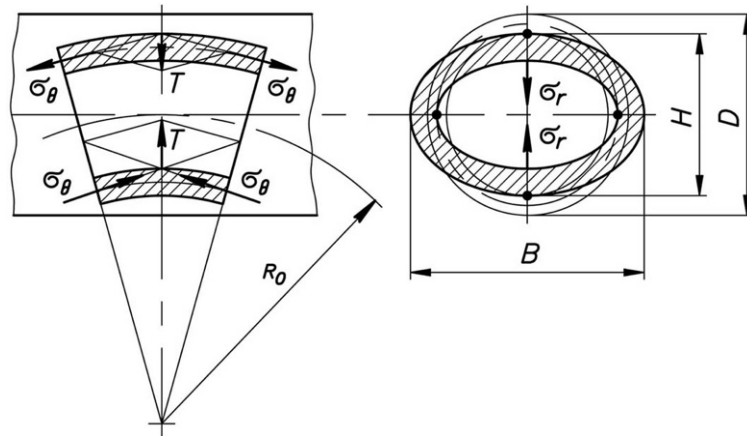


Рис. 3. Искажение профиля трубы (овализация)
Figure 3. Pipe profile distortion (ovalization)

Для приближенного определения минимального радиуса изгиба осевой линии трубы можно воспользоваться эмпирической зависимостью, рекомендуемой для предупреждения складкообразования (гофр) [22]:

$$\frac{R_{\min}}{D} \cong 9,25 \sqrt{0,2 - \frac{S}{D}} = 9,25 \sqrt{0,2 - \frac{1,0}{30}} = 3,7763.$$

Таким образом, минимальный внутренний радиус, при котором труба находится на грани устойчивости:

$$R = \frac{R_{\min}}{D} D = 3,7763 \cdot 30 = 113,3 \text{ мм.}$$

Радиус изгиба осевой линии трубы

$$R_0 = R + \frac{D}{2} = 113,3 + \frac{30}{2} = 128,3 \text{ мм.}$$

Параметры овализации (уплощение внешней стенки) приближенно можно оценить допущением пропорционального изменения длин малой и большой осей эллиптического сечения:

$$B = D + k_{\sigma} k_D = 30 + 2,0071 \cdot 8,5455 = 47,15 \text{ мм;}$$

$$H = D - k_{\sigma} k_D = 30 - 2,0071 \cdot 8,5455 = 12,85 \text{ мм,}$$

где k_{σ} — коэффициент, зависящий от материала трубы:

$$k_{\sigma} = 2 + 3,46 \frac{\sigma_T}{E_T} = 2 + 3,46 \frac{145}{0,71 \cdot 10^5} = 2,0071,$$

k_D — коэффициент, зависящий от радиусагиба, толщины стенки и диаметра трубы:

$$k_D = \frac{D - S}{2 + \frac{48 S^2 \left(R_0 + \frac{D}{2} \right)^2}{(D - S)^4}} = \frac{30 - 1,0}{2 + \frac{48 \cdot 1,0^2 \left(128,3 + \frac{30}{2} \right)^2}{(30 - 1,0)^4}} = 8,5455,$$

$\sigma_T \equiv \sigma_{0,2} = 145 \text{ МПа}^1$ — условный предел текучести алюминиевого деформируемого сплава АМгб;

$E_T = 0,71 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ — модуль упругости при деформационном упрочнении алюминиевого деформируемого сплава АМгб.

С учетом определенного искажения сплющенного кольцевого профиля вследствие овализации

$$H/D = 12,85/30 = 0,428,$$

величина сжимающей (радиальной) деформации, искажающая поперечное сечение трубы:

$$\varepsilon_r = \frac{H - D}{D} = \frac{12,85 - 30}{30} = -0,572.$$

Тогда с учетом неразрывности деформаций ($\varepsilon_\theta = \varepsilon_r$) и принимая во внимание условие постоянства объема при плоской деформации

$$(1 + \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_\theta) = 1,0,$$

рассчитывается тангенциальная деформация, согласно гипотезе плоских сечений

$$\varepsilon_\theta = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon_r} = \frac{-\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} = 1 - \frac{1}{1 + 0,572} = 0,364.$$

Рассматривая интенсификацию процесса гибки, при которой накопленная деформация обуславливает разрушение материала, наиболее удобным критерием пластичности является теория Мора и гипотеза энергии формоизменения, согласно которой интенсивность деформаций определяется совокупностью компонентов деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + 0,32)} \sqrt{(0,364 + 0,572)^2} = 0,501 \text{ (50,1 \%)},$$

где $\mu = 0,31 \dots 0,33$ — коэффициент Пуассона алюминиевого деформируемого сплава АМгб.

При этом, рассматривая влияние деформационных параметров, не следует пренебрегать уменьшением толщины наружной стенки изогнутого участка, обусловленного действием продольных (тангенциальных) растягивающих напряжений

$$S'_1 = \frac{2R_0S + D}{2(R_0 + D)} = \frac{2 \cdot 128,3 \cdot 1,0 + 30}{2(128,3 + 30)} = 0,905 \text{ мм}^2,$$

$$S'_2 = \frac{S}{1 + \frac{D+S}{2R+D}} = \frac{1,0}{1 + \frac{30+1,0}{2 \cdot 113,3 + 30}} = 0,892 \text{ мм}^3.$$

Средняя величина утонения

$$S' = \frac{S'_1 + S'_2}{2} = \frac{0,905 + 0,892}{2} = 0,899 \text{ мм} \text{ и } \frac{S'}{S} = \frac{0,899}{1,0} = 0,899.$$

¹ Алюминий, сплав алюминия // Марочник стали и сплавов. URL: http://splav-kharkov.com/choose_type_class.php?type_id=11 (дата обращения: 10.10.2022).

² Мосин Ф.В. Технология изготовления деталей из труб. Москва; Ленинград: Машгиз [Ленингр. отд-ние], 1962. 172 с.

³ Баица Т.М. Машиностроительная гидравлика. М.: Машиностроение, 1971. 672 с.

Рассматривая прочностные характеристики изгибаемой трубы, следует отметить одновременную «игру» двух деформационных параметров — утонение, приводящее к ослаблению сечения трубы и деформационное упрочнение материала, характеризующее интенсивностью деформаций.

Пластичность материала устанавливается его механическими свойствами, полученными в испытаниях на растяжение и аппроксимированными степенной зависимостью

$$\sigma_T = \sigma_{0,2} + A \varepsilon_i^n = 145 + 80,07 \cdot 50,1^{0,278} = 382,7 \text{ МПа},$$

где A, n — коэффициенты упрочнения данного материала [23]:

$$A = \frac{\sigma_\varepsilon - \sigma_{0,2}}{\delta^n} = \frac{315 - 145}{15^{0,278}} = 80,07,$$

$$n = \frac{\sigma_\varepsilon \delta}{\sigma_\varepsilon - \sigma_{0,2}} = \frac{315 \cdot 0,15}{315 - 145} \approx 0,278,$$

где $\sigma_\varepsilon = 315$ МПа — предел прочности алюминиевого деформируемого сплава АМг6; $\delta = 15\%$ — относительное удлинение при разрыве (трубы, ГОСТ 18482-79).

При определении напряжения в материале при чистом изгибе тонкостенной оболочки кольцевого сечения воспользуемся зависимостью радиального напряжения, известной из теории листовой штамповки, и действующего по кромке гибочного сегмента [24]:

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \sigma_T \frac{S}{R_0}.$$

Делаем допущение о равноценности развития деформационного процесса по радиусу изгиба осевой линии, разделяющей сжатые и растянутые слои листового металла или применительно к тонкостенной оболочке — на половине высоты кольцевого сечения при овализации $R_0 = H/2$.

Окончательно наибольшая величина напряжения в опасном сечении изгибаемой трубы, при угле изгиба 90° ($\alpha = \pi/2$) с использованием коэффициента контактного трения $f = 0,2$ [25]:

$$\sigma_\rho = \sigma_T \frac{S'}{Hk} e^{f\alpha} = 382,7 \frac{0,899}{12,85 \cdot 0,352} e^{0,2 \frac{\pi}{2}} = 103,3 \text{ МПа},$$

где k — коэффициент учитывающий эффект сплющивания, уменьшающий жесткость трубы:

$$k \approx 1 - \frac{9}{10 + 12 \lambda^2} = 1 - \frac{9}{10 + 12 \cdot 0,57^2} \approx 0,352,$$

λ — параметр

$$\lambda = \frac{4 S R_0}{D^2} = \frac{4 \cdot 1,0 \cdot 128,3}{30^2} = 0,57.$$

Предельный радиус кривизны будет при достижении радиальных напряжений начального предела текучести материала, что характеризует пластическую потерю устойчивости стенок и исчерпание несущей способности материала

$$\sigma_{\rho \max} \leq \sigma_{0,2} = 145 \text{ МПа}.$$

Последовательность приближений при решении данной задачи устанавливает критический радиус $R = 93,6$ мм, допускающий гибку на грани потери устойчивости, то есть разрушения материала при превышении ресурса пластичности (рис. 4).

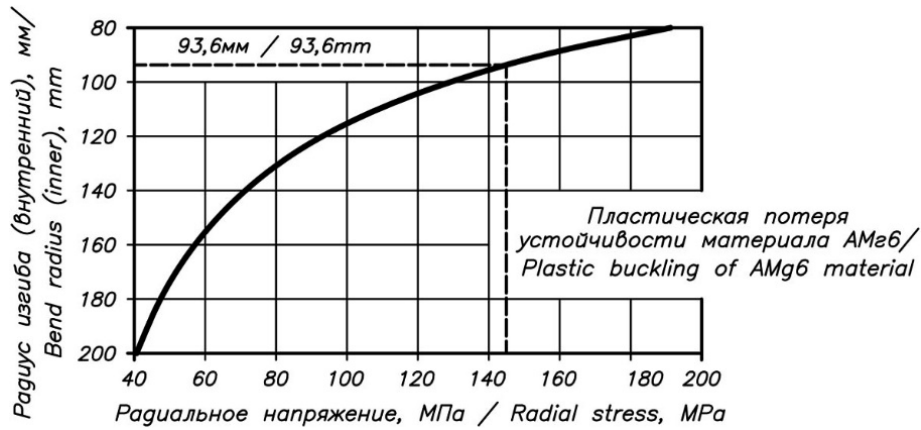


Рис. 4. Зависимость радиального напряжения от радиуса изгиба трубы Ø30×1,0 мм из алюминиевого деформируемого сплава АМгб
Figure 4. The dependence of radial stress on bending radius of tube Ø30×1.0 mm made of aluminum deformable alloy AMg6

Аналогичные расчеты критического радиуса при изгибе труб различной тонкостенности приведены в таблице.

Параметры изгиба трубы Ø30 мм из алюминиевого деформируемого сплава АМгб
Bending parameters of a Ø30 mm pipe made of aluminum deformable alloy AMg6

Толщина стенки <i>S</i> , мм / Wall thickness <i>S</i> , mm	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	4,5
Параметр тонкостенности <i>S/D</i> / Thin-wall parameter <i>S/D</i>	0,033	0,067	0,083	0,1	0,117	0,15
Минимальный радиус (гофрообразование) / Minimum Radius (corrugation) $\frac{R_{min}}{D} \cong 9,25 \sqrt{0,2 - \frac{S}{D}}$	3,777	3,377	3,156	2,925	2,67	2,068
Критический радиус / Critical Radius: – изгиба <i>R</i> , мм / of bending <i>R</i> , mm – относительный <i>R/D</i> / relative, <i>R/D</i>	93,6 3,12	49,6 1,65	39,2 1,31	31,7 1,06	26,1 0,87	17,9 0,6
Относительная высота, <i>H/D</i> / Relative height <i>H/D</i>	0,361	0,529	0,592	0,645	0,692	0,765
Коэффициент / Factor of: – утонения, <i>S'/S</i> / – thinning, <i>S'/S</i> – сплющивания, <i>k</i> / – ovalization, <i>k</i>	0,884 0,294	0,782 0,355	0,742 0,373	0,707 0,387	0,675 0,396	0,616 0,408

3. Результаты и обсуждение

Обобщение результатов проведенного исследования минимального (гофрообразование) и критического (разрушение) радиусов гибки, с учетом пластических свойств материала, позволяет установить предельную степень интенсификации гибки после появления гофрообразования и до начала разрушения материала (рис. 5).

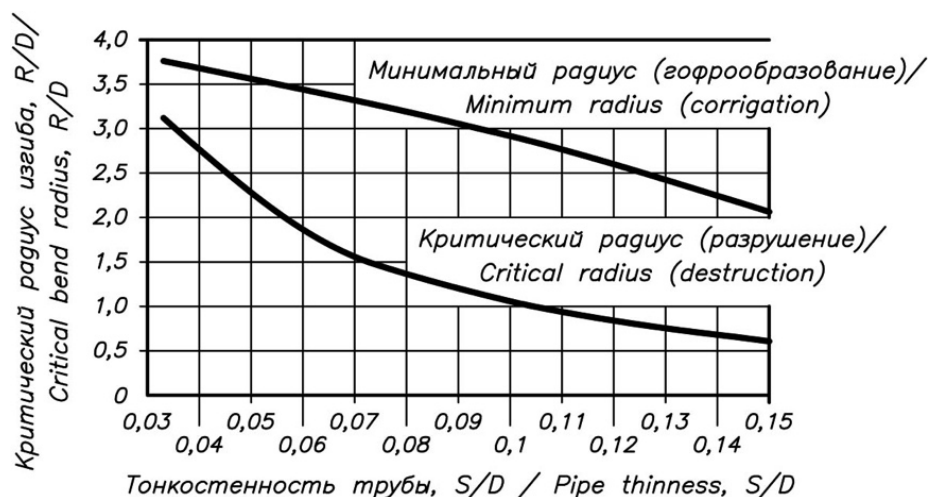


Рис. 5. Сравнение минимального и критического радиусов гибки
 Figure 5. Comparison of minimum and critical bending radii

4. Заключение

1. Представлен метод высчитывания критического радиуса изгибаемой трубы, определяемый наибольшим напряжением, зависящим от интенсивности деформационного искажения поперечного сечения кольцевой оболочки с учетом эффекта Т. Кармана. Особенностью метода является использование простейших соотношений между овализацией профиля и интенсивностью деформаций, реализуемых в гнущем элементе.

2. Сопоставление с минимальным радиусом изгиба трубы, характеризующим гофрообразование, показывает достаточный запас ресурса пластичности и возможность интенсификации гибки до начала разрушения материала.

3. Численное исследование механизма деформационного изменения профиля трубы позволит составить рекомендации по разработке технологического процесса получения гнутых труб и проектированию гибочной оснастки с учетом пластических свойств конкретного материала.

Список литературы

1. Di Sarno L., Karagiannakis G. Petrochemical Steel Pipe Rack: Critical Assessment of Existing Design Code Provisions and a Case Study // International Journal of Steel Structures. 2020. Vol. 20. P. 232–246. <https://doi.org/10.1007/s13296-019-00280-w>
2. Ji L.K., Zheng M., Chen H.Y., Zhao Y., Yu L.J., Hu J., Teng H.P. An estimation of critical buckling strain for pipe subjected plastic bending // Central European Journal of Engineering. 2014. Vol. 4. P. 326–333. <https://doi.org/10.2478/s13531-013-0168-8>
3. Ji L.K., Zheng M., Chen H.Y., Zhao Y., Yu L.J., Hu J., Teng H.P. Apparent strain of a pipe at plastic bending buckling state // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2015. Vol. 37. P. 1811–1818. <https://doi.org/10.1007/s40430-014-0302-4>
4. Yudo H., Yoshikawa T. Buckling phenomenon for straight and curved pipe under pure bending // Journal of Marine Science and Technology. 2015. Vol. 20. P. 94–103. <https://doi.org/10.1007/s00773-014-0254-5>
5. Samusev S.V., Zhigulev G.P., Fadeev V.A., Manakhov K.S. Shaping of pipe blanks on specialized bending equipment // Steel in Translation. 2016. Vol. 46. P. 169–172. <https://doi.org/10.3103/S0967091216030128>
6. Murata M., Kuboki T., Takahashi K., Goodarzi M., Jin Y. Effect of hardening exponent on tube bending // Journal of Materials Processing Technology. 2008. Vol. 201(1-3). Pp. 189–192. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.11.286>
7. Никитин В.А. Проектирование станков холодной и горячей гибки труб. Санкт-Петербург: ОАО «ЦТСС», 2011. 232. ISBN 978-5-902241-14-0
8. Козлов А.В., Бобылев А.В. Технология и оборудование холодной гибки тонкостенных труб: монография. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. 169 с. ISBN: 978-5-696-03798-1
9. Козлов А.В., Бобылев А.В., Халиулин Е.В. Проверка возможности холодной гибки труб из нержавеющей и титановых сплавов // Технические науки — от теории к практике. 2012. № 14. С.104–111. EDN: PEMBRP

10. Козлов А.В., Шеркунов В.Г., Хилькевич Я.М. Опыт гибки тонкостенных труб в холодном состоянии // *Технология машиностроения*. 2008. № 10. С. 21–22. EDN: KGWSGR
11. Wu W., Dong H., Zhang S. Scattering of guided waves propagating through pipe bends based on normal mode expansion // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12. Article 12488. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-16708-z>
12. Vazouras P., Karamanos S.A. Structural behavior of buried pipe bends and their effect on pipeline response in fault crossing areas // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2017. Vol. 15. P. 4999–5024. <https://doi.org/10.1007/s10518-017-0148-0>
13. Li Y., Shuai J., Jin Z-l, Zhao Y-t, Xu K. Local buckling failure analysis of high-strength pipelines // *Petroleum Science*. 2017. Vol. 14. P. 549–559. <https://doi.org/10.1007/s12182-017-0172-3>
14. Liang H., Zhou J., Lin J., Jin F., Xia F., Xue J., Jiachu Xu J. Buckle Propagation in Steel Pipes of Ultra-high Strength: Experiments, Theories and Numerical Simulations // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2020. Vol. 33. P. 546–563. <https://doi.org/10.1007/s10338-019-00148-w>
15. Michael T.C., Veerappan A.R., Shanmugam S. Effect of ovality and variable wall thickness on collapse loads in pipe bends subjected to in-plane bending closing moment // *Engineering Fracture Mechanics*. 2012. Vol. 79. P. 138–148. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.10.009>
16. Zaitsev N.L., Popov V.A., Blinov I.V., Istomin A.I., Korzunin G.S. A method for estimating the metal residual life of the weld pipes of gas main pipelines // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2011. Vol. 47. Article 431. <https://doi.org/10.1134/S1061830911070096>
17. Robertson A., Li H., Mackenzie D. Plastic collapse of pipe bends under combined internal pressure and in-plane bending // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2005. Vol. 82. Issue 5. P. 407–416. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2004.09.005>
18. Вдовин С.И. Объектно-ориентированное моделирование пластического изгиба трубы // *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. 2013. № 1. С. 32–37.
19. Морозов Ю.А. Исследование предельных деформаций листовой вытяжки с учетом пластического утонения и разрушения материала // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 5. С. 353–359. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-353-359>
20. Морозов Ю.А. Силовые параметры деформирования металла при листовой вытяжке // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 6. С. 493–503. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-493-503>
21. Абрамов А.Г., Морозов Ю.А. Исследование процесса формообразования гнутых труб с учетом пластических свойств металла // *Современные материалы, техника и технологии*. 2022. № 5 (44). С. 42–47. EDN: VTEBUK
22. Аверкиев Ю.А., Аверкиев А.Ю. *Технология холодной штамповки*. М.: Машиностроение, 1989. 304 с. ISBN 5-217-00336-7
23. Третьяков А.В., Зюзин В.И. *Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением: справочник*. М.: Металлургия, 1973. 224 с.
24. Попов Е.А. *Основы теории листовой штамповки*. М.: Машиностроение, 1977. 278 с.
25. Исаченков Е.И. *Контактное трение и смазки при обработке металлов давлением*. М.: Машиностроение, 1978. 208 с.

References

1. Di Sarno L., Karagiannakis G. Petrochemical Steel Pipe Rack: Critical Assessment of Existing Design Code Provisions and a Case Study. *International Journal of Steel Structures*. 2020;20:232–246. <https://doi.org/10.1007/s13296-019-00280-w>
2. Ji L.K., Zheng M., Chen H.Y., Zhao Y., Yu L.J., Hu J., Teng H.P. An estimation of critical buckling strain for pipe subjected plastic bending. *Central European Journal of Engineering*. 2014;4:326–333. <https://doi.org/10.2478/s13531-013-0168-8>
3. Ji L.K., Zheng M., Chen H.Y., Zhao Y., Yu L.J., Hu J., Teng H.P. Apparent strain of a pipe at plastic bending buckling state. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2015;37:1811–1818. <https://doi.org/10.1007/s40430-014-0302-4>
4. Yudo H., Yoshikawa T. Buckling phenomenon for straight and curved pipe under pure bending. *Journal of Marine Science and Technology*. 2015;20:94–103. <https://doi.org/10.1007/s00773-014-0254-5>
5. Samusev S.V., Zhigulev G.P., Fadeev V.A., Manakhov K.S. Shaping of pipe blanks on specialized bending equipment. *Steel in Translation*. 2016;46:169–172. <https://doi.org/10.3103/S0967091216030128>
6. Murata M., Kuboki T., Takahashi K., Goodarzi M., Jin Y. Effect of hardening exponent on tube bending. *Journal of Materials Processing Technology*. 2008;201(1–3):189–192. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.11.286>
7. Nikitin V.A. *Design of cold and hot pipe bending machines*. St. Petersburg: TsTSS. Publ.; 2011. (In Russ.) ISBN 978-5-902241-14-0
8. Kozlov A.V., Bobylev A.V. *Technology and equipment for cold bending of thin-walled pipes*. Chelyabinsk: YuUrGU Publ.; 2007. (In Russ.) ISBN: 978-5-696-03798-1

9. Kozlov A.V., Bobylev A.V., Khaliulin E.V. Check of possibility cold are flexible pipes from corrosion-proof and titanic alloys. *Tekhnicheskiye nauki — ot teorii k praktike [Technical sciences — from theory to practice]*. 2012;14:104–111. (In Russ.) EDN: PEMBRP
10. Kozlov A.V., Sherkunov V.G., Khil'kevich Ya.M. Experience of bending thin-walled pipes in a cold state. *Tekhnologiya mashinostroyeniya [Mechanical engineering technology]*. 2012;10:21–22. (In Russ.) EDN: KGWSGR
11. Wu W., Dong H., Zhang S. Scattering of guided waves propagating through pipe bends based on normal mode expansion. *Scientific Reports*. 2022;12:12488. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-16708-z>
12. Vazouras P., Karamanos S.A. Structural behavior of buried pipe bends and their effect on pipeline response in fault crossing areas. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 017;15:4999–5024. <https://doi.org/10.1007/s10518-017-0148-0>
13. Li Y., Shuai J., Jin Z-l, Zhao Y-t, Xu K. Local buckling failure analysis of high-strength pipelines. *Petroleum Science*. 2017;14:549–559. <https://doi.org/10.1007/s12182-017-0172-3>
14. Liang H., Zhou J., Lin J., Jin F., Xia F., Xue J., Jiachu Xu J. Buckle Propagation in Steel Pipes of Ultra-high Strength: Experiments, Theories and Numerical Simulations. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2020;33:546–563. <https://doi.org/10.1007/s10338-019-00148-w>
15. Michael T.C., Veerappan A.R., Shanmugam S. Effect of ovality and variable wall thickness on collapse loads in pipe bends subjected to in-plane bending closing moment. *Engineering Fracture Mechanics*. 2012;79:138–148. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.10.009>
16. Zaitsev N.L., Popov V.A., Blinov I.V., Istomin A.I., Korzunin G.S. A method for estimating the metal residual life of the weld pipes of gas main pipelines. *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2011;47:431. <https://doi.org/10.1134/S1061830911070096>
17. Robertson A., Li H., Mackenzie D. Plastic collapse of pipe bends under combined internal pressure and in-plane bending. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2005;82(5):407–416. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2004.09.005>
18. Vdovin S.I. Object-oriented modelling of pipe plastic bending. *Forging and stamping production. Processing of materials by pressure*. 2013;1:32–37. (In Russ.)
19. Morozov Yu.A. Study of marginal deformations of the leaf extracts with regard to plastic thinning and destruction of the material. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(4):353–359. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-353-359>
20. Morozov Yu.A. Force parameters of metal deformation during sheet stretching. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):493–503. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-493-503>
- Abramov A.G., Morozov Yu.A. Investigation of the process of shaping of bent pipes with considering the plastic properties of the metal. *Sovremennyye materialy, tekhnika i tekhnologii [Modern materials, equipment and technologies]*. 2022;5(44):42–47. (In Russ.) EDN: VTBUK
21. Abramov A.G., Morozov Yu.A. Investigation of the process of shaping of bent pipes with considering the plastic properties of the metal. *Sovremennyye materialy, tekhnika i tekhnologii [Modern materials, equipment and technologies]*. 2022;5(44):42–47. (In Russ.) EDN: VTBUK
22. Averkiyev Yu.A., Averkiyev A.Yu. *Cold stamping technology*. Moscow: Mashinostroyeniye Publ.; 1989. (In Russ.) ISBN 5-217-00336-7
23. Tretyakov A.V., Zyuzin V.I. *Mechanical properties of metals and alloys during pressure processing. Directory*. Moscow: Metallurgiya Publ.; 1973. (In Russ.)
24. Popov E.A. *Fundamentals of the theory of sheet stamping*. Moscow: Mashinostroyeniye Publ.; 1977. (In Russ.)
25. Isachenkov E.I. *Contact friction and lubricants in the process of metal forming by pressure*. Moscow: Mashinostroyeniye. Publ.; 1978. (In Russ.)



СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ CONSTRUCTION MATERIALS AND PRODUCTS

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-392-409
EDN: WNUWLC
УДК 691.328.1

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Физические особенности проблем жидкостной коррозии железобетона с позиций теории тепломассопереноса

С.В. Федосов^{1,2}  , И.В. Красильников^{2,3}  , В.Е. Румянцева^{2,3,4} , И.А. Красильникова⁵ 


¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

² Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Москва, Российская Федерация

³ Ивановский государственный политехнический университет, Иваново, Российская Федерация

⁴ Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, Иваново, Российская Федерация

⁵ Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Российская Федерация

 fedosov-academic53@mail.ru, korasb@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 14 апреля 2023 г.

Доработана: 23 июля 2023 г.

Принята к публикации: 6 августа 2023 г.

Для цитирования

Федосов С.В., Красильников И.В., Румянцева В.Е., Красильникова И.А. Физические особенности проблем жидкостной коррозии железобетона с позиций теории тепломассопереноса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 4. С. 392–409. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-392-409>

Аннотация. Представлены результаты исследования неизотермических массообменных процессов, протекающих при жидкостной коррозии железобетона. Показана степень разработанности данного направления исследования: приведена классификация жидкостной коррозии бетонов, описано влияние «свободного гидроксида кальция» на устойчивость минералов цементного камня, показано относительное изменение прочности бетона в зависимости от безразмерной концентрации гидроксида кальция. Для бетонных и железобетонных конструкций, подверженных жидкостной коррозии, сформулирована краевая задача неизотермического массопереноса в системе «цементный бетон — жидкость» на основе нелинейного дифференциального уравнения массопроводности параболического типа с произвольным видом функции начального распределения концентраций и комбинированными граничными условиями первого, второго и третьего рода. Предложен комбинированный подход решения задачи неизотермического нестационарного массопереноса, основанный на разделении жизненного цикла строительной конструкции на «микропроцессы», с последующим выделением по толщине конструкции в рамках рассматриваемого небольшого временного интервала на концентрационные зоны. Получены аналитические решения задачи нестационарного массопереноса в процессах

Федосов Сергей Викторович, академик РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры технологий и организации строительства, Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-6117-7529; E-mail: fedosov-academic53@mail.ru

Красильников Игорь Викторович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительства и инженерных систем, Ивановский государственный политехнический университет, Иваново, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-3694-5906; E-mail: korasb@mail.ru

Румянцева Варвара Евгеньевна, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, директор института информационных технологий, естественных и гуманитарных наук, Ивановский государственный политехнический университет, Иваново, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-7226-4580; E-mail: varrym@gmail.com

Красильникова Ирина Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры химии, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-4342-4255; E-mail: irinanebukina@rambler.ru

© Федосов С.В., Красильников И.В., Румянцева В.Е., Красильникова И.А., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

жидкостной коррозии бетона для каждой выделенной концентрационной зоны, позволяющие рассчитывать концентрации целевого компонента в твердой фазе и тем самым прогнозировать динамику и кинетику деструктивных процессов цементных бетонов. Проведены обширные численные эксперименты, показывающие влияние параметров процесса на динамику и кинетику жидкостной коррозии железобетона.

Ключевые слова: жидкостная коррозия, долговечность, железобетон, нестационарный массоперенос, метод микропроцессов, безразмерные переменные

Physical features of the problems of liquid corrosion of reinforced concrete from the standpoint of the theory of heat and mass transfer

Sergey V. Fedosov^{1,2}  , Igor V. Krasilnikov^{2,3}  ,
Varvara E. Rumyantseva^{2,3,4} , Irina A. Krasilnikova⁵ 


¹ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

² Scientific Research Institute of Construction Physics RAASN, Moscow, Russian Federation

³ Ivanovo State Polytechnic University, Ivanovo, Russian Federation

⁴ Ivanovo Fire Rescue Academy of State Firefighting Service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Ivanovo, Russian Federation

⁵ Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation

 fedosov-academic53@mail.ru, korasb@mail.ru

Article history

Received: April 14, 2023

Revised: July 23, 2023

Accepted: August 6, 2023

For citation

Fedosov S.V., Krasilnikov I.V., Rumyantseva V.E., Krasilnikova I.A. Physical features of the problems of liquid corrosion of reinforced concrete from the standpoint of the theory of heat and mass transfer. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(4):392–409. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-392-409>

Abstract. The results of the study of non-isothermal mass-exchange processes occurring during liquid corrosion of iron-concrete are presented. The degree of development of this direction of research is shown: the classification of liquid corrosion of concrete is given, the effect of “free calcium hydroxide” on the stability of cement stone minerals is described, the relative change in the strength of concrete depending on the dimensionless concentration of calcium hydroxide is shown. For concrete and reinforced concrete structures subjected to liquid corrosion, the boundary value problem of non-isothermal mass transfer in the “cement concrete — liquid” system is formulated on the basis of a nonlinear differential equation of mass conductivity of a parabolic type with an arbitrary form of the initial concentration distribution function and combined boundary conditions of the first, second and third kind. A combined approach to solving the problem of non-isothermal unsteady mass transfer is proposed, based on the division of the life cycle of a building structure into “micro-processes”, followed by the separation of the thickness of the structure within the considered small time interval into concentration zones. Analytical solutions to the problem of unsteady mass transfer in the processes of liquid corrosion of concrete for each selected concentration zone have been obtained, allowing to calculate the concentrations of the target component in the solid phase, thereby predicting the dynamics and kinetics of destructive processes of cement concretes. Extensive numerical experiments have been carried out showing the effect of process parameters on the dynamics and kinetics of liquid corrosion of reinforced concrete.

Keywords: liquid corrosion, durability, reinforced concrete, unsteady mass transfer, method of “micro-processes”, dimensionless variables

Sergey V. Fedosov, Academician of the RAASN, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Technologies and Organization of Construction, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6117-7529; E-mail: fedosov-academic53@mail.ru

Igor V. Krasilnikov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction and Engineering Systems, Ivanovo State Polytechnic University, Ivanovo, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3694-5906; E-mail: korasb@mail.ru

Varvara E. Rumyantseva, Corresponding Member of the RAASN, Doctor of Technical Sciences, Professor, Director of the Institute of Information Technologies, Natural Sciences and Humanities, Ivanovo State Polytechnic University, Ivanovo, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7226-4580; E-mail: varrym@gmail.com

Irina A. Krasilnikova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Chemistry, Vladimir State University named after Alexander Grigoryevich and Nikolai Grigoryevich Stoletov, Vladimir, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-4342-4255; E-mail: irinanebukina@rambler.ru

1. Введение

Все большее распространение получает проектирование и строительство новых уникальных объектов, эксплуатируемых в экстремальных, в том числе агрессивных по отношению к железобетону, условиях: промышленные, энергетические, гидротехнические и морские сооружения. В связи с этим к железобетону предъявляются повышенные требования коррозионной стойкости и способности длительно защищать стальную арматуру от коррозии. Исследование и повышение коррозионной стойкости бетонов с целью применения бетонов в агрессивных условиях эксплуатации без дополнительной защиты является в настоящее время актуальной задачей [1].

Исследование физико-химических процессов при жидкостной коррозии железобетона представляет как научный, так и промышленный интерес. Данное обстоятельство продиктовано требованиями проектирования и строительства долговечных зданий и сооружений, а кроме этого, необходимостью интеграции математических моделей нестационарных процессов, протекающих при эксплуатации бетонных и железобетонных конструктивных элементов, в цифровые имитационные модели жизненного цикла строительного объекта.

В строительных нормах отсутствуют рекомендации по проектированию и расчету долговечности конструкций с учетом реальных условий эксплуатации в агрессивной окружающей среде. Прогнозирование срока службы бетонных и железобетонных конструкций, оценка остаточного ресурса их эксплуатации является актуальной задачей, решение которой возможно с применением теории массопереноса.

Многие исследования посвящены разработке методов расчета железобетонных конструкций, подверженных коррозионному разрушению, моделированию развития повреждений. В работе [2] выполнено моделирование развития коррозионных трещин в бетоне с учетом комбинированного воздействия зависящих от времени деформаций слоев и механических свойств продуктов коррозии с применением принципа равновесия сил и совместимости деформаций. В 2021 году мексиканские ученые представили подход [3], основанный на искусственном интеллекте, для классификации риска деструкции образцов, включающих различные смеси и добавки. Результат исследований коррозионного и механического поведения железобетонных конструкций с различным содержанием отходов углеродного волокна, подвергнутых длительной точечной нагрузке и воздействию 3,5 % раствора хлорида натрия [4], показал, что отходы углеволокна можно использовать в железобетонных конструкциях для снижения коррозионной активности.

В [5] представлен численный подход к моделированию коррозии бетона, основанный на разделении процесса коррозии по микро- и макроячеечному уровням, принят метод усредненного по пространству моделирования. На основе результатов моделирования и экспериментов было достигнуто дальнейшее понимание воздействия на профили ионов с учетом трех преобладающих механизмов, включая поляризацию/химическую реакцию, ионизацию и миграцию, обусловленную хемозлектрическим полем.

Нестационарный массоперенос в процессах жидкостной коррозии бетона с учетом химического воздействия жидкой агрессивной среды на уровне феноменологических уравнений смоделирован в [6]. Полученное решение позволяет рассчитать концентрацию переносимого компонента («свободного гидроксида кальция») по толщине конструкции, его содержание в жидкой фазе и среднее по толщине и объему конструкции.

Растрескивание бетона, вызванное трехмерным коррозионным расширением заполнителей смоделировано с помощью численной модели мезомасштаба [7]. Заполнители в модели представлены спиральными нитями. Учет заполнителей в виде пространственной спиральной структуры нитями при моделировании может эффективно повысить точность прогнозирования растрескивания бетона.

Предложена [8] математическая модель процессов хлоридной и карбонатной коррозии, в которой учтен массоперенос кислотного реагента в капиллярах продольного направления с перетоком в поперечные, в которых протекает реакция нейтрализации с образованием подвижной границы фазового превращения.

На основе сравнительных исследований моделей коррозионного повреждения железобетона было замечено, что среднее время начала коррозии арматуры (т.е. время депассивации покрытия арматуры) варьируется в диапазоне 15–20 лет [9]. В исследовании [10] была использована простая нейронная сеть с прямым и обратным распространением, в которой моделируются проблемы, связанные с нелинейными переменными. Модель нейронной сети, обученная для прогнозирования критического времени разрушения конструкции, дала очень хорошие результаты, близкие к фактическим расчетным результатам.

Для повышения сходимости результатов прогнозирования хлоридной коррозии в бетоне в работе [11] предлагается сосредоточиться на изучении влияния локальных свойств границы раздела сталь — бетон. Многие характеристики, которые можно обнаружить на границе раздела сталь — бетон, обычно не учитываются должным образом и не сообщаются в традиционных исследованиях.

Поиск в литературных источниках показал, что все исследования выполнялись, как правило, при стандартной температуре 20–25 °С и неизотермические процессы массопереноса при коррозии бетона не рассматривались. Однако огромное количество строительных конструкций зданий и сооружений эксплуатируются в условиях воздействия изменяющихся климатических и технологических температур, при одновременном (постоянном или периодическом) контакте конструкции с жидкостью. К таким конструкциям можно отнести все фундаменты зданий в зимний период времени, в особенности при высоком уровне грунтовых вод; фундаменты и полы производственных зданий с избыточным выделением тепла и влаги, градирни, резервуары и т.д. Все железобетонные конструкции на водных объектах (дамбы, причалы, плотины, пирсы, порты и другие) эксплуатируются в водной среде, температура которой, особенно в климатических условиях России, значительно изменяется в течение года.

Параметры тепло- и массообменных процессов имеют существенно разные численные значения при разных температурах, влажностях, концентрациях различных веществ.

Цель настоящего исследования — разработка метода расчета динамики и кинетики массообменных процессов при жидкостной коррозии цементных бетонов с учетом изменений условий эксплуатации конструкций. Для достижения поставленной цели необходимо разработать физико-математическую модель нестационарного массопереноса целевого компонента (гидроксида кальция) при жидкостной коррозии бетона с учетом изменяющихся условий в процессе эксплуатации, которая позволит прогнозировать динамику (т.е. изменение профиля концентрации по толщине конструкции целевого компонента во времени) и кинетику процесса (т.е. изменение во времени общего количества переносимого вещества). Выполнить решение сформулированной задачи нестационарного массопереноса и провести численные эксперименты, показывающие влияние параметров процесса на динамику и кинетику жидкостной коррозии цементных бетонов.

2. Физико-химические особенности коррозии цементных бетонов

Коррозия представляет процесс разрушения конструкции или материала в результате воздействия химических или физических факторов [12]. При проектировании и моделировании по жизненному циклу объектов строительства актуальным становится необходимость учета действительных условий работы конструкции в окружающей ее среде. Необходимо принимать во внимание не только вид агрессивной среды и концентрацию агрессивных веществ в ней, но и колебания температуры, влажности, агрессивности и характеристики конструкции, которые на протяжении жизненного цикла будут претерпевать изменения. Это позволит правильно выбрать исходные материалы, назначить необходимую диффузионную непроницаемость конструкции, что, с одной стороны, обязательно обеспечит необходимую долговечность, а с другой — позволит оптимизировать параметры структуры, режимы изготовления и свойства бетона в конструкциях, материалах и изделиях.

Коррозию бетона, при воздействии на него жидкостей, следует разделить на три вида, по которым принципиально отличается причина разрушения материала:

- при коррозии бетона I вида он находится во взаимодействии с водой низкой жесткости, имеющиеся в ней количество солей настолько мало, что их возможным химическим взаимодействием с составляющими бетона можно пренебречь, деструкцию вызывают процессы: массоперенос свободного гидроксида кальция и последующий гидролиз клинкерных минералов цементного камня. После начала разложения высокоосновных соединений цементного камня изменяются механические характеристики бетона, в первую очередь прочность;

- при коррозии бетона II вида он находится во взаимодействии с водными растворами солей и кислот, которые диффундируют в его капиллярно-пористую структуру и вступают в химическое взаимодействие со свободным гидроксидом кальция, параллельно происходит массоперенос свободного гидроксида кальция в жидкость. Продукты реакций — легко растворимы водой, либо аморфные малорастворимые, не обладающие вяжущей способностью. Деструкция развивается так же ввиду начавшегося разложения высокоосновных соединений цементного камня;

– при коррозии бетона III вида он находится во взаимодействии с водными растворами солей и кислот (преимущественно сульфатов), которые диффундируют в его капиллярно-пористую структуру и вступают в химическое взаимодействие с составляющими цементного камня, параллельно происходит массоперенос свободного гидроксида кальция в жидкость. Продукты реакций — малорастворимые водой кристаллизующиеся соли. Кристаллы образующихся веществ превышают размеров пор бетона, что вызывает значительные внутренние напряжения в стенках структуры цементной матрицы.

Коррозия бетона почти всегда начинается с цементного камня, стойкость которого обычно меньше, чем каменных заполнителей. Цементный камень состоит из соединений, образовавшихся в процессе его твердения [13]. В нём содержатся также не гидратированные зёрна цемента, так как гидратация наиболее крупных частиц, развивающаяся от поверхности, вглубь этих частиц идёт медленно и практически может не закончиться даже через несколько лет или десятилетий. Кроме того, в цементном камне имеются открытые и закрытые поры и капиллярные ходы, заполненные воздухом или водой. Таким образом, затвердевший цемент представляет собой микроскопически неоднородную систему. В цементном камне всегда имеется в большем или меньшем количестве свободная известь, образующаяся главным образом при частичном гидролизе трехкальциевого силиката [12].

Все минералы цементного камня поддерживают стабильное существование только в растворах гидроксида кальция определённых концентраций [12; 14]. Концентрации гидроксида кальция, необходимые для поддержания стабильного существования минералов цементного камня на вяжущем из простого портландцемента, приведены в таблице.

**Равновесные концентрации гидроксида кальция для растворов различных минералов цементного камня /
Equilibrium concentrations of calcium hydroxide, for solutions of various cement stone minerals**

Минерал цементного камня / Cement Stone Mineral	Химическая формула / Chemical formula	Содержание в цементном камне, % / Content in cement stone, %	Граничные значения равновесной концентрации Ca(OH) ₂ , мг/л (в пересчете на CaO) / Boundary values Equilibrium concentration Ca(OH) ₂ , mg/l (in terms of CaO)	
			от / from	до / to
Трёхкальциевый силикат / Tricalcium silicate	3CaO·SiO ₂ ·3H ₂ O	37–60	1100	1290
Двухкальциевый силикат / Bicalcium silicate	2CaO·SiO ₂ ·2H ₂ O	15–37	1290	1290
Однокальциевый силикат / Singlecalcium silicate	CaO·2SiO ₂ ·H ₂ O	2–5	310	520
Четырёхкальциевый алюминат / Fourcalcium aluminate	4CaO·Al ₂ O ₃ ·12H ₂ O	0,1–4	1060	1080
Трёхкальциевый алюминат / Tricalcium aluminate	3CaO·Al ₂ O ₃ ·6H ₂ O	7–15	415	560
Двухкальциевый алюминат / Bicalcium aluminate	2CaO·Al ₂ O ₃ ·7H ₂ O	0,1–4	160	360
Четырёхкальциевый гидроферрит / Tetracalcium hydro-ferrite	4CaO·Fe ₂ O ₃ ·13H ₂ O	1–8	1060	1290
Двухкальциевый гидроферрит / Bicalcium hydroferrite	2CaO·Fe ₂ O ₃ ·H ₂ O	0,5–6	640	1060
Гидросульфалюминат кальция / Calcium Hydrosulfoaluminate	3CaO·Al ₂ O ₃ · ×3CaSO ₄ ·30H ₂ O	0,1–2	45	1290

Внутренняя структура цементного камня выходит из состояния равновесия уже при незначительном изменении концентрации свободного гидроксида кальция. При снижении концентрации свободного гидроксида кальция ниже определенных пороговых значений (табл.) начинается диссоциация высокоосновных соединений цементного камня в следующей последовательности: двухкальциевый силикат (если раствор гидроксида кальция ненасыщенный); трёхкальциевый силикат (на 15 %); четырёхкальциевый алюминат (на 16 %); четырёхкальциевый гидроферрит (на 18 %); двухкальциевый гидроферрит; трехкальциевый алюминат; однокальциевый силикат; двухкальциевый алюминат; гидросульфалюминат кальция. Продуктами гидролиза высокоосновных составляющих цементного камня являются оксиды и основания кальция,

алюминия, кремния, железа. Диссоциация высокоосновных соединений неизбежно приведет к изменению физико-механических свойств бетона, в особенности снижению его прочностных характеристик [12], что в конечном итоге повлияет на напряжённо-деформируемое состояние строительных конструкций.

Как показывают результаты множественных исследований профессоров В.М. Москвина и Ф.М. Иванова [12; 15] снижение общего количества гидроксида кальция на 20 % от первоначального, после изготовления конструкции, снижает прочность цементного камня на 20...25 %, а дальнейшее уменьшение еще на 10 % (на 30 % от первоначального) резко уменьшает ее на 67 %.

Интенсивность растворения, фильтрации, капиллярного переноса, диффузии, химического взаимодействия с агрессивными компонентами гидроксида кальция из образцов цементного раствора и бетона, характеризует развитие коррозии бетона, а полученные количественные оценки выщелачивания гидроксида кальция могут быть использованы для ориентировочного прогнозного подсчета изменения прочностных свойств бетона. В основном исследователи картину изменения прочности бетона при воздействии на него агрессивных сред отражают в виде кинетических кривых, т.е. получают данные изменения прочности образцов во времени, варьируя при этом составом бетонных смесей, видами и концентрациями агрессивных веществ. В исследованиях не рассматривались структурные изменения в бетоне и не всегда выполнялась корреляция по размерам образцов.

Для удобства использования полученных данных можно провести их аппроксимацию любой математической функцией. Нами выполнено приближение двумя функциями: параболой и экспонентой, эмпирические зависимости безразмерной концентрации $Z = (C_0 - C) / C_0$ удаленного массообменными процессами из структуры бетона гидроксида кальция с относительной прочностью бетона:

$$r = \frac{R}{R_0} = -12,3\bar{Z}^2 + 1,47\bar{Z} + 1. \quad (1)$$

$$r = \frac{R}{R_0} = -0,032 + 1,032 \exp(-3,474Z). \quad (2)$$

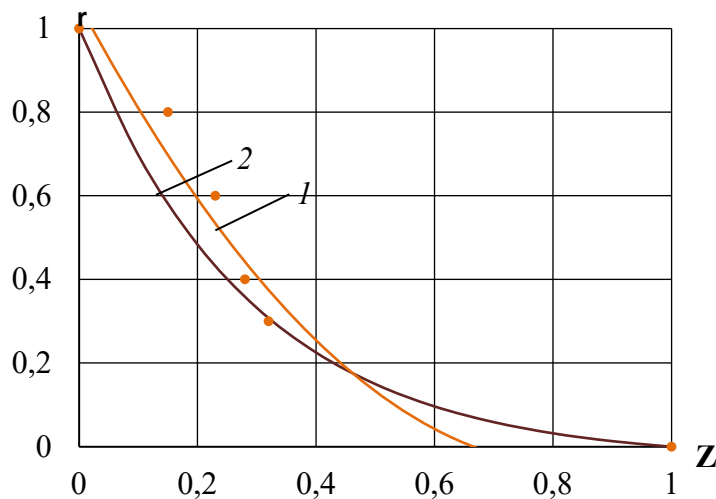


Рис. 1. Относительное изменение прочности бетона $r = R/R_0$ в зависимости от безразмерной концентрации гидроксида кальция $Z = (C_0 - C) / C_0$:

C_0 — начальная концентрация гидроксида кальция, г/л;
 C — концентрация гидроксида кальция, г/л; R_0 — прочность бетона до начала выщелачивания, МПа;
 R — прочность бетона, соответствующая концентрации C , МПа;
 1 — уравнение параболы; 2 — уравнение экспоненты; точки — литературные данные [12; 15]

Figure 1. Relative change in concrete $r = R/R_0$ strength depending on the dimensionless concentration of calcium hydroxide $Z = (C_0 - C) / C_0$:

C_0 — initial concentration of calcium hydroxide, g / l; C — concentration of calcium hydroxide, g / l;
 R_0 — concrete strength before leaching, МПа; R — concrete strength corresponding to the concentration of C , МПа;
 1 — parabola equation (1); 2 — exponential equation (2); points — literature data [12; 15]

На рис. 1. графически показано изменение коэффициента стойкости от безразмерной концентрации гидроксида кальция. Полученные эмпирические уравнения (1) и (2) можно использовать в информационных моделях жизненного цикла объектов строительства для моделирования изменения прочности бетона по толщине конструктивных элементов при эксплуатации железобетонной конструкции в жидкой агрессивной среде [16].

Гидроксид кальция определяет равновесие в капиллярно-пористой структуре цементного камня, изменения содержания которого в теле бетона приводят к изменениям механических свойств бетона, а в конечном итоге — на напряжённо-деформируемое состояние строительных конструкций. Этот процесс обусловлен диффузией «свободного гидроксида кальция» из толщи бетона к его поверхности, граничащей со средой, переходом вещества через границу раздела фаз «твёрдое тело — жидкость» и распределением в жидкой среде. Особенно интенсивно массоперенос происходит в зоне контакта бетона с жидкостью, разрушая, в первую очередь, защитный слой арматуры, тем самым провоцируя деструктивных электрохимических реакций на поверхности стальной арматуры.

Огромное количество строительных конструкций эксплуатируется в неизотермических условиях, что вызвано колебаниями температур в течение суток, года и т.д. Кроме этого, на противоположных границах конструкции зачастую бывают различные температуры, что формирует температурные поля по толщине конструкции, а следовательно, и изменение параметров массопереноса, в первую очередь коэффициента массопроводности.

Моделирование неизотермического нестационарного массопереноса в системе цементный бетон — жидкость, параметры процесса которого зависят и от температуры, и от концентрации переносимого компонента можно осуществить, опираясь на теорию массопереноса, приняв расчетную схему модели в соответствии с рис. 2. Предварительно необходимо, с использованием алгебраических уравнений, выполнить переход от температурно-концентрационных зависимостей (C, t) коэффициентов массопроводности и массосотдачи к пространственно-временным (x, τ).

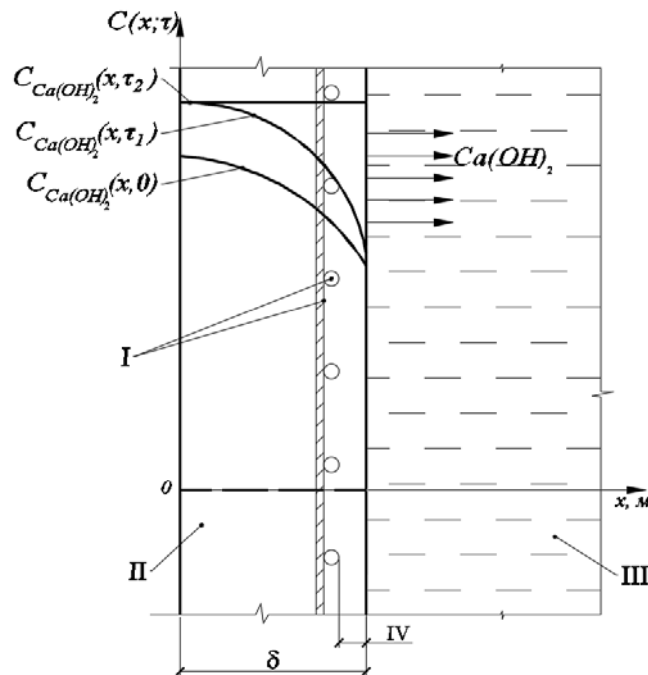


Рис. 2. Система «арматура — цементный бетон — жидкая среда»:

I — арматура; II — бетон; III — жидкая среда; IV — защитный слой

Figure 2. The system “reinforcement — cement concrete — liquid medium”:

I — reinforcement; II — concrete; III — liquid medium; IV — protective layer

Согласно теории массопереноса А.В. Лыкова в общем случае для коррозии первого и второго вида диффузия «свободного гидроксида кальция» в пористой структуре бетона описывается нелинейным дифференциальным уравнением массопроводности параболического типа с источником членом [18; 19]:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \text{div}[k(x, \tau) \text{grad} C(x, \tau)] + \frac{q_v(x, \tau)}{\rho_{\text{бет}}}, \quad (3)$$

где: $k(x, \tau)$ — коэффициент массопроводности (диффузии), изменяющийся по толщине стенки по заданному математическому закону от координаты и времени, $\text{м}^2/\text{с}$; $C(x, \tau)$ — распределение концентраций «свободного гидроксида кальция» в бетоне в момент времени τ в произвольной точке с координатой x , $\text{кг Са(ОН)}_2/\text{кг бетона}$; $q_v(x, \tau)$ — мощность объемного источника массы вследствие химических или фазовых превращений, $\text{кг Са(ОН)}_2/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$; $\rho_{\text{бет}}$ — плотность бетона, $\text{кг}/\text{м}^3$.

Уравнение массопроводности в виде (3) позволяет производить расчеты при изменяющихся по времени и координате параметров процесса: коэффициентов массопроводности и массоотдачи, мощности объемного источника массы вследствие фазовых и химических превращений, что очень важно для большинства практических расчетов физической картины процессов массопереноса и конечных результатов расчетов [20; 21]

3. Комбинированный численно-аналитический метод моделирования нестационарного массопереноса

Получить аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения крайне затруднительно (3), особенно в условиях изменения численного значения граничных условий и коэффициентов переноса по толщине конструкции. Решение описанной выше задачи нами предложено провести сочетанием методов численных и аналитических. Численными являются примененные одновременно методы микропроцессов [22–24] и зональный. При такой комбинации весь жизненный цикл конструкции разбивается на микропроцессы (временные интервалы). По толщине конструкции, ввиду изменения температуры и концентрации гидроксида кальция, будет изменяться и коэффициент массопроводности. В свою очередь, изменение коэффициента массопроводности будет влиять на искомые поля концентраций гидроксида кальция. Учесть данный факт при решении дифференциального уравнения принятым численно-аналитическим методом можно условно разбивая конструкцию по толщине на концентрационные зоны, в пределах которой значение коэффициента массопроводности в рамках рассматриваемого микропроцесса будет считаться постоянным. В результате этого для i -го микропроцесса задача по расчету распределения концентраций разложится на несколько упрощенных задач, распределенных по концентрационным зонам, показанным на рис. 3.

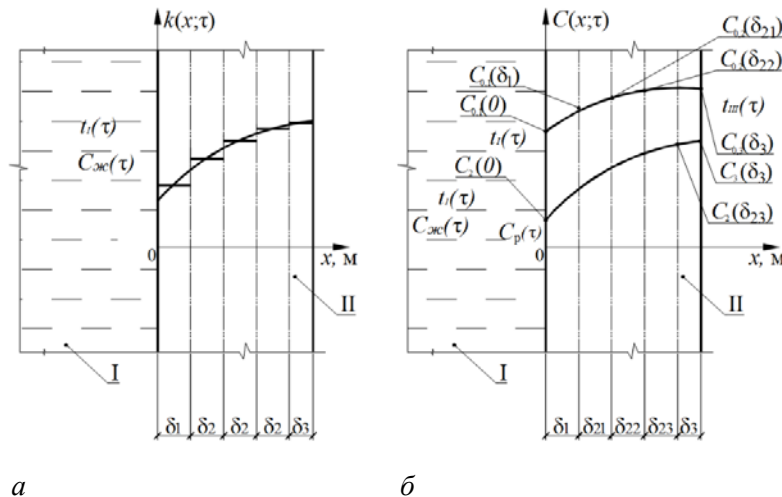


Рис. 3. Схема разделения конструкции на концентрационные зоны
Figure 3. Diagram of the structure division into concentration zones

Предварительно необходимо, с использованием алгебраических уравнений, выполнить переход от температурно-концентрационных зависимостей (C, t) коэффициентов массопроводности и массоотдачи к пространственно-временным (x, τ). По толщине конструкции, ввиду изменения температуры и концентрации гидроксида кальция, будет изменяться и коэффициент массопроводности (рис. 3, а).

Первая зона — слой бетона, находящийся рядом с границей раздела фаз (в дальнейших расчетах все математические выкладки для этой зоны будут с индексом «1»). На границе раздела фаз осуществляется конвективная массоотдача целевого компонента в жидкую фазу, что математически отражается в граничных условиях III рода, а на противоположной границе задействуются граничные условия первого рода. В случае образования на поверхности бетона биопленки, именно она в расчете будет принята за первую зону.

Промежуточные зоны — внутренние слои бетона не доступные из вне, (в дальнейших расчетах все математические выкладки для этой зоны будут с индексом «2»), количество промежуточных зон определяется в зависимости от изменения коэффициента массопроводности по толщине конструкции, с учетом требуемой точности расчета. У левой границы слоя, где устанавливаются более низкие концентрации, по сравнению с противоположной границей, за счет градиента концентраций действует поток массы, что математически отражается в граничных условиях II рода, а на противоположной границе задействуются граничные условия первого рода.

Крайняя зона — слой бетона, находящийся рядом с внешней не жидкой средой, считаемой не агрессивной, либо на него нанесен слой изоляции (в дальнейших расчетах все математические выкладки для этой зоны будут с индексом «3»). У левой границы слоя, где устанавливаются более низкие концентрации, по сравнению с противоположной границей, за счет градиента концентраций действует поток массы, что математически отражается в граничных условиях II рода, а на противоположной границе ввиду отсутствия массопотока через границу конструкции, контактирующей с окружающей средой применяется “условием непроницаемости”.

Выполненное разделение на три вида концентрационных зон позволяет заменить аналитическое решение сложной нелинейной задачи нестационарного массопереноса систем в среде с переменными потенциалами и коэффициентами переноса по толщине конструкции на 3 типа более простых задачи с линейными дифференциальными уравнениями. Количество промежуточных слоев, в которых значения коэффициента массопроводности приняты постоянными по толщине условно выделяемого слоя, в первую очередь диктуется допустимой погрешностью и подбирается итерационным способом.

При сопряжении полученных распределений концентраций по отдельным зонам должны выполняться обязательные равенства: концентрации на левой границе зоны и на правой границе смежной зоны, т.е. значения, рассчитанные для одной и той же точки соседних концентрационных зон должны быть равны; плотности потоков массы на левой границе зоны и на правой границе смежной зоны, т.е. потоки массы в одной и той же точки, но на разных концентрационных зонах одинаковые.

Выполнив разделение толщины конструкции и периода ее эксплуатации по принципам изложенным выше, получить необходимые решения в пределах одного любого микропроцесса и концентрационной зоны несложно аналитически методом интегрального преобразования Лапласа.

4. Результаты и обсуждение

Расчет массопереноса по описанной выше схеме производится от границы раздела фаз, т.е. начиная с первой зоны. Отличительной особенностью этой зоны является то, что происходит переход переносимого компонента — «свободного гидроксида кальция» из твердой фазы в жидкую. Данный переход лимитируется внешней массоотдачей, а математически отражается в граничных условиях третьего рода.

На первой концентрационной зоне происходит перенос гидроксида кальция от правой границе к левой (подвод массы к границе раздела фаз) с последующим переходом переносимого компонента из капиллярно-пористой структуры цементного бетона во внешнюю жидкую среду [22]. Данный переход вещества описывается уравнением внешней конвективной массоотдачи, а математически отражается в граничных условиях третьего рода. Для первой зоны, задача нестационарного массопереноса в системе взаимодействия гидроксида кальция, запишется следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial C_1(x, \tau)}{\partial \tau} = k_1 \frac{\partial^2 C_1(x, \tau)}{\partial x^2}, \tau > 0, 0 \leq x \leq \delta_1, \quad (4)$$

начальное условие: $C_1(x, \tau)|_{\tau=0} = C_1(x, \tau) = C_{0,1}(x), \quad (5)$

граничные условия: $C_1(\delta_1, \tau) = C_{\delta_1}, \beta[C_p(\tau) - C_1(0, \tau)] = k \frac{\partial C_1(0, \tau)}{\partial x}, \quad (6)$

где $C_{0,1}(x)$ — распределение концентрации гидроксида кальция в поровой структуре бетона в начале i -го микропроцесса по толщине первой концентрационной зоны, кг $\text{Ca}(\text{OH})_2/\text{кг}$ бетона; $C_1(x)$ — распределение концентрации гидроксида кальция в поровой структуре бетона по толщине первой концентрационной зоны в конце i -го микропроцесса, кг $\text{Ca}(\text{OH})_2/\text{кг}$ бетона; $C_p(\tau)$ — равновесная концентрация гидроксида кальция в жидкости на поверхности цементного бетона, кг $\text{Ca}(\text{OH})_2/\text{кг}$ бетона; k_1 — коэффициент массопроводности, имеющий фиксированное значение по толщине первой концентрационной зоны, $\text{м}^2/\text{с}$; β — коэффициент массоотдачи в жидкой среде, $\text{м}/\text{с}$; δ_1 — толщина первой концентрационной зоны, м ; x — координата, м ; τ — время, с .

Начальное условие (5) показывает, что в момент времени, принимаемый за начало расчета i -го микропроцесса, концентрация переносимого компонента (гидроксида кальция) распределена по толщине конструкции неравномерно. При этом начальное распределение концентрации переносимого компонента в твердой фазе должно быть описано какой-либо математической функцией [25].

Поскольку на левой границе происходит взаимодействие по схеме «твердое тело — жидкость», то необходимо учитывать конвективный перенос вещества, т.е. применить граничные условия третьего рода, описанные уравнением (6).

Для упрощения решений введем безразмерные переменные и критерии подобия, удобные для качественного анализа процессов коррозии:

$$Z_1(\bar{x}, Fo_m) = \frac{C(x, \tau) - C_p}{C_{\delta_1}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\delta_1}, \quad Fo_m = \frac{k\tau}{\delta_1^2}, \quad Bi_m = \frac{\beta\delta_1}{k_1}, \quad (7)$$

где $Z_1(\bar{x}, Fo_m)$ — безразмерная концентрация гидроксида кальция в поровой структуре бетона по толщине первой концентрационной зоны; \bar{x} — безразмерная координата; Fo_m — массообменный критерий подобия Фурье; Bi_m — массообменный критерий подобия Био.

Краевая задача массопроводности в первой зоне (4)–(6) в критериях подобия и безразмерных координатах запишется в виде

$$\frac{\partial Z_1(\bar{x}, Fo_m)}{\partial Fo_m} = \frac{\partial^2 Z_1(\bar{x}, Fo_m)}{\partial \bar{x}^2}, \quad Fo_m > 0, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1, \quad (8)$$

$$\text{начальное условие:} \quad Z_1(\bar{x}, 0) = Z_{0,1}(\bar{x}), \quad (9)$$

$$\text{граничные условия:} \quad Z_1(1, Fo_m) = Z_{\delta_1}, \quad \frac{\partial Z_1(0, Fo_m)}{\partial \bar{x}} = Bi_m Z_1(0, Fo_m). \quad (10)$$

Решение задачи (8)–(10) выполнено методом интегрального преобразования Лапласа. Проведя ряд сложных тригонометрических преобразований, получено окончательное решение искомой краевой задачи (8)–(10) в безразмерных переменных, позволяющее рассчитывать динамику полей концентраций целевого компонента в неограниченной пластине с массопереносом, лимитируемым внутренней диффузией и внешней массоотдачей:

$$Z_1(\bar{x}, Fo_m) = Z_{\delta_1} \frac{Bi_m \bar{x} + 1}{Bi_m + 1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Bi_m \sin(\mu_m \bar{x}) + \mu_m \cos(\mu_m \bar{x})}{(Bi_m + 1) \cos \mu_m - \mu_m \sin \mu_m} \times \\ \times \exp(-\mu_m^2 Fo_m) \left[\frac{Z_{\delta_1}}{\mu_m} - \int_0^1 Z_{0,1}(\xi) \sin[\mu_m(1 - \xi)] d\xi \right]. \quad (11)$$

Рассмотрим изменение распределения концентраций на различных временных этапах в первой зоне. В принятом нами критериальном подходе решения и анализа нестационарного массопереноса время отражается в массообменном критерии Фурье. Проведем численные эксперименты прогнозирования МССГК i -го микропроцесса первой зоны, непосредственно взаимодействующего с жидкой фазой, при различных

начениях массообменного числа Био, которое характеризует соотношение сил внешней и внутренней диффузии. На рис. 4. демонстрируются результаты расчета профилей безразмерных МССГК $Z_1(\bar{x}, Fo_m)$ по толщине первого микроучастка, на левой границе которой происходит массоотдача свободного гидроксида кальция в жидкую среду. Отметим, что при $Bi_m < 1$ массоперенос преимущественно определяется внешней массоотдачей, а при $Bi_m > 1$ внутренней диффузией.

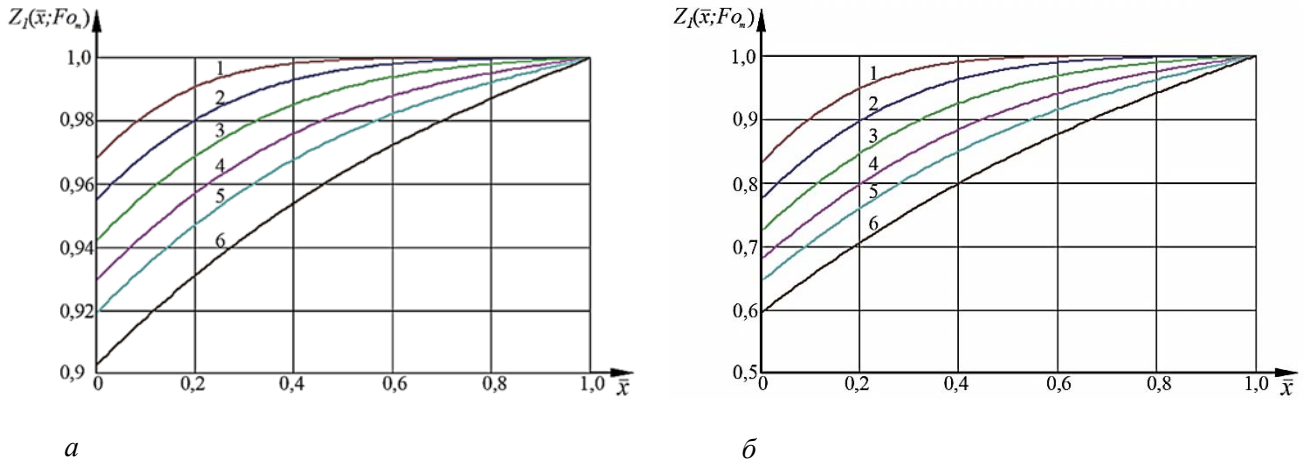


Рис. 4. Изменение безразмерных концентраций $Z_1(\bar{X}, Fo_m)$ по толщине бетонной конструкции в первой зоне, находящейся в контакте с жидкостью при числах Фурье: $Fo_m = 1 - 0,03; 2 - 0,06; 3 - 0,1; 4 - 0,15; 5 - 0,2; 6 - 3; a - Bi_m = 0,1; б - Bi_m = 1$

Figure 4. Change in dimensionless concentrations of $Z_1(\bar{X}, Fo_m)$ along the thickness of the concrete structure in the first zone in contact with the liquid at Fourier numbers : $Fo_m = 1 - 0.03; 2 - 0.06; 3 - 0.1; 4 - 0.15; 5 - 0.2; 6 - 3; a - Bi_m = 0.1; б - Bi_m = 1$

При исследовании кинетики массопереноса, лимитируемого внутренней диффузией и внешней массоотдачей, определялись следующие параметры: изменение по времени безразмерной концентрации переносимого компонента на поверхности бетона, изменение по времени средней безразмерной концентрации переносимого компонента в первой зоне, изменение градиента безразмерных концентраций на границе первой и второй зоны. Результаты кинетических расчетов средних безразмерных концентраций первого условного слоя бетона и градиента безразмерных концентраций «свободного гидроксида кальция» на условной границе разделения первого и второго слоев при различных значениях массообменного числа Био приведены на рис. 4. Последовательный анализ кривых (см. рис. 4) показывает продвижение потока массы от левой границы зоны к правой. Проведенные расчеты при $Fo_m < 0,1$ показывают что за данный промежуток времени поток массы не достигает правой границы первой концентрационной зоны.

Под кинетикой массопереноса, в соответствии с заложенными в трудах А.В. Лыкова положениями теории тепломассопереноса, подразумевается изменение исследуемого параметра (температура, влажность, концентрация) во времени [18].

В рамках проводимого численного эксперимента, направленного на изучение нестационарного массопереноса в гетерогенной системе «железобетонная конструкция — жидкость», с учетом принятого разделения на концентрационные зоны целесообразно исследовать в кинетике параметры: изменения средней по первой концентрационной зоне концентраций гидроксида кальция; изменение градиента концентраций на границе первой и второй зон (рис. 5).

Поток массы «свободного гидроксида кальция» на границе условно выделяемых промежуточных слоев определяется градиентом концентраций предшествующего условно выделенного слоя:

$$k_1 \left. \frac{\partial C_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta_1} = k_1 \text{grad } C_1(\delta_1, \tau) = k_2 \left. \frac{\partial C_2(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta_1} \quad (12)$$

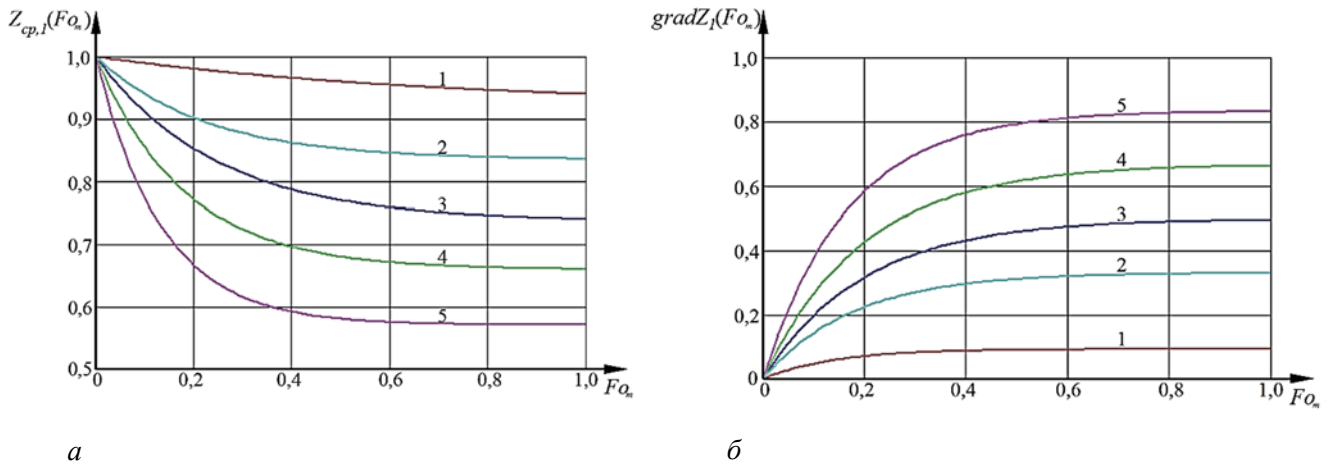


Рис. 5. Кинетический профиль средних безразмерных концентраций в первой зоне (а) и изменение градиента безразмерных концентраций на условной границе разделения первого и второго слоев (б) при $Bi_m = 1$ — 0.1; 2 — 0.5; 3 — 1; 4 — 2; 5 — 5

Figure 5. Kinetic profile of average dimensionless concentrations in the first zone (a) and the change in the gradient of dimensionless concentrations at the conditional boundary of separation of the first and second layers (b) at $Bi_m = 1$ — 0.1; 2 — 0.5; 3 — 1; 4 — 2; 5 — 5

Математически задача массопереноса в неограниченной пластине, при наличии с левой стороны пластины потока массы, запишется следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial C_2(x, \tau)}{\partial \tau} = k_2 \frac{\partial^2 C_2(x, \tau)}{\partial x^2}, \tau > 0, 0 \leq x \leq \delta_2, \quad (13)$$

начальное условие: $C_2(x, \tau)|_{\tau=0} = C_2(x, \tau) = C_{0,2}(x), \quad (14)$

граничные условия: $C_2(\delta_2, \tau) = C_{\delta_2}, \quad \rho_{бет} k_2 \frac{\partial C_2(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1} = -q_{m1}. \quad (15)$

Здесь обозначено: $C_{0,2}(x)$ — распределение концентрации гидроксида кальция в поровой структуре бетона в начале i -го микропроцесса по толщине промежуточной концентрационной зоны, кг $\text{Ca}(\text{OH})_2/\text{кг}$ бетона; $C_2(x)$ — распределение концентрации гидроксида кальция в поровой структуре бетона по толщине промежуточной концентрационной зоны в конце i -го микропроцесса, кг $\text{Ca}(\text{OH})_2/\text{кг}$ бетона; q_{m1} — плотность потока массы «свободного гидроксида кальция» на границе условно выделяемых промежуточных слоев, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$; k_2 — коэффициент массопроводности, имеющий фиксированное значение по толщине промежуточной концентрационной зоны, $\text{м}^2/\text{с}$; δ_2 — толщина условно выделенной второй концентрационной зоны, м.

Граничное условие (15) показывает наличие потока массы вещества на границе двух слоев. Величина потока определяется по градиенту предшествующего слоя.

Решение поставленной задачи (13)–(15) проводим в безразмерных переменных, с интеграцией в дифференциальные уравнения критериев подобия, что упростит качественную оценку и анализ процесса массопереноса при коррозии бетона:

$$Z_2(\bar{x}, Fo_m) = \frac{C_2(x, \tau) - C_{\delta_2}}{C_{\delta_2}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\delta_2}, \quad Fo_m = \frac{k_2 \tau}{\delta_2^2}, \quad Ki_{m1}^* = \frac{q_{m1} \delta_2}{k_2 C_{\delta_2} \rho_{бет}}, \quad (16)$$

$Z_2(\bar{x}, Fo_m)$ — безразмерная концентрация гидроксида кальция в поровой структуре бетона по толщине условно выделенных промежуточных концентрационных зон; \bar{x} — безразмерная координата, Fo_m —

массообменный критерий подобия Фурье; Ki_{m1}^* — модифицированный массообменный критерий подобия Кирпичева.

Краевая задача массопроводности в промежуточной зоне (13)–(15) в критериях подобия и безразмерных координатах запишется в виде

$$\frac{\partial Z_2(\bar{x}, Fo_m)}{\partial Fo_m} = \frac{\partial^2 Z_2(\bar{x}, Fo_m)}{\partial \bar{x}^2}, \quad Fo_m > 0, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1, \quad (17)$$

начальное условие: $Z_2(\bar{x}, 0) = Z_{0,2}(\bar{x}), \quad (18)$

граничные условия: $Z_2(1, Fo_m) = Z_{\delta 2}, \quad -\frac{\partial Z_2(0, Fo_m)}{\partial \bar{x}} = Ki_{m1}^*. \quad (19)$

Решение дифференциального уравнения (17) с неравномерным начальным (18) и граничными условиями (19) следующее:

$$Z_2(\bar{x}, Fo_m) = Ki_{m1}^*(\bar{x} - 1) + 2 \int_0^1 Z_{0,2}(\xi) d\xi + \frac{8}{\pi^2} Ki_{m1}^* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos\left[\frac{\pi}{2}(2m-1)\bar{x}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 Fo_m\right] + \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left[\frac{\pi}{2}(2m-1)\bar{x}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\pi^2}{4}(2m-1)^2 Fo_m\right] \int_0^1 Z_{0,2}(\xi) \cos\left[\frac{\pi}{2}(2m-1)\xi\right] d\xi. \quad (20)$$

Выражение (20) позволяет рассчитать динамику полей концентраций целевого компонента в неограниченной пластине при наличии потока массы «свободного гидроксида кальция» на границе условно выделяемых промежуточных слоев. Рассмотрим динамику полей концентраций на различных временных этапах, рассчитанную по выражению (20) (рис. 6). На левой границе действует поток массы вещества, сформировавшийся от градиента концентраций предшествующего слоя, продвигающийся, с течением времени, к правой границе рассматриваемого слоя. Продвижение фронта потока массы вглубь промежуточной зоны по времени наглядно демонстрирует рис. 6. Распределение концентраций изменяется слева направо по градиенту предшествующего слоя. Так, например, следует отметить близость градиентов при массообменных критериях Фурье первого $Fo_{m1} = 0,1$ и второго $Fo_{m2} = 0,05$ слоев (см. рис. 4 и 6). Следует заметить, что в рамках принятого разделения на концентрационные зоны при одном и том же рассматриваемом временном интервале критерии Фурье соседних зон никогда не будут равны, в силу неравенства в них коэффициентов массопроводности. Изменение безразмерного градиента концентраций на правой границе любого промежуточного слоя для наиболее распространенного интервала значений модифицированного массообменного критерия Кирпичева при жидкостной коррозии бетона в графической форме приведено на рис. 7. Отмечаем, что на отрезке $0 \leq Fo_m \leq 0,1$ градиент крайне мал.

В крайнем слое задача массопереноса, при наличии с левой стороны пластины потока массы и отсутствия массопотока с правой стороны, запишется следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial C_3(x, \tau)}{\partial \tau} = k_3 \frac{\partial^2 C_3(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 \leq x \leq \delta_3, \quad (21)$$

начальное условие: $C_3(x, \tau)|_{\tau=0} = C_3(x, \tau) = C_{0,3}(x), \quad (22)$

граничные условия: $\frac{\partial C_3(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \rho_{bem} k_3 \frac{\partial C_3(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta-\delta_3} = -q_{m3}. \quad (23)$

Здесь обозначено: $C_{0,3}(x)$ — распределение концентрации гидроксида кальция в поровой структуре бетона в начале i -го микропроцесса по толщине крайней концентрационной зоны, кг $\text{Ca}(\text{OH})_2/\text{кг}$ бетона; $C_3(x)$ — распределение концентрации гидроксида кальция в поровой структуре бетона по толщине крайней концентрационной зоны в конце i -го микропроцесса, кг $\text{Ca}(\text{OH})_2/\text{кг}$ бетона; q_{m2} — плотность потока массы «свободного гидроксида кальция» на границе условно выделяемых промежуточных и крайнего слоев, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$; k_3 — коэффициент массопроводности, имеющий фиксированное значение по толщине крайней концентрационной зоны, $\text{м}^2/\text{с}$; δ_3 — толщина условно выделенной крайней концентрационной зоны, м.

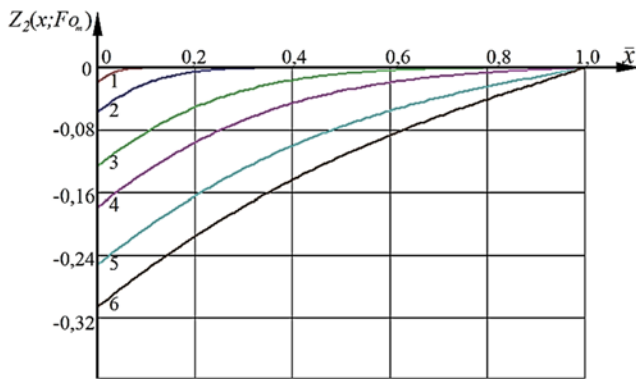


Рис. 6. Профиль безразмерных концентраций $Z_2(\bar{x}, Fo_m)$ по толщине промежуточного слоя, при числе: $Ki_m^* = 0,5; Fo_m = 1 - 0,001$; 2 — 0,01; 3 — 0,05; 4 — 0,1; 5 — 0,2; 6 — 0,3

Figure 6. Profiles of dimensionless concentrations $Z_2(\bar{x}, Fo_m)$ by the thickness of the intermediate layer, for numbers: $Ki_m^* = 0,5; Fo_m = 1 - 0,001$; 2 — 0,01; 3 — 0,05; 4 — 0,1; 5 — 0,2; 6 — 0,3

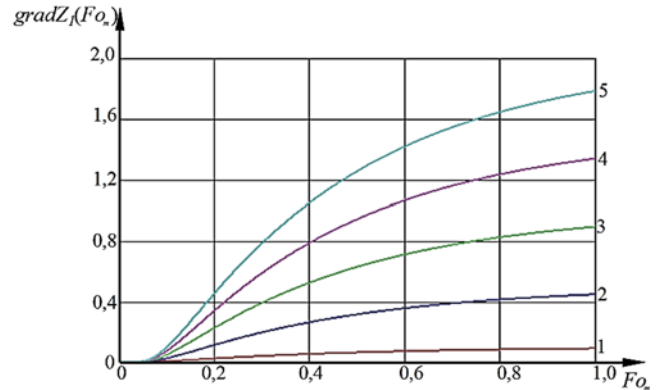


Рис. 7. Изменение градиента безразмерных концентраций на условной границе разделения второго и последующего слоев при числе: $Ki_m^* = 1 - 0,1$; 2 — 0,5; 3 — 1; 4 — 1,5; 5 — 2

Figure 7. Change in the gradient of dimensionless concentrations at the conditional boundary of the separation of the second and subsequent layers at the numbers: $Ki_m^* = 1 - 0,1$; 2 — 0,5; 3 — 1; 4 — 1,5; 5 — 2

Краевая задача массопроводности в крайней зоне (21)–(23) в критериях подобия и безразмерных координатах запишется в виде

$$\frac{\partial Z_3(\bar{x}, Fo_m)}{\partial Fo_m} = \frac{\partial^2 Z_3(\bar{x}, Fo_m)}{\partial \bar{x}^2}, \quad Fo_m > 0, \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1, \quad (24)$$

начальное условие: $Z_3(\bar{x}, 0) = Z_{0,3}(\bar{x}), \quad (25)$

граничные условия: $\frac{\partial Z_3(1, Fo_m)}{\partial \bar{x}} = 0, \quad -\frac{\partial Z_3(0, Fo_m)}{\partial \bar{x}} = Ki_{m2}^*. \quad (26)$

Решение дифференциального уравнения (24) с неравномерным начальным (25) и граничными условиями (26) следующее:

$$Z_3(\bar{x}, Fo_m) = -\frac{Ki_{m2}^*}{2} \left[(1-\bar{x})^2 - \frac{1}{3} + Fo_m \right] + \int_0^1 Z_{0,3}(\xi) d\xi + \frac{2}{\pi^2} Ki_{m2}^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m \bar{x})}{m^2} \exp(-\pi^2 m^2 Fo_m) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m \bar{x}) \exp(-\pi^2 m^2 Fo_m) \int_0^1 Z_{0,3}(\xi) \cos(\pi m \xi) d\xi. \quad (27)$$

Проведем численные эксперименты прогнозирования концентраций целевого компонента в рамках i -го микропроцесса крайнего слоя, при различных значениях модифицированного массообменного критерия Кирпичева, которое характеризует интенсивность потока массы на левой граничной плоскости рассматриваемого микроучастка. Отметим удобство использования решения (27), так как характеристическое уравнение решено, а его корни уже внесены в переменные. Рассмотрим изменение распределения концентраций на различных временных этапах, что показано на рис. 8. Распределение целевого компонента изменяется слева направо по градиенту предшествующего слоя. Так, например, следует отметить близость градиентов при массообменных критериях Фурье промежуточного $Fo_{m2} = 0,2$ и крайнего $Fo_{m3} = 0,1$ слоев (рис. 6 и 8). Результаты расчетов кинетики изменения среднего по крайнему слоя безразмерных концентраций для наиболее распространённого интервала значений модифицированного массообменного критерия Кирпичева при жидкостной коррозии бетона в графической форме приведены на рис. 9.

Полученные в рамках принятой расчетной схемы решения (11), (20) и (27), с учетом принятого разделения на концентрационные зоны, позволяют прогнозировать кинетику и динамику нестационарного массопереноса свободного гидроксида кальция и необходимы для определения времени достижения в определенных зонах конструкции критических концентраций гидроксида кальция, соответствующих началу диссоциации высокоосновных минералов цементного камня, либо депассивации стальной арматуры.

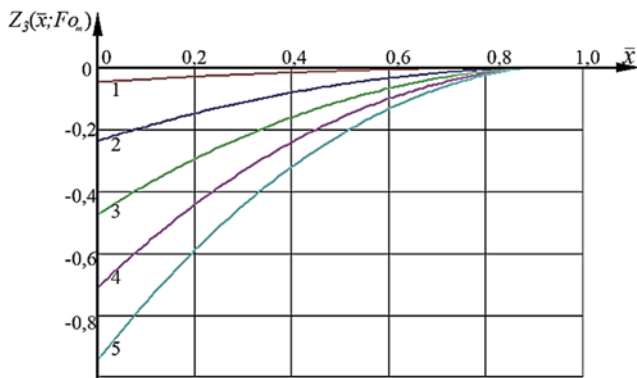


Рис. 8. Профиль безразмерных концентраций $Z_3(\bar{x}, Fo_m)$ крайнего слоя, при числах:

$Fo_m = 0,3; Ki_m^* = 1 - 0,1; 2 - 0,5; 3 - 1; 4 - 1,5; 5 - 2$

Figure 8. Profiles of dimensionless concentrations $Z_3(\bar{x}, Fo_m)$ of the extreme layer, for numbers:

$Fo_m = 0,3; Ki_m^* = 1 - 0,1; 2 - 0,5; 3 - 1; 4 - 1,5; 5 - 2$

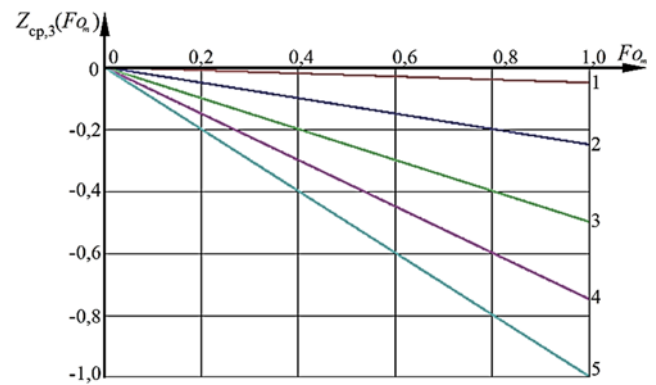


Рис. 9. Кинетический профиль средних безразмерных концентраций в крайнем слое при числах:

$Ki_m^* = 1 - 0,1; 2 - 0,5; 3 - 1; 4 - 1,5; 5 - 2$

Figure 9. Kinetic profile of average dimensionless concentrations in the extreme layer at numbers:

$Ki_m^* = 1 - 0,1; 2 - 0,5; 3 - 1; 4 - 1,5; 5 - 2$

Полученные представления о процессах, жидкостной коррозии бетона по механизму первого вида и математическая модель неизотермического массопереноса могут быть использованы в цифровых имитационных моделях жизненного цикла на этапе эксплуатации бетонных и железобетонных конструкций в агрессивных средах.

5. Заключение

1. Выполненный анализ научно-технической литературы по проблемам долговечности бетонных и железобетонных конструкций, эксплуатируемых в агрессивной среде, показал, что существуют несколько фундаментальных теорий, описывающих процессы коррозии бетона, имеется довольно обширный экспериментальный материал, характеризующий общие условия разрушения бетона в различных агрессивных средах. Но большинство исследований жидкостной коррозии проводилось, как правило, в изотермических условиях при температуре 20–25 °С, что не совпадает с реальными условиями эксплуатации, так как огромное количество строительных конструкций зданий и сооружений эксплуатируются в условиях воздействия изменяющихся климатических и технологических температур.

2. Объектом настоящего исследования являются процессы нестационарного массопереноса гидроксида кальция при жидкостной коррозии железобетонных конструкций. Гидроксид кальция определяет равновесие высокоосновных соединений структуры цементного камня и при взаимодействии конструкции с жидкостью в первую очередь начинается его диффузия.

3. Разработана методология синтеза и решения нелинейной краевой задачи нестационарного массопереноса гидроксида кальция из структуры бетона в жидкость при неизотермических условиях, путем разделения жизненного цикла конструкции на микропроцессы, а в рамках каждого микропроцесса выполняется расчетное разделение конструкции по толщине на концентрационные зоны, что позволяет свести решение нелинейной краевой задачи к системе последовательных линейных краевых задач с неравномерным начальным условием. Для каждой линейной задачи получены аналитические решения, позволяющие рассчитывать распределение концентраций гидроксида кальция по толщине конструкции, тем самым прогнозировать динамику и кинетику деструктивных процессов железобетонных конструкций.

4. Типизация и унификация решений достигнута внедрением критериев подобия в аналитические решения, а также безразмерным видом полученных решений.

5. Графически показано, как при небольших значениях массообменного числа Био $Bi_m < 1$ массоперенос преимущественно определяется внешней массоотдачей, а при $Bi_m > 1$ внутренней диффузией.

6. Проведенные расчеты показывают, что при значениях числа Фурье $Fo_m < 0,1$ поток массы не достигает противоположной границы любой концентрационной зоны. Таким данный интервал является минимальным для расчета по принятому комбинированному методу.

Список литературы

1. Erofeev V.T., Moiseev V.V., Makridin N.I., Maksimova I.N. Strength and deformability of cement stone, mortar and concrete during loading // Journal of Physics: Conference Series. "International Conference on Engineering Systems 2020". 2020. Article 012032. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1687/1/012032>
2. Tang B.H., Maekawa K., Tan K.-H. Analytical model of corrosion-induced cracks in concrete considering time-varying deformations of layers, mechanical properties of rust // Construction and Building Materials. 2021. Vol. 316. Article 125883. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.125883>
3. Guzmán-Torres J.A., Domínguez-Mota F.J., Alonso-Guzmán E.M. A multi-layer approach to classify the risk of corrosion in concrete specimens that contain different additives // Case Studies in Construction Materials. 2021. Vol. 15. Article 00719. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2021.e00719>
4. Wei A., Tan M.Y., Koay Y.-C., Hu X., Al-Ameri R. Effect of carbon fiber waste on steel corrosion of reinforced concrete structures exposed to the marine environment // Journal of Cleaner Production. 2021. Vol. 316. Article 128356. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2021.128356>
5. Wang Z., Maekawa K., Takeda H., Gong F. Numerical simulation and experiment on the coupled effects of macro-cell corrosion and multi-ion equilibrium with pseudo structural concrete // Cement and Concrete Composites. 2021 Vol. 123. Article 104181. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2021.104181>
6. Fedosov S.V., Roumyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Konovalova V.S. Physical and mathematical modelling of the mass transfer process in heterogeneous systems under corrosion destruction of reinforced concrete structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Materials Science and Engineering. 1–8 July 2018. Novosibirsk: Institute of Physics Publ., 2018. Vol. 456. Article 012039. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012039>
7. Dai L., Long D., Wang L. Meso-scale modeling of concrete cracking induced by 3D corrosion expansion of helical strands // Computers & Structures. 2021. Vol. 254. Article 106615. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106615>
8. Гусев Б.В., Файбусович А.С. Расчетные зависимости для прогнозирования технического состояния железобетонных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2021. № 6. С. 4–12. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2021.06.04-12>
9. Нгуен В.Чи., Као Н.Л., Донг В.К., Ле Х.К., Нонг К.К., Зяблов А.Н. Исследование коррозии конструкционной стали АН-36 в морской среде Вьетнама // Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология. 2021. Т. 64. № 10. С. 139–144. <https://doi.org/10.6060/ivkkt.20216410.6496>
10. Dey A., Miyani G., Sil A. Application of artificial neural network (ANN) for estimating reliable service life of reinforced concrete (RC) structure bookkeeping factors responsible for deterioration mechanism // Soft Computing. 2019. Vol. 24 (3). P. 2109–2123. <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04042-y>
11. Cao Y., Gehlen C., Angst U., Wang L., Wang Z., Yao Y. Critical chloride content in reinforced concrete — an updated review considering Chinese experience // Cement and Concrete Research. 2019. Vol. 117. P. 58–68. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2018.11.020>
12. Москвин В.М., Иванов Ф.М., Алексеев С.Н., Гузев Е.А. Коррозия бетона и железобетона, методы их защиты / под общ. ред. В.М. Москвина. М.: Стройиздат, 1980. 536 с.
13. Yang Z., Li Q., Liu M., Xue N., Yu L., Xu Li., Wu K. Efflorescence inhibition and microstructure evolution of Portland cement-based artificial stone induced by mineral additives // Case Studies in Construction Materials. 2022. Vol. 17. Article e01509. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e01509>

14. Zhang Y., Xu M., Song J., Wang Ch., Wang X., Hamad B.A. Study on the corrosion change law and prediction model of cement stone in oil wells with CO₂ corrosion in ultra-high-temperature acid gas wells // *Construction and Building Materials*. 2022. Vol. 323. Article 25879. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.125879>
15. Федосов С.В., Румянцева В.Е., Касьяненко Н.С., Красильников И.В. Теоретические и экспериментальные исследования процессов коррозии первого вида цементных бетонов при наличии внутреннего источника массы // *Строительные материалы*. 2013. № 6. С. 44–47.
16. Федосов С.В., Румянцева В.Е., Красильников И.В., Логинова С.А. Исследование влияния процессов массопереноса на надежность и долговечность железобетонных конструкций, эксплуатируемых в жидких агрессивных средах // *Строительные материалы*. 2017. № 12. С. 52–57. <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2017-755-12-52-57>
17. Smirnova N.N., Krasil'nikov I.V. An effect of the nature of immobilized components on the adsorption and mass transfer properties of ultrafiltration membranes based on sulfonate-containing copolyamide // *Russian Journal of Applied Chemistry*. 2019. Vol. 92. Is. 11. P. 1570–1580. <https://doi.org/10.1134/S1070427219110144>
18. Лыков А.В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: Гостехиздат, 1954. 296 с.
19. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. 536 с.
20. Dudin S.M., Zemenkov Y.D., Shabarov A.B. Modeling the Phase Composition of Gas Condensate in Pipelines // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. Vol. 154 (1). Article 012010. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/154/1/012010>
21. Ерофеев В.Т., Аль Дулайми С.Д.С., Дергунова А.В. Повышение долговечности и экологичности зданий и сооружений текстильной промышленности путем применения материалов, модифицированных микробиологической добавкой // *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*. 2021. № 3 (393). С. 141–146. https://doi.org/10.47367/0021-3497_2021_3_141
22. Федосов С.В., Румянцева В.Е., Красильников И.В., Красильникова И.А. Математическое моделирование нестационарного массопереноса в системе «цементный бетон — жидкая среда», лимитируемого внутренней диффузией и внешней массоотдачей // *Строительные материалы*. 2022. № 1–2. С. 134–140. <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2022-799-1-2-134-140>
23. Федосов С.В., Румянцева В.Е., Красильников И.В., Красильникова И.А. Математическое моделирование массопереноса в системе цементный бетон — жидкая среда, лимитируемого внутренней диффузией переносимого компонента при жидкостной коррозии первого вида // *Строительные материалы*. 2021. № 7. С. 4–9. <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2021-793-7-4-9>
24. Fedosov S.V., Roumyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Konovalova V.S., Evsyakov A.S. Monitoring of the penetration of chloride ions to the reinforcement surface through a concrete coating during liquid corrosion // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vladivostok, 2018. Vol. 463. Is. 4. Article 042048. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/4/042048>
25. Fedosov S.V., Roumyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Konovalova V.S., Evsyakov A.S. Mathematical modeling of the colmatation of concrete pores during corrosion // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. № 7 (83). С. 198–207. <https://doi.org/10.18720/MCE.83.18>

References

1. Erofeev V.T., Moiseev V.V., Makridin N.I., Maksimova I.N. Strength and deformability of cement stone, mortar and concrete during loading. *Journal of Physics: Conference Series*. “International Conference on Engineering Systems 2020”. 2020:012032. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1687/1/012032>
2. Tang B.H., Maekawa K., Tan K.-H. Analytical model of corrosion-induced cracks in concrete considering time-varying deformations of layers, mechanical properties of rust. *Construction and Building Materials*. 2021;316:125883. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.125883>
3. Guzmán-Torres J.A., Domínguez-Mota F.J., Alonso-Guzmán E.M. A multi-layer approach to classify the risk of corrosion in concrete specimens that contain different additives. *Case Studies in Construction Materials*. 2021;15:00719. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2021.e00719>
4. Wei A., Tan M.Y., Koay Y.-C., Hu X., Al-Ameri R. Effect of carbon fiber waste on steel corrosion of reinforced concrete structures exposed to the marine environment. *Journal of Cleaner Production*. 2021;316:128356. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2021.128356>
5. Wang Z., Maekawa K., Takeda H., Gong F. Numerical simulation and experiment on the coupled effects of macro-cell corrosion and multi-ion equilibrium with pseudo structural concrete. *Cement and Concrete Composites*. 2021;123:104181. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2021.104181>
6. Fedosov S.V., Roumyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Konovalova V.S. Physical and mathematical modelling of the mass transfer process in heterogeneous systems under corrosion destruction of reinforced concrete structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1–8 July 2018. Novosibirsk: Institute of Physics Publ.; 2018;456:012039. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012039>

7. Dai L., Long D., Wang L. Meso-scale modeling of concrete cracking induced by 3D corrosion expansion of helical strands. *Computers & Structures*. 2021;254:106615. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106615>
8. Gusev B.V., Fayvusovich A.S. Calculated Dependencies for Predicting the Technical Condition of Reinforced Concrete Structures. *Industrial and Civil Engineering*. 2021;6:4–12. (In Russ.). <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2021.06.04-12>
9. Chi N.V., Linh C.N., Kien D.V., Quan L.H., Quang N.Q., Zyablov A.N. Study on structural steel AH-36 corrosion in the marine environment of Vietnam. *ChemChemTech*. 2021;64(10):139–144. <https://doi.org/10.6060/ivkkt.20216410.6496>
10. Dey A., Miyani G., Sil, A. Application of artificial neural network (ANN) for estimating reliable service life of reinforced concrete (RC) structure bookkeeping factors responsible for deterioration mechanism. *Soft Computing*. 2019;24(3):2109–2123. <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04042-y>
11. Cao Y., Gehlen C., Angst U., Wang L., Wang Z., Yao Y. Critical chloride content in reinforced concrete — an updated review considering Chinese experience. *Cement and Concrete Research*. 2019;117:58–68. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2018.11.020>
12. Moskvina V.M., Ivanov F.M., Alekseev S.N., Guzeev E.A. *Corrosion of concrete and reinforced concrete, methods of their protection*. Moscow: Strojizdat Publ.; 1980. (In Russ.)
13. Yang Z., Li Q., Liu M., Xue N., Yu L., Xu Li., Wu K. Efflorescence inhibition and microstructure evolution of Portland cement-based artificial stone induced by mineral additives. *Case Studies in Construction Materials*. 2022;17:e01509. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e01509>
14. Zhang Y., Xu M., Song J., Wang Ch., Wang X., Hamad B.A. Study on the corrosion change law and prediction model of cement stone in oil wells with CO₂ corrosion in ultra-high-temperature acid gas wells. *Construction and Building Materials*. 2022;323:125879. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.125879>
15. Fedosov S.V., Rumjantseva V.E., Kas'janenko N.S., Krasil'nikov I.V. Theoretical and experimental studies of corrosion processes of the first type of cement concretes in the presence of an internal mass source. *Construction Materials*. 2013;6:44–47. (In Russ.)
16. Fedosov S.V., Rummyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Loginova S.A. Investigation of the influence of mass transfer processes on the reliability and durability of reinforced concrete structures operated in liquid aggressive media. *Construction Materials*. 2017;12:52–57. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2017-755-12-52-57>
17. Smirnova N.N., Krasil'nikov I.V. An effect of the nature of immobilized components on the adsorption and mass transfer properties of ultrafiltration membranes based on sulfonate-containing copolyamide. *Russian Journal of Applied Chemistry*. 2019;92(11):1570–1580. <https://doi.org/10.1134/S1070427219110144>
18. Lykov A.V. *Transport phenomena in capillary-porous bodies*. Moscow: Gostehizdat Publ.; 1954. (In Russ.)
19. Lykov A.V., Mikhailov Yu.A. *Theory of heat and mass transfer*. Moscow-Leningrad: Gosenergoizdat Publ.; 1963. (In Russ.)
20. Dudin S.M., Zemenkov Y.D., Shabarov A.B. Modeling the Phase Composition of Gas Condensate in Pipelines. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016;154(1):012010. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/154/1/012010>
21. Erofeev V.T., Al Dulaimi S.D.S., Dergunova A.V. Improving the Durability and Environmental Friendliness of Buildings and Structures in the Textile Industry by Using Materials Modified With a Microbiological Additive // *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti*. 2021;3(393):141–146. (In Russ.) https://doi.org/10.47367/0021-3497_2021_3_141
22. Fedosov S.V., Rummyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Krasilnikova I.A. Mathematical modeling of unsteady mass transfer in the “cement concrete — liquid medium” system, limited by internal diffusion and external mass transfer. *Construction Materials*. 2022;1-2:134–140. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2022-799-1-2-134-140>
23. Fedosov S.V., Rummyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Krasilnikova I.A. Mathematical modeling of mass transfer in the cement concrete-liquid environment system, limited by internal diffusion of the transferred component during liquid corrosion of the first type. *Construction Materials*. 2021;7:4–9. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2021-793-7-4-9>
24. Fedosov S.V., Rummyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Konovalova V.S., Evsyakov A.S. Monitoring of the penetration of chloride ions to the reinforcement surface through a concrete coating during liquid corrosion. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018;463(4):042048. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/4/042048>
25. Fedosov S.V., Rummyantseva V.E., Krasilnikov I.V., Konovalova V.S., Evsyakov A.S. Mathematical modeling of the colmatation of concrete pores during corrosion. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;7(83):198–207. <https://doi.org/10.18720/MCE.83.18>


 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
 EXPERIMENTAL RESEARCH


 DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-410-418
 EDN: VPVGFF
 UDC 624.044.2

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

 Experimental and analytical models of longitudinal deformation
 in pipe-concrete specimens with small cross-sections

 Pavel A. Khazov¹ , Vladimir I. Erofeev² , Elena A. Nikitina² , Artyom P. Pomazov¹ 
¹ Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation

² Institute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences — Branch Federal Research Center named after Gaponov-Grekhov of the RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation

 khazov.nngasu@mail.ru

Article history

 Received: April 28, 2023
 Revised: August 7, 2023
 Accepted: August 16, 2023

Acknowledgements

The work was carried out within the state assignment for fundamental scientific research in 2021–2023 under the project No. 0030-2021-0025.

For citation

 Khazov P.A., Erofeev V.I., Nikitina E.A., Pomazov A.P. Experimental and analytical models of longitudinal deformation in pipe-concrete specimens with small cross-sections. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(4):410–418. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-410-418>

Abstract. The results of experimental studies of deformation problems in pipe-concrete specimens with small cross sections are provided and analyzed. The stress-strain state of a steel pipe and a pipe filled with concrete is studied and compared. Experimental determination of the dependencies between axial load and deformations of pipe-concrete and steel bars, as well as evaluation of concrete's and steel pipe's contribution to the total load-bearing capacity of the composite section are provided. Tests were carried out for short pipe-concrete specimens with the pipe dimensions equal to 60x2, 76x3 and 102x3.5, as well as for hollow steel pipes with the corresponding dimensions. The diagrams of deformation were obtained basing on the experimental results. The deformation of the pipe-concrete element under central compression occurs in proportion to the deformation of a hollow steel element with the same diameter, that made it possible to evaluate the contribution of concrete to the work of the pipe-concrete cross-section, which turned out to be constant at each stage of deformation. A methodology has been proposed that enables to describe analytically the deformability of pipe-concrete elements under axial compression by means of the analytical model based on the experimental data.

Keywords: piped concrete, experimental studies, small-sized sections, axial compression, triaxial compression, bearing capacity, stress-strain state, deformability, mathematical model, analytical model


Pavel A. Khazov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Theory of Structures and Technical Mechanics, Head of the Laboratory for Continuous Monitoring of the Technical Condition of Buildings and Structures, Nizhny Novgorod State University of Architecture, Building and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-1220-6930; E-mail: khazov.nngasu@mail.ru

Vladimir I. Erofeev, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor, Director of Institute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences — Branch Federal Research Center named after Gaponov-Grekhov of the RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-6637-5564; E-mail: erof.vi@yandex.ru

Elena A. Nikitina, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher of Institute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences — Branch Federal Research Center named after Gaponov-Grekhov of the RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation; ORCID: 0009-0000-1189-1062; E-mail: nikitina.ea.nn@gmail.com

Artyom P. Pomazov, Postgraduate Student in Department of Structural Theory and Technical Mechanics, Assistant Professor in the Department of Building Structures, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation; ORCID: 0009-0009-5465-3692; E-mail: pomazov.a.p@yandex.ru

© Khazov P.A., Erofeev V.I., Nikitina E.A., Pomazov A.P., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Экспериментальные и аналитические модели продольного деформирования трубобетонных образцов малогабаритных сечений

П.А. Хазов¹ , В.И. Ерофеев² , Е.А. Никитина² , А.П. Помазов¹ 

¹ Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация

² Институт проблем машиностроения РАН — филиал «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. Гапонова-Грехова Российской академии наук», Нижний Новгород, Российская Федерация

✉ khazov.nngasu@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 28 апреля 2023 г.

Доработана: 7 августа 2023 г.

Принята к публикации: 16 августа 2023 г.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания на фундаментальные научные исследования на 2021–2023 годы по теме № 0030-2021-0025.

Для цитирования

Khazov P.A., Erofeev V.I., Nikitina E.A., Pomazov A.P. Experimental and analytical models of longitudinal deformation in pipe-concrete specimens with small cross-sections // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 4. С. 410–418. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-4-410-418>

Аннотация. Приводятся и анализируются результаты экспериментальных исследований вопросов деформирования трубобетонных образцов малогабаритных сечений. Исследуется и сравнивается напряженно-деформированное состояние стальной трубы и трубы, заполненной бетоном. Приводятся экспериментальное определение зависимостей между осевой нагрузкой и деформациями трубобетонных и стальных стержней, а также оценка вклада бетона и стальной трубы в общую несущую способность составного сечения. Испытания проведены для коротких трубобетонных образцов с размерами трубы 60×2, 76×3 и 102×3,5, а также полых стальных труб с соответствующими размерами. По результатам экспериментов построены диаграммы деформирования. Деформация трубобетонного элемента при центральном сжатии происходит пропорционально деформации полого стального элемента того же диаметра, что позволило оценить вклад бетона в работу трубобетонного сечения, который оказался постоянным на каждом этапе деформирования. Предложена методика, позволяющая аналитически описать деформативность трубобетонных элементов при центральном сжатии при помощи аналитической модели, основанной на экспериментальных данных.

Ключевые слова: трубобетон, экспериментальные исследования, малогабаритные сечения, осевое сжатие, трехосное сжатие, несущая способность, напряженно-деформированное состояние, деформативность, математическая модель, аналитическая модель

1. Introduction

One of interesting engineering solutions is the use of steel-concrete structures in construction, which, unlike classic reinforced concrete, use steel not only as a reinforcing material, but also as a full-fledged load-bearing element. One of the types of the steel-and-reinforced concrete structures is piped concrete, consisting of a closed steel pipe into which concrete mixture is specially placed and compacted, resulting in a complex jointed composite structure combining the main advantages of classical steel and reinforced concrete elements, leveling and significantly reducing the impact of their disadvantages.

Many scientists and research groups of the world community have been engaged in the study of strength and stability of pipe-concrete elements. Despite the existence of calculation methods reflected in domestic and foreign regulatory documents, all of them do not allow to objectively describe the stress-strain state of pipe-concrete structures under the action of axial compressive load. Various scientific communities in the last decade conducted experimental [1–8], analytical [9–12] and numerical studies [14–16] in order to determine the bearing capacity

Хазов Павел Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры теории сооружений и технической механики, заведующий лабораторией непрерывного контроля технического состояния зданий и сооружений, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-1220-6930; E-mail: khazov.nngasu@mail.ru

Ерофеев Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиностроения РАН — филиала ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук», Нижний Новгород, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-6637-5564; E-mail: erof.vi@yandex.ru

Никитина Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник Института проблем машиностроения РАН — филиала ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. Гапонова-Грехова Российской академии наук», Нижний Новгород, Российская Федерация; ORCID: 0009-0000-1189-1062; E-mail: nikitina.ea.nn@gmail.com

Помазов Артём Павлович, аспирант кафедры теории сооружений и технической механики, ассистент кафедры строительных конструкций, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация; ORCID: 0009-0009-5465-3692; E-mail: pomazov.a.p@yandex.ru

and deformability of composite structures. Special attention has been paid to numerical and analytical calculations in a nonlinear formulation [17; 18], however, there is no unified engineering methodology capable of describing the stress-strain state of pipe-concrete rods.

Depending on the approach for evaluation of the load-bearing capacity of a pipe-concrete section, two interrelated statements of the problem are conditionally accepted: either the influence of concrete on the increase of the load-bearing capacity of the pipe [15], or the reverse variant is considered, i.e. taking the pipe as a steel shell of a concrete rod [6; 7; 9; 19]. Obviously, pipe-concrete is a composite material with mutual influences of concrete core and a steel shell on each other, and both of the above approaches can be considered as approximated models of work. Dimensional ratios of the steel tube-shell (diameter-to-wall thickness ratio — D/t [2; 12; 20]) or the type of concrete infilling [3] are usually considered as the main factors affecting the strength and strain characteristics of a pipe-concrete structure.

The problem of determining the actual stress-strain state of composite structures made of pipes filled with concrete is being raised by many scientific teams, since the existing design standards underestimate the load-bearing capacity of pipe-concrete, defining it as the sum of the load-bearing capacities of the pipe and the concrete core. For example, articles [9; 20] analyze and compare the existing approaches to determine the ultimate compressive load on pipe-concrete columns. The authors of articles [13; 19] analytically consider the effect of casing by introducing an additional summand, which represents the side pressure at the interface between the pipe and concrete. However, experimental studies show that the nature of deformation of the pipe-concrete rod is more similar to the deformation of a hollow steel pipe, and filling with concrete only enhances the performance of the structure.

In this regard, the authors of this paper propose a methodology that allows describing the deformation process of a pipe-concrete specimen on the basis of the deformational characteristics of a steel pipe and considering the contribution of concrete to the structure operation, which is constant at all stages of deformation, by using of a correcting coefficient.

2. Materials and methods

For conducting the experiment, 12 specimens of 100 mm length were made using steel pipes with the following cross sections: a pipe with a diameter of 60 mm and a wall thickness of 2 mm, a pipe with a diameter of 76 mm and a wall thickness of 3 mm, and a pipe with a diameter of 102 mm and a wall thickness of 3.5 mm. The dimensions of the experimental specimens were taken to exclude the influence of flexibility on the load-bearing capacity of short pipe-concrete rods, i.e. to exclude the loss of stability.

Two pipe-concrete specimens and two hollow specimens, i.e. not filled with concrete, were made from each pipe diameter. Additional reinforcement of the specimens was not used. Conditional marking of the specimens is given in Table 1 for the convenience of processing the results.

Each specimen was tested in the laboratory of the Department of Building Structures of Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering using a P-125 compression machine with maximum compressive load equal to 1250 kN. In this study, the longitudinal deformations of the samples at each stage of loading with an axial compressive load were determined by the convergence of the pipe-concrete cylinders end sections, for the registration of which the plate convergence indicator had been installed. Figure 1 shows the basic scheme of the experimental equipment for testing specimens of 100 mm in length.

Table 1

Marking of specimens

Specimens mark	Specimen characteristic	Steel pipe dimensions, mm	Diameter of concrete rod crimped by the pipe, mm
P1.1	Hollow Steel Pipe	60×2	—
P1.2			
PC1.1	Pipe filled with concrete (pipe-concrete)	60×2	56
PC1.2			
P2.1	Hollow Steel Pipe	76×3	—
P2.2			
PC2.1	Pipe filled with concrete (pipe-concrete)	76×3	70
PC2.2			
P3.1	Hollow Steel Pipe	102×3.5	—
P3.2			
PC3.1	Pipe filled with concrete (pip-concrete)	102×3.5	95
PC3.2			

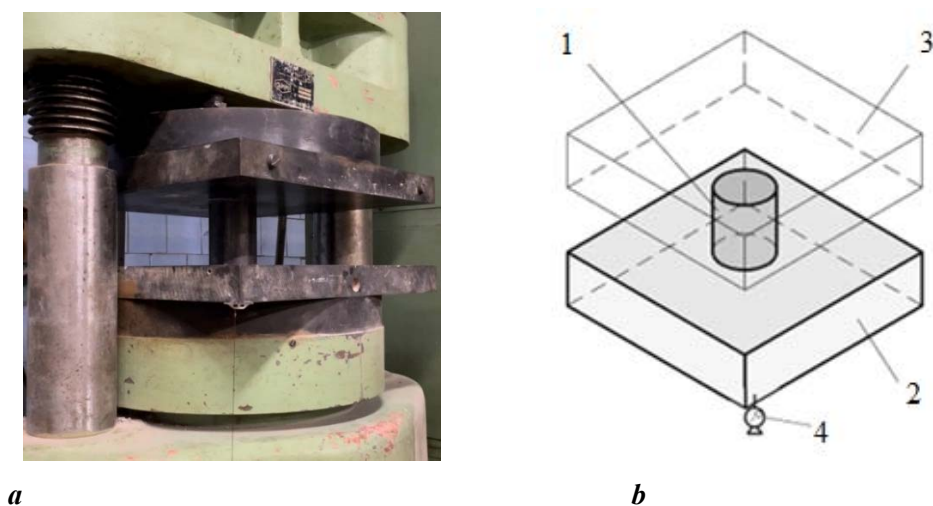


Figure 1. Testing of specimens with 100 mm length:
a — general view; *b* — basic scheme of the experimental setup:
 1 — specimen under test; 2 — movable loading plate;
 3 — fixed loading plate; 4 — indicator for registration of plates convergence

3. Results of the research

On the basis of the experimental results for each specimen, the diagrams of longitudinal deformation were generated in variables $P - \Delta$, where P is the axial compressive load, Δ is the convergence between the pressing plates. For visual clarity and further analysis, the diagrams of pipe-concrete specimens (hereinafter referred to as $P_{pc}(\Delta)$) and hollow specimens (hereinafter referred to as $P_p(\Delta)$) with equal diameters were plotted in a common coordinate plane and with equal scale (Figure 2).

It can be seen from the diagrams (Figure 2) that the graphs of dependencies between axial load and longitudinal deformations have obvious similarity, being similar regardless of the pipe's diameter and thickness of wall. It can also be noted that the elastic stage of work both for steel pipe and for pipe-concrete ends at the same values of deformations, since the critical factor in the transition to the plastic stage is not the stress but the deformation of the steel pipe. The similarity of the graphs enables us to make an assumption that concrete in a pipe-concrete structure performs functions of strengthening a steel pipe, bringing a certain contribution to the load-bearing capacity of the cross-section at each stage of deformation.

The difference between the ordinates of the diagrams corresponding to the load on the pipe-concrete specimen at a particular value of axial displacement Δ and the load on the hollow steel pipe at the same displacement is taken as a value that quantitatively characterizes the contribution of concrete to the load-bearing capacity of the pipe-concrete cross-section at each stage of deformation:

$$P_c(\Delta) = P_{pc}(\Delta) - P_p(\Delta), \quad (1)$$

or the relative contribution of concrete in dimensionless units is:

$$\rho_c(\Delta) = \frac{P_{pc}(\Delta) - P_c(\Delta)}{P_p^{cr}} \quad (2)$$

The calculations of the above characteristics for specimens with 60 mm diameter are summarized in Table 2.

Table 2 shows that the value of the relative contribution of concrete $\rho_c(\Delta)$ at all the stages of deformation is near to 0.5, and its average value is 49.8%.

In this case, the critical (maximum) load value that can be withstood by a hollow steel pipe 60x2 mm of the same length is $P_p^{cr} = 142.5$ kN, and the load-bearing capacity of a concrete specimen with diameter 56 mm and length 100 mm (differentiated load-bearing capacity of the pipe-concrete specimen's core) obtained as a result of the experiment is $P_c^{cr} = 28.2$ kN, which corresponds to $P_c^{cr}/P_p^{cr} = 0,198$. in dimensionless units.

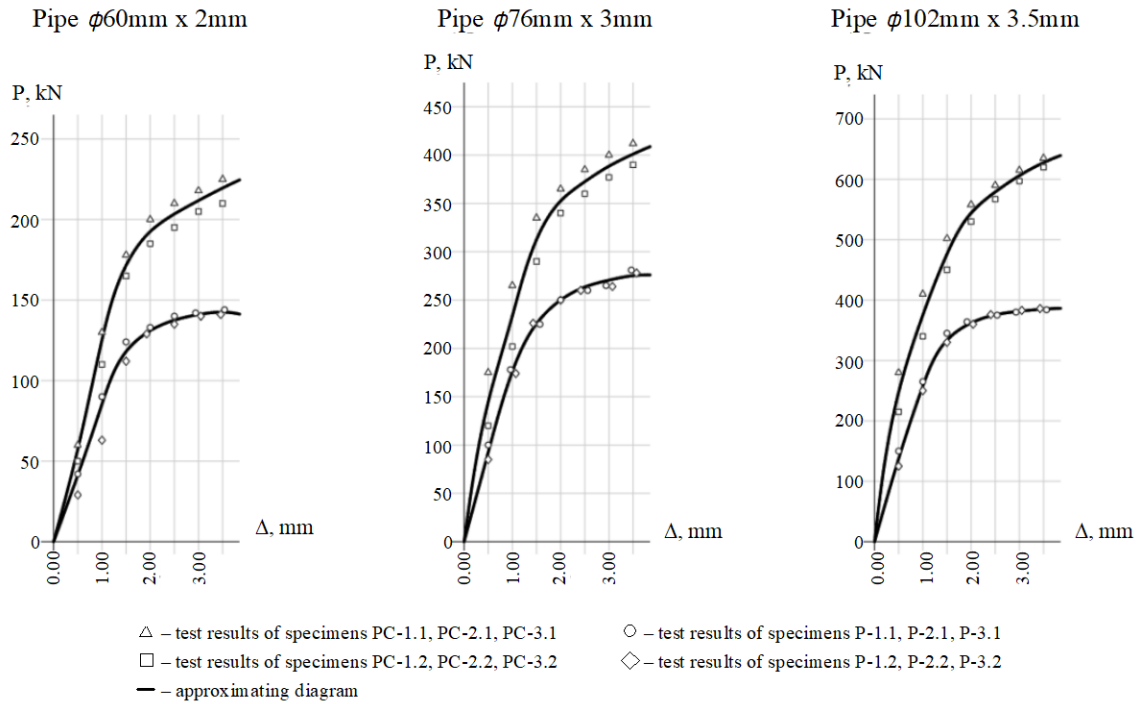


Figure 2. Diagrams $P(\Delta)$ based on the test results of specimens

Table 2

Calculation of concrete contribution for specimens made of steel pipes 60x2

Δ , mm	Load P , kN				$P_p(\Delta_i)$, kN	$P_{pc}(\Delta_i)$, kN	Contribution of concrete	
	P1.1	P1.2	PC1.1	PC1.2			$P_c(\Delta_i)$, kN	$\rho_c(\Delta_i)$
0.50	42	29	60	50	35.5	55	19.5	0.55
1.00	90	63	130	110	76.5	120	43.5	0.57
1.50	124	112	178	165	118	171.5	53.5	0.45
2.00	133	129	200	185	131	192.5	61.5	0.47
2.50	140	135	210	195	137.5	202.5	65	0.47
3.00	142	140	218	205	141	211.5	70.5	0.50
3.50	144	141	225	210	142.5	217.5	75	0.53

Similar calculations were performed on the test results of the remaining specimens made of 76x3 mm and 102x3.5 mm steel pipes. In this case, the average values of “concrete’s contribution” were 41.0 and 50.9 %, with the relative bearing capacity of the concrete core P_c^{cr}/P_p^{cr} being equal to 0.158 and 0.210, respectively. Therefore, the contribution of concrete at each stage of deformation for all sizes of specimens is 2.5 times higher than the differentiated bearing capacity of the concrete core. This can be explained by the cladding effect, as the steel tube prevents the concrete core from deforming and breaking in the transverse direction due to Poisson’s ratio [11; 16; 22]. As a result, the stress state of concrete transforms from longitudinal to triaxial compression, and its bearing capacity increases significantly. These effects, as well as the development of strength criteria for concrete under complex loading have been actively studied and presented in [23; 24].

Considering mentioned above, an experimental model of longitudinal deformation of the pipe-concrete specimen $P_{pc}(\Delta)$ was proposed according to the similar diagram for the steel pipe $P_p(\Delta)$:

$$P_{pc}(\Delta) = P_p(\Delta) \cdot \left(1 + 2.5 \cdot \frac{P_c^{cr}}{P_p^{cr}} \right), \tag{3}$$

where $P_{pc}(\Delta)$ and $P_p(\Delta)$ are the loads in the pipe-concrete element and steel pipe corresponding to the displacement Δ ; P_p^{cr} and P_c^{cr} are destructive loads in the steel pipe and concrete core during their separate work, determined from tests under the axial compressive load of the corresponding specimens before destruction (differentiated bearing capacity).

The obtained model does not contradict to the generalized formula for determining the bearing capacity of pipe-concrete elements in [11], but at the same time it extends it, since it enables to describe the deformation process instead of only prognosing the moment of failure.

Figure 3 shows the diagrams for the pipe-concrete specimens obtained using formula (3) and their comparison with the experimental results.

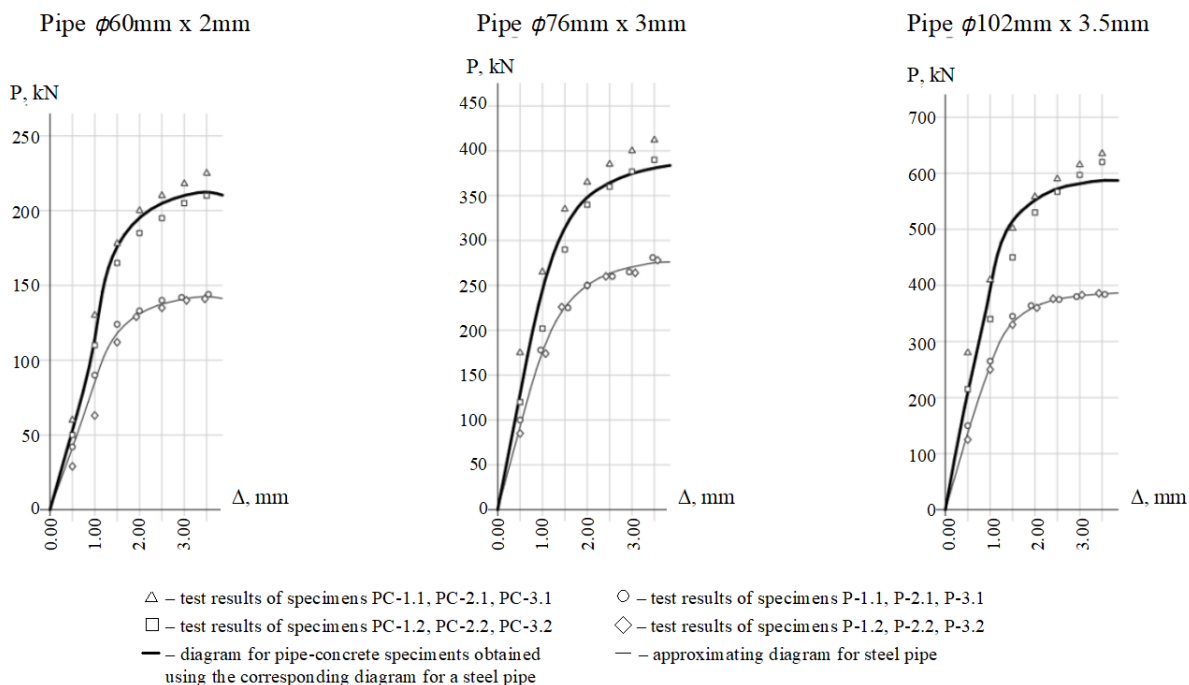


Figure 3. Diagrams $P(\Delta)$ for pipe-concrete specimens obtained using the corresponding diagrams for a steel pipe of the same diameter (according to formula 3)

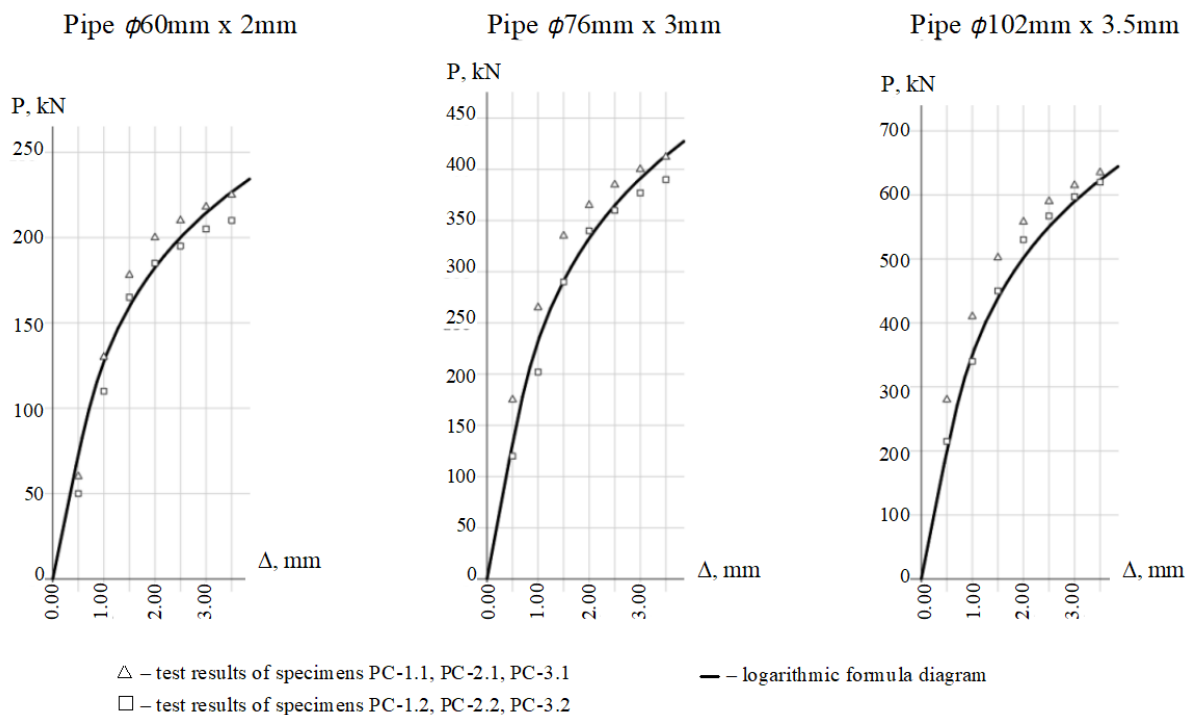


Figure 4. Diagrams $P(\Delta)$ for pipe-concrete specimens generated on the basis of the material mathematical model (according to formula 4)

Comparability of experimental data and the diagram (Figure 3) shows that the methodology of recalculation “via a steel pipe” can be used in engineering calculations. However, this approach is rather a graphical one and it is not suitable for using in mathematical modeling.

A mathematical model that analytically describes the longitudinal deformation of the pipe-concrete specimen was obtained based on the experimental data. The general view of the model is as follows:

$$P_{pc}(\Delta) = k_m \cdot P_p^{cr} \cdot \left(1 + k_c \cdot \frac{P_c^{cr}}{P_p^{cr}} \right) \cdot \lg(k_\Delta \cdot \Delta), \quad (4)$$

where the generalized coefficients are taken: $k_m = 0.85$ is the coefficient of model scaling; $k_c = 2.5$ is the coefficient of concrete contribution to the work of the structure; $k_\Delta = 500$ is the coefficient of scaling for displacements.

The coefficients k_m , k_c , k_Δ have been determined empirically, and their dependence on the physical and mechanical properties of the materials used and their proportions is obvious. Researches in this field are currently being carried out.

Figure 4 shows the diagrams generated in accordance with (4) and the experimental results.

4. Conclusion

The following conclusions can be made on the basis of the conducted research:

1. The contribution of concrete remains the same at any stage of deformation, that emphasizes the ability of concrete as part of a pipe-concrete element not to be excluded from work at loads exceeding the destructive load for a concrete specimen of the corresponding diameter, i.e., the ability to work over the limit of its differential bearing capacity. This can be explained by the occurrence of a triaxial stress state in the concrete due to the additional radial stresses caused by the shell. The steel shell prevents excessive transverse deformations leading to detachment of concrete fragments.

2. The deformation of the pipe-concrete element under central compression occurs in proportion to the deformation of the hollow steel element with the same diameter. In this case, the concrete plays a supporting role, preventing early loss of wall stability. The reduction of the specimen's load-bearing capacity occurs beyond the zone that is critical for the concrete, and the deformation coincides with the critical deformation for the hollow steel specimen.

3. The deformability of pipe-concrete elements under central compression can be described by a logarithmic dependence, allowing to form a mathematical model of the material. Despite the fact that the “smooth” analytical model (Figure 4) does not fully represent the nature of deformation of the specimens (Figure 2), its mathematical representation (4) can be used in describing the deformation processes of complex systems including steel-concrete structures with various combinations of pipe and concrete core cross sections. The proposed model does not consider the non-uniformity of stress distribution at the ending sections of the rods loaded with axial compressive load, but it can be applied for sections that are distant from the ending sections. For more accurate calculations and detailed representation of the stress-strain state of steel-tube-concrete rods, it is necessary to study in details and conduct tensometric tests on longer specimens, and this should be the following stage of research.

References

1. Lazovic Radovanovic M.M., Nikolic J.Z., Radovanovic J.R., Kostic S.M. Structural Behavior of Axially Loaded Concrete-Filled Steel Tube Columns during the Top-Down Construction Method. *Applied Sciences*. 2022;(8):3771. <https://doi.org/10.3390/app12083771>.
2. Manikandan K.B., Umarani C. Understandings on the Performance of Concrete-Filled Steel Tube with Different Kinds of Concrete Infill. *Advances in Civil Engineering*. 2021;2021:6645757. <https://doi.org/10.1155/2021/6645757>
3. Li P., Zhang T., Wang C. Behavior of Concrete-Filled Steel Tube Columns Subjected to Axial Compression. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2018;2018:4059675. <https://doi.org/10.1155/2018/4059675>
4. Rimshin V.I., Semenova M.N., Shubin I.L., Krishan A.L., Astafyeva M.A. Studies of the bearing capacity of non-centrally compressed concrete filled steel tubes. *Stroitel'nye materialy [Construction materials]*. 2022;6:8–14. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2022-803-6-8-14>

5. Rimshin V.I., Krishan A.L., Astafyeva M.A., Semenova M.N., Kurbatov V.L. Studies of the bearing capacity of centrally compressed concrete filled steel tubes. *Housing construction*. 2022;6:33–38. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2022-6-33-38>
6. Tamrazyan A.G., Manaenkov I.K. Testing of small diameter concrete filled steel tube samples with high reinforcement coefficient. *Building and reconstruction*. 2017;4(72):57–62. (In Russ.) EDN: ZHHHIZ
7. Rezvan I.V., Mailyan D.R. Load-bearing capacity of the concrete core of pipe-concrete columns. *Vestnik Majkopskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta [Bulletin of the Maikop State Technological University]*. 2011;3:18–25. (In Russ.) EDN: OOGARN
8. Khazov P.A., Erofeev V.I., Lobov D.M., Sitnikova A.K., Pomazov A.P. The experimental research of the strength of composite steel tube confined concrete samples of small-sized sections. *Privolzhsky scientific journal*. 2021;3:36–43. (In Russ.) EDN: MHSZBO
9. Krishan A.L., Zaikin A.I., Kupfer M.S. Determination of the destructive load of compressed pipe concrete elements. *Concrete and reinforced concrete*. 2008;2:22–25. (In Russ.)
10. Belyy G.I., Vedernikova A.A. Investigation of strength and stability of concrete filled steel tubes structural elements by the inverse numerical-analytical method. *Vestnik grazhdanskih inzhenerov [Bulletin of Civil Engineers]*. 2021;2(85):26–35. (In Russ.) <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2021-18-2-26-35>
11. Nesvetaev G.V., Rezvan I.V. Resistibility evaluation of the composite columns. *Fundamental research* 2011;12–3:580–583. (In Russ.) EDN: OVXWDB
12. Wang Z.B., Tao Z., Han L.H., Uy B., Lam D., Kang W.H. Strength, stiffness and ductility of concrete-filled steel columns under axial compression. *Engineering Structures*. 2017;135:209–221. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.12.049>
13. Krishan A.L., Rimshin V.I., Rahmanov V.A., Troshkina E.A., Kurbatov V.L. Bearing capacity of short concrete filled steel tube columns of circular cross-section. *Proceedings of higher education institutions. Textile industry technology*. 2017;4(370):220–225. (In Russ.) EDN: NOYQNT
14. Lapshin A.A., Khazov P.A., Kozhanov D.A., Lihacheva S.YU. Assessment of strength and stability of composite steel-reinforced concrete elements with joint use of rod and solid-state calculation. *Privolzhsky scientific journal*. 2021;3: 9–16. (In Russ.) EDN: RKFLGL
15. Kanishchev R.A. Analysis of local stability of rectangular concrete filled steel tubes. *Magazine of Civil Engineering*. 2016;4(64):59–68. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.6>
16. Mansurova A.R. Calculation of tube-concrete columns of a high-rise building and their comparison with reinforced concrete structures. *Molodoj uchenyj [Young Scientist]*. 2018;52(238):20–23. Available from: <https://moluch.ru/archive/238/55166> (accessed: 02.10.2022).
17. Hashkhozhev K.N. Determination of the maximum load for centrally compressed pipe concrete columns based on the deformation theory of concrete plasticity. *Engineering journal of Don*. 2021;8:408–414. (In Russ.) EDN: WOXBVI
18. Snigireva V.A., Gorynin G.L. The nonlinear stress-strain state of the concrete-filled steel tube structures // Magazine of Civil Engineering. 2018;7:408–414. <https://doi.org/10.18720/MCE.83.7>
19. Afanas'ev A.A., Kurochkin A.V. Concrete filled steel tubes for the construction of frame buildings. *Academia. Architecture and construction*. 2016;2:113–118. (In Russ.) EDN: WFFVFL
20. Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G., Chesnokov G.V., Mihaldykin E.S. On the problem of calculating pipe-concrete structures with a shell made of different materials. Part 2. Calculation of concrete filled steel tubes structures. *Internet-zhurnal Naukovedenie [Online Journal of Science Studies]*. 2015;7(4). (In Russ.) URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/112TVN415.pdf> (accessed: 09.15.2022)
21. Krishan A.L., Shubin I.L., Rimshin V.I., Astafyeva M.A., Stupak A.A. Compressed Reinforced Concrete Elements Bearing Capacity of Various Flexibility. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2022;182:283–291. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_26
22. Bragov A.M., Lomunov A.K., Konstantinov A.Yu., Lamzin D.A., Balandin V.V. Evaluation of radial deformation of a sample based on theoretical and experimental analysis of the methodology of dynamic testing of materials in a rigid cage. *Problems of Strength and Plasticity*. 2016;78(4):378–387. (In Russ.) EDN: XEGSMV
23. He Z., Song Y. Triaxial strength and failure criterion of plain high-strength and high-performance concrete before and after high temperatures. *Cement and Concrete Research*. 2010;40(1):171–178. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2009.08.024>
24. Karpenko N.I., Korsun V.I., Karpenko S.N., Anushchenko A.M. Strength criterion for concrete under triaxial compression. *Privolzhsky scientific journal*. 2022;4:8–16. (In Russ.) EDN: IRGIPX

Список литературы

1. Lazovic Radovanovic M.M., Nikolic J.Z., Radovanovic J.R., Kostic S.M. Structural Behavior of Axially Loaded Concrete-Filled Steel Tube Columns during the Top-Down Construction Method // Applied Sciences. 2022. No. 12(8). 3771. <https://doi.org/10.3390/app12083771>
2. Manikandan K.B., Umarani C. Understandings on the Performance of Concrete-Filled Steel Tube with Different Kinds of Concrete Infill // Advances in Civil Engineerin. 2021. Vol. 2021. Article 6645757. <https://doi.org/10.1155/2021/6645757>

3. Li P., Zhang T., Wang C. Behavior of Concrete-Filled Steel Tube Columns Subjected to Axial Compression // *Advances in Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 2018, Article 4059675. 2018. <https://doi.org/10.1155/2018/4059675>
4. Римшин В.И., Семенова М.Н., Шубин И.Л., Кришан А.Л., Астафьева М.А. Исследования несущей способности внецентренно сжатых сталебетонных колонн // *Строительные материалы*. 2022. № 6. С. 8–14. <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2022-803-6-8-14>
5. Римшин В.И., Кришан А.Л., Астафьева М.А., Семенова М.Н., Курбатов В.Л. Исследования несущей способности центрально-сжатых сталебетонных колонн // *Жилищное строительство*. 2022. № 6. С. 33–38. <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2022-6-33-38>
6. Тамразян А.Г., Манаенков И.К. Испытание трубобетонных образцов малого диаметра с высоким коэффициентом армирования // *Строительство и реконструкция*. 2017. № 4(72). С. 57–62. EDN: ZHHHIZ
7. Резван И.В., Маляин Д.Р. Несущая способность бетонного ядра трубобетонных колонн // *Вестник Майкопского государственного технологического университета*. 2011. № 3. С. 18–25. EDN: OOGARN
8. Хазов П.А., Ерофеев В.И., Лобов Д.М., Ситникова А.К., Помазов А.П. Экспериментальное исследование прочности композитных трубобетонных образцов малогабаритных сечений // *Приволжский научный журнал*. 2021. № 3. С. 36–43. EDN: MHSZBO
9. Кришан А.Л., Заикин А.И., Купфер М.С. Определение разрушающей нагрузки сжатых трубобетонных элементов // *Бетон и железобетон*. 2008. № 2. С. 22–25. EDN: ISDKDH
10. Белый Г.И., Ведерникова А.А. Исследование прочности и устойчивости трубобетонных элементов конструкций обратным численно-аналитическим методом // *Вестник гражданских инженеров*. 2021. № 2(85). С. 26–35. <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2021-18-2-26-35>
11. Несветаев Г.В., Резван И.В. Оценка прочности трубобетона // *Фундаментальные исследования*. 2011. № 12–3. С. 580–583. EDN: OVXWDB
12. Wang Z.B., Tao Z., Han L.H., Uy B., Lam D., Kang W.H. Strength, stiffness and ductility of concrete-filled steel columns under axial compression // *Engineering Structures*. 2017. № 135. P. 209–221. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.12.049>
13. Кришан А.Л., Римшин В.И., Рахманов В.А., Трошкина Е.А., Курбатов В.Л. Несущая способность коротких трубобетонных колонн круглого сечения // *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*. 2017. № 4(370). С. 220–225. EDN: NOYQNT
14. Лапшин А.А., Хазов П.А., Кожанов Д.А., Лихачева С.Ю. Оценка прочности и устойчивости композитных сталежелезобетонных элементов с совместным применением стержневых и твердотельных расчетных моделей // *Приволжский научный журнал*. 2021. № 3. С. 9–16.
15. Канищев Р.А. Анализ местной устойчивости трубобетонных конструкций прямоугольного сечения // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. № 4(64). С. 59–68. EDN: RKFLGL
Kanishchev R.A. Analysis of local stability of rectangular concrete filled steel tubes. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4(64). P. 59–68. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.6>
16. Мансурова А.Р. Расчет трубобетонных колонн высотного здания и их сравнение с железобетонными конструкциями // *Молодой ученый*. 2018. № 52 (238). С. 20–23. URL: <https://moluch.ru/archive/238/55166/> (дата обращения: 02.10.2022)
17. Хашихожеев К.Н. Определение предельной нагрузки для центрально сжатых трубобетонных колонн на основе деформационной теории пластичности бетона // *Инженерный вестник Дона*. 2021. № 8. С. 408–414. EDN: WOXBVI
18. Snigireva V.A., Gorynin G.L. The nonlinear stress-strain state of the concrete-filled steel tube structures // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. № 7. С. 408–414. <https://doi.org/10.18720/MCE.83.7>
19. Афанасьев А.А., Курочкин А.В. Трубобетонные конструкции для возведения каркасных зданий // *Academia. Архитектура и строительство*. 2016. № 2. С. 113–118. EDN: WFFVFL
20. Овчинников И.И., Овчинников И.Г., Чесноков Г.В., Михалдыкин Е.С. О проблеме расчета трубобетонных конструкций с оболочкой из разных материалов. Часть 2. Расчет трубобетонных конструкций с металлической оболочкой // *Науковедение*. 2015. Т. 7. № 4. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/112TVN415.pdf> (дата обращения: 15.09.2022).
21. Krishan A.L., Shubin I.L., Rimshin V.I., Astafeva M.A., Stupak A.A. Compressed Reinforced Concrete Elements Bearing Capacity of Various Flexibility // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2022. Vol. 182. P. 283–291. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_26
22. Брагов А.М., Ломунов А.К., Константинов А.Ю., Ламзин Д.А., Баландин В.В. Оценка радиальной деформации образца на основе теоретико-экспериментального анализа методики динамических испытаний материалов в жесткой обойме // *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. № 4. С. 378–387. DN: XEGSMV
23. He Z., Song Y. Triaxial strength and failure criterion of plain high-strength and high-performance concrete before and after high temperatures // *Cement and Concrete Research*. 2010. Vol. 40. Is. 1. P. 171–178. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2009.08.024>
24. Карпенко Н.И., Корсун В.И., Карпенко С.Н., Анущенко А.М. Критерий прочности бетона при трехосном сжатии // *Приволжский научный журнал*. 2022. № 4 (64). С. 8–16. EDN: IRGIPX