

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Азапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Аоилходжаев А.И., д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан

Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Базаров Д.Р., д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

Варум У., д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

Войццкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

Волосухин В.А., д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия

Галишикова В.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Дуцев М.В., д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия

Евкин А.Ю., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

Какоеи С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Козлов Д.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Кудрявцев С.А., чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия

Курбацкий Е.Н., д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия

Лазарев Ю.Г., д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюдпек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

Перькова М.В., д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Федюк Р.С., д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия

Якупов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

<i>Konopatskiy E.V., Krysko A.A., Shevchuk O.A.</i> Use of interpolation methods for modeling the stress-strain state of operated oil storage tanks (Использование интерполяционных методов для моделирования напряженно-деформированного состояния эксплуатируемых резервуаров для хранения нефтепродуктов)	119
<i>Sagdatullin M.K.</i> Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины	130
<i>Зылев В.Б., Платнов П.О.</i> Учет демпфирования в сплошной среде с использованием стержневой аппроксимации по А.Р. Жреницыну	149
<i>Азапов В.П., Маркович А.С., Айдемуров К.Р.</i> Модели нелинейного деформирования бетона при трехосном напряженном состоянии и их реализация в вычислительном комплексе ПРИНС	162

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

<i>Rimshin V.I., Truntov P.S.</i> Strengthening of reinforced concrete structures by composite materials taking into consideration the carbonization of concrete (Усиление железобетонных конструкций композитными материалами с учетом карбонизации бетона)	178
<i>Беглов А.Д., Санжаровский Р.С., Тер-Эмануэльян Т.Н.</i> Теория кратковременного и длительного сопротивления конструкций на основе принципа пластического разрушения	186
<i>Репин В.А., Лукина А.В., Усов А.С.</i> Рациональные конструктивные решения треугольных ферм	199

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК

<i>Krivoshapko S.N.</i> Surfaces with a main framework of three given curves which include one circle (Поверхности с главным каркасом из трех заданных кривых, одна из которых – окружность)	210
<i>Ermakova E.V., Rynkovskaya M.I.</i> Modern software features for shape optimization of shells (Современные возможности программного обеспечения для оптимизации формы оболочек)	220

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ

<i>Hematibahar M., Esparham A., Vatin N.I., Kharun M.I., Gebre T.H.</i> Effect of gelatin powder, almond shell, and recycled aggregates on chemical and mechanical properties of conventional concrete (Влияние порошка желатина, миндальной скорлупы и вторичных заполнителей на химические и механические свойства обычного бетона)	233
<i>Белов В.В., Куляев П.В., Баркая Т.Р.</i> Механические свойства мелкозернистых карбонатных бетонов с комплексной добавкой, включающей тонкодисперсный известняковый наполнитель и суперпластификатор	251

Редактор Ю.А. Заикина
Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова
Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 23.08.2023. Выход в свет 30.08.2023. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 16,74. Тираж 250 экз. Заказ № 686. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6Отпечатано в типографии ИПК РУДН
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3© Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, 2023
© Кривошапко С.Н., фото на обложке
(возведение жилого комплекса, Москва, Россия), 2023

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2023 VOLUME 19 No. 2

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-2

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatin, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, SWSU, Kursk, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Vladimir I. Andreev, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dutsev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEFU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS

OF ANALYSIS OF STRUCTURES

<i>Konopatskiy E.V., Krysko A.A., Shevchuk O.A.</i> Use of interpolation methods for modeling the stress-strain state of operated oil storage tanks	119
<i>Sagdatullin M.K.</i> Numerical modeling of nonlinear deformation processes for shells of medium thickness	130
<i>Zylev V.B., Platnov P.O.</i> Consideration of damping in a continuous medium using the rod approximation by A.R. Rzhantsyn	149
<i>Agapov V.P., Markovich A.S., Aidemirov K.R.</i> Models of nonlinear deformation of concrete in a triaxial stress state and their implementation in the PRINS computational complex	162

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

<i>Rimshin V.I., Truntov P.S.</i> Strengthening of reinforced concrete structures by composite materials taking into consideration the carbonization of concrete	178
<i>Beglov A.D., Sanzharovskiy R.S., Ter-Emmanuilyan T.N.</i> Theory of short-term and long-term resistance of structures based on the principle of plastic fracture	186
<i>Repin V.A., Lukina A.V., Usov A.S.</i> Rational structural solutions for triangular trusses	199

GEOMETRICAL MODELING OF SHELL FORMS

<i>Krivoshapko S.N.</i> Surfaces with a main framework of three given curves which include one circle	210
<i>Ermakova E.V., Rynkovskaya M.I.</i> Modern software features for shape optimization of shells	220

CONSTRUCTION MATERIALS AND PRODUCTS

<i>Hematibahar M., Esparham A., Vatin N.I., Kharun M.I., Gebre T.H.</i> Effect of gelatin powder, almond shell, and recycled aggregates on chemical and mechanical properties of conventional concrete	233
<i>Belov V.V., Kuliaev P.V., Barkaya T.R.</i> Mechanical properties of fine-grained carbonate concretes with a complex additive, including fine limestone filler and superplasticizer	251

Copy Editor Iu.A. Zaikina
Graphic Designer Iu.N. Efremova
Layout Designer Iu.A. Zaikina

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 2023

© Krivoshapko S.N., photo on the cover of the journal
(construction of a residential complex, Moscow, Russia), 2023

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-119-129

EDN: KQOOOY

UDC 004.94:624.014

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Use of interpolation methods for modeling the stress-strain state of operated oil storage tanks

Evgeniy V. Konopatskiy¹, Alexandra A. Krysko², Oksana A. Shevchuk²

¹Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation

²Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Russian Federation

✉ e.v.konopatskiy@mail.ru

Article history

Received: January 17, 2023

Revised: March 24, 2023

Accepted: March 27, 2023

For citation

Konopatskiy E.V., Krysko A.A., Shevchuk O.A. Use of interpolation methods for modeling the stress-strain state of operated oil storage tanks. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):119–129. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-119-129>

Abstract. The aim of the research is the comparison of two approaches for computer modeling of the stress-strain state of thin-walled shells of engineering structures, considering the imperfections of the geometric shapes arising due to their operation. The object of the study is the operated steel vertical cylindrical reservoir with imperfections of the geometric shape intended for storage of petroleum products. The first, so-called classical, approach provides geometric modeling of the surface of the tank's shell with the subsequent import of the geometric model into one of the systems of finite element analysis to calculate the stress-strain state of the structure and determine its technical condition, and the possibility of further operation. The geometric modeling of the shell surface with imperfections was performed using a two-dimensional interpolation method based on the 1st order smoothness outlines implemented in the point calculus. The calculation of the stress-strain state of the shell was carried out in the SCAD Office computer complex, taking into account geometric and structural non-linearity on the basis of the octahedral tangential stress theory. The second approach assumes modeling of an array of functions of vertical deflection of the tank wall by means of interpolation, solution of an array of differential equations of the elastic cylindrical shell under axisymmetric loading, improved by introduction of vertical deflection functions of the wall, followed by two-dimensional interpolation and analysis of the deformed state of the shell based on displacements arising in the tank wall from the hydrostatic load. As a result of the effective use of two-dimensional interpolation in the process of implementing the second approach, it was possible to achieve a significant increase in the speed of the numerical solution while maintaining sufficient accuracy for engineering calculations.

Keywords: computer modeling, stress-strain state, thin-walled cylindrical shell, operated tank, interpolation

Evgeniy V. Konopatskiy, Doctor of Engineering, Professor of the Department of Engineering Geometry, Computer Graphics and Computer-Aided Design, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-4798-7458; e.v.konopatskiy@mail.ru

Alexandra A. Krysko, Candidate of Engineering, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Specialized Information Technologies and Systems, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5225-3411; a.a.krysko@donnasa.ru

Oksana A. Shevchuk, Assistant Professor, Department of Specialized Information Technologies and Systems, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9224-0671; o.a.shevchuk@donnasa.ru

© Konopatskiy E.V., Krysko A.A., Shevchuk O.A., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Использование интерполяционных методов для моделирования напряженно-деформированного состояния эксплуатируемых резервуаров для хранения нефтепродуктов

Е.В. Конопацкий¹  , А.А. Крысько² , О.А. Шевчук² 

¹Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация

²Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка, Российская Федерация

 e.v.konopatskiy@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 17 января 2023 г.

Доработана: 24 марта 2023 г.

Принята к публикации: 27 марта 2023 г.

Аннотация. Цель исследования – сравнение двух подходов к компьютерному моделированию напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений с учетом несовершенств геометрической формы, возникающих в результате их эксплуатации. Объект исследования – эксплуатируемый стальной вертикальный цилиндрический резервуар для хранения нефтепродуктов с несовершенствами геометрической формы. Первый, так называемый классический, подход предусматривает геометрическое моделирование поверхности оболочки резервуара с последующим импортом геометрической модели в одну из систем конечно-элементного анализа для расчета напряженно-деформированного состояния конструкции и определения ее технического состояния, а также возможности дальнейшей эксплуатации. Геометрическое моделирование поверхности оболочки с несовершенствами выполнено методом двумерной интерполяции на основе обводов 1-го порядка гладкости, реализованной в точечном исчислении. Расчет напряженно-деформированного состояния оболочки произведен в вычислительном комплексе SCAD Office с учетом геометрической и конструктивной нелинейности на основе теории октаэдрических касательных напряжений. Второй подход предусматривает моделирование массива функций отклонения стенки резервуара от вертикали с помощью интерполяции, решение массива дифференциальных уравнений упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении, усовершенствованных за счет введения функций отклонения стенки от вертикали, с последующей двумерной интерполяцией и анализом деформированного состояния оболочки на основе радиальных перемещений, возникающих в стенке резервуара от действия гидростатической нагрузки. В результате эффективного использования двумерной интерполяции в процессе реализации второго подхода удалось достичь значительного повышения быстродействия численного решения при сохранении достаточной для инженерных расчетов точности.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, напряженно-деформированное состояние, тонкостенная цилиндрическая оболочка, эксплуатируемый резервуар, интерполяция

Для цитирования

Konopatskiy E.V., Krysko A.A., Shevchuk O.A. Use of interpolation methods for modeling the stress-strain state of operated oil storage tanks // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 2. С. 119–129. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-119-129>

1. Introduction

Modern studies of the stress-strain state of various structures cannot be represented without the use of mathematical, computer and other models [1–4]. Such studies are conducted throughout the entire lifecycle of a structure, starting from its design and ending with its utilization. The main means of such modeling are multivariate interpolation and approximation [5–7]. A general approach to modeling, without regard to the method of implementation, includes developing a geometric model [8]; developing a computer model [8]; forming a finite-element network [9]; and solving a system of differential equations using the finite-element method [10; 11]. The same approach is valid not only for modeling the stress-strain state, but also for the study of thermal, snow,

Конопацкий Евгений Викторович, доктор технических наук, профессор кафедры инженерной геометрии, компьютерной графики и автоматизированного проектирования, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-4798-7458; e.v.konopatskiy@mail.ru

Крысько Александра Анатольевна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры специализированных информационных технологий и систем, Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-5225-3411; a.a.krysko@donnasa.ru

Шевчук Оксана Александровна, ассистент, кафедра специализированных информационных технологий и систем, Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-9224-0671; o.a.shevchuk@donnasa.ru

wind and other types of loads. Each step of its implementation uses the tools of interpolation and approximation. But, considering the large amount of calculations required to solve the system of differential equations with accuracy that is sufficient for practical use, various use of these tools can significantly affect the speed of calculations, which is a significant factor. This raises a new problem of efficient use of technologies of parallel computations, the most effective of them nowadays are graphical processors [12; 13].

It is important to realize that different assumptions and approximations are often used at each step of the modeling process, starting from the creation of the geometric model to the direct use of the finite element method. For that reason, the final model will always be an approximate one, but when the number of finite elements is large and their size approaches to infinitesimal value, it can have high accuracy, which is more than sufficient for engineering calculations. For example, already at the stage of geometric modeling of the structural shell, you can use various continuous or piecewise curves (outlines, splines, etc.) that will pass through the node points of interpolation, but have different curvature between them. They are all valid from the modeling point of view with respect to the original data and they have a right to exist, but the result of the finite element analysis will be different, because the curvature between the node points of the interpolation is different. It is not always possible to determine which method is more precise. Of course, it is possible to compare the obtained models with each other. But it is difficult to choose an etalon model for the comparison. Based on these reasons this article considers the possibility of using multidimensional interpolation and approximation techniques to achieve a significant increase in the speed of calculations without significant loss of accuracy of simulation results by the example of modeling the stress state of the operated tank for the storage of petroleum products.

2. Materials and methods

The research was conducted on a model of the tank No. 1 for storage of gasoline with 1000 m³ capacity of integrated assembly point “Beshevsky”, which was built based on a typical project TP 704-1-54 “Steel vertical cylindrical tank for oil and petroleum products with capacity of 1000 m³”.¹

All structural initial data required for computer modeling and numerical study of the tank, we accept according to the typical project TP 704-1-54. The initial parameters for modeling are the geometric dimensions of the tank (tank radius $r = 6.165$ m; thickness of the shell $h = 0.005$ m), the height of the liquid level in the tank ($d = 8.44$ m), the physical properties of the stored liquid (usually tanks are tested with water, so the density of water was used $\gamma = 1000$ kg/m³).

As for the original geometric information, it is not enough to have a typical project, because due to objective and subjective reasons, the actual surface of the tank is always different from the project. These reasons are various loads (the structure's own weight, hydrostatic pressure, vacuum, wind and snow loads), manufacturing errors, violation of operating conditions. To compensate the missing information, we will use the survey and assessment of the technical condition of tank No. 1 for storage of gasoline with volume of 1000 m³ in integrated assembly point “Beshevsky”, which was conducted by the “Donbass diagnostic center of building structures, buildings and structures” of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture.²

The first of the proposed approaches can be classified as a classical one [14–17]. It involves determining the geometric shape of the shell surface of the studied engineering structures. Since this surface takes an irregular shape after usage, there arises the specific problem of determining such an irregular surface. The works [18; 19] use two-dimensional outlines of the first degree of regularity to determine the irregular surface of the tank shell for the storage of oil and petroleum products. In order to implement them, a special geometric scheme was developed (Figure 1), which takes into account the deviation of the wall from the vertical along the tank's circumference.

In accordance with this geometrical scheme, geometrical and computational algorithms for modelling the irregular surface were developed. A new problem arose at this stage, which was how to form a finite-element network of the desired size from the obtained compound surface. As a result, a special program was written in VBA, which modeled the surface of the tank shell as an array of 3DDFace objects based on 4 points with visualization of the model in the AutoCAD software package. This allowed to develop a calculation scheme of the tank in the computational complex SCAD Office (Figure 2) and conduct a finite-element analysis of the tank for the storage of petroleum products, with the account of imperfections of its geometric shape.

¹ TP 704-1-54 “Steel vertical cylindrical tank for oil and petroleum products with capacity of 1000 m³”. (In Russ.) Available from: <https://meganorm.ru/Data2/1/4293782/4293782405.pdf> (accessed: 25.04.2022).

² Technical conclusion on the topic No. 96-2 DC. Inspection and assessment of the technical condition of metal structures of gasoline storage tank No. 1 with volume V-1000 m³ of integrated assembly point “Beshevsky”. Makeyevka: Donbass Diagnostic Center of Buildings and Structures DonNACEA; 1996. (In Russ.)

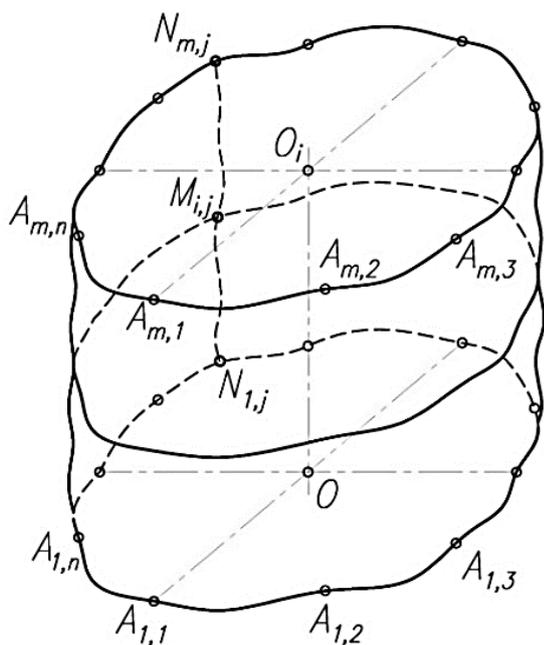


Figure 1. Geometric scheme of the tank surface with imperfections of the geometric shape

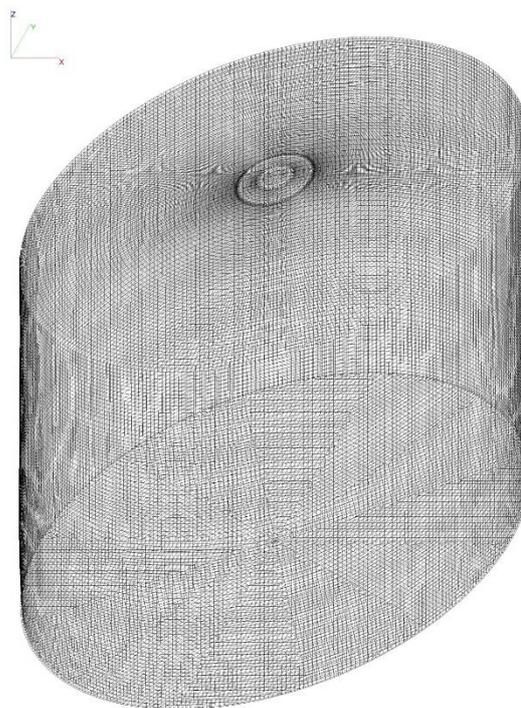


Figure 2. Calculation diagram for a tank of 1000 m³ with geometric imperfections

Here another problem arises, which is the necessity to take into account not only geometrical, but also structural non-linearity. Even insignificant imperfections of geometric shape, represented by the deviation of tank wall from the vertical position, leads to the fact that the loading of the shell becomes non-axisymmetric. In addition, the presence of geometric nonlinearity in this case leads to the necessity to take also into account the structural nonlinearity associated with the change of the initial calculation scheme under the action of hydrostatic load occurring during the filling of the tank with liquid.

In order to compensate the impact of structural nonlinearity on the tank walls, a stage-by-stage tank loading scheme was implemented during modeling [19]. Calculations were carried out in the SCAD Office computational complex in accordance with the strength theory of octahedral tangential stresses (Huber – Hencki – Meiser energy theory). As a result, an analysis of the stress state of a petroleum product storage tank with imperfections was performed (Figure 3).

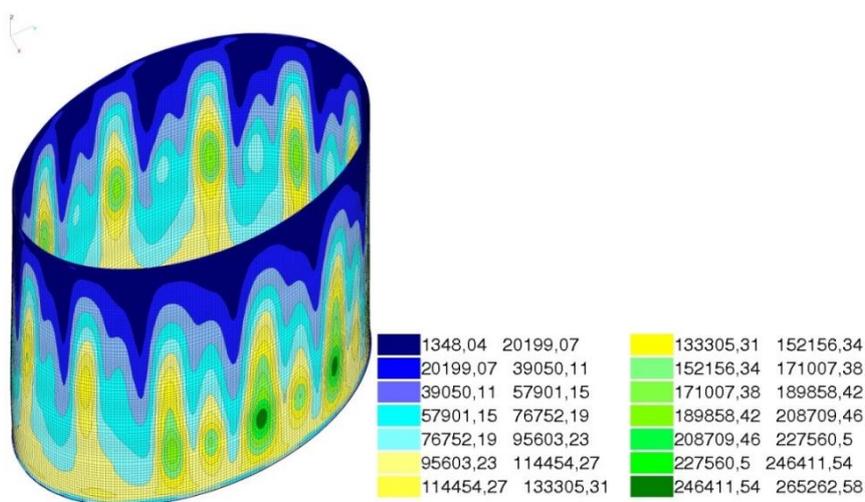


Figure 3. Values of the adjusted stresses in the tank wall under hydrostatic load with account of geometric and structural nonlinearity, kN/m²

The disadvantages of this approach are large amount of calculations and, as a result, large time costs for their implementation. Calculation of the stress-strain state of the tank according to the calculation scheme (Figure 3), which contains a total of 65 854 finite elements in the form of rectangular plates, taking into account geometric and structural nonlinearity, took over 25 hours on a computer running Intel Core i5-2400, which for engineering surveys is long enough. Another disadvantage is that a model with many finite elements is quite difficult to operate in the AutoCAD software package.

It is possible to significantly reduce the calculation time by considering each of the 12 sections of the tank separately and then combining them into a common model using interpolation. It means to apply two-dimensional interpolation not to build a geometric model of the tank shell surface with geometric imperfections, but to build a response surface based on radial displacements arising under the action of hydrostatic load.

The difficulty is that the existing model for determining the stress state of an elastic cylindrical shell under axisymmetric loading [20; 21] is an idealized one. In our case, the presence of deviations of the tank wall from the vertical, leads to the fact that the loading of the shell is not axisymmetric. To consider this, the existing differential equation of equilibrium of the tank shell element was improved by introducing a function of initial deflections of the cylindrical tank from the vertical $\delta = \delta(x)$, as shown in [22]:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{kEh(w + \delta)}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha\mu}{2}\right)} = \gamma g (x - d), \quad (1)$$

where $w = w(x)$ – the calculated function of radial displacements from hydrostatic load; x – the coordinate of the wall in height, measured from the tank's butt weld, m; r – tank radius, m; h – tank wall thickness, m; $\delta = \delta(x)$ – function of the initial tank deviations from the vertical; k – correcting factor, taking into account geometric and structural nonlinearity, as well as the stresses arising in the upper band of the shell due to its interaction with the tank roof (can be calculated by formula 2); $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa – Young's modulus for steel; $\mu = 0.3$ – Poisson's ratio; α – the parameter, which at uniaxial stress state is taken equal to 0, and at internal gas pressure in a closed cylindrical vessel is taken equal to 0.5; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – the cylindrical stiffness, kg·m;

γ – the density of the stored liquid, kg/m³; $g = 9.81$ m/s² – acceleration of free fall; d – the height of the liquid level in the tank, m.

$$k = 9.215 \cdot 10^{-10} \varphi^4 - 6.203 \cdot 10^{-7} \varphi^3 + 0.0001 \varphi^2 - 0.0021 \varphi + 0.3888, \quad (2)$$

where $\varphi \in (0; 360)$ – the angle around the circle of the tank.

In the same paper it is shown that the mathematically exact solution presented in [20; 21] for the differential equation with account of improvement gives significant inaccuracies, so its solution is performed by numerical method using geometrical interpolators [23], by analogy with the finite superelements method [24–26]. It allows, by analogy with the Isogeometric method [27–30], to eliminate the necessity of coordinating geometric information in the process of interaction between CAD and FEA systems by using geometric interpolators both for geometric modeling and for approximating the numerical solution of differential equations.

As a result, an array of functions characterizing the deviation of the tank wall from the vertical was formed, which was used to obtain an array of functions – numerical solutions of differential equations. The resulting solutions are curves located around the circle of the tank (Figure 4). These lines were used as guidelines to generate a surface of response characterizing the radial displacements arising in the tank wall from the action of hydrostatic load. A line of a closed outline of the first order of smoothness was used as the generating surface of the response. To visualize the results of modeling the deformed state of the tank shell, the response surface was represented by the means of the computer algebra system Maple in the form of a functional dependence of color on the sign and value of the radial displacements and was applied to the model of the surface of the storage tank for petroleum products (Figure 4).

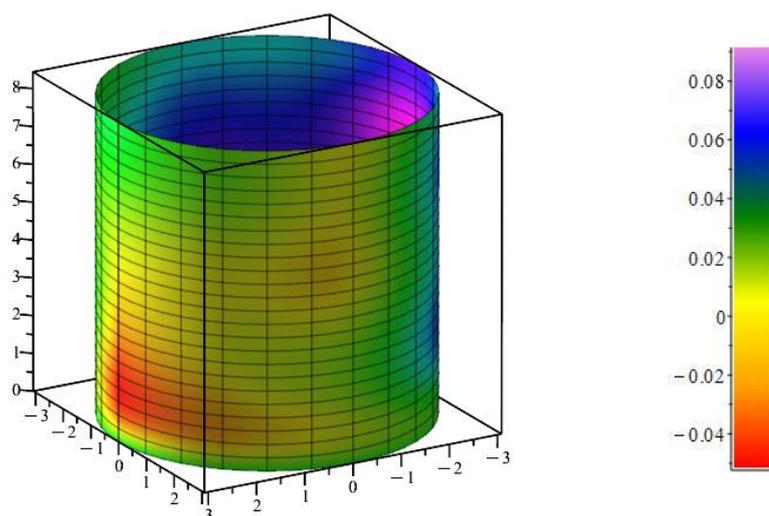


Figure 4. Values of radial displacements in the tank wall from the hydrostatic load, m

3. Results and discussion

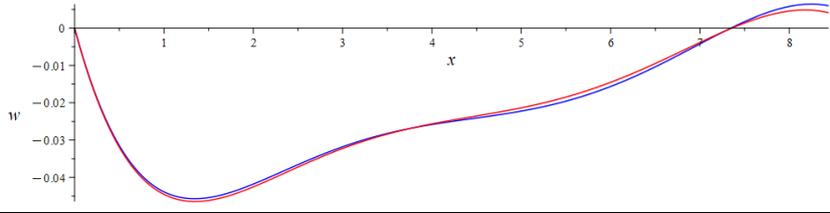
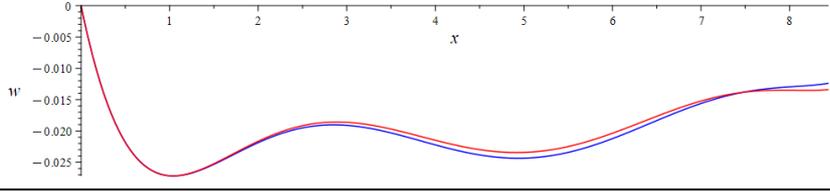
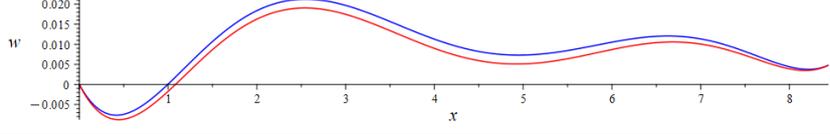
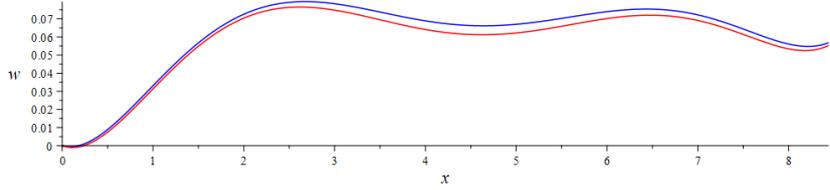
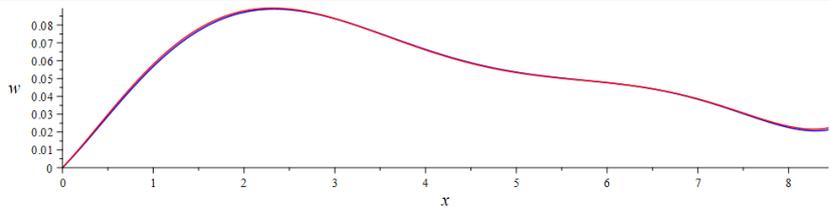
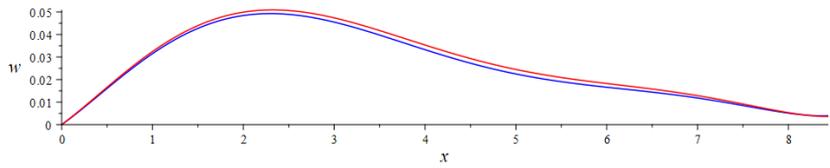
The accuracy of the simulation results was established by comparing of both approaches with each other. In total, a comparison was made for 12 curved lines along the circumference of the tank, characterizing the total action of initial deflections and radial displacements from the action of hydrostatic load (see Table). Comparisons were made using two methods, the first of which is based on a visual comparison of the obtained curved lines. The second method is an innovative one [31] and involves the discretization of lines, as a result of which two sets of dots are formed. Comparison of the obtained sets of dots with each other was carried out using the coefficient of determination. As a result of the numerical comparison for all 12 lines, high values of the coefficient of determination were obtained, and this confirms the high accuracy of the calculations of the strained state of the tank shell. Some of the comparison results of the numerical solution of the differential equation (1) with the use of geometrical interpolants and computer modeling in the computing complex SCAD Office are shown in Table (the line obtained on the basis of the computer model of the tank with imperfections in SCAD Office is shown in blue; the numerical solution with the use of geometrical interpolants [22] is shown in red).

If we compare the results of modeling presented in Figures 3 and 4, they obviously have significant differences. And the matter is not just in the fact that the reduced stresses are applied on the cylindrical surface of the tank in one case (Figure 3), and the radial displacements are applied in the other case (Figure 4). It is possible to pass from displacements in the tank wall to stresses by multiplying by the quotient of the division of the Young's modulus by the radius of the tank, considering the function of the deviation of the wall from the vertical along the height of the tank $\delta = \delta(x)$. The main difference is that only 12 lines along the circumference of the tank were used as an experiment to construct the response surface (Figure 4), on the basis of these lines the validity of the obtained results was confirmed. In contrast, for the implementation of the finite element analysis in SCAD Office (Figure 3), 360 elements were involved in the circumference of the tank. In addition, Figure 4 shows only part of the tank wall up to the level of filling with liquid, implemented based on multiple numerical solution of differential equation (1) in the system of Maple computer algebra. And the same tank was designed as a whole with the roof in the finite element analysis system in SCAD Office (Figure 5).

At the same time, we managed to achieve accuracy of numerical modeling that is sufficient for engineering calculations and significantly increase their speed by using effective interpolation methods for solving the specified problem. Calculation of an array consisting of 12 numerical solutions of differential equations defining 12 guiding lines of the response surface, as well as construction of its form with the help of one-dimensional first-order smoothness contours, considering visualization, takes about 20 seconds even with no parallelization of computational streams. If necessary, the number of guiding lines of the response surface can be significantly increased to achieve greater accuracy of engineering calculations. But even in this case, the processing speed will be much higher than in the classical approach. For example, if we use not 12, but 1000 guiding lines, the calculation time using one core of the central processor will not exceed 1 hour. In this case, the distance between the guiding lines will be less than the size of the finite elements, on the basis of which it took 25 hours to calculate. As a result, not only the computational speed but also the accuracy of engineering calcula-

tions will be increased. The proposed method can also be easily implemented to separate computational operations, because it combines the potential of structural methods of geometric modeling, capable to provide separation of geometric constructions by tasks (message passing), and the mathematical apparatus “Point calculus”, capable to implement separation by data (data parallel) by means of sub-coordinate calculations, which allows in perspective to use all available computing potential of modern multi-core processors and graphical systems [0].

Comparison of the accuracy of the modeling results

Angle on the circumference of the tank	Graphic visualization of comparison results	The value of the determination coefficient
0°		0.998
60°		0.985
120°		0.936
180°		0.973
240°		0.999
300°		0.99

Another advantage of the second approach is that the numerical solution of the improved differential equation is obtained already taking into account geometric and structural nonlinearity. As a result, there is no need to use the staged loading scheme [19], specially developed so that due to the discretization of the numerical solution in the system of finite element analysis SCAD to consider the initial geometric non-linearity of the deformed tank wall and the structural non-linearity arising in the tank wall in the process of staged filling of the tank with liquid.

According to the conducted research, the engineering methods of inspection of the technical condition of a tank for storage of petroleum products with imperfections in geometric shape, proposed in [18], have been re-

fined. The essence of refinement is to compose and solve an array of differential equations of elastic cylindrical shell under axisymmetric loading, improved by introducing functions of wall deflection from the vertical, with subsequent two-dimensional interpolation of modeling results [23].

4. Conclusion

The general conclusions and results of the study are as follows:

1. Comparison of two approaches to computer modeling of the stress-strain state of thin-walled shells of engineering structures with account of imperfections in geometric shape has been carried out. As a result of effective use of two-dimensional interpolation at the stage of creating the response surface, characterizing the radial movements in the tank wall from the hydrostatic load, it was possible to achieve a sufficient accuracy for engineering calculations of numerical modeling, and significantly increase their speed even without the use of parallel calculations.

2. The specific feature of the proposed method is that the model using the interpolation methods can be easily described by a differential equation of the 4th order, which has a simple numerical solution in the form of a polynome of the 6th degree. In this case, the resulting model considers the stress state of the tank for storage of petroleum products, with account of both geometric and constructive nonlinearity.

3. The interpolation methods of computer modeling of the stress-strain state of thin-walled shells of engineering structures with the imperfections of geometric shape which are described in the paper can also be effectively used for modeling such types of loads as wind load, snow load, self-weight load of the structure, etc., which allows to avoid the need for expensive full-scale experiments, which in some cases are non-profitable or impossible.

References

1. Saiyan S.G., Paushkin A.G. The numerical parametric study of the stress-strain state of i-beams having versatile corrugated webs. *Vestnik MGSU*. 2021;16(6):676–687. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.22227/1997-0935.2021.6.676-687>
2. Gruchenkova A.A., Chepur P.V., Tarasenko A.A. Studying of the wall cylindrical rigidity influence on the stress-strain state of the tank during local settlement. *Oil and Gas Studies*. 2020;(2):98–106. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.31660/0445-0108-2020-2-98-106>
3. Bestuzheva A.S., Chubatov I.V. Stress-deformed state of the boundation of hydraulic structures at controlled compensation discharge. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021;17(4):60–72. <https://www.doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-4-60-72>
4. Dmitriev D.S., Uchevatkin A.A. Mathematical simulation in the system of safety monitoring of hydraulic structures and automated control systems of stress-strain state. *Vestnik MGSU*. 2021;16(12):1582–1591. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.22227/1997-0935.2021.12.1582-1591>
5. Gashnikov M.V. Adaptive interpolation based on optimization of the decision rule in a multidimensional feature space. *Computer Optics*. 2020;44(1):101–108. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.18287/2412-6179-CO-661>
6. Pakhnutov I.A. Multidimensional interpolation. *Interactive Science*. 2017;(5):83–87. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.21661/r-130275>
7. Shitova M.V., Krivel S.M. Iterative method and computer program for approximation and interpolation of multidimensional data. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2020;(23):59–61. (In Russ.)
8. Krysko A.A. Geometric and computer modeling of curved surfaces of membrane covers on a rectangular plan. *Construction and Industrial Safety*. 2020;(18):97–106. (In Russ.)
9. Mellouli H., Jrad H., Wali M., Dammak F. Meshless implementation of arbitrary 3D-shell structures based on a modified first order shear deformation theory. *Computers & Mathematics with Applications*. 2019;77(1):34–49. <https://www.doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.010>
10. Ermakova A.V. Example of gradual transformation of stiffness matrix and main set of equations at additional finite element method. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020;16(2):14–25. <https://www.doi.org/10.22337/2587-9618-2020-16-2-14-25>
11. Alferov I.V. Determination of linear displacement in a frame by the Maxwell – More method and the finite element method. *Innovations. Science. Education*. 2021;(26):1422–1426. (In Russ.)
12. Zgoda I.N., Semenov A.A. High performance computation of thin shell constructions with the use of parallel computations and GPUs. *Computational Technologies*. 2022;27(6):45–57. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.25743/ICT.2022.27.6.005>
13. Kapralov N.S., Morozov A.Yu., Nikulin S.P. Parallel approximation of multivariate tensors using GPUs. *Software Engineering*. 2022;13(2):94–101. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.17587/prin.13.94-101>
14. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):51–62. <https://www.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>

15. Maraveas C., Balokas G.A., Tsavdaridis K.D. Numerical evaluation on shell buckling of empty thin-walled steel tanks under wind load according to current American and European design codes. *Thin-Walled Structures*. 2015;95:152–160. <https://www.doi.org/10.1016/j.tws.2015.07.007>
16. Šapalas A., Šaučiuvėnas G., Rasiulis K., Griškevičius M., Gečys T. Behaviour of vertical cylindrical tank with local wall imperfections. *Journal of Civil Engineering and Management*. 2019;25(3):287–296. <https://www.doi.org/10.3846/jcem.2019.9629>
17. Gorban N.N., Vasiliev G.G., Salnikov A.P. Accounting actual geometric shape of the tank shell when evaluating its fatigue life. *Oil Industry*. 2018;(8):75–79. <https://www.doi.org/10.24887/0028-2448-2018-8-75-79>
18. Krysko A.A., Konopatskiy Ye.V., Myronov A.N., Mushchanov V.P. Technique of numerical analysis of the intense deformed state of steel vertical cylindrical tanks with taking into account the defects of geometrical form. *Metal Constructions*. 2016;22(1):45–57. (In Russ.)
19. Krysko A.A. Calculation of the intense deformed state of tank's wall under the action of the hydrostatic load in a nonlinear setting with geometric imperfections. *Metal Constructions*. 2017;23(3):97–106. (In Russ.)
20. Lessig E.N., Lileev A.F., Sokolov A.G. *Sheet metal structures*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1970. (In Russ.)
21. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. *Plates and shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russ.)
22. Konopatskiy E.V., Shevchuk O.A., Krysko A.A. Modeling of the stress-strain state of steel tank with geometric imperfections. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022;100:10001. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.4123/CUBS.100.1>
23. Konopatskiy E.V. *Geometric modeling of multifactor processes based on the point calculus* (Thesis of Doctor of Technical Sciences). Nizhny Novgorod; 2020. (In Russ.)
24. Shamloofard M., Hosseinzadeh A., Movahhedy M.R. Development of a shell superelement for large deformation and free vibration analysis of composite spherical shells. *Engineering with Computers*. 2021;37(4):3551–3567. <https://www.doi.org/10.1007/s00366-020-01015-w>
25. Hughes P.J., Kuether R.J. Nonlinear interface reduction for time-domain analysis of Hurty/Craig-Bampton superelements with frictional contact. *Journal of Sound and Vibration*. 2021;507:116154. <https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116154>
26. Nielsen M.B., Sahin E. A simple procedure for embedding seismic loads in foundation superelements for combined wind, wave and seismic analysis of offshore wind turbine structures. *COMPADYN 2019. 7th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*. 2019;3:4628–4640. <https://www.doi.org/10.7712/120119.7255.19324>
27. Nguyen-Thanh N., Zhou K., Zhuang X., Areias P., Nguyen-Xuan H., Bazilevs Y., Rabczuk T. Isogeometric analysis of large-deformation thin shells using RHT-splines for multiple-patch coupling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017;316:1157–1178. <https://www.doi.org/10.1016/j.cma.2016.12.002>
28. Vu-Bac N., Duong T.X., Lahmer T., Zhuang X., Sauer R.A., Park H.S., Rabczuk T. A NURBS-based inverse analysis for reconstruction of nonlinear deformations of thin shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018;331:427–455. <https://www.doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.034>
29. Leonetti L., Liguori F., Magisano D., Garcea G. An efficient isogeometric solid-shell formulation for geometrically nonlinear analysis of elastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018;331:159–183. <https://www.doi.org/10.1016/j.cma.2017.11.025>
30. Li W., Nguyen-Thanh N., Zhou K. Geometrically nonlinear analysis of thin-shell structures based on an isogeometric-meshfree coupling approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018;336:111–134. <https://www.doi.org/10.1016/j.cma.2018.02.018>
31. Seleznev I.V., Konopatskiy E.V., Voronova O.S., Shevchuk O.A., Bezditnyi A.A. An approach to comparing multidimensional geometric objects. *GraphiCon 2021: 31st International Conference on Computer Graphics and Vision, September 27–30, 2021, Nizhny Novgorod, Russia*. 2021;3027:682–688. <https://www.doi.org/10.20948/graphicon-2021-3027-682-688>
32. Konopatskiy E.V. Geometric bases of parallel computing in computer modeling and computer-aided design systems. *GraphiCon 2022: 32nd International Conference on Computer Graphics and Machine Vision, Ryazan, September 19–22, 2022*. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences; 2022. p. 816–825. (In Russ.) <https://www.doi.org/10.20948/graphicon-2022-816-825>

Список литературы

1. Саиян С.Г., Паушкин А.Г. Численное параметрическое исследование напряженно-деформированного состояния двутавровых балок с различными типами гофрированных стенок // Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. № 6. С. 676–687. <https://www.doi.org/10.22227/1997-0935.2021.6.676-687>
2. Грученкова А.А., Чепур П.В., Тарасенко А.А. Исследование влияния цилиндрической жесткости стенки на напряженно-деформированное состояние резервуара при локальной осадке // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2020. № 2 (140). С. 98–106. <https://www.doi.org/10.31660/0445-0108-2020-2-98-106>
3. Bestuzheva A.S., Chubatov I.V. Stress-deformed state of the boundation of hydraulic structures at controlled compensation discharge // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021. Vol. 17. No. 4. Pp. 60–72. <https://www.doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-4-60-72>

4. *Дмитриев Д.С., Учеваткин А.А.* Численное моделирование в основе систем мониторинга безопасности гидротехнических сооружений и автоматизированные системы управления напряженно-деформированным состоянием // Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. № 12. С. 1582–1591. <https://www.doi.org/10.22227/1997-0935.2021.12.1582-1591>
5. *Гашиников М.В.* Адаптивная интерполяция на основе оптимизации решающего правила в многомерном признаковом пространстве // Компьютерная оптика. 2020. Т. 44. № 1. С. 101–108. <https://www.doi.org/10.18287/2412-6179-СО-661>
6. *Пахнутов И.А.* Многомерная интерполяция // Интерактивная наука. 2017. № 5 (15). С. 83–87.
7. *Шитова М.В., Кривель С.М.* Итеративная методика и программа ЭВМ аппроксимации и интерполяции многомерных данных // Вестник Иркутского университета. 2020. № 23. С. 59–61.
8. *Крысько А.А.* Геометрическое и компьютерное моделирование криволинейных поверхностей мембранных покрытий на прямоугольном плане // Строительство и техногенная безопасность. 2020. № 18 (70). С. 97–106.
9. *Mellouli H., Jrad H., Wali M., Dammak F.* Meshless implementation of arbitrary 3D-shell structures based on a modified first order shear deformation theory // Computers & Mathematics with Applications. 2019. Vol. 77. No. 1. Pp. 34–49. <https://www.doi.org/10.1016/j.camwa.2018.09.010>
10. *Ermakova A.V.* Example of gradual transformation of stiffness matrix and main set of equations at additional finite element method // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16. No. 2. Pp. 14–25. <https://www.doi.org/10.22337/2587-9618-2020-16-2-14-25>
11. *Алферов И.В.* Определение линейного перемещения в раме методом Максвелла – Мора и методом конечных элементов // Инновации. Наука. Образование. 2021. № 26. С. 1422–1426.
12. *Згода Ю.Н., Семенов А.А.* Высокопроизводительный расчет тонкостенных оболочечных конструкций с использованием параллельных вычислений и графических ускорителей // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27. № 6. С. 45–57. <http://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.6.005>
13. *Капранов Н.С., Морозов А.Ю., Никулин С.П.* Параллельная аппроксимация многомерных тензоров с использованием графических процессоров // Программная инженерия. 2022. Т. 13. № 2. С. 94–101. <http://doi.org/10.17587/prin.13.94-101>
14. *Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D.* Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2021. Vol. 17. No. 1. Pp. 51–62. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>
15. *Maraveas C., Balokas G.A., Tsavdaridis K.D.* Numerical evaluation on shell buckling of empty thin-walled steel tanks under wind load according to current American and European design codes // Thin-Walled Structures. 2015. Vol. 95. Pp. 152–160. <https://www.doi.org/10.1016/j.tws.2015.07.007>
16. *Šapalas A., Šaučiūvėnas G., Rasiulis K., Griškevičius M., Gečys T.* Behaviour of vertical cylindrical tank with local wall imperfections // Journal of Civil Engineering and Management. 2019. Vol. 25. No. 3. Pp. 287–296. <https://www.doi.org/10.3846/jcem.2019.9629>
17. *Gorban N.N., Vasiliev G.G., Salnikov A.P.* Accounting actual geometric shape of the tank shell when evaluating its fatigue life // Oil Industry. 2018. No. 8. Pp. 75–79. <https://www.doi.org/10.24887/0028-2448-2018-8-75-79>
18. *Крысько А.А., Конопацкий Е.В., Миронов А.Н., Муцанов В.Ф.* Методика численного исследования НДС стальных вертикальных цилиндрических резервуаров с учетом несовершенств геометрической формы // Металлические конструкции. 2016. Т. 22. № 1. С. 45–57.
19. *Крысько А.А.* Анализ напряженно-деформированного состояния стенки резервуара с геометрическими несовершенствами при действии гидростатической нагрузки // Металлические конструкции. 2017. Т. 23. № 3. С. 97–106.
20. *Лессиг Е.Н., Лилеев А.Ф., Соколов А.Г.* Листовые металлические конструкции. М.: Стройиздат, 1970. 488 с.
21. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
22. *Konopatskiy E.V., Shevchuk O.A., Krysko A.A.* Modeling of the stress-strain state of steel tank with geometric imperfections // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. Vol. 100. <https://www.doi.org/10.4123/CUBS.100.1>
23. *Конопацкий Е.В.* Геометрическое моделирование многофакторных процессов на основе точечного исчисления: дис. ... д-ра техн. наук. Н. Новгород, 2020. 307 с.
24. *Shamloofard M., Hosseinzadeh A., Movahhedy M.R.* Development of a shell superelement for large deformation and free vibration analysis of composite spherical shells // Engineering with Computers. 2021. Vol. 37. No. 4. Pp. 3551–3567. <https://www.doi.org/10.1007/s00366-020-01015-w>
25. *Hughes P.J., Kuether R.J.* Nonlinear interface reduction for time-domain analysis of Hurty/Craig-Bampton super-elements with frictional contact // Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 507. <https://www.doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116154>
26. *Nielsen M.B., Sahin E.* A simple procedure for embedding seismic loads in foundation superelements for combined wind, wave and seismic analysis of offshore wind turbine structures // COMPDYN 2019. 7th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering. 2019. Vol. 3. Pp. 4628–4640. <https://www.doi.org/10.7712/120119.7255.19324>
27. *Nguyen-Thanh N., Zhou K., Zhuang X., Areias P., Nguyen-Xuan H., Bazilevs Y., Rabczuk T.* Isogeometric analysis of large-deformation thin shells using RHT-splines for multiple-patch coupling // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017. Vol. 316. Pp. 1157–1178. <https://www.doi.org/10.1016/j.cma.2016.12.002>
28. *Vu-Bac N., Duong T.X., Lahmer T., Zhuang X., Sauer R.A., Park H.S., Rabczuk T.* A NURBS-based inverse analysis for reconstruction of nonlinear deformations of thin shell structures. A NURBS-based inverse analysis for reconstruction

tion of nonlinear deformations of thin shell structures // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 331. Pp. 427–455. <https://www.doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.034>

29. Leonetti L., Liguori F., Magisano D., Garcea G. An efficient isogeometric solid-shell formulation for geometrically nonlinear analysis of elastic shells // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 331. Pp. 159–183. <https://www.doi.org/10.1016/j.cma.2017.11.025>

30. Li W., Nguyen-Thanh N., Zhou K. Geometrically nonlinear analysis of thin-shell structures based on an isogeometric-meshfree coupling approach // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 336. Pp. 111–134. <https://www.doi.org/10.1016/j.cma.2018.02.018>

31. Seleznev I.V., Konopatskiy E.V., Voronova O.S., Shevchuk O.A., Bezditnyi A.A. An approach to comparing multi-dimensional geometric objects // *GraphiCon 2021: 31st International Conference on Computer Graphics and Vision*, September 27–30, 2021, Nizhny Novgorod, Russia. 2021. Vol. 3027. Pp. 682–688. <https://www.doi.org/10.20948/graphicon-2021-3027-682-688>

32. Копоцацкий Е.В. Геометрические основы параллельных вычислений в системах компьютерного моделирования и автоматизированного проектирования // *GraphiCon 2022: труды 32-й Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению (Рязань, 19–22 сентября 2022 г.)*. М.: Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, 2022. С. 816–825. <https://www.doi.org/10.20948/graphicon-2022-816-825>



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148
 EDN: KNCSOD
 УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины

М.К. Сагдатуллин

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация

✉ ssmarat@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 27 января 2023 г.
 Доработана: 29 марта 2023 г.
 Принята к публикации: 5 апреля 2023 г.

Для цитирования

Сагдатуллин М.К. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 130–148. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148>

Аннотация. При моделировании нелинейного изотропного восьмиузлового конечного элемента определены основные кинематические и физические соотношения. В частности, введены изопараметрические аппроксимации геометрии и неизвестного вектора приращения перемещений, ковариантные и контравариантные компоненты базисных векторов, метрических тензоров, тензоров деформаций (Коши – Грина и Альманси) и истинных напряжений Коши в исходной и текущей конфигурации. Далее введено вариационное уравнение в скоростях напряжений в актуальной конфигурации без учета массовых сил и рассмотрен материал Сетха, где в качестве тензора конечных деформаций использован тензор деформаций Альманси. Проведена линеаризация данного вариационного уравнения, дискретизация полученных соотношений (матрицы жесткости, матрицы геометрической жесткости). Полученные выражения записываются в виде системы линейных алгебраических уравнений. Рассматривается несколько тестовых примеров. Представлена задача изгиба полосы в кольцо. Данная задача решается аналитически, исходя из кинематических и физических соотношений. Также приведены примеры нелинейного деформирования цилиндрической и сферической оболочек. Предложенная методика построения трехмерного конечного элемента нелинейной теории упругости, использование материала Сетха позволяют получить специальный конечный элемент, при помощи которого возможно рассчитывать напряженное состояние оболочек средней толщины с использованием однослойной аппроксимации по толщине. Полученные результаты тестовых примеров демонстрируют работоспособность предложенной методики.

Ключевые слова: конечный элемент, метрический тензор, тензор Альманси, материал Сетха, метод двойной аппроксимации, конечные деформации

Numerical modeling of nonlinear deformation processes for shells of medium thickness

Marat K. Sagdatullin

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation

✉ ssmarat@mail.ru

Article history

Received: January 27, 2023
 Revised: March 29, 2023
 Accepted: April 5, 2023

Abstract. When modeling a nonlinear isotropic eight-node finite element, the main kinematic and physical relationships are determined. In particular, isoparametric approximations of the geometry and an unknown displacement increment vector, covariant and contravariant components of basis vectors, metric tensors, strain

Сагдатуллин Марат Камилевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-0535-4145; ssmarat@mail.ru
 Marat K. Sagdatullin, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Basics of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0535-4145; ssmarat@mail.ru

© Сагдатуллин М.К., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

tensors (Cauchy – Green and Almansi) and true Cauchy stresses in the initial and current configuration are introduced. Next, a variational equation is introduced in the stress rates in the actual configuration without taking into account body forces and the Seth material is considered, where the Almansi strain tensor is used as the finite strain tensor. Linearization of this variational equation, discretization of the obtained relations (stiffness matrix, matrix of geometric stiffness) is carried out. The resulting expressions are written as a system of linear algebraic equations. Several test cases are considered. The problem of bending a strip into a ring is presented. This problem is solved analytically, based on kinematic and physical relationships. Examples of nonlinear deformation of cylindrical and spherical shells are also shown. The method proposed in this paper for constructing a three-dimensional finite element of the nonlinear theory of elasticity, using the Seth material, makes it possible to obtain a special finite element, with which it is quite realistic to calculate the stress state of shells of medium thickness using a single-layer approximation in thickness. The obtained results of test cases demonstrate the operability of the proposed technique.

For citation

Sagdatullin M.K. Numerical modeling of nonlinear deformation processes for shells of medium thickness. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):130–148. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148>

Keywords: finite element, metric tensor, Almansi tensor, Seth material, double approximation method, finite strains

1. Введение

Применение метода конечных элементов (МКЭ) к расчету тонкостенных конструкций в настоящее время является общепринятым и естественным. Разработке теоретических основ конечноэлементного анализа искривленных оболочек в линейной и нелинейной постановках посвящено значительное число научных публикаций, из которых отметим [1–5]. Среди большого разнообразия предложенных подходов для геометрически и физически нелинейных задач определенными преимуществами обладают так называемые двумерные и трехмерные изопараметрические конечные элементы (КЭ) тонкостенных конструкций [6–9]. Технология построения подобных элементов основана на использовании уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) и выполнении специфических гипотез в каждой квадратурной точке самостоятельно. Такой подход в полной мере позволяет применять апробированные методики нелинейного анализа поведения конструкций с учетом конечных деформаций [10–13], пластичности [14–16], накопления поврежденности материала [17], контактных задач [18–19], задач устойчивости [20–21], модели несжимаемых материалов [22] и т. д.

В настоящей работе рассматриваются вопросы кинематики конечных деформаций и произвольных течений трехмерного континуума. Описываются тензоры деформаций и меры деформаций в разложении по основному и сопряженному базисам исходной и актуальной конфигураций. Построена математическая модель оболочечного конечного элемента путем введения в физическую модель материала Сетха. Рассмотрены числовые примеры.

2. Кинематика конечных деформаций

Рассмотрим процесс деформирования оболочки в некоторой инерциальной системе отсчета, в которую введем декартовую систему координат с ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Пусть в исходной и актуальной конфигурациях радиус-векторы материальной точки имеют вид

$$\mathbf{R} = X^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{r} = x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i. \tag{1}$$

Определим:

– базисные векторы

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i = R_k^i \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{r}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \mathbf{e}_i = r_k^i \mathbf{e}_i; \tag{2}$$

– метрические тензоры

$$\mathbf{G} = G_{ij} (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = G^{ij} (\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j) = \tilde{G}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j);$$

$$\mathbf{g} = g_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = g^{ij} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) = \tilde{g}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобится вектор скорости \mathbf{v} , который определим в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i. \quad (4)$$

В задачах статики под вектором скорости понимается приращение радиус-вектора \mathbf{r} по мере нарастания деформаций, то есть фактически \mathbf{v} есть вектор приращения перемещений $\Delta\mathbf{U}$, где \mathbf{U} – вектор перемещений.

$$\mathbf{U} = \mathbf{r} - \mathbf{R} = \mathbf{U}^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \mathbf{e}_i. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение группу тензоров, описывающих кинематику среды при ее деформации. Тензор градиента деформации

$$\mathbf{F} = (\mathbf{R}_i \mathbf{r}^i) = G_{ki} (\mathbf{R}^k \mathbf{r}^i) = g^{ki} (\mathbf{R}_i \mathbf{r}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (6)$$

где

$$\tilde{F}_{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i} = g^{mn} R_n^j r_m^i = G_{mn} R^{m,i} r^{n,j}.$$

Тензор градиента места

$$\mathbf{F}^T = (\mathbf{r}^i \mathbf{R}_i) = G_{ki} (\mathbf{r}^k \mathbf{R}^i) = g^{ki} (\mathbf{r}_i \mathbf{R}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ji} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (7)$$

Обратный тензор градиента деформации

$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{r}_i \mathbf{R}^i) = g_{ki} (\mathbf{r}^k \mathbf{R}^i) = G^{ki} (\mathbf{r}_i \mathbf{R}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ij}^* (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (8)$$

Обратный тензор градиента места

$$(\mathbf{F}^{-1})^T = (\mathbf{R}^i \mathbf{r}_i) = g_{ki} (\mathbf{R}^k \mathbf{r}^i) = G^{ki} (\mathbf{R}_i \mathbf{r}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ji}^* (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (9)$$

Отметим, что задание обратного тензора деформации в виде (8) может оказаться весьма неудобным, так как его компоненты вычисляются дифференцированием по координатам текущей конфигурации, которая часто является неизвестной. В этом случае целесообразно воспользоваться следующим представлением:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2 \det |F_{ij}|} \epsilon_{imn} \epsilon_{jkl} \frac{\partial x^m}{\partial X^k} \frac{\partial x^n}{\partial X^l} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (10)$$

Обратный тензор градиента места определяется как транспонированный тензор.

Далее при описании деформации использованы следующие соотношения:

– правый тензор Коши – Грина (мера деформации Коши – Грина)

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F} = g_{ij} (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (11)$$

где

$$\tilde{g}_{ij} = g_{mn} R^{m,i} R^{n,j};$$

– левый тензор Пиолы (мера деформации Альманси)

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G} (\mathbf{F}^{-1}) = G_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \sum_{i,j} \tilde{B}_{ij}^* (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (12)$$

где

$$\tilde{B}_{ij}^* = G_{mn} r^{m,i} r^{n,j};$$

– тензор деформации Коши – Грина

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{G}] = \frac{1}{2} [g_{ij} - G_{ij}] (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = \sum_{i,j} \tilde{E}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (13)$$

где

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{1}{2} [g_{mn} - G_{mn}] R^{m,i} R^{n,j};$$

– тензор деформации Альманси

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{g} - \mathbf{B}^{-1}] = \frac{1}{2} [g_{ij} - G_{ij}] (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \sum_{i,j} \tilde{A}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (14)$$

где

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{2} [g_{mn} - G_{mn}] r^{m,i} r^{n,j}.$$

Следует отметить, что компоненты тензоров деформации Коши – Грина и Альманси в криволинейных базисах совпадают между собой. Справедливо соотношение, связывающее тензоры деформации Коши – Грина (13) и Альманси (14),

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}, \quad (15)$$

которое характерно для многих пространственных и материальных тензоров. Имеет место и обратное преобразование, то есть

$$\mathbf{A} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{E} (\mathbf{F}^{-1}). \quad (16)$$

Введены тензоры, используемые для описания течения среды. Базовыми тензорами здесь являются:

– тензор пространственного градиента скорости

$$\mathbf{h} = \dot{\mathbf{F}} (\mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{v}_i \mathbf{r}^i = \sum_{i,j} \tilde{h}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial v^j}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_j = v_i^j \mathbf{e}_j = \sum_m \frac{\partial v^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \mathbf{r}^j; \quad \tilde{h}_{ij} = v_m^i r^{m,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}; \quad (18)$$

– тензор деформации скорости

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} + \mathbf{h}^T] = \sum_{i,j} \tilde{d}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (19)$$

где

$$\tilde{d}_{ij} = \frac{1}{2} [\mathbf{v}_m^i r^{m,j} + \mathbf{v}_m^j r^{m,i}] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right];$$

– тензор скорости поворота

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} [\mathbf{h} - \mathbf{h}^T] = \sum_{i,j} \tilde{\omega}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (20)$$

где

$$\tilde{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} [\mathbf{v}_m^i r^{m,j} - \mathbf{v}_m^j r^{m,i}] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right].$$

Материальная производная (полная производная по времени) тензора деформации Коши – Грина записана в виде

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = \sum_{i,j} \dot{E}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (21)$$

где

$$\dot{g}_{ij} = \mathbf{v}_i \mathbf{r}_j + \mathbf{v}_j \mathbf{r}_i = \sum_m (\mathbf{v}_i^m r_j^m + \mathbf{v}_j^m r_i^m); \quad \dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \dot{g}_{mn} R^{m,i} R^{n,j}.$$

Из (18) следует

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \sum_m \left[\frac{\partial v^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial v^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \right] (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{g}_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j). \quad (22)$$

Таким образом, скорость изменения тензора деформации Коши – Грина (21) и тензора деформаций скорости (19) в криволинейных базисах имеют одинаковые значения компонент. Следовательно, справедливо

$$\mathbf{d} = (\mathbf{F}^{-1})^T \dot{\mathbf{E}} (\mathbf{F}^{-1}) = -\frac{1}{2} \mathbf{F} (\dot{\mathbf{C}}^{-1}) \mathbf{F}^T. \quad (23)$$

Запишем (23) с учетом (15), (17)

$$\mathbf{d} = (\mathbf{F}^{-1})^T \frac{d}{dt} [\mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}] (\mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1})^T [\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{A}} \mathbf{F} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{A} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{F}}] (\mathbf{F}^{-1}) = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{h}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{h} = \mathbf{A}^\wedge. \quad (24)$$

Выражение в правой части (24) называют производной Ли (Lie Rate), для которой, с учетом (22), справедливо выражение

$$\mathbf{A}^\wedge = \mathbf{d} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{g}_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j). \quad (25)$$

По аналогии с операцией дифференцирования по времени определим вариации основных тензоров:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2}\delta\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}\delta\dot{g}_{ij}(\mathbf{R}^i\mathbf{R}^j) = \sum_{i,j}\delta\dot{E}_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j); \\ \delta\mathbf{d} &= (\mathbf{F}^{-1})^T\delta\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\delta\dot{g}_{ij}(\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j) = \sum_{i,j}\delta\dot{d}_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j); \\ \delta\mathbf{h} &= \sum_k\delta v_i^k r_j^k(\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j) = \sum_{i,j}\delta\dot{h}_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j).\end{aligned}\quad (26)$$

3. Физическая модель гиперупругого тела

Для построения определяющих соотношений воспользуемся вторым уравнением термодинамики для изотермического деформирования упругой изотропной среды в виде

$$\rho\dot{\psi} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{d} = 0, \quad (27)$$

где ρ – плотность материала; ψ – функция свободной энергии; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши; \mathbf{d} – тензор деформации скорости, который определяется различными формами (19), (22), (23), (24), (25).

Построим общие структурные соотношения, принимая в качестве базового выражения тензор деформаций Альманси (14). Выбор базового тензора деформаций предполагает, что функция свободной энергии зависит от компонент этого тензора. Таким образом, будем считать заданной функцию

$$\psi = \psi(A_{ij}). \quad (28)$$

По правилу дифференцирования скалярной функции по тензору имеем

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}}, \quad (29)$$

где появляется тензор второго ранга $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}}$.

Воспользуемся соотношением (24), из которого следует, что

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{h} - \mathbf{h}^T\mathbf{A} = [\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{d} - \mathbf{d}\mathbf{A}] - [\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{A}]. \quad (30)$$

Подставив (30) в (29) и далее в уравнение (27), получим

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \cdot \{[\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{d} - \mathbf{d}\mathbf{A}] - [\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{A}]\} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} = 0. \quad (31)$$

Преобразуем уравнение (31) к форме

$$\left\{ \rho \left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} - \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \mathbf{A} - \mathbf{A} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \right] - \boldsymbol{\sigma} \right\} \cdot \mathbf{d} - \left\{ \rho \left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \mathbf{A} - \mathbf{A} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{A}} \right] \right\} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (32)$$

Так как тензор скорости деформации \mathbf{d} и тензор скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$ являются совершенно независимыми тензорами, то из (32) следуют два уравнения:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{A} - \mathbf{A} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \right], \quad (33)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{A} = \mathbf{A} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}}. \quad (34)$$

Соотношения вида (33) называются физическими (определяющими) соотношениями, или уравнением состояния, и, по сути, определяют тензор напряжения в виде функции от тензора деформации. Уравнение (34) является ограничением на выбор функции свободной энергии (28).

С учетом (34) определяющие соотношения (33) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} [\mathbf{g} - 2\mathbf{A}] = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{B}^{-1} \quad (35)$$

либо

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho [\mathbf{g} - 2\mathbf{A}] \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \rho. \quad (36)$$

Обе формы записи эквивалентны, вследствие справедливости (34).

Для изотропного материала, свойства которого не зависят от направления, функция удельной потенциальной энергии деформации должна зависеть лишь от инвариантов соответствующих тензоров. Следовательно, выражение (28) упрощается до скалярной функции, зависящей от главных инвариантов

$$\psi = \psi(I_{1\mathbf{A}}, I_{2\mathbf{A}}, I_{3\mathbf{A}}). \quad (37)$$

Здесь и далее обозначение скаляров упростим, а именно

$$I_1 = I_{1\mathbf{A}}; I_2 = I_{2\mathbf{A}}; I_3 = I_{3\mathbf{A}}. \quad (38)$$

В результате после несложных преобразований получим

$$\boldsymbol{\sigma} = [\psi_1 + \psi_2 I_1] \mathbf{g} - \psi_2 \mathbf{A} + \psi_3 I_3 \mathbf{A}^{-1}, \quad (39)$$

где

$$\psi_1 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_1}; \psi_2 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_2}; \psi_3 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_3}. \quad (40)$$

Для получения представления тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ в виде суммы диад по соответствующему базису необходимо установить, в каком базисе определен тензор деформаций Альманси (14). Наиболее простой вид получаем при использовании базиса \mathbf{e}_i . В этом случае

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j} \tilde{\sigma}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \quad (41)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{ij} = [\psi_1 + \psi_2 I_1] \delta_{ij} - \psi_2 \tilde{A}_{ij} + \psi_3 I_3 \tilde{A}_{ij}^*,$$

где $|\tilde{A}_{ij}^*|$ образуется как матрица, обратная $|\tilde{A}_{ij}|$.

При использовании базиса текущей конфигурации получаем представление

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{ij} \sigma_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \sigma^{ij} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) \quad (42)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{ij} = [\Psi_1 + \Psi_2 I_1] g_{ij} - \Psi_2 A_{ij} + \Psi_3 I_3 A_{ij}^*,$$

где

$$A_{ij} = g_{ij} - G_{ij};$$

A_{ij}^* – компоненты обратного тензора в базисе $(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j)$, которые имеют достаточно сложный вид.

В практической реализации вычисление компонент \tilde{A}_{ij}^* значительно проще, чем A_{ij}^* . Поэтому целесообразно вычислять A_{ij}^* через \tilde{A}_{ij}^* . Для этого из тождества

$$A_{ij}^* (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \sum_{i,j} A_{ij}^* (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \mathbf{A}^{-1} \quad (43)$$

получим

$$A_{ij}^* = \mathbf{r}_i \sum_{m,n} \tilde{A}_{mn}^* (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) \mathbf{r}_j = \tilde{A}_{mn}^* r_i^m r_j^n. \quad (44)$$

Контравариантные компоненты тензора напряжений определяются в виде

$$\sigma^{ij} = \sigma_{mn} g^{mi} g^{nj}. \quad (45)$$

Таким образом, представленные соотношения позволяют вычислять компоненты тензора напряжений в различных базисах при известных исходной и деформированной конфигурациях механической системы.

4. Разрешающее уравнение на шаге нагружения

В качестве базового соотношения вариационное уравнение принципа виртуальных скоростей в текущей конфигурации можно записать в виде

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{d} dV = \int_V \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^\sigma} \mathbf{t}_n^* \delta \mathbf{v} dS, \quad (46)$$

где \mathbf{f}^* – вектор заданных внешних объемных сил; \mathbf{t}_n^* – вектор заданных напряжений на части поверхности S_σ , на которой определены силовые граничные условия.

Технология вычислений представляет собой метод последовательных нагружений с определением текущей метрики как основной для вычислений. Итак, процесс деформирования представим как последовательность равновесных состояний V_k , которые реализуются при заданных значениях внешних сил ${}^k \mathbf{f}^*$, ${}^k \mathbf{t}_n^*$. Определим в качестве основной неизвестной величины вектор скорости ${}^k \mathbf{v}$, который можно трактовать как вектор приращения текущей конфигурации при переходе к новому состоянию V_{k+1} :

$${}^k \mathbf{v} = \Delta {}^k \mathbf{U} = {}^{k+1} \mathbf{r} - {}^k \mathbf{r}. \quad (47)$$

Разрешающее уравнение на текущем шаге строится путем линеаризации исходного уравнения (46) в предположении $\frac{\partial^k \mathbf{v}^i}{\partial^k x^j} \ll 1$. В результате имеем

$$\begin{aligned} & \int_{V_k} \left\{ {}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta^k \mathbf{d} - \frac{1}{2} {}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\delta^k \mathbf{h} {}^k \mathbf{h} + ({}^k \mathbf{h})^T (\delta^k \mathbf{h})^T \right] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial^k \mathbf{v}^i}{\partial^k x^i} \right] \left[{}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta^k \mathbf{d} - {}^k \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} \right] \right\} dV_k + \int_{S_k^\sigma} \left\{ {}^k \mathbf{t}_n^* ({}^k \mathbf{h})^T - \left[\frac{\partial^k \mathbf{v}^i}{\partial^k x^i} \right] {}^k \mathbf{t}_n^* \right\} \delta \mathbf{v} dS_k = \\ & = \int_{V_k} {}^k \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} dV_k + \int_{S_k^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n^* \delta \mathbf{v} dS_k - \left\{ \int_{V_k} \left[{}^k \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta^k \mathbf{d} - {}^k \mathbf{f}^* \delta \mathbf{v} \right] dV_k - \int_{S_k^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n^* \delta \mathbf{v} dS \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Чтобы полностью определить это уравнение необходимо построить выражение скорости напряжений ${}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ для известной конфигурации ${}^k \mathbf{r}$ через неизвестный вектор скорости (47) в виде линейной функции.

Рассмотрим общий случай изотропного материала с определяющим уравнением (39). Индекс k для сокращения записи опустим. Справедливо

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 I_1 + \dot{\psi}_3 I_1^2] \mathbf{g} + [\psi_1 + \psi_2 I_1] \dot{\mathbf{g}} - \dot{\psi}_2 \mathbf{A} - \psi_2 \dot{\mathbf{A}} + \dot{\psi}_3 I_3 \mathbf{A}^{-1} + \psi_3 \dot{I}_3 \mathbf{A}^{-1} + \psi_3 I_3 \dot{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (49)$$

Далее распишем каждое из слагаемых:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_1} \left(\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_2} \left(\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_3} \left(\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} = \\ &= \left\{ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_1} \mathbf{g} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_2} [I_1 \mathbf{g} - \mathbf{A}] + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_3} I_3 \mathbf{A}^{-1} \right\} \cdot \dot{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь использовались следующие представления:

$$\dot{I}_1 = \left(\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{A}}; \quad \dot{I}_2 = \left(\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} = [I_1 \mathbf{g} - \mathbf{A}] \cdot \dot{\mathbf{A}}; \quad \dot{I}_3 = \left(\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}} = I_3 \mathbf{A}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{A}}. \quad (51)$$

Справедливо тождество

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{g}. \quad (52)$$

Если продифференцировать по времени тождество (52), то получим

$$\dot{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} [\dot{\mathbf{g}} - \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}]. \quad (53)$$

Таким образом, удалось построить выражения всех слагаемых в соотношении (49) через два тензора скоростей $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{g}}$. Причем все тензоры, которые свертываются с ними, однозначно определяются текущей конфигурацией ${}^k \mathbf{r}$ и могут быть вычислены по соответствующим формулам. Теперь необходимо выразить тензоры $\dot{\mathbf{A}}$, $\dot{\mathbf{g}}$ через пространственный тензор градиента деформаций (17) в виде линейной зависимости.

Из (24) имеем

$${}^k \dot{\mathbf{A}} = {}^k \mathbf{d} - ({}^k \mathbf{h})^T {}^k \mathbf{A} + {}^k \mathbf{A} {}^k \mathbf{h}, \quad (54)$$

то есть с учетом соотношения (19), (24) ${}^k \dot{\mathbf{A}}$ есть линейная функция, зависящая от ${}^k \mathbf{h}$.

Из (14) получаем

$$\dot{\mathbf{g}} = 2\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{B}}^{-1}. \quad (55)$$

Из (12) следует

$$\dot{\mathbf{B}}^{-1} = (\dot{\mathbf{F}}^{-1})^T \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1} + (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G}\dot{\mathbf{F}}^{-1}. \quad (56)$$

Дифференцируя по времени тождество

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{G}, \quad (57)$$

получим

$$\dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{h} \quad (58)$$

и подставим его в (56)

$$\dot{\mathbf{B}}^{-1} = -\mathbf{h}^T (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1} - (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{h} = -\mathbf{h}^T \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{h}. \quad (59)$$

Собирая вместе представления (54), (55) и (59), получаем выражение

$$\dot{\mathbf{g}} = 2[\mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{h}] - \mathbf{h}^T \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{h} = 2\mathbf{d} - \mathbf{h}^T [2\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}] - [2\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}]\mathbf{h} = 2\mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{g} - \mathbf{g}\mathbf{h}, \quad (60)$$

то есть соотношение, полностью аналогичное (54).

Таким образом, представление для скорости изменения тензора напряжений (49) в глобальном базисе, то есть в виде

$${}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{ij} {}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j), \quad (61)$$

допускает представление

$${}^k \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = {}^k L_{ij}^{mn} {}^k h_{mn}. \quad (62)$$

Выражение ${}^k L_{ij}^{mn}$ легко строится с помощью вышеприведенных соотношений. Следовательно, скорость изменения напряжений есть линейная функция от градиентов скоростей.

Полученные соотношения представляют собой теоретическую основу конечноэлементного алгоритма исследования конечных деформаций нелинейно упругих тел при силовой нагрузке. Необходимо лишь добавить конкретную физическую модель в виде выражения функционала свободной энергии, справедливого для соответствующего материала.

5. Материал Сетха

Расчет тонкостенных конструкций с учетом нелинейностей основывается на шаговых и итерационных методах. Выбор метода и алгоритма, реализующего его, зависит от типа нелинейности. В настоящей работе используется метод последовательных нагружений, который может быть естественно реализован в рамках МКЭ. Процесс деформирования представим в виде последовательности равновесных состояний $V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_N$, где V_1 и V_N – области, занимаемые оболочкой в начальном и конечном деформированном состоянии, а V_k – произвольное промежуточное состояние. Действующая нагрузка достигается

последовательным догружением на каждом шаге, причем количество шагов выбирается так, чтобы на каждом из них задача была квазилинейной. При такой постановке задача сводится к отысканию $(k+1)$ – состояния при уже определенной геометрии и с накопленными напряжениями k -го состояния.

Введем в рассмотрение текущую конфигурацию системы на k -м шаге нагружения и определим ее в следующем виде:

$${}^k \vec{r} = {}^k x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i, \quad (63)$$

где

$${}^k x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_{r=1}^8 {}^k x_r^i N_r (\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (64)$$

Соответственно вычисляем:

– базисные векторы:

$${}^k \vec{r}_j = \frac{\partial {}^k x^i}{\partial \xi^j} \vec{e}_i = {}^k r_j^i \vec{e}_i; \quad (65)$$

$${}^k \vec{r}^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \vec{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{{}^k g}} \epsilon^{jmn} {}^k r_m^i {}^k r_n^j = {}^k \vec{r}^{j,i} \vec{e}_i; \quad (66)$$

– метрические тензоры

$$({}^k g) = {}^k g_{ij} ({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j) = {}^k g^{ij} ({}^k \vec{r}_i {}^k \vec{r}_j), \quad (67)$$

где

$${}^k g_{ij} = {}^k \vec{r}_i {}^k \vec{r}_j = \sum_m \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j}. \quad (68)$$

Если ввести в рассмотрение ковариантные компоненты метрических тензоров, то тензор деформации Альманси записывается следующим образом:

$${}^k \Phi_{ij} = \frac{1}{2} ({}^k g_{ij} - G_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j} - \frac{\partial X^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \right). \quad (69)$$

Так как компоненты тензоров деформаций Коши – Грина и Альманси в криволинейных базисах совпадают между собой, получаем тензор деформаций Коши – Грина

$$({}^k E) = {}^k \Phi_{ij} (\vec{R}^i \vec{R}^j) \quad (70)$$

и тензор деформации Альманси

$$({}^k A) = {}^k \Phi_{ij} ({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j). \quad (71)$$

Введем в рассмотрение вектор приращения перемещений

$$\Delta {}^k \vec{U} = {}^{k+1} \vec{r} - {}^k \vec{r} = \Delta U^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i, \quad (72)$$

где используются аппроксимации вида (64), то есть

$$\Delta^k U^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_{m=1}^8 \Delta^k U_m^i N_m(\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (73)$$

Аналог тензора пространственного градиента скорости

$$(\Delta^k h_R) = (\Delta^k \bar{U}_i^k \bar{r}^i) \quad (74)$$

будет представлен в виде

$$(\Delta^k h_R) = \left(\frac{\partial \Delta^k \bar{U}}{\partial \xi^i} \bar{r}^i \right) = \sum_m \frac{\partial \Delta^k U^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} (\bar{r}^j \bar{r}^i) = \sum_m \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \Delta^k U^m}{\partial \xi^j} (\bar{r}^i \bar{r}^j) = \Delta^k \alpha_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j). \quad (75)$$

Симметричная часть этого тензора имеет вид

$$(\Delta^k d_R) = \frac{1}{2} \sum_m \left[\frac{\partial \Delta^k U^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \Delta^k U^m}{\partial \xi^j} \right] (\bar{r}^i \bar{r}^j) = \Delta^k \Phi_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j). \quad (76)$$

Аналогично можем записать вариации. Имеем

$$(\delta^k h_R) = \left(\frac{\partial \delta^k \bar{U}}{\partial \xi^i} \bar{r}^i \right) = \sum_m \frac{\partial \delta^k U^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} (\bar{r}^j \bar{r}^i) = \sum_m \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \delta^k U^m}{\partial \xi^j} (\bar{r}^i \bar{r}^j) = \delta^k \alpha_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j). \quad (77)$$

$$(\delta^k d_R) = \frac{1}{2} \sum_m \left[\frac{\partial \delta^k U^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \delta^k U^m}{\partial \xi^j} \right] (\bar{r}^i \bar{r}^j) = \delta^k \Phi_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j). \quad (78)$$

Здесь имеют место следующие соотношения:

$$\Delta^k \Phi_{ij} = \frac{1}{2} [\Delta^k \alpha_{ij} + \Delta^k \alpha_{ji}]; \quad (79)$$

$$\delta^k \Phi_{ij} = \frac{1}{2} [\delta^k \alpha_{ij} + \delta^k \alpha_{ji}]. \quad (80)$$

Тензор истинных напряжений Коши определяется в виде

$$({}^k \sigma) = {}^k \sigma_{ij} (\bar{r}^i \bar{r}^j) = {}^k \sigma^{ij} (\bar{r}_i \bar{r}_j), \quad (81)$$

где введены ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений.

Запишем известное вариационное уравнение в скоростях напряжений (48) без учета массовых сил, предварительно сделав переход от ${}^k \dot{\sigma}$ и ${}^k \dot{\mathbf{t}}_n^*$ к приращениям $\Delta^k \sigma$ и $\Delta^k \mathbf{t}_n^*$, приняв приращение времени Δt равным единице. Это уравнение будет иметь следующий вид:

$$\int_{V_k} \left\{ (\Delta^k \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\delta^k \mathbf{d}_R) + \left[\frac{\partial^k \Delta U^i}{\partial^k x^i} \right] (\mathbf{^k \sigma}) \cdot (\delta^k \mathbf{d}_R) - \frac{1}{2} (\mathbf{^k \sigma}) \cdot \left[(\delta^k \mathbf{h}_R) \cdot (\mathbf{^k h}_R) + (\mathbf{^k h}_R)^T \cdot (\delta^k \mathbf{h}_R)^T \right] \right\} dV_k =$$

$$= \int_{S_k^\sigma} \Delta^k \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{U} dS_k - \left\{ \int_{V_k} [(\mathbf{^k \sigma}) \cdot (\delta^k \mathbf{d}_R)] dV_k - \int_{S_k^\sigma} \mathbf{^k t}_n^* \delta \mathbf{U} dS_k \right\}. \quad (82)$$

В качестве физической модели используем материал Сетха, для которого справедлив закон Гука для тензора деформаций Альманси:

$$\mathbf{^k \sigma} = 2\mu \mathbf{^k A} + \lambda \mathbf{^k g} \mathbf{^k I}_{1A}. \quad (83)$$

Распишем для приращения напряжений k -го состояния

$$\Delta^k \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \Delta^k \mathbf{A} + \lambda \mathbf{^k g} \left[\mathbf{^k g} \cdot \Delta^k \mathbf{A} \right], \quad (84)$$

где

$$\Delta^k \mathbf{A} = \Delta^k \mathbf{d}_R - (\Delta^k \mathbf{h}_R)^T \mathbf{^k A} - \mathbf{^k A} \Delta^k \mathbf{h}_R. \quad (85)$$

После дискретизации (84) получаем

$$\Delta^k \sigma_{ij} = 2\mu \left(\Delta^k \Phi_{ij} - \mathbf{^k g}^{nm} \Delta^k \alpha_{ni} \mathbf{^k A}_{mj} - \mathbf{^k g}^{mn} \mathbf{^k A}_{im} \Delta^k \alpha_{nj} \right) +$$

$$+ \lambda \mathbf{^k g}_{ij} \sum_{l,o=1}^3 \mathbf{^k g}^{lo} \left(\Delta^k \Phi_{lo} - \mathbf{^k g}^{nm} \Delta^k \alpha_{nl} \mathbf{^k A}_{mo} - \mathbf{^k g}^{mn} \mathbf{^k A}_{im} \Delta^k \alpha_{no} \right), \quad (86)$$

где

$$\Delta^k \Phi_{ij} = \sum_m \Delta^k U_r^m \mathbf{^k E}_{ij}^{rm}; \quad \mathbf{^k E}_{ij}^{rm} = \frac{1}{2} \mathbf{^k x}_t^m \left(\frac{\partial N_r}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial N_t}{\partial \xi^j} + \frac{\partial N_t}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} \right). \quad (87)$$

Далее по аналогии с [23] введем в (86) упрощенный закон Гука для приращений напряжений обжатия:

$$\Delta^k \sigma_{33} = E^* \Delta^k A_{33}, \quad (88)$$

где E^* – модуль жесткости на обжатие (в общем случае он может быть определен из экспериментальных данных). В частности, можно принять

$$E^* = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (89)$$

Используя технологию усечения деформаций поперечного сдвига [23], получим

$$\mathbf{^k E}_{13}^{rm} = \frac{1}{128} \mathbf{^k x}_t^m \left[(1 + \xi_r^2 \xi_t^2) + (\xi_r^2 + \xi_t^2) \xi^2 \right] (\xi_r^1 \xi_t^3 + \xi_r^3 \xi_t^1);$$

$$\mathbf{^k E}_{23}^{rm} = \frac{1}{128} \mathbf{^k x}_t^m \left[(1 + \xi_r^1 \xi_t^1) + (\xi_r^1 + \xi_t^1) \xi^1 \right] (\xi_r^2 \xi_t^3 + \xi_r^3 \xi_t^2). \quad (90)$$

В целях уточнения физической модели, согласно теории, вводятся следующие соотношения:

$$\Delta^k \alpha_{i3} = \Delta^k \Phi_{i3} + \Delta^k \omega_{i3}, \quad (91)$$

где для $\Delta^k \Phi_{i3}$ принимаем соотношения (87), (90), а $\Delta^k \omega_{i3}$ представим в виде

$$\Delta^k \omega_{i3} = \sum_m \Delta^k U_r^m G_{i3}^{rm}, \quad (92)$$

где, согласно технологии усечения деформаций поперечного сдвига,

$$G_{13}^{rm} \approx \frac{1}{128} {}^k x_i^m \left[\xi_r^1 \xi_t^3 - \xi_r^3 \xi_t^1 \right]; \quad G_{23}^{rm} \approx \frac{1}{128} {}^k x_i^m \left[\xi_r^2 \xi_t^3 - \xi_r^3 \xi_t^2 \right], \quad (93)$$

что эквивалентно вычислению вращений $\Delta^k \omega_{i3}$ в центре конечного элемента.

Проведя некоторые преобразования, запишем матрицы геометрической жесткости второго и третьего слагаемых (82) в следующем дискретном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ps}^{qr} &= {}^k \sigma_{im} {}^k A_{ll}^{qp} {}^k E_{nj}^{rs} {}^k g^{mn} {}^k g^{ij} \sqrt{{}^k g}. \\ \tilde{D}_{ps}^{qr} &= -\frac{1}{2} {}^k \sigma^{ij} \left[{}^k A_{mi}^{rs} {}^k A_{jn}^{qp} {}^k g^{mn} + {}^k A_{im}^{qp} {}^k A_{nj}^{rs} {}^k g^{nm} \right] \sqrt{{}^k g}. \end{aligned} \quad (94)$$

В результате описанной выше конечноэлементной дискретизации получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$[{}^l K] \{ \Delta^l u \} = \{ \Delta^l P \} - \{ {}^l H \}, \quad (95)$$

где $\{ \Delta^l u \}$ – вектор приращения узловых перемещений; $[{}^l K]$ – матрица левых частей; $\{ \Delta^l P \}$ – вектор приращения узловых сил; $\{ {}^l H \}$ – вектор невязки.

Решая систему линейных алгебраических уравнений (76), используя алгоритм переупорядочивания, известный как метод Катхилла – Макки [24], и определяя приращения перемещений, находим конфигурацию системы $(l+1)$ и напряжения

$${}^{l+1} x^i = {}^l x^i + \Delta^l u^i; \quad {}^{k+1} \sigma = {}^k \sigma + \Delta^k \sigma. \quad (96)$$

6. Числовые примеры

Задача 1. Рассматривается тестовая задача изгиба полосы в кольцо. Исходя из кинематических соотношений вычислим σ_{11}^{\min} и σ_{11}^{\max} в узлах на свободном краю полосы с учетом $\frac{\pi h}{4L} \ll 1$.

$$\sigma_{11}^{\min} = -\frac{\pi h}{2L} (\lambda + 2\mu); \quad \sigma_{11}^{\max} = \frac{\pi h}{2L} (\lambda + 2\mu).$$

Задача рассчитана с использованием предложенной выше методики. Длина полосы $L = 200$ см, толщина $h = 1$ см, ширина $b = 5$ см, модуль упругости $E = 20\,000$ кГ/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0$. На рис. 1 изображено деформированное состояние полосы и несколько промежуточных этапов нагружения.

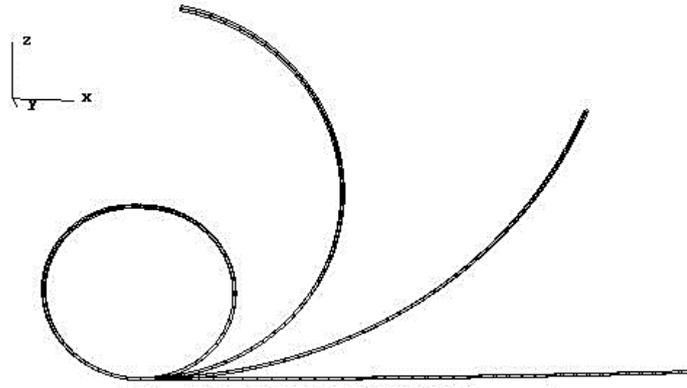


Рис. 1. Изгиб полосы в кольцо
Figure 1. Bending the strip into a ring

В случае, когда прилагаемая нагрузка разбивается на 1000 шагов нагружения, погрешность численного решения не более 1 %. Погрешность могла появиться за счет конечноэлементной аппроксимации исследуемой области. Приведенный числовой пример демонстрирует возможность настоящей методики в решении нелинейных задач теории оболочек.

Задача 2. Рассматривается полусферическая оболочка с вырезом в полюсе под воздействием самоуравновешенной системы сил (растягивающих и сжимающих нагрузок в двух ортогональных радиальных направлениях). Из условий симметрии рассмотрим четверть полусферы (рис. 2).

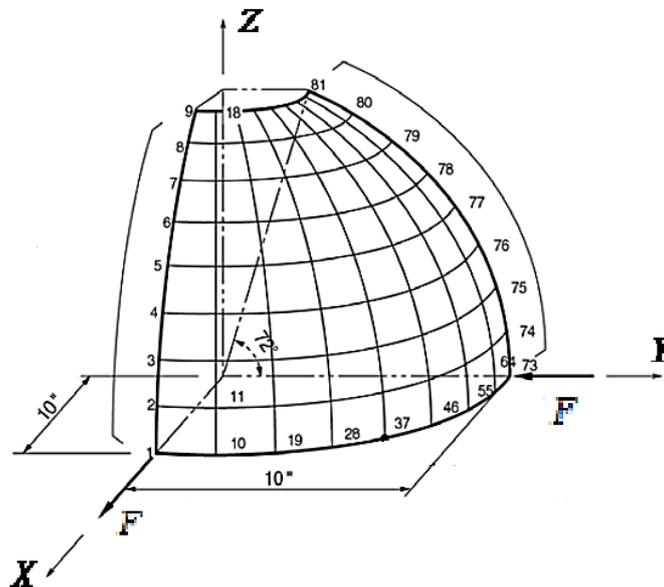


Рис. 2. Полусферическая оболочка:

радиус полусферы $R = 10,0$ см; толщина $h = 0,04$ см; модуль упругости $E = 6,825 \cdot 10^7$ кг/см²; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; нагрузка $F = 10\lambda$ кг

Figure 2. Hemispherical shell:

radius of hemisphere $R = 10.0$ cm; thickness $h = 0.04$ cm; modulus of elasticity $E = 6.825 \cdot 10^7$ kg/cm²; Poisson's ratio $\mu = 0.3$; load $F = 10\lambda$ kg

На рис. 3 изображен график максимальных перемещений U_{\max} , см и V_{\max} , см при сетке 20×20 в сравнении с решениями других авторов [25–29].

На рис. 4 приведено деформированное состояние полусферической оболочки при $\lambda = 16$.

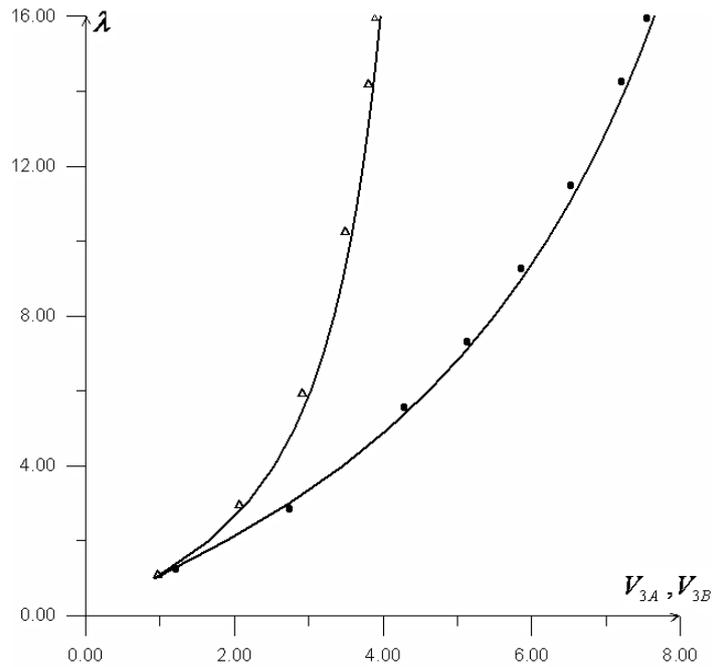


Рис. 3. График максимальных перемещений:
 V_{3A} Δ – SDFR 20; V_{3B} \bullet – SDFR 20
Figure 3. Maximum displacement graph:
 V_{3A} Δ – SDFR 20; V_{3B} \bullet – SDFR 20

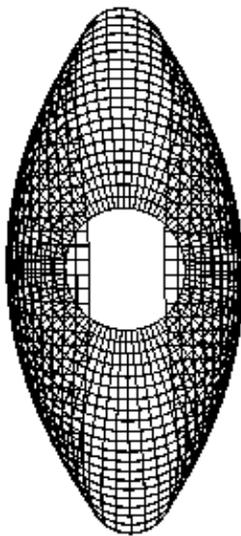


Рис. 4. Деформированное состояние полусферической оболочки
Figure 4. Deformed state of a hemispherical shell

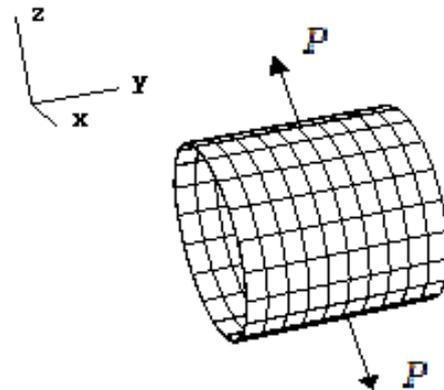


Рис. 5. Цилиндрическая оболочка:
 радиус цилиндра $R = 4.953$ см; толщина $h = 0.094$ см; длина $L = 10.35$ см;
 модуль упругости $E = 10.5 \cdot 10^6$ кг/см²; коэффициент Пуассона $\mu = 0.3125$
Figure 5. Cylindrical shell:
 radius of cylinder $R = 4.953$ cm; thickness $h = 0.094$ cm; length $L = 10.35$ cm;
 modulus of elasticity $E = 10.5 \cdot 10^6$ kg/cm²; Poisson's ratio $\mu = 0.3125$

Задача 3. Рассматривается растяжение цилиндрической оболочки путем приложения сосредоточенных сил P (рис. 5).

Максимальное радиальное перемещение получено из аналитического соотношения $W_{\max} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R = 2,82715$ см. На рис. 6 представлены радиальные перемещения на каждом шаге нагружения.

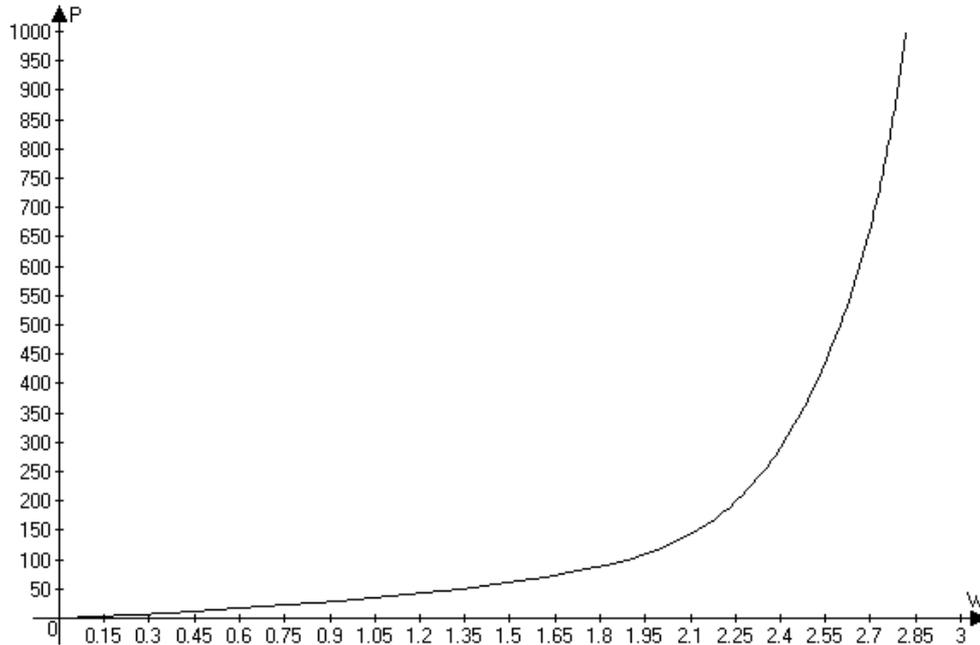


Рис. 6. График радиальных перемещений
Figure 6. Radial displacement graph

Деформированное состояние цилиндрической оболочки при $P = 1000$ кГ представлено на рис. 7. Приближенные решения других авторов можно найти в [25–29].

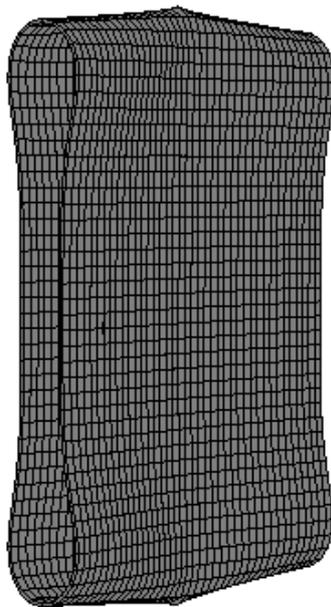


Рис. 7. Деформированное состояние цилиндрической оболочки
Figure 7. Deformed state of a cylindrical shell

7. Заключение

Представлена методика расчета напряженно-деформированных состояний тонкостенных конструкций сложной геометрии модифицированным трехмерным конечным элементом теории упругости с однослойной аппроксимацией по толщине и введен в рассмотрение материал Сетха.

Приведенные численные расчеты тестовых задач демонстрируют работоспособность и достоверность предложенного алгоритма.

Список литературы / References

1. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)
Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
2. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable solids*. Kazan: Kazan University; 2009. (In Russ.)
Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: Казан. гос. ун-т., 2009. 465 с.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method: its basis and fundamentals* Butterworth – Heinemann. 7th ed. Elsevier; 2013.
4. Golovanov A.I., Berezhnoy D.V. *Finite element method in mechanics of deformable solids*. Kazan: DAS Publ.; 2001. (In Russ.)
Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: ДАС, 2001. 300 с.
5. Khairullin F.S., Sakhbiev O.M. *Calculation of thin-walled and three-dimensional structures of complex shape based on approximating functions with finite supports*. Kazan: KNRTU Publ.; 2020. (In Russ.)
Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Расчет тонкостенных и трехмерных конструкций сложной формы на основе аппроксимирующих функций с конечными носителями. Казань: Изд-во КНИТУ, 2020. 196 с.
6. Klochkov Yu.V., Ishchanov T.R., Dzhabrailov A.Sh., Andreev A.S., Klochkov M.Yu. Strength calculation algorithm for shell structures based on a four-node discretization element. *Journal of Physics: Conference Series. International Conference on IT in Business and Industry*. 2021;2032:012028. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2032/1/012028>
7. Khayrullin F.S., Mingaliev D.D. Numerical constructing of two-dimensional surface contain the piecewise smooth subdomains. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158(3):032013. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032013>
8. Gureeva N.A., Kiselev R.Z., Kiselev A.P., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. Volumetric element with vector approximation of the desired values for nonlinear calculation of the shell of rotation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):228–241. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241>
Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Киселев А.П., Николаев А.П., Клочков Ю.В. Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомых величин для нелинейного расчета оболочки вращения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 228–241. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241>
9. Ali K.J., Enaam O.H., Hussain A.A., Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Shell stress analysis using a variational method based on three-dimensional functions with finite carriers. *Journal of Applied Engineering Science*. 2020;8(1):1102019. <https://doi.org/10.5937/jaes18-24130>
10. Sagdatullin M.K., Salman H.D., Kamil Sebur A., Obeid Hassoun E., Abdulaziz Abraham H. Modeling finite element for stress state calculation in combined structures. *Materials Science and Engineering*. 2020;765:012063. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/765/1/012063>
11. Sagdatullin M.K. Modeling of nonlinear behaviour of three-dimensional bodies and shells of average thickness by finite element method. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158:042006. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042006>
12. Sagdatullin M.K. Modeling of non-linear behavior of shells by successive loading. *Proceedings of the All-Russian Scientific Conference with International Participation “Actual Problems of Continuum Mechanics – 2020”, 28 September – 2 October 2020, Kazan*. Kazan: Kazan University, Publishing House of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan; 2020. p. 360–364. (In Russ.)
Сагдатуллин М.К. Моделирование нелинейного поведения оболочек путем последовательного нагружения // Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020: материалы Всероссийской научной конференции с международным участием, 28 сентября – 2 октября 2020 г., Казань. Казань: Казанский университет; Изд-во Академии наук Республики Татарстан, 2020. С. 360–364.

13. Golovanov A.I., Sagdatullin M.K. Statement of the problem of numerical simulation of finite hyperelastic deformations of the FEM. *Applied Mathematics and Mechanics: a Collection of Scientific Papers*. Ulyanovsk: UIGTU Publ.; 2009. p. 55–67. (In Russ.)

Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. Постановка задачи численного моделирования конечных гиперупругих деформаций МКЭ // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. Ульяновск: УЛГТУ, 2009. С. 55–67.

14. Khairullin F.S., Sakhbiev O.M. On the calculation of elastoplastic deformations by a variational method based on functions with finite carriers. *Bulletin of the Kazan Technological University*. 2021;24(4):102–106. (In Russ.)

Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. О расчете упругопластических деформаций вариационным методом на основе функций с конечными носителями // Вестник Казанского технологического университета. 2021. Т. 24. № 4. С. 102–106.

15. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018;39(9):1478–1483.

16. Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ryabukha V.V. On the physical equations of a deformable body at the loading step with implementation based on a mixed FEM. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics, Mechanics, Informatics*. 2023;23(1):70–82. (In Russ.)

Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Клочков Ю.В., Николаев А.П., Рябуха В.В. О физических уравнениях деформируемого тела на шаге нагружения с реализацией на основе смешанного МКЭ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23. № 1. С. 70–82. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-70-82>

17. Sultanov L.U., Kadirov A.M. Modeling of deformation of solids with material damage. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2022;141:505–513.

18. Sultanov L.U. Computational algorithm for investigation large elastoplastic deformations with contact interaction. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(8):2056–2063.

19. Garifullin I.R., Sultanov L.U. The algorithm of investigation of deformations of solids with contact interaction. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158(2):022001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022044>

20. Sagdatullin M.K. Statement of the problem of stability of a cylindrical panel by the finite element method. *Bulletin of the Kazan Technological University*. 2019;22(3):158–162. (In Russ.)

Сагдатуллин М.К. Постановка задачи устойчивости цилиндрической панели методом конечных элементов // Вестник технологического университета. 2019. Т. 22. № 3. С. 158–162.

21. Sagdatullin M.K. Determination of the supercritical state of a cylindrical panel. *Bulletin of the Technological University*. 2020;23(3):110–114. (In Russ.)

Сагдатуллин М.К. Определение закритического состояния цилиндрической панели // Вестник технологического университета. 2020. Т. 23. № 3. С. 110–114.

22. Fakhrutdinov L.R., Abdrakhmanova A.I., Garifullin I.R. Numerical investigation of large strains of incompressible solids. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158(2):022041. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022041>

23. Golovanov A.I., Sagdatullin M.K. Three-dimensional finite element for the calculation of thin-walled structures. *Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 2009;151(3):121–129. (In Russ.)

Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. Трехмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математических наук. 2009. Т. 151. № 3. С. 121–129.

24. Davis T.A. *Direct methods for sparse linear systems*. Philadelphia: SIAM; 2006.

25. Krätzig W.B., Oñate E. *Computational mechanics of nonlinear response of shells*. Berlin: Springer; 1990.

26. Areias P.M.A., Jeong-Hoon S., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff – Love constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005;64:1166–1206. <https://doi.org/10.1002/nme.1389>

27. Scordelis A.C., Lo K.S. Computer analysis of cylindrical shells. *Journal of the American Concrete Institute*. 1969;61:539–561.

28. Surana Karan S. Geometrically nonlinear formulation for the three dimensional solid – shell transition finite elements. *Computers & Structures*. 1982;15(5):549–566. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(82\)90007-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(82)90007-4)

29. Surana Karan S. Transition finite elements for three – dimensional stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1980;15(7):991–1020. <https://doi.org/10.1002/nme.1620150704>



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-149-161

EDN: MNXPBW

УДК 624.04:004

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Учет демпфирования в сплошной среде с использованием стержневой аппроксимации по А.Р. Ржаницыну

В.Б. Зылев , П.О. Платнов  

Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация

 manuntdfan@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 17 февраля 2023 г.

Доработана: 12 апреля 2023 г.

Принята к публикации: 15 апреля 2023 г.

Для цитирования

Зылев В.Б., Платнов П.О. Учет демпфирования в сплошной среде с использованием стержневой аппроксимации по А.Р. Ржаницыну // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 149–161. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-149-161>

Аннотация. Цель исследования – создание метода учета внутреннего трения, который обеспечивает частотную независимость, учитывает зависимость внутреннего трения от уровня напряженного состояния и является пригодным для физически нелинейных задач при больших и малых перемещениях. Рассмотрен приближенный способ учета демпфирования в пластинах с привлечением стержневой аппроксимации по А.Р. Ржаницыну. Проанализирована дискретная среда Ржаницына с квадратной ячейкой с точки зрения изотропности ее свойств демпфирования. Для восьми характерных направлений ориентации деформаций показано точное выполнение свойств изотропности демпфирования. Дано решение тестового примера, в котором колеблющийся при растяжении стержень рассчитывается по двум расчетным схемам, одна из которых представляет действительный стержень, а другая – прямоугольную пластинку, испытывающую одноосное растяжение, для динамического моделирования которой в свою очередь используется дискретная модель А.Р. Ржаницына. Использование одинаковых параметров демпфирования для действительного стержня и стержней в аппроксимации Ржаницына приводит к близкому затуханию. Разработан приближенный подход к учету внутреннего трения при колебаниях двумерной сплошной среды, а также вариант уточнения сил демпфирования в пластине. Приведен численный пример моделирования затухания в случае рассмотрения геометрически и физически нелинейных колебаний.

Ключевые слова: частотно-независимое демпфирование, изотропность свойств демпфирования, двумерная среда, обобщенная диаграмма Прандтля, физическая нелинейность, большие перемещения, численные решения, задачи динамики

Зылев Владимир Борисович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-5160-0389; zylevzb@ya.ru

Платнов Павел Олегович, аспирант, кафедра строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-9765-7417; manuntdfan@mail.ru

© Зылев В.Б., Платнов П.О., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Consideration of damping in a continuous medium using the rod approximation by A.R. Rzhanitsyn

Vladimir B. Zylev , Pavel O. Platnov  

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

 manuntdfan@mail.ru

Article history

Received: February 17, 2023

Revised: April 12, 2023

Accepted: April 15, 2023

For citation

Zylev V.B., Platnov P.O. Consideration of damping in a continuous medium using the rod approximation by A.R. Rzhanitsyn. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):149–161. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-149-161>

Abstract. The work is focused on creating a method for accounting of internal friction, which provides frequency independence, considers the dependence of internal friction on the level of the stress state, and is suitable for physically nonlinear tasks at large and small displacements. The authors consider an approximated method of accounting of damping in plates using the rod approximation according to A.R. Rzhanitsyn. An analysis of the discrete Rzhanitsyn medium with a square cell is given in terms of isotropy of its damping properties. The exact fulfillment of the isotropic damping properties is shown for the eight specific directions in the orientation of the deformations. The solution for a test example is given, where a rod oscillating in tension is calculated according to two computational schemes. One of these schemes is a real rod, the other is a rectangular plate experiencing uniaxial tension, and for its dynamic modeling, in turn, the discrete model by A.R. Rzhanitsyn is applied. The use of the same damping parameters for the real rod and rods in the Rzhanitsyn approximation leads to close damping. An approximate approach has been developed to account for internal friction during vibrations of a two-dimensional continuous medium, as well as a variant of clarifying the damping forces in the plate. A numerical example of damping modeling is given in the case of considering geometrically and physically nonlinear oscillations.

Keywords: frequency-independent damping, isotropy, dampening properties, two-dimensional medium, generalized Prandtl diagram, physical nonlinearity, large displacements, numerical solutions, problems of dynamics

1. Введение

Силы внутреннего трения в материале при движении упругой системы оказывают сильное влияние на течение динамического процесса. От их правильного задания в расчете зависят искомые динамические факторы – максимальные перемещения, скорости, ускорения, усилия. В предыдущих работах [1–3] мы экспериментально изучали затухающие колебания для случая одноосного напряженного состояния. Для ряда динамических задач [1; 4–6] нами разрабатывались и исследовались компьютерные модели при использовании численных шаговых решений с привлечением явной вычислительной схемы интегрирования уравнений движения с учетом демпфирования. Элементами деформируемых систем являлись стержни, работающие в условиях одноосного напряженного состояния. Использовались разные варианты учета сил демпфирования, но основной подход, который рассматривается и в данной работе, близок к идее А.Ю. Ишлинского [7] о представлении деформируемого тела как неоднородной упругопластической среды. В [1] упрощенный вариант введения сил внутреннего трения, реализованный в нашей компьютерной программе [4; 8], был основан на обобщенной модели Прандтля. Не имея возможности его здесь подробно описывать, сошлемся на работы, содержащие такое описание [1; 3], где использован явный вычислительный алгоритм моделирования движения [4; 8] с привлечением экстраполяции по Адамсу.

Здесь ограничимся лишь самым кратким описанием модели демпфирования применительно к одноосному напряженному состоянию. Действительный стержень разбивается на несколько полос, каждая

Vladimir B. Zylev, Doctor of Science (Technical), Professor, Head of the Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5160-0389; zylevzb@ya.ru

Pavel O. Platnov, PhD student, Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9765-7417; manuntdfan@mail.ru

из которых подчиняется диаграмме Прандтля. Суммарная площадь поперечного сечения всех полос равняется действительной площади поперечного сечения стержня. Каждая полоса имеет свой предел текучести и вступает в пластическую деформацию, когда напряжение в ней достигнет значения этого предела. Собранные вместе полосы обеспечивают получение гистерезисных петель, от весьма узких при малых деформациях до все более широких при больших деформациях. Таким образом, потери энергии, которые обеспечивает модель, будут сильно зависеть от уровня амплитуд напряжений, что отчетливо прослеживается в экспериментах [3; 9]. Модель дает частотно независимое внутреннее трение [9; 10], что также отмечено в работах [11–15] и чему мы находили стабильные экспериментальные подтверждения [2; 3]. В связи с учетом влияния амплитудных напряжений на внутреннее трение, необходимо отметить работы [16–19].

Основная **цель исследования** – распространение рассматриваемого подхода к учету демпфирования на двумерные задачи. Остановимся на плоской динамической задаче теории упругости.

А.Р. Ржаницын предложил заменять в расчетах упругую среду набором из стержней, работающих на растяжение – сжатие, соединенных шарнирами в узлах (рис. 1).

При большом количестве узлов модель Ржаницына дает изотропную упругую среду, правда с единственно возможным значением коэффициента Пуассона $\mu = 1/3$. Модель Ржаницына обобщается и на трехмерную задачу [20], но в данной работе мы ограничимся двумерной задачей. Несмотря на очевидные недостатки модели Ржаницына, она обладает и определенными преимуществами: основана на использовании простейшего конечного элемента в виде растянутого стержня, легка в программировании и визуализации, допускает легкое обобщение на большие перемещения.

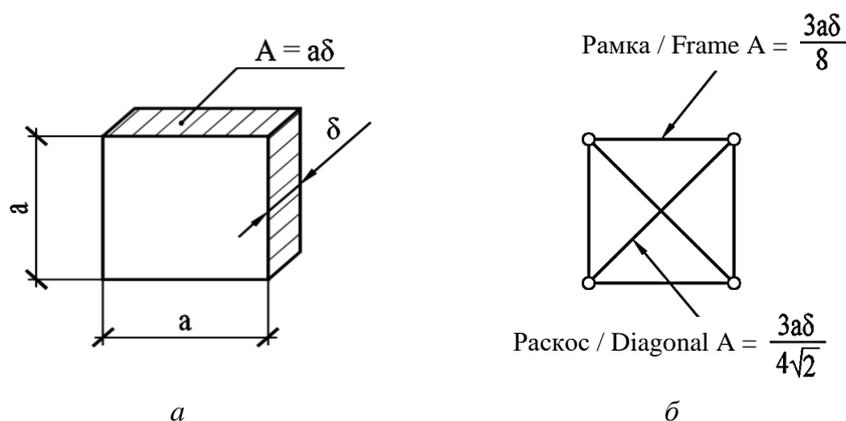


Рис. 1. Модель А.Р. Ржаницына:
a – заменяемый квадратный элемент пластинки; *b* – заменяющий стержневой набор
Figure 1. Model by A.R. Rzhantsyn:
a – replaceable square plate element; *b* – replacing rod set

И еще одно преимущество модели Ржаницына – возможность моделирования сил внутреннего трения, чему и посвящено настоящее исследование.

2. Методы

Способ учета внутреннего трения, который мы предлагаем для двумерной задачи, сформулировать весьма просто: для всех стержней аппроксимирующей системы вводится алгоритм вычисления продольных сил, полученный для одноосного напряженного состояния. В табл. 1 приведены значения параметров затухания при одноосном растяжении для образца из малоуглеродистой стали, полученные нами в лаборатории [2].

Таблица 1

Подобранные параметры модели демпфирования для материала из малоуглеродистой стали

Доля площади полосы, %	0,81	0,21	0,38	0,2	0,43	0,69	0,67	0,96	0,85	94,8
Относительная деформация при текучести в полоске $\epsilon_t \cdot 10^5$	0,25	1,23	2,474	4,687	7,812	12,57	21,61	42,19	63,28	150

Table 1

Selected parameters of the damping model for low-carbon steel material

Share of strip area, %	0.81	0.21	0.38	0.2	0.43	0.69	0.67	0.96	0.85	94.8
Relative deformation at yield in the strip $\varepsilon_y \cdot 10^5$	0.25	1.23	2.474	4.687	7.812	12.57	21.61	42.19	63.28	150

В табл. 1 приведены доли площади каждой полосы от общей площади поперечного сечения образца и относительные деформации, которым соответствуют напряжения предела текучести для каждой из десяти полосок. Как видно, до $\varepsilon = 63,28 \cdot 10^{-5}$ всего лишь 5,2 % сечения входят в текучесть, остальной материал стержня работает как упругий. Глобальная текучесть стержня наступает при $\varepsilon = 150 \cdot 10^{-5}$, причем при разгрузке материал вновь переходит в упругую работу, таким образом реакция стержня зависит от истории его нагружения. Модель демпфирования, конечно, достаточно сложна, ее включение в расчет увеличивает время моделирования задачи примерно в два раза. Однако модель является частотно независимой, автоматически учитывает сильную зависимость демпфирования от уровня напряжений, неизбежно включает учет пластических деформаций, учитывает взаимное влияние отдельных форм колебаний через демпфирование. Перечисленные преимущества существенны с точки зрения правильного отражения свойств демпфирования. Основной недостаток модели внутреннего трения, основанной на обобщенной модели Прандтля, – необходимость использования нелинейных уравнений движения. Этот недостаток, являющийся фатальным при использовании традиционных методов интегрирования уравнений движения, вовсе не является недостатком при использовании явной схемы интегрирования уравнений движения [4; 8].

Модель Ржаницына дает изотропную среду в смысле упругости. Вопрос изотропности среды в смысле демпфирования неочевиден, далее мы постараемся его выяснить. Также следует определить, как влияет переход к двумерной среде на количественные показатели затухания.

Чтобы проверить выполнение хотя бы необходимого условия изотропности, сравним потери энергии в стержнях для одной характерной ячейки стержневой модели (см. рис. 1). Сравнение сведено в табл. 2. Левый столбец таблицы соответствует заданию деформаций ε_x , ε_y , γ_{xy} в осях координат с горизонтальным расположением оси x . В правом столбце такие же деформации задаются в осях, повернутых под углом 45° .

Прежде всего заметим, используя рис. 1, б, что объем материала двух элементов рамки модели Ржаницына равен объему материала раскоса. В соответствии с этим стержни модели разбиты на четыре подгруппы с равными объемами: горизонтальные стержни рамки; вертикальные стержни рамки; восходящий раскос; нисходящий раскос. В левом и правом столбцах табл. 2 можно найти подгруппы стержней, в которых возникают одинаковые деформации. Отсюда можно сделать вывод об одинаковых потерях энергии для случаев, когда деформации заданы в исходных и повернутых под углом 45° осях.

На основании выполненного анализа и рассмотрения структуры модели можно показать восемь положений осей координат, задание одинаковых деформаций в которых приведет к одинаковому рассеянию энергии (рис. 2). Для произвольного положения осей, показанного на рис. 2 пунктиром, условие изотропности будет выполняться приближенно. Можно высказать предположение, что степень погрешности в изотропности свойств демпфирования будет небольшой. Таким образом, констатируем, что совершенной изотропности по демпфированию модель Ржаницына не даст, но будет к ней достаточно близка.

Далее перейдем к количественному анализу свойств демпфирования в предлагаемой модели. На рис. 3 представлен тестовый пример, который имеет три расчетные схемы: континуальная пластинка-стержень; стержневая аппроксимация пластины по Ржаницыну и стержневая расчетная схема.

При решении принимаем $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7,8$ г/см³, $\mu = 1/3$, $m = 1000$ кг, размеры на рис. 3. Параметры демпфирования берутся из табл. 1. Силы веса не учитываются в данном примере. Точечным массам на конце стержня-пластины задается начальная скорость 20,0053 см/с, направленная вертикально вниз и одинаковая для расчетных схем рис. 3, б и в. Начальная скорость подобрана с таким расчетом, что при достижении первого максимума перемещений в системе возникает напряжение $\sigma = 200$ МПа или, что то же самое, вертикальная относительная деформация $\varepsilon = 0,001$. После задания точечным массам начальной скорости возникают свободные затухающие колебания, которые и моделируются на компьютере.

Деформации стержней одной ячейки модели при задании относительных деформаций вдоль исходных и повернутых осей

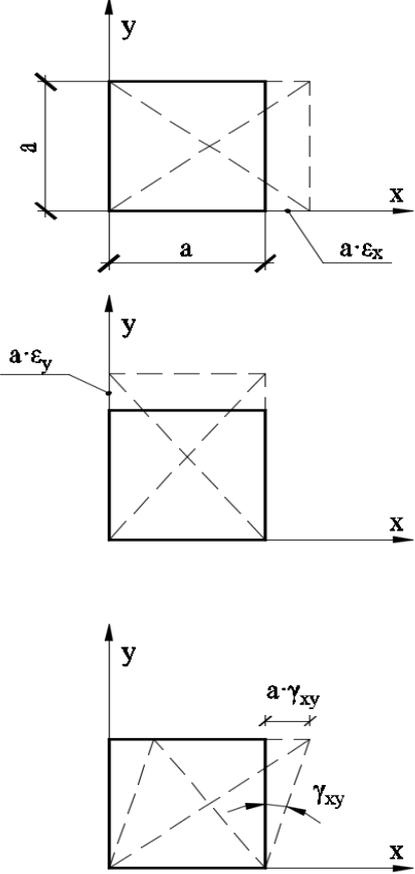
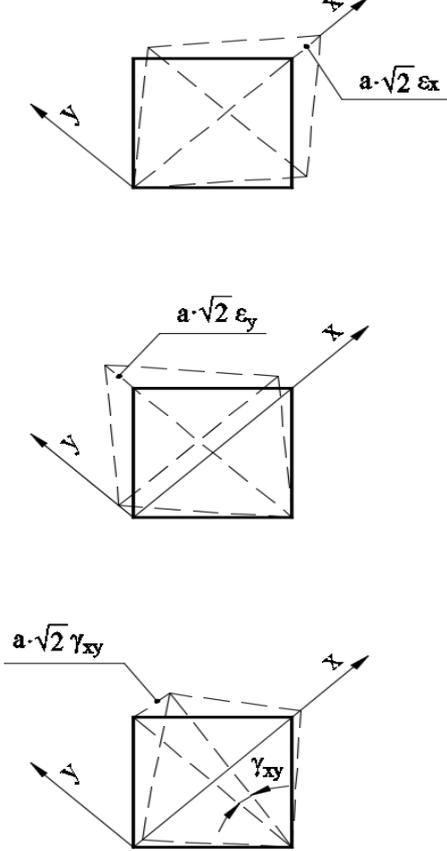
Деформации заданы при горизонтальном положении оси x	Деформации заданы при оси x , повернутой на угол 45°
	
Относительная деформация в элементах модели	
Горизонтальные стержни рамки	
ε_x	$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
Вертикальные стержни рамки	
ε_y	$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
Восходящий раскос	
$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$	ε_x
Нисходящий раскос	
$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$	ε_y

Table 2

Deformations of the rods in one model cell when setting the relative deformations along the original and rotated axes

The deformations are set at the horizontal position of the x axis	The deformations are set with the x axis rotated by an angle of 45°

Relative deformation in model elements

Horizontal frame rods	
ε_x	$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
Vertical frame rods	
ε_y	$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
Ascending slanting rod	
$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$	ε_x
Descending slanting rod	
$\frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$	ε_y

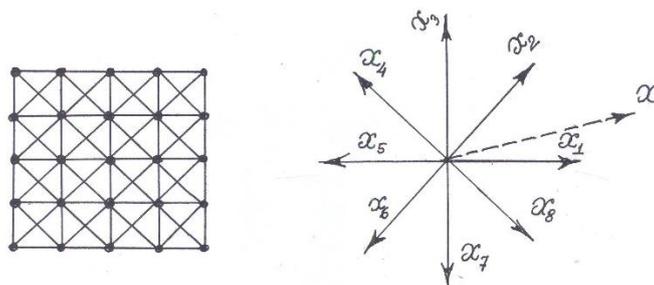


Рис. 2. Восемь положений осей координат с одинаковыми свойствами демпфирования
Figure 2. Eight positions of the coordinate axes with the same damping properties

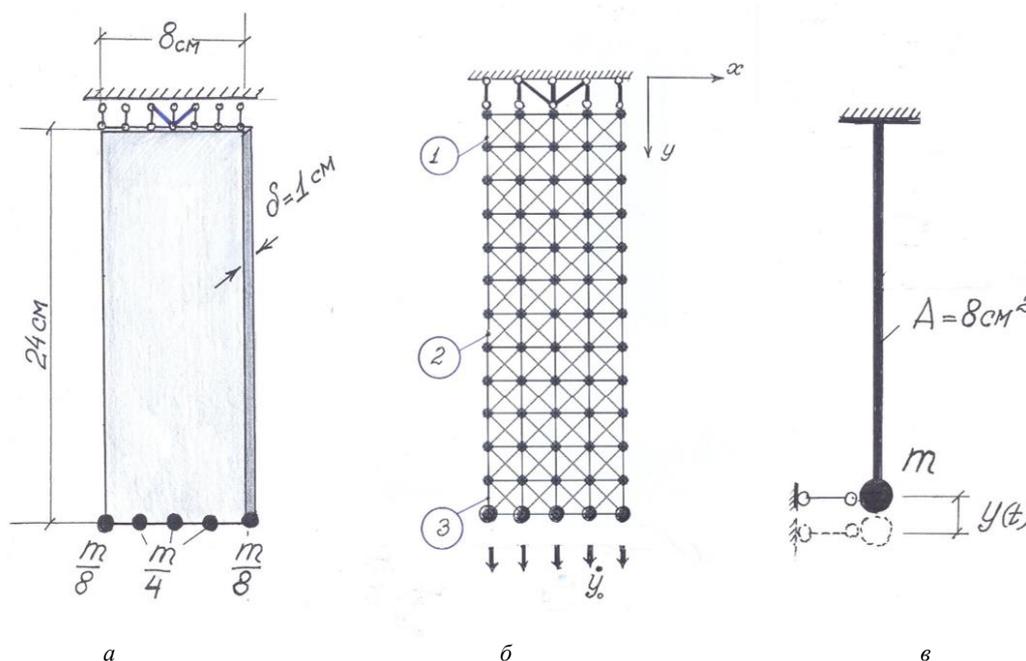


Рис. 3. Модельный пример для численного анализа:
 а – пластина-стержень с точечными массами на конце; б – расчетная схема по А.Р. Ржаницыну; в – стержневая расчетная схема
Figure 3. A model example for numerical analysis:
 a – plate-rod with dot masses on the end; b – calculation scheme according to A.R. Rzhantsyn; c – rod calculation scheme

3. Результаты

На рис. 4 показаны графики изменения вертикальных перемещений правого нижнего угла пластины в модели Ржаницына (рис. 3, б) и концевой точки стержня, полученные с использованием нашей компьютерной программы [4; 7; 8]. Рассмотрен отрезок времени $t = 2$ с. За это время система успевает совершить 256 полных колебаний, причем частоты для обеих расчетных схем очень хорошо совпадают, что свидетельствует о том, что стержневая аппроксимация правильно отражает деформационные свойства стержня-пластины.

Более темную окраску на рис. 4 имеют убывающие амплитуды для единичного стержня, а более светлую – график для модели Ржаницына. Наибольшее расхождение для этих амплитуд составляет 15 % (в конце графика), причем большее затухание имеет место для единичного стержня. Определенное совпадение графиков убывающих амплитуд – неожиданный результат. В рассматриваемом случае мы наделили фиктивные стержни модели Ржаницына теми же параметрами, что и единичный стержень (см. табл. 1), и это действие не имеет под собой строгого обоснования.

Чтобы уточнить затухание в пластине, можно рекомендовать следующий приближенный подход: для параметров фиктивных стержней пластины можно выполнить некоторую коррекцию, а именно уве-

личить площади полосок (см. табл. 1) путем введения некоторого корректирующего множителя. Естественно, что увеличиваются площади всех условных полосок, кроме самой толстой. Площадь самой толстой полоски следует уменьшить, чтобы суммарная площадь стержня осталась неизменной. «Исправленные» доли площадей полосок даны в табл. 3. Корректирующий множитель мы определили путем подбора, и он оказался равным 1,08. После задания параметров демпфирования согласно табл. 3, графики на рис. 4 стали практически совпадать, таким образом, множитель 1,08 можно рекомендовать для практического использования, правда, его значение в принципе зависит от величин, входящих в табл. 1. Кроме того, корректирующий множитель будет зависеть и от формы пластины, и от фактического напряженного состояния в ней.

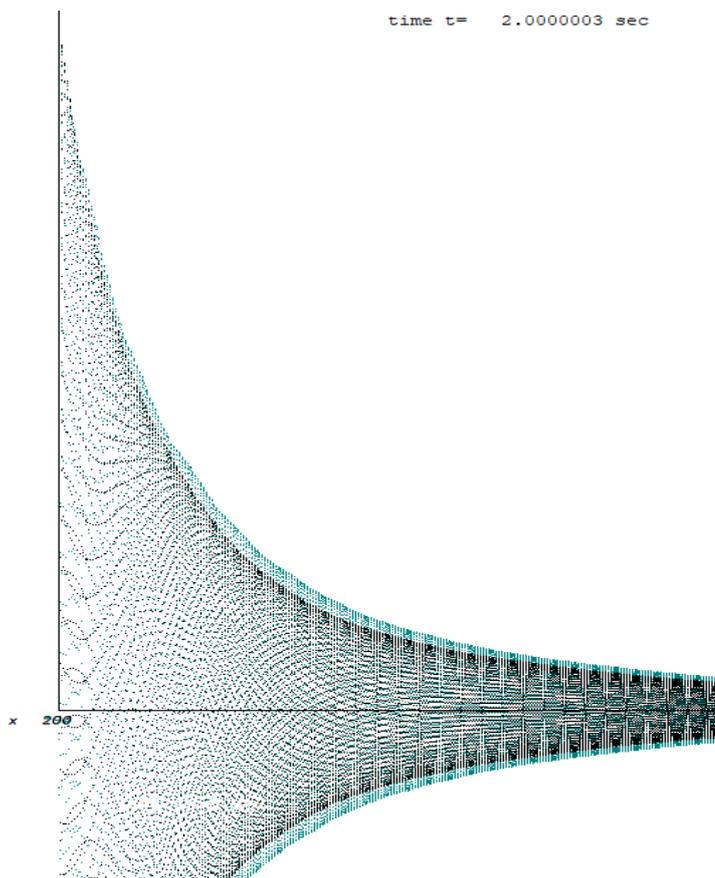


Рис. 4. Наложенные графики перемещений нижней точки стержня-пластины с аппроксимацией по Ржаницыну (зеленым) и единичного стержня (черным) при затухающих колебаниях
Figure 4. Superimposed graphs of the displacements in the lower point of the rod-plate with Rzhantsyn approximation (green) and a single rod (black) with damped oscillations

Таблица 3

Исправленные параметры модели демпфирования для материала из малоуглеродистой стали

Доля площади полосы, %	0,875	0,227	0,410	0,216	0,464	0,745	0,724	1,037	0,918	94,384
Относительная деформация при текучести в полоске $\epsilon_t \cdot 10^5$	0,25	1,23	2,474	4,687	7,812	12,57	21,61	42,19	63,28	150

Table 3

Corrected parameters of the damping model for low-carbon steel material

Share of strip area, %	0.875	0.227	0.410	0.216	0.464	0.745	0.724	1.037	0.918	94.384
Relative deformation at yield in the strip $\epsilon_y \cdot 10^5$	0.25	1.23	2.474	4.687	7.812	12.57	21.61	42.19	63.28	150

Теперь уместно вспомнить, что модель, которую мы рассматриваем (см. рис. 3, б), имеет не одну, а 124 степени свободы. На рис. 5 приведены графики изменения усилий в трех отмеченных на рис. 3, б стержнях (начальные участки графиков, соответствующие отрезку времени, равному одному периоду первой формы колебаний). С точностью до масштаба они повторяют относительные деформации в этих точках, или напряжения, начальные амплитуды которых составляют 200 МПа. В начале процесса в пластине имеются высокочастотные колебания (рис. 5, а). В течение отрезка времени, равного всего одному периоду первой формы колебаний, они почти полностью затухают. Графики на рис. 5, б представляют усилия в тех же стержнях к концу 50-го периода формы колебаний. Как видно, это уже три плавные кривые, соответствующие колебаниям по основной форме. Все перечисленные особенности хорошо характеризуют модель внутреннего трения, которую мы рассматриваем с той точки зрения, что при произвольном начальном воздействии в системе возбуждаются все формы колебаний, но скоро остается лишь первая форма, соответствующая самой маленькой частоте.

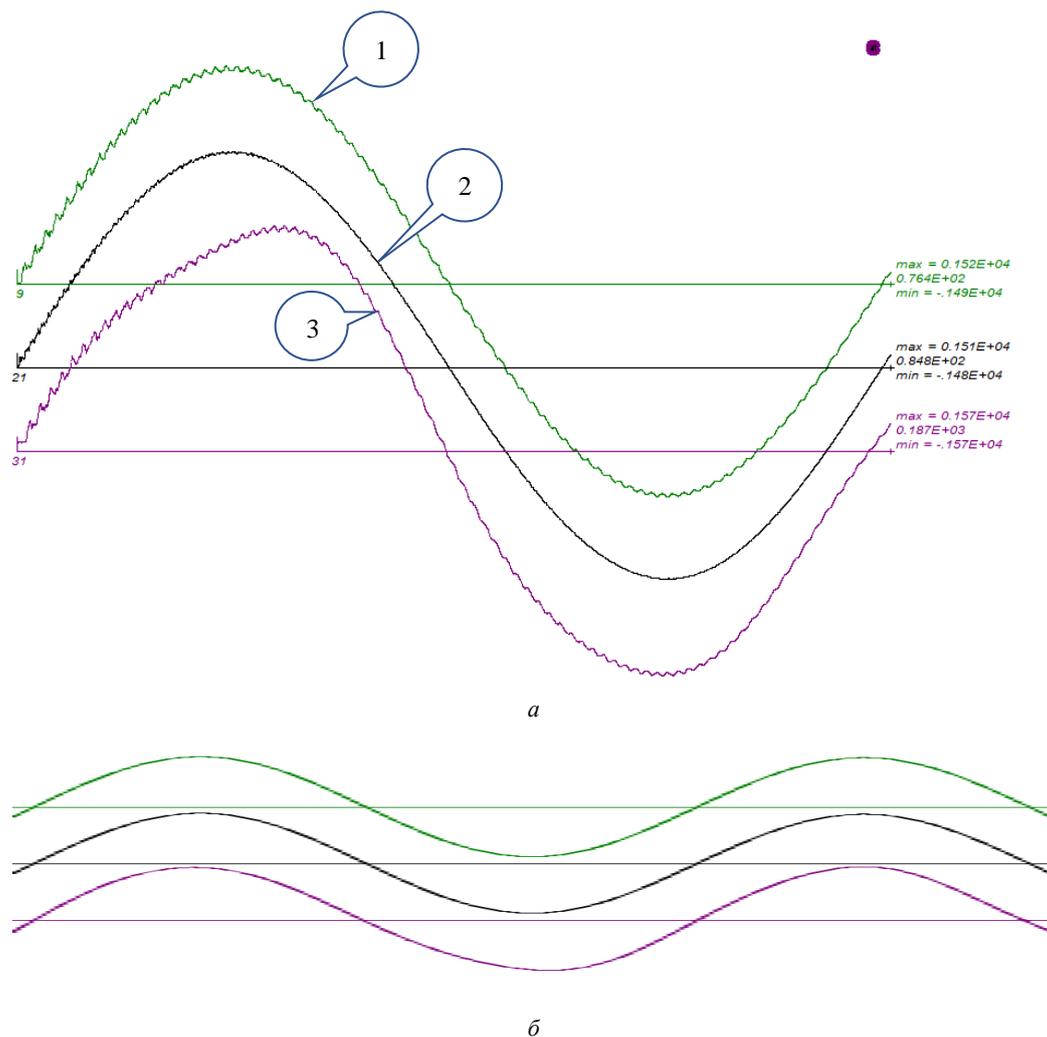


Рис. 5. Графики усилий в трех стержнях модели Ржаницына:
a – первое колебание; *б* – колебание на 50-м периоде
Figure 5. Graphs of forces in the three rods of the Rzhantsyn model:
a – the first oscillation; *б* – oscillation at the 50th period

Теперь рассмотрим ту же систему, но изменим воздействие. Начальные скорости нижних точек стержня-пластины (см. рис. 3, б) направим по горизонтали вдоль оси x и примем значение начальной скорости равным 100 см/с. Этот пример мы приводим для демонстрации различных возможностей модели демпфирования на основании обобщенной модели Прандтля для геометрически и физически нелинейных задач. Скорости остальных точечных масс, которые имеются во всех узлах расчетной схемы, примем равными нулю. Попутно заметим, что масса самой пластинки составляет 1,5 кг и крайне мала

по сравнению с сосредоточенной массой на конце стержня-пластины, которая равна 1000 кг. Из-за малости массы пластины решено ей пренебречь в расчетной схеме, приведенной на рис. 3, в. Все остальные параметры задачи сохранены. Параметры затухания взяты из табл. 3.

На рис. 6, а представлены графики изменения усилий в трех стержнях схемы, пронумерованных на рис. 3, б. Рассмотрен отрезок времени, равный 1 с. Как видно, начальное воздействие в этом случае оказалось настолько большим, что во всех трех выбранных стержнях модели Ржаницына наступала глобальная текучесть (напряжения во всех полосках превышали пределы текучести). В начальный момент времени стержень 1 испытывает существенное пластическое удлинение (см. рис. 6, а), этому соответствует интенсивная потеря энергии движения в системе. Учет такого рода явлений существенен для сейсмических расчетов. На рис. 6, б в натуральную величину показана пластина-стержень с учетом остаточных деформаций после затухания колебаний. В системе в этот момент имеются как остаточные деформации, так и остаточные напряжения.

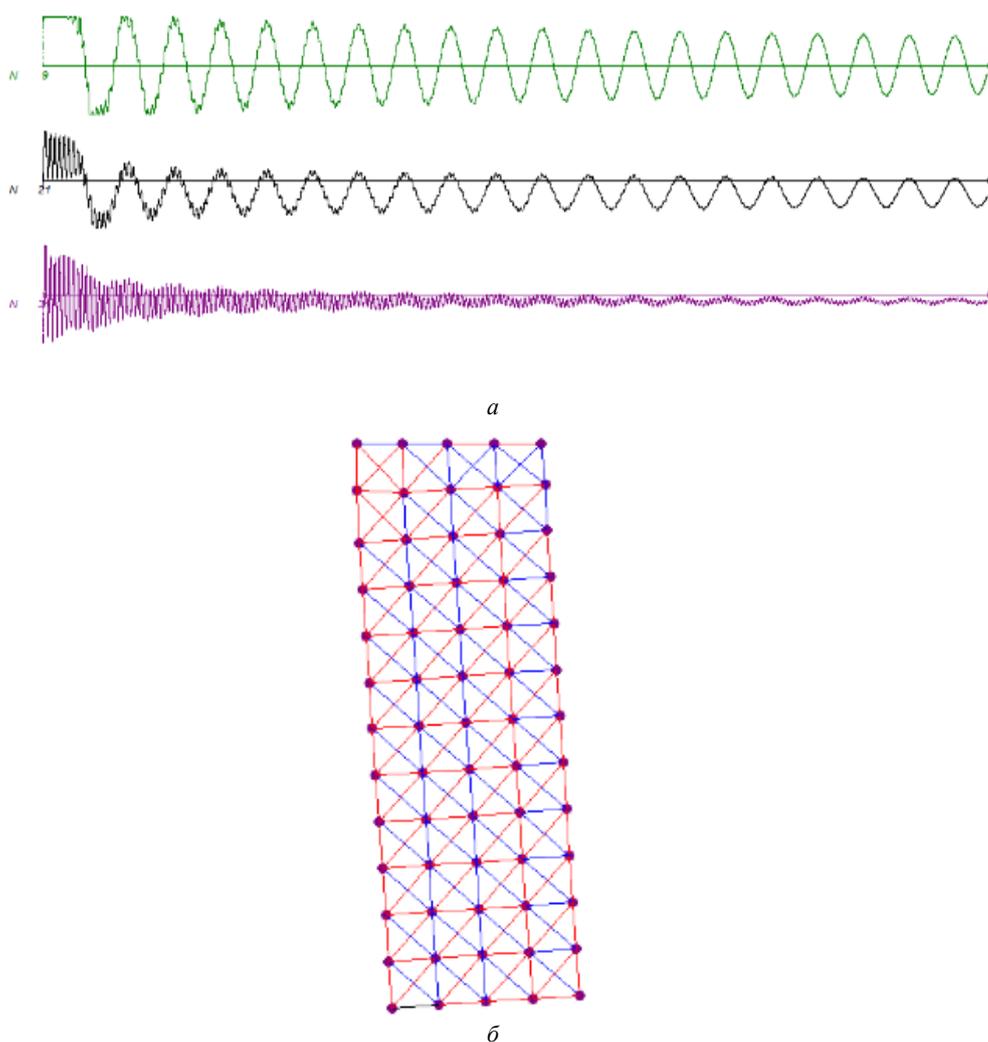


Рис. 6. Затухающие нелинейные колебания стержня-пластины при задании начальной скорости узлам системы по горизонтали:
а – изменение усилий в трех стержнях; б – большие остаточные перемещения системы в натуральном масштабе

Figure 6. Damping nonlinear oscillations of the rod-plate when the initial velocity is given to the system nodes horizontally:
а – change of forces in the three rods; б – large residual movements of the system in the natural scale

Интерес представляет затрата машинного времени на решение. Моделирование одной секунды динамического процесса в последнем примере на обычном компьютере с тактовой частотой 3,2 ГГц составляет 182 с процессорного времени, причем около половины этого времени тратится на учет внутреннего трения.

Для всех приведенных решений выполнялся контроль сходимости по временному шагу. В табл. 4 приведены значения усилия в стержнях 1, 2, 3 в момент времени $t = 0,8$ с. При последовательном уменьшении шага интегрирования Δt видно, что сходимость решения хорошая. Сходимость по перемещениям традиционно лучше, чем по усилиям. На основании приведенных в табл. 4 данных можно сделать заключение о том, что интегрирование по времени выполнено правильно и наше исследование представляет именно изучение погрешности демпфирования, а не погрешность численного решения.

Таблица 4

Проверка сходимости решения при уменьшении шага интегрирования

Δt , с	0,00000059028	0,00000029514	0,000000147572
Усилие в стержне 1, Н	-12266,44	-12267,65	-12267,65
Усилие в стержне 2, Н	-11086,16	-11086,37	-11086,31
Усилие в стержне 3, Н	-2974,39	-2974,83	-2974,80

Table 4

Verification of the solution convergence while reducing the integration step

Δt , s	0.00000059028	0.00000029514	0.000000147572
Force in the rod 1, N	-12266.44	-12267.65	-12267.65
Force in the rod 2, N	-11086.16	-11086.37	-11086.31
Force in the rod 3, N	-2974.39	-2974.83	-2974.80

4. Заключение

Предложен вариант учета внутреннего трения для динамических задач двумерной сплошной среды с использованием стержневой аппроксимации по А.Р. Ржаницыну. Рассматриваемая модель является частотно-независимой, учитывает сильное изменение сил демпфирования с изменением уровня амплитудных напряжений, применима к линейным и нелинейным задачам, ориентирована на явные численные вычислительные схемы решения задач динамики.

Путем анализа структуры дискретной среды А.Р. Ржаницына рассмотрена изотропность свойств демпфирования. Определены восемь направлений, в которых эти свойства будут выполняться точно.

Путем решения тестового примера выполнено сравнение затухания колебаний в одномерном стержне и двумерной пластинке при ее одноосном растяжении. Амплитуды затухающих колебаний имели отличие до 15 %. Предложен приближенный вариант уточнения расчетной модели применительно к пластинке. Продемонстрировано применение модели для физически и геометрически нелинейной задачи.

Список литературы

1. Зылев В.Б., Григорьев Н.А. Обобщенная модель Прандтля для учета сил внутреннего трения // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 11. С. 58–62.
2. Зылев В.Б., Платнов П.О. Использование точек покоя при экспериментальном изучении внутреннего трения в материале // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 5. С. 399–404. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-399-404>
3. Зылев В.Б., Платнов П.О. Экспериментальное исследование зависимости параметров демпфирования от начальной пластической деформации, уровня напряжений и частоты // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли РФ в 2019 году: в 2 томах. Том 2. М.: Изд-во АСВ, 2020. С. 197–203.
4. Зылев В.Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М.: Инженер, 1999. 145 с.
5. Зылев В.Б., Алферов И.В. Динамические опорные реакции в двухпролетной мостовой ферме при действии подвижной нагрузки // Строительство и реконструкция. 2019. № 2. С. 20–25. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-82-2-20-25>
6. Зылев В.Б., Алферов И.В. Исследование динамических усилий в элементах пролетного строения при торможении // Актуальные проблемы и перспективы развития строительных конструкций: инновации, модернизация и энергоэффективность в строительстве: материалы международной научно-практической конференции, Алматы, 14–15 декабря 2016 г. Алматы: Казахская головная архитектурно-строительная академия, 2016. С. 96–99.

7. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
8. Александров А.В., Потанов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика: в 2 книгах. Книга 2. Динамика и устойчивость упругих систем / под ред. А.В. Александрова. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.
9. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 193 с.
10. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 154 с.
11. Малышев А.П. Построение модели частотно-независимого демпфирования по амплитудной характеристике коэффициента поглощения // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. № 1. С. 134–141.
12. Гребенюк Г.И., Роев В.И. О расчете диссипативных систем с частотно-независимым внутренним трением // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2002. № 7. С. 21–27.
13. Вронская Е.С. Динамический расчет призматических систем с учетом внутреннего трения // Градостроительство и архитектура. 2017. № 3. С. 24–27.
14. Scerrato D., Giorgio I., Madeo A., Darve F., Limam A. A simple non-linear model for internal friction in modified concrete // International Journal of Engineering Science. 2014. Vol. 80. Pp. 136–152. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.021>
15. Nicanor C., Ramona C.N., Petrica V., Iulian I., Maricel A. Experimental and theoretical results concerning internal friction investigation of a shape memory alloy based on copper // Metalurgia International. 2010. Vol. 15. No. 12. Pp. 48–58.
16. Малышев А.П. Моделирование интенсивного амплитудно-зависимого внутреннего демпфирования динамических процессов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 2. С. 103–108.
17. Малышев А.П. Модель конструкционного демпфирования колебаний с остаточными деформациями // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. № 2. С. 16–20.
18. Malygin G.A. Amplitude-dependent internal friction and similarity of temperature dependences of microflow and macroflow stresses of a crystal // Physics of the Solid State. 2000. Vol. 42. Pp. 706–711. <https://doi.org/10.1134/1.1131276>
19. Назаров В.Е., Колпаков А.Б. Эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения в низкочастотном стержневом резонаторе из отожженной поликристаллической меди // Журнал технической физики. 2021. Т. 91. № 9. С. 1305–1315. <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.09.51208.21-21>
20. Зылева Н.В. Обобщенная модель Ржаницына А.Р. для решения динамических задач // Вычислительная механика деформируемого тела: труды международной научно-технической конференции: в 2 томах. Том 1. М.: МИИТ, 2006. С. 189–191.

References

1. Zylev V.B., Grigorev N.A. Generalized Prandtl model for the account of internal friction forces. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2011;(11):58–62. (In Russ)
2. Zylev V.B., Platnov P.O. The use of fixed points in experimental research of the internal friction of material. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):399–404. (In Russ) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-399-404>
3. Zylev V.B., Platnov P.O. Experimental research of the dependence of damping parameters on the initial plastic deformation, stress level and frequency. *Fundamental, Exploratory and Applied Research of the RAASN on Scientific Support for the Development of Architecture, Urban Planning and Construction Industry of the Russian Federation in 2019* (vol. 2, p. 197–203). Moscow: ASV Publ.; 2020. (In Russ.)
4. Zylev V.B. *Computational methods in nonlinear structural mechanics*. Moscow: Engineer Publ.; 1999. (In Russ.)
5. Zylev V.B., Alferov I.V. Study of the dynamic support reactions in the two-span bridge farm under action of moving load. *Construction and Reconstruction*. 2019;(2):20–25. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-82-2-20-25>
6. Zylev V.B., Alferov I.V. Investigation of dynamic forces in superstructure elements during braking. *Actual Problems and Prospects of Development of Building Structures: Innovations, Modernization and Energy in Construction: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Almaty 14–15 December 2016*. Almaty: Kazakh Head Architectural and Construction Academy; 2016. p. 96–99. (In Russ.)
7. Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D. *Mathematical theory of plasticity*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2003. (In Russ.)
8. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Zylev V.B. *Structural mechanics. Book 2. Dynamics and stability of elastic systems*. Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 2008. (In Russ.)
9. Panovko Ya.G. *The internal friction at oscillations of elastic systems*. Moscow: Izdatel'skij Dom Fiziko-Matematicheskoy Literatury Publ.; 1960. (In Russ.)
10. Sorokin E.S. *On the theory of internal friction at oscillations of elastic systems*. Moscow: Gosstroyizdat Publ.; 1960. (In Russ.)
11. Malyshev A.P. Modeling of frequency-independent damping based on the amplitude characteristic of absorption coefficient. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003;67(1):134–141. (In Russ.)
12. Grebenyuk G.I., Roev V.I. On the calculation of dissipative systems with frequency-independent internal friction. *News of Higher Educational Institution. Construction*. 2002;(7):21–27. (In Russ.)

13. Vronskaya E.S. Dynamic calculation of prismatic systems taking into account internal friction. *Urban Construction and Architecture*. 2017;(3):24–27. (In Russ.)
14. Scerrato D., Giorgio I., Madeo A., Darve F., Limam A. A simple non-linear model for internal friction in modified concrete. *International Journal of Engineering Science*. 2014;80:136–152. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.021>
15. Nicanor C., Ramona C.N., Petrica V., Iulian I., Maricel A. Experimental and theoretical results concerning internal friction investigation of a shape memory alloy based on copper. *Metalurgia International*. 2010;15(12):48–58.
16. Malyshev A.P. Modeling of intensive amplitude-dependent internal damping of dynamic processes. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2003;(2):103–108. (In Russ.)
17. Malyshev A.P. Model of structural damping of oscillations with residual deformations. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2007;(2):16–20. (In Russ.)
18. Malygin G.A. Amplitude-dependent internal friction and similarity of temperature dependences of microflow and macroflow stresses of a crystal. *Physics of the Solid State*. 2000;42:706–711. <https://doi.org/10.1134/1.1131276>
19. Nazarov V.E., Kolpakov A.B. Effects of amplitude-dependent internal friction in a low-frequency rod resonator made of annealed polycrystalline copper. *Technical Physics*. 2021;91(9):1305–1315. (In Russ.) <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.09.51208.21-21>
20. Zyleva N.V. Generalized model of A.R. Rzhanitsyn for solving dynamic problems. *Computational Mechanics of Deformable Solids: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference* (vol. 1, p. 189–191). Moscow: MIIT Publ.; 2006. (In Russ.)



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177

EDN: LUJBRU

УДК 69.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Модели нелинейного деформирования бетона при трехосном напряженном состоянии и их реализация в вычислительном комплексе ПРИНС

В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{1,2}, К.Р. Айдемиров³

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

³Дагестанский государственный технический университет, Махачкала, Российская Федерация

✉ agapovpb@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 15 января 2023 г.

Доработана: 25 марта 2023 г.

Принята к публикации: 30 марта 2023 г.

Аннотация. Современные строительные нормы и правила предписывают проводить расчеты бетонных и железобетонных конструкций в нелинейной постановке с учетом реальных свойств бетона и арматуры. При этом большинство отечественных конечноэлементных программных комплексов не позволяют выполнять такие расчеты в нелинейной постановке с учетом пластических деформаций бетона и арматуры. Для устранения этой проблемы разработана методика и построен объемный конечный элемент, адаптированный к вычислительному комплексу ПРИНС, позволяющий выполнять расчеты железобетонных конструкций с учетом их действительной работы. Цель исследования – разработка и реализация методики расчета железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния с учетом как хрупкого разрушения, так и упругопластического деформирования бетона. Представлены конечноэлементная методика, алгоритм и программа расчета массивных железобетонных конструкций с учетом пластических деформаций бетона. В своей основе методика использует модифицированный критерий прочности Виллама и Варнке, дополненный критерием течения. Рассмотрены две модели объемного деформирования бетона: упругая модель при хрупком разрушении и идеально упругопластическая модель. Построен восьмиузловой конечный элемент с линейными аппроксимирующими функциями перемещений, реализующий указанные модели деформирования. Верификационные расчеты массивной бетонной конструкции в условиях трехосного сжатия свидетельствуют о точности и сходимости разработанных конечных элементов. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач, связанных с расчетами строительных конструкций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, строительные конструкции, массивные железобетонные сооружения, физическая нелинейность, пластичность, теория течения, механика деформируемых тел

Для цитирования

Агапов В.П., Маркович А.С., Айдемиров К.Р. Модели нелинейного деформирования бетона при трехосном напряженном состоянии и их реализация в вычислительном комплексе ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 162–177. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177>

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор, профессор департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-1749-5797; agapovpb@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, кандидат технических наук, доцент, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-3967-2114; markovich-as@rudn.ru

Айдемиров Курбан Рабаданович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теоретической и строительной механики, Дагестанский государственный технический университет, Махачкала, Российская Федерация; ORCID:0009-0005-1474-4275; kyrayd@mail.ru

© Агапов В.П., Маркович А.С., Айдемиров К.Р., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Models of nonlinear deformation of concrete in a triaxial stress state and their implementation in the PRINS computational complex

Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich^{1,2}, Kurban R. Aidemirov³

¹RUDN University, Moscow, Russian Federation

²National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

³Daghestan State Technical University, Makhachkala, Russian Federation

✉ agapovpb@mail.ru

Article history

Received: January 15, 2023

Revised: March 25, 2023

Accepted: March 30, 2023

Abstract. Modern construction standards and regulations prescribe to carry out calculations of concrete and reinforced concrete structures in a nonlinear formulation with account of the real properties of concrete and reinforcement. However, the most of finite-element program complexes cannot perform such calculations in a nonlinear formulation with account of plastic deformations of concrete and reinforcement. To solve this problem, a methodology has been developed and a solid finite element adapted to the PRINS computing complex has been created, which made it possible to perform calculations of reinforced concrete structures considering their actual work. The aim of the study – development and implementation of a method for calculating reinforced concrete structures under conditions of a three-dimensional stress state, considering both brittle fracture and elastic-plastic deformation of concrete. A finite-element methodology, algorithm, and program for calculation of massive reinforced concrete structures with account of plastic deformations of concrete have been presented. The methodology is based on the modified Willam and Warnke strength criterion supplemented with the flow criterion. Two models of volumetric deformation of concrete have been regarded: the elastic model at brittle failure and the ideal elastoplastic model. An eight-node finite element with linear approximating functions of displacements implementing the mentioned deformation models is created. Verification calculations of a massive concrete structure in three-axial compression testify to the accuracy and convergence of the developed finite elements. The PRINS can be effectively used by engineers of designing and scientific organizations to solve a wide class of engineering problems related to calculations of building structures.

Keywords: finite element method, building structures, solid reinforced concrete structures, physical nonlinearity, plasticity, flow theory, mechanics of deformable solids

For citation

Agapov V.P., Markovich A.S., Aidemirov K.R. Models of nonlinear deformation of concrete in a triaxial stress state and their implementation in the PRINS computational complex. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):162–177. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177>

1. Введение

Современные строительные нормы и правила, принятые в Российской Федерации¹ и за рубежом², предписывают проводить расчеты железобетонных конструкций в нелинейной постановке с учетом реальных свойств бетона и арматуры. С одной стороны, проблема разработки методики расчета железобетонных конструкций с учетом трехосного напряженного состояния связана с необходимостью проведения дорогостоящих экспериментов [1–5]. С другой – предпосылки для успешного выполнения таких расчетов обусловлены развитием компьютерных технологий и разработкой численных методов строительной механики, в первую очередь метода конечных элементов [6–10]. В результате такого развития нелинейные методы расчета были реализованы в ряде компьютерных программ, таких как NASTRAN [11], ANSYS [12], ABAQUS [13], ADINA [14], DIANA [15] и др. Общим для всех этих программ является использование

Vladimir P. Agapov, Doctor of Engineering, Professor, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1749-5797; agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3967-2114; markovich-as@rudn.ru

Kurban R. Aidemirov, PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Theoretical and Structural Mechanics, Dagestan State Technical University, Makhachkala, Russian Federation; ORCID: 0009-0005-1474-4275; kyrayd@mail.ru

¹ СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения (утв. и введен в действие Приказом Минстрой России от 22.11.2019 № 717/пр) (ред. от 21.01.2022).

² CEB-FIP Model Code 1990. CEB Bulletin d'Information № 213/214. Lausanne: Comité Euro-International du Béton, 1993. 437 p.

шаговых методов. Система нелинейных алгебраических уравнений решается методом Ньютона – Рафсона в полной или модифицированной форме. Уравнения равновесия на этапе нагружения записываются в виде

$$\mathbf{K}_j^i \Delta \mathbf{u}_j^i = \mathbf{P}_j - \mathbf{F}_j^{i-1}, \quad (1)$$

где \mathbf{K}_j^i – матрица касательной жесткости; $\Delta \mathbf{u}_j^i$ – вектор узловых перемещений; \mathbf{P}_j – вектор приложенных узловых нагрузок; \mathbf{F}_j^{i-1} – вектор узловых сосредоточенных сил, эквивалентных напряжениям элемента; j – номер шага; i – номер итерации.

Особенностью решения уравнения (1) методом Ньютона – Рафсона является вычисление и факторизация касательной матрицы жесткости на каждой итерации. В случае систем большого порядка такие вычисления могут быть довольно дорогостоящими.

При использовании модифицированного метода Ньютона матрица жесткости вычисляется и факторизуется только один раз в начале шага. Это упрощает вычисления, но требует большего количества итераций для достижения указанной точности. Поэтому для ускорения сходимости используются разные подходы, основанные на коррекции вектора перемещений на текущей итерации. Сделать это можно с помощью энергетических отношений. Такие методы принято называть квазиньютонами [16–18].

Следует, однако, отметить, что расчеты физически нелинейных конструкций в вышеупомянутых программах выполняются с использованием физических соотношений, основанных на определенных экспериментах, а полученные уравнения для конструкции в целом решаются приближенными методами. Для повышения достоверности результатов такие расчеты следует проводить с использованием нескольких программ. Поэтому конструкторы должны иметь в своем арсенале несколько доступных расчетных инструментов. В связи с этим разработка альтернативных вычислительных методов и соответствующих программ до сих пор остается актуальной задачей.

2. Материалы и методы

В данном исследовании рассматривается конечноэлементная методика расчета массивных железобетонных сооружений с учетом трещинообразования в растянутой и пластических деформаций в сжатой зонах бетона и в арматуре. Методика реализована в вычислительном комплексе (ВК) ПРИНС.

Расчет физически нелинейных конструкций с помощью ВК ПРИНС ведется методом конечных элементов в приращениях [8] по уравнению

$$\mathbf{K}_{NL} \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{P}, \quad (2)$$

где \mathbf{K}_{NL} – полная нелинейная матрица жесткости, связывающая приращения узловых сил и перемещений; $\Delta \mathbf{u}$ и $\Delta \mathbf{P}$ – приращения узловых перемещений и узловых сил конечноэлементной модели соответственно.

Матрица \mathbf{K}_{NL} в интервале нагружения непрерывно изменяется, поэтому, чтобы получить точное решение, необходимо в формуле (2) перейти к интегрированию:

$$\int_{u_0}^{u_k} \mathbf{K}_{NL} du = \Delta \mathbf{P}, \quad (3)$$

где u_0 и u_k – значения перемещений в начале и конце интервала нагружения соответственно.

Однако вести вычисления по формуле (3) практически невозможно, так как не существует аналитического выражения для \mathbf{K}_{NL} , а верхняя граница интервала интегрирования неизвестна. Вычисляя вышеупомянутый интеграл по правилу трапеций, получаем

$$\frac{1}{2}(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1)\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P}, \quad (4)$$

где \mathbf{K}_0 и \mathbf{K}_1 – матрицы жесткости, вычисляемые в начале и конце шага нагружения соответственно.

Запишем уравнение (4) в виде

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K})\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P}, \quad (5)$$

где $\Delta\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0)$.

Уравнение (5) решается итерационным способом:

$$\mathbf{K}_0\Delta\mathbf{u}_i = \Delta\mathbf{P} - \Delta\mathbf{K}_{i-1}\Delta\mathbf{u}_{i-1}, \quad (6)$$

где i – номер итерации.

При достижении сходимости итерационного процесса находятся полные значения перемещений и напряжений по формулам

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta\boldsymbol{\sigma}. \quad (7)$$

Приращения напряжений находятся по формуле

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{ep}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8)$$

где \mathbf{C}_{ep} – упругопластическая матрица характеристик материала.

На каждом этапе нагружения анализируется напряженное состояние, и при возникновении пластических деформаций и трещин производится корректировка напряжений с учетом принятых диаграмм деформирования материалов. Это требует проведения процесса уравнивания конструкции. Равновесные итерации выполняются в программе ПРИНС по формуле (1), которая модифицируется к виду

$$\mathbf{K}_j\Delta\mathbf{u}_j^i = \mathbf{P}_j - \mathbf{F}_j^{i-1}. \quad (1a)$$

Различие между формулами (1) и (1a) состоит в том, что в формуле (1) матрица жесткости от итерации к итерации изменяется (имеются в виду итерации равновесия), а в формуле (1a) – не изменяется и берется равной матрице жесткости, найденной в конце шага при итерациях по формуле (6).

Таким образом, в формуле (6) итерируется матрица жесткости, а в формуле (1a) – вектор узловых сил, эквивалентный внутренним напряжениям.

Матрица жесткости \mathbf{K} для отдельного конечного элемента находится по формуле [7]

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}_e \mathbf{B} dV, \quad (9)$$

где \mathbf{B} – матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений (геометрическая матрица); \mathbf{C}_e – матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций (физическая матрица).

Методика вычисления геометрической матрицы \mathbf{B} хорошо известна (см., например, [8]).

При построении физической матрицы принято две модели деформирования бетона:

- 1) упругая модель при хрупком разрушении;
- 2) идеально упругопластическая модель.

Для арматуры принимается гипотеза идеального упругопластического поведения. Ниже приводятся характеристики каждой из рассматриваемых моделей.

Упругая модель при хрупком разрушении (модель 1). Поведение бетона считается линейно-упругим вплоть до достижения поверхности разрушения.

Матрица C_e при этом содержит коэффициенты обобщенного закона Гука и имеет следующий вид:

$$C_e = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{\mu(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В качестве поверхности разрушения принята пятипараметрическая модель, предложенная Вилломом и Варнке [19]. Схематическое изображение поверхности разрушения в пространстве главных напряжений показано на рис. 1. На рис. 2 приведено девиаторное сечение этой поверхности, а на рис. 3 – главные меридианы растяжения и сжатия.

Условие прочности определяется формулой

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \frac{1}{\bar{r}(\sigma_m, \theta)} \frac{\tau_m}{R_b} - 1 = 0, \quad (11)$$

где σ_m и τ_m – средние значения нормальных и касательных напряжений в окрестности точки; θ – угол вида напряженного состояния; $\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{r}{\sqrt{5}R_b}$ – радиус-вектор точки на поверхности разрушения в девиаторном сечении (рис. 2).

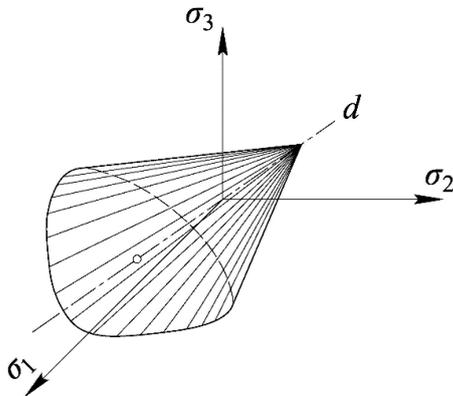


Рис. 1. Поверхность разрушения в пространстве главных напряжений:
 d – гидростатическая ось

Figure 1. Fracture surface in the space of principal stresses:
 d – hydrostatic axis

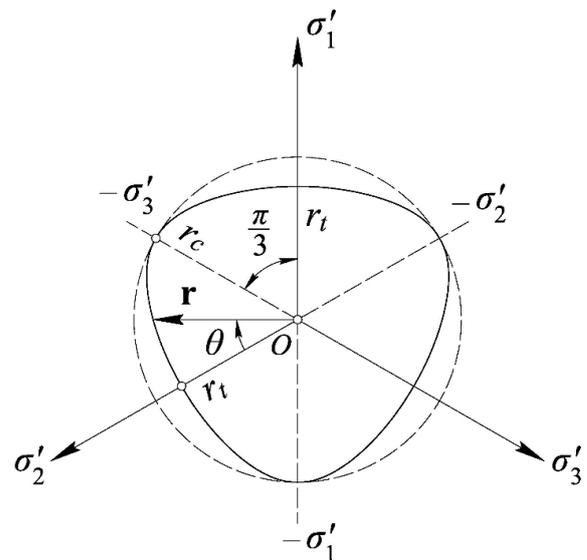


Рис. 2. Девиаторное сечение поверхности разрушения:
 r_t и r_c – меридианы растяжения и сжатия;

θ – угол вида напряженного состояния
Figure 2. Deviatoric section of the fracture surface:
 r_t and r_c – the meridians of tension and compression;
 θ – the angle of the type of the stress state

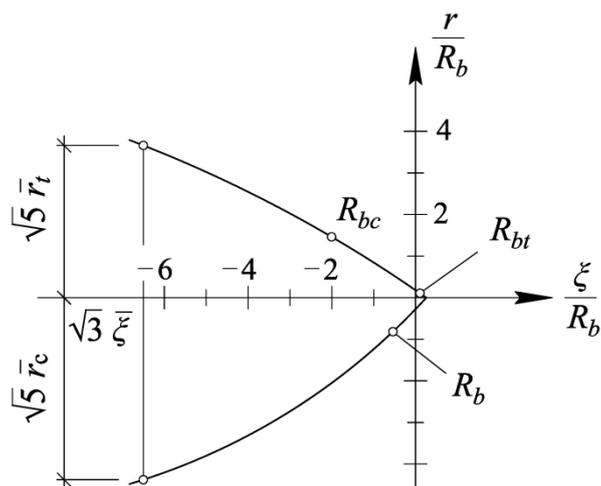


Рис. 3. Меридианы растяжения и сжатия поверхности разрушения:

R_b и R_{bt} – пределы прочности бетона на осевое сжатие и растяжение; R_{bc} – предел прочности бетона на равномерное двухосное сжатие;

$$r = \sqrt{5}\tau_m; \quad \xi = \sqrt{3}\sigma_m$$

Figure 3. The meridians of tension and compression of the fracture surface:

R_b and R_{bt} – ultimate strength of concrete for axial compression and tension; R_{bc} – ultimate strength of concrete for uniform biaxial compression;

$$r = \sqrt{5}\tau_m; \quad \xi = \sqrt{3}\sigma_m$$

Следовательно, при напряжениях, соответствующих разрушению бетона в сжатой зоне,

$$\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{\tau_m}{R_b}. \quad (12)$$

Радиус-вектор $\bar{r}(\sigma_m, \theta)$ определяется формулой

$$\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c)\left[4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c\right]^{1/2}}{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2}. \quad (13)$$

Угол вида напряженного состояния θ находится по формуле

$$\cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\left[2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2}}. \quad (14)$$

Радиус-векторы r_t и r_c (рис. 2) определяют меридианы растяжения ($\theta = 0$) и сжатия ($\theta = \pi/3$). В модели Виллама – Варнке эти меридианы представляются квадратными параболлами:

$$\frac{\tau_{m,t}}{R_b} = r_t = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{R_b} + a_2 \left(\frac{\sigma_m}{R_b}\right)^2; \quad \frac{\tau_{m,c}}{R_b} = r_c = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{R_b} + b_2 \left(\frac{\sigma_m}{R_b}\right)^2. \quad (15)$$

Коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и b_0 , b_1 , b_2 определяются на основе экспериментальных данных для конкретных марок бетона. Необходимые данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Определение параметров модели Виллама – Варнке

Вид напряженного состояния	Критерий	Напряжения	Угол θ
1. Одноосное сжатие	R_b	$\sigma_3 = -R_b; \sigma_1 = \sigma_2 = 0$	0
2. Одноосное растяжение	R_{bt}	$\sigma_1 = R_{bt};$ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0;$ $\bar{R}_{bt} = \frac{R_{bt}}{R_b}$	0
3. Равномерное двухосное сжатие	R_{bc}	$\sigma_1 = \sigma_2 = -R_{bc}; \sigma_3 = 0;$ $\bar{R}_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_b} = 1,2$	0
4. Трехосное сжатие в режиме высокой компрессии ($\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2, \theta = 0$)	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_1;$ $\bar{\xi}_1 > 0; \frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_1$	$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0;$ $\bar{\xi}_1 = 3,67^*; \bar{r}_1 = 1,59^*$	0
5. Трехосное сжатие в режиме низкой компрессии ($\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$)	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_2;$ $\bar{\xi}_2 > 0; \frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_c$	$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0;$ $\bar{\xi}_c = 3,67^*; \bar{r}_c = 1,94^*$	$\pi/3$

Примечание: * согласно результатам экспериментов Лоне и Гашона [20].

Table 1

Determination of the parameters of the Willam – Warnke model

Type of stress state	Criterion	Stresses	Angle θ
1. Uniaxial compression	R_b	$\sigma_3 = -R_b; \sigma_1 = \sigma_2 = 0$	0
2. Uniaxial tension	R_{bt}	$\sigma_1 = R_{bt};$ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0;$ $\bar{R}_{bt} = \frac{R_{bt}}{R_b}$	0
3. Uniform biaxial compression	R_{bc}	$\sigma_1 = \sigma_2 = -R_{bc}; \sigma_3 = 0;$ $\bar{R}_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_b} = 1,2$	0
4. Triaxial compression in high compression mode ($\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2, \theta = 0$)	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_1;$ $\bar{\xi}_1 > 0; \frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_1$	$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0;$ $\bar{\xi}_1 = 3,67^*; \bar{r}_1 = 1,59^*$	0
5. Triaxial compression in low compression mode ($\sigma_3 > \sigma_1 = \sigma_2, \theta = \pi/3$)	$\frac{\sigma_m}{R_b} = -\bar{\xi}_c;$ $\bar{\xi}_c > 0; \frac{\tau_m}{R_b} = \bar{r}_c$	$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0;$ $\bar{\xi}_c = 3,67^*; \bar{r}_c = 1,94^*$	$\pi/3$

Note: * according to the experimental results of Launay and Gachon [20].

Подставляя, приведенные в табл. 1 значения, отвечающие пяти различным напряженным состояниям, в первое уравнение (15) для меридиана растяжения ($\theta = 0$), получим систему трех квадратных уравнений, решение которой позволяет найти значения параметров a_0 , a_1 , a_2 для данного меридиана:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3} \bar{R}_{bc} a_1 - \frac{4}{9} \bar{R}_{bc}^2 a_2 + \sqrt{\frac{2}{15}} \bar{R}_{bc}; \\ a_1 &= \frac{1}{3} (2\bar{R}_{bc} - \bar{R}_{bt}) a_2 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\bar{R}_{bt} - \bar{R}_{bc}}{2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt}}; \\ a_2 &= \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} \bar{\xi}_t (\bar{R}_{bt} - \bar{R}_{bc}) - \sqrt{\frac{6}{5}} \bar{R}_{bt} \bar{R}_{bc} + \bar{r}_t (2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt})}{(2\bar{R}_{bc} + \bar{R}_{bt}) \left(\bar{\xi}_t^2 - \frac{2}{3} \bar{R}_{bc} \bar{\xi}_t + \frac{1}{3} \bar{R}_{bt} \bar{\xi}_t - \frac{2}{9} \bar{R}_{bt} \bar{R}_{bc} \right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Вершина поверхности разрушения находится из условия $r(\sigma_m) = 0$. Следовательно, $a_2 \rho^2 + a_1 \rho + a_0 = 0$. Откуда ее координата равна

$$\rho = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}. \quad (17)$$

Аналогичным образом можно получить значения параметров b_0 , b_1 , b_2 для меридиана сжатия при $\theta = \pi/3$:

$$\begin{aligned} b_0 &= -\rho b_1 - \rho^2 b_2; \quad b_1 = \left(\bar{\xi}_c + \frac{1}{3} \right) b_2 + \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} - 3r_c}{3\bar{\xi}_c - 1}; \\ b_2 &= \frac{r_c \left(\rho + \frac{1}{3} \right) - \sqrt{\frac{2}{15}} (\bar{\xi}_c + \rho)}{(\bar{\xi}_c + \rho) \left(\bar{\xi}_c - \frac{1}{3} \right) \left(\rho + \frac{1}{3} \right)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Поверхность разрушения является выпуклой, если соблюдаются условия

$$a_0 > 0; \quad b_0 > 0; \quad a_1 \leq 0; \quad b_1 \leq 0; \quad a_2 \leq 0; \quad b_2 \leq 0 \quad (19)$$

и

$$\frac{r_t(\sigma_m)}{r_c(\sigma_m)} > \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Идеально упругопластическая модель (модель 2). Поведение бетона считается линейно-упругим вплоть до достижения предельной поверхности. В качестве предельной поверхности принимается пяти-параметрическая поверхность Виллама – Варнке, описанная выше. При достижении этой поверхности поведение бетона становится упругопластическим.

Если поверхность текучести ассоциирована с предельной поверхностью, то закон пластического течения записывается в виде

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (21)$$

где $d\lambda$ – положительный скалярный коэффициент, который отличен от нуля при наличии пластических деформаций.

Как известно, приращение упругих деформаций равно

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (22)$$

Согласно обобщенному закону Гука, приращения напряжений связаны с приращением упругих деформаций соотношением

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e. \quad (23)$$

Подставляя (22) в уравнение (23) с учетом соотношения (21), находим вектор приращения напряжений:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{a}), \quad (24)$$

где $\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ представляет собой вектор нормали к поверхности текучести (вектор течения).

Для случая идеальной упругопластичности справедливо уравнение

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T \mathbf{C}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{a}) = 0. \quad (25)$$

Откуда получим значение множителя $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_e \mathbf{a}}. \quad (26)$$

В этом случае формула (8) принимает вид

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \left(\mathbf{C}_e - \mathbf{C}_e \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{C}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_e \mathbf{a}} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \mathbf{C}_e \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{C}_e}{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_e \mathbf{a}} \quad (28)$$

есть упругопластическая матрица бетона.

Для вычисления матрицы \mathbf{C}_{ep} необходимо определить вектор течения \mathbf{a} .

Таким образом, задача сводится к дифференцированию функции (11). Используя правило дифференцирования сложных функций, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \tau_m} \frac{\partial \tau_m}{\partial \sigma} \quad (29)$$

Найдем производные, входящие в формулу (29).

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = -\frac{\tau_m}{R_b} \frac{1}{\bar{r}^2}. \quad (30)$$

Формулу (13) представим в виде

$$\bar{r}(\sigma_m, \theta) = \frac{s+t}{v}, \quad (31)$$

где

$$s(\sigma_m, \theta) = 2(r_c^3 - r_c r_t^2) \cos \theta;$$

$$t(\sigma_m, \theta) = r_c (2r_t - r_c) \left[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2};$$

$$v(\sigma_m, \theta) = 4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + (r_c - 2r_t)^2. \quad (32)$$

Тогда

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \sigma_m} = \frac{v \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma_m} + \frac{\partial t}{\partial \sigma_m} \right) - (s+t) \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma_m} \right)}{v^2}, \quad (33)$$

где

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma_m} = 2 \cos \theta \left[(3r_c^2 - r_t^2) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_m} - 2r_c r_t \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_m} \right]; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \sigma_m} = & \left[2r_c \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_m} + 2(r_t - r_c) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_m} \right] \left[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2} + \\ & + \frac{(2r_t r_c - r_c^2) \left[(-8r_t \cos^2 \theta + 10r_t - 4r_c) \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_m} + (8r_c \cos^2 \theta - 4r_t) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_m} \right]}{2 \left[4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (35)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma_m} = (8r_t \sin^2 \theta - 4r_c) \frac{\partial r_t}{\partial \sigma_m} + (8r_c \cos^2 \theta + 2r_c - 4r_t) \frac{\partial r_c}{\partial \sigma_m}. \quad (36)$$

Найденные производные – скаляры.

Кроме того,

$$\frac{d\sigma_m}{d\sigma} = \frac{1}{3} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (37)$$

Найдем второе и третье слагаемое формулы (29).

Для вычисления $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta}$ радиус-вектор точки в девиаторной плоскости представим в виде

$$\bar{r}(\theta) = \frac{u(\theta)}{v(\theta)}, \quad (38)$$

где

$$u(\theta) = 2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c) \left[4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2} \quad (39)$$

и

$$v(\theta) = 4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2. \quad (40)$$

Угол вида напряженного состояния определяется формулой (14):

$$\cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\left[2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{30}\tau_m} = \frac{p}{q} \quad (41)$$

при $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Производную $\frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}$ представим в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}. \quad (42)$$

Производная отношения (38) равна

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = \frac{v(\partial u / \partial \theta) - u(\partial v / \partial \theta)}{v^2}, \quad (43)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2r_c(r_c^2 - r_t^2)\sin\theta - r_c(2r_t - r_c) \frac{4(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta\sin\theta}{\left[4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2}} \quad (44)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -8(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta\sin\theta. \quad (45)$$

Производную $\partial\theta/\partial\sigma$ найдем, используя формулу (41):

$$\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = \frac{\partial[\arccos(p/q)]}{\partial\sigma} = -\frac{1}{[1-(p/q)^2]^{1/2}} \frac{q(\partial p/\partial\sigma) - p(\partial q/\partial\sigma)}{q^2}. \quad (46)$$

Производные в числителе формулы (41) равны

$$\frac{\partial p}{\partial\sigma} = [2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad \text{и} \quad \frac{\partial q}{\partial\sigma} = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{1}{\tau_m} \mathbf{s}. \quad (47)$$

Причем

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3} [2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 \quad 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 \quad 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (48)$$

Найдем третье слагаемое формулы (29):

$$\frac{\partial f}{\partial\tau_m} \frac{\partial\tau_m}{\partial\sigma} = \frac{1}{5} \frac{1}{\bar{r}(\sigma_m, \theta) R_b \tau_m} \mathbf{s}. \quad (49)$$

Таким образом, вектор течения \mathbf{a} найден.

Для реализации поставленной задачи разработана программа, адаптированная к ВК ПРИНС.

3. Результаты и обсуждение

В качестве примера рассмотрим расчет на прочность фундаментного блока (рис. 4), подвергнутого осевому давлению и находящегося в условиях трехосного напряженного состояния. Расчетная схема блока при различных значениях параметра сетки конечных элементов приведена на рис. 5. Материал блока – бетон класса В25. Характеристики материала: предел прочности при осевом сжатии $R_b = 18,5$ МПа, предел прочности при осевом растяжении $R_{bt} = 1,55$ МПа, начальный модуль упругости $E_0 = 3 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$. Интенсивность давления принята равной $p = 2$ МПа.

В результате расчета определялась предельная (разрушающая) нагрузка $p_{ult} = kp$, где k – множитель (параметр) нагрузки.

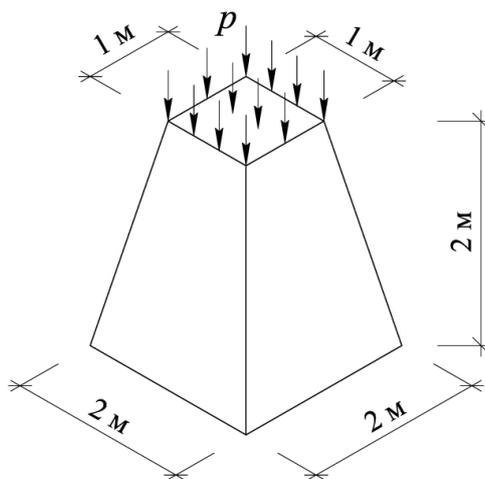


Рис. 4. Расчет фундаментного блока
Figure 4. Calculation of the foundation block

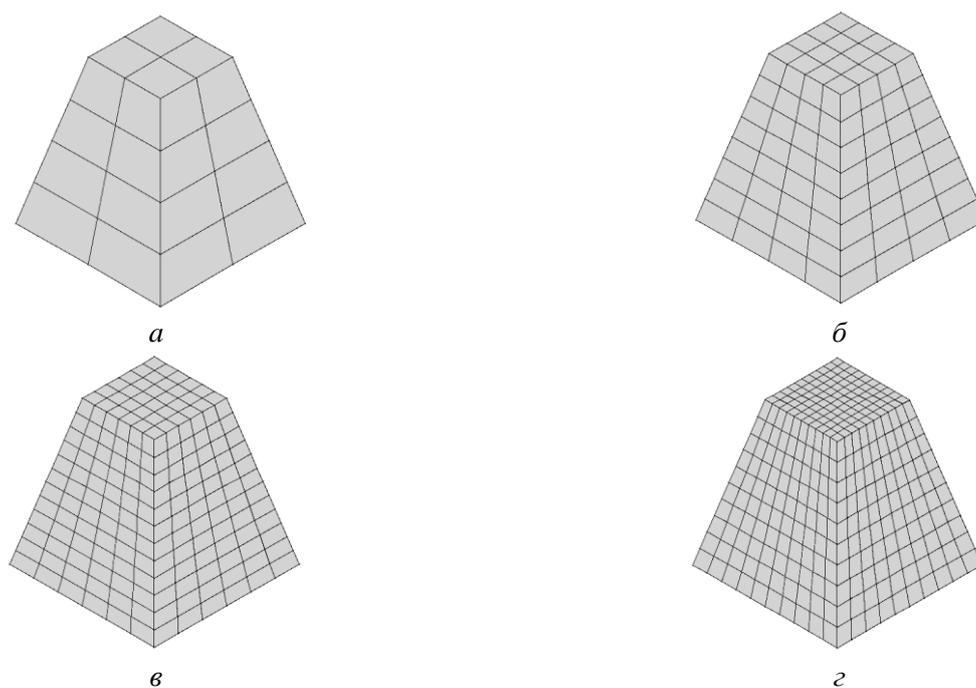


Рис. 5. Конечноэлементные схемы фундаментного блока:
a – схема 2×4; *б* – схема 4×8; *в* – схема 8×16; *г* – схема 16×32
Figure 5. Finite element schemes of the foundation block:
a – scheme 2×4; *б* – scheme 4×8; *в* – scheme 8×16; *г* – scheme 16×32

Расчеты выполнялись шагово-итерационным методом. Коэффициенты к нагрузке на первых семи шагах принимались равными 1,00, на последующих шагах – 0,5 и 0,25 соответственно.

Результаты расчета представлены в табл. 2.

Таблица 2

Значение параметра критической нагрузки

Конечноэлементная схема	Модель деформирования бетона	
	1	2
2×4	14,50	22,25
4×8	15,50	20,00
8×16	13,00	19,00
16×32	12,50	18,50

Table 2

Value of critical load parameter

Finite-element scheme	Model of concrete deformation	
	1	2
2×4	14.50	22.25
4×8	15.50	20.00
8×16	13.00	19.00
16×32	12.50	18.50

Как видно из табл. 2, имеет место сходимость результатов при сгущении сетки конечных элементов, а удовлетворительная точность достигается при размере конечных элементов, равном 1/6 минимального линейного размера конструкции. При этом предельная нагрузка, составляя 25 МПа при хрупком и 37 МПа при пластичном разрушении, оказывается выше предела прочности бетона при осевом сжатии.

Полученные данные вполне соответствует многочисленным экспериментам, показывающим увеличение прочности бетона при трехмерном напряженном состоянии по сравнению с осевым сжатием³ [21–24].

На рис. 6 представлены равновесные кривые для двух моделей деформирования бетона.

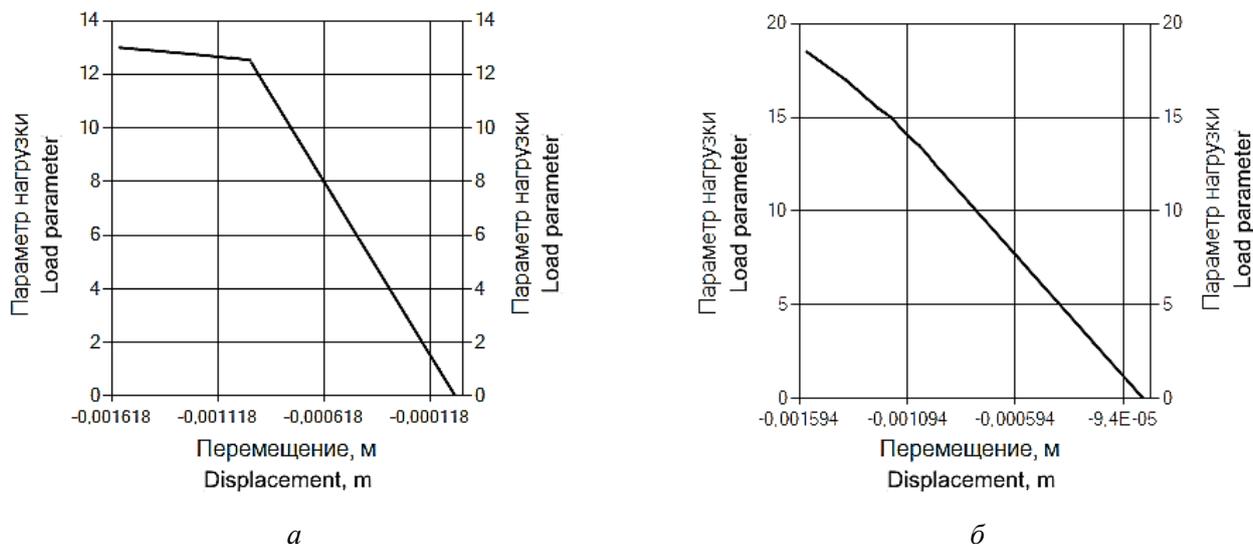


Рис. 6. Равновесные кривые «параметр нагрузки – перемещение» для срединного узла верхней поверхности блока: а – для модели 1; б – для модели 2

Figure 6. Equilibrium curves “load parameter – displacement” for the middle node of the upper surface of the block: а – for model 1; б – for model 2

В случае хрупкой модели деформирования разрушение конструкции происходит в результате раздавливания бетона верхней и средней частей фундаментного блока (рис. 7).

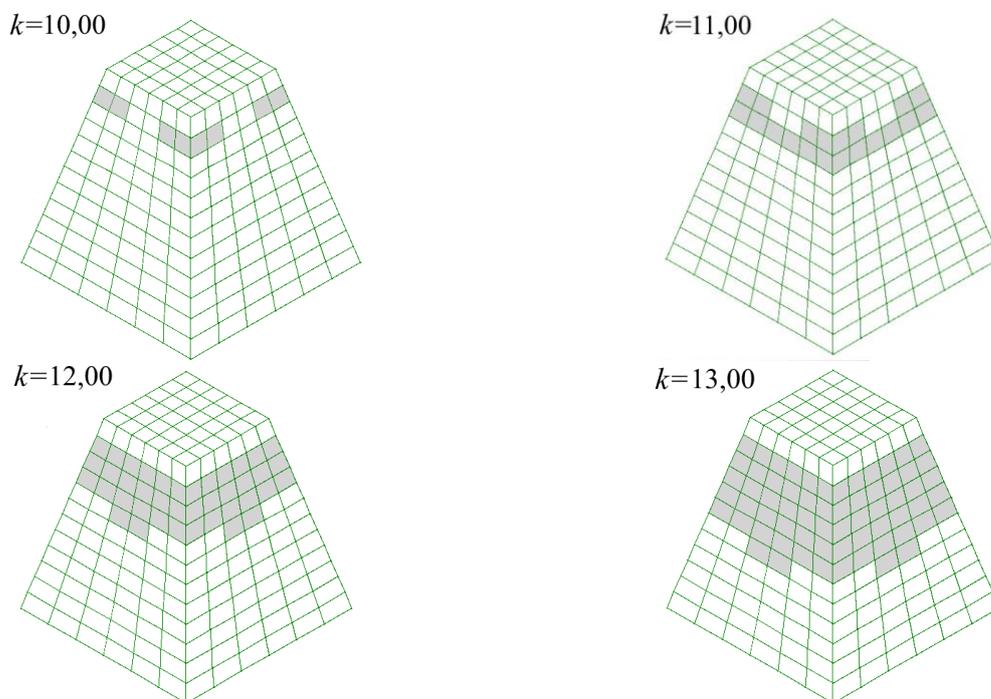


Рис. 7. Схемы разрушения фундаментного блока для модели 1
Figure 7. Schemes of destruction of the foundation block for model 1

³ Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях. М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1985. 72 с.

Поля нормальных напряжений σ_z в момент полного разрушения конструкции ($k = 13,00$) показаны на рис. 8.

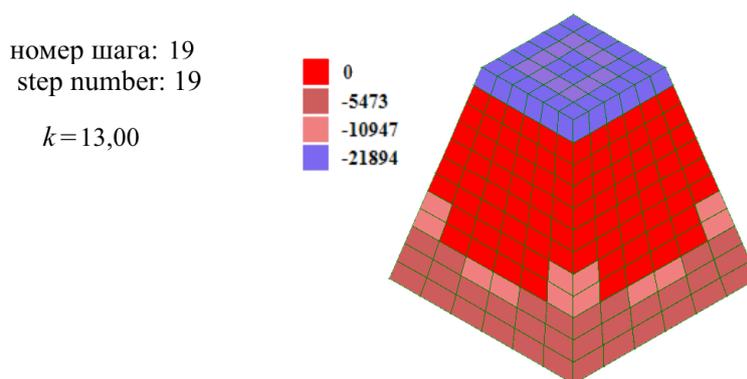


Рис. 9. Поля нормальных напряжений σ_z , МПа, для модели 1 в момент полного разрушения фундаментного блока
Figure 9. Normal stress fields σ_z , МПа, for model 1 at the moment of complete destruction of the foundation block

Таким образом, ВК ПРИНС может эффективно применяться специалистами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач [25–27].

4. Заключение

Рассматриваемые модели деформирования бетона реализованы в вычислительном комплексе ПРИНС. Первая модель ожидаемо показывает заниженное значение предельной нагрузки. Идеально упругопластическая модель деформирования бетона по сравнению с хрупкой моделью разрушения демонстрирует увеличение прочности на 40 %, что отвечает результатам многочисленных экспериментов. Поэтому для получения достоверных результатов расчета бетонных и железобетонных конструкций, находящихся в условиях объемного напряженного состояния, рекомендуется использовать модели деформирования, учитывающие пластическое деформирование бетона.

Список литературы / References

1. Mahmood M.R., Abbas M.M., Mahmood M.M. Linear and Nonlinear 3-d finite element analysis for mat foundations. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021;112:229–242. https://doi.org/10.1007/978-981-15-9399-4_20
2. Hu L., Li S., Zhu J., Yang X. Mathematical model of constitutive relation and failure criteria of plastic concrete under true triaxial compressive stress. *Materials*. 2021;14(1):102. <https://doi.org/10.3390/ma14010102>
3. Wang J., Xie F., Zhang C., Ruan J. Experimental study and failure criterion analysis on combined compression-shear performance of self-compacting concrete. *Materials*. 2020;13(3):713. <https://doi.org/10.3390/ma13030713>
4. Rakic D., Bodić A., Milivojevic N., Dunić V., Živković M. Concrete damage plasticity material model parameters identification. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2021;15:111–122. <https://doi.org/10.24874/jsscm.2021.15.02.11>
5. Al-Brees R.H., Abu Mahadi M.I., Al-Gasham T.S., Naji A.J. Three-dimensional finite element analysis of composite steel – concrete arches. *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*. 2023;11(2):22–35. <http://doi.org/10.21533/pen.v11i2.3448>
6. Agapov V.P. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2005. (In Russ.)
Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2005. 245 с.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element for solid and structural mechanics*. 6th ed. McGraw-Hill; 2005.
8. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. New Jersey: Prentice-Hall; 1976.
9. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons Ltd.; 1977.
10. Oden J.T. *Finite elements in nonlinear continua*. New York: McGraw, Hill Book Company; 1972.
11. *MSC NASTRAN 2016. Nonlinear user's guide SOL 400*. MSC Software; 2016.
12. *ANSYS theory reference. Release 5.6*. Canonsburg, PA: ANSYS Inc.; 1999.
13. *ABAQUS 6.11. Theory manual*. DS Simulia; 2011.
14. *ADINA theory and modeling guide*. Watertown: ADINA R&D, Inc.; 1997.
15. Ferreira D. *DIANA FEA user's manual, release notes, DIANA documentation and verification report*. 31.05.2023.
16. Shanno D.F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*. 1970;24:647–656. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1970-0274029-X>

17. Dennis J.E., More J.J. Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAM Review*. 1977;19(1):46–89. <https://doi.org/10.1137/1019005>
18. Matthies H., Strang G. The solution of nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1979;14:1613–1626.
19. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Proceedings of IABSE, Structural Engineering Report 19*. 1975; III:1–30.
20. Launay P., Gachon H. Strain and ultimate strength of concrete under triaxial stress. *Prestressed Concrete Pressure Vessels. Mathematical-Physical Characterization of Concrete*. Berlin: IASMiRT; 1971. Available from: <http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.20/29024> (accessed: 22.02.2023).
21. Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal, Proceedings*. 1969;66(8):656–666.
22. Mills L.L., Zimmerman R.M. Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. *ACI Journal*. 1970;67(10):802–807.
23. Korsun V.I. Comparative analysis of the strength criteria for concrete. *Modern Industrial and Civil Construction*. 2014;10(1):65–78. (In Russ.)
24. Корсун В.И., Недорезов А.В., Макаренко С.Ю. Сопоставительный анализ критериев прочности для бетонов // Современное промышленное и гражданское строительство. 2014. Т. 10. № 1. С. 65–78.
25. Hansen T.C. *Triaxial test with concrete and cement paste. Report No. 319*. Lyngby: Technical University of Denmark; 1995.
26. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007>
27. Agapov V.P., Markovich A.S. Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):380–389. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>
28. Агапов В.П., Маркович А.С. Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 380–389. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>
29. Agapov V.P., Markovich A.S. Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):617–627. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627>
30. Агапов В.П., Маркович А.С. Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-671-627>



РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-178-185

EDN: MSYCRF

UDC 69.059

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Strengthening of reinforced concrete structures by composite materials taking into consideration the carbonization of concrete

Vladimir I. Rimshin , Pavel S. Truntov 

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

v.rimshin@niisf.ru

Article history

Received: January 21, 2023

Revised: March 27, 2023

Accepted: March 30, 2023

For citation

Rimshin V.I., Truntov P.S. Strengthening of reinforced concrete structures by composite materials taking into consideration the carbonization of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):178–185. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-178-185>

Abstract. One of the main causes for deterioration of reinforced concrete structures in modern construction is corrosion of reinforcement. Corrosion leads to decrease of adhesion between reinforcement and concrete, formation of cracks and destruction of the protective layer of concrete. All this reduces the load-bearing capacity of reinforced concrete structures. The structures of sludge reservoirs exposed to carbon dioxide were used as an object of the study. The characteristic defects and damages revealed by visual inspection were described. The verification calculation of the considered construction depending on the pH of the medium was performed on the basis of the results of technical inspection and study. The degree of carbon dioxide impact on the considered structures was determined by the phenolphthalein test method, which is based on the color change of acid-base indicator solution on the surface of concrete and reinforced concrete depending on the pH value of its medium. The phenolphthalein test revealed that pH of the medium is less than 8 for the depth more than the thickness of the concrete protective layer. A verification calculation of the considered structure was performed on the basis of the technical inspection results and the conducted research. According to the calculation results, a variant of beam reconstruction and strengthening using external reinforcement based on carbon fibers FibARM 230/150 was proposed. The reconstruction was carried out with account of the carbonized concrete layer.

Keywords: corrosion of reinforcement, technical inspection, calculations of building structures, composite materials, strengthening of building structures

Vladimir I. Rimshin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Housing and Communal Complex, Institute of Environmental Engineering and Mechanization, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0209-7726; v.rimshin@niisf.ru

Pavel S. Truntov, PhD student, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7286-4073; pavel_truntov@mail.ru

© Rimshin V.I., Truntov P.S., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Усиление железобетонных конструкций композитными материалами с учетом карбонизации бетона

В.И. Римшин , П.С. Трунтов 

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация
✉ v.rimshin@niisf.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 21 января 2023 г.

Доработана: 27 марта 2023 г.

Принята к публикации: 30 марта 2023 г.

Для цитирования

Rimshin V.I., Truntov P.S. Strengthening of reinforced concrete structures by composite materials taking into consideration the carbonization of concrete // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 178–185. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-178-185>

Аннотация. В современном строительстве одной из основных причин износа железобетонных конструкций является коррозия арматуры. Из-за нее снижается сцепление арматуры с бетоном, образуются трещины и разрушается защитный слой бетона, вследствие чего снижается несущая способность железобетонных конструкций. Объектами исследования выступили конструкции шламбассейна, которые подвергались воздействию углекислого газа. Описаны характерные дефекты и повреждения, выявленные при визуальном осмотре. Степень воздействия углекислого газа на рассматриваемые конструкции определялась методом фенолфталеиновой пробы, который основан на изменении окраски раствора кислотно-основного индикатора на поверхности бетона и железобетона в зависимости от показателя pH его среды. При проведении фенолфталеиновой пробы выявлено, что pH среды менее 8 на глубине более чем толщина защитного слоя бетона. Выполнен поверочный расчет рассматриваемой конструкции, по результатам которого представлен вариант восстановления и усиления балки с использованием внешнего армирования на основе углеродных волокон FibARM 230/150. Восстановление проводилось с учетом слоя карбонизированного бетона.

Ключевые слова: коррозия арматуры, техническое обследование, расчеты строительных конструкций, композитные материалы, усиление строительных конструкций

1. Introduction

In modern construction, one of the main causes of failure of reinforced concrete structures is corrosion of steel rebars. Due to corrosion, the adhesion between reinforcement and concrete decreases, cracks are formed, and the concrete protective layer is destroyed, which reduces the load-bearing capacity of reinforced concrete structures. One of the main reasons for corrosion of reinforcement is carbonization [1–5]. Carbonation is the change that occurs in portland cement concrete when carbon dioxide CO₂ affects it. Due to the destruction of the concrete due to corrosion of the reinforcement, the structure of the concrete must be restored first, and in the future it may be necessary to strengthen these structures. In this case, one of the most effective ways of strengthening is the use of composite materials for this purpose.

One of the earliest composite materials is single-directional fiberglass, made from continuous glass fibers that are bonded with a polymer matrix. This material was developed by engineer A.K. Burov at the end of the 30s. In the following years this direction was widely developed by the Russian scientists and was connected with the use of composite materials in different areas of science and technique also when repairing and strengthening of building structures [6–7].

At present, composites on the basis of fibers, which are subdivided into carbon, aramid, and fiberglass, are used for repairing and strengthening of building structures. In turn, fibers are made from microfibers, which are further monolithed in a curing polymer (epoxy and polyacrylonitrile resins).

The first experimental studies related to the use of composite materials for repair and reinforcement of reinforced concrete structures were conducted in Germany in 1979. At about the same time composite materials were also used in Japan to reinforce columns by the method of forming clips.

Римшин Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры жилищно-коммунального комплекса, Институт инженерно-экологического строительства и механизации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-0209-7726; v.rimshin@niisf.ru

Трунтов Павел Сергеевич, аспирант, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-7286-4073; pavel_truntov@mail.ru

Composite materials have found wide application in bridge and large-span structures, where they are used as the basic material for reconstruction. This was facilitated by some advantages that are characteristic of composite materials, namely: high corrosion resistance, low weight, high strength (4000 MPa) and tensile modulus of elasticity (245 GPa), the ability to take any required shape depending on the shape of the reinforced structure [8–9].

The world experience of application of composite materials is successful since during service time of reinforced elements there have not been revealed any reaching of limit states of the first and second categories in the external reinforcement. The considered advantages of the applied material allow its use as a material to strengthen the structures of the sludge reservoir.

2. Methods

To conduct the research, we studied silt reservoir structures, which were exposed to carbon dioxide CO_2 , resulting in the formation of calcite CaCO_3 in the body of the structure. This indicates the occurrence of the reaction of carbonization in the body of the reinforced concrete structure (Figure 1) [10–12]:

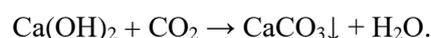
- destruction of the protective layer of concrete beams with bare and corrosive damage to the power reinforcement in the lower zone and support units;
- failure of the adhesion of the working reinforcement to the concrete due to corrosion of the reinforcement and destruction of the concrete;
- longitudinal cracks in the concrete formed because of reinforcement's corrosion.



Figure 1. Corrosion of reinforcing bars in a beam

The method of phenolphthalein testing is based on the change in color of the acid-base indicator's solution on the surface of concrete and reinforced concrete depending on the pH value of its medium [13].

The value of pH of non-carbonized concrete is within the range of 11.5–12.5. At this value, the medium is highly alkaline, which helps protecting the steel reinforcement from corrosion inside the body of the concrete. Carbonation leads to the saturation of concrete pores with carbon dioxide from the air, which causes the neutralization of the main component – “free” calcium hydroxide, according to the reaction:



Phenolphthalein solution is applied to a fresh splinter (saw cut) of concrete made on the structure under investigation. In the range of pH values from 8–10 the color of indicator solution changes from a colorless to crimson (pink-purple), which helps to identify centers of carbonization and allows to determine their actual depth (Figure 2). The absence of coloring of the indicator solution on the surface of the concrete, without visible signs of its corrosion damage during visual control, indicates the absence or a small amount of carbonization [14–15].

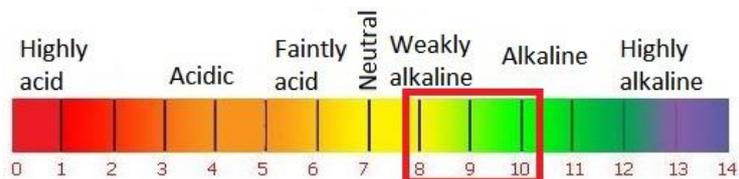


Figure 2. The pH range of color change in phenolphthalein solution

The phenolphthalein test revealed that the pH of the medium was less than 8, to a depth greater than the thickness of the protective layer of concrete (Figure 3). It was used 1% phenolphthalein solution in ethanol to conduct the phenolphthalein assay.



Figure 3. Absence of visible signs of concrete carbonization from the results of phenolphthalein test

Then a verification calculation of the structure was performed. A plan for restoration of the damaged structure was made based on the results of this calculation.

3. Results and analysis

The paper proposes the calculation of strengthening of a reinforced concrete beam by canvas based on carbon fibers FibArmTape 230/150. The purpose of this calculation is to determine the bearing capacity of the beam to evaluate its ability for further operation after restoration works.

The characteristics of FibArmTape 230/150 composite material are shown in Table.

Characteristics of FibArm Tape 230/150

Type of composite material	Estimated thickness, mm	Tensile strength, MPa	Tensile modulus of elasticity, GPa	Square of a monolayer, mm ²
FibArmTape 230/150	0.128	4000	245	19.2

The beam is made of B15 class concrete. The maximum dimensions of the beam are 600×200 mm. The beam is subjected to loads from its own weight, roof slabs, as well as the weight of the roof covering pie – 106.65 kN/m. Figure 4 shows a diagram of bending moments in the beam.

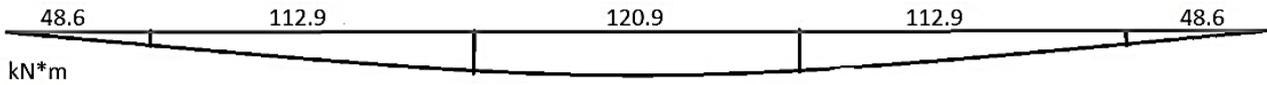


Figure 4. Diagram of bending moments in the beam

The estimated value of tensile strength:

$$R_f = \frac{\gamma_{f1}\gamma_{f2}R_{f,n}}{\gamma_f} = \frac{0,9 \cdot 0,9 \cdot 4000}{1,2} = 2700 \text{ MPa,}$$

where $R_{f,n}$ – the normative value of the tensile strength of the composite material, MPa; γ_f – the coefficient of reliability for the composite material; γ_{f1} – the coefficient of the operating conditions, depending on the type of composite material and operating conditions of the structure; γ_{f2} – the coefficient of operating conditions of the composite material, considering the adhesion of the composite material with the concrete.

When calculating a strengthened structure considering the existing steel reinforcement, the following condition should be fulfilled:

$$R_f \leq (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_s^0)E_f,$$

where ε_{s2} – a coefficient equal to 0.015; ε_s^0 – the initial relative deformation of steel reinforcement before reinforcing of the structure; E_f – the estimated value of modulus elasticity of composite material.

$R_f = 2700 \leq 1225$, the condition is not satisfied, so we take $R_f = 1225$ MPa.

$$\varepsilon_s^0 = \frac{12,09}{0,209 \cdot 71530} 27 = 0,02.$$

The calculation of strength in cross-sections of bendable elements strengthened by external reinforcement from composite materials, should be carried out from the condition:

$$M \leq M_{\text{ult}};$$

$$M_{\text{ult}} = R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A'_s (h_0 - a') + R_f A_f a;$$

$$M = 120,9 \text{ kN} \cdot \text{m} \leq M_{\text{ult}} = 131,1 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

The condition is fulfilled, so we take 1 layer of tape on the bottom edge of the beam. Also, the calculation of the bending element by inclined sections on the action of transverse forces (Figure 5) was carried out. The calculation was carried out basing on the following condition:

$$Q \leq Q_b + Q_{sw} + Q_{fw},$$

where Q_b – the transverse force taken up by the concrete in the inclined cross-section; Q_{sw} – the transverse force taken by the steel transverse reinforcement installed in the sloping cross-section with a step of s_w ; Q_{fw} – transverse force taken by the composite transverse reinforcement in the sloping section and determined by the formula

$$Q_{sw} = \psi_f \left(\frac{A_{fw} R_{fw} \sin \alpha C_{fw}}{s_f} \right).$$

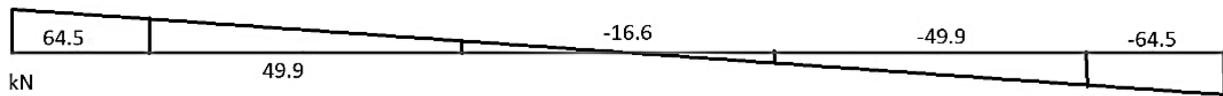


Figure 5. Diagram of transverse forces

By the results of calculations carried out in the software package SCAD in accordance with the procedure BR 63.13330.2018, it was determined that $Q_h = 87.21$ kN, $Q_{sw} = 186.5$ kN, $Q_{fw} = 38.97$ kN. Hence, $Q = 64.5 \leq 87.21 + 186.35 + 38.97 = 312.53$ kN.

According to the calculation, the external transverse reinforcement is not required, therefore, take structurally 3 external clamps of 75 mm wide at three sides of the beam support, at the distance of $L/8$ and $L/4$, to a height of not bringing 20 mm to the top edge of the beam.

4. Conclusion

As a result of the technical inspection and verification calculations, a version of the beams strengthening was made. The scheme of beams restoration and reinforcement is shown in Figure 6.

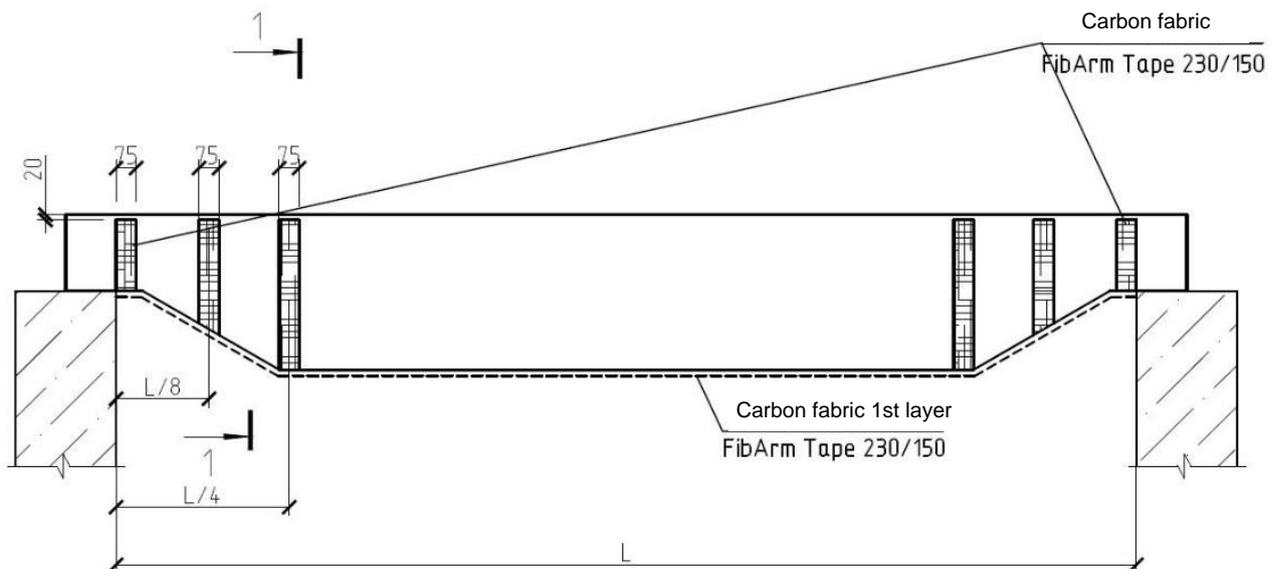


Figure 6. Diagram of beam strengthening using composite materials

The considered approach to the restoration with further strengthening by the composite materials allows to increase the lifetime of the structure as well as to provide the required bearing capacity of the structure for the purpose of further safe operation of the object.

Thus, when the destruction of concrete protective layer and corrosion of reinforcement is detected, the most probable reason is carbonization of concrete with increased impact of CO₂ on the operated structure.

The use of composite materials for construction and restoration of concrete structures makes it possible to minimize the probability of their destruction in the process of their operation.

On the basis of the test results, repairs and restoration of the damaged areas of the concrete were carried out. Removal of the carbonized layer of concrete was performed using a mechanized method. If the depth of carbonation exceeds the thickness of the protective layer of concrete, then the damaged concrete is removed behind the reinforcement.

Scrubbing of the reinforcing bars surface from products of corrosion was carried out using manual metal brushes with further treatment of the bars using corrosion converter. Docker Nittron's neutral tannite-based corrosion inhibitor was used because it does not cause damage to concrete or cement repair mixtures with acidic media, unlike acidic corrosion inhibitors.

References

1. Rimshin V.I., Kurbatov V.L., Ketsko E.S., Truntov P.S. Extile industry building strengthening with external reinforcement with composite materials. *Proceedings of Higher Education Institutions. Textile Industry Technology*. 2021;(6):242–249. (In Russ.) https://doi.org/10.47367/0021-3497_2021_6_242
2. Subbotin A.I., Shutova M.N., Shagina A.I. Analysis of specifics of composite reinforcing use in the foundation of built and reconstructed buildings. *Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering*. 2019;(2):37–48. (In Russ.)
3. Merkulov S.I., Esipov S.M. The use of woven composites for recovery building construction. *Proceedings of Higher Education Institutions. Textile Industry Technology*. 2019;(3):256–259. (In Russ.)
4. Rimshin V.I., Varlamov A.A., Kurbatov V.L., Anpilov S.M. Development of the theory of concrete composite degradation. *Stroitelnye Materialy*. 2019;(6):12–17. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2019-771-6-12-17>
5. Paranchieva N.V., Nazmeeva T.V. Reinforcement of building structures using carbon composite materials. *Magazine of Civil Engineering*. 2010;(2):19–22. (In Russ.)
6. Larionov E.A., Rimshin V.I., Vasilkova N.T. Energy method of estimation of stability of pressed reinforced concrete elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012;(2):77–81. (In Russ.)
7. Merkulov S.I., Tatarenkov A.I., Starodubtsev V.G. Strengthening of reinforced concrete structures of the operated buildings and constructions. *BST: Byulleten Stroitelnoj Tehniki*. 2017;(4):41–43. (In Russ.)
8. Ibragimov R.A., Antakov A.B., Minakhmetova L.R. The determination and comparison of time limits for installation works using metal and composite rebar. *News of the Kazan State University of Architecture and Engineering*. 2017;(2):257–264. (In Russ.)
9. Stepanova V.F., Buchkin A.V., Ilin D.A. The research of the features of concrete structures with a combined reinforcement (reinforcement of composite polymer and a non-metallic fiber). *Academia. Architecture and Construction*. 2017;(1):124–128. (In Russ.)
10. Esfahani M.R., Kianoush M.R., Tajari A.R. Flexural behavior of reinforced concrete beams strengthened by CFRP sheets. *Engineering Structures*. 2007;29(10):2428–2444.
11. Tur V.V., Malyka V.V. Experimental studies of bent concrete elements with combined reinforcement with steel and fiberglass rods. *Herald of Polotsk State University. Series F. Civil Engineering. Applied Sciences*. 2013;(8):58–65. (In Russ.)
12. Huang X., Birman V., Nanni A., Tunis G. *Properties and potential for application of steel reinforced polymer (SRP) and steel reinforced grout (SRG) composites*. Internet. University of Missouri-Rolla; 2003.
13. Mirsayapov I.T., Antakov I.A., Antakov A.B. To the design of the deflections of flexural concrete members reinforced with fiber-reinforced polymer bars. *Vestnik MGSU*. 2021;16(4):413–428. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.4.413-428>
14. Frolov N.V., Smolyago G.A., Poloz M.A. Experimental research of RC beams in combination with glass-plastic bars. *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2017;(1):60–64. (In Russ.) <https://doi.org/10.12737/23298>
15. Neverov A.N., Ketsko E.S., Truntov P.S., Rimshin V.I. Calculating the strengthening of construction structures before the reconstruction of the building. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2022;182:173–179.

Список литературы

1. Римшин В.И., Курбатов В.Л., Кецо Е.С., Трунтов П.С. Усиление конструкций здания текстильной промышленности внешним армированием из композитных материалов // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2021. № 6 (396). С. 242–249. https://doi.org/10.47367/0021-3497_2021_6_242
2. Субботин А.И., Шутова М.Н., Шагина А.И. Анализ специфики использования композитного армирования в фундаментах возводимых и реконструируемых зданий // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2019. № 2 (75). С. 37–48.
3. Меркулов С.И., Есипов С.М. Использование тканых композитов для восстановления строительных // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2019. № 3 (381). С. 256–259.
4. Римшин В.И., Варламов А.А., Курбатов В.Л., Анпилов С.М. Развитие теории деградации бетонного композита // Строительные материалы. 2019. № 6. С. 12–17. <https://doi.org/10.31659/0585-430X-2019-771-6-12-17>
5. Параничева Н.В., Назмеева Т.В. Усиление строительных конструкций с помощью углеродных композитных материалов // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 2. С. 19–22.
6. Ларионов Е.А., Римшин В.И., Василькова Н.Т. Энергетический метод оценки устойчивости сжатых железобетонных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 77–81.
7. Меркулов С.И., Татаренков А.И., Стародубцев В.Г. Усиление железобетонных конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений // БСТ: бюллетень строительной техники. 2017. № 4 (992). С. 41–43.
8. Ибрагимов Р.А., Антаков А.Б., Минахметова Л.Р. Определение и сравнение норм времени при выполнении монтажных работ с использованием металлической и композитной арматуры // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2017. № 2 (40). С. 257–264.
9. Степанова В.Ф., Бучкин А.В., Ильин Д.А. Исследование особенности работы бетонных конструкций с комбинированным армированием (арматурой композитной полимерной и неметаллической фиброй) // Academia. Архитектура и строительство. 2017. № 1. С. 124–128.
10. Esfahani M.R., Kianoush M.R., Tajari A.R. Flexural behavior of reinforced concrete beams strengthened by CFRP sheets // Engineering Structures. 2007. Vol. 29. Issue 10. Pp. 2428–2444.
11. Тур В.В., Мальха В.В. Экспериментальные исследования изгибаемых бетонных элементов с комбинированным армированием стальными и стеклопластиковыми стержнями // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F: Строительство. Прикладные науки. 2013. № 8. С. 58–65.
12. Huang X., Birman V., Nanni A., Tunis G. Properties and potential for application of steel reinforced polymer (SRP) and steel reinforced grout (SRG) composites. Internet. University of Missouri-Rolla, 2003. 27 p.
13. Мирсаяпов И.Т., Антаков И.А., Антаков А.Б. К расчету прогибов изгибаемых бетонных элементов, армированных композитной полимерной арматурой // Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. № 4. С. 413–428. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.4.413-428>
14. Фролов Н.В., Смоляго Г.А., Полоз М.А. Экспериментальные исследования образцов армобетонных балок с различным содержанием в растянутой зоне стержней стеклопластиковой арматуры // Вестник Белгородского государственного технологического университета имени В.Г. Шухова 2017. № 1. С. 60–64. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.4.413-428>
15. Neverov A.N., Ketsko E.S., Truntov P.S., Rimshin V.I. Calculating the strengthening of construction structures before the reconstruction of the building // Lecture Notes in Civil Engineering. 2022. Vol. 182. Pp. 173–179.



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-186-198

EDN: MUSLDE

УДК 624.012

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Публикуется в порядке обсуждения.

Редакция

Теория кратковременного и длительного сопротивления конструкций на основе принципа пластического разрушения

А.Д. Беглов¹, Р.С. Санжаровский² , Т.Н. Тер-Эммануильян³  

¹Администрация Санкт-Петербурга, Санкт-Петербург, Российская Федерация

²Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Республика Казахстан

³Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация

 tanya_ter@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 17 декабря 2022 г.

Доработана: 15 марта 2023 г.

Принята к публикации: 17 марта 2023 г.

Для цитирования

Беглов А.Д., Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.Н. Теория кратковременного и длительного сопротивления конструкций на основе принципа пластического разрушения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 186–198. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-186-198>

Аннотация. Проведен анализ теории, применяемой во многих странах, содержащей два самостоятельных направления: 1) теория устойчивости стержневых систем, в том числе плоских рам; 2) теория расчета элементов конструкций из различных материалов. Основная особенность данных теорий состоит в применении принципа пластического разрушения. Допущение о пластическом шарнире из-за несоответствия экспериментальным данным дополняется ошибочным привлечением несовместимых с этим шарниром теорий о бесконечных упругих деформациях, а также о бесконечных деформациях ползучести. Используя правила математики, принципы механики и результаты солидных экспериментов, установлено, что анализируемая теория содержит набор отвергающих друг друга теорий различного назначения, в том числе ошибочных.

Ключевые слова: теория ползучести бетона, принцип наложения, мгновенные упругие деформации, пластический шарнир, сопротивление железобетона, современные строительные нормы, принципы Еврокода

Беглов Александр Дмитриевич, доктор экономических наук, губернатор Санкт-Петербурга, Администрация Санкт-Петербурга, Санкт-Петербург, Российская Федерация; governator@gov.spb.ru

Санжаровский Рудольф Сергеевич, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Республика Казахстан; ORCID: 0000-0002-7412-3789; milasanj@gmail.com

Тер-Эммануильян Татьяна Николаевна, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-4723-8193; tanya_ter@mail.ru

© Беглов А.Д., Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.Н., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Theory of short-term and long-term resistance of structures based on the principle of plastic fracture

Alexander D. Beglov¹, Rudolf S. Sanzharovskiy² , Tatyana N. Ter-Emmanuilyan³  

¹Administration of St. Petersburg, St. Petersburg, Russian Federation

²Eurasian National University named after L.N. Gumilev, Astana, Republic of Kazakhstan

³Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

✉ tanya_ter@mail.ru

Article history

Received: December 17, 2022

Revised: March 15, 2023

Accepted: March 17, 2023

For citation

Beglov A.D., Sanzharovskiy R.S., Ter-Emmanuilyan T.N. Theory of short-term and long-term resistance of structures based on the principle of plastic fracture. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):186–198. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-186-198>

Abstract. The authors analyze the theory used in many countries, containing two independent directions: 1) the theory of stability of rod systems, including flat frames; 2) the theory of calculation of structural elements from various materials. The main feature of these theories is the application of the principle of plastic fracture. The assumption about a plastic hinge, due to the inconsistency with the experimental data, is supplemented by the incorrect application of theories of infinite elastic deformations, as well as of infinite creep deformations, which are incompatible with this hinge. Using the rules of mathematics, the principles of mechanics and the results of reliable experiments, it has been revealed that the analyzed theory contains several theories for different applications that reject each other, including the erroneous ones.

Keywords: theory of concrete creep, superposition principle, instantaneous elastic deformations, plastic hinge, reinforced concrete resistance, modern building codes, Eurocode principles

1. Введение

Анализируемая теория применяется во многих странах и содержит два самостоятельных направления, разрабатываемых независимо друг от друга:

- 1) теория устойчивости стержневых систем, в том числе плоских рам;
- 2) теория расчета элементов конструкций из различных материалов.

Исследования показывают, что эти направления основаны на тождественных либо близких системах правил и принципов.

Главная особенность этих направлений состоит в использовании принципа пластического разрушения (он же пластический шарнир), выявляемого из теории изгиба балок и впервые описанного Г. Казинци и Н. Кистом [1]. В 1926 г. он был самовольно распространен. М. Грюнингом на сжатые стержни при рассмотрении ферм; в 1931 г. он без обоснования использовался К. Гиркманом [2] для расчета многоэтажных и многопролетных рам. В известной монографии Б.Г. Нила [3] указывается, что И.Ф. Бакер (1949 г.) «был первым, кто признал, что расчет по разрушающим нагрузкам... является основой для создания простого и рационального метода расчета сложных рам». В последующие годы ошибочное направление интенсивно развивалось многими авторитетными учеными мира: И.А. Броеком, Х.И. Гринбергом, Ф. Блейхом, В. Прагером, Д.С. Друкером, Б.Г. Нилом, М.Р. Хорном и др. [3–6].

Alexander D. Beglov, Doctor of Economics, Governor of St. Petersburg, St. Petersburg Administration, St. Petersburg, Russian Federation; gubernator@gov.spb.ru

Rudolf S. Sanzharovskiy, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Scientific Associate, Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, Astana, Republic of Kazakhstan; ORCID: 0000-0002-7412-3789; milasanj@gmail.com

Tatiana N. Ter-Emmanuilyan, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID:0000-0002-4723-8193; tanya_ter@mail.ru

В нашем анализе мы будем пользоваться, в частности, работами М.Р. Хорна [4; 6], имеющими переводы в сборнике «Механика» 1965 г.

Перечисленные авторы указывают на внедрение направления:

- 1) в государственные документы, например: «...применение расчета по разрушающим нагрузкам разрешено в Англии после 1948 г., когда соответствующие пункты были включены в Британский стандарт № 449...»;
- 2) нормы по железобетону в ряде стран, в учебную литературу.

Оба направления анализируемой теории, к сожалению, неверно оцениваются в разных странах известными учеными:

Направление 1. Результатом подобных исследований явилось создание математически обоснованного расчета по разрушающим нагрузкам, построенного на *четких* и *строгих* предпосылках, подобно тому, как это имеет место в обычном упругом методе расчета статически неопределимых конструкций, якобы оно представляет собой новые вопросы расчета на устойчивость современных строительных конструкций.

Направление 2. Впервые в истории техники создана теория расчета, принципиально одинаково пригодная для разных конструкций и сооружений и для различных материалов. Теория расчета по предельным состояниям содержит все *лучшее и передовое*, что было достигнуто не только в области исследования железобетонных, но также каменных и металлических конструкций. Созданы предпосылки для развития общей теории расчета по предельным состояниям, представляющие собой коренное изменение расчетных принципов *на новой научной основе*.

В связи с такими оценками подчеркнем для наглядности восприятия важное обстоятельство, потерянное в рассматриваемой теории (мы его проанализируем позже): пластический шарнир (он же принцип пластического разрушения) является фрагментом потери устойчивости (условием критического состояния) сжатой конструкции *без длины*, то есть *условной* конструкции, предстающей в виде одного сечения со свойством абсолютно твердого тела и возможной только в одной расчетной схеме – из всего множества расчетных схем сжатоизогнутых конструкций; материал таких конструкций обязательно должен иметь *бесконечную площадь текучести*; в Еврокодах, нормах и стандартах диаграммы σ – ϵ ограничены *предельной деформацией*.

Допущение о пластическом шарнире из-за несоответствия экспериментальным данным дополняется ошибочным привлечением несовместимых с этим шарниром теорий о бесконечных упругих деформациях, а также бесконечных деформациях ползучести.

Направления 1 и 2 имеют и естественные отличия. Среди них: в направлении 1 выдумывается *процесс* последовательного образования пластических шарниров, что приводит к такому числу шарниров, которое превратит конструкцию в механизм, что вызовет разрушение без дальнейшего возрастания нагрузки. В направлении 2 рассматривается переменное повторное нагружение, теорема приспособления.

В данном исследовании мы не будем рассматривать эти отличия.

В обоих направлениях теории сначала рассматривается упругая стадия, из которой затем предполагается мгновенный перескок в несуществующий пластический шарнир. Дополнительно в направлении 1 имеются исследования, представленные в известных монографиях, в которых выдумывается зависимость «момент – кривизна» (рис. 1), «завершающаяся образованием пластического шарнира» [7]: здесь дополнительной ошибкой является характер начальной линии загрузки, заимствованный из теории балок.

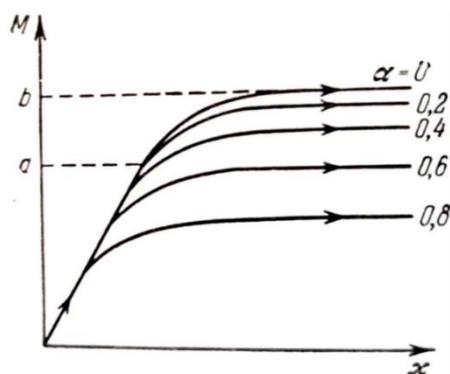


Рис. 1. Образование пластических шарниров в конструкции при разном уровне сжимающей силы
Figure 1. Formation of plastic hinges in the structure at different levels of compressive force

Обратим, наконец, внимание на недопустимость вышеприведенного отождествления строгости предпосылок классической упругой теории и предпосылок теории расчета по разрушающим нагрузкам.

2. Материалы и методы

2.1. Особенности анализируемой теории

Анализ показывает, что теория расчета железобетонных конструкций [8–15], имеющих массовое применение (при длительном нагружении во всем мире), включает в себя пять не соответствующих друг другу (среди них ошибочных) теорий, суть которых и один постулат изложены ниже.

В рассматриваемой теории перемешаны (вместо исполнения требований Еврокода):

(п. 1) – теория конструкции, не имеющей длины и обладающей пластическим шарниром;

(п. 2) – теория упругоползучей колонны с начальной погибью, имеющая неограниченные напряжения и деформации, а также бесконечные прогибы;

(п. 3) – теория бесконечно упругой колонны из деформационной теории, ошибочно распространяемая на область сугубых пластических деформаций, также с бесконечными прогибами;

(п. 4) – неправильное применение задачи Эйлера с критической силой, зависящей от эксцентриситета;

(п. 5) – глубоко ошибочная теория линейной ползучести бетона;

(п. 6) – «новая» теория обосновывается ошибочным постулатом о внезапном образовании пластического шарнира.

Проведенное исследование показывает, что данная научная совокупность и каждая теория в отдельности не соответствуют ни свойствам железобетона, ни Еврокоду.

2.2. Теория конструкции, не имеющей длины – возникновение пластического шарнира

Здесь необходимо предварительно построить соответствующую теорию упругопластической устойчивости (и иного пути нет):

а) записать диаграммы σ – ϵ для бетона и арматуры. Отвергнуть Еврокод и считать, что эти диаграммы имеют *неограниченные* площадки текучести ($\epsilon_T \rightarrow \infty$);

б) использовать (а не отвергать) гипотезу плоских сечений и найти значения главного вектора и главного момента эпюры нормальных напряжений;

в) записать уравнения равновесия сжатой колонны с учетом наличия прогиба;

г) рассмотреть геометрическую сторону задачи и связать краевые деформации сечения с прогибом;

д) сформулировать условие и вывести уравнение критического состояния;

е) провести численные исследования и построить кривые критических зависимостей. Получение таких кривых необходимо для последующего использования в нормах и стандартах, оно обусловлено задачами проектирования: рядовой проектировщик не сможет проводить научное исследование, указанное в пунктах а–е.

Поведение этих кривых зависит от вида расчетной схемы колонны [7].

Рассмотрим два важных случая: колонна с начальной погибью, продольно-поперечный изгиб.

Расчетная схема колонны с начальной погибью лежит в основе теорий (п. 2) и (п. 3), рассматриваемых позже (рис. 4, а) в рамках линейной теории. Здесь же для наглядности восприятия на рис. 1 приведены кривые критических зависимостей упругопластических колонн с начальной погибью. Обратим внимание, что принцип пластического разрушения на рис. 2 соответствует линии АВ.

В случае второй расчетной схемы – продольно-поперечного изгиба – кривые критических зависимостей в упругопластической стадии имеют вид, аналогичный рис. 1. Обратим внимание на отсутствие в приведенных случаях (различных расчетных схем) пластического шарнира по теории (п. 1) [9; 10] (рис. 2). На рис. 2 к пластическому шарниру можно отнести точку В, характеризующую полностью сжатое сечение ($x = h$, рис. 3). Другими словами, теория (п. 1) принципиально непригодна в рассмотренных расчетных схемах по терминологии разработчиков анализируемой теории.

О пластическом шарнире. Для получения теории (п. 1) необходимо к вышеизложенной процедуре а–е добавить два действия:

ж) выбрать специальную расчетную схему колонны (рис. 3);

з) осуществить математический предельный переход.

Пластический шарнир является предельной точкой ($l \rightarrow 0$) кривой критических состояний ($\frac{dl}{df} = 0$, l – длина, f – прогиб) по устойчивости для колонн, выполненных из бетона и стали с *неограниченной* площадкой текучести; в нем краевые деформации достигают *бесконечных* значений; в предельной точке

зоны пластического растяжения и сжатия (удовлетворяющие гипотезе плоских сечений перед началом предельного перехода) смыкаются. И вот эта локальная точка (в весьма частной расчетной схеме) с нереальными свойствами сжатых конструкций принимается за основу общей теории расчета железобетона.

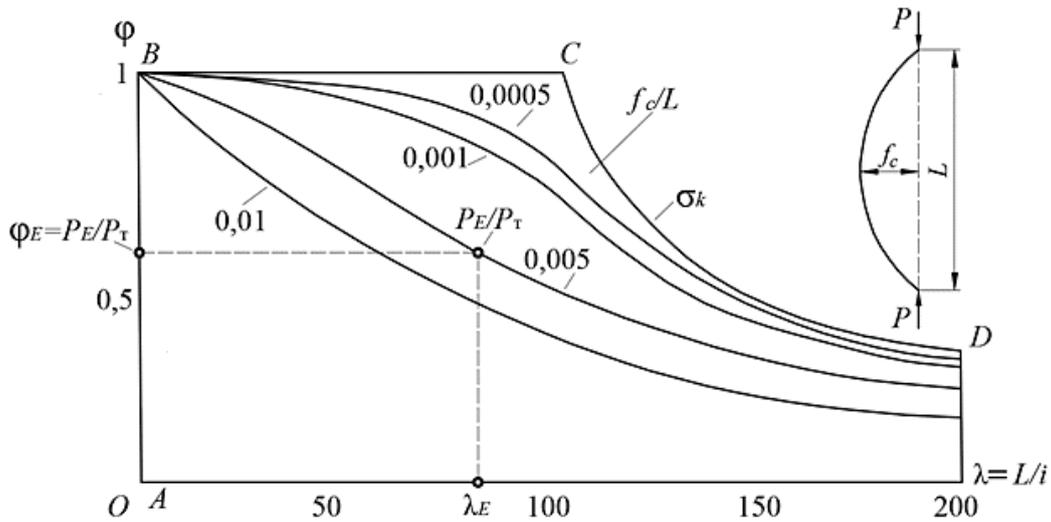


Рис. 2. Критические зависимости «сила – гибкость – начальная погибь» для упругопластической колонны
Figure 2. Critical dependences “force – flexibility – initial deflection” for an elastic-plastic column

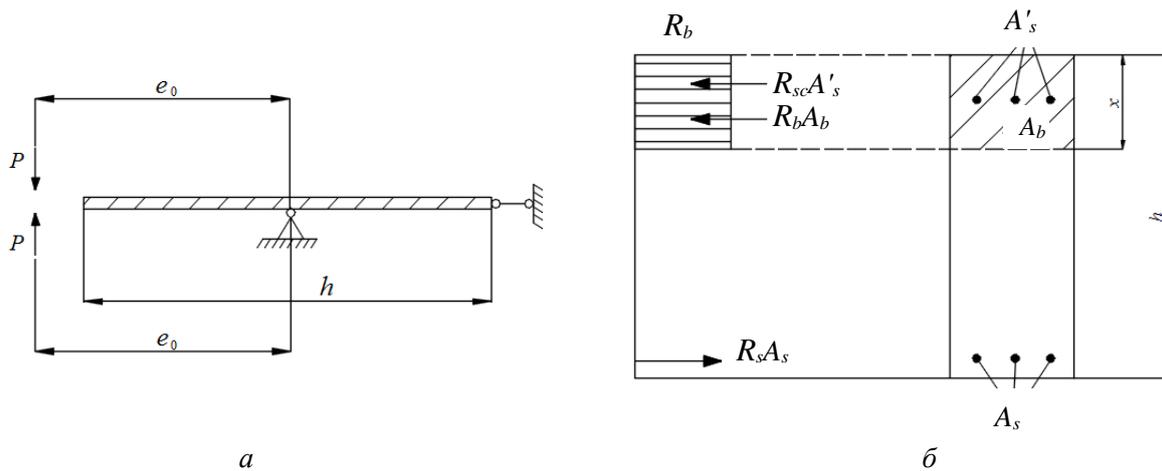


Рис. 3. Колонна без длины, у которой возможен пластический шарнир:
 а – расчетная схема; б – поперечное сечение, «предельные усилия» и эпюра напряжений бетона
Figure 3. Column without length, where a plastic hinge is possible:
 а – computational scheme; б – cross-section, “ultimate forces” and stress diagram for concrete

О нереальности свойств (у колонны нет длины; сечение колонны имеет свойство абсолютно твердого тела). При предельном переходе упругая зона сечения колонны устремляется к нулю, пластичность охватывает всю высоту сжатой зоны и получается вырожденная модель колонны в виде одного вырожденного сечения, в котором система распределения *усилий* имеет одну степень свободы с обобщенной координатой x (рис. 3).

Таким образом, теория (п. 1) не имеет никакого отношения к расчету реальных сжатых конструкций, в том числе железобетонных.

Изложенное также показывает, что в условиях Еврокода, когда диаграммы σ – ε бетона и арматуры ограничены предельной деформацией (ε_{b2} , ε_{s2}), теория (п. 1) вообще не существует¹.

¹ EN 1992-2 2004. Eurocode 2: Design of constructions. Brussels, 2004. 255 p.

Наконец, рассмотрим теорию (п. 1) для случая малых эксцентриситетов, описанную в литературе по железобетону весьма путанно. Здесь сжатая зона с координатой x захватывает часть сечения нижней арматуры A_s (рис. 3, б). В этой арматуре A_s образуется локальный пластический шарнир с локальным главным вектором усилий и главным моментом. Выражения для описания значений локальных главного вектора и главного момента усилий являются весьма громоздкими из-за круглого сечения арматуры. Эта громоздкость преодолевается двумя упрощениями:

- значение локального главного момента усилий в арматуре считается пренебрежимо малым, см.: (8.10) в EN 1992-2 2004;
- формула локального главного вектора упрощается путем замены круглого сечения эквивалентным сечением с постоянной шириной, см., например: (8.13) в СП 63.13330.2012².

Внешняя привлекательность и кажущаяся простота сделали незаметными (и по сей день) главные особенности* (здесь и далее звездочкой обозначен перечень ошибок) теории (п. 1):

- отсутствие у колонны длины;
- наличие у сечения колонны свойства абсолютно твердого тела;
- надделение бетона и арматуры бесконечной площадкой текучести;
- невозможность получения (п. 1) иным путем, кроме математического, предельного перехода;
- принципиально неверные результаты в расчетах конструкций: качественные и количественные.

Проведенный анализ показывает, что теория (п. 1) является непригодной для расчетов сжатых железобетонных конструкций. Формулы и расчетная схема сечения с пластическим шарниром из монографии А.А. Гвоздева заимствованы в современных нормах.

2.3. Теория упругоползучей колонны с начальной погибью и теория бесконечно упругой колонны из «деформационной теории»

В теориях (п. 2) и (п. 3) железобетон наделяется новыми фантастическими особенностями**, отвергающими теорию (п. 1):

- трещин в сечениях нет;
- бетон хорошо работает на растяжение и на сжатие;
- бетон и арматура являются бесконечно упругими материалами
- бетон обладает при растяжении и сжатии бесконечными деформациями линейной ползучести (см. также (п. 5));
- напряжения (при сжатии и растяжении) могут во много раз превышать пределы прочности бетона и арматуры;

– теории строятся в рамках гипотезы «незначительных прогибов» (по терминологии С.П. Тимошенко), а в результатах расчетов прогиб бесконечно возрастает: $f(p) \rightarrow \infty$; $f(t) \rightarrow \infty$, $\dot{f}(t) = \text{const}$, в общей механике указывают, что при таком противоречии метод непригоден. Например, он приводит к созданию (несуществующей) критической силы *при сжатии с изгибом*. В анализируемой теории она носит название условной критической силы. В задачах рассматриваемого формата, как показали Лагранж и Жичковский (рис. 4), данная гипотеза о линеаризации приводит к неверным результатам. В учебной литературе перечисленные под знаком ** особенности не замечаются: имеется лишь формальное указание на умножение на коэффициент η . Расчетная схема для этих теорий показана на рис. 4.

В теории (п. 2) связь между напряжениями и деформациями устанавливается формулой, основанной на линейной зависимости между напряжениями и деформациями и на принципе наложения:

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1)$$

где $\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$; $C(t, \tau)$ – мера ползучести.

² СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М., 2012. 156 с.

Здесь и в дальнейшем использованы общепринятые обозначения построенной теории с ошибками (якобы она максимально приближена к действительным условиям работы).

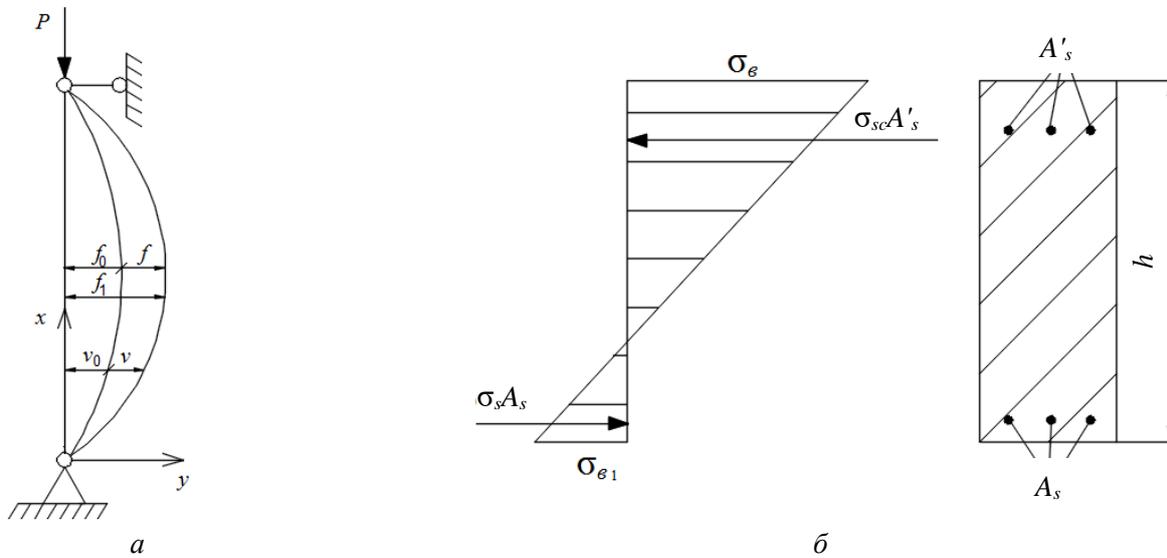


Рис. 4. Упругая, либо упруговязкая, колонна с начальной погибью:
 а – расчетная схема; б – поперечное сечение, неограниченные напряжения в бетоне и арматуре – трещины отсутствуют
Figure 4. Elastic, or elastic-viscous, column with initial deflection:
 а – calculation diagram; б – cross-section, unlimited stresses in concrete and reinforcement – there are no cracks

В теории (п. 2) указывается, что в случае, когда материал стержня обладает ползучестью и старением (1), задача об устойчивости упругого стержня, имеющего начальную погибь ($y_0 = f_0$) и сжатого постоянной силой P , сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2 y^*(x, t)}{dx^2} + \frac{P}{I} \left[\frac{y^*(x, t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t y^*(x, \tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = \frac{d^2 y_0}{dx^2}.$$

Задача определения прогиба $f(t)$ сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$f(t) - \frac{E(t)}{1 - \xi(t)} \int_{\tau_1}^t f(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = f_1(t),$$

где $\xi(t) = \frac{P_3(t)}{P}$; $P_3(t) = \frac{\pi^2 I E(t)}{l^2}$; $f_1(t) = \frac{f_0}{1 - \frac{P}{P_3(t)}}$.

Критическое состояние по устойчивости железобетонной колонны при ползучести бетона определяется *несостоятельным* по Еврокоду и *удивительным* для теории железобетона критерием: прогиб среднего сечения колонны увеличивается до *бесконечности* (с постоянной скоростью его нарастания). Структура формулы добавочного бесконечного прогиба, вызванного ползучестью бетона, становится тождественной структуре бесконечно упругого прогиба по теории (п. 3) (см., например, формулу (8.13) в СП 63.13330.2012). Изменяется лишь значение критической силы: вместо кратковременной критической силы Эйлера используется понятие длительной критической силы, равной силе Эйлера, деленной на коэффициент, зависящий от характеристики ползучести бетона.

Следует обратить особое внимание на три обстоятельства** в теории (п. 2, п. 3):

- гипербола Эйлера прерывается в точке C (см. рис. 1), то есть на участке СВ пластической области понятие критической силы Эйлера (также длительной критической силы) является вымыслом;
- при неограниченных упругих свойствах у сжатоизогнутых колонн критической силы Эйлера не существует (рис. 4), что дополнительно характеризует несостоятельность теории (п. 2, п. 3) с точки зрения Еврокода;

– в рамках любой теории ползучести теория (п. 2) непригодна для оценки длительного сопротивления железобетона, так как наделяет бетон фантастическими свойствами бесконечных прогибов, бесконечной упругости и отсутствием трещин. В гиперболе Эйлера отмечена одна точка, лежащая на горизонтальной оси с координатой 1,0 (рис. 5).

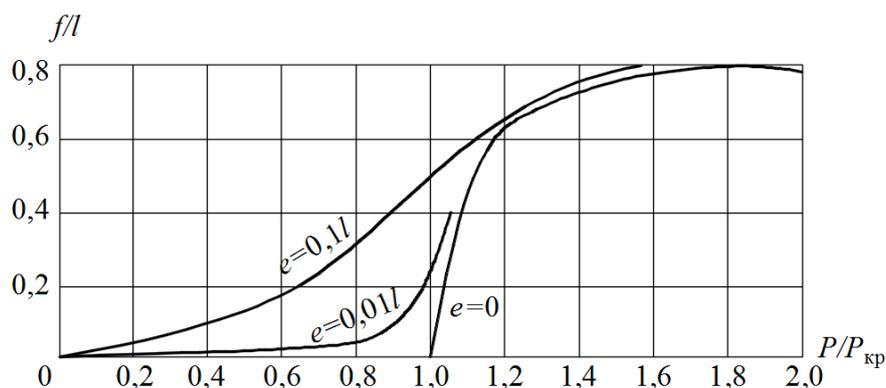


Рис. 5. Зависимость между стрелой прогиба и продольной силой для сжатоизогнутых и центрально сжатых ($e = 0$) колонн
Figure 5. Dependence between the deflection boom and the longitudinal force for compressed-curved and centrally compressed ($e = 0$) columns

Каждая из изложенных теорий является истиной лишь на своем месте в общей теории расчета сооружений. Так, теория (п. 1) – только одна из четырех линий – границ области в частной схеме нагружения упругопластической устойчивости – лишь одной из многих схем, в которых таких границ вовсе нет (см. рис. 1). Причем в этой частной схеме рассматривается идеально упругопластический материал с бесконечной площадкой текучести, то есть находящийся вне правил Еврокода 2 и для теории железобетона являющийся ошибкой [15].

Кажущаяся новизна непригодной теории (п. 1) и ее ошибочная привлекательность в сороковые годы прошлого столетия вызвали решительные действия к внедрению, и в угоду этим действиям была принесена в жертву сущность теории расчета железобетона, о чем свидетельствует выдвинутая гипотеза теории (п. 6) о связи теорий (п. 2, п. 3) и теории (п. 1):

«При внецентренном сжатии... явление разрушения протекает почти так же, как при изгибе, а расчет строится, исходя из тех же соображений и допущений.

...В интересах простоты расчета еще более желательно, чем при изгибе симметричных сечений, допускать..., что сечение ведет себя упруго вплоть до образования *пластического шарнира*».

Итак, рассмотрим последовательности перескоков от одной теории к другой. Пусть изначально имеется железобетонная колонна с заданными свойствами несущей способности. Применив к ней теорию (п. 1), получаем после исполнения расчета сильно завышенную несущую способность.

По этой причине переходим к теории (п. 3) либо (п. 2), подменяя расчетную схему теории (п. 1) на расчетную схему колонны с начальной погибью. Можно было бы использовать теоретические данные по образцу рис. 1, но этого не происходит.

Рассматривается процесс нагружения бесконечно упругой колонны, по окончании которого извлекается цитированная гипотеза и совершается переход от (п. 3) к (п. 1) в виде следующих удивительных действий:

- исчезает скачком длина бесконечно упругой колонны; остается только одно сечение с линейной эпурой напряжений, без трещины;
- упругая эпюра напряжений (рис. 3) мгновенно превращается в эпюру напряжений пластического шарнира (рис. 2);
- начальный прогиб f_0 упругой колонны из (п. 3) мгновенно становится заданным эксцентриситетом в теории (п. 1);
- стрела дополнительного прогиба упругой колонны f теории (п. 3) превращается в эксцентриситет теории (п. 1), который именуется дополнительным эксцентриситетом и появление которого разрушает теоретическую сущность пластического шарнира, описанную выше, как сущность колонны не имеющей длины;
- появляется «новая» научная сущность общей теории в виде пластического шарнира, не имеющего длины, но имеющего прогиб; сумма $e_0 + f$ становится расчетным эксцентриситетом $e_{0\eta_1}$ в теории (п. 1).

На основании «новой» сущности снова рассчитывается несущая способность заданной железобетонной колонны: результаты расчета снова дают завышение несущей способности заданной колонны.

Еще более парадоксальным является соединение в одну теорию пластического шарнира по (п. 1) с переменным во времени прогибом теории (п. 2). «Новая» научная сущность в этом случае являет удивительное непрерывное изменение продольной силы колонны, происходящее с течением времени, а также непрерывное явление перескоков.

Теория железобетона приобретает в «новой» научной сущности двойственные свойства по многим обстоятельствам и параметрам, что позволяет менять смысл этих параметров, проводить ненаучные дискуссии.

Например, в теории пластического шарнира (п. 1) жесткость сечения $D = EI$ не нужна. Но для «исправления» анализируемой теории железобетона «новая» научная сущность позволяет использовать и исковеркать это понятие.

2.4. Неправильное применение задачи Эйлера

В классической задаче Эйлера об устойчивости колонны теория (п. 4), представляющая дифференциальное уравнение изгиба, имеет вид

$$D \frac{d^2 v}{dx^2} = -Pv.$$

Как уже отмечалось, на участке ВС по рис. 1 в пластической области этого уравнения нет. Как и жесткости в теории (п. 1); нет и силы Эйлера. «Новая» научная сущность не только вводит несуществующую здесь силу Эйлера, но и коверкает ее смысл, выдумывая силу Эйлера, зависящую от эксцентриситета e_0 :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D(e_0)}{l^2}.$$

*** «Исправляется» таким приемом общая теория: критические силы железобетонной колонны (N_{cr}) при кратковременном нагружении и P_d при длительном нагружении, невозможные при внецентренном сжатии (см. рис. 4.), объявляются не только возможными, но и претерпевают эволюционное развитие в виде нелепой зависимости от эксцентриситета.

Экспериментальные оценки результатов расчета сжатых железобетонных конструкций по анализируемой теории, приведенные известными учеными в публикациях последних лет, составляют $\pm 50\%$, свидетельствуя, что ненаучность и несоответствие Еврокоду помимо политических аспектов дают низкую экономическую эффективность железобетона.

2.5. Ошибочная теория линейной ползучести бетона

В теории (п. 5), являющейся мировой, интегральные уравнения Вольтерра, представляющие ползучесть бетона с его нестационарными и нелинейными свойствами, имеют выдуманные ядра, нарушающие предусмотренный математический порядок их построения: вследствие этого у бетона образуется ошибочный набор фиктивных сил, неправильно формирующих деформации ползучести [15–18].

Нами выявлено, что все основные положения теории (п. 5) грубо нарушают правила высшей математики, принципы механики, требования Еврокода и результаты солидных экспериментов. Среди них****:

– фундамент теории, ее принцип наложения нарушает правила дифференцирования функций. Это нарушение сопровождается лукавым обоснованием [19], что «принцип наложения свойственен для теории Вольтерра»: в итоге конструируются ошибочные ядра интегральных уравнений. Существует ряд других нелепых «математических» обоснований этого принципа;

– «никакой линейной ползучести не существует» свидетельствуют известные ученые С.В. Александровский и П.И. Васильев [20], приводя экспериментальные данные (рис. 6);

– мгновенные деформации бетона, нелинейные по Еврокоду, заявляются упругими, что обосновывается несуществующими экспериментами;

– нестационарность мгновенных деформаций неверно отождествляется с моделью Максвелла и описывается с помощью принципа наложения, внося ошибку до 300 %;

– осуществляется недопустимая в механике переделка мгновенных нелинейных свойств бетона свойствами ползучести (минутная ползучесть, цепные модели, быстронатекающая ползучесть); это приводит к появлению сил сопротивления, пропорциональных ускорению, создает нарушение принципа независимости действия сил (четвертая аксиома), искажая всю теорию;

– «алгебраизация» теории ползучести отвергает основное уравнение механики Ньютона, возвращает на уровень механики Аристотеля; это подчеркивали неоднократно Н.Х. Арутюнян и С.В. Александровский.

Фундаментальные экспериментальные данные на рис. 6 не используют название «мера ползучести». В них отсутствует понятие «мера ползучести»: по этой причине на данный рис. 6 в научной литературе не обращают внимания. По этим данным и другим понятиям закона ползучести нами написана отдельная статья, готовящаяся к публикации.

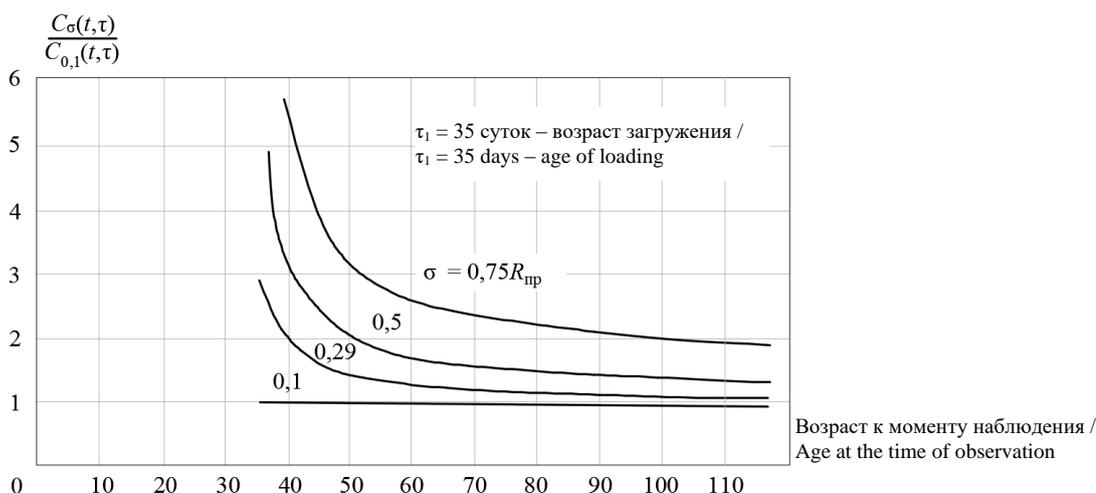


Рис. 6. Изменение отношений удельных деформаций ползучести при разных начальных уровнях напряжений $C_\sigma(t, \tau)$ к удельным деформациям ползучести при начальном уровне напряжений $C_{0,1}(t, \tau)$

Figure 6. Changing the ratios of specific creep deformations at different initial levels of stress $C_\sigma(t, \tau)$ to the specific creep deformations at the initial level of stress $C_{0,1}(t, \tau)$

В анализируемой теории можно найти и более абсурдные ситуации, когда условная (для железобетона) теория (п. 2) упруговязкой устойчивости сжатого стержня с начальной погибью, с бесконечными напряжениями, с ее значением длительной критической силы $P_d = \frac{\pi^2 EI}{l^2 (c+1)}$, где $c = \varphi_\infty$, становится

теорией расчета предельного состояния железобетонных оболочек с трещинами при длительном нагружении. Она включена в методические рекомендации, является под видом модуля упругости

$E_d = \frac{E}{c+1}$ ($c = \varphi_c = 2$), предельная характеристика ползучести обычного бетона маскируется эмпирическими

выражениями, что наглядно видно из проблемы расчета конструкций «Трансвааль-парка».

Ненаучность ошибочной теории длительного сопротивления железобетона, ее основного закона ползучести бетона, оценки фирмы RAMBOLL [19] (президент fib Гордон Кларк) свидетельствуют, что данная теория наносит огромный вред мировому строительству.

3. Результаты и обсуждение

В ряде работ, а также в нормах анализируемой теории предшествует разъяснение в виде двух положений: I – что нужно использовать нелинейную деформационную модель (вывеска); II – что допустимо производить расчет на основе анализируемой теории (с разными названиями: расчет по предельным усилиям; расчет по стадии разрушения или по принципу пластического разрушения; метод предельного равновесия; метод расчетных предельных состояний).

Один из разработчиков норм в 2011 г. предупреждал, что рядовой проектировщик не сможет использовать положение I: «Деформационная модель силового сопротивления в основном реализуется через вычислительные комплексы, поэтому здесь *возникает ряд формальных процедур, например устойчивость, оценка точности решения*. Недостаток инструментария обусловлен также многоитерационным процессом решения, особенно по мере приближения действующего усилия к несущей способности... Результаты зависят от корректности *выбора* исходных (расчетных) диаграмм состояния». Россия вступила в ВТО и обязана исполнять требования Еврокода.

Поскольку Еврокод запрещает менять свои принципы и правила применения, а рядовой проектировщик не сможет применить положение I, приходим к заблуждению, что положение II соответствует Еврокоду. В учебной литературе в связи с этим можно прочесть: «Вместо гипотезы плоских сечений применяется принцип пластического разрушения»; «Предложение определять несущую способность по предельному („пластическому“) состоянию на десятки лет опередило мировую практику в этом вопросе»; «В расчетных моделях Еврокода есть и расчет по предельным усилиям» – все это вводит специалистов в заблуждение. Сопоставляя национальный норматив и европейские нормы, А.А. Гвоздев с соавт. [21] указал на их существенное отличие в принципах и методах расчета, в частности касающихся «расчета нормальных... сечений, учета влияния гибкости колонн и длительности действия нагрузки».

На ненаучность анализируемой теории железобетона в отдельных аспектах и в разное время указывали авторитетные ученые: Б.Г. Скрамтаев, В.М. Келдыш, Г.В. Никитин, А.Р. Ржаницын, Г.А. Гениев, П.Ф. Дроздов, К.Э. Таль и др. Осредненный ответ на критику звучал уклончиво: «Выбор расчетной схемы определяется соображениями дидактического характера». После утверждения Еврокода ненаучность и несоответствие Еврокоду анализируемой теории стали очевидными.

Президент fib Гордон Кларк предупреждает: «Точное прогнозирование влияния ползучести... носит *весьма противоречивый характер*». Нами установлены причины ненаучности этой теории – среди них математические ошибки и нарушение принципов классической механики [15–17; 22]³. Также нами разработана новая нелинейная теория ползучести бетона, еще не опубликованная, дополняющая общую теорию [23].

Результаты анализа теории расчета железобетона [24], а также сущность математических ошибок теории ползучести бетона докладывались и обсуждались на международном симпозиуме 2018 г. в Бельгии [25] и на международной конференции 2014 г. в Москве [19].

4. Заключение

Показано, что теория расчета железобетонных конструкций, получившая широкое распространение (при длительном нагружении), включает в себя пять противоречивых (в том числе ошибочных) теорий, суть которых и один постулат были установлены ранее. Используя правила математики, принципы механики и результаты солидных экспериментов, выявлено, что анализируемая теория содержит совокупность теорий, отвергающих друг друга в различных целях, в том числе и ошибочных.

Список литературы

1. *Kazinczy G.* Kiserletek befalazott tartokkal // *Betonszemle*. 1914. No. 2. Pp. 68–71.
2. *Girkmann K.* Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines ideal – plastischen Stahles. Akademie der Wissenschaften in Wien (Abschnitt IIa), 1931. No. 140. 679 p.
3. *Neal B.G.* The plastic methods of structural analysis. London: Chapman and Hall, 1956. 353 p.
4. *Horne M.R.* The stability of elastic – plastic structures // *Progress in Solid Mechanics*. 1961. No. 2. Pp. 227–322.
5. *Prager W.* The general variational principle of the theory of structural stability // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1947. No. 4. Pp. 378–384. <https://doi.org/10.1090/qam/21843>
6. *Horne M.R.* Plastic theory of structures. Cambridge: MIT Press, 1972. 184 p.
7. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
8. *Беглов А.Д., Санжаровский Р.С., Бондаренко В.М.* Евростандарты и нелинейная теория железобетона // *Бетон и железобетон – пути развития: научные труды II Всероссийской (международной) конференции*. Пленарные доклады. М., 2005. Т. 1. С. 119–131.

³ ACI 209.3R-XX. *Analysis of creep and shrinkage effects on concrete structures. Final draft*. ACI Committee 209; March 2011. 228 p.

9. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. М.: Стройиздат, 1991. 767 с.
10. Бондаренко В.М., Суворкин Д.Г. Железобетонные и каменные конструкции. М.: Высшая школа, 1987. 383 с.
11. Chiorino M.A., Sassone M. Further considerations and updates on time dependent analysis of concrete structures // *Structural Concrete: Textbook on Behaviour, Design and Performance*. Lausanne: International Federation for Structural Concrete, 2010. Pp. 43–69.
12. Muller H.S., Reinhardt H.W. Beton // *Betonkalender 2010*. Berlin: Ernst & Sohn Verlag, 2010. Band 1. Pp. 293–436.
13. Yu Q., Bazant Z.P., Wendner R. Improved algorithm for efficient and realistic creep analysis of large creep – sensitive concrete structures // *ACI Structural Journal*. 2012. Vol. 109. No 5. Pp. 665–675.
14. Прокопович И.Е. О влиянии ползучести и старения на устойчивость сжатых стержней // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1967. № 1. С. 5–9. URL: <https://dwg.ru/dnl/12318> (дата обращения: 12.11.2022).
15. Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.А., Манченко М.М. Принцип наложения как основополагающая ошибка теории ползучести и стандартов по железобетону // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2018. Т. 14. № 2. С. 92–104. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104>
16. Санжаровский Р.С., Манченко М.М. Ошибки в теории ползучести железобетона и современные нормы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2016. № 3. С. 25–32.
17. Санжаровский Р.С., Манченко М.М., Гаджиев М.А., Мусабиев Т.Т., Тер-Эммануильян Т.Н., Вареник К.А. Система несостоятельности современной теории длительного сопротивления железобетона и предупреждения проектировщиков // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 1. С. 3–24. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-1-3-24>.
18. Санжаровский Р.С., Манченко М.М. Ошибки международных норм по железобетону и правила Еврокода // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2017. № 6. С. 25–36.
19. Бетон и железобетон – взгляд в будущее: научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону. М., 2014. 468 с.
20. Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. Состояние проблемы и перспективы развития / под ред. С.В. Александровского. М.: Стройиздат, 1976. 351 с.
21. Гвоздев А.А., Гуца Ю.П., Чистяков Е.А. Сопоставление отечественных и зарубежных норм проектирования // *Бетон и железобетон*. 1979. № 5. С. 24–25.
22. Sanjarovskiy R., Ter-Emmanuilyan T., Manchenko M. Creep of concrete and its instant nonlinear deformation in the calculation of structures // *10th International Conference on Mechanics and Physics of Creep, Shrinkage, and Durability of Concrete and Concrete Structures*. 2015. No. 10. Pp. 238–247. <https://doi.org/10.1061/9780784479346.028>
23. Санжаровский Р.С. Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1984. С. 280.
24. Теория расчета бетонных и железобетонных конструкций / под общ. ред. А.А. Гвоздева. М., 1949.
25. Life-cycle analysis and assessment in civil engineering. Proceedings of the Sixth international symposium of life-cycle civil engineering (IALCCE), Ghent, Belgium, 28 October 2018 / ed. by R. Caspeele, L. Taerwe, D.M. Frangopol. Ghent: CRC Press, 2018. 604 p. <https://doi.org/10.1201/9781315228914>

References

1. Kazinczy G. Kiserletek befalazott tartokkal. *Betonszemle*. 1914;(2):68–71.
2. Girkmann K. *Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines ideal – plastischen Stahles* (no. 140). Akademie der Wissenschaften in Wien (Abschnitt IIa); 1931.
3. Neal B.G. *The plastic methods of structural analysis*. London: Chapman and Hall; 1956.
4. Horne M.R. The stability of elastic – plastic structures. *Progress in Solid Mechanics*. 1961;(2):227–322.
5. Prager W. The general variational principle of the theory of structural stability. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1957;(4):378–384. <https://doi.org/10.1090/qam/21843>
6. Horne M.R. *Plastic theory of structures*. Cambridge: MIT Press; 1972.
7. Volmir A.S. *Stability of deformable systems*. Moscow: Nauka Publ.; 1967. (In Russ.)
8. Begliv A.D., Sanjarovskiy R.S., Bondarenko V.M. European standards and nonlinear theory of reinforced concrete. *Concrete and Reinforced Concrete – Ways of Development: Proceedings of the II All-Russian (International) Conference. Plenary reports* (vol. 1, p. 119–130). Moscow; 2005. (In Russ.)
9. Bayikov V.N., Sigalov E.E. *Reinforced concrete structures*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1991. (In Russ.)
10. Bondarenko V.M., Suворкин D.G. *Reinforced concrete and stone structures*. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1987. (In Russ.)
11. Chiorino M.A., Sassone M. Further considerations and updates on time dependent analysis of concrete structures. *Structural Concrete: Textbook on Behaviour, Design and Performance*. Lausanne: International Federation for Structural Concrete; 2010. Pp. 43–69.
12. Muller H.S., Reinhardt H.W. Beton. *Betonkalender 2010* (band 1, p. 293–436). Berlin: Ernst & Sohn Verlag; 2010.
13. Yu Q., Bazant Z.P., Wendner R. Improved algorithm for efficient and realistic creep analysis of large creep – sensitive concrete structures. *Acı Structural Journal*. 2012;109(5):665–675.

14. Prokopovich I.E. On the influence of creep and aging on the stability of compressed rods. *Structural Mechanics and Calculation of Structures*. 1967;(1):5–9. Available from: <https://dwg.ru/dnl/12318> (accessed: 12.11.2022).
15. Sanzharovsky R.S., Ter-Emmanuilyan T.N., Manchenko M.M. Superposition principle as the fundamental error of the creep theory and standards of the reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(2):92–104. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104>
16. Sanzharovskij R.S., Manchenko M.M. Errors in the concrete theory and creep modern regulations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(3):25–32. (In Russ.)
17. Sanzharovskij R.S., Manchenko M.M., Gadzhiev M.A., Musabaev T.T., Ter-Emmanuilyan T.N., Varenik K.A. System of insufficiency of the modern theory of long-term resistance of reinforced concrete and designers' warnings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(1):3–24. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-1-3-24>
18. Sanzharovskij R.S., Manchenko M.M. Errors of international standards on reinforced concrete and rules of the Eurocode. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;(6):25–36. (In Russ.)
19. *Concrete and reinforced concrete – a look into the future. Scientific papers of the III All-Russian (II International) conference on concrete and reinforced concrete*. Moscow; 2014. (In Russ.)
20. Alexandrovsky S.V. (ed.) *Creep and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures. The state of the problem and prospects for development*. Moscow: Strojizdat Publ.; 1976. (In Russ.)
21. Gvozdev A.A., Gushcha Yu.P., Chistyakov E.A. Comparison of domestic and foreign design standards. *Concrete and Reinforced Concrete*. 1979;(5):24–25. (In Russ.)
22. Sanjarovskiy R., Ter-Emmanuilyan T., Manchenko M. Creep of concrete and its instant nonlinear deformation in the calculation of structures. *10th International Conference on Mechanics and Physics of Creep, Shrinkage, and Durability of Concrete and Concrete Structures*. 2015;(10):238–247. <https://doi.org/10.1061/9780784479346.028>
23. Sanzharovskij R.S. *Creep stability of building structure elements*. Leningrad: LGU Publ.; 1984. (In Russ.)
24. Gvozdev A.A. (ed.) *The theory of calculation of concrete and reinforced concrete structures*. Moscow; 1949. (In Russ.)
25. Caspeele R., Taerwe L., Frangopol D.M. (eds.) *Life-cycle analysis and assessment in civil engineering. Proceedings of the Sixth international symposium of life-cycle civil engineering (IALCCE), Ghent, Belgium, 28 October 2018*. Ghent: CRC Press; 2018. <https://doi.org/10.1201/9781315228914>



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-199-209

EDN: CUKIGR

УДК 624.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Рациональные конструктивные решения треугольных ферм

В.А. Репин , А.В. Лукина  , А.С. Усов 

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Российская Федерация

 pismo.33@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 16 января 2023 г.

Доработана: 5 апреля 2023 г.

Принята к публикации: 10 апреля 2023 г.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема FZUN-2020-0015, госзадание ВлГУ).

Для цитирования

Репин В.А., Лукина А.В., Усов А.С. Рациональные конструктивные решения треугольных ферм // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 199–209. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-199-209>

Аннотация. Деревянные стропильные конструкции обладают несомненными достоинствами, обуславливающими их широкое применение. В качестве объекта исследования выбраны треугольные стропильные конструкции. Цель исследований – установление зависимости значений усилий в элементах обозначенной конструкции от величины ее стрелы подъема. Представлен расчет треугольной фермы с использованием диаграммы Максвелла – Кремоны. Эффективность предлагаемой методики устанавливалась на основе изучения конструкции деревянной фермы типа «ножницы». Обнаружена следующая закономерность: изменение координаты точек (абсцисс) диаграммы усилий обратно пропорционально изменению f . Определена область рациональных значений стрелы подъема (уклона кровли), при которых величины внутренних усилий стремятся к минимуму. Выявлено, что по мере уменьшения уклона кровли значения приращений усилий в элементах фермы на каждом шаге увеличиваются с 27 % в два раза. На основании графического анализа полученных данных найден диапазон эффективных значений уклона кровли, при котором усилия в элементах фермы принимают минимальные значения. Пользуясь графическим методом определения усилий, можно проверять варианты уклона кровли в поиске рационального решения конструкции фермы типа «ножницы». Таким образом, предлагаемый метод способствует выбору наиболее экономичных конструктивных решений.

Ключевые слова: ферма-ножницы, стропильные системы, диаграмма Максвелла – Кремоны, деревянные конструкции

Репин Владимир Анатольевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций, Институт архитектуры, строительства и энергетики, Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-9107-6606; skia2000@mail.ru

Лукина Анастасия Васильевна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительных конструкций, Институт архитектуры, строительства и энергетики, Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-6065-678X; pismo.33@yandex.ru

Усов Алексей Сергеевич, магистрант, Институт архитектуры, строительства и энергетики, Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-6160-9889; usovlexx@mail.ru

© Репин В.А., Лукина А.В., Усов А.С., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Rational structural solutions for triangular trusses

Vladimir A. Repin^{ID}, Anastasia V. Lukina^{ID}✉, Alexey S. Usov^{ID}

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation

✉ pismo.33@yandex.ru

Article history

Received: January 16, 2023

Revised: April 5, 2023

Accepted: April 10, 2023

Acknowledgements

The work was carried out within the state task in the field of scientific activity of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme FZUN-2020-0015, state assignment VISU).

For citation

Repin V.A., Lukina A.V., Usov A.S. Rational structural solutions for triangular trusses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):199–209. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-199-209>

Abstract. Wooden rafter structures have undoubted advantages, which determine their wide application. The object of the study is triangular rafter structures. The purpose of the research is to find the dependence of force values in the elements of the studied structure on the magnitude of its lifting boom. The calculation of a triangular truss using the Maxwell – Cremona diagram is presented. The efficiency of the proposed method was estimated on the basis of a study of the structure of a wooden truss of the “scissors” type. The following pattern has been established: the change in the coordinates of the points (abscissas) of the force diagram is inversely proportional to the change in f . It is determined the area of rational values of the lift (roof slope) at which the values of internal forces tend to a minimum. It was revealed that the values of force increments in the truss elements at each step increase from 27% to 2 times when the roof slope decreases. Based on the graphical analysis of the obtained data the range of effective values of the roof slope at which the forces in the elements of the truss take minimum values was found. Using a graphic method of determining the forces, it is possible to check variants of the roof slope in the search for a rational solution of the “scissor” type truss structure. It follows that the proposed method contributes to the choice of the most economical structural solutions.

Keywords: scissor farm, rafter systems, Maxwell – Cremona diagram, wooden structures

1. Введение

Деревянные стропильные системы являются эффективными несущими конструкциями. Одно из направлений развития деревянных конструкций – поиск конструктивных решений, повышающих их эксплуатационные качества [1–4]. Основной задачей при этом будет выявление взаимозависимости параметров конструкции и определение их гармоничного сочетания. Обоснование и принятие наиболее целесообразного решения на этапе проектирования позволит сократить расходы на строительство и эксплуатацию всего здания или сооружения. Эффективные конструктивные решения остаются актуальной задачей для строительной отрасли [5–7].

Наиболее часто используют общие критерии проектирования экономичных конструкций, такие как материалоемкость, трудоемкость изготовления, технологичность конструкции. Зачастую невозможно выполнить расчет стропильных систем без моделирования и сложных математических операций [8–12]. На практике же требуется определить тот или иной рациональный параметр конструкции без громоздких вычислений.

Настоящее исследование посвящено изучению треугольных деревянных ферм типа «ножницы». Данную конструкцию отличает простота в сборке и низкая материалоемкость. В настоящий момент такое решение популярно среди ферм, выполненных из деревянного бруса (рис. 1). Конструкция фермы обладает высокоэстетичными формами, что обеспечивает большую свободу в дизайне зданий и сооружений, характеризуется рациональным использованием материалов в сочетании с низким воздействием на окружающую среду [13; 14].

Vladimir A. Repin, PhD of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Building Structures, Institute of Architecture, Civil Engineering and Energy, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9107-6606; skia2000@mail.ru

Anastasia V. Lukina, PhD of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Building Structures, Institute of Architecture, Civil Engineering and Energy, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6065-678X; pismo.33@yandex.ru

Alexey S. Usov, master's student, Institute of Architecture, Civil Engineering and Energy, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6160-9889; usovlex@mail.ru

Цель исследования – установить зависимость значений усилий в элементах рассматриваемой конструкции от величины ее стрелы подъема. Достижение поставленной цели предполагалось осуществить с помощью диаграммы усилий Максвелла – Кремоны (далее М–К), поскольку она представляет собой единую систему, наглядным образом отражающую взаимосвязь усилий в элементах ферм [15].

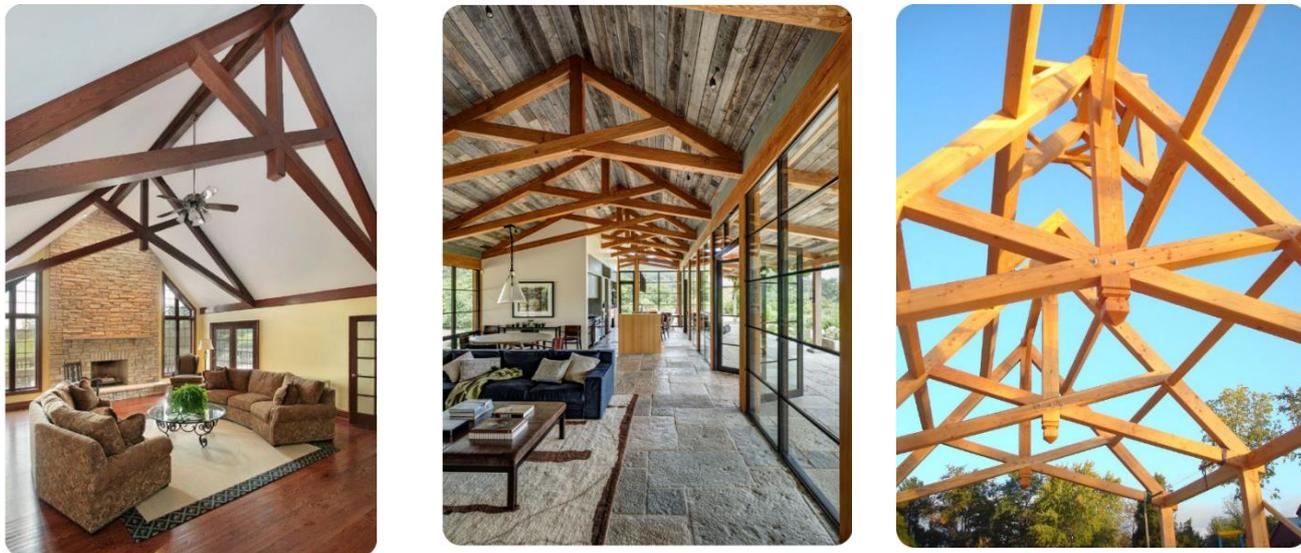


Рис. 1. Применение ферм типа «ножницы»
(Источник: <https://ru.pinterest.com/pin/> (дата обращения: 15.12.2022))
Figure 1. The use of trusses of the “scissor” type
(Source: <https://ru.pinterest.com/pin/> (accessed: 15.12.2022))

2. Методы

Диаграмма М–К является простым графическим приемом, которым удобно пользоваться, когда стоит задача поиска рационального решения: уклона кровли к пролету конструкции [16–20].

Приняты некоторые предпосылки:

- нагрузки прикладываются в узлы верхнего пояса конструкции в виде сосредоточенных сил;
- внешние нагрузки действуют только вертикально (учет горизонтальных составляющих нагрузок предполагается учитывать в дальнейших исследованиях);
- взаимное примыкание элементов выполнено шарнирным, таким образом исключается возникновение изгибающих моментов.

Рассмотрим ферму треугольного очертания (рис. 2).

В таких конструкциях могут варьироваться следующие параметры: стрела подъема f , одновременно с этим изменяется уклон кровли; положение узлов примыкания ветвей нижнего пояса к элементам верхнего пояса (расстояния a и b).

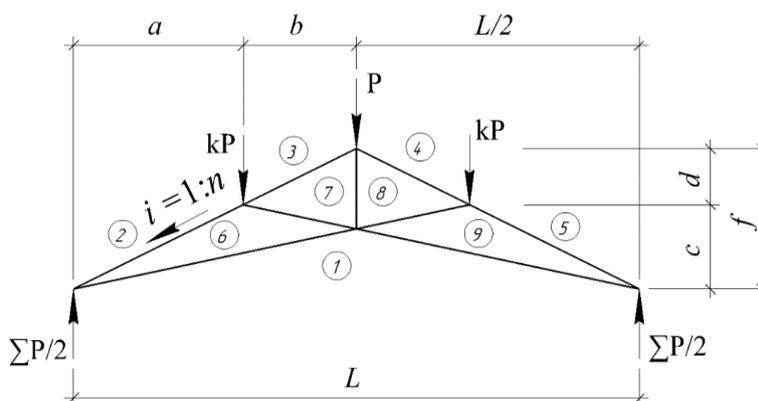


Рис. 2. Расчетная схема конструкции в параметрическом виде
Figure 2. Calculation scheme of the structure in the parametric form

Опыт проектирования распорных конструкций показывает, что по мере уменьшения стрелы подъема f усилия в элементах фермы будут увеличиваться. Что же касается положения элементов нижнего пояса, возникает задача определения уклонов кровли (или стрелы подъема), при которых сечения элементов фермы будут рациональными. В качестве критерия эффективности принимаем величину усилий в элементах конструкции. В итоге это напрямую влияет на ее материалоемкость. Попытаемся установить зависимость величин усилий от стрелы подъема.

Рассмотрим деревянную треугольную ферму пролетом L 12 метров и проанализируем конструктивные решения с различными уклонами элементов верхнего пояса $i = 2f/L$: 1/4; 1/3; 1/2; 1/2,5; 1/1.

Общий алгоритм поиска эффективного решения включает следующие этапы:

- построение диаграммы усилий М–К для различных значений фактора $i = 2f/L$;
- определение значений усилий по диаграмме;
- выявление характера зависимости усилий от фактора i ;
- анализ результатов исследований.

Предложенный алгоритм исследования реализован в среде табличного процессора MS Excel.

3. Результаты и обсуждение

Нагрузки для всех вариантов конструктивных решений выполнены эталонной нагрузкой: наименьшее значение одной из сосредоточенных сил принято равным единице, другие же значения получены с учетом разницы грузовых площадей покрытия, приходящихся на соответствующие узлы верхнего пояса фермы (рис. 3).

С помощью диаграммы определяется значение усилий в решетчатой конструкции. На рис. 3 номерами обозначены зоны (с 1 по 8) для построения диаграммы. Длины отрезков соответствуют значениям усилий в элементах фермы. Например, в элементе между зонами 2 и 6 (далее № 2–6) возникает усилие, равное длине отрезка на диаграмме между точками с такими номерами. Кроме того, диаграмма позволяет определить знаки усилий: растяжение или сжатие.

При построении диаграмм отмечена закономерность: изменение координаты точек (абсцисс) диаграммы обратно пропорционально изменению стрелы подъема f . Фигура диаграммы изменяет только свою длину. Высота диаграммы зависит от величины нагрузки, то есть значения P .

Таким образом, в случае возникновения необходимости пересчета вариантов конструкций для различных значений стрелы подъема f появляется возможность избежать процессов корректировки и экспертизы конечноэлементной модели (КЭМ). При этом достаточно отмасштабировать диаграмму М–К с учетом соотношения величин стрелы подъема f исходной и конечной схем фермы, а затем снимать значения усилий с готовой диаграммы.

Зависимость усилий в элементах фермы от изменения уклона верхнего пояса конструкции (далее – уклона кровли) носит нелинейный характер. Это и является предметом исследования.

Для обеспечения объективности оценки данной зависимости рассмотрим варианты конструктивных решений фермы с постоянным шагом изменения уклона кровли: от 20 до 100 % с шагом 10 %. То есть при $i = 2f/L = 1/5; 1/3,33; 1/2,5; 1/2; 1/1,67; 1/1,43; 1/1,25; 1/1,11; 1/1$ (или при $i = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$).

Значения усилий в элементах исследуемой конструкции, установленных по диаграмме М–К, представлены в табл. 1.

На основании данных табл. 1 построим диаграмму (рис. 4), предварительно сгруппировав одинаковые значения данных, и проведем ее анализ. Диаграмма на рис. 4 отражает значения продольных усилий N в элементах фермы в зависимости от уклона кровли. Величины отношения значений усилий к их минимальному значению (в данном случае при уклоне кровли 1:1) приведены в табл. 2.

Диаграмма на рис. 5 отражает значения усилий в элементах фермы в зависимости от уклона кровли. Анализируя диаграмму на рис. 5, можно наблюдать закономерность значений приращений усилий, которые приведены в табл. 2.

Данные табл. 3 показывают, что по мере понижения уклона кровли значения приращений на каждом шаге увеличиваются с 27 % в два раза. Однако этих данных недостаточно. Для достижения объективности анализа полученных данных необходимо установить функциональную зависимость выходных данных от значений варьируемого параметра. В данном случае это зависимость изменения значений внутренних усилий в элементах фермы от соотношения стрелы подъема к пролету исследуемой конструкции, которое выражается с помощью величины уклона кровли: $i = 2f/L$, то есть отношением стрелы подъема к половине пролета.

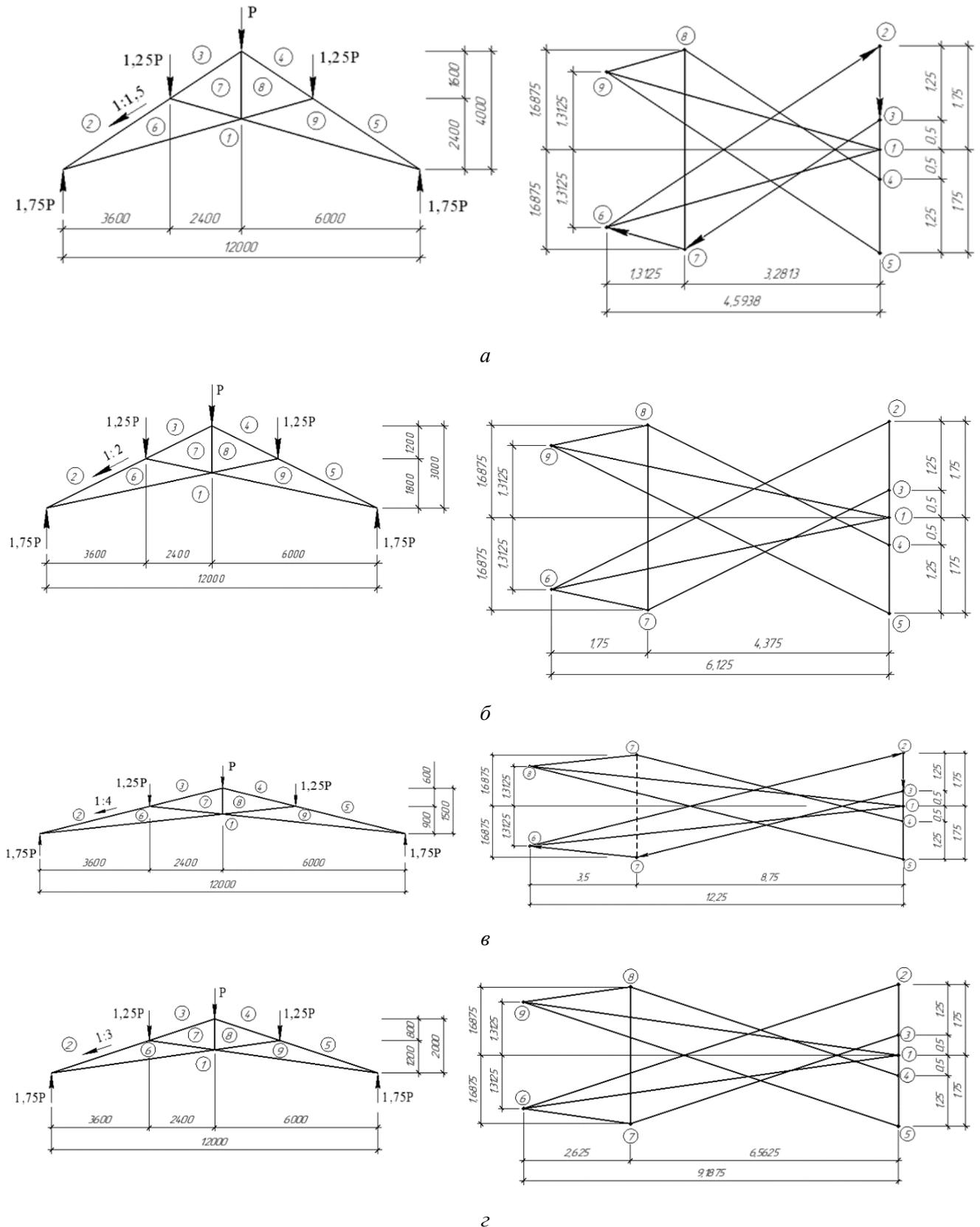


Рис. 3. Диаграмма М-К для фермы пролетом $L = 12$ м:
 $a - f = 4$ м ($i = 1:1,5$); $б - f = 3$ м ($i = 1:2$); $в - f = 2$ м ($i = 1:3$); $г - f = 1,5$ м ($i = 1:4$)
Figure 3. Maxwell – Cremona diagram (thereafter M–C) of for a truss with span $L = 12$ m:
 $a - f = 4$ m ($i = 1:1.5$); $б - f = 3$ m ($i = 1:2$); $в - f = 2$ m ($i = 1:3$); $г - f = 1,5$ m ($i = 1:4$)

Таблица 1

 Значения усилий N в элементах ферм, установленных по диаграмме М–К

№ элементов	Уклон 1:n								
	1:5	1:3,33	1:2,5	1:2	1:1,67	1:1,43	1:1,25	1:1,11	1:1
	Уклон i , в долях								
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1–9 (НП)	15,369	10,292	7,768	6,264	5,270	4,568	4,047	3,647	3,332
1–6 (НП)	15,369	10,292	7,768	6,264	5,270	4,568	4,047	3,647	3,332
2–6 (ВП)	15,616	10,658	8,246	6,848	5,952	5,340	4,902	4,578	4,331
3–7 (ВП)	11,154	7,613	5,890	4,891	4,252	3,815	3,502	3,270	3,094
4–8 (ВП)	11,154	7,613	5,890	4,891	4,252	3,815	3,502	3,270	3,094
5–9 (ВП)	15,616	10,658	8,246	6,848	5,952	5,340	4,902	4,578	4,331
6–7 (Р/НП)	4,391	2,941	2,219	1,790	1,506	1,305	1,156	1,042	0,952
7–8 (Р/НП)	3,375	3,375	3,375	3,375	3,375	3,375	3,375	3,375	3,375
8–9 (Ст)	4,391	2,941	2,219	1,790	1,506	1,305	1,156	1,042	0,952

Примечание: НП – нижний пояс конструкции; ВП – верхний пояс конструкции; Р/НП – элементы решетки, являющиеся продолжением ветвей НП; Ст – стойка.

Table 1

 Values of forces N in the elements of the trusses assigned according to the M–C diagram

Number of elements	Slope 1:n								
	1:5	1:3.33	1:2.5	1:2	1:1.67	1:1.43	1:1.25	1:1.11	1:1
	Slope i , in fractions								
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1–9 (LB)	15.369	10.292	7.768	6.264	5.270	4.568	4.047	3.647	3.332
1–6 (LB)	15.369	10.292	7.768	6.264	5.270	4.568	4.047	3.647	3.332
2–6 (UB)	15.616	10.658	8.246	6.848	5.952	5.340	4.902	4.578	4.331
3–7 (UB)	11.154	7.613	5.890	4.891	4.252	3.815	3.502	3.270	3.094
4–8 (UB)	11.154	7.613	5.890	4.891	4.252	3.815	3.502	3.270	3.094
5–9 (UB)	15.616	10.658	8.246	6.848	5.952	5.340	4.902	4.578	4.331
6–7 (S/LB)	4.391	2.941	2.219	1.790	1.506	1.305	1.156	1.042	0.952
7–8 (G/LB)	3.375	3.375	3.375	3.375	3.375	3.375	3.375	3.375	3.375
8–9 (R)	4.391	2.941	2.219	1.790	1.506	1.305	1.156	1.042	0.952

Note: LB – lower belt of the structure; UP – upper belt of the structure; G/LB – grid elements, which are extensions of LB branches; R – rack.

Таблица 2

 Отношения значений усилий в каждом элементе фермы к соответствующему минимальному значению N_i/N_{\min}

№ элементов	Уклон 1:n								
	1:5	1:3,33	1:2,5	1:2	1:1,67	1:1,43	1:1,25	1:1,11	1:1
	Уклон i , в долях								
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1–6, 1–9 (НП)	4,613	3,089	2,331	1,880	1,582	1,371	1,215	1,095	1,0
2–6, 5–9 (ВП)	3,606	2,461	1,904	1,581	1,374	1,233	1,132	1,057	1,0
3–7, 4–8 (ВП)	3,606	2,461	1,904	1,581	1,374	1,233	1,132	1,057	1,0
6–7, 8–9 (Р/НП)	4,613	3,089	2,331	1,880	1,582	1,371	1,215	1,095	1,0
7–8 (Ст)	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Примечание: НП – нижний пояс конструкции; ВП – верхний пояс конструкции; Р/НП – элементы решетки, являющиеся продолжением ветвей НП; Ст – стойка.

Table 2

The ratio of the force values in each truss element to the corresponding minimal value N_i/N_{min}

Number of elements	Slope 1:n								
	1:5	1:3.33	1:2.5	1:2	1:1.67	1:1.43	1:1.25	1:1.11	1:1
	Slope i , in fractions								
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1–6, 1–9 (LB)	4.613	3.089	2.331	1.880	1.582	1.371	1.215	1.095	1.0
2–6, 5–9 (UB)	3.606	2.461	1.904	1.581	1.374	1.233	1.132	1.057	1.0
3–7, 4–8 (UB)	3.606	2.461	1.904	1.581	1.374	1.233	1.132	1.057	1.0
6–7, 8–9 (G/LB)	4.613	3.089	2.331	1.880	1.582	1.371	1.215	1.095	1.0
7–8 (R)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Note: LB – lower belt of the structure; UP – upper belt of the structure; G/LB – grid elements, which are extensions of LB branches; R – rack.

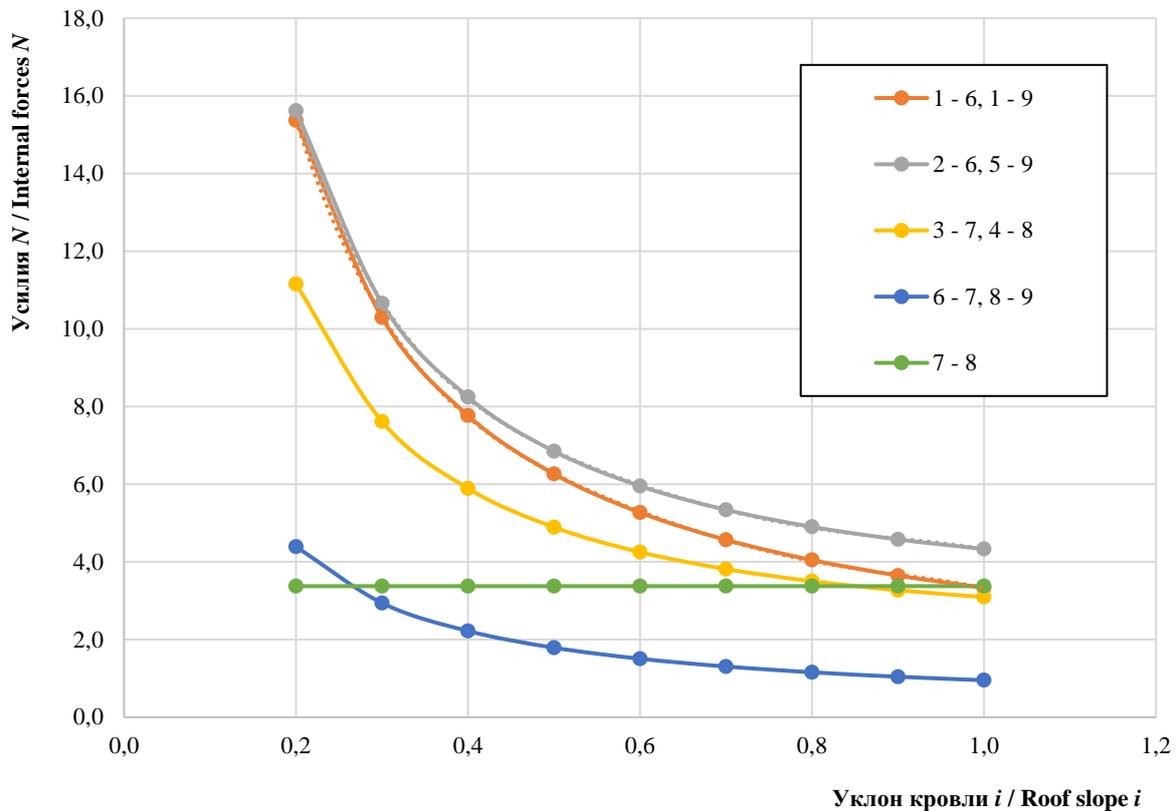


Рис. 4. Диаграмма значений продольных усилий N в элементах фермы от единичной нагрузки ($P = 1$) в зависимости от уклона кровли
 Figure 4. Diagram of the values of longitudinal forces N in the truss elements from a singular load ($P = 1$) depending on the roof slope

Таблица 3

Приращения усилий для каждого шага изменения уклона кровли i

№ элементов	Уклон 1:n								
	1:5	1:3,33	1:2,5	1:2	1:1,67	1:1,43	1:1,25	1:1,11	1:1
	Уклон i , в долях								
	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
1–6, 1–9 (НП)	5,076	2,524	1,504	0,994	0,703	0,521	0,400	0,315	
2–6, 5–9 (ВП)	4,958	2,412	1,398	0,896	0,612	0,438	0,324	0,247	
3–7, 4–8 (ВП)	3,541	1,723	0,999	0,640	0,437	0,313	0,232	0,176	
6–7, 8–9 (Р/НП)	1,450	0,721	0,430	0,284	0,201	0,149	0,114	0,090	
7–8 (Ст)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Примечание: НП – нижний пояс конструкции; ВП – верхний пояс конструкции; Р/НП – элементы решетки, являющиеся продолжением ветвей НП; Ст – стойка.

Table 3

 The force increments for each step of the changing in roof slope i

Number of elements	Slope 1:n								
	1:5	1:3.33	1:2.5	1:2	1:1.67	1:1.43	1:1.25	1:1.11	1:1
	Slope i , in fractions								
	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	1.000
1–6, 1–9 (LB)	5.076	2.524	1.504	0.994	0.703	0.521	0.400	0.315	
2–6, 5–9 (UB)	4.958	2.412	1.398	0.896	0.612	0.438	0.324	0.247	
3–7, 4–8 (UB)	3.541	1.723	0.999	0.640	0.437	0.313	0.232	0.176	
6–7, 8–9 (G/LB)	1.450	0.721	0.430	0.284	0.201	0.149	0.114	0.090	
7–8 (R)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Note: LB – lower belt of the structure; UP – upper belt of the structure; G/LB – grid elements, which are extensions of LB branches; R – rack.

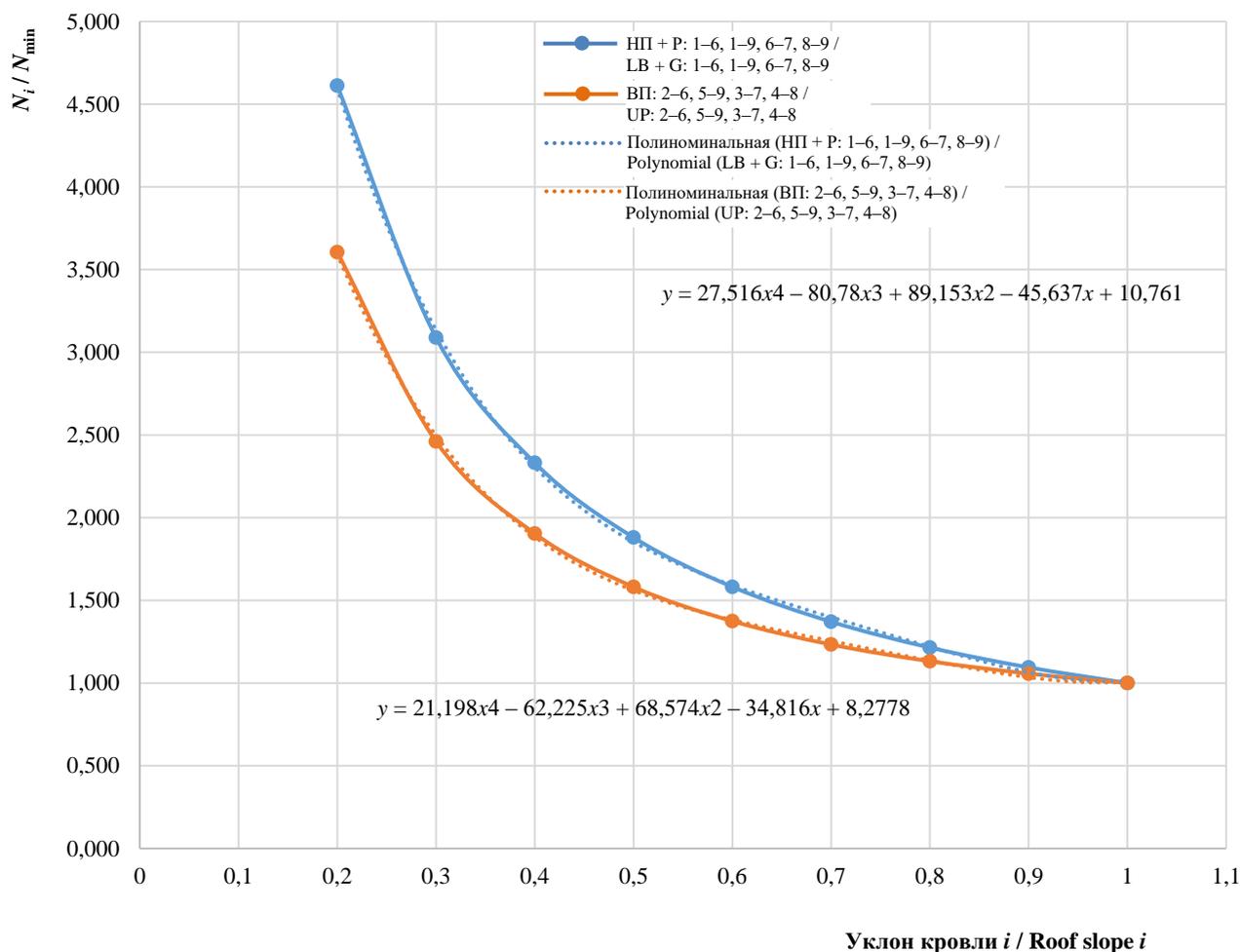


Рис. 5. Диаграмма величин отношения значений усилий в элементах фермы N_i к их минимальному значению N_{\min} (НП + Р – нижний пояс и решетка; ВП – верхний пояс) /

Figure 5. Diagram of the ratio of force values in the truss elements N_i to their minimum value N_{\min} (LB + G – lower belt and grid; UB – upper belt)

Результаты аппроксимации показывают, что для характера возрастания усилий в элементах нижнего пояса фермы и решетки (кроме стойки) справедлива следующая функциональная зависимость (рис. 5):

$$y_1 = 27,516x^4 - 80,78x^3 + 89,153x^2 - 45,637x + 10,761. \quad (1)$$

Степень возрастания усилий в элементах верхнего пояса фермы характеризуется функцией

$$y_2 = 21,198x^4 - 62,225x^3 + 68,574x^2 - 34,816x + 8,2778. \quad (2)$$

Как известно, ускорение возрастания или убывания функции характеризуется ее производной. Тогда производная функции (1) примет вид

$$y_1' = 110,064x^3 - 242,34x^2 + 178,31x - 45,637. \quad (3)$$

Производная функции (2) будет иметь вид

$$y_2' = 84,792x^3 - 186,68x^2 + 137,15x - 34,816. \quad (4)$$

На рис. 5 приведены графики производных функций y_1' и y_2' , представленные выражениями (3) и (4). Анализ графиков показывает, что минимальные значения усилий в элементах фермы возникают при уклонах верхнего пояса конструкции в диапазоне $i = 0,6-1,0$. Этот диапазон и будет являться областью его эффективных значений (рис. 6).

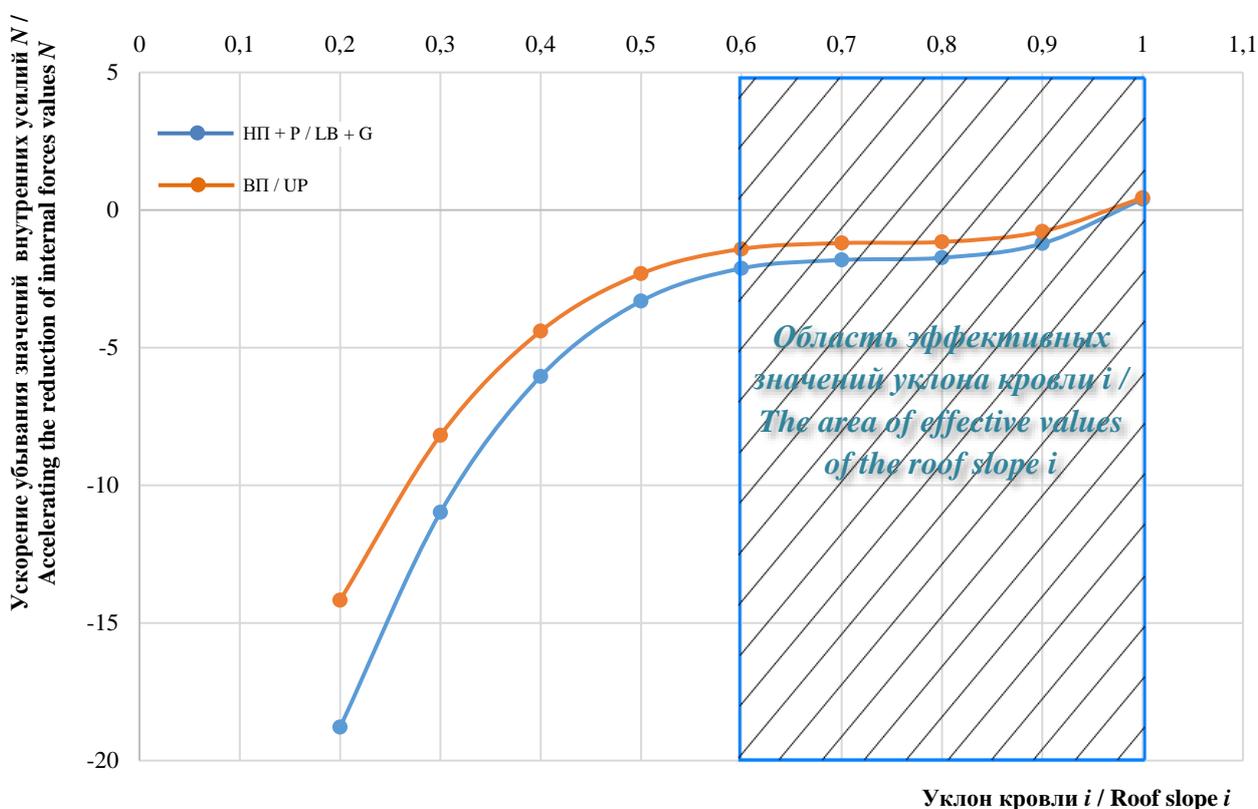


Рис. 6. Графики производных функций, характеризующих ускорение изменения усилий в элементах ферм в зависимости от уклона кровли

Figure 6. Graphs of derivative functions characterizing the acceleration of force changes in truss elements depending on the roof slope

Результаты проведенного исследования показывают, что инженеры могут варьировать форму диаграммы усилий $M-K$ по своему усмотрению и тем самым регулировать жесткостные характеристики элементов конструкции, при этом существует возможность визуализировать процесс работы графически.

Растущий спрос на изготовление конструкций с эффективным использованием материалов требует применения интуитивно понятных инструментов, позволяющих проектировщикам использовать взаимосвязь между формой конструкции и усилиями в ее элементах на начальных стадиях процесса проектирования. Учитывая современные возможности автоматизированного проектирования, решение поставленных задач при помощи диаграммы Максвелла – Кремоны становится достаточно быстрым и наглядным.

Изначально рассчитывать ферму удобнее и быстрее в специализированных расчетных комплексах, но затем, пользуясь графическим методом определения усилий М–К, можно проверять варианты уклона кровли в поиске рационального решения конструкции фермы типа «ножницы».

4. Заключение

Предложен алгоритм поиска эффективного конструктивного решения ферм типа «ножницы». В результате геометрическая основа преобразуется в вычислительную, которая позволяет в режиме реального времени плавно проводить аппроксимацию и вычислять усилия в элементах. Установлена зависимость значений усилий от величины стрелы подъема: изменение координаты точек (абсцисс) диаграммы обратно пропорционально изменению f .

Выявлено, что по мере уменьшения уклона кровли значения приращений усилий в элементах фермы на каждом шаге увеличиваются с 27 % в два раза. На основании графического анализа полученных данных определен диапазон эффективных значений уклона кровли, при котором усилия в элементах фермы принимают минимальные значения: $i = 0,6–1,0$. Таким образом, предлагаемый метод способствует выбору более экономичных конструктивных решений.

Проведенный расчет методом Максвелла – Кремоны продемонстрировал, что современный уровень развития математических алгоритмов для строительных конструкций дает возможность находить рациональные конструктивные решения графическим способом.

Но если САЕ-системы позволяют корректировать конечноэлементную модель путем масштабирования для придания требуемой высоты подъема f , то изменение положения точек примыкания ветвей нижнего пояса к верхнему более трудоемко. Следующий этап исследований будет посвящен изучению зависимости значений усилий в элементах ферм типа «ножницы» от положения точек сопряжения ветвей нижнего пояса с верхним (регулируется соотношением a/b , см. рис. 1).

Список литературы / References

1. Kromoser B., Braun M., Ortner M. Construction of all-wood trusses with plywood nodes and wooden pegs: a strategy towards resource-efficient timber construction. *Applied Sciences*. 2021;11(6):2568. <https://doi.org/10.3390/app11062568>
2. Roshchina S.I., Lukin M.V., Lukina A.V., Lisyatnikov M.S. Increased performance properties wood weakened bio-deterioration by modifying the adhesive composition based on an epoxy resin. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*. 2014;(4):182–184. (In Russ.)
Рощина С.И., Лукин М.В., Лукина А.В., Лисятников М.С. Повышение эксплуатационных свойств древесины, ослабленной биоповреждением, путем модификации клеевой композицией на основе эпоксидной смолы // Научно-технический вестник Поволжья. 2014. № 4. С. 182–184.
3. Sergeev M., Rimshin V., Lukin M., Zdralovic N. Multi-span composite beam. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;896:012058. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012058>
4. Ferretti F., Pozza L., Talledo D.A. Robustness analysis of historical timber roofs: a case study of the Gaggiandre shipyard at the Arsenale of Venice. *Buildings*. 2022;12(11):1773. <https://doi.org/10.3390/buildings12111773>
5. Lisitsky I.I., Zhadanov V.I., Rudnev I.V. Wooden trusses with nodal joints on glued flat rods. *Industrial and Civil Engineering*. 2020;(4):9–15. (In Russ.) <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2020.04.09-15>
Лисицкий И.И., Жаданов В.И., Руднев И.В. Деревянные фермы с узловыми соединениями на клеенных плоских стержнях // Промышленное и гражданское строительство. 2020. № 4. С. 9–15. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2020.04.09-15>
6. Nasiri B., Piccardo C., Hughes M. Estimating the material stock in wooden residential houses in Finland. *Waste Management*. 2021;135(1):318–326. <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2021.09.007>
7. Kuda D., Petříčková M. Modular timber gridshells. *Journal of Sustainable Architecture and Civil Engineering*. 2021;28(1):72–79. <https://doi.org/10.5755/j01.sace.28.1.27617>
8. Xu Z., Cui Y., Li B. Truss structure optimization design based on FE-PSO-SQP algorithm. In: Kountchev R., Mironov R., Nakamatsu K. (eds.) *New Approaches for Multidimensional Signal Processing. NAME SP2022. Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2022;332:151–158. https://doi.org/10.1007/978-981-19-7842-5_14
9. Wang S., Ma Y., Deng Z. Stretching-dominated truss lattice materials: elastic anisotropy evaluation, control, and design. *Composite Structures*. 2022;298(2):116004. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116004>
10. Zhidkov K.E., Zverev V.V., Kapyrin N.V. Experimental full-scale studies of wooden trusses on metal serrated plates. *Structural Mechanics and Structures*. 2021;(4):90–98. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.31.4.008>
Жидков К.Е., Зверев В.В., Капырин Н.В. Экспериментальные натурные исследования деревянных ферм на металлических зубчатых пластинах // Строительная механика и конструкции. 2021. № 4 (31). С. 90–98. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.31.4.008>

11. Xia Y., Langelaar M., Hendriks M.A.N. Optimization-based strut-and-tie model generation for reinforced concrete structures under multiple load conditions. *Engineering Structures*. 2022;266:114501. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114501>
12. He L., Li Q., Gilbert M., Shepherd P., Rankine C., Pritchard T., Reale V. Optimization-driven conceptual design of truss structures in a parametric modelling environment. *Structures*. 2022;37:469–482. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.12.048>
13. Massafra A., Prati D., Predari G., Gulli R. Wooden truss analysis, preservation strategies, and digital documentation through parametric 3D modeling and HBIM workflow. *Sustainability*. 2020;12(12):4975. <https://doi.org/10.3390/su12124975>
14. Medwadowski S.J. Aesthetics of wood structures. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 1983;26–2(88):31–50.
15. Kholodar B.G. Determination of truss stress-strain state with Cremona – Maxwell diagram. *Vestnik of Brest State Technical University*. 2016;(1):39–42. (In Russ.) Available from: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_36945943_89428079.pdf (accessed: 15.12.2022).
Холодарь Б.Г. Определение напряженно-деформированного состояния фермы с использованием диаграммы Максвелла – Кремоны // Вестник Брестского государственного технического университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (97). С. 39–42. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_36945943_89428079.pdf (дата обращения: 15.12.2022).
16. Millar C., McRobie A., Baker W.F. A graphical method for determining truss stability. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 2020;61(4):285–295. <https://doi.org/10.20898/j.iass.2020.011>
17. Khokhlov A.V. Properties of loading and unloading diagrams generated by a nonlinear maxwell-type determining relation for rheonomic materials. *Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 2018;22(2):293–324. (In Russ.) <https://doi.org/10.14498/vsgtu1573>
18. Хохлов А.В. Свойства диаграмм нагружения и разгрузки, порождаемых нелинейным определяющим соотношением типа максвелла для реономных материалов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 293–324. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1573>
18. Kromoser B., Braun M., Ortner M. Construction of all-wood trusses with plywood nodes and wooden pegs: a strategy towards resource-efficient timber construction. *Applied Sciences*. 2021;11(6):2568. <https://doi.org/10.3390/app11062568>
19. Beghini L.L., Carrion J., Beghini A., Mazurek A., Baker W.F. Structural optimization using graphic statics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013;49:351–366. <https://doi.org/10.1007/s00158-013-1002-x>
20. Millar C.G., McRobie A. Graphic stability of generalised motions. *International Journal of Solids and Structures*. 2022;256:111787. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111787>



ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК GEOMETRICAL MODELING OF SHELL FORMS

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-210-219

EDN: CWWLDM

UDC 624.074.4:514:72

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Surfaces with a main framework of three given curves which include one circle

Sergey N. Krivoshapko

RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ sn_krivoshapko@mail.ru

Article history

Received: January 22, 2023

Revised: March 18, 2023

Accepted: March 20, 2023

For citation

Krivoshapko S.N. Surfaces with a main framework of three given curves which include one circle. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):210–219. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-210-219>

Abstract. Superellipses are becoming more and more in demand in various branches of science and national economy due to their versatility. They found the most application in shipbuilding. Suggestions for the use of superellipses in architecture and construction have appeared recently. The author proposes explicit and parametric equations of surfaces with a main framework of three predetermined superellipses lying in three coordinate planes. These equations describe a large set of analytical shapes suitable for the formation middle surfaces of thin building shells. One of the superellipses is taken in a form of a circle. The shells can be designed on circular and rhombic plans, and also on plans in the shape of superellipses of general type with convex and concave sides. All recommended surfaces are illustrated in 24 examples using computer graphics. A network of curvilinear non-orthogonal coordinates is generated on the surfaces using dimensionless independent parameters. The considered surfaces can become a part of the reserve of surfaces for further application in real structures and facilities.

Keywords: superellipse, rhombus, cylindroid, cone, translation surface

Поверхности с главным каркасом из трех заданных кривых, одна из которых – окружность

С.Н. Кривошапко

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ sn_krivoshapko@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 22 января 2023 г.

Доработана: 18 марта 2023 г.

Принята к публикации: 20 марта 2023 г.

Аннотация. Благодаря своей универсальности суперэллипсы становятся все более востребованными в различных отраслях науки. Наибольшее применение они нашли в судостроении. В последнее время появились предложения по использованию суперэллипсов в архитектуре и строительстве.

Sergey N. Krivoshapko, DSc, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9385-3699; sn_krivoshapko@mail.ru

Кривошапко Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-9385-3699; sn_krivoshapko@mail.ru

© Krivoshapko S.N., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Для цитирования

Krivoshapko S.N. Surfaces with a main framework of three given curves which include one circle // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 210–219. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-210-219>

Предлагаются явные и параметрические уравнения поверхностей с главным каркасом из трех заранее заданных суперэллипсов, лежащих в трех координатных плоскостях. Эти уравнения описывают большой набор аналитических форм, пригодных для формирования срединных поверхностей тонких строительных оболочек. Один из суперэллипсов взят в виде окружности. Оболочки можно проектировать на круглом и ромбическом планах, а также на планах в форме суперэллипсов общего вида с выпуклыми и вогнутыми сторонами. Все рекомендуемые поверхности проиллюстрированы на 24 примерах средствами компьютерной графики. С помощью безразмерных независимых параметров на поверхностях сформирована сеть криволинейных неортогональных координат. Рассматриваемые поверхности могут войти в резерв поверхностей для дальнейшего использования в реальных конструкциях и сооружениях.

Ключевые слова: суперэллипс, ромб, цилиндроид, круговой конус, поверхность переноса

1. Introduction

Until recently, surfaces with a given three flat curves of the main framework in three coordinate planes were in demand in shipbuilding to form the hulls of surface and underwater vessels [1–3]. Then there were proposals to use superellipses as flat curves of the main framework [4–6]. This made it possible to significantly expand the number of shapes for ship hulls.

In [7–8] it was first proposed to use thin shells with median surfaces containing three flat super ellipses of the main frame in construction and architecture. For the first time, a calculation was carried out for a distributed load of the self-weight type using the SCAD computer complex [7]. An attempt was made to find the most optimal shell from the three shells with the same main frame.

It is noted in [9] that surfaces containing superellipses are becoming more and more in demand due to their universality in various branches of science [10] and national economy [11]. However, some geometric problems for such surfaces are still unsolved.

It was assumed in [6; 7; 12] that the plane curves of the main frame of the considered surfaces are given in the form:

– the first curve of the main frame in the plane xOy (curve $z = 0$):

$$|y|^r = W^r \left(1 - \frac{|x|^t}{L^t} \right); \quad (1)$$

– the second curve of the main frame in the plane yOz (curve $x = 0$):

$$|z|^n = T^n \left(1 - \frac{|y|^m}{W^m} \right); \quad (2)$$

– the third curve of the main frame in the plane xOz (curve $y = 0$):

$$|z|^s = T^s \left(1 - \frac{|x|^k}{L^k} \right), \quad (3)$$

where for convex curves $r, t, n, m, s, k > 1$; for concave curves $r, t, n, m, s, k < 1$.

The curves (1)–(3) are superellipses [13]. In formulas (1)–(3) it is necessary to take $r = t, n = m, s = k$.

Using the methodology described in [6; 12; 14], it is possible to obtain explicit equations for three algebraic surfaces with the same main skeleton (1)–(3) and with the generating family of the same-type sections $x = \text{const}$:

$$|z| = T(1 - |x|^k/L^k)^{1/s} [1 - |y/W|^m / (1 - |x/L|^t)^{m/r}]^{1/n}, \quad (4)$$

with the generating family of the same-type sections $y = \text{const}$:

$$|z| = T(1 - |y|^m/W^m)^{1/n} [1 - |x/L|^k / (1 - |y/W|^r)^{k/t}]^{1/s}, \quad (5)$$

and with the generating family of the same-type sections $z = \text{const}$:

$$|y| = W(1 - |z|^n/T^n)^{1/m} [1 - |x/L|^t / (1 - |z/T|^s)^{t/k}]^{1/r}, \quad (6)$$

where $-L \leq x \leq L$, $-W \leq y \leq W$, $0 \leq z \leq T$.

The explicit surface equations (4)–(6) can be transferred to a parametric form of setting:

$$x = x(u) = \pm uL, y = y(u, v) = vW[1 - u^t]^{1/r}, z = z(u, v) = T[1 - u^k]^{1/s} [1 - |v|^m]^{1/n}; \quad (7)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u^r]^{1/t}, y = y(u) = \pm uW, z = z(u) = T[1 - u^m]^{1/n} [1 - |v|^k]^{1/s}; \quad (8)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u^s]^{1/k}, y = y(u, v) = \pm W[1 - u^n]^{1/m} [1 - |v|^t]^{1/r}, z = z(u) = uT, \quad (9)$$

where $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$; u, v – dimensionless parameters.

Equations (4)–(9) were used in [15] to create five groups of new linear surfaces. Some of these linear surfaces were taken as the middle surfaces of thin building shells, for which their stress-strain state under the action of the static load of the self-weight type was studied in [16; 17].

2. Materials and methods

2.1. Possible triples of surfaces with a main framework of three flat curves, one of which is a circle

As is known, the circle is one of the main curves used in the design of curvilinear surfaces of thin shells in construction. Let suppose that the superellipses (2) is a semicircle, then we have:

$$n = m = 2 \text{ and } T = W, z \geq 0. \quad (10)$$

With this assumption, we can obtain four groups of surfaces containing the semicircle (10). Each group will contain three surfaces with the same main frame.

2.1.1. The first triple of surfaces. If the superellipses (1) and (3) decompose into rhombuses, then $r = t = s = k = 1$. The triple surface equations (4)–(6) with the same main frame will have the form:

– a surface formed by a family of straight lines in the planes $x = \text{const}$:

$$z = \left[\left(1 - \frac{|x|}{L} \right)^2 T^2 - y^2 \right]^{1/2}; \quad (11)$$

– a surface formed by a family of straight lines in the planes $y = \text{const}$:

$$z = T \left(1 - \frac{y^2}{W^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{|x|}{L \left(1 - \frac{|y|}{W} \right)} \right]; \quad (12)$$

– a surface formed by a family of straight lines in the planes $z = \text{const}$:

$$|y| = W \left(1 - \frac{z^2}{T^2} \right) \left(1 + \frac{z}{T} \right) \left(1 - \frac{z}{T} - \frac{|x|}{L} \right). \quad (13)$$

The explicit surface equations (11)–(13) can be written in the parametric form (7)–(9).

$$x = x(u) = \pm uL, y = y(u, v) = vW[1 - u], z = z(u, v) = T[1 - u][1 - v^2]^{1/2}; \quad (11a)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u], y = y(u) = \pm uW, z = z(u) = T[1 - u^2]^{1/2}[1 - |v|]; \quad (12a)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u], y = y(u, v) = \pm W[1 - u^2]^{1/2}[1 - |v|], z = z(u) = uT. \quad (13a)$$

Figure 1 shows a triple of surfaces with the same main frame with dimensions $T = W = 5$ m, $L = 7$ m.

The presented triple of surfaces consists of a composite conical surface (Figure 1, a) [18] and two cylinders (Figure 1, b, c) [19].

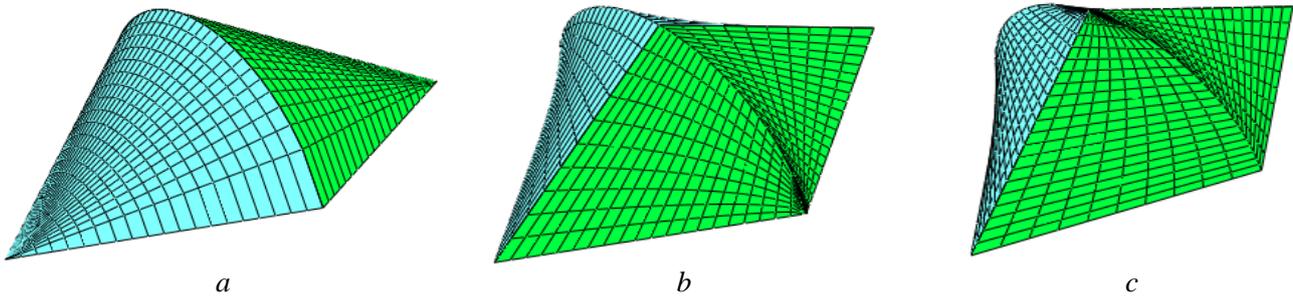


Figure 1. Analytical surfaces on a rhombic plan (the first triple):

a – the surface is created using the formulas (11a); b – the surface is created using the formulas (12a); c – the surface is created using the formulas (13a)

2.1.2. The second triple of surfaces. Let the superellips (1) decompose into a rhombus, then $r = t = 1$, $n = m = 2$. The equations of the triples of surfaces (4)–(6) with the same main frame will take the form: surface formed by a family of circles in the planes $x = \text{const}$:

$$|z| = T(1 - |x|^k/L^k)^{1/s} [1 - (y/W)^2/(1 - |x|/L)^2]^{1/2}, \quad (14)$$

with a generating family of sections of the same type $y = \text{const}$:

$$|z| = T(1 - |y|^2/W^2)^{1/2} [1 - |x|/L/(1 - |y|/W)^k]^{1/s}, \quad (15)$$

and with a generating family of sections of the same type $z = \text{const}$:

$$|y| = W(1 - |z|^2/T^2)^{1/2} [1 - |x|/L/(1 - |z|/T)^s]^{1/k}, \quad (16)$$

where $-L \leq x \leq L$, $-W \leq y \leq W$, $0 \leq z \leq T$.

The explicit surface equations (14)–(16) can be transferred into a parametric form of setting:

$$x = x(u) = \pm uL, y = y(u, v) = vW[1 - u], z = z(u, v) = T[1 - u^k]^{1/s}[1 - v^2]^{1/2}; \quad (14a)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u], y = y(u) = \pm uW, z = z(u) = T[1 - u^2]^{1/2}[1 - |v|^k]^{1/s}; \quad (15a)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u^s]^{1/k}, y = y(u, v) = \pm W[1 - u^2]^{1/2}[1 - |v|], z = z(u) = uT, \quad (16a)$$

where $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$; u, v – dimensionless parameters.

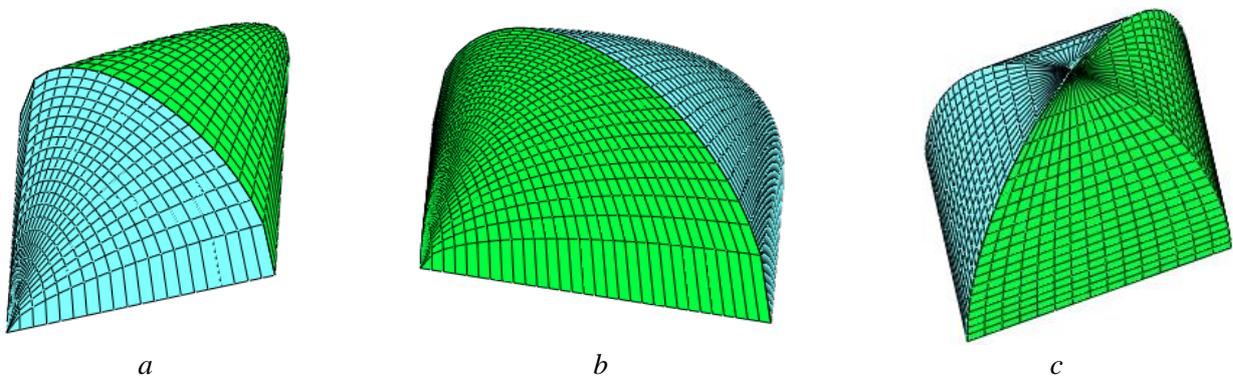


Figure 2. Analytical surfaces on a rhombic plan (the second triple):

a – the surface is created using the formulas (11a); b – the surface is created using the formulas (12a); c – the surface is created using the formulas (13a)

Figure 2 shows a triple of surfaces with the same main frame with dimensions $T = W = 5$ m, $L = 7$ m and with $s = k = 2$. The superellipsoids (3) is taken in the form of a simple ellipse.

2.1.3 The third triple of surfaces. Let the superellipsoid (3) decompose into a rhombus, then $s = k = 1$, $n = m = 2$. The equations for the triplet of surfaces (4)–(6) with the same main framework will take the form: surface formed by a family of circles in the planes $x = \text{const}$:

$$|z| = T(1 - |x|/L)[1 - |y/W|^2/(1 - |x/L|^t)^{2/r}]^{1/2}, \quad (17)$$

with a generating family of sections of the same type $y = \text{const}$:

$$|z| = T(1 - |y|^2/W^2)^{1/2}[1 - |x|/L/(1 - |y/W|^r)^{1/t}], \quad (18)$$

and with a generating family of sections of the same type $z = \text{const}$:

$$|y| = W(1 - z^2/T^2)^{1/2}[1 - |x/L|^t/(1 - |z/T|^s)^t]^{1/r}, \quad (19)$$

where $-L \leq x \leq L$, $-W \leq y \leq W$, $0 \leq z \leq T$.

The explicit surface equations (17)–(19) can be transferred into a parametric form of setting:

$$x = x(u) = \pm uL, y = y(u, v) = vW[1 - u^t]^{1/r}, z = z(u, v) = T[1 - u][1 - v^2]^{1/2}; \quad (17a)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u^r]^{1/t}, y = y(u) = \pm uW, z = z(u) = T[1 - u^2]^{1/2}[1 - |v|]; \quad (18a)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u], y = y(u, v) = \pm W[1 - u^2]^{1/2}[1 - |v|^t]^{1/r}, z = z(u) = uT, \quad (19a)$$

where $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$; u, v – dimensionless parameters.

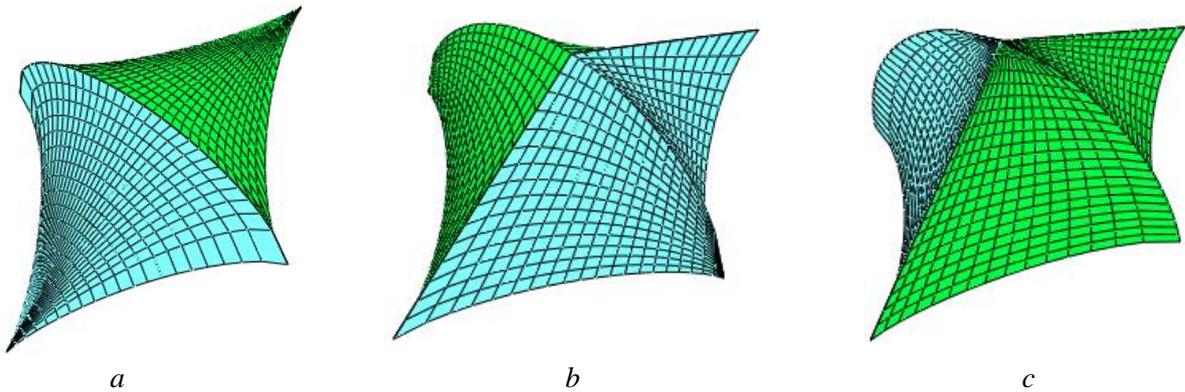


Figure 3. Analytical surfaces on the plan in the superellipsoidal form (the third triple):

a – the surface is created using the formulas (17a); *b* – the surface is created using the formulas (18a); *c* – the surface is created using the formulas (19a)

Figure 3 shows a triple of surfaces with the same main framework with dimensions $T = W = 5$ m, $L = 7$ m, and with $r = t = 3/4$.

2.1.4. The fourth triple of surfaces. To generate the fourth triple of surfaces, meet only conditions (10). In this case, equations (4)–(6) take the form:

– with the forming family of circles lying in the sections $x = \text{const}$:

$$|z| = T(1 - |x|^k/L^k)^{1/s}[1 - |y/W|^2/(1 - |x/L|^t)^{2/r}]^{1/2}; \quad (20)$$

– with a generating family of sections of the same type $y = \text{const}$:

$$|z| = T(1 - y^2/W^2)^{1/2}[1 - |x/L|^k/(1 - |y/W|^r)^{k/t}]^{1/s}; \quad (21)$$

– with a generating family of sections of the same type $z = \text{const}$:

$$|y| = W(1 - z^2/T^2)^{1/2} [1 - |x/L|^t / (1 - |z/T|^s)^{t/k}]^{1/r}, \quad (22)$$

where $-L \leq x \leq L$, $-W \leq y \leq W$, $0 \leq z \leq T$.

The explicit surface equations (20)–(21) can be transferred into a parametric form of setting:

$$x = x(u) = \pm uL, y = y(u, v) = vW[1 - u^t]^{1/r}, z = z(u, v) = T[1 - u^k]^{1/s}[1 - v^2]^{1/2}; \quad (20a)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u^r]^{1/t}, y = y(u) = \pm uW, z = z(u) = T[1 - u^2]^{1/2}[1 - |v|^k]^{1/s}; \quad (21a)$$

$$x = x(u, v) = vL[1 - u^s]^{1/k}, y = y(u, v) = \pm W[1 - u^2]^{1/2}[1 - |v|^t]^{1/r}, z = z(u) = uT, \quad (22a)$$

where $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$; u, v – dimensionless parameters.

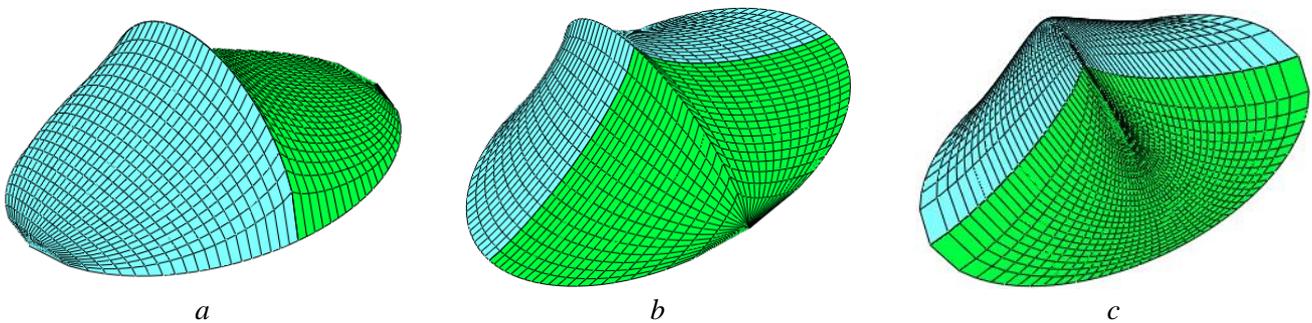


Figure 4. Analytical surfaces on an elliptical plan (the fourth triple):
 a – the surface is created using the formulas (20a); b – surface is created using the formulas (21a); c – surface is created using the formulas (22a)

Figure 4 shows a triple of surfaces with the same main framework with dimensions $T = W = 5$ m, $L = 7$ m and with $r = t = 2$, $s = k = 3/4$.

2.2. Triples of surfaces with the same main framework on a round plan

These surfaces are generated using the same formulas given above. It is only necessary to change the area of changes in the variable parameters u, v in the parametric equations and the area of changes in the Cartesian coordinates in the explicit equations. It is assumed that the Ox axis is directed upward, and that there is a circle in the yOz plane. When generating the new surfaces, the dimensions are left unchanged $T = W = 5$ m, $L = 7$ m, and $0 \leq x \leq L$, $-W \leq y \leq W$, $-T \leq z \leq T$, $n = m = 2$.

For the considered case, equations (7)–(9) will take the form:

$$x = x(u) = uL, y = y(u, v) = vW[1 - u^t]^{1/r}, z = z(u, v) = \pm T[1 - u^k]^{1/s}[1 - |v|^m]^{1/n}; \quad (23)$$

$$x = x(u, v) = |v|L[1 - u^r]^{1/t}, y = y(u) = \pm uW, z = z(u) = \pm T[1 - u^m]^{1/n}[1 - |v|^k]^{1/s}; \quad (24)$$

$$x = x(u, v) = |v|L[1 - u^s]^{1/k}, y = y(u, v) = \pm W[1 - u^n]^{1/m}[1 - |v|^t]^{1/r}, z = z(u) = \pm uT, \quad (25)$$

where $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$; u, v are dimensionless parameters.

Using parametric equations (23)–(25), the first triple of surfaces at $r = t = s = k = 1$ (Figure 5), the second triple of surfaces at $r = t = 1$, $s = k = 2$ (Figure 6), the third triple of surfaces at $s = k = 1$, $r = t = 3/4$ (Figure 7) and the fourth triple of surfaces at $r = t = 2$, $s = k = 3/4$ (Figure 8) are generated.

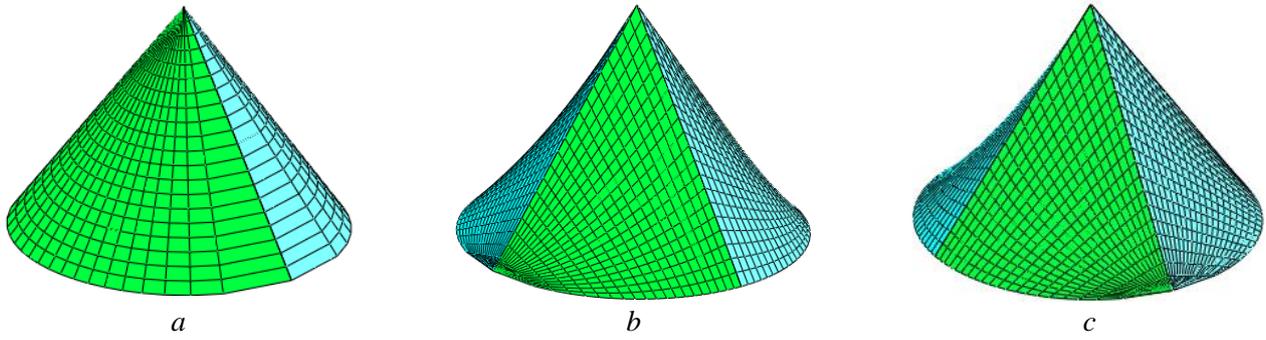


Figure 5. Analytical surfaces on a round plan (the first triple):

a – the surface is created using the formulas (23); *b* – the surface is created using the formulas (24); *c* – the surface is created using the formulas (25)

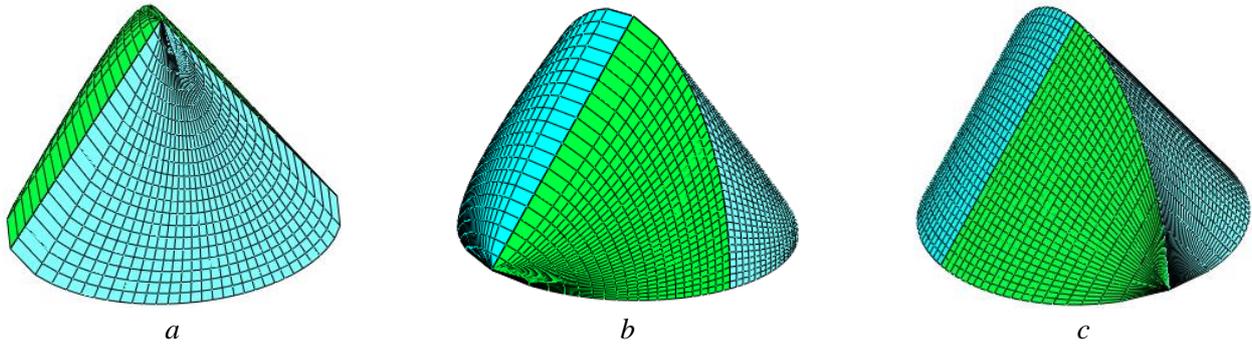


Figure 6. Analytical surfaces on a round plan (the second triple):

a – the surface is created using the formulas (23); *b* – the surface is created using the formulas (24); *c* – the surface is created using the formulas (25)

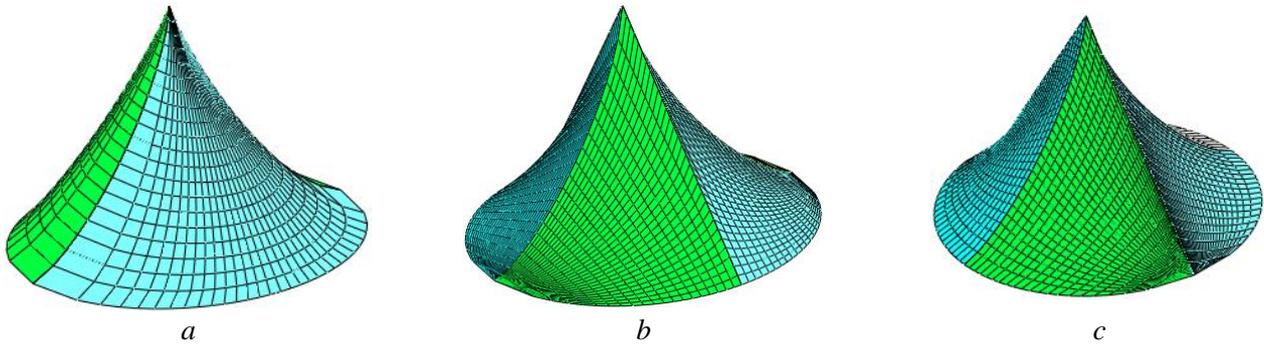


Figure 7. Analytical surfaces on a round plan (the third triple):

a – the surface is created using the formulas (23); *b* – the surface is created using the formulas (24); *c* – the surface is created using the formulas (25)

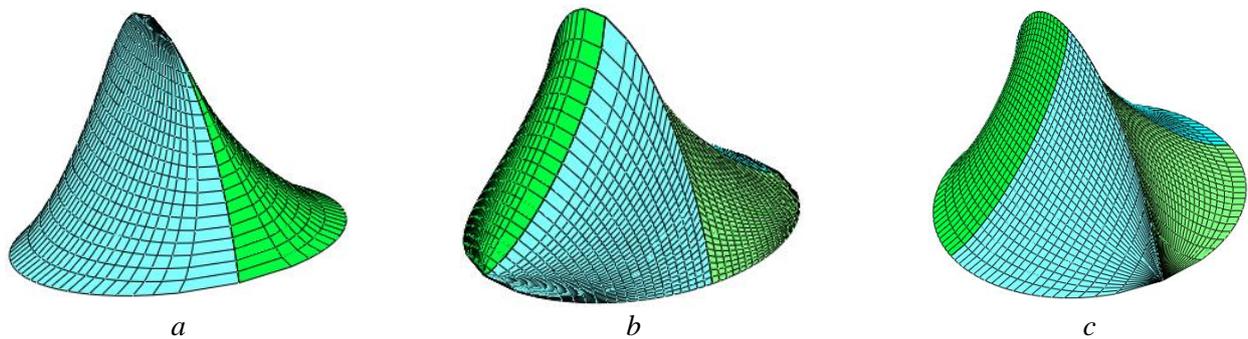


Figure 8. Analytical surfaces on a round plan (the fourth triple):

a – the surface is created using the formulas (23); *b* – the surface is created using the formulas (24); *c* – the surface is created using the formulas (25)

All the surfaces presented in this section are located on a circular basis on the plane yOz ($x = 0$). Several examples of surfaces on a circular plane with two superellipses in intersecting planes are considered in [20].

3. Results and discussion

The paper shows the formation of four triples of surfaces, based on previously obtained analytical and parametric equations of surfaces with the main framework of three superellipses. All the 12 surfaces contain a circle as one of the flat curves of the main framework. The presented surfaces are visualized graphically for better recognition of them by architects and builders. In the author's opinion, these surfaces can be taken as the basis for the shapes of building and mechanical engineering objects, as well as the linear surfaces proposed earlier in [15]. At the very least, these surfaces may be in the reserve of surfaces waiting for their application [21] within one of the architectural styles [22].

4. Conclusion

The considered surfaces need further study, both from the point of view of differential geometry and structural mechanics of shells (surface areas, volume of internal space, stress-strain state of thin shells with middle surfaces in the form of proposed surfaces, finding optimal shells according to selected optimality criteria, etc.). The number of surfaces with circles can be significantly expanded by changing the exponents in formulas (1), (3).

References

1. Ko K.H. A survey: application of geometric modeling techniques to ship modeling and design. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2010;2(4):177–184. <http://doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0034>
2. Avdonev E.Ya. Mathematical model of hull surface. *Prikladnaya Geometriya i Inzhenernaya Grafika* (issue 28). Kiev; 1979. p. 46–49. (In Russ.)
3. Karnevich V.V. Hydrodynamic surfaces with midship section in the form of the Lamé curves. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2021;22(4):323–328. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-4-323-328>
4. Ma Y.Q., Wang C.M., Ang K.K. Buckling of superellipsoidal shells under uniform pressure. *Thin-Walled Structures*. 2008;46(6):584–591. <http://doi.org/10.1016/j.fws.2008.01.013>
5. Moonesun M., Mahdion A., Korol Yu.M., Dadkhah M., Javadi M.M. Concepts in submarine shape design. *Indian Journal of Geo-Marine Sciences*. 2016;45(1):100–104.
6. Krivoshapko S.N. Algebraic ship hull surfaces with a main frame from three plane curves in coordinate planes. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2022;23(3):207–212. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-3-207-212>
7. Krivoshapko S.N., Aleshina O.O., Ivanov V.N. Static analysis of shells with middle surfaces containing the main frame from three given superellipses. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2022;(6):18–27. (In Russ.) <http://doi.org/10.37538/0039-2383.2022.6.18.27>
8. Strashnov S.V. Computer simulation of new forms of shell structures. *Geometry & Graphics*. 2022;(4):26–34. (In Russ.) <https://doi.org/10.12737/2308-4898-2022-10-4-26-34>
9. Erbaş K.C. Surface area of superellipsoids and its application to physics problems. *New Applications in Basic Sciences*. Iksad Publishing House; 2022. p. 39–63.
10. Elishakoff I., Elettro F. Interval, ellipsoidal, and super-ellipsoidal calculi for experimental and theoretical treatment of uncertainty: which one ought to be preferred? *International Journal of Solids and Structures*. 2014;51:1576–1586.
11. Abramovich N.A., Nesterovich N.D. Superellipse in eco-system APPLE. *Proceedings of the 54th International Scientific and Technical Conference of Professors and Students* (vol. 2). Vitebsk; 2021. p. 102–104. Available from: <http://rep.vstu.by/handle/123456789/14813> (accessed: 22.05.2022).
12. Krivoshapko S.N. Tangential developable and hydrodynamic surfaces for early stage of ship shape design. *Ships and Offshore Structures*. 2022;1–9. <https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2062165>
13. Huang W., Li Y., Niklas K.J., Gielis J., Ding Y., Cao L., Shi P. A superellipse with deformation and its application in describing the cross-sectional shapes of a square bamboo. *Symmetry*. 2020;12(12):2073. <https://doi.org/10.3390/sym12122073>
14. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Algebraic surfaces for rational ship hulls. *Tehnologiya Mashinostroeniya*. 2022;(3):17–24. (In Russ.)
15. Mamieva I.A. Ruled algebraic surfaces with a main frame from three superellipses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):387–395. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-387-395>
16. Aleshina O.O. Geometry and static analysis of thin shells in the form of a diagonal transfer surface of the velaroidal type. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):84–93. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-84-93>

17. Mamieva I.A., Karnevich V.V. Geometry and static analysis of thin shells with ruled median surfaces with a main frame of three superellipse. *Building and Reconstruction*. 2023;(1):16–27. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2023-105-1-16-27>, EDN LSIOLJ
18. Mamieva I.A., Razin A.D. Prominent space erections in the form of conic surfaces. *Industrial and Civil Engineering*. 2017;(10):5–11. (In Russ.)
19. Gil-oulbe M., Qbaily J. Geometric modeling and linear static analysis of thin shells in the form of cylindroids. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(6):502–508. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-6-502-508>
20. Karnevich V.V. Generating hydrodynamic surfaces by families of Lamé curves for modelling submarine hulls. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2022;23(1):30–37. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-1-30-37>
21. Gil-oulbe M. Reserve of analytical surfaces for architecture and construction. *Building and Reconstruction*. 2021;(6):63–72. <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-98-6-63-72>
22. Krivoshapko S.N., Bock Hyeng C.A., Gil-oulbe M. Stages and architectural styles in design and building of shells and shell structures. *Building and Reconstruction*. 2022;(4):112–131. <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-102-4-112-131>

Список литературы

1. Ко К.Н. A survey: application of geometric modeling techniques to ship modeling and design // *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2010. Vol. 2. Issue 4. Pp. 177–184. <http://doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0034>
2. Авдоньев Е.Я. Математическая модель корпусной поверхности // *Прикладная геометрия и инженерная графика*. Киев, 1979. Вып. 28. С. 46–49.
3. Karnevich V.V. Hydrodynamic surfaces with midship section in the form of the Lamé curves // *RUDN Journal of Engineering Research*. 2021. Vol. 22. Issue 4. Pp. 323–328. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-4-323-328>
4. Ma Y.Q., Wang C.M., Ang K.K. Buckling of superellipsoidal shells under uniform pressure // *Thin-Walled Structures*. 2008. Vol. 46. Issue 6. Pp. 584–591. <http://doi.org/10.1016/j.fws.2008.01.013>
5. Moonesun M., Mahdion A., Korol Yu.M., Dadkhah M., Javadi M.M. Concepts in submarine shape design // *Indian Journal of Geo-Marine Sciences*. 2016. Vol. 45. Issue 1. Pp. 100–104.
6. Кривошапко С.Н. Алгебраические судовые поверхности с каркасом из трех плоских кривых в координатных плоскостях // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования*. 2022. Т. 23. № 3. С. 207–212. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-3-207-212>
7. Кривошапко С.Н., Алёшина О.О., Иванов В.Н. Статический расчет оболочек, очерченных по поверхностям с главным каркасом из трех заданных суперэллипсов // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2022. № 6 (305). С. 18–27. <http://doi.org/10.37538/0039-2383.2022.6.18.27>
8. Страшинов С.В. Компьютерное моделирование новых форм строительных оболочек // *Геометрия и графика*. 2022. № 4. С. 26–34. <https://doi.org/10.12737/2308-4898-2022-10-4-26-34>
9. Erbaş K.C. Surface area of superellipsoids and its application to physics problems // *New Applications in Basic Sciences*. Iksad Publishing House, 2022. Pp. 39–63.
10. Elishakoff I., Elettro F. Interval, ellipsoidal, and super-ellipsoidal calculi for experimental and theoretical treatment of uncertainty: which one ought to be preferred? // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. Pp. 1576–1586.
11. Абрамович Н.А., Нестерович Н.Д. Суперэллипс в экосистеме APPLE // *Материалы докладов 54-й Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов: в 2 томах. Том 2*. Витебск, 2021. С. 102–104. URL: <http://rep.vstu.by/handle/123456789/14813> (дата обращения: 22.05.2022).
12. Krivoshapko S.N. Tangential developable and hydrodynamic surfaces for early stage of ship shape design // *Ships and Offshore Structures*. 2022. Pp. 1–9. <https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2062165>
13. Huang W., Li Y., Niklas K.J., Gielis J., Ding Y., Cao L., Shi P. A superellipse with deformation and its application in describing the cross-sectional shapes of a square bamboo // *Symmetry*. 2020. Vol. 12. Issue 12. <https://doi.org/10.3390/sym12122073>
14. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Алгебраические поверхности для рациональных судовых корпусов // *Технология машиностроения*. 2022. № 3. С. 17–24.
15. Мамиева И.А. Линейчатые алгебраические поверхности с главным каркасом из трех суперэллипсов // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 4. С. 387–395. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-387-395>
16. Алёшина О.О. Геометрия и статический расчет тонких оболочек в форме поверхности диагонального переноса велароидального типа // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 1. С. 84–93. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-84-93>

17. Мамиева И.А., Карневич В.В. Геометрия и статический расчет тонких оболочек с линейчатыми срединными поверхностями с главным каркасом из трех суперэллипсов // Строительство и реконструкция. 2023. № 1 (105). С. 16–27. <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2023-105-1-16-27>, EDN LSIOLJ
18. Мамиева И.А., Разин А.Д. Знаковые пространственные сооружения в форме конических поверхностей // Промышленное и гражданское строительство. 2017. № 10. С. 5–11.
19. Gil-oulbe M., Qbaily J. Geometric modeling and linear static analysis of thin shells in the form of cylinders // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2018. Vol. 14. No. 6. Pp. 502–508. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-6-502-508>
20. Карневич В.В. Построение гидродинамических поверхностей каркасами из кривых Ламе на примере корпуса подводной лодки // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 1. С. 30–37. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-1-30-37>
21. Gil-oulbe M. Reserve of analytical surfaces for architecture and construction // Building and Reconstruction. 2021. № 6 (98). Pp. 63–72. <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-98-6-63-72>
22. Krivoshapko S.N., Bock Hyeng C.A., Gil-oulbe M. Stages and architectural styles in design and building of shells and shell structures // Строительство и реконструкция. 2022. № 4 (102). С. 112–131. <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-102-4-112-131>



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-220-232
 EDN: CTXRYX
 UDC 519.6:69:624.074

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Modern software features for shape optimization of shells

Evgenia V. Ermakova  , Marina I. Rynkovskaya 

RUDN University, Moscow, Russian Federation

 ermakova-ev@rudn.ru

Article history

Received: January 29, 2023

Revised: March 21, 2023

Accepted: April 5, 2023

Abstract. Shape optimization, as one of the types of structural optimization problems, is an important process in the design of shells, since it contributes to the creation of a structure with fine performance characteristics, expansion of design variations and knowledge base to obtain high-quality results. To solve the problems associated with determining the shape and creating more advanced structures, software packages include a special optimization module, which can be based on one or more mathematical methods, the purpose of which is to provide the best solution in the shortest possible time. The research is focused on the process of shape optimization in three well-known universal software packages: Ansys Mechanical, COMSOL Multiphysics and Simulia Abaqus, as well as in Rhinoceros modeling software with a special visual Grasshopper plugin. The purpose of the study is to analyze the technology of shape optimization in four software packages and to compare them with each other in terms of the problem-solving process, user interface, the fullness of libraries, accessibility for educational purposes and system requirements for a computer. The authors specify and describe the characteristic features of each software package. It was found that all the software packages under consideration are equipped with great opportunities for shape optimization of structures and have a variety of functionality for solving this type of tasks. The development of optimization technology in calculation and modeling software packages will allow obtaining the most effective solutions in the process of designing shells of complex shapes.

Keywords: structural optimization, optimal shape, optimization module, optimization methods, software packages, calculation, modeling

For citation

Ermakova E.V., Rynkovskaya M.I. Modern software features for shape optimization of shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2): 220–232. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-220-232>

Современные возможности программного обеспечения для оптимизации формы оболочек

Е.В. Ермакова  , М.И. Рынковская 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

 ermakova-ev@rudn.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 29 января 2023 г.

Доработана: 21 марта 2023 г.

Принята к публикации: 5 апреля 2021 г.

Аннотация. Оптимизация формы как один из типов задач структурной оптимизации является важным процессом при проектировании оболочек, поскольку способствует созданию конструкции с хорошими эксплуатационными характеристиками, расширению вариантов дизайна и базы знаний

Evgenia V. Ermakova, Assistant, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-4515-6220; ermakova-ev@rudn.ru

Marina I. Rynkovskaya, PhD, Docent of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-2206-2563; rynkovskaya-mi@rudn.ru

Ермакова Евгения Владимировна, ассистент, департамент строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-4515-6220; ermakova-ev@rudn.ru

Рынковская Марина Игоревна, кандидат технических наук, доцент, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-2206-2563; rynkovskaya-mi@rudn.ru

© Ermakova E.V., Rynkovskaya M.I., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

для получения высококачественных результатов. Для решения проблем, связанных с определением формы и созданием более совершенных конструкций, в расчетные программы входит специальный оптимизационный модуль, который может основываться на одном или нескольких математических методах, цель которых обеспечить лучшее решение в кратчайшие сроки. Исследуется процесс проведения оптимизации формы в трех известных универсальных расчетных программах: Ansys Mechanical, COMSOL Multiphysics, Simulia Abaqus, а также в программе для моделирования Rhinoceros со специальным визуальным плагином Grasshopper. Анализируются технологии оптимизации формы в четырех программных комплексах, проводится их сравнение по процессу решения задачи, пользовательскому интерфейсу, наполненностью библиотеками, доступности в учебных целях и системным требованиям к компьютеру. Выделяются и описываются характерные особенности каждой программы. Установлено, что все рассматриваемые программные комплексы снабжены большими возможностями для проведения оптимизации формы конструкций и имеют расширенный функционал для решения такого типа задач. Развитие технологии оптимизации в программах для расчета и моделирования позволит получить наиболее эффективные решения в процессе проектирования оболочек сложных форм.

Ключевые слова: структурная оптимизация, оптимальная форма, оптимизационный модуль, методы оптимизации, программы, расчет, моделирование

Для цитирования

Ermakova E.V., Rynkovskaya M.I. Modern software features for shape optimization of shells // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 220–232. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-220-232>

1. Introduction

Structural optimization is an iterative process of finding the best shape of an object during the design stage. Its dynamism has never been so intense as in recent decades, where the increase in the cost of raw materials and the necessity to decrease energy consumption have made it more decisive than ever to optimize the produced components starting from the early stages of design so that they fulfil their intended purpose for a minimum amount of constituent material [1]. The concept of optimization is based on mathematical principles and methods. A brief description of the main stages of optimization concept development is provided in [2; 3] and the most popular optimization algorithms used in various tasks related to civil engineering are contained in [4; 5]. The general optimization problem is to find the values of the control variables that minimize or maximize the objective function $f(x)$, taking into account some constraints. The goal of optimization is to create a new optimized design that will be the most efficient compared to the first one in terms of stress-strain state, strain energy, volume, etc. An overview of the studies is focused on structural optimization in civil engineering, which is shown in detail in [6], and the introduction to the process of structural optimization is given in [7]. There are three main types of optimization tasks based on design variables: size optimization, topology optimization and shape optimization, which are powerful tools for the effective construction design of buildings and structures (Figure 1).

Size optimization is a structural process in which the geometric parameters of the model under study are changed while maintaining the original appearance and topology. The properties of elements, materials and compounds of the object of study can be set as constructive variables. The integrity of the model itself remains unchanged. The problem of size optimization is formulated, for example, as the problem of determining the optimal distribution of the plate thickness or the rod's cross section [8].

Topology optimization finds the optimal distribution of material and voids in a specific area, considering the geometric space of the structure, loads and boundary conditions. This type of optimization is convenient when significant changes are expected in the model (the appearance of holes, merging elements, adding new components, etc.). Applying topology optimization to structural design typically involves considering characteristics such as weight, stresses, stiffness, displacements, buckling loads, and resonant frequencies, with some measure of these defining the objective function and others constraining the system [9]. Topology optimization is currently under active research. Among the articles that studied topology optimization, [10] focuses on new developments and improvements in the field of topology optimization and [11] discusses the issues of improving the applicability of topology optimization to structural design problems.

During the shape optimization process, the boundaries, shapes and contours of the object under study are changed while maintaining its geometric structure – topology and specified boundaries according to specific requirements. The article studies this type of problem since the model under consideration is a spatial covering consisting of a shell where holes cannot be formed. The identification of a maximally stable (or most lightweight, etc.)

structure is a natural task in shape optimization [12–13]. An introduction to this type of structural optimization is briefly presented in [14], and [15] reviews some fundamental ideas and recent developments in the field of shape optimization.

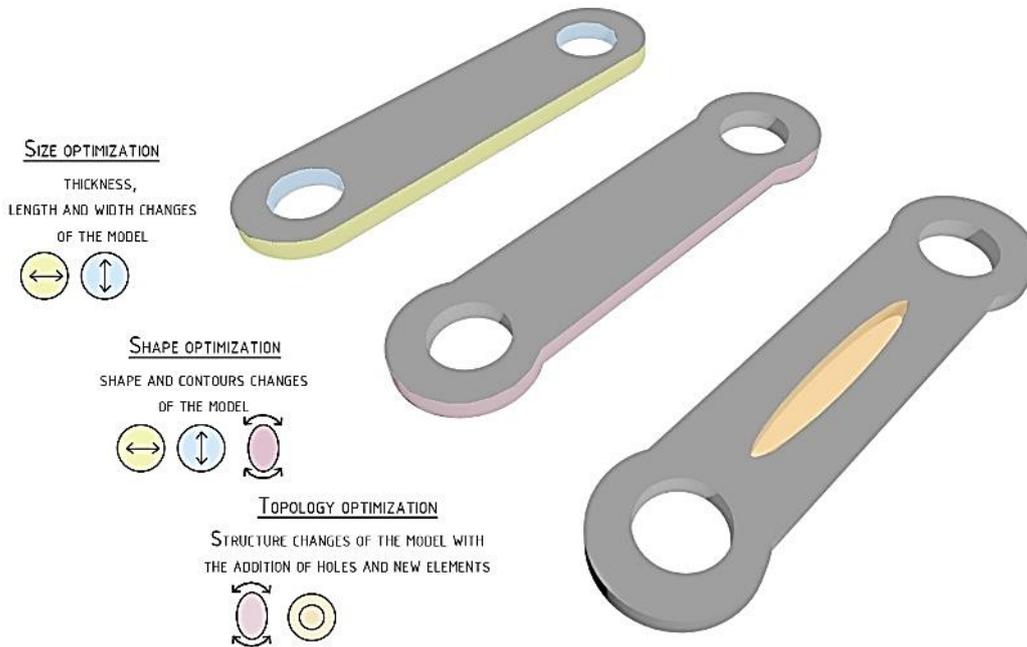


Figure 1. Three types of structural optimization problems

However, not so many practical works have been found that study particularly the process of shape optimization in the software packages COMSOL Multiphysics, Ansys Mechanical, Simulia Abaqus and Rhinoceros with Grasshopper. In [16] COMSOL Multiphysics is mentioned as part of the optimization solution for several examples of problems and applications on a specific topic, ranging from thermal conductivity equations to fluid mechanics problems. The calculation using COMSOL is also demonstrated in [17] where the process of optimization of the shape and geometry of a piezoelectric cantilever energy harvester is shown. Author of [18] research shape optimization of a free geometry surface in Ansys Mechanical using a program in the Fortran language, and in [19] the shape optimization of the model constructed according to the hyper equations is shown. In [20] shape optimization and topology optimization of the shell are carried out using the ATOM solver in Abaqus where the main attention is paid to the results of the experiments carried out, and the optimization process itself is almost not described. An example of using Abaqus with the Tosca Structure module for topology optimization of a part from the aerospace industry is shown in [21]. The optimization possibilities in Rhinoceros are studied in [22; 23], in which a general overview of existing Grasshopper plugins based on various methods is given. In [24; 25] the possibilities of linking Grasshopper with Galapagos for solving specific problems are considered.

It should also be noted that no works on the comparison of all the above-mentioned software packages for the implementation of the shape optimization process among themselves have been found in open access sources. However, there are similar studies, for example [26], dealing with the review of software packages, including Ansys, COMSOL Multiphysics and Abaqus to identify the most suitable software for modeling and calculation of composite materials. In [27] three software packages for structural optimization are evaluated: Genesis, MSC.Nastran and Optistruct.

Thus, **the purpose of the study** is to select and then compare well-known software packages for calculation and modeling, in which there is an opportunity to optimize the shape of the shell.

To do this, it is necessary to solve the following tasks:

- evaluate the overall implementation of shape optimization modules in software packages for calculation and modeling;
- show the functionality of the software packages and the main stages during the shape optimization;
- compare software packages with each other.

2. Methods

In order to create an optimal design option, the calculations are closely related to the design of the object under study. In the age of information technology, this whole process is performed in special software packages, the possibilities of working in which are constantly expanding. In most cases, software packages have versatility and involve solving a wide range of tasks in various technical fields. Software packages such as COMSOL Multiphysics 6.1, Ansys Mechanical 2022/R1 and Simulia Abaqus 2022 have a multifunctional system for automatization of the design process and allow solving various tasks, including structural optimization problems, as well as creating an initial version of geometry before calculation. However, not all software packages are currently equipped with the capabilities to carry out the optimization process. For example, LIRA-SAPR 2022 and SCAD Office 21.1, have no special module for optimization, despite their integrated environment for connecting calculation with design tasks and the ability to model shells by equations. APM FEM 20.0 software, which is a stress-strength analysis system for Compas 3D v21, includes an option for topology optimization. Other types of structural optimization are not available there yet.

As for software packages for 3D modeling, it is already possible to carry out optimization calculations directly in them. An example is Rhinoceros 7 with Grasshopper, which makes it possible to provide various types of optimization calculations, including shape optimization. Also, Rhinoceros 7 with Grasshopper has a connection with software packages for BIM design – ArchiCAD 25.0 and Revit 2023. The capabilities of modern software packages for shape optimization are presented in Table 1.

Table 1

The capability of shape optimization in software packages for calculation and modeling

Software package	Modeling by parametric equations	Shape optimization	Optimization method	Optimization module
SCAD Office 21.1	+	–	–	–
LIRA-SAPR 2022	+	–	–	–
APM FEM 20.0	–	–	–	–
Ansys Mechanical 2022/R1	+ (APDL)	+	Sequential Convex Programming-SCP, optimality criteria	Workbench-structural optimization
COMSOL Mutiphysics 6.1.	+	+	Method of Moving Asymptotes (MMA, GCMMA)	Shape optimization
			Sparse Nonlinear OPTimizer (SNOPT)	
			Interior Point OPTimizer (IPOPT)	
Rhinoceros 7 with Grasshopper	+	+	Evolutionary algorithm (EA)	Galapagos
Simulia Abaqus 2022	–	+	Condition-based optimization algorithm	SIMULIA Tosca Structure Shape

COMSOL Multiphysics 6.1 is a powerful universal software for solving simple and complex types of tasks, including interdisciplinary ones in all areas of engineering, industrial and scientific research. The software includes modules that extend the COMSOL modeling environment with customizable physical interfaces that solve problems in the field of structural mechanics and solid mechanics. It contains a specific interface for modeling shells, membranes, beams, plates, trusses, and pipes [28]. One of the key advantages of the COMSOL package is multiphysics – the ability to solve related interdisciplinary tasks in a single environment [29]. Even though the software package is quite well-known, it does not have a freely distributed version for educational purposes, but there is a demo version of the software provided on request.

COMSOL Multiphysics 6.1. has extensive optimization capabilities. The software package contains a multi-purpose extension – module Optimization, combined with all other modules of the software and supplementing the basic functionality. The module provides parametric, topology, geometric optimization and some types of inverse problems related to the choice of variable values based on external, usually experimental data.

Optimization calculations are performed in three solvers: Optimization, Shape Optimization and Topology optimization.

The Shape Optimization solver is responsible for the shape optimization process, which includes three gradient optimization methods used to solve problems with a large number of input parameters: Method of Moving Asymptotes (MMA, GCMMA), Interior Point OPTimizer (IPOPT), Sparse Nonlinear OPTimizer (SNOPT).

The general process of form optimization is shown in Figure 2, which can be divided into four main stages.

The first three steps are related to the initial geometry of the model, and the fourth step is already with the optimized version. It should be noted that moving from one stage to another in COMSOL is carried out by sequentially creating files in the Model Builder environment.

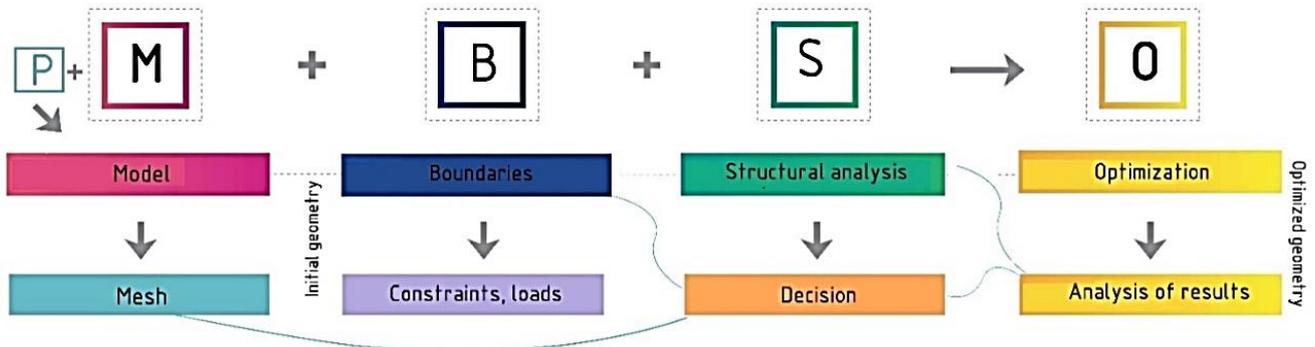


Figure 2. The process of shape optimization in COMSOL Multiphysics

All project data is collected in Model Builder, which allows to manage and add new functions using either analytical (in the form of partial differential equations) or numerical (in the form of matrices, graphs, algorithms, and optimization methods) model [30].

Before working with the object of study, the input parameters of the model are determined, which may include radius, loads, mass, etc., and they can then be set as criteria. After constructing the mesh, loads and boundary conditions are set in the model, and it is possible to proceed to structural analysis. After the calculation and analysis of the results obtained, a suitable optimization solver is selected – Shape Optimization and all other settings are defined inside this solver. To begin with, the appropriate method is chosen from the three methods (MMA, SNOPT and IPOPT), taking into account the type of task. For each method, it is necessary to determine the number of iterations consisting of repeated calculation steps to assess the compliance of the calculation results with certain quality criteria. The process continues until certain conditions are met. The most important and key point in the process of optimization of the mathematical model is the definition and selection of the objective function, which will be the criterion indicating the quality of the system and to which the project will be optimized. Next, the type of optimization task is selected: minimization or maximization; a system of restrictions is introduced. After determining all the data for the calculation, the optimization is launched and the subsequent analysis of the results is performed.

It should be noted that the practical application of the COMSOL program is described in [31], which shows the process of shape optimization of two shells: a sphere and a helicoid.

Ansys Mechanical 2022/R1 Ansys Mechanical 2022 / R1 is an advanced Finite Element Analysis (FEM) software package that provides solutions in various fields of engineering. The main advantages of the ANSYS software products are a high degree of integration of individual applications, an intuitive interface and support for high-performance computing [32]. In the construction industry, Ansys can be used to solve a wide range of tasks. For example, calculation of complex spatial above-ground structures of a building or solution of geotechnical problems, such as calculating the fastening of a pit, various foundations, slope stability with a structure, filtration calculations, etc. [33]. Unlike COMSOL, a software version of Ansys Student is distributed for educational purposes and provides free access to the Ansys package based on Ansys Workbench with basic applications.

The interface of Ansys, created based on the development of Motif Standard, provides convenient interactive access to the functions, commands, documentation and reference materials, a kind of guide is created that teaches how to use the software package step by step during the analysis [34].

In addition to carrying out calculations on structural strength, thermodynamics, mechanics of liquids, and gases, the software also implements structural optimization. There are several types of topology optimization available for solving problems, as well as shape optimization.

To calculate the shape optimization in the Ansys Workbench, two Static Structural and Structural optimization blocks are selected, which are connected, and four stages are sequentially performed through them to obtain an optimized model. The algorithm of steps is shown in Figure 3.

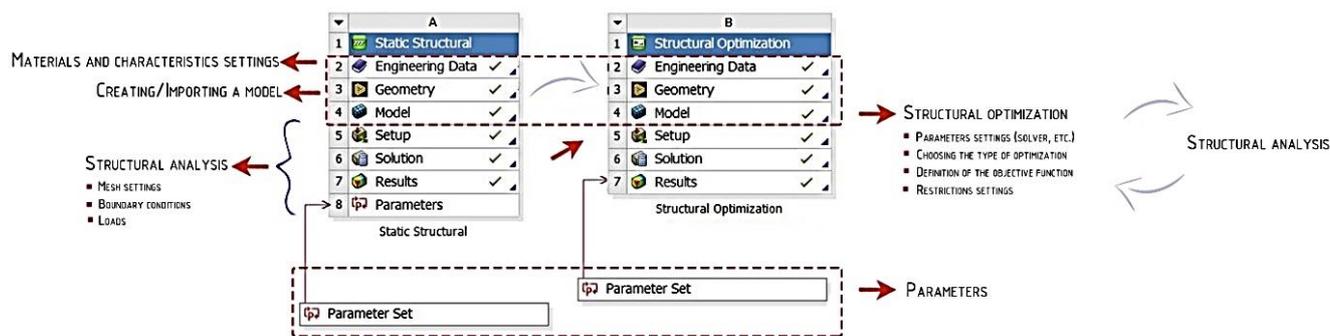


Figure 3. The process of shape optimization in Ansys Mechanical

Firstly, a model created in another software is imported into Static Structural, or the model is created from scratch in Ansys. The software package includes two tools for working with CAD geometry – Ansys DesignModeler and Ansys SpaceClaim. Then, certain properties and materials of the model are set through the engineering data service Engineering Data. After installing the preparatory actions, the transition takes place to the Structural optimization block, where the necessary optimization method is first assigned. There are three types of methods available in Ansys for the iterative form search process: the sequential quadratic programming method, the optimality criterion method and the automatic solver, which is installed by the software. Next, the type of optimization, the number of iterations, and the time are set. After the criteria and constraints are determined (by weight, by displacement of the structure, etc.), the process of optimization is started. At the end, after processing in the postprocessor, the results are reviewed and, if they do not satisfy the task, then the reverse transition to model editing occurs.

Furthermore, additional software for CAD geometry Caeses was developed for Ansys, which has the capabilities for parametric modeling and includes tools for performing calculations and organizing the process of shape optimization.

Simulia Abaqus 2022. Simulia Abaqus Unified FEA is a multi-purpose software package that solves the problems of dynamics and strength by the finite element method. The versatility of Abaqus makes it possible to use it effectively at all stages of designing and creating modern products, as well as in almost all calculation, design and technological departments of enterprises [35]. This software is widely used in the construction industry, since it can be used to perform a detailed analysis of building structures under the influence of various types of loading, to obtain a reliable forecast of deformations of natural material and to conduct engineering studies of the dynamics of buildings and structures. Similar to Ansys, there is a special full-featured version of the Abaqus Student Edition software for educational purposes containing all the main modules and solvers but with a limit on the number of computational elements and nodes that should not be more than 1000.

The work in the software package is based on the modular principle, which makes working process in Abaqus more visual. Abaqus contains two main solvers – Abaqus/Standart and Abaqus/Explicit, as well as a powerful pre-postprocessor Abaqus/CAE. An analysis of the possibilities for topology optimization and optimization of the shape of the Abaqus package on the example of a simple part is given in [36].

Currently, the Simulia Abaqus 2022 version implements two types of optimization: parametric, which is available in a special Isight package, and nonparametric, which is implemented in the Tosca package. The Tosca Structure module is integrated into the Abaqus/CAE pre-postprocessor and has wide possibilities for topology, sizing, shape and bead optimization. One condition-based optimization algorithm is available in the system for shape optimization.

Abaqus uses Python scripts to provide interaction between modules such as Abaqus/CAE, Abaqus/Viewer, and various solvers. It is also possible to use Python scripts without logging into graphical interfaces (CAE and Viewer).

The general process of step-by-step implementation of shape optimization in Abaqus is shown in Figure 4. Before conducting the optimization process, the model goes through a preparatory stage and a finite element calculation. At the preparatory stage, the model is imported or created from scratch in the Abaqus/CAE pre-processor.

The first modules “Part”, “Property”, “Assembly”, “Mesh” are responsible for the preparatory stage of setting properties, parameters, and mesh before static analysis. At the “Step” module, the stage of the study, its parameters and a set of output data from the calculation results are set. After the calculation step is created,

loads and boundary conditions are set in the “Load” module. In the main module “Optimization”, the appropriate type of optimization task is selected first. After that the Design Response Editor creates and configures responses for the model area that will be used by the target functions and constraints.

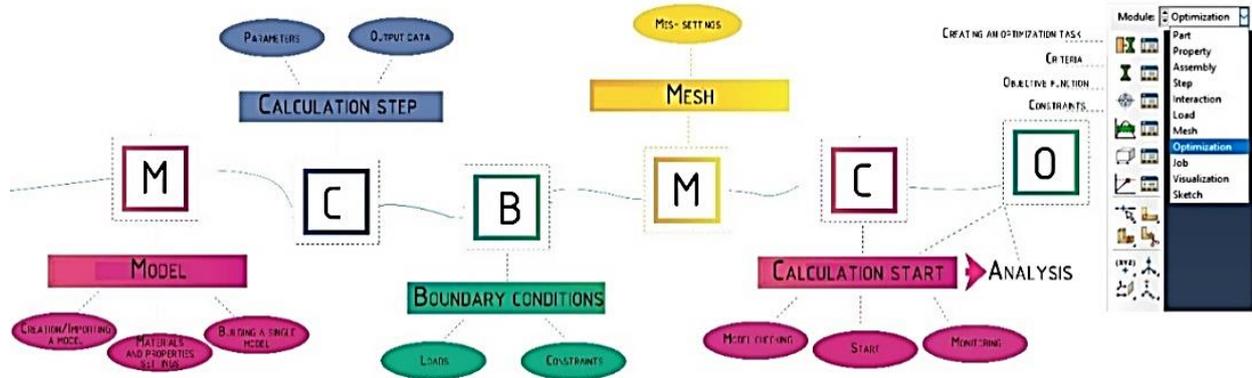


Figure 4. The process of shape optimization in Simulia Abaqus

The goal of optimization is always an objective function, so the next step after determining the design responses is to select them with an indication of the goal: maximizing, minimizing, or minimizing the maximum values. Next, restrictions are specified and to configure them a project response or a combination of responses must be selected and the value of the constraint must be specified. It is also possible to set geometric constraints and define frozen areas to set the boundaries of changes that the module can make during the calculation. To optimize the shape, a local installation condition is available as a parameter that will indicate the moment when optimization is completed.

After completing all the above tasks, the optimization process is started and transferred to the Simulia Tosca Structure pre-processor, which can be restarted if necessary.

Rhinoceros+Karamba. Rhinoceros 7 (Rhino 7) is a 3D modeling software package in which it is possible to create, edit, analyze and document three-dimensional models, as well as perform their visualization and animation. All surfaces in Rhino are free-form surface models created using the curve modeling method (NURBS or Non-Uniform Rational Basis Spline). The NURBS belong to the category of parametric curves and surfaces, and they become the standard for describing and modeling free-form shapes in computer-aided design (CAD) and computer graphics [37]. It should be noted that Rhino is not only a simulation software, but it is also possible to perform calculations in it. The special visual plugin Grasshopper is responsible for the computational process, which is a graphical algorithm editor that runs in conjunction with Rhino. Grasshopper has a connection with the 3D tools of the software and makes it possible to perform all kinds of tasks at a fairly good level due to a large number of additional components. These components provide an opportunity to quickly and efficiently perform the necessary calculations, in particular including optimization. The connection between Grasshopper and Rhino provides the basis for the development of high-level software logic. Depending on the task itself and the shape under study, you can choose the application that is suitable for simulation and optimization. Among the well-known optimization plugins in Grasshopper, the following can be mentioned: Ameba for topological optimization based on the method of bidirectional evolutionary structural optimization (BESO); Octopus for multi-purpose evolutionary optimization based on the Pareto principle; Galapagos and Opossum for single-purpose optimization; Kangaroo for interactive modeling and for performing optimization in real time (Figure 5).

Also, there is an application for structural analysis and optimization for Grasshopper such as Millipede, which makes it possible to perform linear elastic analysis of frame and shell elements in 3D or 2D plate elements. All created algorithms are based on the topology optimization method, which is built into the application. Due to the good data processing speed, Millipede can be used in combination with the Galapagos plugin, which implements evolutionary algorithms to solve common problems of form search. For example, an architectural design project was created for the roof of the Azadi Stadium (architect Arash Naderpour) with the help of Millipede and Galapagos. It was performed as part of a course on architectural technology at the Tehran University of Arts (Figure 6).¹ The roof of the stadium was created using parametric modeling. To optimize the deflection and weight of the structure, the Millipede plugin was implemented.

¹ Parametric design & structural optimization of Azadi stadium roof. Available from: <https://vimeo.com/119049707> (accessed: 12.12.2022).

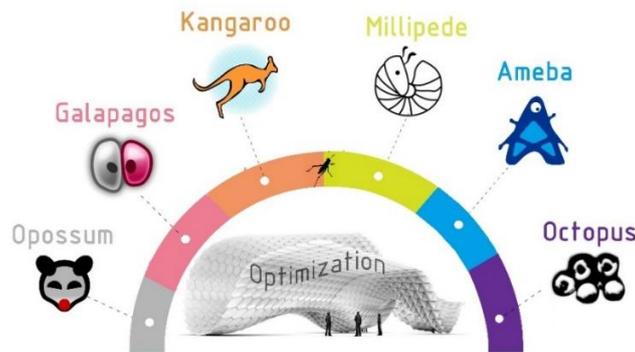


Figure 5. Plugins for optimization in Grasshopper

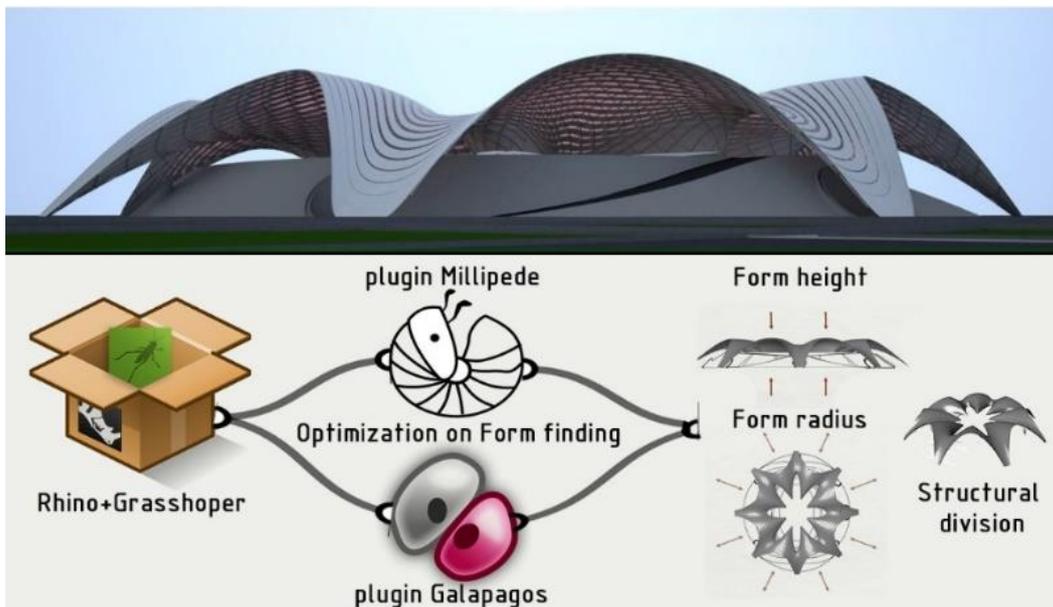


Figure 6. Optimization of the Azadi Stadium roof shape in Rhino + Grasshopper

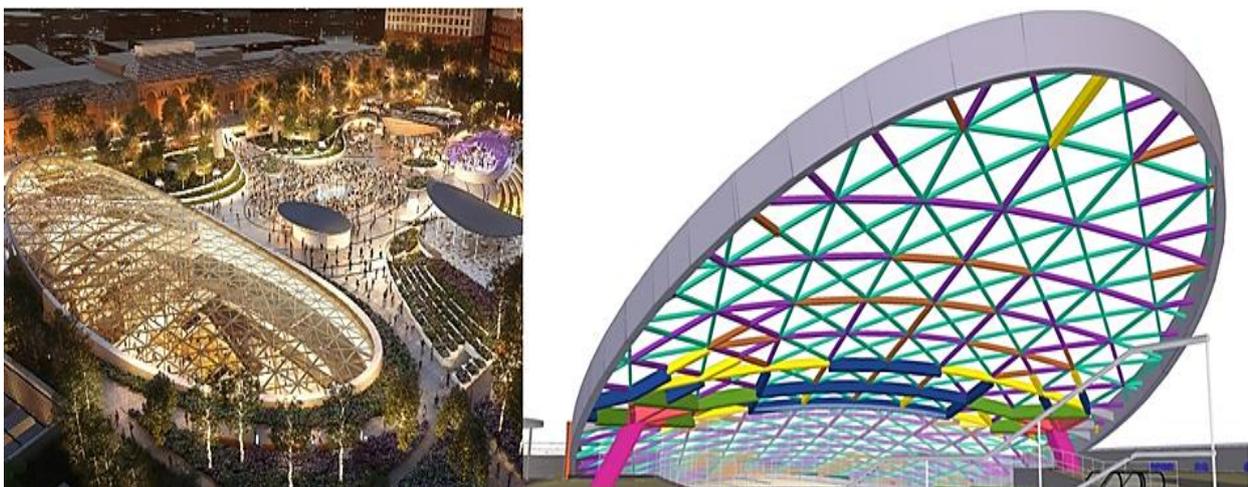


Figure 7. The shape of a large dome in the shopping center "Paveletskaya Plaza"

In conjunction with Galapagos, Karamba 3D application is also widely used, based on the finite element method and being a tool for parametric design of structures [38]. With the collaboration of Galapagos and Karamba 3D, it is possible to achieve the optimal solution for the shape under study quite efficiently and quickly.

As an example, these two applications were used for the technical process of designing a large dome in the shopping center “Paveletskaya Plaza” (Moscow, Russia, APEX Bureau) (Figure 7).

The search for the optimal arch shape was carried out in Karamba 3D, and the search for the optimal combination of sections in the dome was made in Galapagos (Figure 8). The minimum mass and the number of sections (at least 8 per dome) were introduced as criteria. Thus, due to the application of the evolutionary algorithm in Galapagos, the selection of the optimal stiffness ratio and the reduction in the weight of the structure by 40% were implemented compared to the traditional method of searching for sections in such software packages as Autodesk Robot, LIRA.²

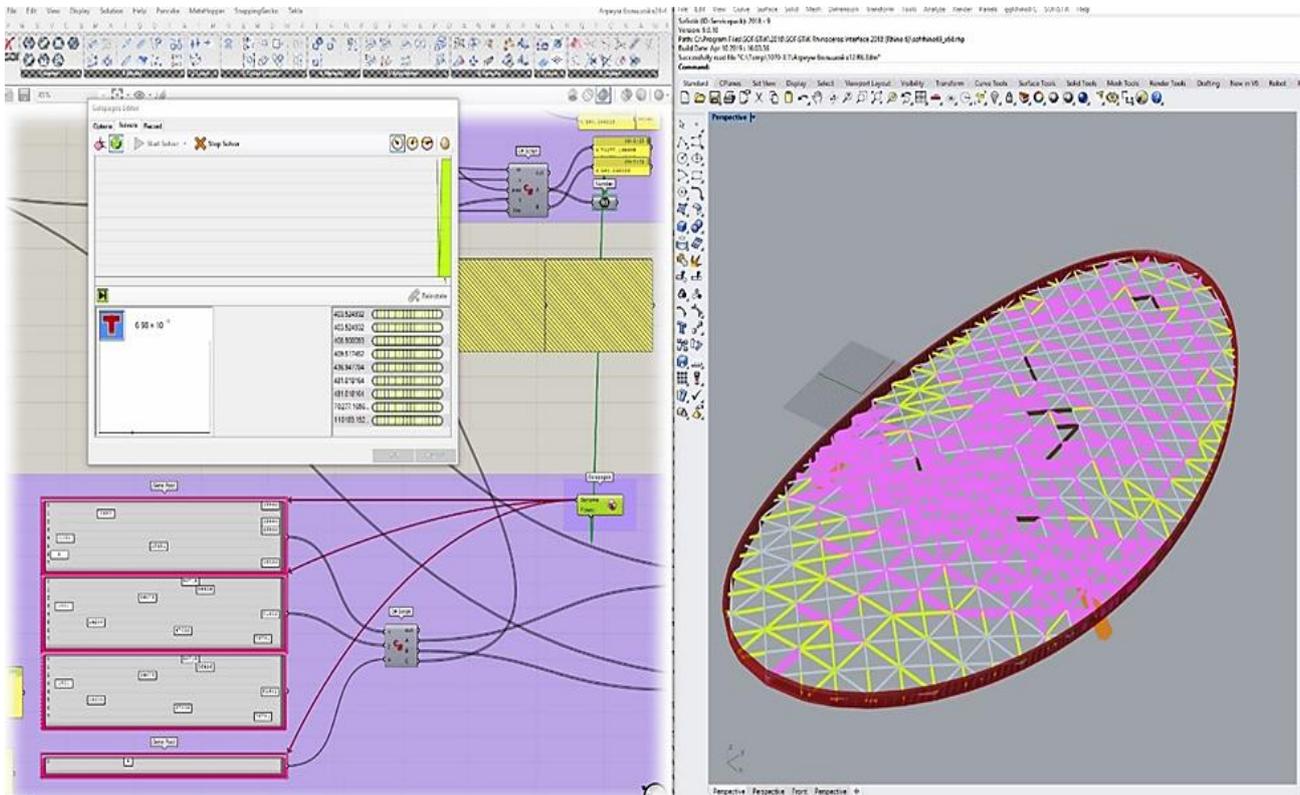


Figure 8. Using the Galapagos solver to optimize sections in the dome

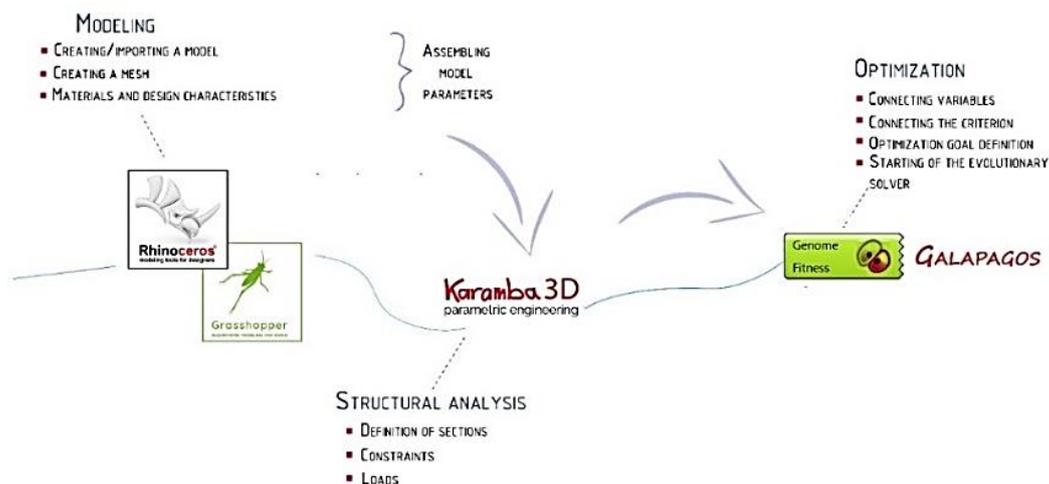


Figure 9. The general optimization algorithm in Rhino and Grasshopper with Karamba and Galapagos

² Design automation with Tekla structures: APEX. Available from: <https://www.tekla.com/ru/опыт/ресурсы/автоматизация-проектирования-с-tekla-structures-опыт-апек> (accessed: 08.12.2022).

The general optimization process in conjunction with Rhino and Grasshopper together with Karamba and Galapagos is shown in Figure 9.

Grasshopper input creates a visual model in Rhino space and all changes that occur with the model are reflected in real time. After creating/importing the main geometry of the model, the materials and the computational mesh are set. To carry out structural analysis through Grasshopper, Karamba 3D application is selected, an analytical model is formed and the calculation is carried out by the finite element method.

To optimize the shape, Galapagos plugin is used, which utilize Karamba output data and geometric characteristics to change the parameters and find the most suitable solution. The plugin is based on a genetic algorithm [39] using evolutionary methods. Genetic algorithms are often applied in the design of capital construction projects of complex geometry, individual architectural elements, during selection of the most successful variants of apartment layouts when deciding on the location and orientation of the building on the site, etc. [40].

Galapagos creates a set of solutions based on genomes (variables to be changed) that respond to fitness (a desired criterion that needs to be minimized or maximized). Thus, to start the optimization process, it is necessary to connect Galapagos Genome to variables and one criterion (function) Galapagos Fitness Input. Then there is a transition to the Galapagos editor, where the optimization goal is selected: maximizing or minimizing the selected parameter. As a result, an effective solution is found that allows to save suitable genomes for a generation and then connect them with other favorable genomes in the next generation.

3. Results and discussion

All the considered software packages have quite powerful functionality for shape optimization and are widely used in the framework of design, calculation, educational and scientific activities. However, not all of them are distributed freely for educational purposes and should have special licenses. An example is COMSOL Multiphysics. The remaining software packages are provided with free licenses for use for educational purposes, except the Rhinoceros with Grasshopper, where only a paid license is provided, but with the capability of purchasing it at a discounted rate. The presence of a Russified version in the official version of the software packages is not provided.

The user interface is one of the most important parts of any software package since it is with it that the user interacts in the process of his work. COMSOL, Ansys, Abaqus and Rhinoceros with Grasshopper provide the principle of structuring the content. COMSOL Multiphysics uses a convenient Model Builder manager, which contains all the necessary data for completion, and in Abaqus, the solution stages are determined by special modules included in the Abaqus/CAE pre-postprocessor and sequentially located under each other. Modules provide fast filling of information, which is then reflected in the task model tree. Since all data is collected in the model tree, it is a fairly complete structure in which all the functions contained in Abaqus are collected. Therefore, for novice users, working with the model tree may be difficult due to the abundance of information. With Ansys, the block diagram provides insight into engineering intent, relationships between data, and the status of an analysis project at a glance. The principle of the block diagram is also implemented in Grasshopper, however, due to a large number of functions and the need to download new plugins to solve specialized tasks, the process of understanding and implementing the solution can take a long time. Table 2 shows a comparison of the software packages by the availability of a training and Russified version, by system requirements and by the user interface.

At the preparatory stage, a convenient function is an ability to build a model directly in the calculation software itself in a special module. Also, importing a model from another CAD system does not cause problems.

Before proceeding to the optimization process, certain parameters and characteristics of the model are set. Also, it is necessary to note the capabilities of software packages for constructing a computational mesh, which is one of the most important stages before the calculation. The computational time of the result depends on the quality of the mesh. COMSOL Multiphysics has the largest selection of ready-made mesh sizes and therefore in most cases, it is not necessary to set the dimensions manually.

In Ansys Workbench, there are fewer preset mesh sizes, whereas, in Abaqus, the mesh is built mainly by setting parameters, although an automatic mesh can also be built from scratch. The same process of building a mesh occurs in Rhino with Grasshopper. Meshes in Rhinoceros consist of triangles and quadrilaterals. Table 3 shows a comparison of software packages for the capability of building a mesh.

Each software package is responsible for carrying out the optimization process in its special module with a solver, which includes a certain set of data to fill in. Since there are currently many optimization methods, those software packages where it is possible to solve the problem using several methods and computational algo-

rithms get a great advantage. It is possible to mention COMSOL Multiphysics and Ansys Workbench, in which more than one method can be used during a computational experiment, which makes it possible to choose the most optimal solution.

The availability of a library of materials with set values of characteristics is also an important factor affecting the convenience of the calculation, which is fully implemented in COMSOL and Ansys. The Abaqus software is dominated by manual input of materials with their properties. A comparison of software packages for the optimization process is given in Table 4.

Table 2

Capabilities of software packages according to system requirements, interface and special versions

Software package	Educational version	Russified version	Interface	
			Convenience of work	Simplicity of the interface
COMSOL Multiphysics 6.1	–	–	+	+
Ansys Mechanical 2022/R1	+	–	+	+
Simulia Abaqus 2022	+	–	+	±
Rhinoceros 7	+	–	+	±

Table 3

Capabilities of building a mesh in software packages

Software package	Mesh		Mesh settings	
	Number of preset mesh sizes	Geometric mesh type	Automatic	Custom
COMSOL Multiphysics	9 (from extremely fine to extremely coarse)	Tetrahedra, hexahedra, prisms and pyramids	+	+
Ansys Workbench	3 (coarse, medium and fine)		+	+
Abaqus	–	Tetrahedra, hexahedra, prisms	+	+
Rhino with Grasshopper	–	Triangles and quadrilaterals	+	+

Table 4

Capabilities of the shape optimization process in software packages

Software packages	Module	Number of optimization methods	Amount of library data		Additional software, plugin or module for shape optimization
			Materials library	Objective library	
COMSOL	Shape Optimization	3	+	+	–
Ansys Workbench	Structural Optimization	3	+	+	+
Abaqus	SIMULIA Tosca Structure Shape	1	–	+	+
Rhino & Grasshopper	Galapagos	1	+	–	+

4. Conclusion

According to the results of the study, the following conclusions can be made:

1. Although there is a currently increasing interest in structural optimization and its types, only several software packages allow providing shape optimization calculations. COMSOL Multiphysics 6.0, Ansys Mechanical 2022/R1 and Simulia Abaqus 2022 are currently the main calculation software packages in which the shape optimization process is implemented. The capability of shape optimization in modeling software packages is still at the stage of development, and so far the solution to this type of tasks is fully implemented only in Grasshopper special visual plugin for Rhino.

2. The presence of a special optimization module in the functionality of software packages expands the possibilities for solving problems of finding the optimal shape. It also speeds up the computational process due to the choice of a mathematical algorithm embedded in the software, the number of iterations, constraints, functions, and characteristics of the model.

3. All the considered software packages have an accessible, structured user interface. All model data in COMSOL and Abaqus is contained in a special manager (the model tree of the project), whereas in Rhino with Grasshopper and Ansys, a block data type is implemented, where all tasks are in separate interconnected blocks.

4. According to the number of functional capabilities in the process of shape optimization, Comsol Multiphysics can be noted for its wide range of optimization methods and preset mesh sizes.

5. Ansys Mechanical has the most extensive database of materials and properties in terms of the amount of library data.

6. As part of educational access, software packages such as Ansys and Abaqus are available, which provide free educational licenses and learning platforms, but there is a limit on the estimated number of mesh elements.

7. To work with all studied software packages knowledge of English is required, since there is no possibility of choosing a Russian-language version in them.

The final decision on the choice of a suitable software package for shape optimization should be made taking into account all of the above characteristic features of the software packages.

References

- Allaire G., Dapogny C., Jouve F. Shape and topology optimization. In: Bonito A., Nochetto R.H. (eds.) *Geometric Partial Differential Equations. Part II. Handbook of Numerical Analysis*. 2021;(22):1–93.
- Theodossiou N., Kougias I., Karakatsanis D. The history of optimization. Applications in water resources management. *IWA Regional Symposium on Water, Wastewater and Environment: Traditions and Culture*. Patras; 2014. p. 345–355.
- Mykel J., Kochenderfer, Tim A. *Wheeler algorithms for optimization*. London: The MIT press; 2019.
- Rao S.S. *Engineering optimization: theory and practice*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons; 2009.
- Dede T., Kripka M., Togan V., Yepes V., Rao V.R. Usage of optimization techniques in civil engineering during the last two decades. *Current Trends in Civil & Structural Engineering*. 2019;2(1):1–17. <https://doi.org/10.33552/CTCSE.2019.02.000529>
- Christensen P.W., Klarbring A. *An introduction to structural optimization*. Springer Science, Business Media B.V.; 2009.
- Mei L., Wang Q. Structural optimization in civil engineering: a literature review. *Buildings*. 2021;11(2):1–27. <https://doi.org/10.3390/buildings11020066>
- Shevtsov S.N. *Methods for optimizing structures*. Rostov-on-Don; 2010. (In Russ.)
Шевцов С.Н. Методы оптимизации конструкций. Ростов н/Д., 2010. 20 с.
- Srivastava P.K., Simant S.S. Structural optimization methods: a general review. *International Journal of Scientific Research & Engineering Trends*. 2017;6(9):88–92.
- Deaton J.D., Grandhi R.V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2014;49:1–38. <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0956-z>
- Guest J.K., Lotfi R., Gaynor A., Jalalpour M. Structural topology optimization – moving beyond linear elastic design objectives. *Structures Congress 2012*. Chicago, Illinois; 2012. p. 245–256.
- Hinz M., Magoulès F., Rozanova-Pierrat A., Rynkovskaya M., Teplyaev A. On the existence of optimal shapes in architecture. *Applied Mathematical Modelling*. 2020;(94):676–687. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.01832>
- Hinz M., Rozanova-Pierrat A., Teplyaev A. Boundary value problems on non-Lipschitz uniform domains: stability, compactness and the existence of optimal shapes. *Asymptotic Analysis*. 2023;(Pre-press):1–37. <https://doi.org/10.3233/ASY-231825>
- Haslinger J., Mäkinen R.A.E. *Introduction to shape optimization: theory, approximation, and computation*. Philadelphia: SIAM; 2003.
- Allaire G., Henrot A. On some recent advances in shape optimization. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*. 2001;329(5):383–396. [https://doi.org/10.1016/S1620-7742\(01\)01349-6](https://doi.org/10.1016/S1620-7742(01)01349-6)
- Slawig T., Prüfert U. Mathematics-based optimization in the COMSOL Multiphysics framework. *Proceedings of the COMSOL User Conference*. Stuttgart; 2011. p. 1–6.
- Hashim A.A., Mahmoud K.I., Ridha H. Geometry and shape optimization of piezoelectric cantilever energy harvester using COMSOL Multiphysics software. *International Review of Applied Sciences and Engineering*. 2021;12(2):103–110. <https://doi.org/10.1556/1848.2021.00170>
- Cui G. Shape optimization based on ANSYS. *Journal of Information and Computational Science*. 2015;12(11):4291–4297.
- Seranaj A., Elezi E., Seranaj A. Structural optimization of reinforced concrete spatial structures with different structural openings and forms. *Research on Engineering Structures and Materials*. 2018;(4):79–89. <https://doi.org/10.17515/resm2016.79st0726>
- Tomás A., Martí P. Shape and size optimization of concrete shells. *Engineering Structures*. 2010;32(6):1650–1658. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.02.013>
- Husainie S.N. Weight optimization of a landing gear steering collar using Tosca in Abaqus. *Science in the Age of Experience*. Boston, MA; 2016. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.33591.32163>

22. Omid H., Golabchi, M. Survey of parametric optimization plugins in Rhinoceros used in contemporary architectural design. *Proceedings of the Fourth International Conference on Modern Research in Civil Engineering, Architecture, Urban Management and Environment*. Karaj; 2020. p. 1–9.
23. Boon C., Griffin C., Papaefthimious N., Ross J., Storey K. Optimizing spatial adjacencies using evolutionary parametric tools. *Rerkins+Will Research Journal*. 2015;(07.02):24–37.
24. Cubukcuoglu C., Ekici B., Tasgetiren M.F., Sariyildiz S. OPTIMUS: self-adaptive differential evolution with ensemble of mutation strategies for grasshopper algorithmic modeling. *Algorithms*. 2019;12(7):141. <https://doi.org/10.3390/a12070141>
25. Dai R., Kerber E., Brell-Cokcan S. Robot assisted assembly of steel structures: optimization and automation of plasma cutting and assembly. *CAAD – Computer-Aided Architectural Design Research in Asia*. Wellington; 2019. <https://doi.org/10.52842/conf.caadria.2019.1.163>
26. Kovtun V.A., Korotkevich S.G. Review of current application programs for research composite products. *Technology of Technosphere Safety*. 2016;(1):1–9. (In Russ.)
Ковтун В.А., Короткевич С.Г. Обзор современных прикладных программных комплексов для проведения исследований композитных изделий // Технологии техносферной безопасности. 2016. № 1 (65). С. 1–9.
27. Choi W., Huang C., Kim J., Park G. Comparison of some commercial software systems for structural optimization. *11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimisation*. Sydney; 2015. p. 1–6.
28. *Structural mechanics module. User's guide*. Available from: <https://doc.comsol.com/5.5/doc/com.comsol.help.sme/StructuralMechanicsModuleUsersGuide.pdf> (accessed: 14.12.2022).
29. Burkova E.N., Kondrashov A.N., Rybkin K.A. *COMSOL automated calculation system*. Perm: Perm State National Research University; 2019. (In Russ.)
Буркова Е.Н., Кондрашов А.Н., Рыбкин К.А. Система автоматизированных расчетов COMSOL. Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2019. 133 с.
30. Kurushin A.A. *Solution of multiphysics microwave problems using CAD COMSOL*. Moscow: One-Book; 2016. (In Russ.)
Курушин А.А. Решение мультифизических СВЧ задач с помощью САПР COMSOL. М.: One-Book., 2016. 166 с.
31. Ermakova E., Elberdov T., Rynkovskaya M. Shape optimization of a shell in COMSOL multiphysics. *Computation*. 2022;10(4):54. <https://doi.org/10.3390/computation10040054>
32. Rynkovskaya M.I., Elberdov T., Sert E., Öchsner A. Study of modern software capabilities for complex shell analysis. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):45–53. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-45-53>
33. Proshin M.V., Isaikova T.V., Kabanov Y.Y. Using ANSYS/ CivilFEM to solve building design problems. Overview of the possibilities of the software complex. *Rational Management of the Enterprise*. 2008;(2):32–34. (In Russ.)
Прошин М.В., Исайкова Т.В., Кабанов Ю.Ю. Использование ANSYS/CivilFEM для решения задач строительного проектирования. Обзор возможностей программного комплекса // Рациональное управление предприятием. 2008. № 2. С. 32–34.
34. Zhidkov A.V. *Application of the ANSYS system to solving problems of geometric and finite element modeling: educational and methodological material for the advanced training program "Information systems in mathematics and mechanics"*. Nizhny Novgorod; 2006. (In Russ.)
Жидков А.В. Применение системы ANSYS к решению задач геометрического и конечно-элементного моделирования: учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные системы в математике и механике». Н. Новгород, 2006.
35. Kuznetsova T.A. Beams analysis using "Abaqus" software package. *Vestnik VGAVT*. 2016;(47):209–220. (In Russ.)
Кузнецова Т.А. Расчет балок с помощью программного комплекса Abaqus // Вестник ВГАВТ. 2016. № 47. С. 209–220.
36. Oganesyanyan P.A., Shevtsov S.N. Topology designs optimization in ABAQUS package. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2014;16(6–2):543–549. (In Russ.)
Оганесян П.А., Шевцов С.Н. Оптимизация топологии конструкций в пакете ABAQUS // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2014. Т. 16. № 6–2. С. 543–549.
37. Sassone M., Pugnale A. Evolutionary structural optimization in shells design. *Advanced Numerical Analysis of Shell-like Structures*. 2007;(4):247–257.
38. Rumph M. *Informed form generation-embedding simulation and optimization into architectural design* (dissertation). Kassel; 2018. <https://doi.org/10.17170/kobra-202012162602>
39. Jakiela M.J., Chapman C., Duda J., Adewuya A., Saitou K. Continuum structural topology design with genetic algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;186(2–4):339–356. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00390-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00390-4)
40. Knyazeva N.V. Application of evolutionary algorithms for automated routine tasks of enumerating design options. *Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Sea*. 2021;(3):73–77. (In Russ.) <https://doi.org/10.52684/2312-3702-2021-37-3-73-77>
Князева Н.В. Использование эволюционных алгоритмов для автоматизации рутинных задач перебора вариантов проектных решений // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. 2021. № 3 (37). С. 73–77. <https://doi.org/10.52684/2312-3702-2021-37-3-73-77>



СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ CONSTRUCTION MATERIALS AND PRODUCTS

DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-233-250
 EDN: DKBCLX
 UDC 261.1

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Effect of gelatin powder, almond shell, and recycled aggregates on chemical and mechanical properties of conventional concrete

Mohammad Hematibahar¹, Alireza Esparham², Nikolai I. Vatin³,
 Makhmud I. Kharun¹, Tesfaldet H. Gebre⁴

¹National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

²University of Tehran, Tehran, Islamic Republic of Iran

³Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

⁴RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ eng.m.hematibahar1994@gmail.com

Article history

Received: January 12, 2023

Revised: March 28, 2023

Accepted: April 10, 2023

For citation

Hematibahar M., Esparham A., Vatin N.I., Kharun M.I., Gebre T.H. Effect of gelatin powder, almond shell, and recycled aggregates on chemical and mechanical properties of conventional concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):233–250. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-233-250>

Abstract. The objective of the research is to study the effect of different additives on the conventional concrete. In this term, three types of materials have been added to the concrete: gelatin powder as the binder, recycled aggregates, and almond shell as the fine and coarse aggregates. Several experiments have been made to determine physical and mechanical properties, such as test for compressive and tensile strengths, for impact loading strength, durability test (water absorption) and deep penetration tests. Moreover, the microstructure results for the new type of concrete have been studied by means of scanning electron microscopy (SEM) and energy-dispersive x-ray spectroscopy (EDXS). The results show that when 70 kg of gelatin powder is added to 1 m³ of concrete, the concrete's compressive strength and tensile strength are improved more than 22%; during impact loading the first and ultimate cracks are 11 and 129 by numbers, and the first and ultimate cracks' strength is more than 223 and 2346 J respectively. The durability of sample from concrete with additional gelatin has been improved. SEM results illustrate that the weakness of almond shell concrete is related to cracks and voids between the cement matrix and almond shell. The voids of gelatin concrete are higher than that of conventional concrete. The conventional concrete has smooth crystals, and gelatin concrete has sharp and cubic crystals. EDXS results show that chemical content of these two types of concrete is different: conventional concrete contains silicon, while EDXS results show that chemical content of these two types of concrete is different: conventional concrete contains silicon, while gelatin concrete contains calcium and also C-S-H gel is generated in it.

Keywords: conventional concrete, gelatin powder, almond shell, recycled aggregates, impact loading

Mohammad Hematibahar, PhD student, Department of Reinforced Concrete and Stone Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0090-5745; eng.m.hematibahar1994@gmail.com

Alireza Esparham, PhD student, University of Tehran, Islamic Republic of Iran; ORCID: 0000-0001-7278-3479; alireza.esp110@yahoo.com

Nikolay I. Vatin, D.Sc. (Eng.), Professor, Higher School of Industrial Civil and Road Construction, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1196-8004; vatin@mail.ru

Makhmud I. Kharun, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Reinforced Concrete and Stone Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-2773-4114; miharun@mail.ru

Tesfaldet H. Gebre, PhD, assistant, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7168-5786; tesfaldethg@gmail.com

© Hematibahar M., Esparham A., Vatin N.I., Kharun M.I., Gebre T.H., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>



Влияние порошка желатина, миндальной скорлупы и вторичных заполнителей на химические и механические свойства обычного бетона

М. Хематибахар¹ , А. Эспархам² , Н.И. Ватин³ , М. Харун¹ , Т.Х. Гебре⁴ 

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

²Тегеранский университет, Тегеран, Исламская Республика Иран

³Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

⁴Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ eng.m.hematibahar1994@gmail.com

История статьи

Поступила в редакцию: 12 января 2023 г.

Доработана: 28 марта 2023 г.

Принята к публикации: 10 апреля 2023 г.

Аннотация. Цель исследования – определить влияние различных добавок на свойства обычного бетона. В бетонную смесь внесены три вида добавок: желатиновый порошок в качестве связующего, вторичные заполнители и миндальная скорлупа в качестве мелкого и крупного заполнителей. Проведено исследование по определению физико-механических свойств бетона с указанными добавками: прочности на сжатие и растяжение, испытания на ударную нагрузку, на долговечность (водопоглощение) и на глубину проникновения влаги в бетон. Микроструктура бетона изучена с помощью сканирующей электронной микроскопии (SEM) и энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (EDXS). Установлено, что при добавлении 70 кг желатинового порошка на 1 м³ бетона его прочность на сжатие и растяжение увеличилась более чем на 22 %; под действием ударной нагрузки начальное и предельное количество трещин составляет 11 и 129, а начальная и предельная прочность трещинообразования – более 223 и 2346 Дж соответственно. Кроме того, показатели долговечности лучше у бетона с добавлением желатина. Результаты, полученные при помощи SEM, демонстрируют, что пониженная прочность бетона с добавлением миндальной скорлупы связана с трещинами и пустотами между цементной матрицей и миндальной скорлупой. Пустоты в бетоне с желатином выше, чем в обычном бетоне. Структура обычного бетона имеет вид гладких кристаллов, а бетона с желатином – острые и кубические кристаллы. Результаты, полученные с помощью EDXS, показали различие в химическом составе: обычный бетон содержит кремний, тогда как бетон с добавкой желатина в вышеуказанных пропорциях содержит кальций и в нем образуется гель C-S-H.

Ключевые слова: обычный бетон, желатиновый порошок, миндальная скорлупа, переработанные заполнители, ударная нагрузка

Для цитирования

Hematibahar M., Esparham A., Vatin N.I., Kharun M.I., Gebre T.H. Effect of gelatin powder, almond shell, and recycled aggregates on chemical and mechanical properties of conventional concrete // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 2. С. 233–250. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-233-250>

1. Introduction

After water, concrete is the most widely used material in the construction industry. Mechanical properties and durability of concrete are among the most important properties related to performance. Many researchers tried to add different materials to concrete for improve the mechanical and chemical properties of concrete [1–3]. In this term the effect of some materials on the concrete are important for researcher [4–5]. For example, many researchers have been studied on the effect of recycled aggregates on the concrete [6–9].

Many researchers have been preferring to use alter materials as alternative aggregates in the concrete. For example, Gunasekaran et al. [10–11] investigated on the mechanical properties of reinforced concrete with additional coconut shell. Their results shows that coconut shell aggregates concrete beam shear force at the yielding moment was more than 20 MPa, while control concrete sample yielding shear force was more than 19 MPa. In another example, Gunsekarana et al. [12] found the mechanical properties of coconut shell con-

Хематибахар Мохаммад, аспирант, кафедра железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-0090-5745; eng.m.hematibahar1994@gmail.com
Эспархам Алиреза, аспирант, Тегеранский университет, Тегеран, Исламская Республика Иран; ORCID: 0000-0001-7278-3479; alireza.esp110@yahoo.com
Ватин Николай Иванович, доктор технических наук, профессор, профессор Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-1196-8004; vatin@mail.ru
Харун Махмуд, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-2773-4114; miharun@mail.ru
Гебре Тесфалдет Хадгембес, кандидат технических наук, ассистент, департамент строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-7168-5786; tesfaldethg@gmail.com

crete. Their results shows that the compressive strength of coconut shell concrete was more than 26 MPa. Hilal et al. [13] used walnut as the alternative material with coarse aggregates. They understood that adding walnut instead of coarse aggregates decrease the compressive strength. The conventional concrete compressive concrete was more than 56 MPa, while the walnut concrete compressive strength decreased to 26 MPa. Alaneme, and Mbadike [14] investigated on the Bambara nutshell ash as mixture of concrete mortar. Their results show that the compressive strength increased more than 20–46% with adding different percentages of Bambara nutshell ash. Kong et al. [15] investigated adding the waste oyster shell on the recycled aggregates concrete. They examined the compressive, and flexural strength. Their results have been shown that the compressive strengths were than 21 MPa, and 47 MPa for 3 and 28-days curing periods respectively. The flexural strength was more than 7.5 MPa for 28 days curing periods. Raja et al. [16] investigated on the coconut shell, and the foundry sand as replacement aggregates with fine, and coarse aggregates. They replaced more than 10, 20 and 30% of foundry sand, and 10 and 20% of coconut shell to concrete. As a result, the compressive strength increased more than 32 MPa. Their results shows that the effect of foundry sand was more than coconut shell on the compressive strength of concrete. The tensile, and flexural strengths were 4.2 and 2.88 MPa respectively. In another example, Soriano et al. [17] added almonds shell ash (ABA) to cement. They examined the mechanical properties of concrete with adding ABA. They found that the compressive strength of concrete increased more than 44 MPa when 25% of ABA has been added. Moreover, some researchers added sustainable powder to cement to find the effect of mechanical properties. For example, Bigi et al. [18] added more than 18 and 82% of gelatin powder to cement. They understood that the final setting time of cement increased more than 45 min, and compressive strength enhanced up to 10.7–14 MPa.

Many researchers investigated on the recycled aggregated as a greener method, and a viable concrete. For example, Nuaklong et al. [19] find the mechanical properties of concrete with recycled aggregates and adding different type's fly ash. According to the results, different fly ash types was not effective on the compressive strength. The compressive strength results were between 44 and 46 MPa. He et al. [5] studied the effect shrinkage, and creep on the recycled aggregated concrete. In their study, the results of compressive strengths were between 32 and 48 MPa with different mixture designs.

The morphology analysis is an important analysis which related to understanding the reaction of material in micro scale of materials. Scanning electron microscopy (SEM) is a method which can display the morphology of the materials. Chaudhary et al. [20] analyzed the almond shell via SEM method with 10 μ m as a reinforcement in composite. The SEM results shows that almond shell has pure particle size between 1.020 to 1.253 μ m. For example, recycled aggregates microstructure is important to understand the mechanical properties of concrete. In this regard, Guedes et al. [6] investigated the microstructural characterization of concrete with recycled aggregates. Results shows that, the replacement of natural aggregates by recycled crushed concrete did not change any morphology of the Cementous structure and hydration.

The mechanical properties and durability of recycled aggregate concrete (RAC) are currently the subject of extensive research. A comprehensive examination of the RAC's mechanical properties was carried out. The findings indicate that the high-water absorption of the aggregates and the weak areas created by the mortar adhering to the old interface is primarily responsible for the RAC's deterioration in terms of its mechanical properties. The sturdiness of RAC likewise was explored, and the outcomes show that the higher the reused total (RA) content, the mortar content appended to the RA, and the W/C (water-to-ash ratio), the more regrettable the strength of RAC [21–23]. The use of almond shell and gelatin powder to mix with concrete lacks sufficient information regarding the properties of the fresh and hardened shell and gelatin powder, as can be seen from earlier literature. Therefore, in order to introduce a new type of conventional concrete with high-strength properties, this research examined the use of shell and gelatin powder as a substitute.

The current study has applied different materials, such as almond shell powder, gelatin powder, and recycled aggregates, to a mixture with concrete. **This study aims** to introduce a new type of conventional concrete with high-strength properties. In this regard, the materials were mixed with concrete to find the compressive and tensile strengths. Moreover, microanalysis was applied. In this term, scanning electron microscopy and energy-dispersive x-ray spectroscopy (EDXS) were applied to find the microstructure and chemical properties.

2. Materials and methods

2.1. Materials. The current study has been used almonds shell, gelatin powders, recycled aggregates as the sustainable, and natural material in concrete. The original concrete has been inspired by the high-performance concrete (HPC) in previous study. To prepare concrete, portland cement (Table 1), gravel, and sand

aggregates, superplasticizer (Table 2), almond shell, gelatin powder, and recycled aggregates have been used. The gravel size range was between 20 mm, and 5 mm with specific gravity (2650 Kg/m^3) granulometric curves of coarse aggregates is shown in Figure 1. The sand with a particle size range of 0.6 to 2.0 mm is mixed with concrete and both are collected from the Semnan region, Semnan, Iran. The fine aggregates specific gravity was 2384 Kg/m^3 , and the granulometric curves is illustrated in the Figure 2.

Table 1

Chemical properties of ordinary portland cement (OPC)

Oxide, %								Fineness, m^2/kg	Relative density
SiO ₂	Fe ₂ O ₃	MgO	SO ₃	Al ₂ O ₃	CaO	K ₂ O	LOI		
19.52	4.04	4.36	2.89	4.81	62.18	0.6	1.62	387	3.14

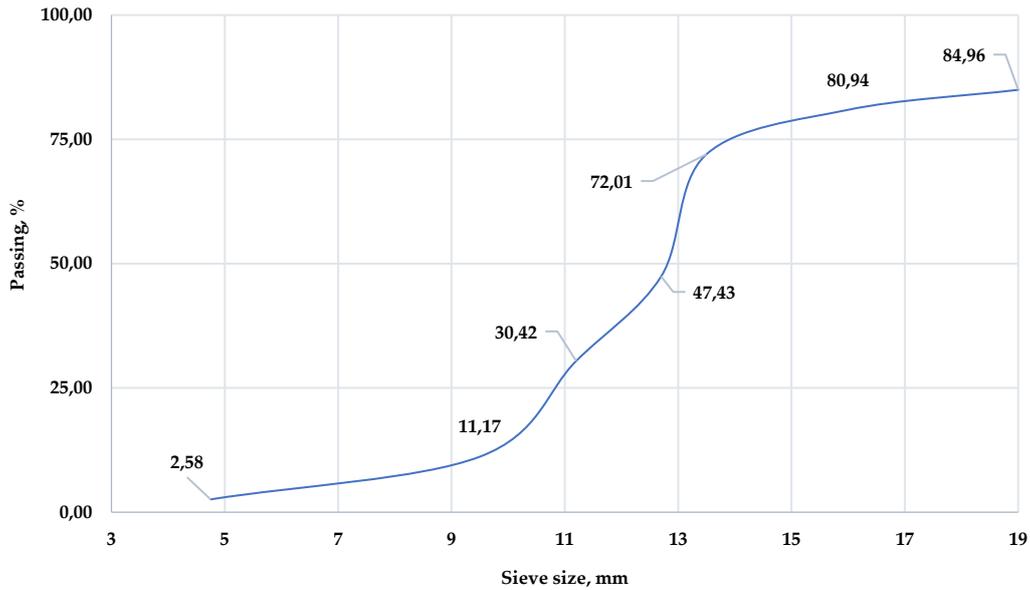


Figure 1. Granulometric curves of coarse aggregates

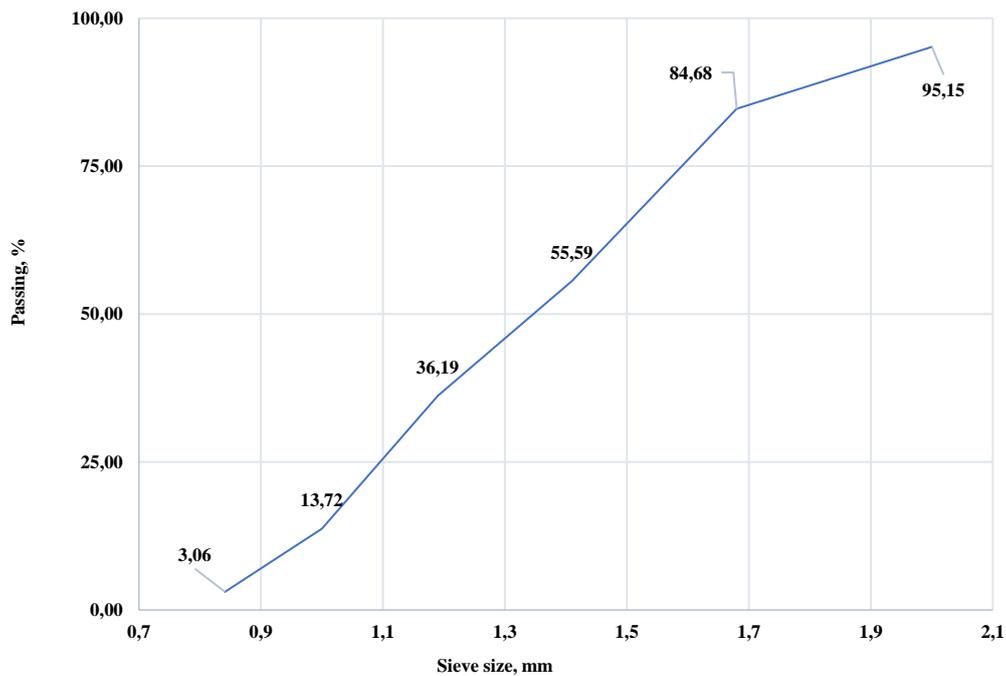


Figure 2. Granulometric curves of fine aggregates

The almond shell was used as an alternative material with coarse aggregates. The size of the almond shell was between 50 and 20 mm. The positive aspect of adding an almond shell was the lightweight and the shell form structure of the almond. Figure 3 shows the almond shell. Gelatin powder was added to concrete to find the ability to improve compressive strength and the cementitious matrix. In this case, the gelatin powder was melted at 100°C water temperature. Next, normal-temperature water was added to cement. $C_{102}H_{151}N_{31}O_{39}$ illustrates the chemical properties of gelatin powder as shown in Figure 3, *b* [24].

Recycled aggregates were added to the concrete mixture to find mechanical properties. In this term, recycled aggregates with sizes between 50 and 20 mm as coarse aggregate were added to the concrete (Figure 4).



a



b

Figure 3. Almond shells as the coarse aggregates (*a*) and gelatin powder to add to concrete (*b*)



Figure 4. Recycled aggregates as the coarse aggregates

In the current study, ten different mixture designs were examined one by one. Table 2 shows the mixture design. According to earlier research, basalt fibre high-performance concrete (BFHPC) served as an inspiration for the original concrete¹ [25].

¹ ASTM C109/C109M. *Standard test method for comprehensive strength of hydraulic cement mortars*. ASTM International; 2009; ASTM C496. *Standard test method for splitting tensile strength of cylindrical concrete specimens*. ASTM International; 2017; ACI Committee 544.2R. *Measurement of properties of fiber reinforced concrete*. Detroit: American Concrete Institute; 1989.

Table 2

The mixture design of the current study

Specimens	Cement	Water	Coarse aggregates	Almond shell	Recycled aggregates	Fine aggregates	Gelatin powder	Super-plastiziter
OC	500	190	450	–	–	600	–	10
AS	500	190	360	200	–	600	–	10
AS1	500	259	450	270	–	480	–	10
AS2	550	259	450	225	–	600	–	10
AS3	550	259	540	279	–	720	–	10
GC	500	190	450	–	–	600	70	10
GC1	500	210	250	–	–	800	105	10
GC2	500	210	–	–	–	1300	140	10
RC1	450	210	–	–	450	600	–	10
RC2	450	210	–	–	450	600	140	10

2.2. Experiment methods. The current study investigates the compressive and tensile strengths according to ASTM C109² and ASTM C496.³ The dimensions of samples for compression, tension, and flexural tests were $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$, and $10 \text{ (radius)} \times 20 \text{ cm}^3$ (Figure 5). The materials were mixed in the laboratory pan mixer at a steady speed of 48 rpm. The aggregates were mixed for 1–2 minutes, the water was quartered for 1 minute, and the binders were added and mixed for 2 minutes (Figure 5). Before loading concrete, the frameworks are polished with oil. The concrete is loading on the frameworks. The cube and cylinder concrete specimens are molded to water. The cube water molded samples were held at 35°C for 48 hours, while the cylinder water molded samples were kept at 35°C for 72 hours. The samples were then cured for 28 days molded with 35°C water (Figure 6).

The cube samples were tested in the compression machine (Figure 7). The compressive test is done according to ASTM C109.⁴ The cube specimens sample was $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$. The loading speed was 600 Kg/second. Refereeing to Figure 8 an analog loading speed check, a cement surface was put under the cube to load stable.



Figure 5. Cube (a) and cylinder (b) samples

² ASTM C109/C109M. *Standard test method for compressive strength of hydraulic cement mortars*. ASTM International; 2009.

³ ASTM C496. *Standard test method for splitting tensile strength of cylindrical concrete specimens*. ASTM International; 2017.

⁴ ASTM C109/C109M. *Standard test method for compressive strength of hydraulic cement mortars*. ASTM International; 2009.



Figure 6. The pan mixture of laboratory (a) and molded concrete samples under water (b)



Figure 7. Cube samples under compression machine



Figure 8. Compression machine

The tensile test was established according to ASTM C496.⁵ Furthermore, the cylinder diameter was $10(\text{radius}) \times 20 \text{ cm}^3$. The loading test speed is shown in Figure 9 as equal to 200 Kg/second. According to the test method, certain devices must surround the cylinder. The tension machine is loaded on top of the samples, and finally, the sample is divided into two parts (Figure 10).

The falling mass impact resistance test is in the category of tests that determine the mechanical properties of concrete. The projectile impact test, Sharpie test, drop weight test, and Hopkinson bar test are consecutive tests suggested by ACI committee 544 to check the impact behavior of concrete. With the drop weight test device with repeated blows, the number of blows to create a certain level of rupture is obtained, which is a measure of the material's energy absorption capacity. This test is performed by dropping a 4.54 kg weight from a height

⁵ ASTM C496. *Standard test method for splitting tensile strength of cylindrical concrete specimens*. ASTM International; 2017.

of 457 mm and repeated blows until certain cracking levels (first cracking and final cracking) continue [25–28].⁶ This test was carried out on concrete samples with disk dimensions of 15×16.36 cm obtained from concrete based on blast furnace slag treated at ambient temperatures of 25 and 90 °C at the age of 28 days and also based on equation (1) The impact energy absorption capacity E was calculated as

$$E = N(WH), \quad (1)$$

where N – the number of blows to cause the initial crack; W – the hammer's weight; H – the height of the fall.

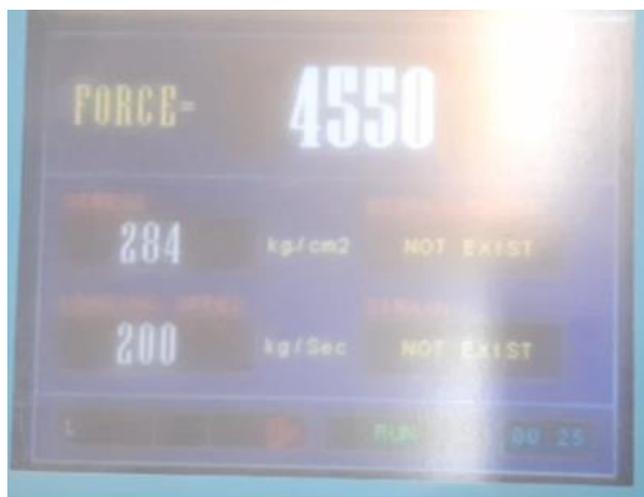


Figure 9. Cylinder loading test speed



Figure 10. Tension test:
 a – tension test method; b – cylinder samples under compression machine

Concrete's ability to absorb water is one of its most important defenses against the elements and issues with durability. Concrete has a lower capacity for water absorption, which reduces the likelihood of harmful ions entering the material and reduces reinforcement corrosion or destruction. According to the ASTM C642 stan-

⁶ ACI Committee 544.2R. *Measurement of properties of fiber reinforced concrete*. Detroit: American Concrete Institute; 1989.

ward,⁷ after 28 days of processing, cubic samples of concrete measuring 100×100×100 mm were first dried for 72 hours in a heater at 105 °C was measured after this time period and cooling of the samples in the laboratory environment. Then the samples were immersed in water. Their wet weight was measured after half an hour and 24 hours. The water absorption of the samples is calculated within the specified timeframes. The water absorption equation was determined as

$$W_A = \frac{W_W + W_D}{W_W}, \quad (2)$$

where W_A – water absorption; W_W – saturated weight of the sample; W_D – dry weight of the sample.

After 28 days of processing, cubic samples measuring 150×150×150 mm were placed in the testing machine following the standard DIN 1048-part 5.⁸ The samples inside the machine are subjected to a pressure of 5 atmospheres for 72 hours. After this time, the samples were removed from the machine, broken with a pressure jack, and the depth to which water penetrates the concrete was measured.

3. Results and discussion

3.1. Mechanical properties: compressive strength. Concrete structure behavior in the utility phase is called compressive strength. The additive chemical powder, replacement cement with other materials, and curing environment affect the compressive strength. The concrete with the addition of almond shells was lighter, and the compressive strength was lower than other types of concrete. Figure 11 shows that the compressive strength of concrete with additional gelatin powder was better than conventional concrete. The compressive strength of GC (additional concrete with gelatin powder) was 50.7 MPa for 28 days curing periods, while for conventional concrete, the compressive strength was 39 MPa. On the other hand, the concrete with almond shells had less compressive strength than other types. For example, AS has 10.9 MPa compressive strength, and AS1 has 14.6 MPa for 28 days curing periods.

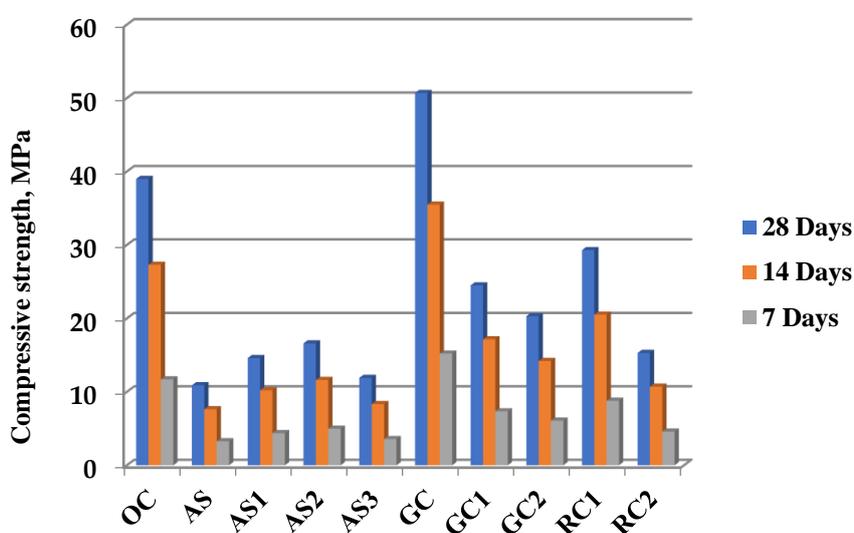


Figure 11. The compressive strength of each concrete types

The GC concrete type results show that gelatin powder's curing period is directly related to compressive strength, and compressive strength will frequently increase with time. Meanwhile, in the compressive strength experimental test, the concrete with additional almond shells and recycled aggregates showed harsh and sudden failure. In contrast, the concrete with gelatin powder showed soft failure (Figures 12 and 13). The test results show that coarse aggregates' compressive strength was better than almond shells and recycled aggregates.

⁷ ASTM C642. *Standard test method for density, absorption, and voids in hardened concrete*. ASTM International; 2021. p. 1–3.

⁸ DIN 1048-part 5. *Concrete harden determination of the depth of penetration of water under pressure*. 2016.

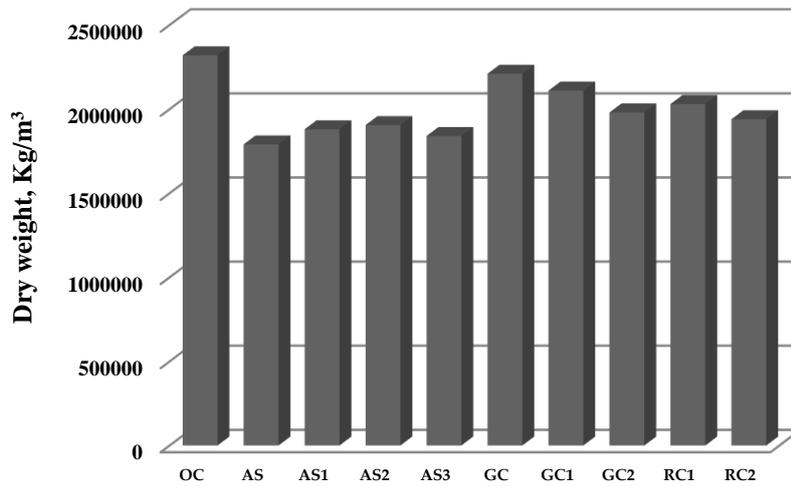


Figure 12. The dry weight of each concrete types

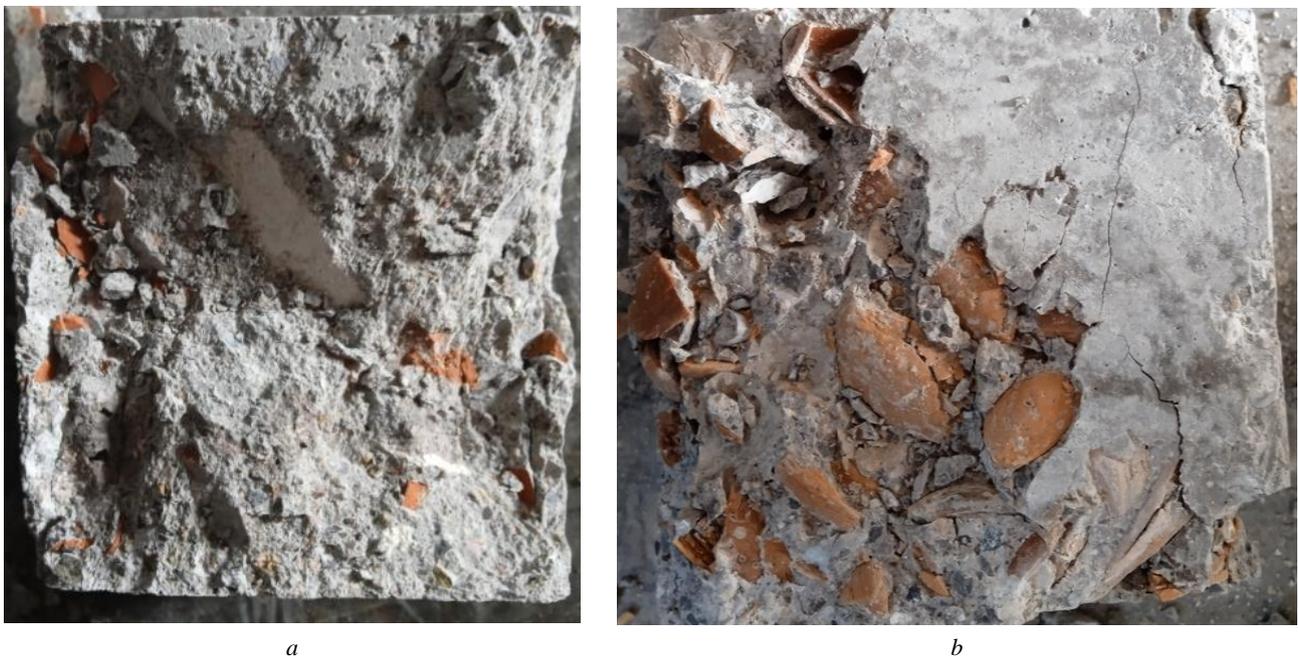


Figure 13. The failure mechanism of each concrete type: *a* – recycled aggregates; *b* – almond shell

3.2. Tensile strength. The nature of concrete is brittle and does not allow it to withstand tensile load; therefore, the tensile strength of concrete is low. The lowest tensile strength was for the AS3 28 days, and the biggest was for the GC concrete types. According to the results, the GC has maximum tensile strength with 3.7 MPa for 28 days and 2.6 for 14 days curing periods (Figure 14).

3.3. Impact resistance results. According to the results, the GC had the maximum impact resistance rather than other than samples. The first crack was 11 joules, the second sample was 129 joules, the first crack impact strength joules was 223.85 joules, and the second impact strength was 2641.43 joules (Tables 3 and 4). The OC first and ultimate cracks were 9 and 106 joules respectively. Moreover, the first and ultimate crack impact strength in joules were 183.15 and 2161.17 joules (Figure 15).

3.4. Durability, water absorption and penetration depth. The durability of any structural component includes the ability to withstand weather conditions, chemical attacks, abrasion, or any other destructive process. The durability of concretes is determined by their characteristics, such as absorption and water absorption.

Concrete with more gelatin and recycled aggregates absorbs less water than concrete with more almond shells, according to the results of the water absorption test. Water penetrates the cube specimens through the substantial pores of the concrete samples with the addition of bead shells. In contrast, water cannot penetrate the concrete specimens through the effect of gelatin on cement. According to Figure 16, the GC had the best results with 0.5%, and AS had the maximum absorption with 2.1%. The RC1, and RC2 had good results, while RC1 results were better with 0.7% (Figure 16).

Almond shell concrete had the highest porosity; the results indicate that the almond shell concrete series had the highest penetration depth. These results indicate that the penetration depth is related to concrete pore percentages (Figure 17).

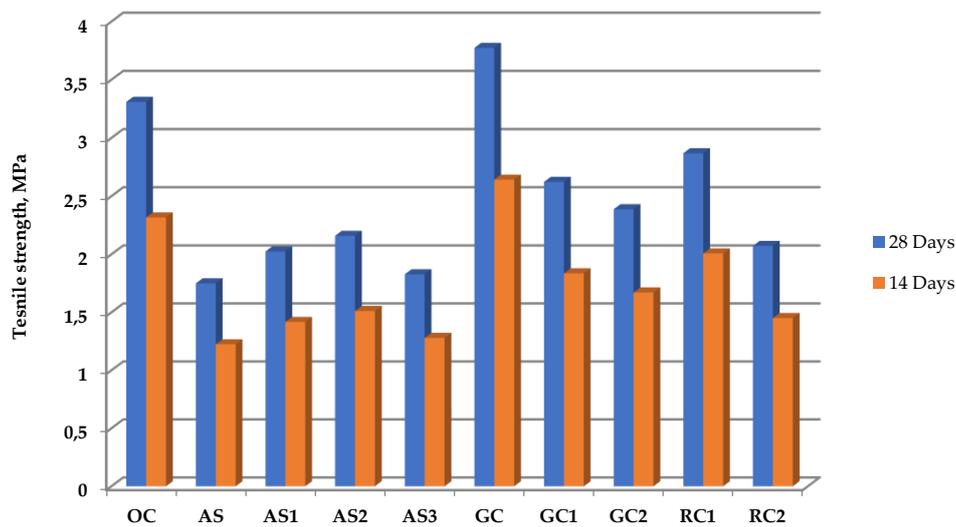


Figure 14. The tensile strength of each concrete types

Table 3

First crack impact energy of samples

Sample	First crack	First crack impact strength, joules
OC	9	183.15
AS	2	46.5021
AS1	3	62.28721
AS2	3	70.81971
AS3	2	50.76834
GC	11	223.85
GC1	5	104.5231
GC2	4	86.60482
RC1	6	125.001
RC2	3	65.27358

Table 4

Ultimate crack impact energy of samples

Sample	First crack	First crack impact strength, joules
OC	106	2161.17
AS	26	548.7247
AS1	36	734.9891
AS2	41	835.6725
AS3	29	599.0665
GC	129	2641.43
GC1	60	1233.372
GC2	50	1021.937
RC1	72	1475.012
RC2	37	770.2283

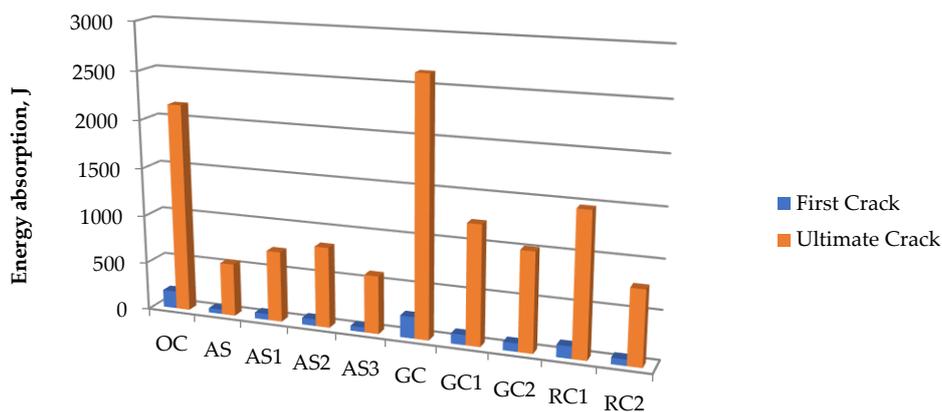


Figure 15. First and ultimate crack impact strengths

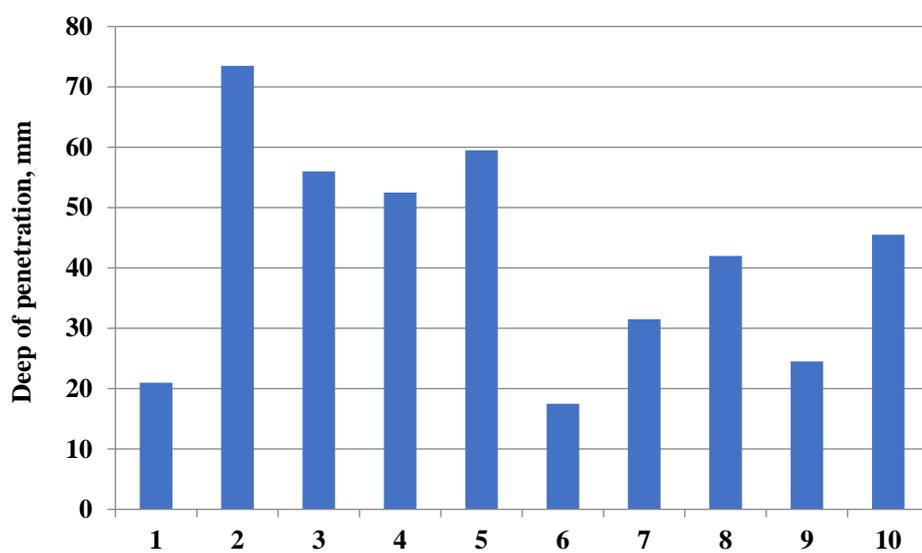


Figure 16. Water absorption results of concrete

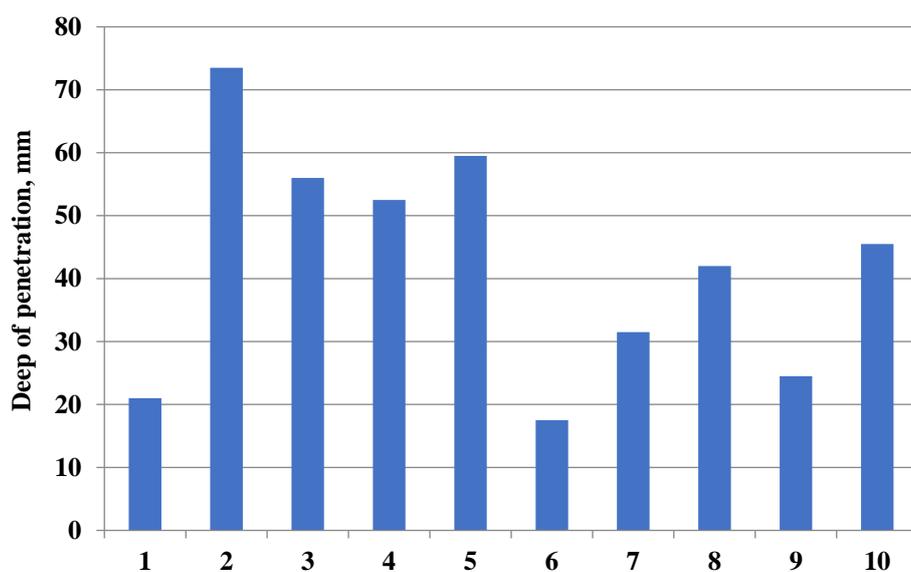


Figure 17. Deep of penetration results

3.5. Microstructure results. The current study applied scanning electron microscopy and energy dispersive x-ray spectroscopy for all types of samples. Figure 18 displays almond shell concrete SEM. Figure 18 shows the crack region between the almond shell and concrete (Figure 18, *b*). In addition, the crystallization of concrete is shown in Figure 18, *d*. Cracks and voids between the almond shell and concrete were an important reason for not improving the compressive strength of concrete. Figure 18, *f* shows that the crack depth of 10 micrometers and almond shell and concrete, the crack depth is an important reason for reducing concrete's mechanical and chemical properties.

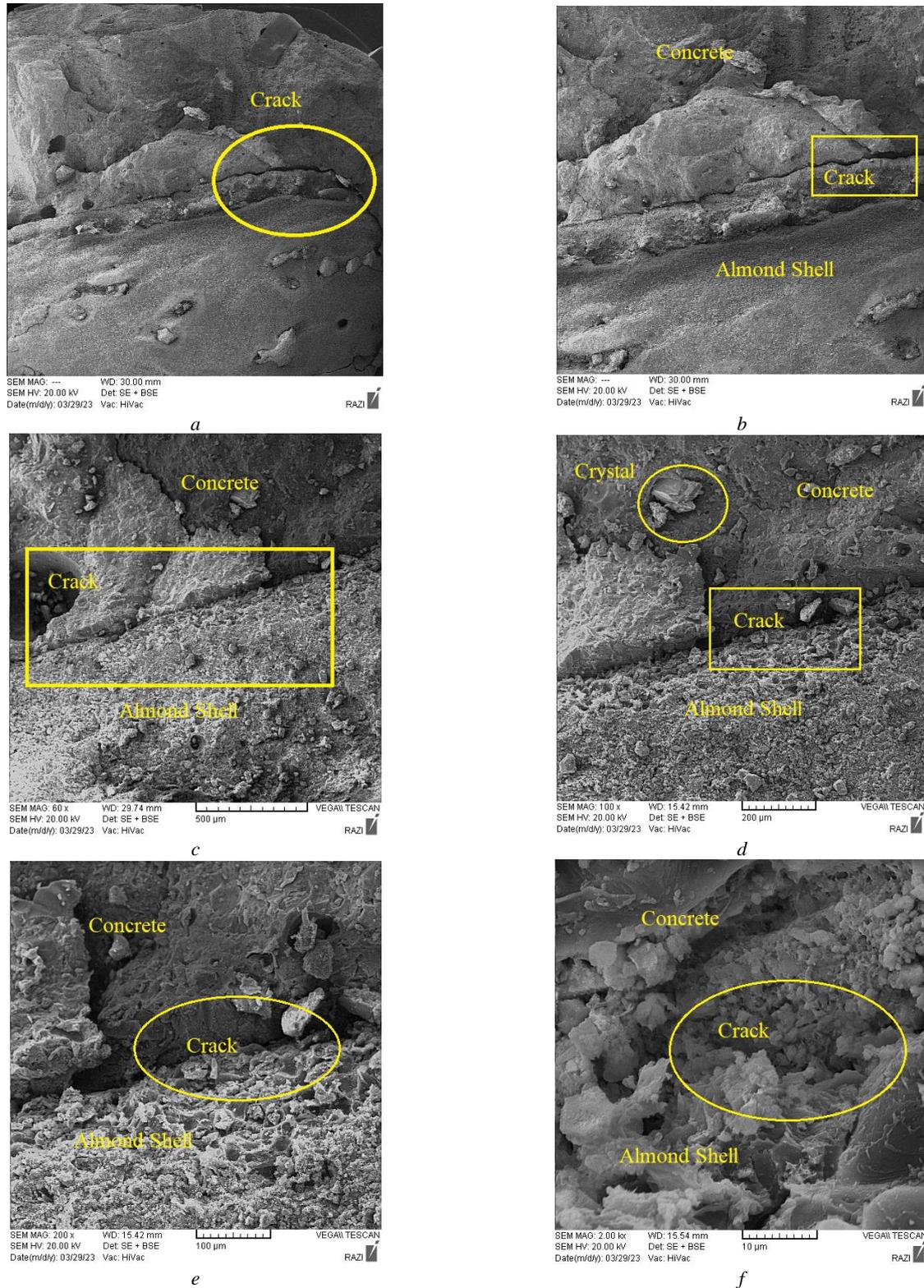


Figure 18. The SEM of almond shell concrete

Figure 19 shows the conventional concrete (OC) SEM results. Figure 19, *b* shows the voids and crystallization process (at a 100-micrometre scale). With the focus on one crystal, the type was heterogeneous with a round shape and round edges (Figure 19, *c*). The EDXS analysis of the crystal reveals that the value of unnormalized concentration(Unn) in weight percentage of element silicon, at 26.01 according to Figure 20 and Table 6. After silicon, aluminium and potassium with 9.11 and 4.23 had the maximum percentages of element (Table 5, Figure 20).

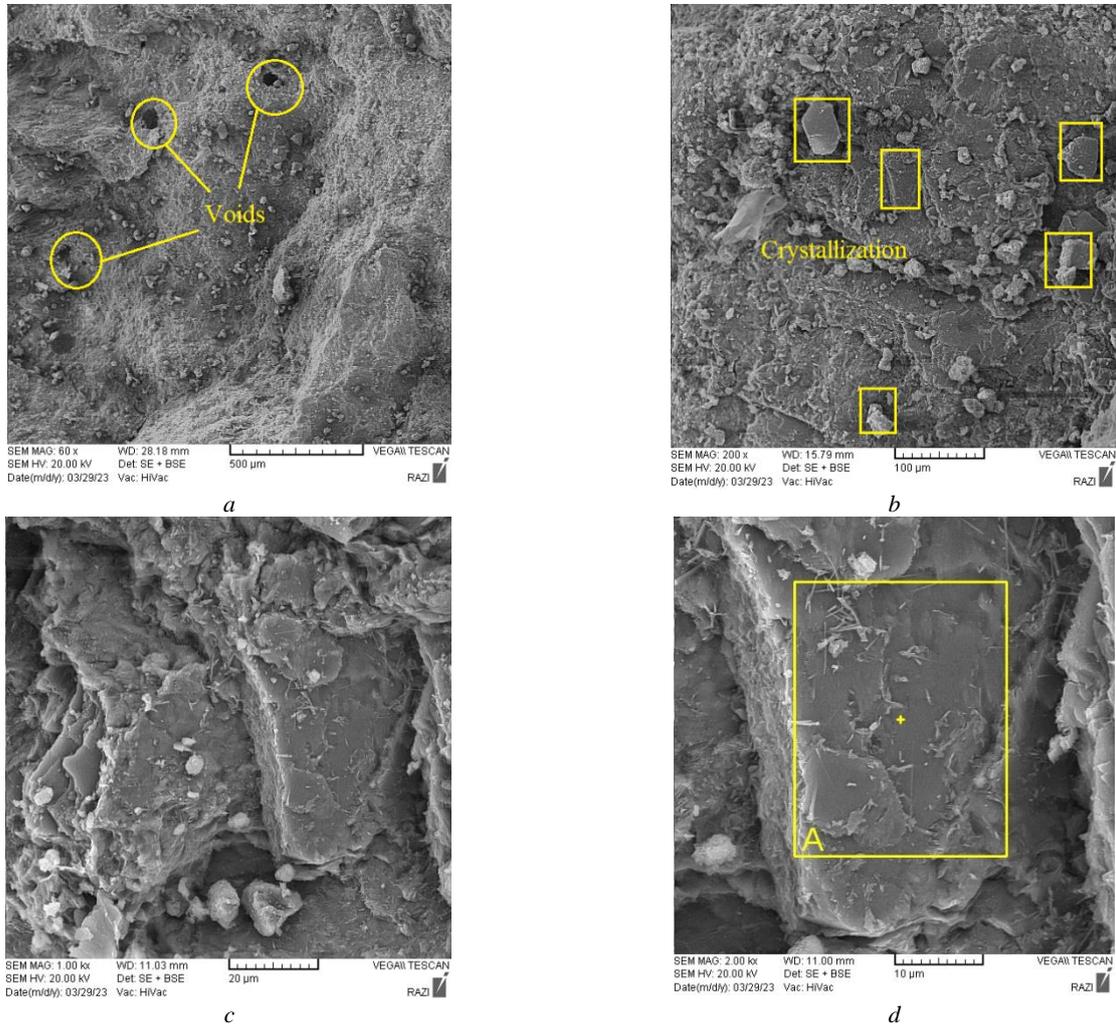


Figure 19. The SEM of OC sample

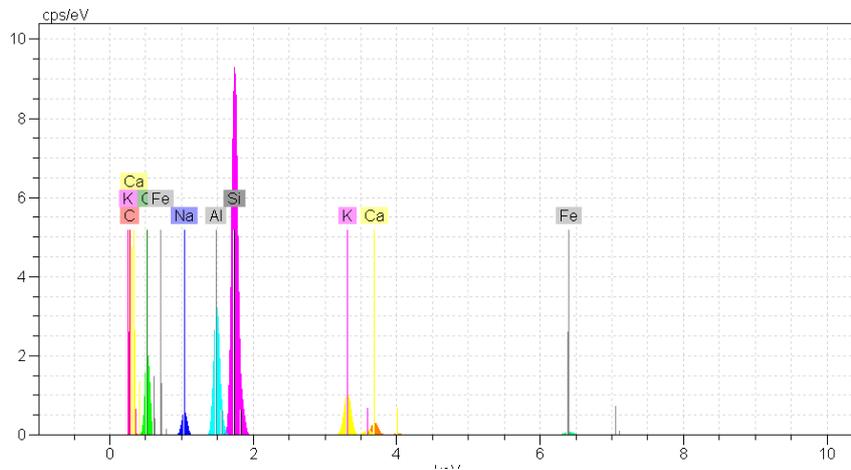


Figure 20. The EDXS of OC sample

Table 5

The EDXS of OC sample

Element	Unn wt, %
Carbon	0.92
Oxygen	38.03
Sodium	2.47
Aluminium	9.11
Silicon	26.01
Potassium	4.22
Calcium	1.23
Iron	0.77

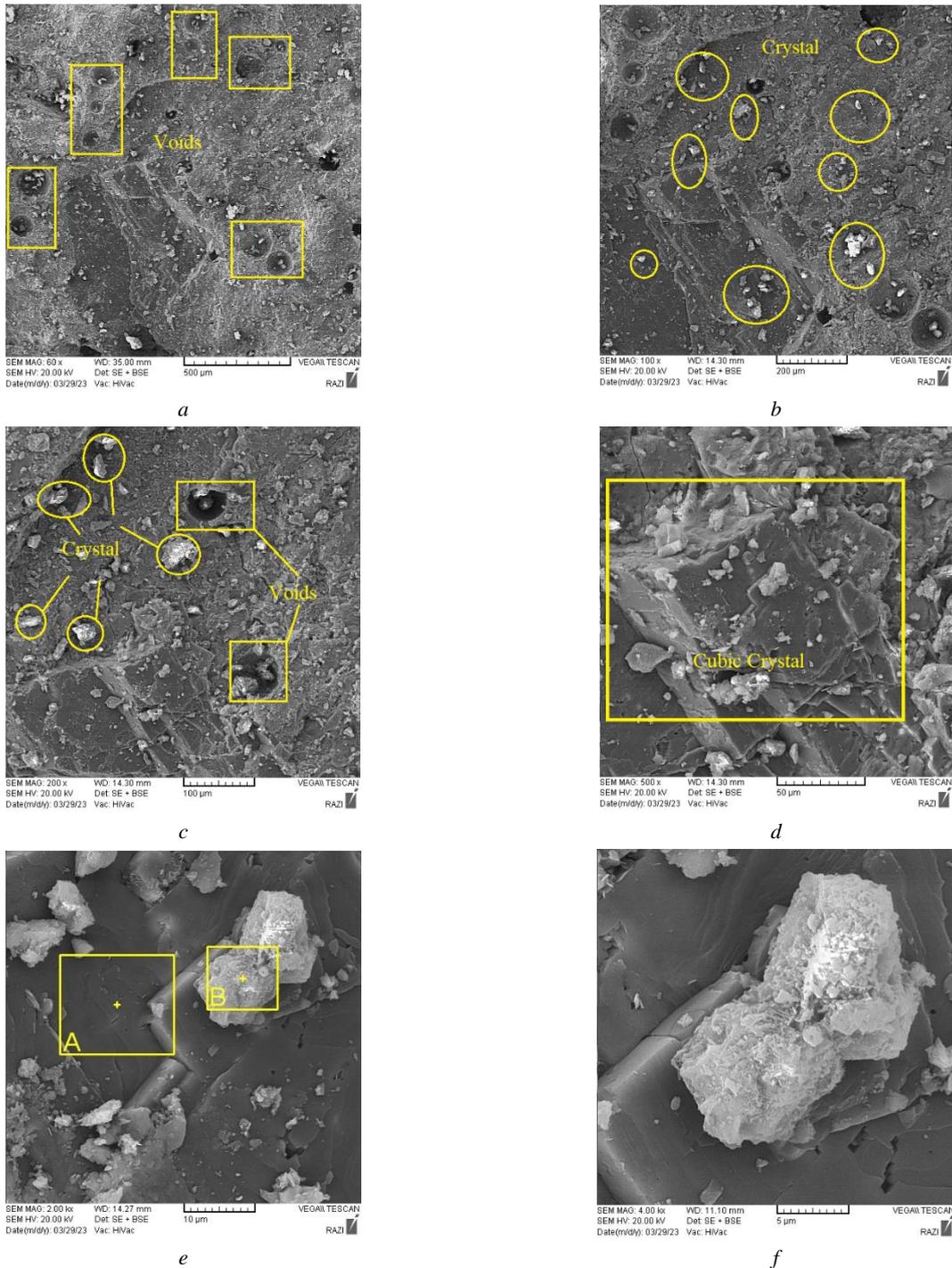


Figure 21. The SEM of gelatin concrete

Gelatin concrete had more voids and more crystals than normal concrete (Figure 21, a, b). 500 μm SEM results show that gelatin concrete has many voids on the surface, while normal concrete has fewer. There are two types of crystals in gelatin concrete: the pointed crystal and the white crystal, and the cubic crystal (Figure 21, b, c). Cubic crystal contains sharp crystal. The EDXS results show that the sharp crystal contains more calcium and silicon, while the cubic crystal contains more carbon and magnesium. The chemical properties of conventional concrete crystals include silicon and gelatin, including carbon and calcium. In fact, the gelatin powder can form C-S-H gel in the concrete. The sharp crystal has more silicon in C-S-H gel and the cubic crystal has more carbon in C-S-H gel (Figures 22 and 23, Table 7).

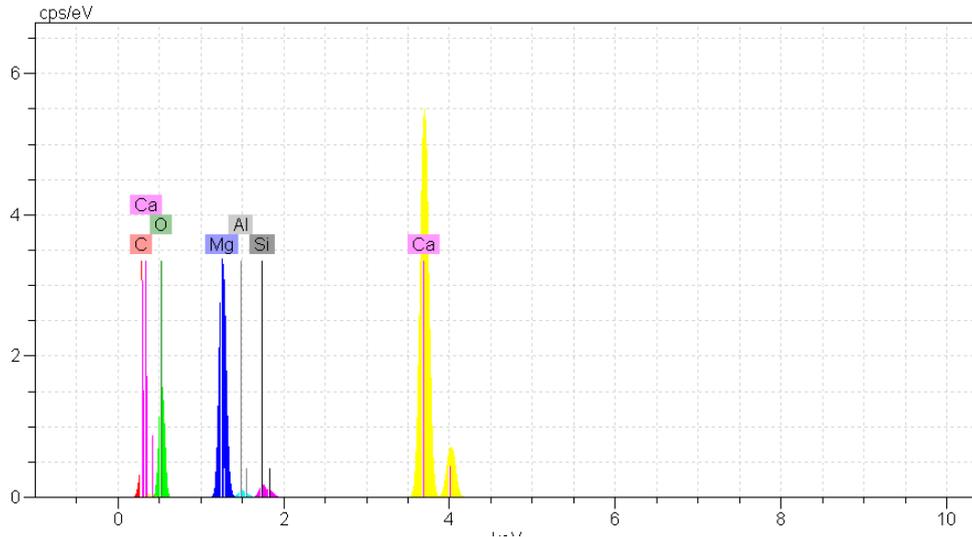


Figure 22. The EDXS of B place of gelatin concrete

Table 6

The EDXS of A place of gelatin concrete

Element	Unn wt, %
Carbon	6.27
Oxygen	40.14
Magnesium	12.38
Aluminum	0.43
Silicon	0.77
Calcium	20.33

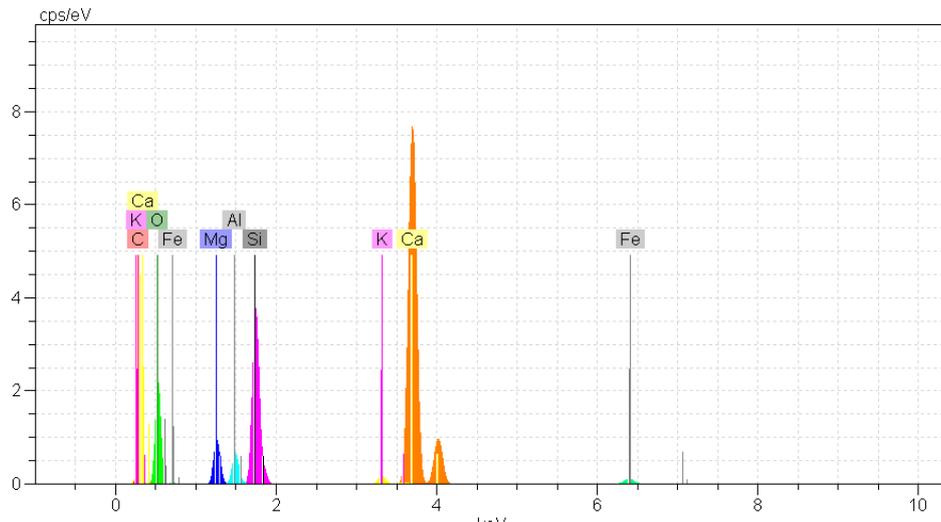


Figure 23. The EDXS of B place of gelatin concrete

Table 7

The EDXS of A place of gelatin concrete

Element	Unn wt [%]
Carbon	2.19
Oxygen	45.12
Magnesium	2.14
Aluminum	1.12
Silicon	6.37
Calcium	26.87

4. Conclusion

The current study investigated the effect of almond shells, gelatin powder, and recycled aggregates on concrete. According to the results, the gelatin powder had the maximum effect on the concrete's mechanical and durability properties. The mechanical test, such as compressive and tensile strengths and impact loading resistance, were applied. Water absorption and deep penetration were applied based on chemical resistance. The main conclusions and relevant suggestions are as follows:

1. GC had the best compressive strength and tensile strength, and the almond shell aggregates lost the weight of concrete samples.

2. The impact resistance was better for OC and GC. This show that the effect of gelatin powder is on the impact resistance of concrete.

3. The SEM results show that the crack between the almond shell and concrete was the reason of the weakness of almond shell concrete.

4. SEM of conventional concrete shows that the crystals are smooth, and EDXS results show silicon in the chemical properties of concrete.

5. Sharp and cubic crystals of two different types can be seen in gelatin concrete. Gelatin concrete had more open space than regular concrete, and sharps crystals outnumbered cubes crystals. While the cubic crystal has more carbon in its C-S-H gel, the sharp crystal has more silicon.

References

- Forouzandeh J.M., Jahangiri A., Jamekhorshid A. Experimental investigation on the durability of metakaolin-based geopolymer concrete in aggressive environments. *Research Square*. 2022. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2247685/v1>
- Abdollahnejad Z., Kheradmand M., Pacheco-Torgal F. Short-term compressive strength of fly ash and waste glass alkali-activated cement based binder (AACB) mortars with two biopolymers. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2017;29(7). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0001920](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0001920)
- Aliabdo A.A.M., Abd A.E., Emam A.M. Factors affecting the mechanical properties of alkali activated ground granulated blast furnace slag concrete. *Construction and Building Materials*. 2019;197:339–355. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.11.086>
- Kuri J.C., Hosan A., Shaikh F.U.A., Biswas W.K. The effect of recycled waste glass as a coarse aggregate on the properties of Portland cement concrete and geopolymer concrete. *Buildings*. 2023;13(3):586. <https://doi.org/10.3390/buildings13030586>
- He Z., Hu H., Casanova I., Liang C., Du S. Effect of shrinkage reducing admixture on creep of recycled aggregate concrete. *Construction and Building Materials*. 2020;254:119312. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.119312>
- Guedes M., Evangelista L., de Brito J., Ferro A.C. Microstructural characterization of concrete prepared with recycled aggregates. *Microscopy and Microanalysis*. 2013;19(5):1222–1230. <https://doi.org/10.1017/S1431927613001463>
- Imtiaz I., Kashif-ur-Rehman S., Alalou W., Nazir K., Javed M., Aslam F., Musarat M. Life cycle impact assessment of recycled aggregate concrete, geopolymer concrete, and recycled aggregate-based geopolymer concrete. *Sustainability*. 2021;13(24):13515. <https://doi.org/10.3390/su132413515>
- Zhang J., Zhao Y., Li X., Li Y., Dong H. Experimental study on seismic performance of recycled aggregate concrete shear wall with high-strength steel bars. *Structures*. 2021;33:1457–1472. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.05.033>
- Waqas R.M., Butt F., Danish A., Alqurashi M., Mosaberpanah M.A., Masood B., Hussein E.E. Influence of bentonite on mechanical and durability properties of high-calcium fly ash geopolymer concrete with natural and recycled aggregates. *Materials*. 2021;14(24):7790. <https://doi.org/10.3390/ma14247790>
- Gunasekaran K., Annadurai R., Kumarb P.S. Study on reinforced lightweight coconut shell concrete beam behavior under shear. *Materials and Design*. 2013;50:293–301. <http://doi.org/10.1016/j.matdes.2013.03.022>
- Galishnikova V.V., Elroba S.M., Dayoub N., Sakna A. Use of natural compounds as a nutrition for bacteria in self-healing mortar. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):54–63. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-54-63>

12. Gunasekaran K., Kumar P. S., Lakshmiathy M. Mechanical and bond properties of coconut shell concrete. *Construction and Building Materials*. 2011;25:92–98. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2010.06.053>
13. Hilal N., Sahab M.-F., Mohammad Ali T.-K. Fresh and hardened properties of lightweight self-compacting concrete containing walnut shells as coarse aggregate. *Journal of King Saud University. Engineering Science*. 2020;(33):364–372. <https://doi.org/10.1016/j.jksues.2020.01.002>
14. Alaneme G.U., Mbadike E.M. Experimental investigation of Bambara nutshell ash in the production of concrete and mortar. *Innovative Infrastructure Solutions*. 2021;6:66. <https://doi.org/10.1007/s41062-020-00445-1>
15. Kong J., Ni S., Guo C., Chen M., Quan H. Impacts from waste oyster shell on the durability and biological attachment of recycled aggregate porous concrete for artificial reef. *Materials*. 2022;15:6117. <https://doi.org/10.3390/ma15176117>
16. Raja K.C.P., Thaniarasu I., Elkotb M.A., Ansari K., Saleel C.A. Shrinkage study and strength aspects of concrete with foundry sand and coconut shell as a partial replacement for coarse and fine aggregate. *Materials*. 2021;14:7420. <https://doi.org/10.3390/ma14237420>
17. Soriano L., Font A., Tashima M.M., Monzó J., Borrachero M.-V., Bonifácio T., Payá J. Almond-shell biomass ash (ABA): a greener alternative to the use of commercial alkaline reagents in alkali-activated cement. *Construction and Building Materials*. 2021;290:123251. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.123251>
18. Bigi A., Bracci B., Panzavolta S. Effect of added gelatin on the properties of calcium phosphate cement. *Biomaterials*. 2004;25:2893–2899. <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2003.09.059>
19. Nuaklong P., Wongs A., Sata V., Boonserm K., Sanjayan J., Chindaprasirt P. Properties of high-calcium and low-calcium fly ash combination geopolymer mortar containing recycled aggregate. *Heliyon*. 2019;5:e02513. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e02513>
20. Kumar C.A., Gope P.C., Singh V.K., Verma A., Rajiv Suman A. Thermal analysis of epoxy-based coconut fiber-almond shell particle reinforced bio composites. *advances in manufacturing science and technology*. 2014;38(2). <https://doi.org/10.2478/amst-2014-0009>
21. Erofeev V.T., Kaznacheev S.V., Pankratova E.V., Seleznev V.A., Tyuryahina T.P. Physical and mechanical properties of pre-bound aggregate composites. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(5):399–406. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-399-406>
22. Frolov K.E. Experimental studies of reinforced concrete structures of hydraulic structures strengthened with composite materials. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(3):237–242. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-237-242>
23. Kharun M., Ehsani A., Nasimi S., Gebre T.H. Properties and behavior of light hydrophobic concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(3):299–307. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-3-299-307>
24. Rehman W., Majeed A., Mehra R., Bhushan S., Rani P., Chand K., Bast F. Gelatin: a comprehensive report covering its indispensable aspects. *Natural Polymers: Derivatives, Blends and Composites*. Nova Science Publishers; 2016. p. 209–222.
25. Kharun M., Al Araza H.A.A., Hematibahar M., Al Daini R., Manoshin A.A. Experimental study on the effect of chopped basalt fiber on the mechanical properties of high-performance concrete. *AIP Conference Proceedings*. 2022;1:2559. <https://doi.org/10.1063/5.0099042>
26. Hematibahar M. *Crack resistance in basalt fibred high-performance concrete* (M.Sc. thesis). Moscow: RUDN University; 2021.
27. Hasanzadeh A., Vatin N.I., Hematibahar M., Kharun M., Shooshpasha I. Prediction of the mechanical properties of basalt fiber reinforced high-performance concrete using machine learning techniques. *Materials*. 2022;15(20):7165. <https://doi.org/10.3390/ma15207165>
28. Hematibahar M., Vatin N.I., Alaraza H.A.A., Khalilavi A., Kharun M. The prediction of compressive strength and compressive stress-strain of basalt fiber reinforced high-performance concrete using classical programming and logistic map algorithm. *Materials*. 2022;19(15):6975. <https://doi.org/10.3390/ma15196975>



DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-251-257

EDN: DMOFUJ

УДК 691.539.216

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Механические свойства мелкозернистых карбонатных бетонов с комплексной добавкой, включающей тонкодисперсный известняковый наполнитель и суперпластификатор

В.В. Белов  , П.В. Куляев , Т.Р. Баркая 

Тверской государственный технический университет, Тверь, Российская Федерация

 vladim-bel@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 17 февраля 2023 г.

Доработана: 12 апреля 2023 г.

Принята к публикации: 21 апреля 2023 г.

Для цитирования

Белов В.В., Куляев П.В., Баркая Т.Р. Механические свойства мелкозернистых карбонатных бетонов с комплексной добавкой, включающей тонкодисперсный известняковый наполнитель и суперпластификатор // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 251–257. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-251-257>

Аннотация. Деформационные и прочностные свойства мелкозернистых карбонатных бетонов, несмотря на то что они хорошо зарекомендовали себя в различных типах строительства, не изучены в той же степени, как характеристики традиционных тяжелых бетонов. Цель исследования – разработка способов повышения физико-механических свойств мелкозернистых карбонатных бетонов с использованием минеральной комплексной добавки, состоящей из тонкодисперсного известнякового наполнителя и суперпластификатора в составе бетона. Проанализированы взаимосвязи предельных значений прочностных характеристик (кубиковая прочность) и трещинообразующих напряжений и деформаций для обычного и карбонатного мелкозернистого составов бетона. Через механизм демпфирования процесса трещинообразования в бетоне, за счет совместной работы суперпластификатора и карбонатного микродисперсного наполнителя получен состав карбонатного мелкозернистого бетона, способный сопротивляться статическим и динамическим нагрузкам, с плотной структурой и повышенными надежностью и долговечностью.

Ключевые слова: трещинообразующие напряжения, деформации, карбонатный микронаполнитель, суперпластификатор, комплексная добавка, микротрещинообразование, демпфирование, мезопоры, микропоры

Белов Владимир Владимирович, доктор технических наук, профессор, советник Российской академии архитектуры и строительных наук, заведующий кафедрой производства строительных изделий и конструкций, Тверской государственный технический университет, Тверь, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-0761-6460; vladim-bel@yandex.ru

Куляев Павел Викторович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры конструкций и сооружений, Тверской государственный технический университет, Тверь, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-8762-215X; p.kuliaev@yandex.ru

Баркая Темура Рауфович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой конструкций и сооружений, Тверской государственный технический университет, Тверь, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-0012-1430; btrs@list.ru

© Белов В.В., Куляев П.В., Баркая Т.Р., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Mechanical properties of fine-grained carbonate concretes with a complex additive, including fine limestone filler and superplasticizer

Vladimir V. Belov , Pavel V. Kuliaev , Temur R. Barkaya 

Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

✉ vladim-bel@yandex.ru

Article history

Received: February 17, 2023

Revised: April 12, 2023

Accepted: April 21, 2023

For citation

Belov V.V., Kuliaev P.V., Barkaya T.R. Mechanical properties of fine-grained carbonate concretes with a complex additive, including fine limestone filler and superplasticizer. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(2):251–257. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-251-257>

Abstract. The stress-strain properties of fine-grained carbonate concretes, despite the fact that they have proven themselves well in various types of construction, have not been studied to the same extent as the deformation and strength properties of traditional heavy concrete. The object of the study is to find ways to improve the physical and mechanical properties of fine-grained carbonate concretes by using a mineral complex additive consisting of a finely dispersed limestone filler and a superplasticizer in the composition of concrete. The relationship between the ultimate values of strength characteristics (cubic strength) and crack-initiating stresses and deformations for conventional and carbonate fine-grained concrete compositions were analyzed. Through the damping mechanism of the cracking process in concrete, due to the joint work of a superplasticizer and a carbonate microdisperse filler a composition of carbonate fine-grained concrete was obtained, capable of resisting static and dynamic loads, with a dense structure and increased reliability and durability.

Keywords: cracking stresses, deformations, carbonate micro-filler, superplasticizer, complex additive, microcracking, damping, mesopores, micropores

1. Введение

Актуальность разработки карбонатных мелкозернистых бетонов (МЗКБ) с повышенной трещиностойкостью и прочностью диктуется растущей потребностью в строительных материалах, которые обладают достаточной степенью долговечности и надежности. Анализ показал [1–8], что разработке подобных материалов уделяется недостаточно внимания. Несмотря на наличие публикаций по исследованию физико-механических характеристик карбонатных бетонов, используемых в строительных конструкциях [1–11], малоизученными остаются такие свойства мелкозернистого карбонатного бетона, как трещиностойкость и деформативность, в условиях интенсивных знакопеременных и динамических нагрузок, особенно при использовании его в конструкциях, подверженных повышенному трещинообразованию и износу. Кроме того, несмотря на востребованность в строительстве, в целом недостаточно изучены деформативные характеристики (трещинообразующие деформации и напряжения) композитов с минеральными заполнителями и добавками, включая наноразмерные [12–17]. В настоящем исследовании оцениваются изменения значений трещинообразующих деформаций и напряжений при введении в состав бетона комплексной добавки на основе тонкодисперсного известнякового наполнителя и суперпластификатора для составов обычного и карбонатного мелкозернистого бетона. Трещинообразующие напряжения и деформации МЗКБ оценивались для различных пропорций компонентов бетона. **Цель исследования** состоит в повышении индексов надежности и долговечности конструкций, подвергающихся интенсивному воздей-

Vladimir V. Belov, Doctor of Technical Sciences, Professor, adviser of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences, Head of the Department of Building Materials and Structures, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0761-6460; vladim-bel@yandex.ru

Pavel V. Kuliaev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Constructions and Structures, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8762-215X; p.kuliaev@yandex.ru

Temur R. Barkaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Constructions and Structures, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0012-1430; btrs@list.ru

ствию и трещинообразованию, через модификацию деформативных свойств. Главной задачей при этом стало существенное (в сравнении с обычным составом бетона) повышение уровней трещинообразующих деформаций и напряжений при оптимально подобранных пропорциях компонентов бетона.

2. Методы исследования

Разработан трещиностойкий состав карбонатного бетона с комплексной добавкой из СП-1 и ультрадисперсного известнякового порошка на базе эталонного состава МЗКБ. Проведено сравнение механических характеристик разработанных композиций с добавлением данной добавки в различных комбинациях. Показано, что модифицированный комплексной добавкой бетон обладает более высокими деформативно-резистентными свойствами, поскольку обеспечивает более высокий уровень напряжений и деформаций, соответствующих началу микротрещинообразования. При этом проверяется гипотеза пластического демпфирования процесса микротрещинообразования, способствующего снижению трещинообразующих деформаций мелкозернистого карбонатного бетона.

Методика исследований, проведенных в Тверском техническом университете, состояла в том, что деформации в конкретных условиях испытаний, уровнях напряжений были определены экспериментально при различных соотношениях компонентов. При этом приготовлены образцы для испытаний с комбинациями соотношений вода/цемент 0,35; 0,45 и соотношений известняк/цемент в составе вяжущего 0; 0,3; 0,5. Всего приготовлено шесть смесей, в качестве частичной замены цемента введен ультрадисперсный карбонатный порошок. В воду добавляли суперпластификатор СП-1, равный 1,4 % от массовой доли вяжущего. Испытания на прочность при сжатии стандартных кубов проводились в соответствии с нормами стандартов. Значения трещинообразующих деформации и соответствующих им значений напряжений определялись опытно на образцах с размерами 10×10×10. Молотый в шаровой мельнице карбонатный бой после просева применялся как ультрадисперсный известняковый наполнитель – часть твердой фазы вяжущего. Все образцы бетона (по два для каждого из шести составов) хранились согласно условиям стандартов. В табл. 1 и 2 представлены эталонные составы обычной и известняковой мелкозернистой смесей. В табл. 3 приведены варьируемые пропорции компонентов карбонатных смесей.

Испытательным устройством был гидравлический пресс.

Таблица 1

Эталонный состав обычного мелкозернистого бетона

Компоненты	Состав, кг/м ³
Цемент	678
Заполнитель	1483
Вода	286
Добавка СП-1	1,8

Table 1

Reference composition of ordinary fine-grained concrete

Components	Composition, kg/m ³
Cement	678
Aggregate	1483
Water	286
Additive SP-1	1.8

Таблица 2

Эталонный состав МЗКБ (без известнякового компонента в составе вяжущего)

Компоненты	Количество на 1 м ³ состава, кг
Цемент	696
Заполнитель	1490
Вода	298
Добавка СП-1	2,6

Table 2

**Reference composition of fine-grained carbonate concretes
(without limestone component in the binder composition)**

Components	Quantity for 1 m ³ of composition, kg
Cement	696
Aggregate	1490
Water	298
Additive SP-1	2.6

Таблица 3

**Пропорции компонентов для шести составов по отношению к базовому составу МЗКБ
(с изменением пропорций известняк – цемент в вяжущем)**

Номер состава	Водоцементное отношение	Отношение известняка к цементу
1	0,46	0
2	0,44	50
3	0,34	0
4	0,36	0
5	0,38	17,8
6	0,42	50

Table 3

**The proportions of the components for the six compositions in relation to the base fine-grained carbonate concretes composition
(with a change in the proportions of limestone – cement in the binder)**

Composition number	Water – cement ratio	Limestone to cement ratio
1	0.46	0
2	0.44	50
3	0.34	0
4	0.36	0
5	0.38	17.8
6	0.42	50

3. Результаты

Результаты испытаний для базового состава обычного бетона и шести композиций карбонатного мелкозернистого бетона приведены в табл. 4. Они вполне согласуются с представленными целями и задачами, тем самым свидетельствуя о некотором увеличении порога трещинообразования карбонатного мелкозернистого бетона по сравнению с базовым составом обычного бетона.

Таблица 4

Сравнение значений трещинообразующих напряжений и прочности на сжатие обычного бетона и МЗКБ

Вид бетона и номер состава	Трещинообразующее напряжение $\sigma_{кр}$, МПа	Прочность на сжатие R, МПа
Обычный бетон	31,2	48,1
Составы МЗКБ	1	34,4
	2	23,3
	3	24,2
	4	34,1
	5	40,1
	6	30,3

Comparison of the values of cracking stresses and compressive strength of ordinary concrete and fine-grained carbonate concretes

Type of concrete and composition number	Crack-forming stress σ_{cr} , MPa	Compressive strength R, MPa
Ordinary concrete	31.2	48.1
Fine-grained carbonate concretes compositions	1	44.1
	2	27.8
	3	35.6
	4	41.2
	5	46.8
	6	37.3

Рисунок подтверждает гипотезу повышения порога трещинообразования МЗКБ при увеличении значений соответствующих параметров, трещинообразующих деформаций и напряжений. Это согласуется с механизмом пластического демпфирования процесса микротрещинообразования МЗКБ и верифицирует гипотезу образования разноуровневых микропластических центров внутри твердеющей матрицы карбонатного композита. Повышению границы трещинообразования в значительной степени способствуют соотношение компонентов матричной части композита и заполняющей, тонкости помола карбонатного наполнителя и процентное содержание суперпластифицирующей добавки.



Прочность при сжатии (кривая 1) и напряжения при образовании трещин (кривая 2) в зависимости от содержания известнякового наполнителя в карбонатном мелкозернистом бетоне
Compressive strength (curve 1) and cracking stresses (curve 2) depending on the content of limestone filler in carbonate fine-grained concrete

Таким образом, результаты подтверждают механизм демпфирования трещинообразования в карбонатном монолите по повышенным по сравнению с эталонным составом значениям трещинообразующих напряжений и деформаций. Известняковый наполнитель действует сингулярно с суперпластификатором и играет роль микропластических центров – микрошарниров, гасящих упругую энергию трещинообразования на микроуровне. В сравнении с другими работами получены результаты, свидетельствующие о более значительном угасании данной упругой энергии трещинообразования для карбонатного мелкозернистого композита.

4. Заключение

Определено соотношение основных компонентов бетона, включая комплексную добавку, содержащую микродисперсную часть – карбонатный порошок и суперпластификатор, при котором достигнуто заметное повышение деформативных характеристик карбонатного бетона. При этом реализован метод, описанный в начале исследования, – сравнение максимального порога трещинообразования для базового

состава обычного бетона и мелкозернистого карбонатного композита на основе комплексной добавки, включающей микродисперсный карбонатный наполнитель и суперпластификатор.

Несмотря на то, что уровень деформаций и, соответственно, степень деформативности МЗКБ несколько больше, чем для бетона обычного состава, порог трещинообразования МЗКБ оказался существенно выше (значения трещинообразующих деформаций и напряжений), благодаря:

– наличию пластического минерального компонента в матрице – комплексной добавки, включающей микродисперсную часть – карбонатный порошок и суперпластификатор;

– совместному влиянию карбонатного тонкодисперсного микронаполнителя и суперпластификатора на картину распределения микротрещин внутри матрицы МЗКБ (эффект сингулярного воздействия). Комбинированно они сдерживают рост упругих макро-, мезо- и микротрещин, лишая их энергии для дальнейшего роста, степень которого определяет порог трещинообразования для обоих составов и зависит в основном от соотношения компонентов внутри композита и их дисперсности;

– лучшей упаковке частиц внутри карбонатного композита;

– более плотной структуре матрицы бетона. Бетон обычного состава (эталонный) является менее связанным внутренними микроразонами пластичности, уступая тем самым карбонатному мелкозернистому бетону.

Результаты исследования позволяют оценить данный состав как более долговечный и трещиностойкий в сравнении с базовым составом.

Список литературы / References

1. Yu R., Spiesz P., Brouwers H.J.H. Mix design and properties assessment of ultra-high performance fibre reinforced concrete (UHPFRC). *Cement and Concrete Research*. 2014;56:29–39. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2013.11.002>

2. Belov V.V., Subbotin S.L., Kulyaev P.V. Strength and deformation properties of concretes with carbonate microfillers. *Stroitelnye Materialy*. 2015;(3):25–29. (In Russ.) Available from: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_23108568_67985513.pdf (accessed: 11.02.2023)

Белов В.В., Субботин С.Л., Куляев П.В. Прочностные и деформативные свойства бетонов с карбонатными микронаполнителями // Строительные материалы. 2015. № 3. С. 25–29. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_23108568_67985513.pdf (дата обращения: 11.02.2023).

3. Chaid R., Jauberthie R., Boukhaled A. Effet de l'ajoutcalcairesur la durabilite des betons. *Lebanese Science Journal*. 2010;11(1):92–103. Available from: <https://lsj.cnrs.edu.lb/wp-content/uploads/2015/12/chaid.pdf> (accessed: 21.01.2023).

4. Desnerck P., De Schutter G., Taerwe L. Stress-strain behavior of self-compacting concretes containing limestone fillers. *Structural Concrete*. 2012;13(2):95–101. <https://doi.org/10.1002/suco.201100056>

5. Berdov G.I., Ilina L.V., Zyryanova V.N., Nikonenko N.I., Melnikov A.V. Improving the properties of composite building materials by introducing mineral microfillers. *Stroyprofi: Building Technologies and Concrete*. 2012;(2):26–30. (In Russ.) Available from: <http://stroy-profi.info/files/pdf/2/stroyprofi-2-26.pdf> (accessed: 07.04.2023).

Бердов Г.И., Ильина Л.В., Зырянова В.Н., Никоненко Н.И., Мельников А.В. Повышение свойств композиционных строительных материалов введением минеральных микронаполнителей // Стройпрофи: Строительные технологии и бетоны. 2012. № 2. С. 26–30. URL: <http://stroy-profi.info/files/pdf/2/stroyprofi-2-26.pdf> (дата обращения: 07.04.2023).

6. Singh M., Siddik R. Properties of concrete containing a large amount of coal ash as a fine aggregate. *Journal of Cleaner Production*. 2015;91:269–278. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2014.12.026>

7. Kou S.S., Poon S.S. Properties of concrete prepared using fine crushed stone, kiln bottom ash and fine recycled aggregate as fine aggregates. *Construction and Building Materials* 2009;23(8):2877–2886. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2009.02.009>

8. Linda Amel C., Kadri E.H., Sebaibi Y., Sualkhi H. Influence of dune sand and pumice on the mechanical and thermal properties of lightweight concrete. *Construction and Building Materials*. 2018;133:209–218. <http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.12.043>

9. Zaetang Y., Wongs A., Sata V., Chindaprasirt P. Use of coal ash as geopolymer binder and coarse aggregate in pervious concrete. *Construction and Building Materials*. 2015;96:289–295. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.08.076>

10. Belov V., Kuliaev P., Barkaya T. Dynamic characteristics of reinforced concrete beams made of carbonate concrete. *Materials Research Proceedings*. 2022;21:209–213.

11. Belov V., Kuliaev P., Artyemyev A. Pressed concrete based on depleted raw material mixture. *AIP Conference Proceedings*. 2022;2503:060005. <https://doi.org/10.1063/5.0099416>

12. Rakhimov R.Z., Rakhimova N.R. Topological models of the structure and structural elements of composite construction materials. *Cement and Its Applications*. 2011;(11–12):62–68. (In Russ.)

Рахимов Р.З., Рахимова Н.Р. Топологические модели структуры и структурных элементов строительных композиционных материалов // Цемент и его применение. 2011. № 11–12. С. 62–68.

13. Gorynin I.V., Kuznetsov P.A. Structural and functional nanostructured materials. *Nanotekhnologii, Ekologiya, Proizvodstvo*. 2011;(8):116–121. (In Russ.)

Горынин И.В., Кузнецов П.А. Конструкционные и функциональные наноструктурированные материалы // Нанотехнологии, экология, производство. 2011. № 1 (8). С. 116–121.

14. Tretyakov Yu.D. Evolution of nanomaterials, nanoparticles, nanostructures and the problem of health. *Nanotekhnologii, Ekologiya, Proizvodstvo*. 2011;(1):98–106. (In Russ.)

Третьяков Ю.Д. Эволюция наноматериалов, наночастиц, наноструктур и проблема здоровья // Нанотехнологии, экология, производство. 2011. № 1 (8). С. 98–106.

15. Goldman A., Bentur A. Effects of pozzolanic and non-reactive fillers on the transition zone of high strength concrete. *Proceedings of International Symposium on Interfaces in Cementitious Composites, Toulouse, 1992*. London; 1993. p. 53–62.

16. Moser B., Pfeifer C. Microstructure and durability of ultra-high performance concrete. *Proceedings of the Second International Symposium on Ultra High Performance Concrete*. 2008;10:417–424.

17. Sobolev K., Flores Vivian I., Hermosillo R., Torres-Martínez L. Nanomaterials and nanotechnology for high-performance cement composites. *ACI Materials Journal*. 2008;254:93–120.