

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2023 Том 19 № 1

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, RSCI, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения (технические науки), 2.1.2. Основания и фундаменты, подземные сооружения (технические науки), 2.1.9. Строительная механика (технические науки).

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Рынкoвская М.И., канд. техн. наук, РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Аганов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

Варум У., д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

Войццкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

Евкин А., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

Зверев Е.М., д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

Иванов С.П., д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Какоци С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Лисичкин С.Е., д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

Ляхович Л.С., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Стопелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

Санжаровский Р.С., д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Якупов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

| | |
|--|----|
| <i>Yu N.T., Fedorova N.V.</i> Calculation of the formation of normal cracks in a reinforced concrete element based on the deformation theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev (Расчет по образованию нормальных трещин в железобетонном элементе на основе деформационной теории пластичности бетона Г.А. Гениева) | 3 |
| <i>Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И.</i> Модальный анализ большепролетного здания с разными граничными условиями | 17 |
| <i>Луговцев Е.А., Уталиев К.Н., Чутков К.А.</i> Теоретические предпосылки разработки программы оценки возможности пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостам | 35 |
| <i>Соловьев С.А., Иньков А.Э., Соловьева А.А.</i> Оценка индекса надежности стальных ферм по критерию жесткости при интервальной неопределенности данных | 46 |

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

| | |
|--|----|
| <i>Андреев В.И.</i> Расчет радиально неоднородного кольца, нагруженного нормальными и касательными нагрузками | 56 |
| <i>Клочков Ю.В., Пиеничкина В.А., Николаев А.П., Вахнина О.В., Клочков М.Ю.</i> Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения | 64 |
| <i>Серазутдинов М.Н.</i> Статика и динамика криволинейных стержней на основе гипотез Бернулли и соотношений для прямолинейного стержня | 73 |

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК

| | |
|--|----|
| <i>Алёшина О.О.</i> Геометрия и статический расчет тонких оболочек в форме поверхности диагонального переноса велароидального типа | 84 |
|--|----|

ГИДРОТЕХНИЧЕСКИЕ СООРУЖЕНИЯ

| | |
|--|-----|
| <i>Зимнюков В.А., Зборовская М.И.</i> Оценка безопасности массивно-контрфорсных плотин при наличии в них трещин температурного происхождения | 94 |
| <i>Черных О.Н., Бурлаченко А.В.</i> Оценка основных параметров волнового воздействия на пологие откосы берегов крупных водных объектов | 110 |

Редактор Ю.А. Заикина

Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова

Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 21.02.2023. Выход в свет 28.02.2023. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 13,48. Тираж 250 экз. Заказ № 43. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов, 2023

© Уфимцева А.В., фото на обложке
(Метрополь Парасол, Севилья, Испания), 2023

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2023 VOLUME 19 No. 1

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Marina I. Rynkovskaya, PhD of Technical Science, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Vladimir I. Andreev, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Sergey P. Ivanov, DSc, Professor, VSUT (Volga Tech), Yoshkar-Ola, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIIF RAACS, Moscow, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, SWSU, Kursk, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey E. Lisichkin, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

Leonid S. Lyakhovich, member of the RAACS, DSc, Professor, TSUAB, Tomsk, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Rudolf S. Sanjarovskiy, DSc, Professor, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

Alex Yevkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Evgeniy M. Zveryaev, DSc, Professor, KIAM RAS, Moscow, Russia

CONTENTS

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

| | |
|---|----|
| <i>Vu N.T., Fedorova N.V.</i> Calculation of the formation of normal cracks in a reinforced concrete element based on the deformation theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev | 3 |
| <i>Kuzhakhmetova E.R., Sutyryn V.I.</i> Modal analysis of a large-span building with different boundary conditions | 17 |
| <i>Lugovtsev E.A., Utaliev K.N., Chutkov K.A.</i> Theoretical basis for the development of a program for the evaluation of road bridge heavy vehicles capacity | 35 |
| <i>Solovev S.A., Inkov A.E., Soloveva A.A.</i> Evaluation of a reliability index for steel trusses to the deflection criterion with interval uncertainty of data | 46 |

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS

OF ANALYSIS OF STRUCTURES

| | |
|---|----|
| <i>Andreev V.I.</i> Calculation of radially inhomogeneous ring loaded with normal and tangential loads | 56 |
| <i>Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu.</i> Quadrilateral element in mixed FEM for analysis of thin shells of revolution | 64 |
| <i>Serazutdinov M.N.</i> Statics and dynamics of curved rods based on Bernoulli hypotheses and relations for a rectilinear rod | 73 |

GEOMETRICAL MODELING OF SHELL FORMS

| | |
|---|----|
| <i>Aleshina O.O.</i> Geometry and static analysis of thin shells in the form of a diagonal translation surface of the velaroidal type | 84 |
|---|----|

HYDRAULIC CONSTRUCTIONS

| | |
|---|-----|
| <i>Zimnyukov V.A., Zborovskaya M.I.</i> Safety assessment of massive buttress dams in the presence of thermal cracks in them | 94 |
| <i>Chernykh O.N., Burlachenko A.V.</i> Estimation of the main parameters of wave action on the gentle slopes of the banks of large water bodies | 110 |

Copy Editor Iu.A. Zaikina
Graphic Designer Iu.N. Efremova
Layout Designer Iu.A. Zaikina

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia, 2023
© Ufimtseva A.V., photo on the cover of the journal
(Metropol Parasol, Sevilla, Spain), 2023



РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-3-16

EDN: FFMQQR

UDC 624.012

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Calculation of the formation of normal cracks in a reinforced concrete element based on the deformation theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev

Ngoc Tuyen Vu¹, Natalia V. Fedorova²

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

²Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences, Moscow, Russian Federation

✉ ngoctuyennd91@gmail.com

Article history

Received: October 7, 2022

Revised: December 21, 2022

Accepted: December 25, 2022

For citation

Vu N.T., Fedorova N.V. Calculation of the formation of normal cracks in a reinforced concrete element based on the deformation theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):3–16. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-3-16>

Abstract. The authors present a refined method of determining the moment of cracking in reinforced concrete bar constructions using the diagram of deformation of concrete built on the basis of the deformation theory of plasticity by G.A. Geniev in which the stress and strain invariants of concrete are linked by nonlinear dependences. In the resulting defining equations, the hypothesis of flat sections, as well as the premise of reaching the limit values of concrete deformations on the stretched fibers of the cross-section are used. Stresses in concrete are determined through deformation values in accordance with the nonlinear deformation diagram of concrete. On the basis of the assumptions accepted, analytical dependences for determining the moment of cracking in the sections of bending elements with single and double reinforcement have been acquired. The formulas obtained were used in the analysis of various factors influence on crack resistance of bendable reinforced concrete elements. It was found out that the moment of crack formation practically does not change when percentage of reinforcement of longitudinal tensile or compressed reinforcement changes. The most effective method of crack resistance improvement is the increase of concrete strength. The proposed methodology is verified by comparison with experimental results on reinforced concrete prototypes. It is concluded that the use of the diagram of nonlinear deformation of concrete on the basis of the theory of plasticity by G.A. Geniev allows to estimate more strictly the crack resistance of reinforced concrete rod elements.

Keywords: deformation diagrams, plasticity, relative deformations, reinforced concrete structures, cracking moment

Ngoc Tuyen Vu, Candidate of Technical Sciences, senior lecturer, Department of Fundamental Education, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavl'skoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5755-8345, Scopus Author ID: 57215934802, eLIBRARY SPIN-code: 5948-4496; ngoctuyennd91@gmail.com

Natalia V. Fedorova, Doctor of Technical Sciences, Professor, leading researcher, Department No. 40 "Perspective Priority Directions in Construction Equipment", Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences; 21 Lokomotivny Proezd, Moscow, 127238, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5392-9150, Scopus Author ID: 57196437054, ResearcherID: O-8119-2015, eLIBRARY SPIN-code: 3365-8320; fedorovanv@mgsu.ru

© Vu N.T., Fedorova N.V., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Расчет по образованию нормальных трещин в железобетонном элементе на основе деформационной теории пластичности бетона Г.А. Гениева

Н.Т. Ву¹ , Н.В. Федорова² 

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

²Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, Москва, Российская Федерация

✉ ngoctuyenn91@gmail.com

История статьи

Поступила в редакцию: 7 октября 2022 г.

Доработана: 21 декабря 2022 г.

Принята к публикации: 25 декабря 2022 г.

Для цитирования

Vu N.T., Fedorova N.V. Calculation of the formation of normal cracks in a reinforced concrete element based on the deformation theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 1. С. 3–16. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-3-16>

Аннотация. Представлена уточненная методика определения момента трещинообразования в железобетонных стержневых конструкциях с использованием диаграммы деформирования бетона, построенной на основе деформационной теории пластичности Г.А. Гениева, в которой инварианты напряженного и деформированного состояния бетона связаны между собой нелинейными зависимостями. В полученных определяющих уравнениях использованы гипотеза плоских сечений, а также предпосылка о достижении на растянутых волокнах поперечного сечения предельных значений деформаций бетона. Напряжения в бетоне определяются через значения деформаций в соответствии с нелинейной диаграммой деформирования бетона. На основе принятых предпосылок получены аналитические зависимости для определения момента трещинообразования в сечениях изгибаемых элементов с вариантами одиночного и двойного армирования. Полученные формулы применялись при анализе влияния различных факторов на трещиностойкость изгибаемых железобетонных элементов. Установлено, что при изменении процента армирования продольной растянутой или сжатой арматуры момент образования трещин практически не меняется. Наиболее эффективным методом повышения трещиностойкости является увеличение прочности бетона. Предложенная методика верифицирована сравнением с экспериментальными результатами на железобетонных опытных образцах. Сделан вывод о том, что использование диаграммы нелинейного деформирования бетона на основе теории пластичности Г.А. Гениева позволяет более строго оценить трещиностойкость железобетонных стержневых элементов.

Ключевые слова: диаграммы деформирования, пластичность, относительные деформации, железобетонные конструкции, момент трещинообразования

Introduction

It is known that in reinforced concrete structures under the action of loads and impacts, the formation of cracks is allowed due to partial or complete removal of the stretched concrete zone from the work [1–4]. The work of many scientists, such as V.I. Murashev [5], A.A. Gvozdev [6], A.S. Zalesov [7], V.N. Baikov [8], N.I. Karpenko [9], E.N. Kodysh [10], N.N. Trekin [11], V.A. Eryshev [12; 13], V.I. Kolchunov [14], A.G. Tamrazyan et al. [15] was devoted to the solution of this problem in different periods of time. A number of methods has been developed for determining the moment of crack formation, and successfully implemented in regulatory documents of different generations. Nevertheless, accurate prediction of the crack formation process has not lost its relevance and is important for improving the design of safe reinforced concrete structures, and in some cases it is critical and excludes the possibility of their further operation (for example, waterproof structures, structures operated in ground water, reservoirs, silos, coating shells [16–18], etc.). The accurate determination of the moment of crack formation for structures made of high-strength reinforced concrete and fiber reinforced concrete is of particular importance [19–22]. As shown in [23] the range of deformation to failure is relatively short and does not exceed 25–30% in such structures after the formation of cracks. Such studies

Ву Нгок Туен, кандидат технических наук, старший преподаватель, кафедра фундаментального образования, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0001-5755-8345, Scopus Author ID: 57215934802, eLIBRARY SPIN-код: 5948-4496; ngoctuyenn91@gmail.com

Федорова Наталья Витальевна, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, отдел № 40 «Перспективные приоритетные направления в строительной технике», Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, Российская Федерация, 127238, Москва, Локомотивный пр-д, д. 21; ORCID: 0000-0002-5392-9150, Scopus Author ID: 57196437054, ResearcherID: O-8119-2015, eLIBRARY SPIN-код: 3365-8320; fedorovanv@mgsu.ru

are also relevant for conventional mass-designed structures, since the formation of cracks entails a significant change in the parameters of the limit states of the second group – stiffness, crack opening, which in many cases become decisive when assigning reinforcement and the level of prestressing. In this regard, studies aimed at clarifying the level of load at which cracks form in the structure continue to be relevant

In the previous Russian Construction Standards and Regulations (SNiP) 2.03.01-84*¹ the structural model for determining the force perceived by the cross-sections of the bending elements normal to the longitudinal axis during the formation of cracks was built on the basis of the following provisions. The hypothesis of flat sections (Bernoulli's hypothesis) is adopted when the calculated section is deformed. It was assumed that at the moment of cracking, the relative deformation of the extreme stretched fiber of concrete reaches a maximum value equal to $2R_{bt,ser} / E_b$, and the stress in tensile concrete, regardless of its deformations, was assumed to be constant and equal to the tensile strength of concrete $R_{bt,ser}$. The stresses in the concrete at the compressed zone are determined taking into account the elastic deformations of the concrete, i.e. the stress diagram in the compressed zone has a triangular shape (Figure 1, a). According to the accepted provisions, the moment perceived by the section normal to the longitudinal axis of the element during the formation of a crack is determined by the formula:

$$M_{cr} = R_{bt,ser} W_{pl} \quad (1)$$

The concept of elastic-plastic moment of resistance is introduced in order to take into account plastic deformations of tensile concrete W_{pl} :

$$W_{pl} = \frac{2(I_{b0} + \alpha I_{so} + \alpha I'_{so})}{h-x} + S_{bo} \quad (2)$$

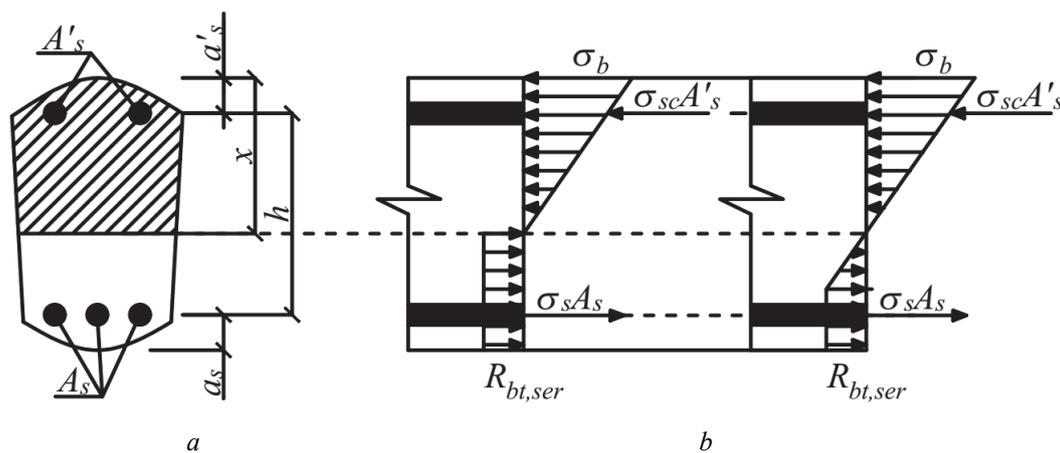


Figure 1. Schemes of the stress diagram in the cross section of the element when calculating it according to the formation of cracks normal to the longitudinal axis of the element: a – according to SNiP 2.03.01.84*; b – according to SP 63.13330.2018²

In the new code of rules currently in force SP 63.13330.2018, in contrast to SNiP 2.03.01.84*, some excellent starting points for constructing a calculation model are adopted: the stress diagram in the tensile zone of concrete takes a trapezoidal shape with stresses not exceeding the design values of concrete resistance stretching $R_{bt,ser}$; the relative deformation of the extreme stretched fiber of concrete is taken equal to its limit value $\epsilon_{bt,ult} = 0,00015$ (Figure 1, b).

From the point of view of the theory of elasticity, the above approaches for determining the moment of cracking in the cross section of reinforced concrete elements violate the generalized Hooke's law for concrete [24]. It has also been proved by experimental data that the actual diagram of concrete stresses in the tensile and compressed zone differs from the accepted one and has a curvilinear shape even with a low level of loading [25–30]. Therefore, such approaches, described in domestic standards in order to simplify the calculation

¹ SNiP 2.03.01.84*. *Concrete and reinforced concrete structures*. Moscow: USSR Gosstroj Publ.; 1989. 84 p. (In Russ.)

² SP 63.13330.2018. *Concrete and reinforced concrete structures. Main provisions*. Moscow: Ministry of Construction and Housing and Communal Services of the Russian Federation; 2018. 124 p. (In Russ.)

apparatus, are conditional. In this regard, it is of interest to quantify the noted assumptions and develop a variant of a more rigorous calculation model, taking into account the plastic deformations of concrete to determine the limiting force perceived by the sections of bending elements normal to the longitudinal axis during the formation of cracks. The solution of the problem under consideration in this paper is based on the deformation theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev.

Method

The stress-strain state of a bent reinforced concrete element before the formation of cracks will be determined based on the following assumptions:

1. Sections remain flat during bending, i.e. deformations along the height of the element change according to a linear law [31].

2. The stresses in the concrete of the compressed and tensile zones are determined taking into account the inelastic deformations described by the deformation theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev [32; 33].

3. The condition for the formation of a crack in the section is the equality of the limiting deformations on the stretched side of concrete to the value of the limiting tensile strength of concrete $\varepsilon_{bt,ult}$.

4. Stresses in tensile reinforcement are taken depending on the relative deformations as for an elastic body.

In accordance with the adopted second hypothesis, the invariants of the stressed and deformed state of concrete are interconnected by nonlinear dependencies:

$$T = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right) \Gamma, \quad (3)$$

where the initial shear modulus G_0 is determined by the formula

$$G_0 = \frac{E_b}{2(1+\nu)}; \quad (4)$$

Γ, Γ_s – intensity of shear deformations and its limiting value respectively.

To determine the moment of formation of normal cracks, consider the case of pure bending of a reinforced concrete rod, for which only normal stresses occur in the cross section. In this case, we have the following boundary conditions: $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3$.

Let us express the intensity of concrete shear deformations and its limiting value in terms of the main deformations:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_1)^2 + (\nu\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_1)^2 + (\nu\varepsilon_1 - \varepsilon_1)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}(1-\nu)\varepsilon_1; \quad (5)$$

$$\Gamma_s = \frac{2}{\sqrt{3}}(1-\nu)\varepsilon_{1,ult}. \quad (6)$$

Let us express in (1) the intensity of shear stresses, the square of which is numerically equal to the second invariant of the stress deviator:

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1. \quad (7)$$

Putting formulas (4)–(7) in (3) we get a nonlinear relationship between the main stress and the main deformation of concrete ε_1 in cross section with pure bending:

$$\sigma_1 = E_b \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_{1,ult}} \right) \varepsilon_1. \quad (8)$$

Formula (8) for compressed and tensile concrete can be written as

$$\sigma_b(\varepsilon_b) = E_b \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{2\varepsilon_{b,ult}} \right) \varepsilon_b; \quad (9)$$

$$\sigma_{bt}(\varepsilon_{bt}) = E_b \left(1 - \frac{\varepsilon_{bt}}{2\varepsilon_{bt,ult}} \right) \varepsilon_{bt}. \quad (10)$$

Here, the ultimate strains of concrete in tension and compression are determined by the formulas

$$\varepsilon_{b,ult} = 2 \frac{R_{b,ser}}{E_b}; \quad (11)$$

$$\varepsilon_{bt,ult} = 2 \frac{R_{bt,ser}}{E_b}. \quad (12)$$

In accordance with the accepted third and fourth prerequisites for calculating the stress and strain diagrams in the cross section of a reinforced concrete element, they have the form shown in Figure 2.

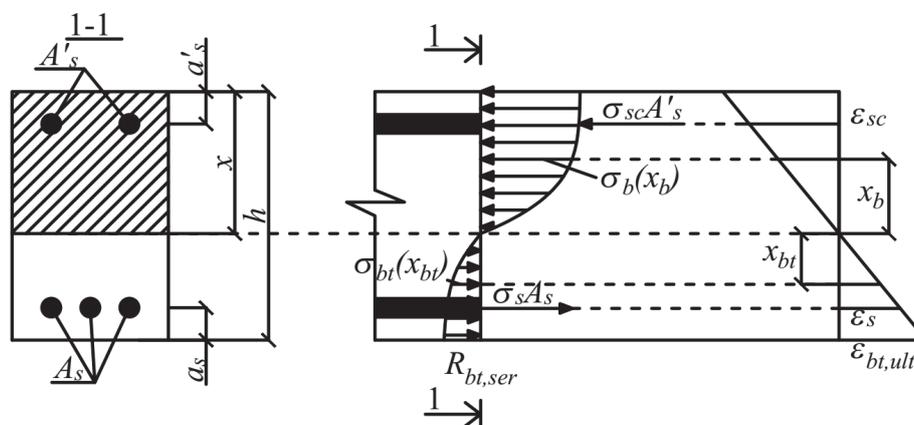


Figure 2. The adopted scheme for the distribution of strains and stresses in the section of the element when determining the moment of cracking

Using the accepted first premise, we determine the deformation of compressed concrete at a distance x_b from the neutral axis:

$$\varepsilon_b = \frac{x_b}{h - x} \varepsilon_{bt,ult}. \quad (13)$$

Similarly, we determine the deformation of tensile concrete at a distance x_{bt} from the neutral axis:

$$\varepsilon_{bt} = \frac{x_{bt}}{h - x} \varepsilon_{bt,ult}. \quad (14)$$

Using formulas (11) and (13) into formula (9), we obtain the dependence of the stress of compressed concrete on x_b :

$$\sigma_b(x_b) = \frac{R_{bt,ser} x_b [2R_{b,ser}(h-x) - R_{bt,ser} x_b]}{R_{b,ser}(h-x)^2}. \quad (15)$$

Similarly, putting (12) and (14) into formula (10), we obtain the stress of tensile concrete, depending on x_{bt} :

$$\sigma_{bt}(x_{bt}) = \frac{R_{bt,ser} x_{bt} [2(h-x) - x_{bt}]}{(h-x)^2}. \quad (16)$$

We also determine the deformations of tensioned and compressed reinforcement from the first premise about flat sections:

$$\varepsilon_s = \frac{h-x-a_s}{h-x} \varepsilon_{bt,ult} = \frac{2R_{bt,ser}}{E_b} \frac{h-x-a_s}{h-x}; \quad (17)$$

$$\varepsilon_{sc} = \frac{x-a'_s}{h-x} \varepsilon_{bt,ult} = \frac{2R_{bt,ser}}{E_b} \frac{x-a'_s}{h-x}. \quad (18)$$

From the condition that the sum of the projections of all longitudinal forces is equal to zero, we obtain the following expression:

$$\sum X = 0, E_s \varepsilon_s A_s + \int_0^{h-x} \sigma_{bt}(x_{bt}) b d(x_{bt}) = \int_0^x \sigma_b(x_b) b d(x_b) + E_s \varepsilon_{sc} A'_s. \quad (19)$$

Using formulas (15)–(18) into formula (19) we get

$$(1+\beta)bx^3 + 3[2\alpha(A_s + A'_s) + bh]x^2 + 6[\alpha(A_s a_s - A'_s a'_s) - \alpha h(2A_s + A'_s) - bh^2]x + 2h\{bh^2 + 3\alpha[A_s(h-a_s) + A'_s a'_s]\} = 0, \quad (20)$$

here,

$$\alpha = \frac{E_s}{E_b}; \quad \beta = \frac{R_{bt,ser}}{R_{b,ser}}. \quad (21)$$

From the solution of the cubic equation (20), the height of the compressed zone of the section is determined. After that, we can determine the moment of internal forces relative to the zero line. It will be equal to the external moment:

$$M_{cr} = E_s \varepsilon_s A_s (h-x-a_s) + \int_0^{h-x} \sigma_{bt}(x_{bt}) b x_{bt} d(x_{bt}) + \int_0^x \sigma_b(x_b) b x_b d(x_b) + E_s \varepsilon_{sc} A'_s (x-a'_s). \quad (22)$$

Being used in formula (22) the found formulas for stresses in concrete and deformations in reinforcement, we obtain:

$$M_{\text{crc}} = \frac{2\alpha J_s R_{\text{bt,ser}}}{h-x} + \frac{5S_{\text{bt}} R_{\text{bt,ser}}}{6} + \frac{\beta J_b [8R_{b,\text{ser}}(h-x) - 3R_{\text{bt,ser}}x]}{4(h-x)^2} + \frac{2\alpha J'_s R_{\text{bt,ser}}}{h-x}, \quad (23)$$

где

$$J_s = A_s (h-x-a_s)^2 \quad (24)$$

moment of inertia of tensile reinforcement to the neutral axis;

$$S_{\text{bt}} = \frac{b(h-x)^2}{2} \quad (25)$$

static moment of tensioned concrete to the neutral axis;

$$J_b = \frac{bx^3}{3} \quad (26)$$

moment of inertia of compressed concrete to the neutral axis;

$$J'_s = A'_s (x-a'_s)^2 \quad (27)$$

moment of inertia of compressed reinforcement to the neutral axis.

Let us consider a special case of a single reinforcement. In this case, when $A'_s = a'_s = 0$, the equation for determining the height of the compressed zone takes the form

$$(1+\beta)bx^3 + 3(2\alpha A_s + bh)x^2 + 6[\alpha A_s(a_s - 2h) - bh^2]x + 2h[bh^2 + 3\alpha A_s(h - a_s)] = 0. \quad (28)$$

The moment of cracking is determined by the expression:

$$M_{\text{crc}} = \frac{2\alpha J_s R_{\text{bt,ser}}}{h-x} + \frac{5S_{\text{bt}} R_{\text{bt,ser}}}{6} + \frac{\beta J_b [8R_{b,\text{ser}}(h-x) - 3R_{\text{bt,ser}}x]}{4(h-x)^2}. \quad (29)$$

Results and discussion

According to the obtained calculated dependences, the calculation of the moment of crack formation in a reinforced concrete bending element of a rectangular section with section dimensions: height $h = 200$ mm, width $b = 100$ mm was performed. A short load action was considered. A500 class reinforcement with modulus of elasticity is adopted $E_s = 2 \cdot 10^5$ MPa. At the same time, the percentage of reinforcement of the longitudinal tensile reinforcement varied $\mu_s = A_s / bh$ from 0,2 to 4%, percentage of reinforcement of longitudinal compression reinforcement $\mu'_s = A'_s / bh$ от 0,2 до 4%, and the class of concrete varied from B10 to B100.

By analyzing the results of the calculation, it was established (Figure 3) that with an increase in the percentage of reinforcement μ_s by 20 times, the value of the height of the compressed zone of concrete x slightly increases by 1.18 times when calculated according to the calculated dependencies SP 63.13330.2018 and by 1.13 times when calculated using formula (20). In this case, the relationship between them is linear (Figure 3, a).

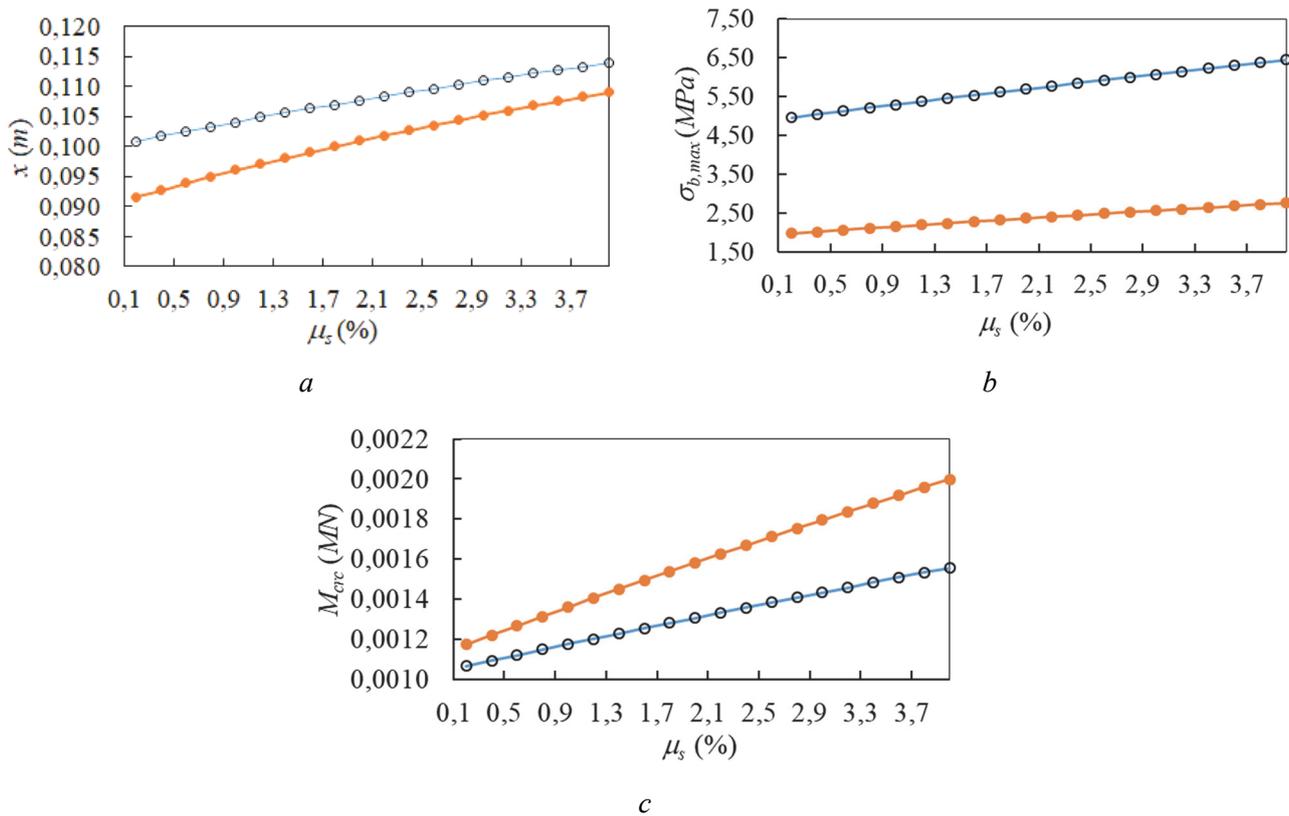


Figure 3. Influence of the percentage of reinforcement of longitudinal tension reinforcement: *a* – on the height of the compressed zone of concrete; *b* – maximum stress in compressed concrete $\sigma_{b,max}$; *c* – moment of cracking; —○— according to the proposed method; —○— according to SP 63.13330.2018

A similar linear relationship is observed between the percentage of reinforcement with longitudinal tensile reinforcement and the stress in the upper compressed fiber of concrete (Figure 3, *b*). Quantitative maximum compressive stress $\sigma_{b,max}$ slightly depends on μ_s .

Insignificant changes are observed in the quantitative values of the moment of cracking in the considered reinforced concrete element M_{crc} at different values of reinforcement percentage μ_s . With an increase in the percentage of reinforcement μ_s by 20 times moment of cracking, perceived by the section, calculated according to SP 63.13330.2018, increases by 1.45 times, and calculated by the method under consideration – by 1.66 times. An analysis of the influence of the percentage of reinforcement with longitudinal compressed reinforcement was also carried out μ'_s on the stressed state of the reinforced concrete section at the time of crack formation (Figure 4). It has been established that the height of the compressed zone of concrete x decreases with an increase in the percentage of reinforcement μ'_s (see Figure 4, *a*), but this decrease is insignificant and when calculating according to SP 63.13330.2018 and when calculated by formula (18) equals to 1.17 times. The maximum stress in the concrete of the compressed zone is practically independent of the percentage of reinforcement μ'_s (see Figure 4, *b*). In this case, the moment of cracking, determined according to SP 63.13330.2018, increases by 3.6 times. The value of this moment, calculated by the above method, does not change (Figure 4, *c*). The independence of the value of the moment of cracking from the percentage of reinforcement by longitudinal compressive reinforcement can be explained as follows. As the percentage of reinforcement increases μ'_s from the equilibrium equation in the direction of the normal to the cross section (see Figure 2), the height of the compression zone will decrease. In this case, an additional compressive force occurs in the concrete compression zone, caused by the compressed reinforcement. Therefore, the value of the moment of cracking, calculated by integrating the compressive stress in concrete and reinforcement over the area of the compressed zone, will practically not change.

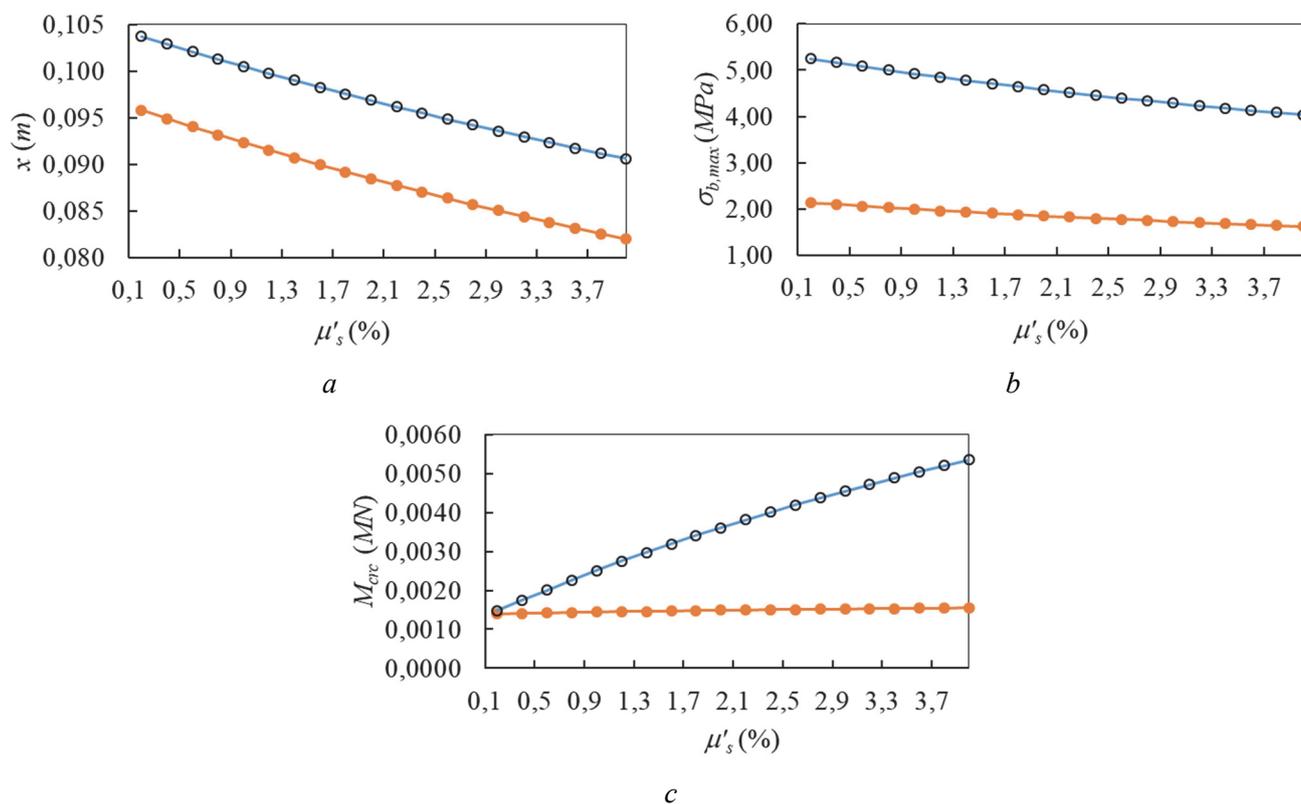


Figure 4. Influence of the percentage of reinforcement of longitudinal compression reinforcement: *a* – on the height of the compressed zone of concrete x ; *b* – maximum stress in compressed concrete $\sigma_{b,max}$; *c* – moment of cracking M_{cr} ; — according to the proposed method; — according to SP 63.13330.2018

Analysis of the change in the height of the compressed zone of concrete, the maximum compressive stress in concrete, as well as the moment of cracking, depending on the class of concrete used, showed the following (Figure 5). The height of the compressed zone of the section of the element, calculated according to SP 63.13330.2018 and according to the proposed method, does not depend on the value of the concrete class (Figure 5, *a*)

The value of the maximum compressive stress in concrete $\sigma_{b,max}$ when changing the class of concrete, it increases significantly according to the proposed method, and when calculating according to SP 63.13330.2018 this value is practically unchanged (Figure 5, *b*).

The values of the moments of cracking in the calculation for SP 63.13330.2018 and according to the proposed method, depending on the class of concrete, they change significantly (Figure 5, *c*). It can be seen from the graphs that with a 10-fold increase in the class of concrete, the moment of cracking increases when calculating according to SP 63.13330.2018 by 3,93 times and when calculating according to the proposed method – 3.95 times.

Investigating the dependence of the cracking moment on the above factors, we can conclude that reinforcement does not play a significant role in improving the crack resistance of reinforced concrete structures. The most effective way to increase the crack resistance of reinforced concrete elements is to increase the class of concrete used. The difference between the moments of cracking, calculated according to SP 63.13330.2018 and according to the proposed method, depending on various factors, varies from 9.3 to 16.7%.

To assess the degree of reliability of the obtained dependences, a numerical comparison was made of the results of calculating the fracture toughness moment calculated by the proposed method with the experimental data of V.I. Kolchunov, Al-Hashimi Omar [34], obtained using modern tools, which allowed a more detailed and accurate study of the process of crack formation in reinforced concrete structures. The results of a comparison of experimental data on the moment of crack formation, calculation data obtained by formula (23), and according to the method of SP 63.13330.2018 for beams with a section of 100×250 mm, with a total length of 1200 mm, supported on two supports and loaded with concentrated loads, from ordinary and lightweight concrete are presented in Table.

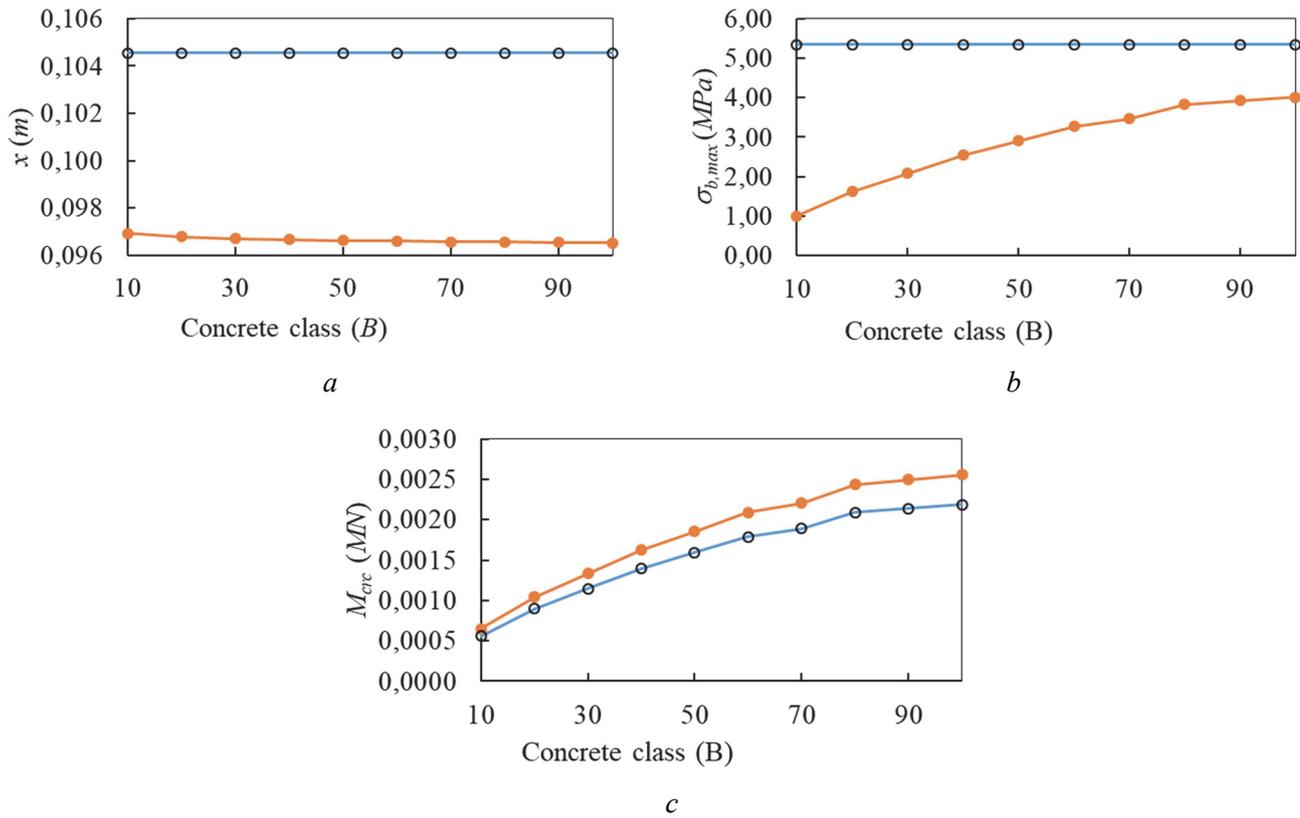


Figure 5. Influence of concrete class:

a – on the height of the compressed zone of concrete; *b* – maximum stress in compressed concrete; *c* – moment of cracking;
 —●— according to the proposed method; —○— according to SP 63.13330.2018

As follows from the table, the calculated value of the moment of crack formation according to SP 63.13330.2018 turned out to be significantly underestimated compared to the experimental values by an average of 30% for beam structures made of lightweight autoclaved cellular concrete and by 22.5% for beams made of heavy concrete. When calculating according to the proposed method, the agreement between the calculated and experimental average values of the moment of crack formation is closer.

Calculation results of the cracking moment in bending elements

| Construction code | Concrete | Reinforcement | Load of first crack formation, kg | M_{erc}^{exp} | M_{erc}^{SP} | | M_{erc}^t | |
|-------------------|---|------------------------------|-----------------------------------|-----------------|----------------|-------------------|-------------|----------------|
| | | | | kH·m | kH·m | Δ_{SP} , % | kH·m | Δ_t , % |
| B2-1-2 | Heavy concrete B25: $R_b = 23$ MPa, $E_b = 25\ 330$ MPa | 4Ø10 A240 $R_s = 380$ MPa | 2400 | 4.8 | 3.6 | 25.1 | 3.9 | 16.8 |
| B5-1-2 | Heavy concrete B25: $R_b = 23$ MPa, $E_b = 25\ 330$ MPa | 4Ø10 A240 $R_s = 380$ MPa | 2300 | 4.6 | 3.6 | 20.3 | 3.9 | 15.6 |
| Ba-4 | Autoclaved cellular concrete $R_b = 3.5$ MPa | 2Ø8 A240 $R_s = 300$ MPa | 1150 | 2.3 | 1.6 | 30 | 1.8 | 20.1 |

Note: M_{erc}^{exp} , M_{erc}^{SP} , M_{erc}^t – the moment of fracturing, respectively experimental, by SP 63.13330.2018 and the proposed method; Δ_{SP} – the discrepancy between the experimental data and the results of calculations by SP 63.13330.2018; Δ_t – the same and the calculation results in accordance with the received formula (23).

From this we can conclude that the use in the calculation of the diagram and analytical dependences of the nonlinear deformation of concrete, obtained on the basis of the theory of plasticity by G.A. Geniev, allows a more rigorous assessment of the crack resistance of bent reinforced concrete elements.

Conclusion

1. An alternative variation of the calculation model was proposed and analytical dependencies were obtained to determine the moment of crack formation in a reinforced concrete bending element reinforced with double reinforcement based on the deformation theory of plasticity of concrete by G.A. Geniev.

2. The numerical analysis of the influence of the percentage of reinforcement of longitudinal tensioned and compressed reinforcement and the class of concrete on the moment of cracking in reinforced concrete bending elements showed the different influence of these factors when using the SP 63.13330.2018 method for calculation and the dependences of the proposed version of the calculation model. The quantitative values of the moment of cracking when calculated according to the proposed formulas with Integrals are higher from 9.3 to 16.7% compared to the calculation according to SP 63.13330.2018. At the same time, the calculated values obtained by the proposed method are closer to the values of the cracking moment obtained experimentally for beams made of heavy and light concretes.

References

1. Al-Fakih A., Hisbany Mohd Hashim M., Alyousef R., Mutafi A., Hussein Abo Sabah S., Tafsirojjaman T. Cracking behavior of sea sand RC beam bonded externally with CFRP plate. *Structures*. 2021;33:1578–1589. <http://doi.org/10.1016/J.ISTRUC.2021.05.042>
2. Nasser H., Vandewalle L., Verstrynghe E. Effect of pre-existing longitudinal and transverse corrosion cracks on the flexural behaviour of corroded RC beams. *Construction and Building Materials*. 2022;319:126141. <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2021.126141>
3. Jebasingh Daniel J. Experimental and numerical study on the cracking behavior and flexural strength of RC shallow beams with rectangular opening and varying length. *Structures*. 2022;40:460–468. <http://doi.org/10.1016/J.ISTRUC.2022.04.040>
4. Nayak C.B., Narule G.N., Surwase H.R. Structural and cracking behaviour of RC T-beams strengthened with BFRP sheets by experimental and analytical investigation. *Journal of King Saud University – Engineering Sciences*. 2022;34(6):398–405. <http://doi.org/10.1016/J.JKSUES.2021.01.001>
5. Murashev V.I. *Crack resistance, stiffness and strength of reinforced concrete*. Moscow: Mashstroyizdat Publ.; 1950. (In Russ.)
6. Gvozdev A.A., Borishansky M.S. To the question of the calculation of bending elements according to the stage of destruction. *Project and Standard*. 1934;(8):7–12. (In Russ.)
7. Zalesov A.S., Mukhamediev T.A., Chistyakov E.A. Calculation of crack resistance of reinforced concrete structures according to new regulatory documents. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and Reinforced Concrete]*. 2002;(5):15–19. (In Russ.)
8. Baikov V.N., Sigalov E.E. *Reinforced concrete structures. General course*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1991. (In Russ.)
9. Karpenko N.I., Radaikin O.V. On the improvement of concrete deformation diagrams for determining the moment of cracking and breaking moment in bending reinforced concrete elements. *Construction and Reconstruction*. 2012;41(3):10–16. (In Russ.)
10. Trekin N.N., Kodysh E.N., Trekin D.N. Improvement of the method for assessing the crack resistance of bent reinforced concrete elements. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and Reinforced Concrete]*. 2020;601(1):61–64. (In Russ.)
11. Trekin N.N., Kodysh E.N., Trekin D.N. Calculation of the formation of normal cracks based on the deformation model. *Industrial and Civil Construction*. 2016;(7):74–78. (In Russ.)
12. Yeryshev V.A., Kazakov M.Yu. To the method of determining the moment of cracking of bent reinforced concrete elements by a nonlinear deformation model. *Bulletin NGIEI*. 2017;79(12):32–42. (In Russ.)
13. Mukhamediev T.A. Taking into account the inelastic properties of concrete when calculating reinforced concrete structures for the formation of cracks. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2018;280(5):24–29. (In Russ.)
14. Kolchunov V.I. Numerical-analytical method in reinforced concrete mechanics. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):525–533. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533>
15. Tamrazyan A.G., Chernik V.I., Matseevich T.A., Manaenkov I.K. Analytical model of deformation of reinforced concrete columns based on fracture mechanics. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):573–583. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-573-583>
16. Li Z., Zhu H., Du C., Gao D., Yuan J., Wen C. Experimental study on cracking behavior of steel fiber-reinforced concrete beams with BFRP bars under repeated loading. *Composite Structures*. 2021;267:113878. <http://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2021.113878>

17. Wei C., Zhang Q., Yang Z., Li M., Cheng Z., Bao Y. Flexural cracking behavior of reinforced UHPC overlay in composite bridge deck with orthotropic steel deck under static and fatigue loads. *Engineering Structures*. 2022;265:114537. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2022.114537>
18. Cui S., Xu X., Chen Z., Zeng G., Ouyang Q., Li G. Effect of different sizing agent-treated basalt fibers on bending and cracking performance of reinforced BFRC beams. *Construction and Building Materials*. 2023;365:130037. <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2022.130037>
19. Zhao M., Li C., Su J., Shang P., Zhao S. Experimental study and theoretical prediction of flexural behaviors of reinforced SFRELC beams. *Construction and Building Materials*. 2019;208:454–463. <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2019.03.037>
20. Luo J., Shao X., Fan W., Cao J., Deng S. Flexural cracking behavior and crack width predictions of composite (steel+UHPC) lightweight deck system. *Engineering Structures*. 2019;194:120–137. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2019.05.018>
21. Głodkowska W., Ziarkiewicz M. Cracking behavior of steel fiber reinforced waste sand concrete beams in flexure – experimental investigation and theoretical analysis. *Engineering Structures*. 2018;176:1–10. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2018.08.097>
22. Ismail M.K., Hassan A.A.A., AbdelAleem B.H., El-Dakhkhni W. Flexural behavior and cracking of lightweight RC beams containing coarse and fine slag aggregates. *Structures*. 2023;47:1005–1019. <http://doi.org/10.1016/J.ISTRUC.2022.11.065>
23. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kapriyelov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S. Results of experimental studies of complex-stressed beams of circular cross-section made of high-strength fibro-reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):290–297. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297>
24. Korsun V.I., Karpenko S.N., Makarenko S.Yu., Nedorezov A.V. Modern strength criteria for concrete under volumetric stress conditions. *Construction and Reconstruction*. 2021;97(5):16–30. (In Russ.)
25. Fedorova N.V., Vu N.T., Medyankin M.D., Phan D.Q. Determination of the Viscosity modulus of concrete under static-dynamic loading regimes. *International Scientific Siberian Transport Forum*. 2022;403(1):1294–1302.
26. Yuan P., Xiao L., Wang X., Xu G. Failure mechanism of corroded RC beams strengthened at shear and bending positions. *Engineering Structures*. 2021;240:112382. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2021.112382>
27. Yu X.Y., Jiang C., Zhang W.P. Failure mode-based calculation method for bending bearing capacities of corroded RC beams strengthened with CFRP sheets. *Engineering Structures*. 2022;271:114946. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2022.114946>
28. Zinoviev V.N. Dilatation effect and state diagram of concrete under uniaxial and triaxial compression. Part 2. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and Reinforced Concrete]*. 2015;(2):27–31. (In Russ.)
29. Zinoviev V.N., Smolyagov O.O., Grigoriev A.A. Methods for studying microcrack formation in concrete under uniaxial compression. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and Reinforced Concrete]*. 2014;(1):27–31. (In Russ.)
30. Zinoviev V.N. Combined state diagram and parametric levels of microcracking in concrete. Part 3. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and reinforced Concrete]*. 2015;(3):28–31. (In Russ.)
31. Kolchunov V.I., Yakovenko I.A. On the use of the hypothesis of flat sections in reinforced concrete. *Construction and Reconstruction*. 2011;38(6):16–23. (In Russ.)
32. Geniev G.A. Variant of the deformation theory of plasticity of concrete. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and Reinforced Concrete]*. 1969;(2):18–19. (In Russ.)
33. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. *Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1974. (In Russ.)
34. Kolchunov V.I., Al-Hashimi O.I., Protchenko M.V. Rigidity of reinforced concrete structures in bending with transverse and longitudinal forces. *Construction and Reconstruction*. 2021;(6):5–19. (In Russ.)

Список литературы

1. Al-Fakih A., Hisbany Mohd Hashim M., Alyousef R., Mutafi A., Hussein Abo Sabah S., Tafsirojjaman T. Cracking behavior of sea sand RC beam bonded externally with CFRP plate // *Structures*. 2021. Vol. 33. Pp. 1578–1589. <http://doi.org/10.1016/J.ISTRUC.2021.05.042>
2. Nasser H., Vandewalle L., Verstrynghe E. Effect of pre-existing longitudinal and transverse corrosion cracks on the flexural behaviour of corroded RC beams // *Construction and Building Materials*. 2022. Vol. 319. Article 126141. <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2021.126141>
3. Jebasingh D.J. Experimental and numerical study on the cracking behavior and flexural strength of RC shallow beams with rectangular opening and varying length // *Structures*. 2022. Vol 40. Pp. 460–468. <http://doi.org/10.1016/J.ISTRUC.2022.04.040>

4. Nayak C.B., Narule G.N., Surwase H.R. Structural and cracking behaviour of RC T-beams strengthened with BFRP sheets by experimental and analytical investigation // Journal of King Saud University – Engineering Sciences. 2022. Vol. 34. No. 6. Pp. 398–405. <http://doi.org/10.1016/J.JKSUES.2021.01.001>
5. Мурашев В.И. Трещиностойчивость, жесткость и прочность железобетона. М.: Машстройиздат, 1950. 268 с.
6. Гвоздев А.А., Боришанский М.С. К вопросу о расчете изгибаемых элементов по стадии разрушения // Проект и стандарт. 1934. № 8. С. 7–12.
7. Залесов А.С., Мухамедиев Т.А., Чистяков Е.А. Расчет трещиностойкости железобетонных конструкций по новым нормативным документам // Бетон и железобетон. 2002. № 5. С. 15–19.
8. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. Общий курс. М.: Стройиздат, 1991. 767 с.
9. Карпенко Н.И., Радайкин О.В. К совершенствованию диаграмм деформирования бетона для определения момента трещинообразования и разрушающего момента в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. 2012. Т. 41. № 3. С. 10–16.
10. Трекин Н.Н., Кодыш Э.Н., Трекин Д.Н. Совершенствование метода оценки трещиностойкости изгибаемых железобетонных элементов // Бетон и железобетон. 2020. Т. 601. № 1. С. 61–64.
11. Трекин Н.Н., Кодыш Э.Н., Трекин Д.Н. Расчет по образованию нормальных трещин на основе деформационной модели // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 7. С. 74–78.
12. Ерышев В.А., Косков М.Ю. К методике определения момента трещинообразования изгибаемых железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели // Вестник НГИЭИ. 2017. Т. 79. № 12. С. 32–42.
13. Мухамедиев Т.А. Учет неупругих свойств бетона при расчете железобетонных конструкций по образованию трещин // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. Т. 280. № 5. С. 24–29.
14. Колчунов В.И. Численно-аналитический метод в механике железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 525–533. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533>
15. Тамразян А.Г., Черник В.И., Мацеевич Т.А., Манаенков И.К. Аналитическая модель деформирования железобетонных колонн на основе механики разрушения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 573–583. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-573-583>
16. Li Z., Zhu H., Du C., Gao D., Yuan J., Wen C. Experimental study on cracking behavior of steel fiber-reinforced concrete beams with BFRP bars under repeated loading // Composite Structures. 2021. Vol. 267. Article 113878. <http://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2021.113878>
17. Wei C., Zhang Q., Yang Z., Li M., Cheng Z., Bao Y. Flexural cracking behavior of reinforced UHPC overlay in composite bridge deck with orthotropic steel deck under static and fatigue loads // Engineering Structures. 2022. Vol. 265. Article 114537. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2022.114537>
18. Cui S., Xu X., Chen Z., Zeng G., Ouyang Q., Li G. Effect of different sizing agent-treated basalt fibers on bending and cracking performance of reinforced BFRC beams // Construction and Building Materials. 2023. Vol. 365. Article 130037. <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2022.130037>
19. Zhao M., Li C., Su J., Shang P., Zhao S. Experimental study and theoretical prediction of flexural behaviors of reinforced SFRELC beams // Construction and Building Materials. 2019. Vol. 208. Pp. 454–463. <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2019.03.037>
20. Luo J., Shao X., Fan W., Cao J., Deng S. Flexural cracking behavior and crack width predictions of composite (steel+UHPC) lightweight deck system // Engineering Structures. 2019. Vol. 194. Pp. 120–137. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2019.05.018>
21. Głodkowska W., Ziarkiewicz M. Cracking behavior of steel fiber reinforced waste sand concrete beams in flexure – experimental investigation and theoretical analysis // Engineering Structures. 2018. Vol. 176. Pp. 1–10. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2018.08.097>
22. Ismail M.K., Hassan A.A.A., AbdelAleem B.H., El-Dakhkhni W. Flexural behavior and cracking of lightweight RC beams containing coarse and fine slag aggregates // Structures. 2023. Vol. 47. Pp. 1005–1019. <http://doi.org/10.1016/J.ISTRUC.2022.11.065>
23. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S. Results of experimental studies of complex-stressed beams of circular cross-section made of high-strength fibro-reinforced concrete // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 290–297. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297>
24. Корсун В.И., Карпенко С.Н., Макаренко С.Ю., Недорезов А.В. Современные критерии прочности для бетонов при объемных напряженных состояниях // Строительство и реконструкция. 2021. Т. 97. № 5. С. 16–30.
25. Fedorova N.V., Vu N.T., Medyankin M.D., Phan D.Q. Determination of the viscosity modulus of concrete under static-dynamic loading regimes // International Scientific Siberian Transport Forum. 2022. Vol. 403. No. 1. Pp. 1294–1302.
26. Yuan P., Xiao L., Wang X., Xu G. Failure mechanism of corroded RC beams strengthened at shear and bending positions // Engineering Structures. 2021. Vol. 240. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2021.112382>

27. Yu X.Y., Jiang C., Zhang W.P. Failure mode-based calculation method for bending bearing capacities of corroded RC beams strengthened with CFRP sheets // *Engineering Structures*. 2022. Vol. 271. Article 114946. <http://doi.org/10.1016/J.ENGSTRUCT.2022.114946>
28. Зиновьев В.Н. Эффект дилатации и диаграмма состояний бетона при одноосном и трехосном сжатии. Ч. 2 // *Бетон и железобетон*. 2015. № 2. С. 27–31.
29. Зиновьев В.Н., Смолягов О.О., Григорьев А.А. Методы исследования микротрещинообразования бетона при одноосном сжатии // *Бетон и железобетон*. 2014. № 1. С. 27–31.
30. Зиновьев В.Н. Объединенная диаграмма состояний и параметрические уровни микротрещинообразования бетона. Ч. 3 // *Бетон и железобетон*. 2015. № 3. С. 28–31.
31. Колчунов В.И., Яковенко И.А. Об использовании гипотезы плоских сечений в железобетоне // *Строительство и реконструкция*. 2011. Т. 38. № 6. С. 16–23.
32. Гениев Г.А. Вариант деформационной теории пластичности бетона // *Бетон и железобетон*. 1969. № 2. С. 18–19.
33. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 316 с.
34. Колчунов В.И., Аль-Хашими О.И., Протченко М.В. Жесткость железобетонных конструкций при изгибе с поперечной и продольной силами // *Строительство и реконструкция*. 2021. № 6. С. 5–19.

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-17-34
EDN: FMMJZM
УДК 69.01

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Модальный анализ большепролетного здания с разными граничными условиями

Э.Р. Кужахметова¹  , В.И. Сутырин² 

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

²Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Российская Федерация

 elja_09@bk.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 19 сентября 2022 г.

Доработана: 28 ноября 2022 г.

Принята к публикации: 4 декабря 2022 г.

Для цитирования

Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И. Модальный анализ большепролетного здания с разными граничными условиями // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 17–34. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-17-34>

Аннотация. Представлены результаты модального анализа конечно-элементных моделей большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием как большой механической системы. Рассмотрены следующие пространственные модели: 1) здание с жесткой заделкой опорных колонн на поверхности грунта; 2) здание – свайный фундамент – грунтовое основание. Цель исследования – выполнить сравнительную оценку результатов модального анализа конструкции большепролетного здания с разными граничными условиями и физико-механическими свойствами грунтового основания. Модальный анализ большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием проводился с применением программного комплекса САЕ-класса Femap NX Nastran, реализующего метод конечных элементов. Сопоставлены частоты и формы собственных колебаний конструкции пространственных моделей, полученные на моделях типа 1 и 2 конструкции здания с большепролетным цилиндро-плитным покрытием. Модальный анализ модели 2 показал влияние физико-механических свойств грунтового основания на характеристики собственной вибрации конструкции. В перспективе предполагается провести динамический анализ большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием на сейсмическое воздействие.

Ключевые слова: метод конечных элементов, расчетная модель, система, здание, сооружение, пространственное покрытие, цилиндрическое покрытие, цилиндро-плитное покрытие, колебания, частота, свая, набивная свая, буронабивная свая, свая в форме конуса, свая конической формы, свая конусообразной формы

Кужахметова Эльвира Рафаэльевна, инженер, старший преподаватель, кафедра железобетонных и каменных конструкций, Институт промышленного и гражданского строительства, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-0907-786X, Researcher ID: AAC-3301-2022, eLIBRARY SPIN-код: 1949-1140; elja_09@bk

Сутырин Валерий Игоревич, доктор технических наук, профессор, Институт высоких технологий, Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Российская Федерация, 236041, Калининград, ул. Александра Невского, д. 14; ORCID: 0000-0002-4911-8515, eLIBRARY SPIN-код: 7194-7481; vsutyurin@mail.ru

© Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Modal analysis of a large-span building with different boundary conditions

Elvira R. Kuzhakhmetova¹  , Valerii I. Sutyryn² 

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

²Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russian Federation

 elja_09@bk.ru

Article history

Received: September 19, 2022

Revised: November 28, 2022

Accepted: December 4, 2022

For citation

Kuzhakhmetova E.R., Sutyryn V.I. Modal analysis of a large-span building with different boundary conditions. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):17–34. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-17-34>

Abstract. The authors present the results of a modal analysis of finite element models of a large-span building with a cylindrical-and-slab roof as a large mechanical system. During the numerical study, the following spatial models are considered: 1) superstructure – fixed-end; 2) superstructure – pile foundation – soil base. The purpose of the study is to compare the results of a modal analysis of the design of a large-span building with different boundary conditions, physical and mechanical properties of the soil base. Modal analysis of a large-span building with a cylindrical-and-slab roof was carried out using the Femap NX Nastran CAE-class software package implementing the finite element method. The authors compare the frequencies and modes of natural oscillations of the construction of spatial models obtained on models of types 1 and 2 of the large-span building with a cylindrical-and-slab roof. As a result of the modal analysis of model 2, the influence of the physical and mechanical properties of the soil base on the characteristics of the structure's own oscillation was revealed. In the prospect, it is proposed to conduct a dynamic analysis of a large-span building with a cylindrical-and-slab roof for seismic effects.

Keywords: finite element method, system, building, structure, cylindrical roof, cylindrical-and-slab roof, oscillation, pile, rammed pile, bored pile, cone-shaped pile, conical pile, cone-shaped pile

Введение

Большепролетные здания с цилиндро-плитными (ЦП) и цилиндрично-плитно-вантовыми покрытиями отличаются неповторимой архитектурой и сложными конструктивными решениями¹ [1–12], что позволяет отнести их к категории уникальных. Расчеты конструкций зданий указанного типа на прочность, устойчивость и вибрацию требуют серьезного подхода к построению расчетной модели. Последняя должна с достаточной точностью и полнотой отражать характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) и особенности динамики поведения реального объекта под действием эксплуатационных нагрузок. Указанным требованиям в наибольшей мере удовлетворяет пространственная комбинированная конечно-элементная модель механической системы «здание – фундамент – жесткая заделка» [13]. Указанные модели связаны с построением и решением системы разрешающих уравнений достаточно большого порядка. Однако примеры их успешного решения многочисленны [14–34], что свидетельствует о значительных достижениях современной информатики и вычислительной механики. Вместе с тем приоритет в практическом использовании должен быть отдан моделям, при построении которых выполняются целесообразные и допустимые упрощения. В рассматриваемом случае речь идет о расчетных схемах зданий, в которых опорные подземные конструкции характеризуются абсолютной жесткостью. Ввод жесткой заделки опорных конструкций в плоскости грунта существенно сокращает порядок разрешаю-

Elvira R. Kuzhakhmetova, engineer, senior lecturer, Reinforced Concrete Structures and Masonry Structures Department, Institute of Industrial and Civil Engineering, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129377, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0907-786X, Researcher ID: AAC-3301-2022, eLIBRARY SPIN-code: 1949-1140; elja_09@bk

Valerii I. Sutyryn, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Institute of Engineering and Technology, Immanuel Kant Baltic Federal University, 14 Aleksandra Nevskogo St, Kaliningrad, 236041, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-4911-8515, eLIBRARY SPIN-code: 7194-7481; vsutyryn@mail.ru

¹ Патент РФ № 2740506. Большепролетное здание с купольно-плитно-вантовым покрытием / Кузяхметова Э.Р. 2021. Бюл. № 2 – 7с. Патент РФ №2705689 РФ. Металлическая опора для крепления неразрезного ванта в висячих покрытиях зданий (сооружений) / Кузяхметова Э.Р., Сутырин В.И. 2019. Бюл. № 32. – 7 с.

щей системы уравнений конечно-элементной модели, уменьшает трудоемкость и общее время многовариантного расчетного анализа. Возникает вопрос, допустимо ли указанное упрощение модели при анализе динамики поведения конструкции здания рассматриваемого типа. Ответ на поставленный вопрос может дать сопоставительный анализ полной и упрощенной моделей.

В [35] рассмотрена конструкция большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием, проанализировано влияние граничных условий на его напряженно-деформированное состояние. Для расчета здания сформированы следующие модели: 1) упрощенная модель с абсолютно жестким основанием, которую условно назовем «Здание – жесткая заделка»; 2) модель «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание» является наиболее полной идеализацией рассматриваемого строительного объекта, выполненной с учетом требований действующих нормативных документов².

На практике трудоемкость построения и анализа модели 2 «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание» оказалась значительной. Порядок соответствующих ей матриц коэффициентов жесткости и массы определяется не только большим числом конечных элементов (КЭ) надземной части и свайного фундамента, но в значительной мере большим числом сопряженных КЭ грунтового массива [13; 35].

В ходе предварительного расчета статики конструкции здания с цилиндро-плитным покрытием выявлено существенное влияние физико-механических характеристик грунта, а также геометрических параметров свайного фундамента на НДС надземной части. Логичным продолжением указанного численного исследования является рассмотрение форм и частот собственных колебаний принятых моделей с разными граничными условиями. Результаты расчета на сейсмическое воздействие планируется представить в следующей статье.

Цель настоящего исследования – определить влияние свайного фундамента и физико-механических свойств грунтового основания на формы и частоты собственных колебаний большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- сформированы пространственные комбинированные конечно-элементные модели большепролетного здания с разными граничными условиями;
- выполнен многовариантный модальный анализ конечно-элементных моделей 1 и 2;
- сопоставлены собственные частоты формы колебаний указанных моделей;
- определено влияние свайного фундамента и физико-механических свойств грунтового основания на формы и частоты собственных колебаний надземной части большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием.

Общая характеристика большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием

Надземная часть здания (рис. 1, а). Центральная часть здания представляет собой в плане прямоугольник с размерами $40(B) \times 84(L)$ м, по контуру которого расположены колонны (поз. 1) квадратного сечения с шагом 6 м, их высота в продольном направлении (по длине прямоугольника) принята 12 м, а в поперечном направлении (по ширине) – 12–16 м. Пространственным покрытием центральной части выбрана монолитная железобетонная цилиндрическая оболочка нулевой гауссовой кривизны (поз. 2), высотой $h = 4$ м, толщиной $\delta = 0,15$ м и радиусом кривизны $R = 52$ м. Бортовыми элементами цилиндрической оболочки являются две торцевые железобетонные арки и продольные балки прямоугольного сечения с размерами $b = 0,5$ м $h = 0,8$ м. По бокам с двух сторон к помещению с оболочкой примыкают двухэтажные помещения с плитами плоского покрытия, высота каждого этажа равна 6 м. Толщины железобетонных плит покрытий и перекрытий (поз. 3) приняты $t = 0,2$ м. Плиты опираются на колонны (поз. 1), установленные с шагом и высотой $H = 6$ м. В продольном и поперечном направлениях в центре и по торцам здания расположены диафрагмы жесткости в виде монолитных железобетонных стен (поз. 4). Их толщина равна 0,5 м, длина – 6 и 12 м. В крайних блоках здания расположены лифтовые шахты. Толщина их монолитных железобетонных стен принята 0,5 м. Толщина монолитных железобетонных площадок лестничных клеток составляет $t = 0,2$ м, а толщина лестничных маршей – $t = 0,22$ м [36; 37].

Подземная часть здания (рис. 1, б) представляет собой грунтовой массив (поз. 5), повторяющий форму большепролетного здания в плане. Под каждой колонной (поз. 1) устроены отдельно стоящие монолитные железобетонные свайные фундаменты в форме конуса с боковыми и нижними щелевыми об-

² СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01–83*. М., 2011. 166 с.

разованиями (поз. 6). Оригинальность и новизна фундамента подтверждена патентной экспертизой³. Под железобетонными блоками (поз. 4) здания, состоящими из диафрагм (стен), лифтовых шахт и лестничных клеток расположены кусты из указанных свай. В [38–42] описана технология изготовления свайной конструкции указанного типа; представлены результаты численного исследования: прочностных и деформационных характеристик свайной конструкции с учетом разных физико-механических свойств грунта; дано сравнение напряженно-деформированного состояния указанной сваи с аналогичным состоянием свай других видов и форм, приведены методы их расчета [43]. В ходе исследования приняты следующие геометрические параметры свай: общий верхний диаметр свайной конструкции 1,2 м, нижний ее диаметр 0,6 м. Нижнее щебневое расширение выполнено в форме шара диаметром D размером около 2 м. Длина ствола сваи $L = 10$ м. Высота массива грунта принята $H = 16$ м.

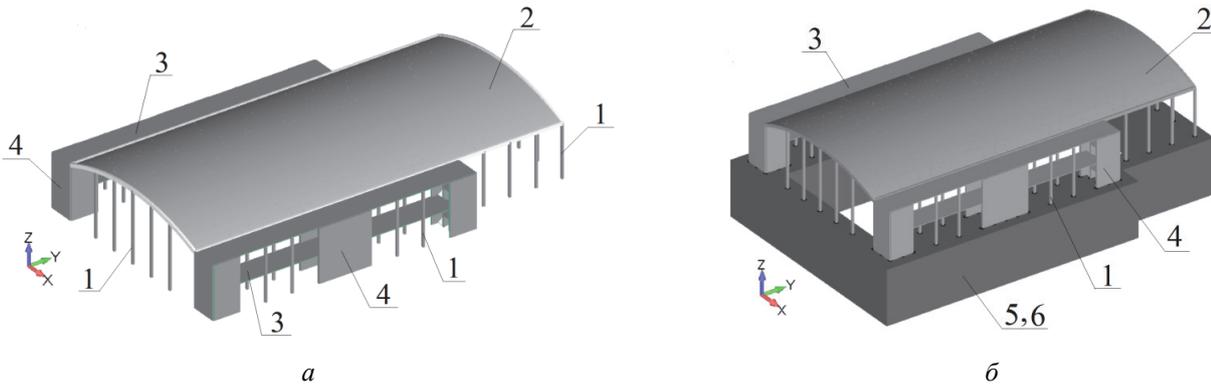


Рис. 1. Конечно-элементные модели большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием:

a – модель 1 «Здание – жесткая заделка; *b* – модель 2 «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание»; надземная часть: 1 – колонны, 2 – цилиндрическая оболочка нулевой гауссовой кривизны, 3 – продольные и поперечные диафрагмы, 4 – плиты плоского покрытия и перекрытия; подземная часть: 5 – грунтовое основание, 6 – свайный фундамент (условно не показаны)

Figure 1. Finite element models of a large-span building with a cylinder-and-slab roof:

a – model 1 “superstructure – fixed-end”; *b* – model 2 “superstructure – pile foundation – soil base”; superstructure: 1 – columns, 2 – cylindrical shell of zero Gaussian curvature, 3 – longitudinal and transverse diaphragms, 4 – flat slabs and floor slabs; substructure: 5 – soil base, 6 – pile foundation (conditionally not shown)

Материалы

В расчетном исследовании использованы исходные данные, аналогичные данным ранее опубликованных работ [35].

Надземная часть. Цилиндро-плитное покрытие и каркас здания выполнены из тяжелого бетона класса В25. Расчетные характеристики бетона приняты в соответствии с СП 63.13330.2011 «Бетонные и железобетонные конструкции»⁴. Плотность тяжелого бетона $\rho = 2500$ кг/м³ (п. 6.1.1). Начальный модуль упругости тяжелого бетона В25 при сжатии и растяжении $E_b = 30 \times 10^3$ МПа принят по таблице 6.11, модуль сдвига бетона $G_b = 0,4E_b = 0,4 \cdot 30 \cdot 10^3 = 12 \cdot 10^3$ МПа (п. 6.1.15). Коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации) бетона допускается принимать $\nu = 0,2$ (п. 6.1.17). Коэффициент линейной температурной деформации тяжелого бетона при изменении температуры от -40° до $+50^\circ$ принимают $\alpha_{bt} = 1 \cdot 10^{-5}$ °C⁻¹ (п. 6.1.18). Нормативное и расчетное сопротивление тяжелого бетона на осевое сжатие класса В25 для предельного состояния второй группы $R_{b,n} = R_{b,ser} = 18,5$ МПа (табл. 6.7). Расчетное сопротивление тяжелого бетона на осевое сжатие класса В25 для предельного состояния первой группы $R_b = 14,5$ МПа (табл. 6.8).

Подземная часть. Материалом для монолитной железобетонной сваи конической формы принят тяжелый бетон класса В15. Все характеристики бетона приняты по СП 63.13330.2011 «Бетонные и железобетонные конструкции». Расчетное сопротивление бетона для предельных состояний первой группы при классе бетона В15 по прочности на сжатие $R_b = 8,5$ МПа (табл. 6.8); расчетное сопротивление бетона для

³ Патент РФ № 157318.2015. Конструкция монолитной железобетонной сваи конической формы / Кузахметова Э.Р., Сапожников А.И. 2015. Бюл. № 33. 7 с.; Патент РФ № 154795.2015. Конструкция соединения верхнего строения эстакады с монолитной свай-оболочкой / Сапожников А.И., Кузахметова Э.Р. 2015. Бюл. № 25. 7 с.

⁴ СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 с изменениями 1. М., 2015.

предельных состояний второй группы при классе бетона В15 по прочности на сжатие $R_{b,ser} = 11$ МПа (табл. 6.7). Модуль упругости бетона принят $E_b = 24 \cdot 10^3$ МПа (табл. 6.11). Значение модуля сдвига бетона принято равным $G_b = 0,4E_b = 0,4 \cdot 24 \cdot 10^3 = 9,6 \cdot 10^3$ МПа (п. 6.1.15), коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$ (п. 6.1.17). Под нижним концом сваи расположен щебневый шар диаметром $D = 2$ м. Щебень принят группы А по ГОСТ 8267⁵ с модулем упругости $E = 350$ МПа (табл. 3.2)⁶ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$.

В расчетном анализе использованы два типа однородных грунтов. Их расчетные характеристики приняты согласно СП 22.13330.2011⁷:

– *вариант 1* – грунт однородного основания: песок четвертичного отложения, средней плотности (коэффициент пористости $e = 0,45$) с модулем деформации $E_1 = 50$ МПа, углом внутреннего трения $\varphi_1 = 40^\circ$, удельным сцеплением $c_1 = 3$ кПа (табл. Б.1) и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,35$ (табл. 5.10);

– *вариант 2* – грунт однородного основания: песок четвертичного отложения, пылеватый (коэффициент пористости $e = 0,45$) с модулем деформации $E_2 = 11$ МПа, углом внутреннего трения $\varphi = 26^\circ$, удельным сцеплением $c = 2$ кПа (табл. Б.1) и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,35$ (табл. 5.10).

Внешние вертикальные (постоянные и временные, включая снеговые) нагрузки на цилиндрико-плитное покрытие большепролетного здания приняты из [37; 38] и определены в соответствии с СП 17.13330.2017 «Кровли»⁸ и СП 20.13330.2016 «Основания зданий и сооружений»⁹.

Методы

Метод конечных элементов (МКЭ) является универсальным средством численного инженерного анализа больших пространственных механических систем. Он позволяет комбинировать в моделях надежные стержневые (Beam и Bar), пластинчатые (оболочечные) (Plate) и объемные (Volume Elements типа Solid) конечные элементы различными аппроксимирующими функциями полей перемещений. В исследовании расчетных моделей большепролетного здания применен расчетный комплекс Femap with NX Nastran, реализующий широкий набор расчетных подходов и методов инженерного анализа. Для расчета собственных частот и форм колебаний используется метод Ланцоша (Lanczos), сочетающий лучшие свойства метода обратной степени, модифицированного метода обратной степени Штурмана и методов приведения, таких как метод Гивенса, метод Хаусхолдера, модифицированный метод Гивенса, модифицированный метод Хаусхолдера [44–48].

Результаты

При выполнении модального анализа применены две пространственные конечно-элементные модели большепролетного здания с разными граничными условиями [35]: модель 1 «Здание – жесткая заделка» с абсолютно жестким основанием; модель 2 «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание» с модулем деформации грунтового основания $E_1 = 50$ МПа (модель 2, а) и с модулем деформации $E_2 = 11$ МПа (модель 2, б). Вышеуказанные конечно-элементные модели имеют следующие характеристики: модель 1 включает 30 348 конечных элементов, состыкованных в 30 469 узлах; модель 2 – 1 421 209 элементов и 1 989 721 узлов (наибольший порядок разрешающей системы уравнений составил 5 600 292).

Последовательное определение форм и частот собственных колебаний конструкции здания уже на начальных этапах разработки модели помогает выявить большинство неформальных ошибок моделирования. Сопоставить характерные низшие формы и частоты собственных колебаний моделей 1 и 2 можно по таблице.

На рис. 2 и 3 представлены графики расчетных зависимостей «суммарные массы – моды собственных колебаний», а также «эффективные массы – моды собственных колебаний» для модели 1 «Здание – жесткая заделка». График на рис. 2 визуализирует охват суммарной массы большепролетного здания с жесткой заделкой с учетом форм собственных колебаний для линейных перемещений и углов поворота относительно осей X , Y , Z . При линейном перемещении Т1 (вдоль оси X) охват суммарной массы Mass SUM модели 1 в диапазоне частоты от 0 до 20 Гц (161 форма) составил 90,16 % массы модели, для пере-

⁵ ГОСТ 8267–93. Щебень и гравий из плотных горных пород для строительных работ. Технические условия. М.: Госстрой России, 1993.

⁶ Методические рекомендации по повышению качества дорожных оснований из щебня различных пород / СовюзДОРНИИ. М., 1980.

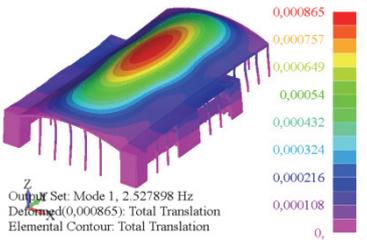
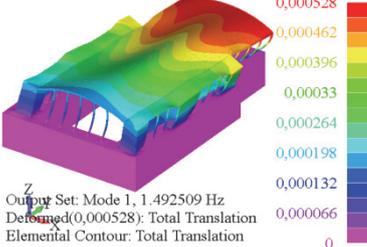
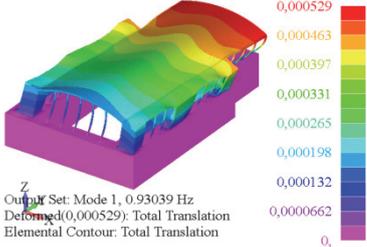
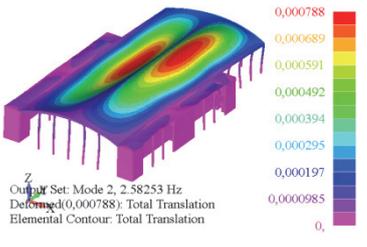
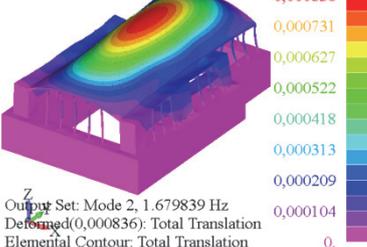
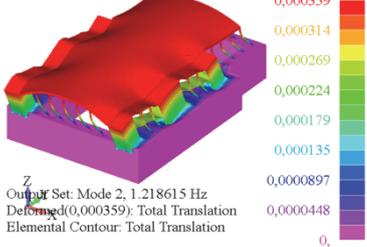
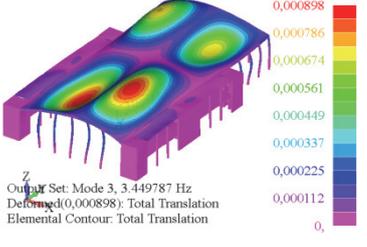
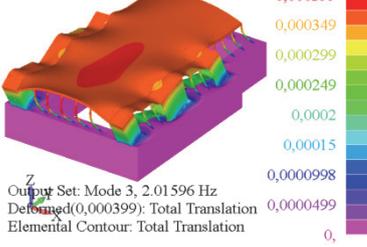
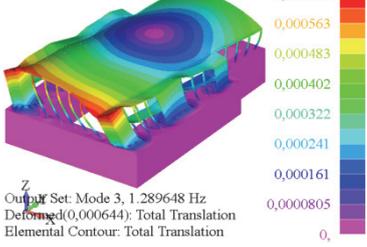
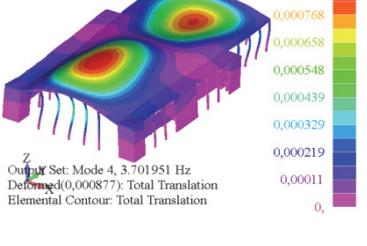
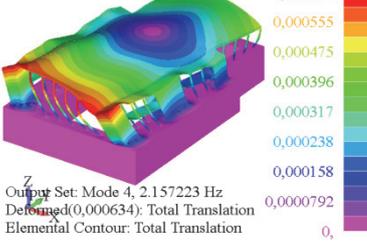
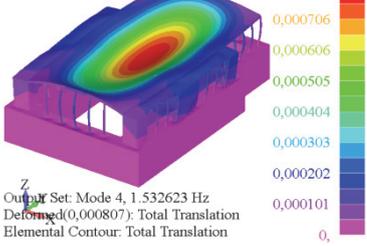
⁷ СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01–83*. М., 2011. 166 с.

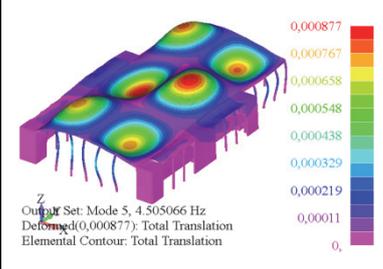
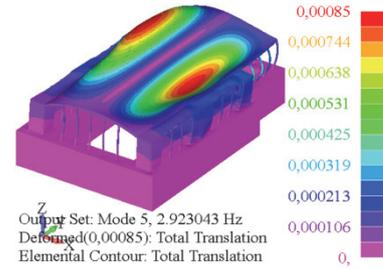
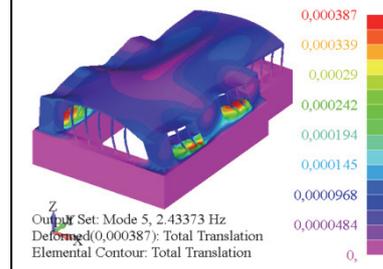
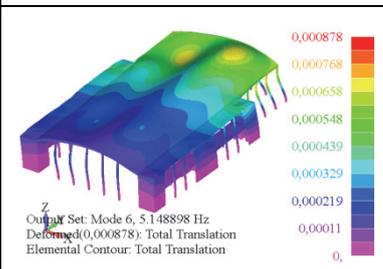
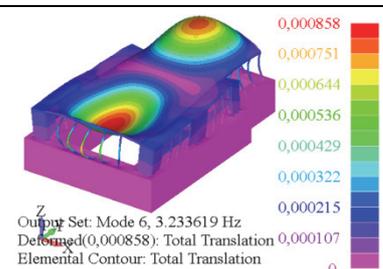
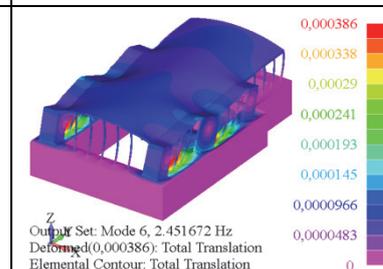
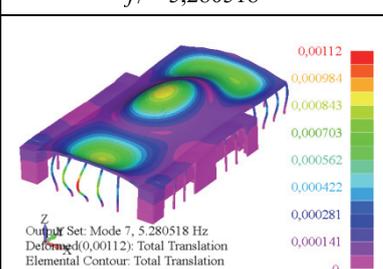
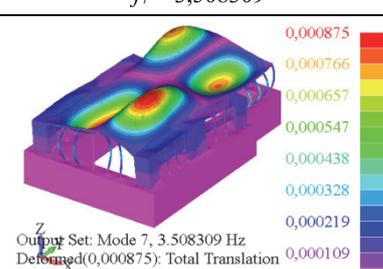
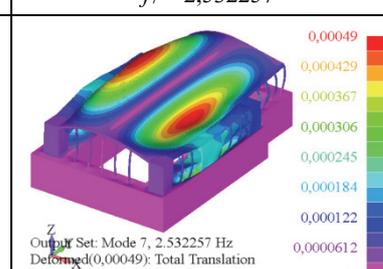
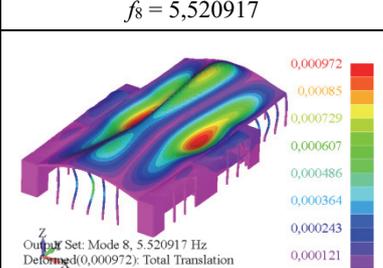
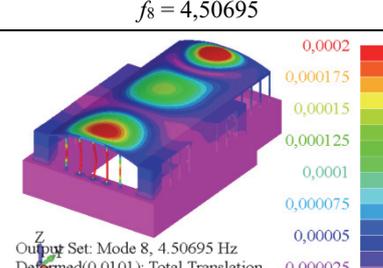
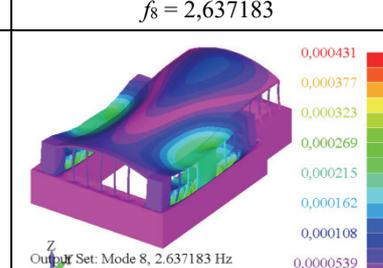
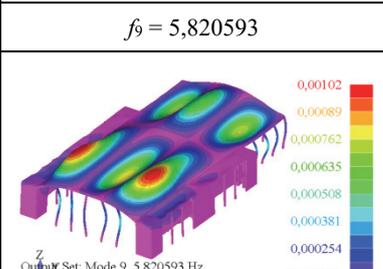
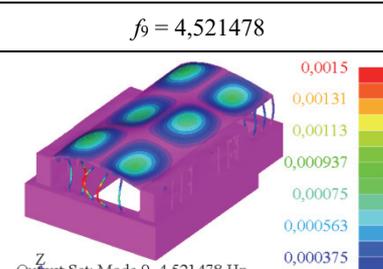
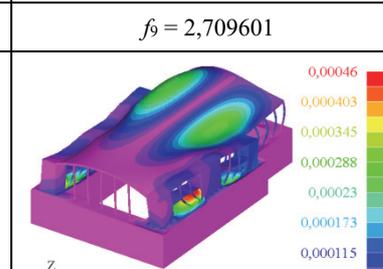
⁸ СП 17.13330.2017. Кровли. Актуализированная редакция СНиП II-26–76. М., 2017

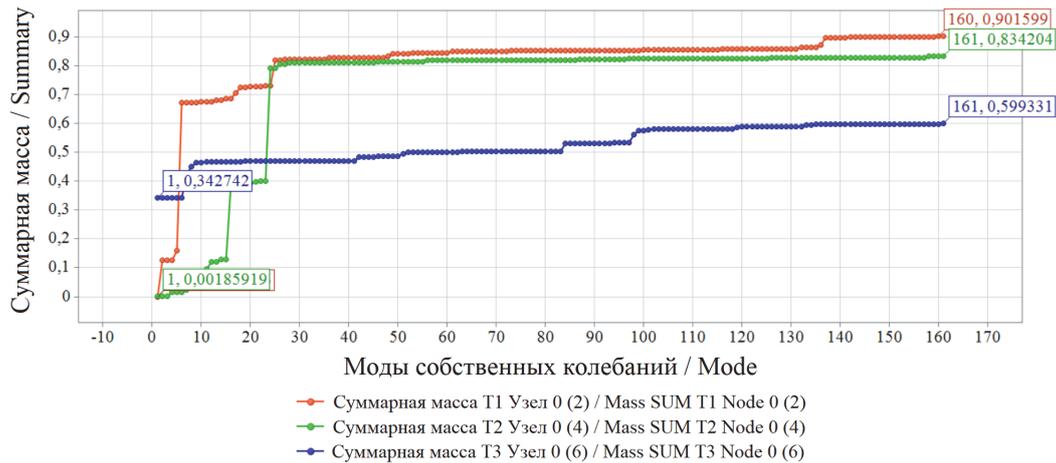
⁹ СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07–85*. М., 2016.

мещений: T2 (вдоль оси Y) – Mass SUM = 83,42%, T3 (вдоль оси Z) – Mass SUM = 59,93% (рис. 2, а). Аналогичный график показан на рис. 2, б, где охват суммарной массы всего здания с учетом поворота R1 вокруг оси X равен 71,16 %, для поворота R2 вокруг оси Y и R3 вокруг оси Z – 56,71 и 83,45 % соответственно.

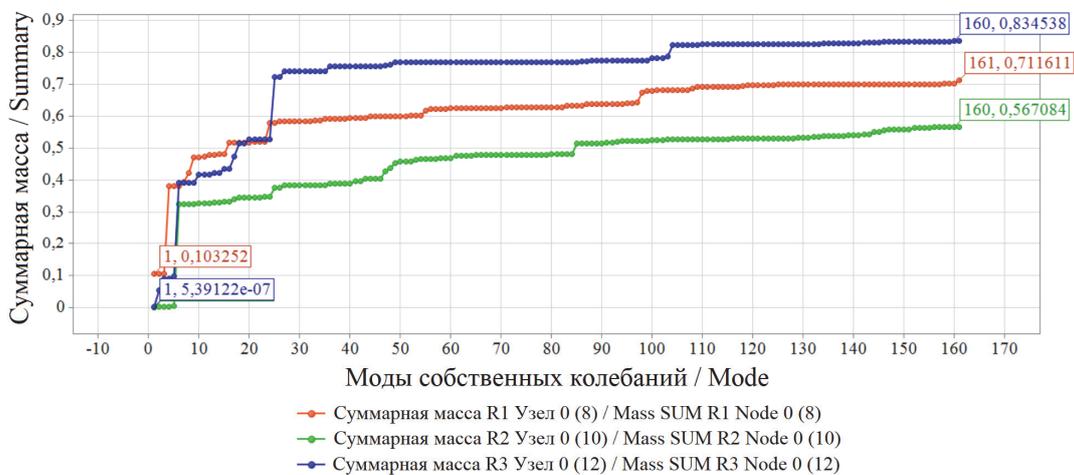
Результаты расчета собственных колебаний
Results normal modes

| Формы / Mode | Частоты f_i , Гц, собственных колебаний моделей / Frequencies f_i , Hz, of natural oscillations of the models | | |
|-----------------|--|--|---|
| | Модель 1 / Model 1 | Модель 2, а ($E_1 = 50$ МПа) Model 2, а ($E_1 = 50$ МПа) | Модель 2, б ($E_2 = 11$ МПа) / Model 2, б ($E_2 = 11$ МПа) |
| 1 | $f_1 = 2,527898$ | $f_1 = 1,492509$ | $f_1 = 0,93039$ |
| |  |  |  |
| 2 | $f_2 = 2,58253$ | $f_2 = 1,679839$ | $f_2 = 1,218615$ |
| |  |  |  |
| 3 | $f_3 = 3,449787$ | $f_3 = 2,01596$ | $f_3 = 1,289648$ |
| |  |  |  |
| 4 | $f_4 = 3,701951$ | $f_4 = 2,157223$ | $f_4 = 1,532623$ |
| |  |  |  |

| Формы / Mode | Частоты f_i , Гц, собственных колебаний моделей / Frequencies f_i , Hz, of natural oscillations of the models | | |
|-----------------|--|--|---|
| | Модель 1 / Model 1 | Модель 2, а ($E_1 = 50$ МПа) Model 2, a ($E_1 = 50$ MPa) | Модель 2, б ($E_2 = 11$ МПа) / Model 2, b ($E_2 = 11$ MPa) |
| 5 | $f_5 = 4,505066$ | $f_5 = 2,923043$ | $f_5 = 2,43373$ |
| |  |  |  |
| 6 | $f_6 = 5,148898$ | $f_6 = 3,233619$ | $f_6 = 2,451672$ |
| |  |  |  |
| 7 | $f_7 = 5,280518$ | $f_7 = 3,508309$ | $f_7 = 2,532257$ |
| |  |  |  |
| 8 | $f_8 = 5,520917$ | $f_8 = 4,50695$ | $f_8 = 2,637183$ |
| |  |  |  |
| 9 | $f_9 = 5,820593$ | $f_9 = 4,521478$ | $f_9 = 2,709601$ |
| |  |  |  |



a



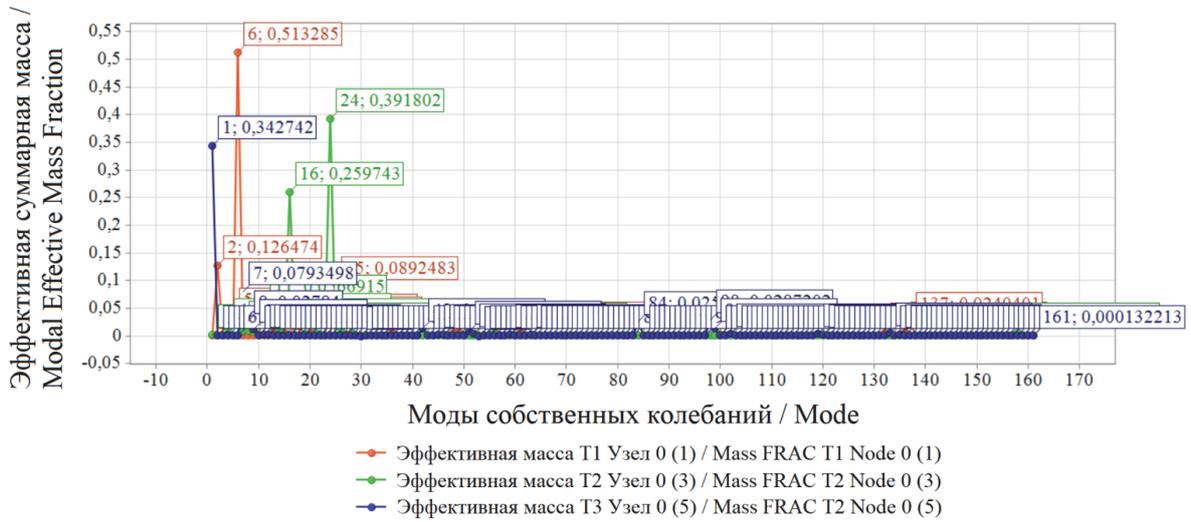
б

Рис. 2. Модель 1 «Здание – жесткая заделка», график «Суммарные массы – моды собственных колебаний»:
 а – перемещение узла T1, T2, T3 по оси X, Y, Z; б – поворот в узле R1, R2, R3 вокруг оси X, Y, Z

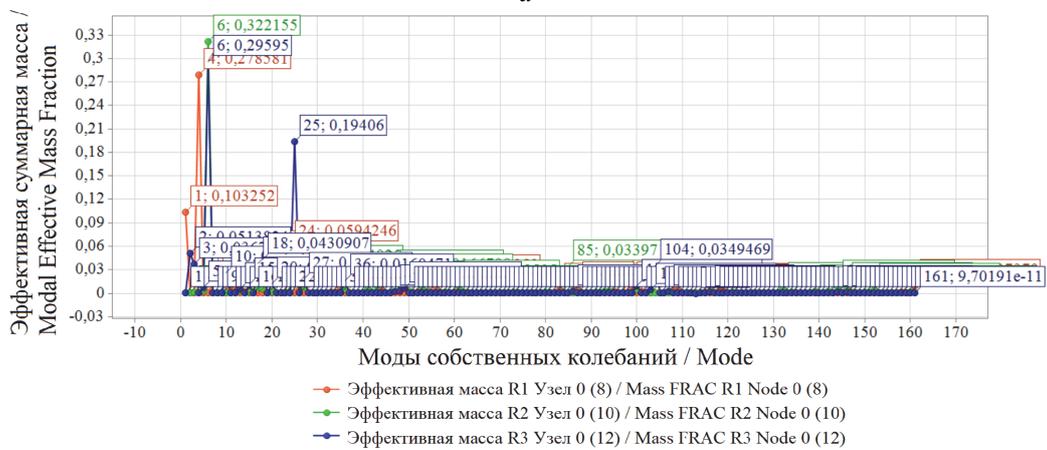
Figure 2. Model 1 “Superstructure – fixed-end”, graphic “Mass Summary – Mode”:
 а – T1, T2, T3 Translation in the X, Y, Z axes; б – R1, R2, R3 Rotation in the X, Y, Z axes

Графики «Эффективная суммарная масса – моды собственных колебаний» для линейных перемещений T1 по оси X, T2 по оси Y, T3 по оси Z и поворотов R1 вокруг оси X, R2 вокруг оси Y и R3 вокруг оси Z демонстрируют опасные формы и частоты f_{\max} собственных колебаний модели 1 «Здание – жесткая заделка» (рис. 4). Наиболее опасными формами собственных колебаний по перемещениям являются форма 1 для T3 по оси Z с эффективной суммарной массой 34,72 % и форма 6 T3 по оси Z с эффективной суммарной массой 51,33 % (рис. 4, а). Для поворота опасными будут форма 6 для R2 вокруг оси Y (32,21 %) и R3 вокруг оси Z (29,6 %) и форма 4 для R1 вокруг оси X (27,96 %).

Данные графики указывают на опасные формы и частоты собственных колебаний здания при перемещениях T1(X), T2(Y), T3(Z) и углов поворотов относительно каждой оси R1(X), R2(Y), R3(Z). Результаты собственных колебаний определяют поведение каждой конструкции и здания в целом при динамических воздействиях. Далее на рис. 5–8 представлены аналогичные графики для моделей 2, а и 2, б «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание» с разными модулями деформаций $E_1 = 50$ МПа и $E_2 = 11$ МПа соответственно.

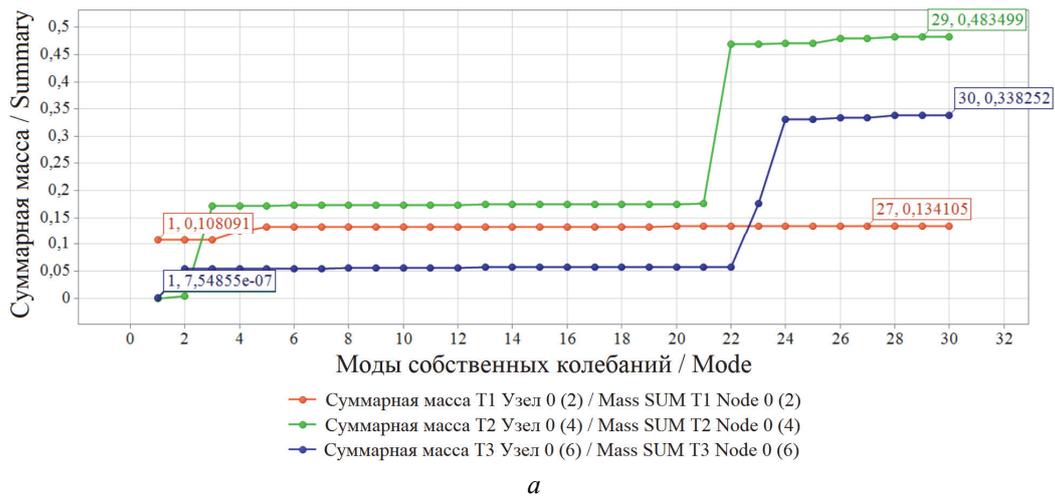


а



б

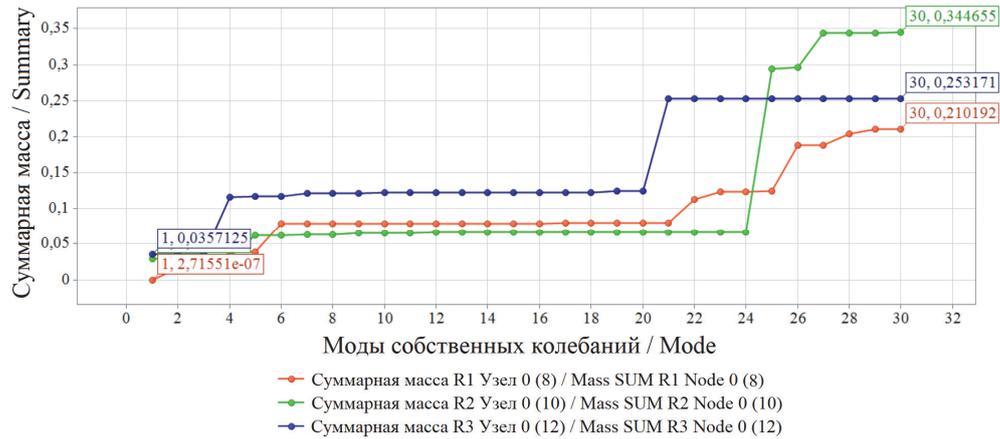
Рис. 3. Модель 1 «Здание – жесткая заделка», график «Эффективные массы – моды собственных колебаний»: а – перемещение узла T1, T2, T3 по оси X, Y, Z; б – поворот в узле R1, R2, R3 вокруг оси X, Y, Z
Figure 3. Model 1 “Superstructure – fixed-end”, graphic “Effective masses fraction – mode”: а – T1, T2, T3 translation in the X, Y, Z axes; б – R1, R2, R3 rotation in the X, Y, Z axes



а

Рис. 4. Модель 2, а «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание», $E_1 = 50$ МПа, график «Суммарные массы – моды собственных колебаний»: а – перемещение узла T1, T2, T3 по оси X, Y, Z

Figure 4. Model 2, а “Superstructure – pile foundation – soil base”, $E_1 = 50$ МПа, graphic “Mass summary – mode”: а – T1, T2, T3 translation in the X, Y, Z axes



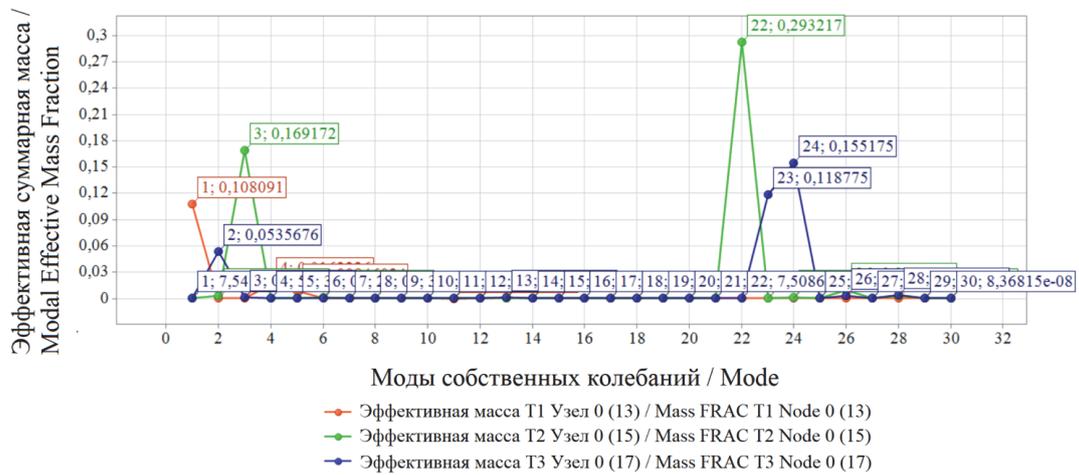
б

Рис. 4. Модель 2, а «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание», $E_1 = 50$ МПа, график «Суммарные массы – моды собственных колебаний» (окончание):

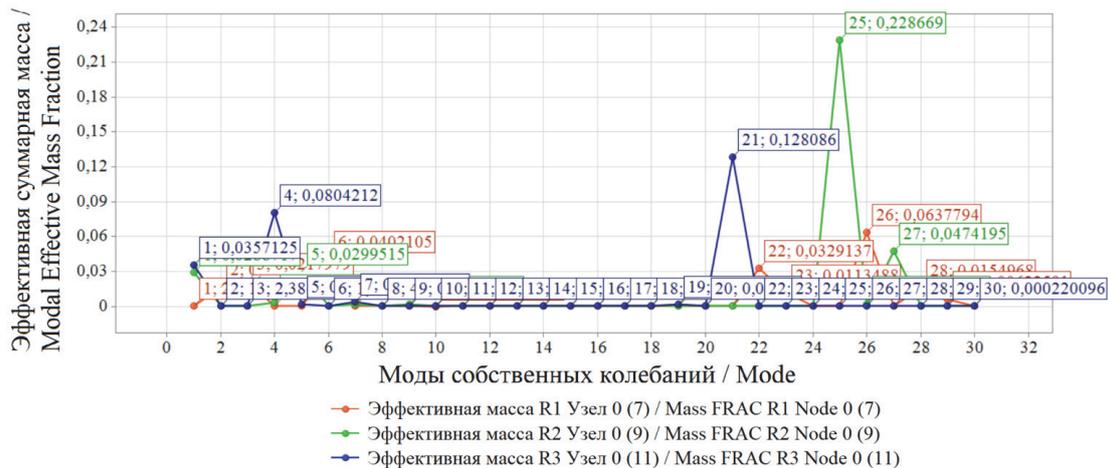
б – поворот в узле R1, R2, R3 вокруг оси X, Y, Z

Figure 4. Model 2, а “Superstructure – pile foundation – soil base”, $E_1 = 50$ MPa, graphic “Mass summary – mode” (ending):

б – R1, R2, R3 rotation in the X, Y, Z axes



а



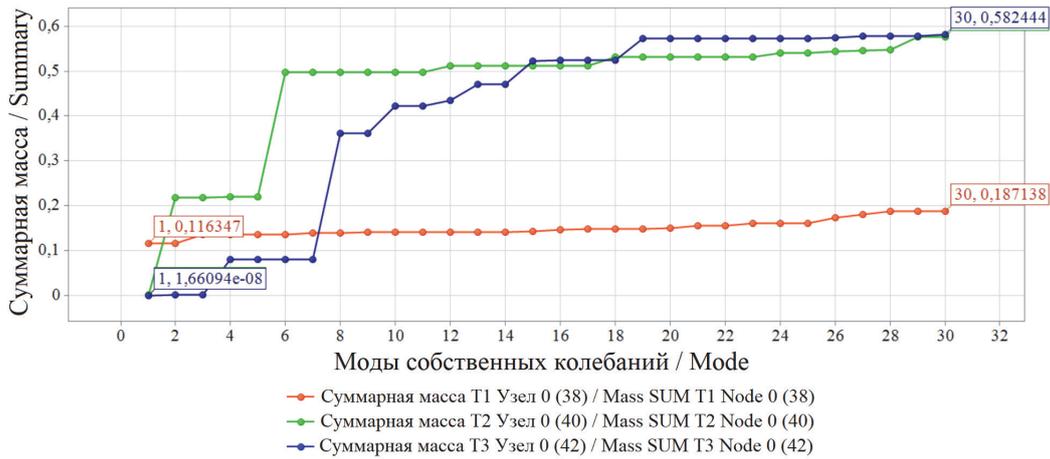
б

Рис. 5. Модель 2, а «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание», $E_1 = 50$ МПа, график «Эффективные массы – моды собственных колебаний»:

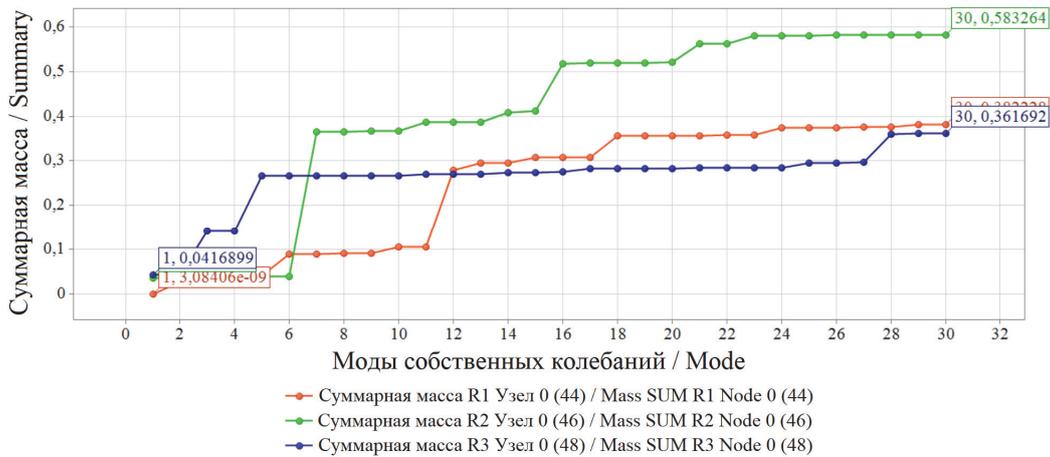
а – перемещение узла T1, T2, T3 по оси X, Y, Z; б – поворот в узле R1, R2, R3 вокруг оси X, Y, Z

Figure 5. Model 2, а “Superstructure – pile foundation – soil base”, $E_1 = 50$ MPa, graphic “Effective masses fraction – mode”:

а – T1, T2, T3 translation in the X, Y, Z axes; б – R1, R2, R3 rotation in the X, Y, Z axes



a

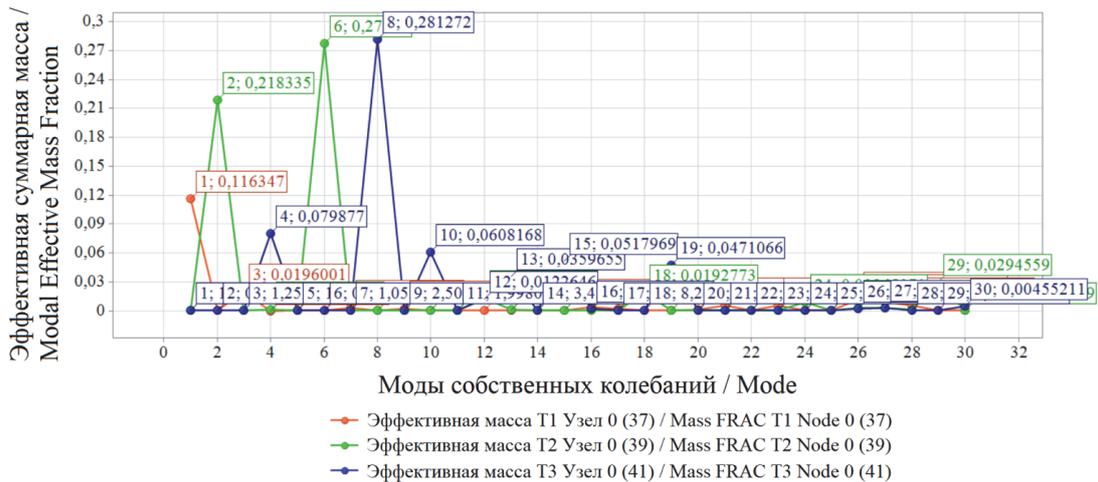


b

Рис. 6. Модель 2, б «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание», $E_2 = 11$ МПа, график «Суммарные массы – моды собственных колебаний»:

a – перемещение узла T1, T2, T3 по оси X, Y, Z; б – поворот в узле R1, R2, R3 вокруг оси X, Y, Z

Figure 6. Model 2, b “Superstructure – pile foundation – soil base”, $E_2 = 11$ MPa, graphic “Mass summary – mode”:
a – T1, T2, T3 translation in the X, Y, Z axes; б – R1, R2, R3 rotation in the X, Y, Z axes



a

Рис. 7. Модель 2, б «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание», $E_2 = 11$ МПа, график «Эффективные массы – моды собственных колебаний»:

a – перемещение узла T1, T2, T3 по оси X, Y, Z

Figure 7. Model 2, b “Superstructure – pile foundation – soil base”, $E_2 = 11$ MPa, graphic “Effective masses fraction – mode”:
a – T1, T2, T3 translation in the X, Y, Z axes

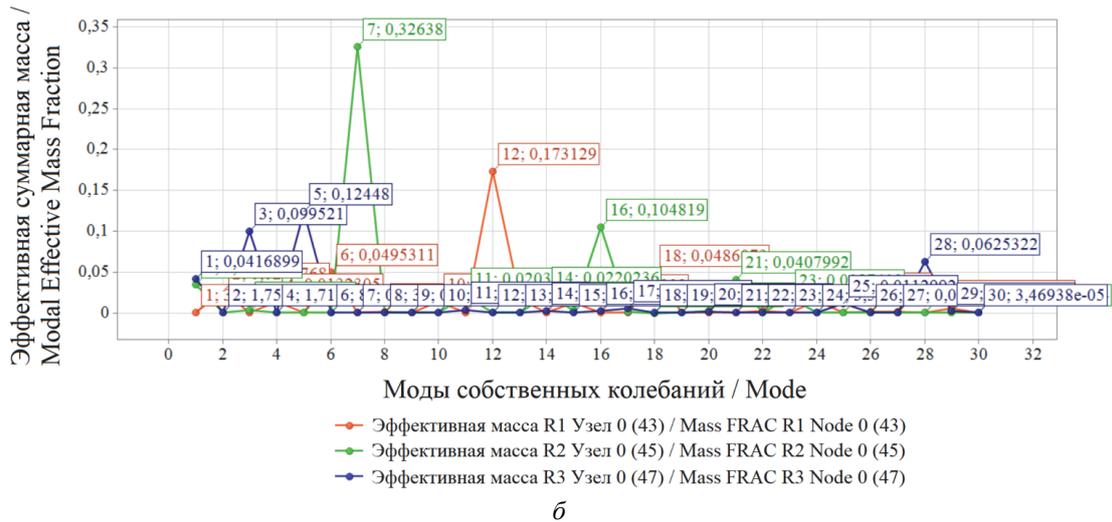


Рис. 7. Модель 2, б «Здание – свайный фундамент – грунтовое основание», $E_2 = 11$ МПа, график «Эффективные массы – моды собственных колебаний» (окончание)
 б – поворот в узле R1, R2, R3 вокруг оси X, Y, Z

Figure 7. Model 2, b “Superstructure – pile foundation – soil base”, $E_2 = 11$ MPa, graphic “Effective masses fraction – mode” (ending):
 б – R1, R2, R3 rotation in the X, Y, Z axes

Обсуждение

В последние годы при проектировании зданий все большее внимание уделяется динамике их поведения. Речь, в частности, идет о расчетном проектировании объектов, предназначенных для строительства в сейсмических районах. В проектных расчетах необходимо учитывать работу подземной части здания, состоящей из фундамента (мелкого или глубокого заложения), взаимодействующего с грунтовыми массивами различной реологии. Особую сложность представляет экспериментальная оценка диссипативных (демпфирующих) свойств грунта¹⁰ [49–51], которые должны быть учтены при выполнении расчетов вынужденных колебаний строительных объектов при сейсмических нагрузках. Вместе с тем определение мод собственных колебаний также имеет большое практическое значение, поскольку указанные моды характеризуют фундаментальные упруго-массовые свойства как отдельных конструктивных фрагментов, так и всего здания в целом. Кроме того, моды собственных колебаний используются в динамических расчетах различного вида, например в расчетах вынужденных колебаний конструкций модальным методом. Результаты подобных расчетов (реакции на динамические воздействия) оказываются весьма чувствительными к граничным условиям. Поэтому ввод в расчет упрощенных (априорных) граничных условий, не учитывающих свойства и характеристики фундаментов и грунтов, может приводить к серьезным ошибкам.

Заключение

Граничные условия оказывают существенное влияние на формы и частоты собственных колебаний надземной части здания с цилиндро-плитным покрытием. Учет в расчетах жесткостных и инерционных свойств подземной части (основания и фундамента) здания приводит к существенному изменению частот и форм его собственных колебаний. Отсюда пренебрежение подземной частью и моделирование ее влияния жесткой заделкой может привести к существенным ошибкам динамического анализа конструкции здания.

¹⁰ Патент РФ № 184676. Устройство для определения коэффициента демпфирования сыпучих материалов и жидкостей / Сutyurin В.И., Кузахметова Э.Р., Шинкаренко И.А. 2018. Бюл. № 31. 7 с.; Патент РФ № 2646540. Экспериментальная установка (стенд) для изучения многофакторной зависимости коэффициента демпфирования свай при взаимодействии с грунтом / Сutyurin В.И., Кузахметова Э.Р. 2018. Бюл. № 7. 9 с.; Патент РФ № 2699311. Способ определения демпфирующих характеристик жидкостей и сыпучих материалов / Кузахметова Э.Р., Сutyurin В.И., Шинкаренко И.А. 2019. Бюл. № 25. 11 с.

Существенное влияние на результаты анализа динамики оказывают физико-механические свойства грунтов. В ходе численного исследования выявлено, что уменьшение модуля деформаций грунта E_i , МПа может приводить не только к уменьшению значений собственных частот f_i здания, но и к изменению порядка следования характерных низших форм собственных колебаний (поперечных, продольных, ортогональных, крутильных). Низшими формами собственных колебаний являются формы покрытия центральной части здания, то есть цилиндрической оболочки нулевой гауссовой кривизны.

Список литературы

1. Кужахметова Э.Р., Сапожников А.И. Архитектурная выразительность и физиологическая целесообразность зданий с криволинейными поверхностями // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2012. № 11 (166). С. 42–45.
2. Сапожников А.И. Жизнь зданий в земной стихии. LAP LAMBER Academic Publishing, 2014. 60 с.
3. Виноградов Г.Г. Расчет строительных пространственных конструкций. Л.: Стройиздат, 1990. 262 с.
4. Зимин С.С., Кокоткова О.Д., Беспалов В.В. Сводчатые конструкции исторических зданий // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 2 (29). С. 57–72.
5. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 150–165.
6. Мамиева И.А. Аналитические поверхности в архитектуре Москвы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 4. С. 9–15.
7. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Зонтичные поверхности и поверхности зонтичного типа в архитектуре // Промышленное и гражданское строительство. 2011. № 7–1. С. 27–30.
8. Кривошапко С.Н., Алборова Л.А., Мамиева И.А. Оболочечные структуры: генезис, материалы и подвиды. Ч. 1. Подвиды и направления // Academia. Архитектура и строительство. 2021. № 3. С. 125–134. <http://doi.org/10.22337/2077-9038-2021-3-125-134>
9. Кривошапко С.Н., Алборова Л.А., Мамиева И.А. Оболочечные структуры: генезис, материалы и подвиды. Ч. 2. Конструкционные строительные материалы // Academia. Архитектура и строительство. 2021. № 4. С. 110–119. <http://doi.org/10.22337/2077-9038-2021-4-110-119>.
10. Кужахметова Э.Р. Особенности напряженно-деформированного состояния здания с цилиндро-плитовантовым покрытием // Актуальные вопросы современной науки: сборник статей по материалам XII Международной научно-практической конференции (Томск, 23 мая 2018 года): в 3 ч. Томск: Дендра, 2018. С. 93–98.
11. Park K., Park M., Shin S. Design of large space cable roofs with retractable systems to open and close // International Journal of Latest Trends in Engineering and Technology. 2017. Vol. 8. Issue 4–1. Pp. 197–203. <http://doi.org/10.21172/1.841.34>
12. Grunwalda G., Hermekingb T., Prange T. Kinetic roof structure: Msheireb Heart of Doha // Procedia Engineering. 2016. Vol. 155. Pp. 89–296.
13. Кужахметова Э.Р. Расчетное проектирование каркасного здания с учетом обобщенных жесткостей и нагрузок основания и фундамента (часть 1) // Вестник БГТУ имени В.Г. Шухова. 2019. № 12. С. 34–46. <http://doi.org/10.34031/2071-7318-2019-4-12-34-46>
14. Popova A., Strakhov D., Sinyakov L. Numerical analysis of ground-structure interaction for framed building with isolated footings // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 150. Pp. 304–315 https://doi.org/10.1007/978-3-030-72404-7_30
15. Chandiwala A., Savaliya M., Vasanwala S. Soil-structure interaction on pile raft foundation in multi-story RC building with vertical irregularity // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 138. Pp. 437–445.
16. Mirsayapov I., Shakirov I., Nurieva D. Numerical studies of soil base deformations from reconstructed multi-storey building to nearby buildings // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 274. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202127403020>
17. Wang H., Zhang R. Dynamic structure-soil-structure interaction of piled high-rise buildings under earthquake excitations I: influence on dynamic response // Latin American Journal of Solids and Structures. 2021. Vol. 18. No. 3. e357. <https://doi.org/10.1590/1679-78256223>

18. Wu M. Analysis of the influence of pile foundation settlement of high-rise buildings on surrounding buildings // *Arabian Journal of Geosciences*. 2020. Vol. 13. No. 822. <https://doi.org/10.1007/s12517-020-05832-7>
19. Bhattacharjee T., Chanda D., Saha R. Influence of soil flexibility and plan asymmetry on seismic behaviour of soil-piled raft-structure system // *Structures*. 2021. Vol. 33. Pp. 1775–1788. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.05.045>.
20. Baimakhan R.B., Kadirova Z.B., Seinassinova A.A., Baimakhan A.R., Baimakhanova G.M. Calculation model of the “building-foundation” system on anisotropic base and deformation calculations // *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*. 2021. Vol. 9. No. 1. Pp. 308–321. <http://doi.org/10.21533/pen.v9i1.1807>
21. Mirsayapov I., Koroleva I. Long-term settlements assessment of high-rise building groundbase based on analytical ground deformation diagram // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 165. Pp. 519–527. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.728>
22. Khoshnoudian F., Ziaei R., Ayyobi P. Effects of nonlinear soil – structure interaction on the seismic response of structure-TMD systems subjected to near-field earthquakes // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2017. Vol. 15. Pp. 199–226. <https://doi.org/10.1007/s10518-016-9963-y>
23. Gentile C., Guidobaldi M., Saisi A. One-year dynamic monitoring of a historic tower: damage detection under changing environment // *Meccanica*. 2016. Vol. 51. Pp. 2873–2889. <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0482-3>
24. Ubertini F., Cavalagli N., Kita A. Assessment of a monumental masonry bell-tower after 2016 Central Italy seismic sequence by long-term SHM // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2018. Vol. 16. Pp. 775–801. <https://doi.org/10.1007/s10518-017-0222-7>
25. Azzara R.M., Girardi M., Padovani C., Pellegrini D. Experimental and numerical investigations on the seismic behaviour of the San Frediano bell tower in Lucca // *Annals of Geophysics*. 2019. Vol. 62. No. 3. SE342. <https://doi.org/10.4401/ag-8025>
26. Cuadra C., Karkee M.B., Tokeshi K. Earthquake risk to Inca’s historical constructions in Machupicchu // *Advances in Engineering Software*. 2008. Vol. 39. No. 4. Pp. 336–345. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2007.01.002>
27. Karapetrova S., Manakou M., Bindi D., Petrovic B., Pitilakis K. “Time-building specific” seismic vulnerability assessment of a hospital RC building using field monitoring data // *Engineering Structures*. 2016. Vol. 112. No. 1. Pp. 114–132. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.01.009>
28. Karatzetzou A., Pitilakis D. Reduction factors to evaluate acceleration demand of soil-foundation-structure systems // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018. Vol. 109. Pp. 199–208. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.03.017>
29. Karafagka S., Fotopoulou S., Pitilakis D. Fragility assessment of non-ductile RC frame buildings exposed to combined ground shaking and soil liquefaction considering SSI // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 229. No. 15. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111629>
30. Forcellini D., Giardi F., Tanganelli M. Seismic assessment of the historical third tower in San Marino based on a 3D laser scanner survey (3D-LSS) // *Innovative Infrastructure Solutions*. 2019. Vol. 4. No. 20. <https://doi.org/10.1007/s41062-019-0207-2>
31. Forcellini D. Analytical fragility curves of shallow-founded structures subjected to soil-structure interaction (SSI) effects // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2021. Vol. 141. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2020.106487>
32. Cavalieri F., Correia A.A., Crowley H. Seismic fragility analysis of URM buildings founded on piles: influence of dynamic soil – structure interaction models // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2020. Vol. 18. Pp. 4127–4156. <https://doi.org/10.1007/s10518-020-00853-9>
33. Cavalieri F., Correia A.A., Crowley H., Pinho R. Seismic fragility analysis of URM buildings founded on piles: influence of dynamic soil – structure interaction models // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2020. Vol. 18. Pp. 4127–4156. <https://doi.org/10.1007/s10518-020-00853-9>
34. Ashayeri I., Biglari M., Formisano A., D’Amato M. Ambient vibration testing and empirical relation for natural period of historical mosques. Case study of eight mosques in Kermanshah, Iran // *Construction and Building Materials*. 2021. Vol. 289. Article 123191. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.123191>
35. Кужахметова Э.Р., Сутырин В.И. Влияние грунтового основания на напряженно-деформированное состояние большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 5 С. 444–457. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-444-457>

36. Кужахметова Э.Р. Напряженно-деформированное состояние цилиндрично-плитно-вантового покрытия здания (сооружения) с различными формами наружного опорного контура // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 2. С. 95–110. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-95-110>
37. Кужахметова Э.Р. Конструктивные решения расположения вант в цилиндрично-плитно-вантовом (ЦПВ) покрытии здания (сооружения) // *Вестник БГТУ имени В.Г. Шухова*. 2019. № 5. С. 77–89. http://doi.org/10.34031/article_5ce292ca24bc23.91006970
38. Кужахметова Э.Р. Погружение, расчет и конструирование монолитной железобетонной сваи конической формы // *Научное обозрение. Технические науки*. 2017. № 2. С. 57–64.
39. Кужахметова Э.Р. Исследование напряженно-деформированного состояния набивной монолитной железобетонной конусообразной сваи с щебневыми боковыми и нижними образованиями // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 4. С. 335–356. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-335-356>
40. Кужахметова Э.Р. Влияние конструктивных решений на жесткостные характеристики набивной монолитной железобетонной конусообразной сваи со щебневыми образованиями // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 5. С. 500–518. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-5-500-518>
41. Кужахметова Э.Р., Сапожников А.И. Сравнительный анализ работы длинных и коротких свай при горизонтальном загрузении // *Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века*. 2015. № 5–6 (196–197). С. 30–34.
42. Сапожников А.И., Кужахметова Э.Р. Глубокое погружение и деформационный расчет монолитной сваи-оболочки большого диаметра // *Международная научная конференция научно-педагогических работников Астраханского государственного технического университета, посвященная 85-летию со дня основания вуза (59 НПР) (Астрахань, 20–25 апреля 2015 года) / под общ. ред. Н.Т. Берберовой, К.П. Пашенко*. Астрахань: Астраханский государственный технический университет, 2015. С. 191–192.
43. Сапожников А.И., Кужахметова Э.Р. Способы погружения, прочностные и деформационные расчеты свай. Астрахань, 2015. 71 с.
44. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. М.: ДМК Пресс, 2013. 784 с.
45. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. М.: ДМК Пресс, 2003. 448 с.
46. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 540 с.
47. Strang G., Fix G.J. The finite element method in one dimension. An analysis of the finite element method. Englewood Cliffs, 1973. Pp. 51–62.
48. Кужахметова Э.Р. Моделирование свайного фундамента в среде Femap with NX Nastran // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 4. С. 250–260. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-250-260>
49. Сутырин В.И., Шинкаренко И.А., Кужахметова Э.Р. Экспериментальный стенд для определения демпфирующих свойств материалов // *Известия КГТУ*. 2019. № 52. С. 177–183.
50. Сутырин В.И., Кужахметова Э.Р., Шинкаренко И.А. Экспериментальное определение коэффициентов демпфирования грунтов // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. 2022. № 4. С. 19–25.
51. Sutyryin V.I., Kuzhakhmetova E.R., Shinkarenko I.A. Experimental determination of soil damping coefficients // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2022. Vol. 59. Pp. 362–370. <https://doi.org/10.1007/s11204-022-09823-6>

References

1. Kuzhakhmetova E.R., Sapozhnikov A.I. Architectural expressiveness and physiological expediency of buildings with curvilinear surfaces. *Building Materials, Equipment, Technologies of the 21st Century*. 2012;11(166):42–45. (In Russ.)
2. Sapozhnikov A.I. *The life of buildings in the earth element*. LAP Lamber Academic Publishing; 2014. (In Russ.)
3. Vinogradov G.G. *Calculation of building spatial structures*. Leningrad: Stroiizdat Publ.; 1990. (In Russ.)
4. Zimin S.S., Bepalov V.V., Kokotkova O.D. Vault structures of historical buildings. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2015;(2):57–72. (In Russ.)

5. Mamieva I.A. Analytical surfaces for parametric architecture in contemporary buildings and structures. *Academia. Architecture and Construction*. 2020;(1):150–165. (In Russ.)
6. Mamieva I.A. Analytical surfaces in the architecture of Moscow. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013;(4):9–15. (In Russ.)
7. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. Umbrella surfaces and surfaces of umbrella type in architecture. *Industrial and Civil Construction*. 2011;(7–1): 27–30. (In Russ.)
8. Krivoshapko S.N., Alborova L.A., Mamieva I.A. Shell structures: genesis, materials and subtypes. Part 1. Subtypes and directions. *Academia. Architecture and Construction*. 2021;(3):125–134. (In Russ.) <http://doi.org/10.22337/2077-9038-2021-3-125-134>
9. Krivoshapko S.N., Alborova L.A., Mamieva I.A. Shell structures: genesis, materials and subtypes. Part 2. Constructive building materials *Academia. Architecture and Construction*. 2021;(4):110–119. (In Russ.) <http://doi.org/10.22337/2077-9038-2021-4-110-119>
10. Kuzhakhmetova E.R. Features of the stress-strain state of a building with a cylinder-plate-cable-stayed coating. *Topical Issues of Modern Science: A Collection of Articles Based on the Materials of the XII International Scientific and Practical Conference, Tomsk, 23 May 2018 (part 1)*. Tomsk: Dendra Publ.; 2018. p. 93–98. (In Russ.)
11. Park K., Park M., Shin S. Design of large space cable roofs with retractable systems to open and close. *International Journal of Latest Trends in Engineering and Technology*. 2017;8(4–1):197–203. <http://doi.org/10.21172/1.841.34>
12. Grunwalda G., Hermekingb T., Prange T. Kinetic roof structure: Msheireb Heart of Doha. *Procedia Engineering*. 2016;(155):289–296. <http://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.031>
13. Kuzhakhmetova E.R. Numerical design of frame buildings taking into account the generalized stiffness and load of soil and foundation. *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2019;(12):34–46. (In Russ.) <http://doi.org/10.34031/2071-7318-2019-4-12-34-46>
14. Popova A., Strakhov D., Sinyakov L. Numerical analysis of ground-structure interaction for framed building with isolated footings. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021;150:304–315. https://doi.org/10.1007/978-3-030-72404-7_30
15. Chandiwala A., Savaliya M., Vasanwala S. Soil – structure interaction on pile raft foundation in multi-story RC building with vertical irregularity. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021;138:437–445.
16. Mirsayapov I., Shakirov I., Nurieva D. Numerical studies of soil base deformations from reconstructed multi-storey building to nearby buildings. *E3S Web of Conferences*. 2021;274. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202127403020>
17. Wang H., Zhang R. Dynamic structure-soil-structure interaction of piled high-rise buildings under earthquake excitations I: influence on dynamic response. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2021;18(3):e357. <https://doi.org/10.1590/1679-78256223>
18. Wu M. Analysis of the influence of pile foundation settlement of high-rise buildings on surrounding buildings. *Arabian Journal of Geosciences*. 2020;13(822). <https://doi.org/10.1007/s12517-020-05832-7>
19. Bhattacharjee T., Chanda D., Saha R. Influence of soil flexibility and plan asymmetry on seismic behaviour of soil-piled raft-structure system. *Structures*. 2021;33:1775–1788. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.05.045>
20. Baimakhan R.B., Kadirova Z.B., Seinassinova A.A., Baimakhan A.R., Baimakhanova G.M. Calculation model of the “building-foundation” system on anisotropic base and deformation calculations. *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*. 2021;9(1):308–321. <http://doi.org/10.21533/pen.v9i1.1807>
21. Mirsayapov I., Koroleva I. Long-term settlements assessment of high-rise building groundbase based on analytical ground deformation diagram. *Procedia Engineering*. 2016;165:519–527. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.728>
22. Khoshnoudian F., Ziaei R., Ayyobi P. Effects of nonlinear soil – structure interaction on the seismic response of structure-TMD systems subjected to near-field earthquakes. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2017;15:199–226. <https://doi.org/10.1007/s10518-016-9963-y>
23. Gentile C., Guidobaldi M., Saisi A. One-year dynamic monitoring of a historic tower: damage detection under changing environment. *Meccanica*. 2016;51:2873–2889. <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0482-3>
24. Ubertini F., Cavalagli N., Kita A. Assessment of a monumental masonry bell-tower after 2016 Central Italy seismic sequence by long-term SHM. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2018;16:775–801. <https://doi.org/10.1007/s10518-017-0222-7>

25. Azzara R.M., Girardi M., Padovani C., Pellegrini D. Experimental and numerical investigations on the seismic behaviour of the San Frediano bell tower in Lucca. *Annals of Geophysics*. 2019;62(3):SE342. <https://doi.org/10.4401/ag-8025>
26. Cuadra C., Karkee M.B., Tokeshi K. Earthquake risk to Inca's historical constructions in Machupicchu. *Advances in Engineering Software*. 2008;39(4):336–345. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2007.01.002>
27. Karapetroa S., Manakou M., Bindi D., Petrovic B., Ptilakis K. “Time-building specific” seismic vulnerability assessment of a hospital RC building using field monitoring data. *Engineering Structures*. 2016;112(1):114–132. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.01.009>
28. Karatzetou A., Ptilakis D. Reduction factors to evaluate acceleration demand of soil-foundation-structure systems. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018;109:199–208. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.03.017>
29. Karafagka S., Fotopoulou S., Ptilakis D. Fragility assessment of non-ductile RC frame buildings exposed to combined ground shaking and soil liquefaction considering SSI. *Engineering Structures*. 2021;229(15):111629. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111629>
30. Forcellini D., Giardi F., Tanganelli M. Seismic assessment of the historical third tower in San Marino based on a 3D laser scanner survey (3D-LSS). *Innovative Infrastructure Solutions* 2019;4(20). <https://doi.org/10.1007/s41062-019-0207-2>
31. Forcellini D. Analytical fragility curves of shallow-founded structures subjected to soil-structure interaction (SSI) effects. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2021;41:106487. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2020.106487>
32. Cavalieri F., Correia A.A., Crowley H. Seismic fragility analysis of URM buildings founded on piles: influence of dynamic soil – structure interaction models. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2020;18:4127–4156. <https://doi.org/10.1007/s10518-020-00853-9>
33. Cavalieri F., Correia A.A., Crowley H., Pinho R. Seismic fragility analysis of URM buildings founded on piles: influence of dynamic soil – structure interaction models. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2020;18:4127–4156. <https://doi.org/10.1007/s10518-020-00853-9>
34. Ashayeri I., Biglari M., Formisano A., D'Amato M. Ambient vibration testing and empirical relation for natural period of historical mosques. Case study of eight mosques in Kermanshah, Iran. *Construction and Building Materials*. 2021;289:123191. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.123191>
35. Kuzhakhmetova E.R., Sutyurin V.I. Influence of the soil base on the stress-strain state of a large – span building with a cylinder-and-slab roof. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(5):444–457. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-444-457>
36. Kuzhakhmetova E.R. Stress-strain state cylinder-plate-cable-stayed roof buildings (structures) with various forms of external support contour. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):95–110. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-95-110>
37. Kuzhakhmetova E.R. Constructive solutions of guys location in cylindrical-slab-guy covering of building (construction). *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2019;(5):77–89. (In Russ.) http://doi.org/10.34031/article_5ce292ca24bc23.91006970
38. Kuzhakhmetova E.R. Dipping, calculation and construction of the monolithic reinforced concrete pile of the conical form. *Scientific Review. Technical Sciences*. 2017;(2):57–64. (In Russ.)
39. Kuzhakhmetova E.R. Research of stressdeformed state of the rammed monolithic reinforced concrete cone-shaped piles with side and bottom forms from crushed stones. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(4):335–356. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-335-356>
40. Kuzhakhmetova E.R. Influence of constructive solutions on the stiffness characteristics of the rammed monolithic reinforced concrete cone-shaped piles with side and bottom forms from crushed stones. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(5):500–518. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-5-500-518>
41. Kuzhakhmetova E.R., Sapozhnikov A.I. Comparative analysis of long and short piles with horizontal uploading. *Building Materials, Equipment, Technologies of the XXI Century*. 2015;(5–6):30–34. (In Russ.)
42. Sapozhnikov A.I., Kuzhakhmetova E.R. Deep immersion and deformation calculation of a monolithic pile-shell of large diameter. *International Scientific Conference of Scientific and Pedagogical Workers of Astrakhan State Technical University, Dedicated to the 85th Anniversary from the Basis of the University (Astrakhan, April 20–25, 2015)*. Astrakhan: Astrakhan State Technical University; 2015. p. 191–192. (In Russ.)
43. Sapozhnikov A.I., Kuzhakhmetova E.R. *Immersion methods, strength and deformation calculations of piles*. Astrakhan; 2015. (In Russ.)

44. Rychkov S.P. *Structural modeling in Femap with NX Nastran*. Moscow: DMK Press; 2013. (In Russ.)
45. Shimkovich D.G., *Structural analysis in MSC/NASTRAN for Windows*. Moscow: DMK Press; 2003. (In Russ.)
46. Zienkiewicz O.C. *The finite element method in engineering science*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
47. Strang G., Fix G.J. *The finite element method in one dimension. An analysis of the finite element method*. Englewood Cliffs; 1973. p. 51–62.
48. Kuzhakhmetova E.R. Modeling of a piled foundation in a Femap with NX Nastran. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):250–260. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-250-260>
49. Sutyurin V.I., Shinkarenko I.A., Kuzhakhmetova E.R. Experimental stand for determining the damping properties of materials. *Izvestiya KSTU*. 2019;(52):177–183. (In Russ.)
50. Sutyurin V.I., Kuzhakhmetova E.R., Shinkarenko I.A. Experimental determination of soil damping coefficients. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2022;(4):19–25. (In Russ)
51. Sutyurin V.I., Kuzhakhmetova E.R., Shinkarenko I.A. Experimental determination of soil damping coefficients. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2022;59:362–370. <https://doi.org/10.1007/s11204-022-09823-6>



DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-35-45

EDN: FMZRMU

УДК 624.21

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Теоретические предпосылки разработки программы оценки возможности пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостам

Е.А. Луговцев¹ , К.Н. Уталиев¹ , К.А. Чутков² 

¹Военный учебно-научный центр Сухопутных войск «Общевойсковая академия Вооруженных Сил Российской Федерации», Москва, Российская Федерация

²Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище, Новосибирск, Российская Федерация

✉ Lugovea@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 4 сентября 2022 г.

Доработана: 20 октября 2022 г.

Принята к публикации: 28 октября 2022 г.

Для цитирования

Луговцев Е.А., Уталиев К.Н., Чутков К.А. Теоретические предпосылки разработки программы оценки возможности пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостам // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 35–45. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-35-45>

Аннотация. Рассматриваются теоретические предпосылки для создания программного обеспечения для оперативного (на месте испытаний) экспериментального определения возможности безопасного пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостам с учетом их фактического эксплуатационного состояния с экспериментальными подтверждениями. Раскрыты особенности, условия применения, положительные стороны разрабатываемого программного обеспечения. Создание программного обеспечения обусловлено, с одной стороны, необходимостью обеспечения безопасности водителя транспортного средства и мостового сооружения, а с другой стороны – оценки грузоподъемности пролетных строений автодорожных мостов по параметрам их напряженно-деформированного состояния для обеспечения гарантированного безопасного пропуска тяжеловесных транспортных средств. Разработанное программное обеспечение для оперативного определения возможности безопасного пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостовым сооружениям с учетом их фактического эксплуатационного состояния реализовано с использованием персонального компьютера. Оно обеспечивает оценку возможности пропуска тяжеловесных транспортных средств с любыми по длине пролетами разрезных и неразрезных систем с учетом их фактического эксплуатационного состояния, позволяя при этом безопасно использовать любую подвижную нагрузку в виде эталонной. Представленное программное обеспечение будет использовано в составе модернизированной системы экспресс-оценки грузоподъемности автодорожных мостов, разрабатываемой на основе системы измерений СИ-ППМ с добавлением технических устройств, повышающих возможность оперативной оценки грузоподъемности автодорожных мостов.

Ключевые слова: пролетное строение, прогиб, опорное сечение, эталонная нагрузка, невыгодное положение, изгибающий момент, напряжение, грузоподъемность, программное обеспечение

Луговцев Евгений Анатольевич, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры инженерного обеспечения, Военный институт (инженерных войск), Военный учебно-научный центр Сухопутных войск «Общевойсковая академия Вооруженных Сил Российской Федерации», Российская Федерация, 119121, Москва, пр-д Девичьего поля, д. 4; ORCID: 0000-0003-0133-1269, eLIBRARY SPIN-код: 8843-6213; Lugovea@mail.ru

Уталиев Карим Николаевич, адъюнкт, Военный институт (инженерных войск), Военный учебно-научный центр Сухопутных войск «Общевойсковая академия Вооруженных Сил Российской Федерации», Российская Федерация, 119121, Москва, пр-д Девичьего поля, д. 4; ORCID: 0009-0008-8512-792X, eLIBRARY SPIN-код: 2623-9491; utalievkarim@gmail.com

Чутков Константин Александрович, кандидат технических наук, начальник кафедры эксплуатации и ремонта вооружения и военной техники, Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище, Российская Федерация, 630117, Новосибирск, мкр-н Академгородок, ул. Иванова, д. 49; ORCID: 0009-0004-2071-186X, eLIBRARY SPIN-код: 7809-9660; kchutkov@yandex.ru

© Луговцев Е.А., Уталиев К.Н., Чутков К.А., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>



Theoretical basis for the development of a program for the evaluation of road bridge heavy vehicles capacity

Evgeny A. Lugovtsev¹  , Karim N. Utaliev¹ , Konstantin A. Chutkov² 

¹Military Training and Research Center of the Ground Forces “Combined Arms Order of Zhukov Academy of the Armed Forces of the Russian Federation”, Moscow, Russian Federation

²Novosibirsk Higher Military Command School of the Order of Zhukov, Novosibirsk, Russian Federation

 Lugovea@mail.ru

Article history

Received: September 4, 2022

Revised: October 20, 2022

Accepted: October 28, 2022

For citation

Lugovtsev E.A., Utaliev K.N., Chutkov K.A. Theoretical basis for the development of a program for the evaluation of road bridge heavy vehicles capacity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):35–45. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-35-45>

Abstract. The authors present theoretical basis for creating software for operational (on-site testing) experimental determination of the possibility of safe passage of heavy vehicles on road bridges, taking into account their actual operational condition with experimental confirmations. The features, conditions of use, and benefits of the software under development are expanded upon. The creation of the software is driven, on the one hand, by the need to ensure the safety of the driver and the bridge structure, and on the other hand, the need to assess the load capacity of the superstructures of road bridges according to the parameters of their stress-strain state to ensure guaranteed safe passage of heavy vehicles. The developed software for the operational determination of the possibility of safe passage of heavy vehicles on road bridge structures, with the consideration of their actual operational condition, is implemented using a personal computer. The software provides an assessment of the possibility of heavy vehicle passage through split and non-split systems of any length, considering the actual operational condition of the systems, while allowing to safely use any mobile load as a point of reference. The introduced software will be used as part of an upgraded system for rapid assessment of the load capacity of road bridges, developed on the basis of the SI-PPM measurement system with the addition of technical devices that increase the possibility of operational assessment of the load capacity of road bridges.

Keywords: superstructure, deflection, support section, reference load, disadvantage, bending moment, tension, load capacity, software

Введение

В практике эксплуатации автомобильных дорог РФ периодически возникают сложные актуальные задачи оценки возможности пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостам [1–4]. Выполнением этой задачи занимаются специализированные организации, имеющие в своем штате высококвалифицированных специалистов, современное программное обеспечение и оборудование для проведения обследований и испытаний мостов.

Вопросу оценки технического состояния пролетных строений автодорожных мостов при пропуске по ним тяжеловесных транспортных средств посвящен ряд работ [5–12], в которых определение грузоподъемности автодорожного моста проводится с использованием различных методов.

В целях достижения оперативности определения возможности безопасного пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостам с учетом их фактического эксплуатационного состояния за основу создания программного обеспечения взят разработанный одним из авторов экспериментально-аналитический метод расчета усилий [13], который был реализован в результате совместной работы

Evgeny A. Lugovtsev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Engineering Support, Military Institute (Engineering Troops), Military Training and Research Center of the Ground Forces “Combined Arms Order of Zhukov Academy of the Armed Forces of the Russian Federation”, 4 Proezd Devichego Polya, Moscow, 119121, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0133-1269, eLIBRARY SPIN-code: 8843-6213; Lugovea@mail.ru.

Karim N. Utaliev, Adjunct, Military Institute (Engineering Troops), Military Training and Research Center of the Ground Forces “Combined Arms Order of Zhukov Academy of the Armed Forces of the Russian Federation”, 4 Proezd Devichego Polya, Moscow, 119121, Russian Federation; ORCID: 0009-0008-8512-792X, eLIBRARY SPIN-code: 2623-9491; utalievkarim@gmail.com

Konstantin A. Chutkov, Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of Operation and Repair of Weapons and Military Equipment, Novosibirsk Higher Military Command School of the Order of Zhukov, 49 Ivanova St, Akademgorodok microdistrict, Novosibirsk, 630117, Russian Federation; ORCID: 0009-0004-2071-186X, eLIBRARY SPIN-code: 7809-9660; kchutkov@yandex.ru

авторов в программу «Аналитическая модель определения параметров напряженно-деформированного состояния в пролетных строениях автодорожных мостов от сверхнормативных нагрузок РВСН»¹.

Проведено уточнение разработанной программы относительно:

- определения невыгодного положения эталонной нагрузки на пролетном строении;
- расчета изгибающего момента от эталонной нагрузки;
- корректировки прогиба в середине пролетного строения от эталонной нагрузки, определяемого экспериментально, с использованием коэффициента угла поворота и учитывая влияние системы балочного моста.

Создание ПО для оперативного определения возможности безопасного пропуска тяжеловесных транспортных средств обусловлено, с одной стороны, необходимостью обеспечения безопасности водителя транспортного средства и мостового сооружения, а с другой стороны – потребностью оценки грузоподъемности пролетных строений автодорожных мостов по параметрам их напряженно-деформированного состояния для гарантированного безопасного пропуска тяжеловесных транспортных средств.

Теоретические исследования

1. Предварительно заметим, что в [14] определены алгоритмы расчета невыгодного положения нагрузки, при котором получаемый экспериментальным путем прогиб от нее будет максимален, путем приведения эталонной нагрузки к равномерно-распределенной, и расчета удаления равнодействующей эталонной нагрузки от первой его оси; изгибающий момент вычисляется через определение площади линии влияния изгибающего момента эталонной нагрузки.

Применение данного подхода к определению невыгодного положения и, соответственно, изгибающего момента в некоторых случаях не совсем корректно, так как он служит для их быстрого нахождения и значения получаются приближенными.

Авторами предлагается определение более точного невыгодного положения эталонной нагрузки и расчета изгибающего момента от нее с использованием линии влияния (рис. 1), который проводится в два этапа.

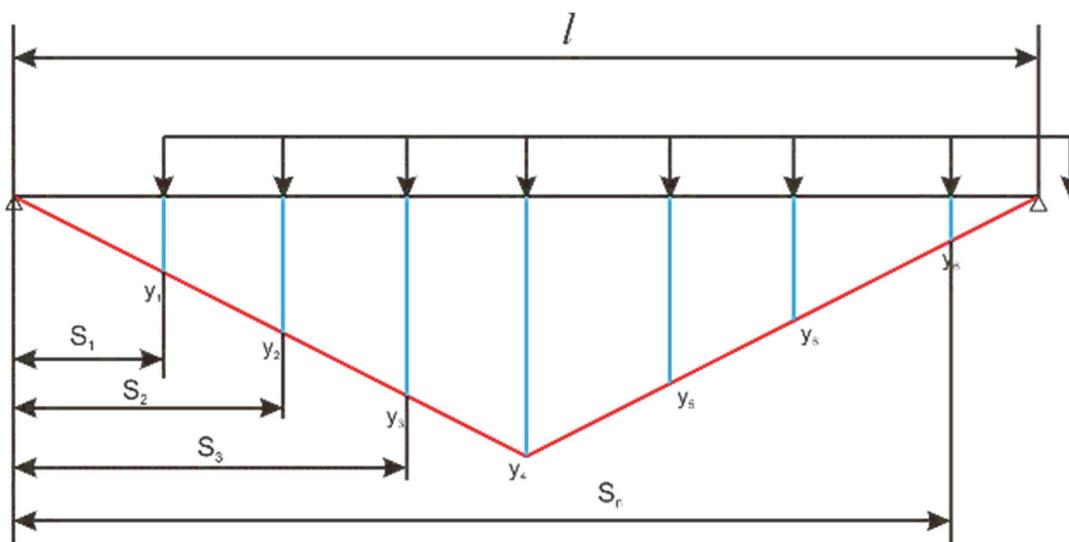


Рис. 1. Построение линии влияния с ординатами осей нагрузок
Figure 1. Construction of the influence line with the coordinates of the load axes

На первом этапе определяются ординаты осей эталонной нагрузки на линии влияния в каждой точке пролета с заданным шагом расчета:

¹ Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022614890. Аналитическая модель определения параметров напряженно-деформированного состояния в пролетных строениях автодорожных мостов от сверхнормативных нагрузок РВСН / Луговцев Е.А., Шевчук А.Б., Герасименя В.П., Уталиев К.Н., Непомнящих А.В.; заявитель и правообладатель ФГКБОУВО «ВУНЦ СВ «ОБА ВС РФ»; заявл. 21.03.2022; опублик. 28.03.2022.

$$Y_i = 0,01abs\left(\frac{abs(S_i - 0,5l)}{2} \frac{l}{4}\right), \quad (1)$$

где Y_i – ордината i -й оси эталонной нагрузки; S_i – расстояние от исходной опоры до i -й оси эталонной нагрузки; l – длина пролета.

На втором этапе определяется изгибающий момент от эталонной нагрузки при каждом изменении ее положения в соответствии с заданным шагом расчета и выбирается положение, при котором изгибающий момент от эталонной нагрузки будет максимальным:

$$M_{\max} = \sum_{i=1}^n Y_i P_i \rightarrow \max, \quad (2)$$

где P_i – нагрузка на i -ю ось эталонной нагрузки.

Выбранное положение эталонной нагрузки и будет являться невыгодным, при котором изгибающий момент, а соответственно и прогиб пролетного строения от эталонной нагрузки, будет максимальным.

Для реализации указанного способа определения невыгодного положения и расчета при этом изгибающего момента от эталонной нагрузки разработана и опубликована программа для быстрого его использования (рис. 2)².

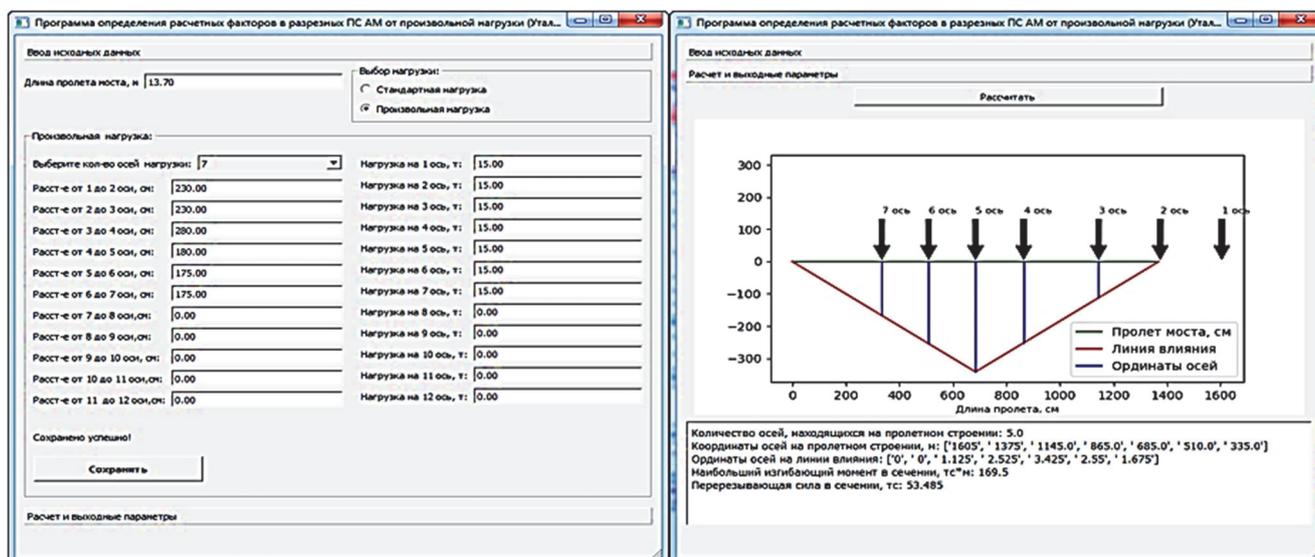


Рис. 2. Интерфейс программы
Figure 2. Program interface

Для подтверждения достоверности результатов расчета указанной программой проведен модельный эксперимент в программно-расчетном комплексе Midas Civil 2022 (сертификат соответствия RA.KR.AB86.H01197), основанном на методе конечных элементов с использованием пространственной модели пролетного строения аналогичной длины, которая представлена в виде совокупности стержневых элементов, имеющих общие точки – узлы (рис. 3).

Модель пролетного строения загружалась аналогичной эталонной нагрузкой.

В результате проведенных расчетов определено, что изгибающий момент от эталонной нагрузки, полученный в программно-расчетном комплексе Midas Civil 2022 (рис. 4), соответствует результатам расчета изгибающего момента разработанной программой, сходимость значений составила 91 %.

² Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022669763. Программа определения расчетных факторов в разрезных пролетных строениях автодорожных мостов от произвольной подвижной нагрузки / Уталев К.Н.; заявитель и правообладатель ФГКВУВО «ВУНЦ СВ «ОВА ВС РФ»; заявл. 14.10.2022; опубл. 25.10.2022.

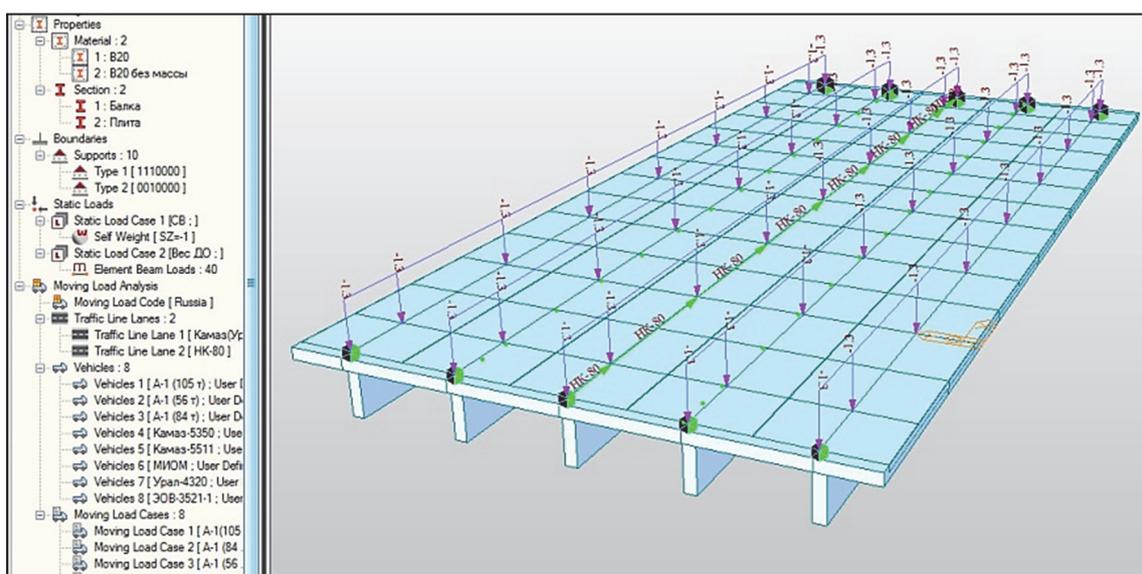


Рис. 3. Пространственная модель пролетного строения
Figure 3. Spatial model of the superstructure

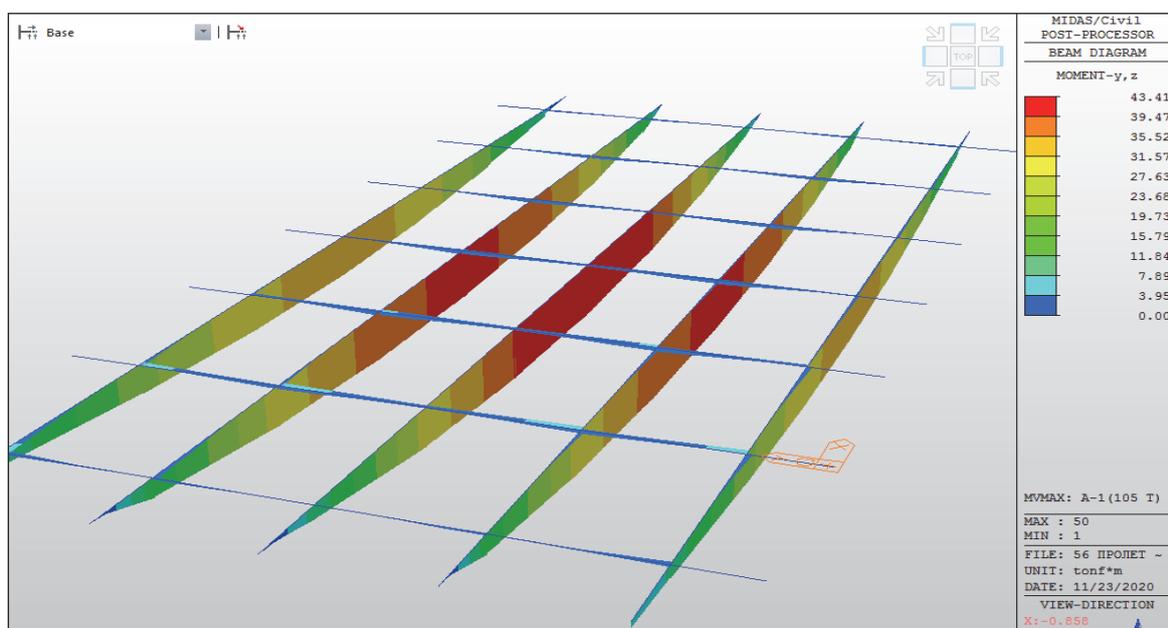


Рис. 4. Результаты расчета изгибающего момента в ППК Midas Civil
Figure 4. Results of the bending moment calculation in the Midas Civil

2. Прогиб f в середине пролетного строения, рассчитываемый с использованием его строгой зависимости от величины пролетов l и тангенса угла наклона исходных опорных сечений от воздействия пропускаемых нагрузок, разработанной одним из авторов в [10], предлагается определять с учетом коэффициента угла поворота δ

$$f_{\max} = \frac{l}{\pi} \cdot \frac{\tan \theta}{\delta}, \quad (3)$$

где f – прогиб пролетного строения в середине пролета, м; θ – угол наклона опорного сечения от пропускаемого транспортного средства; l – длина пролетного строения моста, м; δ – коэффициент угла поворота.

Его численное значение получено путем сопоставления эпюр углов поворота разрезных пролетов с соответствующими эпюрами углов поворота в неразрезных многопролетных строениях при их шарнирном опирании на опоры без защемления на них в программно-расчетном комплексе ЭСПРИ от LIRA GROUP³.

Сопоставим эпюры углов поворота в краях пролета для разрезного пролетного строения с пролетами 24, 33, 42 м и неразрезного в краях первого (крайнего) и второго (среднего) пролетов с соответствующими пролетами (рис. 5).

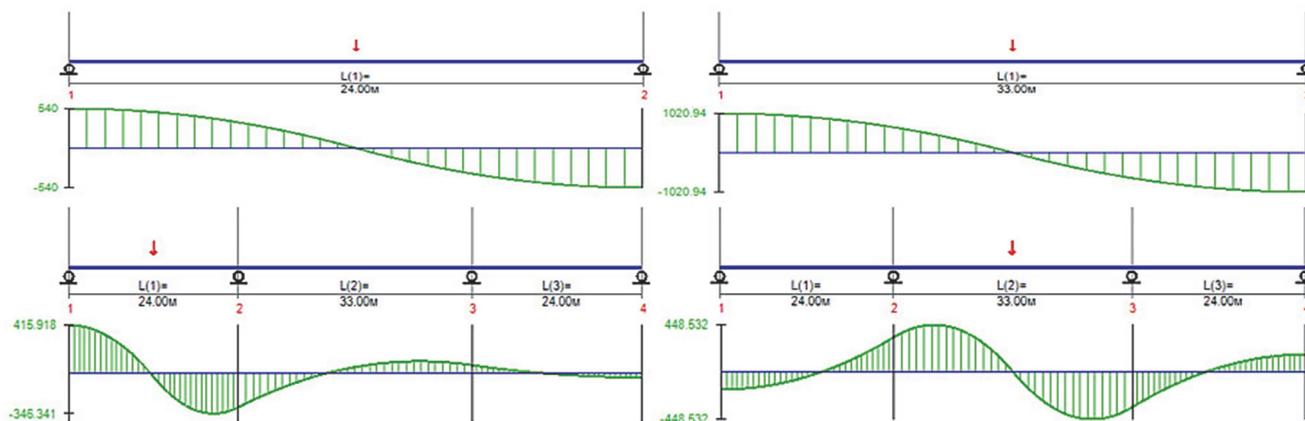


Рис. 5. Эпюры углов поворота в разрезных и неразрезных пролетных строениях
Figure 5. Plots of rotation angles in split and continuous superstructures

Результаты сравнения эпюр углов поворота в краях пролета позволили получить численные значения коэффициента угла поворота (таблица).

Значения максимальных ординат углов поворота и коэффициента угла поворота

| Исследуемый фактор (схема моста) | Пролет, м | Ордината эпюры углов поворота | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--------------|------------------------------------|--------------------------------|------------|------|-------------|-----------|------------|------|-------------|------------|------------|------|-------------|------|------|
| | | Разрезное пролетное строение | Неразрезные пролетные строения | | | | | | | | | | | | | |
| | | | 3 пролета | | | | 4 пролета | | | | 5 пролетов | | | | | |
| | | | 1-й | | 2-й | | 1-й | | 2-й | | 1-й | | 2-й | | 3-й | |
| Левый край | | Правый край | | Левый край | | Правый край | | Левый край | | Правый край | | Левый край | | Правый край | | |
| Ордината угла поворота, Рад (24 + 33 ... + 24) | 24 | 540 | 415 | 291 | | | 416 | 293 | | | 416 | 293 | | | | |
| | 33 | 1020 | | | 333 | 333 | | | 340 | 362 | | | 341 | 364 | 370 | 370 |
| Коэффициент угла поворота δ (24 + 33 ... + 24) | 24 | 1 | 0,77 | 0,54 | 0,33 | 0,33 | 0,77 | 0,54 | 0,33 | 0,35 | 0,77 | 0,54 | 0,33 | 0,36 | 0,36 | 0,36 |
| | 33 | 1020 | 777 | 533 | | | 778 | 535 | | | 778 | 535 | | | | |
| Ордината угла поворота, Рад (24 + 33 ... + 24) | 24 | 1020 | 777 | 533 | | | 778 | 535 | | | 778 | 535 | | | | |
| | 33 | 1653 | | | 568 | 568 | | | 575 | 595 | | | 575 | 597 | 602 | 602 |
| Коэффициент угла поворота δ (24 + 33 ... + 24) | 24 | 1 | 0,76 | 0,52 | 0,34 | 0,34 | 0,76 | 0,52 | 0,35 | 0,36 | 0,76 | 0,52 | 0,35 | 0,36 | 0,36 | 0,36 |
| | 33 | 1653 | | | 568 | 568 | | | 575 | 595 | | | 575 | 597 | 602 | 602 |

³ ЭСПРИ. Электронный справочник инженера: учебное пособие. URL: <http://ru.midasuser.com/web/page.php?no=60> (дата обращения: 25.10.2022).

Values of the maximum ordinates of the rotation angles and the rotation angle coefficient

| The factor under study (bridge diagram) | Span, m | Ordinate of the plot of the rotation angles | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------------|---|----------------------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| | | Split super- structure | Continuous superstructures | | | | | | | | | | | | | |
| | | | 3 spans | | | | 4 spans | | | | 5 spans | | | | | |
| | | | First | | Second | | First | | Second | | First | | Second | | Third | |
| | | | Left edge | Right edge | Left edge | Right edge | Left edge | Right edge | Left edge | Right edge | Left edge | Right edge | Left edge | Right edge | Left edge | Right edge |
| Ordinate of the angle of rotation, Rad (24 + 33 ... + 24) | 24 | 540 | 415 | 291 | | | 416 | 293 | | | 416 | 293 | | | | |
| | 33 | 1020 | | | 333 | 333 | | | 340 | 362 | | | 341 | 364 | 370 | 370 |
| Rotation angle coefficient δ (24 + 33 ... + 24) | 24 | 1 | 0,77 | 0,54 | 0,33 | 0,33 | 0,77 | 0,54 | 0,33 | 0,35 | 0,77 | 0,54 | 0,33 | 0,36 | 0,36 | 0,36 |
| Ordinate of the angle of rotation, Rad (24 + 33 ... + 24) | 24 | 1020 | 777 | 533 | | | 778 | 535 | | | 778 | 535 | | | | |
| | 33 | 1653 | | | 568 | 568 | | | 575 | 595 | | | 575 | 597 | 602 | 602 |
| Rotation angle coefficient δ (24 + 33 ... + 24) | 24 | 1 | 0,76 | 0,52 | 0,34 | 0,34 | 0,76 | 0,52 | 0,35 | 0,36 | 0,76 | 0,52 | 0,35 | 0,36 | 0,36 | 0,36 |

Таким образом, значение коэффициента угла поворота δ с погрешностью не более 9 % принимаем:

- для разрезных пролетных строений – 1;
- для левого края неразрезных пролетных строений на одной опоре (первый и последний пролет) – 0,77;
- для правого края неразрезных пролетных строений на одной опоре (первый и последний пролет) – 0,54;
- для неразрезных пролетных строений на двух опорах – 0,36.

Разработанное программное обеспечение будет использовано в составе модернизированной системы экспресс-оценки грузоподъемности автодорожных мостов, разрабатываемой на основе системы измерений СИ-ППМ [15] с добавлением технических устройств, повышающих возможность оперативной оценки грузоподъемности автодорожных мостов.

Экспериментальные подтверждения теоретических исследований

Для подтверждения достоверности получаемого прогиба в середине пролетного строения от угла наклона исходного опорного сечения с учетом полученного коэффициента проведен эксперимент на неразрезном металлическом автодорожном путепроводе через МЖД на км. 8 + 783 на обходе Калуги (участок Анненки – Жерело) со схемой моста: 62 + 69 + 69 + 52 + 50 (рис. 6).

Каждое пролетное строение загружалось испытательной нагрузкой, представляющей собой колонну четырехосных груженых автомобильных самосвалов фирм Scania P8X400 и Volvo FM-TRUCK 8x4 по 45 т каждый (рис. 7).



Рис. 6. Путепровод через МЖД на км. 8 + 783 на обходе Калуги (фото Е.А. Луговцева)

Figure 6. Overpass through the Moscow Railway at km. 8 + 783 on the bypass of Kaluga (photo by E.A. Lugovtsev)

Угол наклона опорного сечения пролетного строения измерялся с использованием инклинометра ИН-ДЗ 720 (рис. 8).

Прогиб в середине пролетного строения измерялся с использованием прогибомеров ПСК-МГ4, установленных в подмостовом пространстве (рис. 9).



Рис. 7. Испытательная нагрузка (фото Е.А. Луговцева)
Figure 7. Test load (photo by E.A. Lugovtsev)

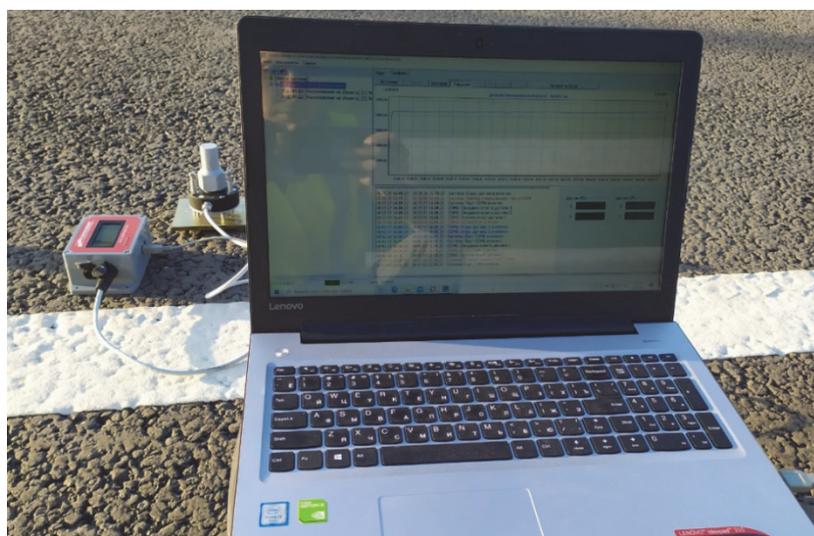


Рис. 8. Инклинометр ИН-ДЗ 720 с программным обеспечением (фото К.Н. Уталиева)
Figure 8. Inclinometer IN-D3 720 with software (photo by K.N. Utaliev)



Рис. 9. Прогибомеры ПСК-МГ4 (фото Е.А. Луговцева)
Figure 9. Deflection meters of PSK-MG4 (photo by E.A. Lugovtsev)

В результате проведенного натурального эксперимента установлено, что прогиб в середине неразрезных пролетных строений, полученный через угол наклона исходного опорного сечения, с учетом коэффициента угла поворота соответствует прогибу в середине пролетного строения, измеренного с использованием прогибомеров ПСК-МГ4, сходимость значений составила 92 %.

Представленные теоретические предпосылки позволили провести усовершенствование программы⁴, заключающееся в том, что измерение углов поворота опорного сечения и последующий расчет жесткости пролетного строения с учетом его фактического эксплуатационного состояния, производится принимая во внимание коэффициент угла поворота и выполняется только один раз при установке эталонной нагрузки в самое невыгодное положение, определяемое автоматически с помощью программы.

При этом путем сопоставления полученного прогиба в середине пролетного строения, изгибающих моментов от эталонной нагрузки и реального тяжеловесного транспортного средства рассчитывается прогиб, а также максимальные значения изгибающего момента и поперечной силы от собственного веса пролетного строения.

Затем от совместного действия тяжеловесного транспортного средства и собственного веса пролетного строения вычисляются напряжения в кромках балок пролетного строения и производится их сравнение с возможными значениями.

Расчетные сопротивления материала пролетного строения определяются по СП 35.13330.2011⁵. Допустимые значения поперечной силы для железобетонных пролетных строений определяются по ОДМ 218.4.025–2016⁶.

Если условия прочности хотя бы по одному предельному состоянию не выполняются, то программное обеспечение сообщит о невозможности пропуска тяжеловесного транспортного средства.

Заключение

Разработанное программное обеспечение для оперативного определения возможности безопасного пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостовым сооружениям с учетом их фактического эксплуатационного состояния реализовано с использованием персонального компьютера.

Программное обеспечение обеспечивает оценку возможности пропуска тяжеловесных транспортных средств с любыми по длине пролетами разрезных и неразрезных систем, но только по условиям прочности пролетных строений автодорожных мостов, с учетом их фактического эксплуатационного состояния, позволяя при этом безопасно использовать любую подвижную нагрузку в виде эталонной.

Список литературы

1. Романов Д.А., Корныльев Е.Н. Особенности пропуска сверхнормативной тяжеловесной нагрузки по автодорожным мостам Северо-Западного региона России // Актуальные проблемы безопасности дорожного движения: материалы 71-й Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Санкт-Петербург, 4–6 апреля 2018 года. СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. 2018. С. 12–16.
2. Аверченко Г.А., Кирьян И.В. Выбор маршрута и пропуск сверхнормативных нагрузок по автодорожным мостам // StudNet. 2020. Т. 3. № 2. С. 392–401.
3. Белый А.А., Андрушко С.Б. Пути повышения надежности эксплуатации железобетонных мостов для пропуска сверхнормативной нагрузки // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2018. Т. 15. № 1. С. 17–29.
4. Андрушко С.Б., Золотарев А.В. Теоретические основы обеспечения надежности пропуска сверхнормативной нагрузки по железобетонным мостам // Вестник Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А.В. Хрулева. 2017. № 4 (12). С. 110–118.

⁴ Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022614890. Аналитическая модель определения параметров напряженно-деформированного состояния в пролетных строениях автодорожных мостов от сверхнормативных нагрузок РВСН / Луговцев Е.А., Шевчук А.Б., Герасименя В.П., Уталиев К.Н., Непомнящих А.В.; заявитель и правообладатель ФГКВООУВО «ВУНЦ СВ «ОВА ВС РФ»; заявл. 21.03.2022; опублик. 28.03.2022.

⁵ СП35.13330.2011. Мосты и трубы Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84. М.: Министерство регионального развития Российской Федерации, 2011. 341 с.

⁶ ОДМ 218.4.025–2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Общая часть. М.: РОСАВТОДОР, 2016. 102 с.

5. Дормидонтова Т.В., Варданыан Т.М. Оценка технического состояния мостовых сооружений // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство. Самара: СГТУ, 2018. С. 199–203.
6. Курлянд В.Г., Курлянд В.В. Грузоподъемность железобетонных сборных пролетных строений автодорожных мостов с ненапрягаемой арматурой // Транспортное строительство. 2021. № 4. С. 25–29.
7. Нигаматова О.И., Смердов Д.Н. К вопросу оценки технического состояния автодорожных мостовых сооружений // Инновационный транспорт. 2021. № 4 (10). С. 31–36.
8. Нигметов Г.М., Акатьев В.А., Нигметов Т.Г. Диагностика и мониторинг технического состояния и грузоподъемности мостов с применением метода динамико-геофизических испытаний // Российские и зарубежные технологии проектирования и строительства мостовых сооружений: сборник докладов IV Международной научно-практической конференции. М.: Международная ассоциация фундаментостроителей, 2021. С. 145–147.
9. Саламахин П.М., Луговцев Е.А. Обоснование необходимости и способа модернизации программного обеспечения измерительного комплекса для оценки грузоподъемности балочных пролетных строений автодорожных мостов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 5–12. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-5-13>
10. Саламахин П.М., Луговцев Е.А. Способ быстрого определения возможности пропуска сверхтяжелых транспортных средств по автодорожным балочным мостам // Наука и техника в дорожной отрасли. 2020. № 3. С. 28–31.
11. Kang J., Chen B. Comprehensive technical condition evaluation of bridge based on Grey fuzzy theory. Shandong: Yantai University. 2010. Vol. 1. Pp. 200–204.
12. Lee Y.J., Song J., Lim H.W., Cardoni P. Post-hazard flow capacity of bridge transportation network considering structural deterioration of bridges // Structure & Infrastructure Engineering: Maintenance, Life-cycle Design & Performance. 2011. Vol. 1. No. 7–8. Pp. 509–521.
13. Луговцев Е.А. Методы экспресс-оценки технического состояния автодорожных мостов по безотказности при пропуске сверхтяжелых нагрузок через водные преграды // Вопросы оборонной техники. Серия 16. Технические средства противодействия терроризму. 2021. № 7–8 (157–158). С. 63–69.
14. Луговцев Е.А. Обоснование разработки и применения программ экспресс-оценки автодорожных мостов при пропуске по ним тяжеловесных транспортных средств // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 4. С. 315–323. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-315-323>
15. Луговцев Е.А., Ерофеев М.Н. Опыт применения измерительного комплекса «Система измерений для проверки постоянных мостов» для определения возможности пропуска сверхтяжелых нагрузок // Транспортные сооружения. 2019. Т. 6. № 3. С. 1–13. <http://doi.org/10.15862/19SATS319>

References

1. Romanov D.A., Kornyliev E.N. Features of the passage of excess heavy load on road bridges of the North-Western region of Russia. *Actual Problems of Road Safety: Materials of the 71st All-Russian Scientific and Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists, St. Petersburg, April 4–6, 2018*. St. Petersburg: Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering; 2018. p. 12–16. (In Russ.)
2. Averchenko G.A., Kiryan I.V. Choosing a route and skipping excess loads on road bridges. *StudNet*. 2020;3(2): 392–401. (In Russ.)
3. Bely A.A., Andrushko S.B. Reliability increase techniques of operating reinforced concrete bridges for excessive loading transfer. *Proceedings of Petersburg Transport University*. 2018;15(1):17–29. (In Russ.)
4. Andrushko S.B., Zolotarev A.V. Theoretical foundations of ensuring the reliability of passing excess load on reinforced concrete bridges. *Bulletin of the Military Academy of Logistics named after Army General A.V. Khrulev*. 2017;(4):110–118. (In Russ.)
5. Dormidontova T.V., Vardanyan T.M. Assessment of the technical condition of bridge structures. *Tradicii i Innovacii v Stroitel'stve i Arhitekture. Stroitel'stvo*. Samara; 2018. p. 199–203. (In Russ.)
6. Kurland V.G., Kurland V.V. Load capacity of reinforced concrete prefabricated superstructures of road bridges with non-stressed reinforcement. *Transport Construction*. 2021;(4):25–29. (In Russ.)
7. Nigmatova O.I., Smerdov D.N. On evaluation of the technical state of highway bridge structures. *Innovative Transport*. 2021;(4):31–36. (In Russ.)
8. Nigmatov G.M., Akatiev V.A., Nigmatov T.G. Diagnostics and monitoring of the technical condition and load capacity of bridges using the method of dynamic and geophysical tests. *Russian and Foreign Technologies for the Design and Construction of Bridge Structures: Collection of Reports of the IV International Scientific and Practical Conference*. Moscow: International Association of Foundation Builders; 2021. p. 145–147. (In Russ.)

9. Salamakhin P.M., Lugovtsev E.A. Substantiation of the necessity and method of modernization of the software of the measuring complex for assessing the load capacity of girder superstructures of road bridges. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):5–12. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-5-13>
10. Salamakhin P.M., Lugovtsev E.A. A method for quickly determining the possibility of passing super-heavy vehicles on road girder bridges. *Science and Technology in the Road Industry*. 2020;(3):28–31. (In Russ.)
11. Kang J., Chen B. *Comprehensive technical condition evaluation of bridge based on Grey fuzzy theory* (vol. 1, p. 200–204). Shandong: Yantai University; 2010.
12. Lee Y.J. Post-hazard flow capacity of bridge transportation network considering structural deterioration of bridges. *Structure & Infrastructure Engineering: Maintenance, Life-cycle Design & Performance*. 2011;1(7–8):509–521.
13. Lugovtsev E.A. Methods of express assessment of the technical condition of road bridges for reliability when passing superheavy loads through water barriers. *Questions of Defense Technology. Series 16. Technical Means of Countering Terrorism*. 2021;(7–8):63–69. (In Russ.)
14. Lugovtsev E.A. Justification for the development and application of express assessment programs for road bridges when heavy vehicles pass through them. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Building*. 2021;17(4):315–323. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-315-323>
15. Lugovtsev E.A., Erofeev M.N. Experience of using the measuring complex “Measurement system for checking permanent bridges” to determine the possibility of passing superheavy loads. *Transport Facilities*. 2019;6(3):1–13. (In Russ.) <http://doi.org/10.15862/19SAT319>

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-46-55
EDN: DURVQB
УДК 624.046.5

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Оценка индекса надежности стальных ферм по критерию жесткости при интервальной неопределенности данных

С.А. Соловьев^{ID}, А.Э. Иньков^{ID}, А.А. Соловьева^{ID}

Вологодский государственный университет, Вологда, Российская Федерация
✉ inkovaie@vogu35.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 27 декабря 2022 г.
Доработана: 18 февраля 2023 г.
Принята к публикации: 22 февраля 2023 г.

Для цитирования

Соловьев С.А., Иньков А.Э., Соловьева А.А. Оценка индекса надежности стальных ферм по критерию жесткости при интервальной неопределенности данных // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 46–55. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-46-55>

Аннотация. Представлен новый подход к оценке индекса надежности стальных ферм по критерию жесткости с учетом неопределенности случайных величин, выраженной в интервальной форме. Классические вероятностно-статистические методы анализа надежности требуют выбора и обоснования законов распределения случайных величин и их параметров. Субъективное принятие статистических гипотез может привести к большим ошибкам в анализе надежности строительных конструкций. В исследовании представляются случайные величины в виде интервалов, которые характеризуют границы их изменчивости. Такие интервалы могут быть получены как допуски в рамках технической документации, по опыту строительных работ или путем анализа данных. Показана возможность использования неравенства Высочанского – Петунина для получения границ изменчивости случайной величины без гипотезы о конкретном распределении вероятностей. Анализ надежности стержневых систем усложняется за счет неопределенности данных в каждом элементе системы. Для инженерного решения этой проблемы представлен аналитический подход к задаче оптимизации, на основе которой вычисляется индекс надежности. Получение индекса надежности фермы позволяет в количественной форме сравнить несколько проектных решений ферм по критерию безопасности эксплуатации.

Ключевые слова: расчет надежности, стальные конструкции, неравенство Высочанского – Петунина, вероятностное проектирование, модель предельного состояния, вероятность безотказной работы

Соловьев Сергей Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства, Вологодский государственный университет, Российская Федерация, 160000, Вологда, ул. Ленина, д. 15; ORCID: 0000-0001-7083-7963, Scopus Author ID: 57215081781, eLIBRARY SPIN-код: 4738-8927; solovevs@vogu35.ru

Иньков Александр Эдуардович, аспирант, ассистент кафедры промышленного и гражданского строительства, Вологодский государственный университет, Российская Федерация, 160000, Вологда, ул. Ленина, д. 15; ORCID: 0000-0002-7034-8606, eLIBRARY SPIN-код: 7977-7778; inkovaie@vogu35.ru

Соловьева Анастасия Андреевна, аспирант, преподаватель кафедры промышленного и гражданского строительства, Вологодский государственный университет, Российская Федерация, 160000, Вологда, ул. Ленина, д. 15; ORCID: 0000-0002-5285-5882, Scopus Author ID: 57223210877, eLIBRARY SPIN-код: 5162-9279; soloveva@vogu35.ru

© Соловьев С.А., Иньков А.Э., Соловьева А.А., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Evaluation of a reliability index for steel trusses to the deflection criterion with interval uncertainty of data

Sergey A. Solovov^{ID}, Alexander E. Inkov^{ID}✉, Anastasia A. Soloveva^{ID}

Vologda State University, Vologda, Russia

✉ inkovaie@vogu35.ru

Article history

Received: December 27, 2022

Revised: February 18, 2023

Accepted: February 21, 2023

For citation

Solovov S.A., Inkov A.E., Soloveva A.A. Evaluation of a reliability index for steel trusses to the deflection criterion with interval uncertainty of data. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):46–55. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-46-55>

Abstract. The authors describe a new approach to evaluation the reliability index of steel trusses by the criterion of deflection considering the uncertainty of random variables expressed in the interval form. Classical probabilistic-statistical methods of structural reliability analysis require the choice and justification of the cumulative distribution functions for random variables and its parameters. Subjective acceptance of statistical hypotheses can lead to large errors in the structural reliability analysis. In this study, it is proposed to represent random variables in the interval form that characterize the boundaries of their variability. Such intervals can be obtained as tolerances by the technical documentation, can be based on the construction experience or can be got by data analyzing. The Vysochansky – Petunin inequality is used to obtain the limits of variability of a random variable without a hypothesis about a specific probability distribution function. The reliability analysis of bar-systems is complicated due to the uncertainty of the data in each element of the system. For the engineering solution of this problem, an analytical approach to the optimization problem is offered. The truss reliability index can be used to compare several design solutions in a quantitative form according to the criterion of operational safety.

Keywords: calculation of the reliability, steel structures, Vysochansky – Petunin inequality, probabilistic design, limit state model, failure probability

Введение

Ключевым при проектировании, строительстве, эксплуатации и сносе строительных конструкций является требование обеспечения надежности. В соответствии с ГОСТ 27751–2014 «Надежность строительных конструкций и оснований», надежность – способность строительного объекта осуществлять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации. Основным условием надежности строительных объектов является выполнение требований (критериев) для всех учитываемых предельных состояний при действии наиболее неблагоприятных сочетаний расчетных нагрузок в течение расчетного срока службы. Текущий подход к расчету строительных конструкций позволяет дать оценку надежности элемента здания или сооружения в формате «надежность обеспечена/надежность не обеспечена». Отсутствие выражения уровня надежности в количественной форме множество исследователей считают недостатком текущей концепции проектирования строительных конструкций. Так профессора О.В. Мкртычев и В.Д. Райзер в фундаментальной монографии по теории надежности строительных конструкций [1] отмечают, что «существующие методы проектирования не позволяют оценивать надежность конструкций и тем более проектировать их с заданным уровнем надежности... Сложившуюся ситуацию в нормировании правил расчета строительных конструкций можно охарактеризовать так: у проектировщика практически отсутствует информация, насколько успешно им решена задача нормального функционирования здания». Аналогичное мнение выражают профессор В.А. Клевцов и кандидат технических наук Д.В. Кузеванов [2]:

Sergey A. Solovov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Industrial and Civil Engineering Department, Vologda State University, 15 Lenina St, Vologda, 160000, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7083-7963, Scopus Author ID: 57215081781, eLIBRARY SPIN-code: 4738-8927; solovevsa@vogu35.ru

Alexander E. Inkov, postgraduate student, Assistant of the Department of Industrial and Civil Engineering, Vologda State University, 15 Lenina St, Vologda, 160000, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7034-8606, eLIBRARY SPIN-code: 7977-7778; inkovaie@vogu35.ru

Anastasia A. Solovieva, postgraduate student, lecturer of the Department of Industrial and Civil Engineering, Vologda State University, 15 Lenina St, Vologda, 160000, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5285-5882, Scopus Author ID: 57223210877, ELIBRARY SPIN-code: 5162-9279; solovevaaa@vogu35.ru

«Существующие на сегодняшний момент нормы носят предписывающий характер и не содержат ни количественных показателей безопасности строительного объекта, ни методов ее оценки. Надежность лишь декларируется, но количественного выражения не обретает». Развитие теории надежности строительных конструкций и внедрение полных вероятностных расчетов в нормативную базу проектирования является актуальной научной задачей.

Актуальность вопроса подтверждается также исследованиями ведущих зарубежных школ анализа надежности строительных конструкций. В [3] отмечается, что развитие анализа напряженно-деформированного состояния строительных конструкций на базе конечноэлементных моделей делает возможным создание эффективной модели здания или сооружения, но не позволяет в полной мере получить согласие с «реальностью» вследствие эпистемологической и алеаторной неопределенностей случайных величин (нагрузок, прочностей, геометрии и т. д.).

Для вероятностного анализа надежности строительных конструкций используются различные модели случайных величин. Наиболее распространено использование некоторой функции распределения вероятностей: такой подход дает точные результаты и под него разработан широкий инструментарий классической теории вероятностей и математической статистики. Как отмечено в [4], «трудно оценить точные значения параметров для точного определения распределения вероятностей из-за ограниченной информации. Как только статистическая гипотеза о распределении вероятностей не выполняется, анализ надежности становится недостоверным и бессмысленным». Для восполнения этого недостатка разработаны новые модели случайных величин – p -блоки [5], позволяющие использовать интервальные оценки параметров функций распределения, интервальные модели [6], которые представляют случайные величины в виде границ их изменчивости, и др.

Большой вклад в развитие интервальных моделей внесли Я. Бен-Хаим и И. Элишаков в фундаментальной монографии *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics* [7], где приведен ряд задач анализа и проектирования в прикладной механике, основанных на использовании выпуклых множеств для моделирования неопределенных функций или геометрических несовершенств.

В данной работе исследуется подход к оценке надежности стальных плоских ферм при интервальной неопределенности случайных величин. В качестве критерия предельного состояния принят критерий жесткости (прогиба). Критерий жесткости, или прогиба, является одним из критериев предельных состояний, который оказывает влияние на принятое техническое проектное решение [8]. Также критерий жесткости необходим для полного вероятностного анализа зданий и сооружений и представления их в виде структурной системы.

Методы и материалы

Математическую модель предельного состояния для расчета надежности плоской шарнирно-стержневой системы по критерию жесткости (прогиба) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{\Delta}(\tilde{P}) \leq \Delta_{\text{пр}}, \quad (1)$$

где $\tilde{\Delta}(\tilde{P})$ – максимальный прогиб от эксплуатационной узловой нагрузки (случайная величина); $\Delta_{\text{пр}}$ – предельный допустимый прогиб, установленный в соответствии с СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия» или исходя из технологических или иных требований.

Для расчета перемещений плоских стержневых систем используется известная формула Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F}{EJ} dx + \sum \int \frac{\bar{N}_1 N_F}{EA} dx + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_F}{GA} dx, \quad (2)$$

где $\bar{M}_1 M_F$, $\bar{N}_1 N_F$, $\bar{Q}_1 Q_F$ – произведения «единичных» эпюр на эпюры от внешней нагрузки (для изгибающих моментов M , продольных N и поперечных сил Q); E – модуль упругости материала рассматриваемого участка; J – момент инерции стержня на рассматриваемом участке; A – площадь поперечного сечения стержня на рассматриваемом участке; G – модуль сдвига материала стержня на рассматриваемом участке; η – коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений.

Поскольку в статически определимой ферме при приложении узловой нагрузки возникают только продольные усилия в стержнях, формулу Максвелла – Мора для расчета прогиба таких ферм [9] можно записать в виде

$$\Delta = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{1,i} N_{F,i} l_i}{A_i}, \quad (3)$$

где $\bar{N}_{1,i}$ – усилие в i -м стержне фермы от единичной нагрузки, приложенной в узле, перемещение которого анализируется; $N_{F,i}$ – усилие в i -м стержне фермы от внешней нагрузки; l_i – длина i -го стержня фермы; n – общее число стержней фермы.

Для более точного подхода к анализу надежности можно учитывать дополнительный прогиб, возникающий вследствие влияния изгибающих моментов и поперечных сил в стержнях от нагрузки в виде собственного веса. Данную характеристику Δ_{sw} можно принять малоизменчивой и вычислить в различных программно-вычислительных комплексах.

Тогда математическую модель предельного состояния для анализа надежности фермы по критерию прогиба можно записать в виде

$$\frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{1,i} N_{F,i} (\psi_i \tilde{P}) l_i}{A_i} \leq \Delta_{пр} - \Delta_{sw}. \quad (4)$$

Усилие в i -м стержне фермы от внешней нагрузки $N_{F,i}(\tilde{P})$ во многих задачах может быть записано для каждого стержня в виде $\psi_i \tilde{P}$, где ψ_i – коэффициент, зависящий от геометрических параметров (размеров) фермы [10].

При проектировании следует учитывать изменчивость характеристик поперечного сечения стержней вследствие допусков на их изготовление. Например, по ГОСТ 30245–2015 «Профили стальные гнутые замкнутые сварные квадратные и прямоугольные для строительных конструкций», высота (ширина) профиля 100×100×5 может изменяться в пределах [99; 101] мм. В соответствии с ГОСТ 19903–2015 «Прокат листовой горячекатаный. Сортамент» для профиля размером 100×100×5 толщина стенки может иметь погрешность ±0,40 мм. При допустимых отклонениях можно получить интервал возможных значений момента сопротивления сечения $W = [52,24; 62,48]$ см³ при среднем значении $W = 57,32$ см³. Если принять нормальное распределение вероятностей для момента сопротивления сечения, а границы допустимого интервала считать установленными по правилу трех сигм, то максимальное среднеквадратическое отклонение для данного профиля составит $S_W = 1,71$ см³. Коэффициент вариации момента сопротивления сечения – 3 %. Для профиля 50×5 интервал значений составит [11,33; 13,26] см³. Предельный коэффициент вариации – 2,6 %. Аналогично для площадей поперечных сечений: для сечения 50×5 интервал возможных площадей [8,26; 9,74] см², предельный коэффициент вариации – 2,78 %. Тем не менее предположение о коэффициенте вариации является лишь статистической гипотезой. В данном исследовании предлагается анализировать надежность фермы только на основании данных о границах изменчивости случайной величины, что является техническими допусками для размеров поперечного сечения стержней.

Модуль упругости стали на первой стадии анализа надежности примем детерминированной (постоянной) величиной. Согласно Г. Шпете [11], коэффициент вариации модуля упругости стали находится в пределах от 0,02 до 0,06. По данным экспериментальных исследований [12], коэффициент вариации модуля упругости стали зависит в том числе от метода его измерения: при измерении деформаций экстензометром получен коэффициент вариации 2,4 %, при измерении деформаций тензорезистором – 4,7 %. На основе рассмотренного алгоритма будет несложно построить алгоритм анализа надежности и с учетом его изменчивости.

Правило трех сигм применимо при нормальном законе распределения случайной величины. При неполной статистической информации, что нередко встречается в практических задачах анализа надежности, трудно установить очевидную принадлежность генеральной совокупности данных к тому или иному виду распределения вероятностей. Например, как отмечает профессор В.А. Адищев в [13]: «В настоящее время во многих работах публикуются экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что рас-

предела реально наблюдаемых случайных величин в подавляющем большинстве случаев отличны от нормального распределения. Да и в целом, по мнению многих исследователей, применение методов математической статистики некорректно, так как невозможно на практике с помощью реальных экспериментальных установок проверить достоверность полученных с их помощью результатов». В связи с этим для определения границ изменчивости случайной величины можно использовать неравенство Высочанского – Петунина, которое можно записать в следующем виде:

$$\Pr(|X - m_x| \geq \lambda S_x) = \frac{4}{9\lambda^2},$$

где λ – любое положительное число с условием $\lambda > \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Преимуществом такого подхода является то, что данное неравенство справедливо в том числе и для резко асимметричных распределений, тем самым устанавливая границы для множества значений случайной величины, попадающих в определенный интервал.

Классическое неравенство П.Л. Чебышёва имеет вид

$$\Pr(|X - m_x| \geq \lambda S_x) = \frac{1}{\lambda^2},$$

где λ – любое положительное число.

Из рис. 1 видно, что неравенство Высочанского – Петунина усиливает известное неравенство П.Л. Чебышёва. Доверительные границы интервала $[m_x - \lambda S_x; m_x + \lambda S]$ будут информативнее по неравенству Высочанского – Петунина, что достигается введением ограничения на функцию плотности распределения вероятности, которая должна быть одномодальной и иметь конечную дисперсию. Абсолютное большинство случайных величин в строительной практике можно считать подходящими под данное условие.

Границы изменчивости случайной величины можно получить следующим образом: аналитически (3) или графически (рис. 1) устанавливается значение параметра λ для принятой доверительной вероятности; границы случайной величины вычисляются по формуле $[\underline{x}; \bar{x}] = [m_x - \lambda S_x; m_x + \lambda S]$.

Параметр λ для границ изменчивости устанавливается исходя из требуемой обеспеченности. Так для обеспеченности 0,95 параметр по неравенству Высочанского – Петунина составит $\lambda = 3$, а по неравенству Чебышёва $\lambda = 4,5$. Определить параметр λ , исходя из обеспеченности, можно по рис. 1.

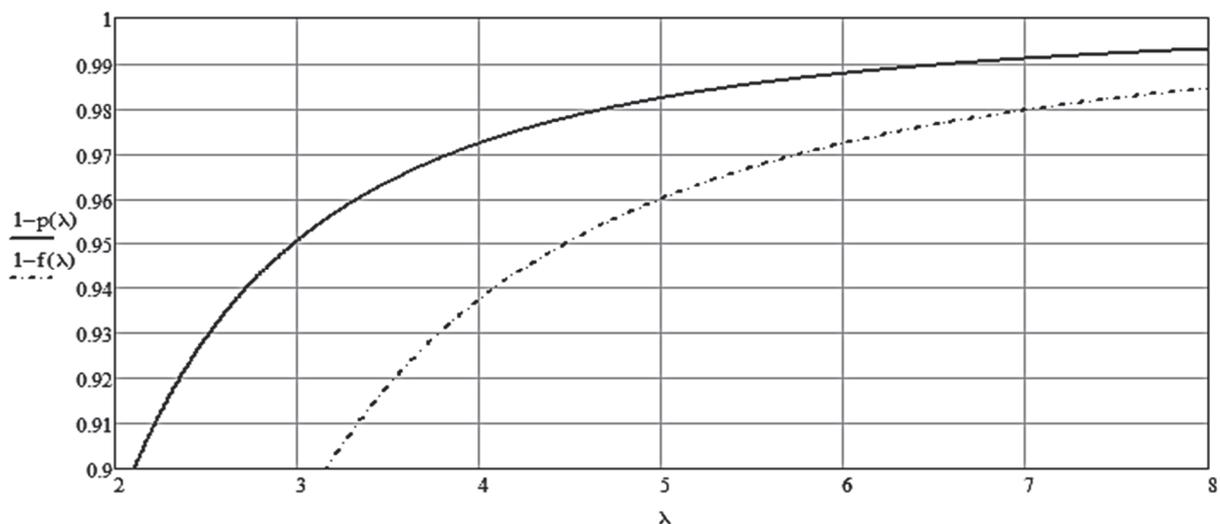


Рис. 1. Зависимость p – λ для неравенства Высочанского – Петунина и f – λ для неравенства Чебышёва
Figure 1. The dependence p – λ for Vysochansky – Petunin inequality and f – λ for Chebyshev's inequality

Математическую модель предельного состояния для анализа надежности фермы по критерию прогиба можно записать в виде

$$\frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{1,i} N_{F,i} (\psi_i \tilde{P}) l_i}{\tilde{A}_i} \leq \Delta_{\text{пр}} - \Delta_{sw}. \quad (5)$$

Функцию предельного состояния g на основе уравнения (5) можно записать в виде

$$g(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_{n+1}) = \Delta_{\text{пр}} - \Delta_{sw} - \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{1,i} N_{F,i} (\psi_i \tilde{x}_{n+1}) l_i}{\tilde{x}_i} \leq 0, \quad (6)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ – число стержней фермы; \tilde{x}_i – площадь поперечного сечения i -го стержня фермы (случайная величина); $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{P}$ – узловая нагрузка (случайная величина);

Каждая случайная величина в интервальной форме может быть представлена в виде

$$\tilde{x}_i \in [x_i^l; x_i^u], \quad (7)$$

где x_i^l – нижнее ($l = \text{lower}$) граничное значение случайной величины; x_i^u – верхнее ($u = \text{upper}$) граничное значение случайной величины.

Случайная величина \tilde{x}_i может быть нормализована [14] и представлена в виде

$$\tilde{x}_i = x_i^c + x_i^r \delta_i, \quad (8)$$

где $x_i^c = \frac{x_i^u + x_i^l}{2}$ – центр интервала, характеризующего случайную величину \tilde{x}_i ; $x_i^r = \frac{x_i^u - x_i^l}{2}$ – радиус интервала, характеризующего случайную величину \tilde{x}_i .

Тогда для функции предельного состояния g можно получить нормализованный вектор в виде $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Исходя из этого, можно получить нормализованную поверхность предельного состояния вида $g(\delta) = g(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Индекс надежности η может быть определен как минимальное расстояние от нормализованной поверхности разрушения $g(\delta)$ до начала координат C . Аналитически определение индекса надежности η можно выразить как

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \min \{ \|\delta\|_{\infty} \} \\ \text{s.t. } g(\delta) = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{minimize } \eta = \{ \max \{ |\delta_1|, |\delta_2|, \dots, |\delta_n| \} \}; \\ \text{s.t. } g(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 0, \end{array} \right. \quad (9)$$

где $\delta_i \in (-\infty, +\infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$, *s.t.* – subject to.

При двух случайных величинах можно получить графическую интерпретацию индекса надежности η . Если функция предельного состояния $g(\delta) = g(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ не пересекает площадь квадрата, образованного единичными координатами (рис. 2, а), то индекс надежности $\eta > 1$. Если функция пересекает площадь квадрата, образованного единичными координатами (рис. 2, в), то индекс надежности $\eta < 1$.

Поверхность отказа в случае анализа надежности фермы по критерию жесткости можно представить в виде

$$g = \Delta_{\text{пр}} - \Delta_{sw} - \frac{1}{E} \left[\frac{\bar{N}_{1,1} \psi_1 (P^c + P^r \delta_P) l_1}{A_1^c - A_1^r \delta_1} + \frac{\bar{N}_{1,2} \psi_2 (P^c + P^r \delta_P) l_2}{A_2^c - A_2^r \delta_2} + \dots + \frac{\bar{N}_{1,n} \psi_n (P^c + P^r \delta_P) l_n}{A_n^c - A_n^r \delta_n} \right] = 0. \quad (10)$$

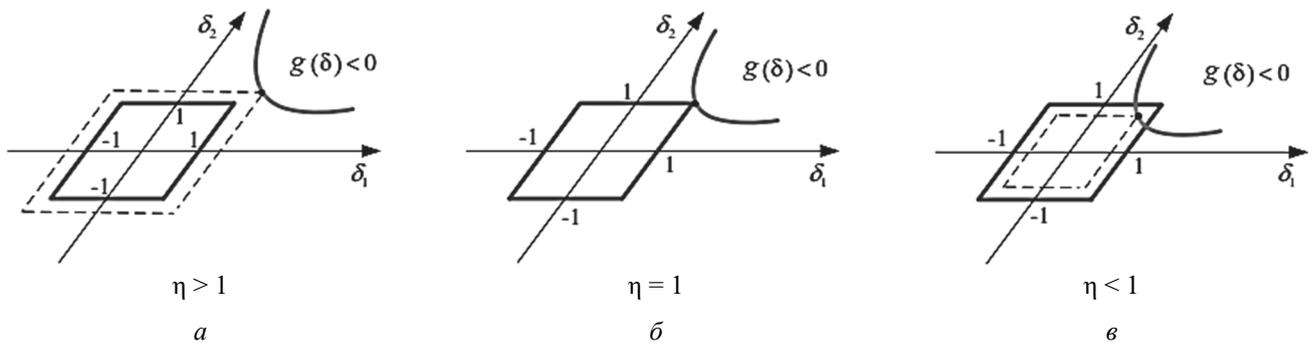


Рис. 2. Графическая интерпретация индекса надежности η [15]
Figure 2. Graphical interpretation of the reliability index η [15]

Если предполагаются элементы фермы из одного профиля, то слагаемые в (10) рационально объединить для снижения размерности задачи. Например, задача расчета надежности фермы, состоящей из четырех различных профилей ($\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4$) и со случайной узловой нагрузкой \tilde{P} , требует решения шестнадцати уравнений типа (10) с различными коэффициентами δ , которые могут быть сведены в таблицу (табл. 1).

Таблица 1 / Table 1

Коэффициенты δ для формирования уравнений в (10)
Coefficients δ for making equations by (10)

| | | | |
|--|---|---|--|
| $\delta_P = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ | $-\delta_P = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ | $\delta_P = -\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ | $-\delta_P = -\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ |
| $\delta_P = \delta_1 = \delta_2 = -\delta_3 = \delta_4$ | $-\delta_P = \delta_1 = -\delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ | $\delta_P = -\delta_1 = -\delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ | $-\delta_P = -\delta_1 = -\delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ |
| $\delta_P = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -\delta_4$ | $-\delta_P = \delta_1 = \delta_2 = -\delta_3 = \delta_4$ | $\delta_P = -\delta_1 = \delta_2 = -\delta_3 = \delta_4$ | $-\delta_P = -\delta_1 = \delta_2 = -\delta_3 = \delta_4$ |
| $\delta_P = \delta_1 = -\delta_2 = -\delta_3 = \delta_4$ | $-\delta_P = \delta_1 = -\delta_2 = -\delta_3 = \delta_4$ | $\delta_P = -\delta_1 = -\delta_2 = -\delta_3 = \delta_4$ | $-\delta_P = -\delta_1 = -\delta_2 = -\delta_3 = \delta_4$ |

Минимальный корень из всех возможных решений уравнения (10), по данным табл. 1, будет являться индексом надежности фермы η .

В качестве современных моделей области изменчивости случайных величин используются также эллипсоидные модели [16; 17] и модели многогранников [18; 19].

Результаты и обсуждение

Рассмотрим анализ надежности стальной фермы с расчетной схемой по рис. 3.

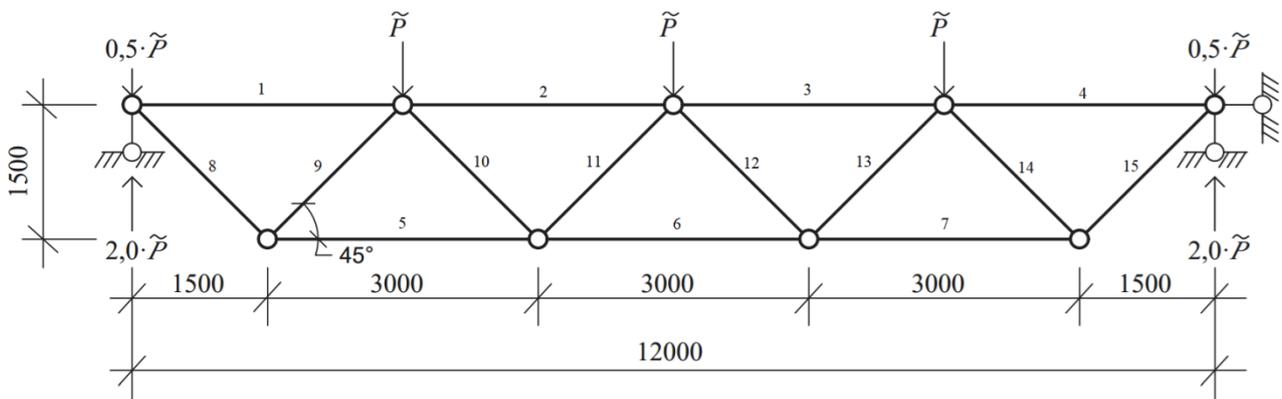


Рис. 3. Расчетная схема фермы со случайной нагрузкой
Figure 3. The truss design scheme with load as a random variable

Расчетные параметры фермы приведены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Расчетные параметры фермы
Design parameters for the truss

| № стержня / Bar No. | $\bar{N}_{1,i}$ | ψ_i | l_i , м/м | A_c , см ² /см ² | A_r , см ² /см ² |
|---------------------|-----------------|---------------|--------------|--|--|
| 1, 4 | -0,5 | -1,5 | 3 | 10,21 | 0,368 |
| 2, 3 | -1,5 | -3,5 | 3 | 10,21 | 0,368 |
| 5, 7 | 1 | 3 | 3 | 6,95 | 0,229 |
| 6 | 1,5 | 4 | 3 | 6,95 | 0,229 |
| 8, 15 | $1/\sqrt{2}$ | $3/\sqrt{2}$ | $3/\sqrt{2}$ | 5,34 | 0,166 |
| 9, 14 | $-1/\sqrt{2}$ | $-3/\sqrt{2}$ | $3/\sqrt{2}$ | 5,34 | 0,166 |
| 10, 13 | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ | $3/\sqrt{2}$ | 3,74 | 0,112 |
| 11, 12 | 0 | $-1/\sqrt{2}$ | $3/\sqrt{2}$ | 3,74 | 0,112 |

Примечание: модуль упругости стали – $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; параметры нагрузки – $P_c = 50$ кН, $P_r = 25$ кН; параметры прогибов – $\Delta_{пр} = 1/250 \cdot 12$ м = 48 мм; $\Delta_{св} = 2$ мм.

Note: elastic modulus of steel – $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa; load parameters – $P_c = 50$ kN, $P_r = 25$ kN; deflection parameters – $\Delta_{ult} = 1/250 \cdot 12$ m = 48 mm; $\Delta_{sw} = 2$ mm.

Подстановкой в (10) коэффициентов из табл. 1 и расчетных параметров из табл. 2 были получены значения решения, приведенные в табл. 3.

Таблица 3 / Table 3

Решения уравнений в (10)
Solutions of equations by (10)

| | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|
| Min = 1,052 | 1,262 | 1,118 | 1,19 |
| 1,09 | 1,166 | 1,21 | 1,099 |
| 1,06 | 1,22 | 1,157 | 1,15 |
| 1,181 | 1,166 | 1,253 | 1,06 |

Индекс надежности данной фермы по критерию прогиба $\eta = 1,052$.

Следует отметить, что при анализе надежности интервальным подходом также может присутствовать проблема инвариантности математической модели предельного состояния [20].

Можно сократить расчеты, вычисляя 2–3, а не 2^{n-1} коэффициентов δ для решения задачи, применяя две модернизации алгоритма, использующие свойства монотонных функций, описанные в [21]. Для этого необходимо записать функцию предельного состояния в нормализованном виде, например в виде формулы (10). После этого необходимо найти $\lambda = \min(\delta_i)$. Чтобы сделать это быстро, нужно решить уравнение, обнулив все δ , кроме одного, для получения функции вида $A_i + x_i^c \delta_i = 0$. Данное действие направлено на определение монотонности функции. Далее для всех членов уравнения, для которых $\partial M / \partial x_i > 0$, принять $\delta_i = -\delta$ и для $\partial M / \partial x_i < 0$ принять $\delta_i = \delta$. Полученное уравнение решается стандартными способами. Количество корней будет равно максимальной степени коэффициентов δ в уравнении.

Для комплексного анализа надежности следует также выполнить оценку индекса надежности по другим критериям работоспособности (прочность и устойчивость элементов, несущая способность узлов по различным критериям). После того, как будут получены индексы надежности по всем критериям предельного состояния для фермы, можно будет оценить надежность фермы как механической системы [22; 23].

Вопрос нормирования индекса надежности в Российской Федерации остается открытым. Отдельные рекомендации по его нормированию с экономической точки зрения приведены в [24].

Заключение

Представление случайных величин в виде границ их изменчивости снижает количество статистических гипотез для моделирования случайных величин, что повышает достоверность результатов в случае ограниченной статистической информации.

Разработанный подход позволяет получить количественную оценку уровня безопасности эксплуатации фермы по критерию жесткости, на основе которого можно сравнить по критерию надежности несколько проектных решений.

Список литературы / References

1. Mkrtychev O.V., Rajzer V.D. *Reliability theory in structural design*. Moscow: ASV Publ.; 2016. (In Russ.)
Мкртычев О.В., Райзер В.Д. Теория надежности в проектировании строительных конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2016. 908 с.
2. Klevtsov V.A., Kuzevanov D.V. Structural design issues using reliability theory. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and Reinforced Concrete]*. 2009;(2):9–13. (In Russ.)
Клевцов В.А., Кузеванов Д.В. Вопросы проектирования конструкций с использованием теории надежности // Бетон и железобетон. 2009. № 2. С. 9–13.
3. Faes M.G., Daub M., Marelli S., Patelli E., Beer M. Engineering analysis with probability boxes: a review on computational methods. *Structural Safety*. 2021;93:102092. <https://doi.org/0.1016/j.strusafe.2021.102092>
4. Huang H.Z., Wang Z.L., Li Y.F., Huang B., Xiao N.C., He L.P. A nonprobabilistic set model of structural reliability based on satisfaction degree of interval. *Mechanika*. 2011;17(1):85–92. <https://doi.org/10.5755/j01.mech.17.1.208>
5. Solovev S.A., Soloveva A.A. A research into the development of models of random variables as part of the structural reliability analysis performed in the absence of some statistical information. *Vestnik MGSU (Monthly Journal on Construction and Architecture)*. 2021;16(5):587–607. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.5.587-607>
Соловьева А.А., Соловьев С.А. Исследование развития моделей случайных величин в расчетах надежности строительных конструкций при неполной статистической информации // Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. № 5. С. 587–607. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.5.587-607>
6. Jiang C., Zheng J., Han X. Probability-interval hybrid uncertainty analysis for structures with both aleatory and epistemic uncertainties: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2018;57(6):2485–2502. <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1864-4>
7. Ben-Haim Y., Elishakoff I. *Convex models of uncertainty in applied*. Amsterdam: Elsevier; 1990.
8. Utkin V.S., Solovyov S.A. Calculation of the residual bearing capacity of reinforced concrete beams by the rigidity (deflection) criterion. *Magazine of Civil Engineering*. 2015;(4):45–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.5862/MCE.56.6>
Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба) // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 4 (56). С. 45–53.
9. Kirsanov M.N. Analytical calculation of deflection of a planar truss with a triple lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2021;102(2):10211. <https://doi.org/10.34910/MCE.102.11>
10. Soloveva A.A., Solovev S.A. Structural reliability analysis of steel truss elements on buckling using p-box approach. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2021;(1):45–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.2.153-167>
Соловьева А.А., Соловьев С.А. Расчет надежности элементов стальных ферм по критерию устойчивости с использованием р-блоков // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 1 (294). С. 45–53.
11. Shpete G. *Reliability of load-bearing structures*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1994. (In Russ.)
Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций / пер. с нем. О.О. Андреева. М.: Стройиздат, 1994. 288 с.
12. Motra H.B., Hildebrand J., Dimmig-Osburg A. Assessment of strain measurement techniques to characterise mechanical properties of structural steel. *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 2014;17(4):260–269. <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2014.07.006>
13. Adishchev V.V., Shmakov D.S. Method of constructing the membership function with “direct” processing of initial data. *Proceedings of the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)*. 2013;16(2):45–66. (In Russ.)
Адищев В.В., Шмаков Д.С. Метод построения функции принадлежности с «прямой» обработкой исходных данных // Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). 2013. Т. 16. № 2 (56). С. 45–66.
14. Xin T., Zhao J., Cui C., Duan Y. A non-probabilistic time-variant method for structural reliability analysis. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part O: Journal of Risk and Reliability*. 2020;234(5):664–675. <https://doi.org/10.1177/1748006X2092819>
15. Jiang C., Zhang Q.F., Han X., Qian Y.H. A non-probabilistic structural reliability analysis method based on a multidimensional parallelepiped convex model. *Acta Mechanica*. 2014;225(2):383–395. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0975-2>

16. Li K., Liu H. Structural reliability analysis by using non-probabilistic multi-cluster ellipsoidal model. *Entropy*. 2022;24(9):1209. <https://doi.org/10.3390/e24091209>
17. Hong L., Li H., Fu J., Li J., Peng K. Hybrid active learning method for non-probabilistic reliability analysis with multi-super-ellipsoidal model. *Reliability Engineering & System Safety*. 2022;222:108414. <https://doi.org/10.1016/j.res.s.2022.108414>
18. Cao L., Liu J., Xie L., Jiang C., Bi R. Non-probabilistic polygonal convex set model for structural uncertainty quantification. *Applied Mathematical Modelling*. 2021;89:504–518. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.025>
19. Wang L., Liu Y., Wang X., Qiu Z. Convexity-oriented reliability-based topology optimization (CRBTO) in the time domain using the equivalent static loads method. *Aerospace Science and Technology*. 2022;123:107490. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107490>
20. Qiao X., Song L., Liu P., Fang X. Invariance problem in structural non-probabilistic reliability index. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2021;35(11):4953–4961. <https://doi.org/10.1007/s12206-021-1014-1>
21. Chen X., Tang C.Y., Tsui C.P., Fan J. Modified scheme based on semi-analytic approach for computing non-probabilistic reliability index. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2010;23(2):115–123. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(10\)60013-4](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(10)60013-4)
22. Liu H., Xiao N.C. An efficient method for calculating system non-probabilistic reliability index. *Eksploatacja i Niezawodność*. 2021;23(3):498–504. <https://doi.org/10.17531/ein.2021.3.10>
23. Guo S.X., Lu Z.Z. A non-probabilistic robust reliability method for analysis and design optimization of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Applied Mathematical Modelling*. 2015;39(7):1985–2002. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.026>
24. Tang Z.C., Xia Y., Xue Q., Liu J. A non-probabilistic solution for uncertainty and sensitivity analysis on techno-economic assessments of biodiesel production with interval uncertainties. *Energies*. 2018;11(3):588. <https://doi.org/10.3390/en11030588>

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-56-63
EDN: DXBQYB
UDC 531.2

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Calculation of radially inhomogeneous ring loaded with normal and tangential loads

Vladimir I. Andreev 

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ asv@mgsu.ru

Article history

Received: November 19, 2022

Revised: January 17, 2023

Accepted: January 20, 2023

Abstract. The aim of the study is to solve the problem of the stress-strain state of a thin ring under radial and ring loads, factoring in the radial inhomogeneity of the ring. Also, the task is to compare the two calculation methods to the example of solving the problem of uneven load distribution along the outer surface of the ring with one-dimensional inhomogeneity. Analytical or numerical-analytical solutions are used in the two-dimensional plane problem of the theory of elasticity in polar coordinates for an inhomogeneous body. Most of these problems consider centrally symmetric circular bodies. As a rule, this is possible when all unknown functions depend on the radius. These tasks correspond with the majority of ring and cylindrical structures. Pipes are suitable for creating pipeline systems and civil engineering, they are used for gas pipelines, in heating networks and water supply systems. The key feature of the work lies in the consideration of uneven radial and ring loads distribution along the outer surface of the ring. Comparison of the calculation results obtained by two methods makes it possible to determine the stressed and deformed states with sufficient accuracy, an indicator of which is the obtaining of the ring stresses.

Keywords: thin ring, plane task, radial loads, ring loads, radial inhomogeneity, analytical methods, numerical-analytical methods

For citation

Andreev V.I. Calculation of radially inhomogeneous ring loaded with normal and tangential loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1): 56–63. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-56-63>

Расчет радиально неоднородного кольца, нагруженного нормальными и касательными нагрузками

В.И. Андреев 

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ asv@mgsu.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 19 ноября 2022 г.

Доработана: 17 января 2023 г.

Принята к публикации: 20 января 2023 г.

Аннотация. Исследование нацелено на решение задачи напряженно-деформированного состояния тонкого кольца при радиальных и кольцевых нагрузках с учетом радиальной неоднородности кольца, а также на сравнение двух методов расчета на примере решения задачи, когда нагрузки неравно-

Vladimir I. Andreev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1057-4329, Scopus Author ID: 57198780961, eLIBRARY SPIN-code: 9906-7214; asv@mgsu.ru

Андреев Владимир Игоревич, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-1057-4329, Scopus Author ID: 57198780961, eLIBRARY SPIN-код: 9906-7214; asv@mgsu.ru

© Andreev V.I., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Для цитирования

Андреев В.И. Расчет радиально неоднородного кольца, нагруженного нормальными и касательными нагрузками // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 56–63. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-56-63>

мерно распределены вдоль внешней поверхности кольца при одномерной неоднородности. В двумерной плоской задаче теории упругости в полярных координатах для неоднородного тела используются аналитические или численно-аналитические решения. В большинстве таких задач рассматриваются центрально симметричные круглые тела. Как правило, это возможно, когда все неизвестные функции зависят от радиуса. Эти задачи соответствуют большинству кольцевых и цилиндрических сооружений. Трубы пригодны для трубопроводных систем и строительства, применяются для газопроводов, в тепловых сетях и водопроводах. Особенность работы в рассмотрении задачи, когда радиальные и кольцевые нагрузки неравномерно распределены вдоль внешней поверхности кольца. Сравнение результатов расчета, полученных двумя методами, позволяет с достаточной точностью определить напряженное и деформированное состояния, показателем чего является получение кольцевых напряжений.

Ключевые слова: тонкое кольцо, плоская задача, радиальные нагрузки, кольцевые нагрузки, радиальная неоднородность, аналитические методы, численно-аналитические методы

Introduction

The article considers a plane problem of the theory of elasticity in polar coordinates for a radially inhomogeneous disk under the action of variable normal and tangential loads, factoring in the radial inhomogeneity. The solution of the problem makes it possible to calculate the strength and deformability of pipes under the action of internal and external pressure, as well as torsion. The feature of this article is the heterogeneity of the structure, which significantly expands the scope of solving problems of the mechanics of deformation in solids.

The first articles on the formulation and solution of problems in the mechanics of inhomogeneous bodies began in the 50s and 60s, when the first computers appeared. A significant contribution to the development of the mechanics of inhomogeneous bodies was made by Russian scientists: S.G. Mikhlin [1], G.B. Lekhnitsky [2], V.A. Lomakin [3], G.B. Kolchin [4; 5]. The works of Polish scientists, primarily V. Olshak and his students [6; 7] should also be mentioned. The author of this article began to pursue this field of mechanics in 1974 [8–11] and continues to do so with his students and colleagues to the present day [12–15].

The proposed article is dedicated to solving the problem of the stress-strain state of a thin ring under radial and ring loads factoring in the radial inhomogeneity of the ring.

The problem is a two-dimensional one with one-dimensional inhomogeneity. The author uses the method of separation of variables, which is based on the development of the generalized solution of J. Michell for the plane problem in polar coordinates, which was written about in [16]. Two solutions to the problem are given: an analytical one and a numerical-analytical one, and comparison of the two calculations' results is shown.

Formulation of the problem

We consider the problem of the equilibrium of a thin ring when forces are applied to its outer surface:

$$p = p_0(1 + \cos 2\theta)/2; \quad q = p_0 \sin 2\theta/2, \tag{1}$$

and the inner surface is load-free (Figure 1).

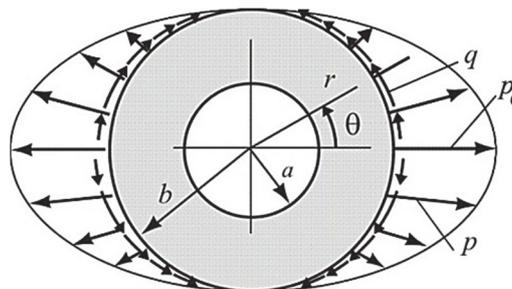


Figure 1. Calculation scheme of the problem

The modulus of elasticity of the ring material changes according to the power law:

$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{a} \right)^\delta, \tag{2}$$

Poisson's ratio $\nu = \text{const}$.

Analytical solution

The analytical solution is made on the basis of the method [17], derived from the development of the generalized J.H. Michell solution [16], for calculating a plane problem in polar coordinates for inhomogeneous structures. In this method, the solution is obtained in the form:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \theta + \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \theta \sin \theta + \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \theta \cos \theta + \\ & + \begin{pmatrix} \varphi_4 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \sin \theta + \begin{pmatrix} \varphi_5 \\ \psi_5 \end{pmatrix} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} \varphi_{sn} \\ \psi_{sn} \end{pmatrix} \sin n\theta + \begin{pmatrix} \varphi_{cn} \\ \psi_{cn} \end{pmatrix} \cos n\theta \right], \end{aligned} \tag{3}$$

in which each summand consists of the product of unknown functions (φ_i, ψ_i) , multiplied by a certain trigonometric function. In (3), the indices s and c mean that the corresponding functions are multiplied by $\sin n\theta$ or $\cos n\theta$.

The solution is reduced to an infinite partially decomposing system of second-order equations. In the problem under consideration, the corresponding equations are selected from this system depending on the boundary conditions and formulas for stresses.

According to (1) the boundary conditions have the form

$$r = a; \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0; \quad r = b; \quad \sigma_r = p(\theta); \quad \tau_{r\theta} = -q(\theta). \tag{4}$$

Comparing the boundary conditions and stresses, it can be assumed that the expressions for stresses should contain the functions $\varphi_0, \psi_1, \varphi_{s2}$ and ψ_{s2} . From the system of differential equations mentioned above, it is necessary to consider the following four equations to determine those functions:

$$(\lambda^* + 2\mu) \left(\varphi_0'' + \frac{\varphi_0'}{r} - \frac{\varphi_0}{r^2} \right) + \frac{\lambda^* + \mu}{r} \psi_1' - \frac{\lambda^* + 3\mu}{r^2} \psi_1 + [(\lambda^*)' + 2\mu'] \varphi_0' + \frac{(\lambda^*)'}{r} (\varphi_0 + \psi_1) = 0; \tag{5}$$

$$\mu \left(\psi_1'' + \frac{\psi_1'}{r} - \frac{\psi_1}{r^2} \right) + \mu' \left(\psi_1' - \frac{\psi_1}{r} \right) = 0; \tag{6}$$

$$-2 \frac{\lambda^* + \mu}{r} \varphi_{c2}' - 2 \frac{\lambda^* + 3\mu}{r^2} \varphi_{c2} + \mu \left(\psi_{s2}'' + \frac{\psi_{s2}'}{r} - \frac{\psi_{s2}}{r^2} \right) - 4 \frac{\lambda^* + 2\mu}{r^2} \psi_{s2} - \frac{\mu'}{r} (2\varphi_{c2} - r\psi_{s2}' + \psi_{s2}) = 0; \tag{7}$$

$$(\lambda^* + 2\mu) \left(\varphi_{c2}'' + \frac{\varphi_{c2}'}{r} - \frac{\varphi_{c2}}{r^2} \right) - \frac{4\mu}{r^2} \varphi_{c2} + 2 \frac{\lambda^* + \mu}{r} \psi_{s2}' - 2 \frac{\lambda^* + 3\mu}{r^2} \psi_{s2} + [(\lambda^*)' + 2\mu'] \varphi_{c2}' + \frac{(\lambda^*)'}{r} (\varphi_{c2} + 2\psi_{s2}) = 0. \tag{8}$$

A transition is made in the above equations, from a plane deformed state to a plane stressed state by replacing the parameter λ with $\lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$.

Considering that the solution of this problem factoring in the unambiguity condition, should not have terms containing θ , it follows from (3) that $\psi_1' - \frac{\psi_1}{r} = 0$. Given this equality, equation (6) takes the form $\psi_1'' = 0$. The integral of this equation is a linear function that becomes a constant at $r = a, b$. Since the boundary conditions (18) for $\tau_{r\theta}$ considering (1) do not contain a constant, we should set $\psi_1 = 0$. Then equation (5) is simplified:

$$(\lambda^* + 2\mu) \left(\varphi_0'' + \frac{\varphi_0'}{r} - \frac{\varphi_0}{r^2} \right) + [(\lambda^*)' + 2\mu'] \varphi_0' + \frac{(\lambda^*)'}{r} \varphi_0 = 0, \quad (9)$$

and can serve to determine the function of φ_0 .

Thus, the problem can be divided into two parts: to determine the axisymmetric component of the solution using (9) and to use (7), (8) for determination of the component that depends on θ . Substituting formula (2) into these equations leads them to the form

$$\varphi_0'' + (1+\delta) \frac{\varphi_0'}{r} + (\delta\nu - 1) \frac{\varphi_0}{r^2} = 0; \quad (10)$$

$$\psi_{s2}'' + (1+\delta) \frac{\psi_{s2}'}{r} - \left(\frac{9-\nu}{1-\nu} + \delta \right) \frac{\psi_{s2}}{r^2} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\varphi_{c2}'}{r} - \left(\frac{6-2\nu}{1-\nu} + 2\delta \right) \frac{\varphi_{c2}}{r^2} = 0; \quad (11)$$

$$\varphi_{c2}'' + (1+\delta) \frac{\varphi_{c2}'}{r} + (\delta\nu - 3 + 2\nu) \frac{\varphi_{c2}}{r^2} + (1+\nu) \frac{\psi_{s2}'}{r} - (3-\nu - 2\delta\nu) \frac{\psi_{s2}}{r^2} = 0. \quad (12)$$

The solution of equation (10) is the following function:

$$\varphi_0 = C_1 r^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}} + C_2 r^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}, \quad (13)$$

where $\alpha = (1+\delta)$, $\beta = \sqrt{(1-\alpha)^2 - 4(\delta\nu - 1)}$.

The constants of integration that are used in (13) can be found from the boundary conditions for the axisymmetric component of the external load:

$$r = a; \quad \sigma_r = 0; \quad r = b; \quad \sigma_r = p_0/2.$$

The system of two ordinary differential equations (11), (12) can be reduced to one fourth-order equation as follows. From equation (11) we express ψ_{s2}' as a function of ψ_{s2} , φ_{c2} and its derivatives:

$$\psi_{s2}' = f_1(\psi_{s2}, \varphi_{c2}'', \varphi_{c2}', \varphi_{c2}). \quad (a)$$

Using the differentiation of this expression by r and substituting equality (a) into it, we obtain

$$\psi_{s2}'' = f_2(\varphi_{c2}''', \varphi_{c2}'', \varphi_{c2}', \varphi_{c2}, \psi_{s2}). \quad (b)$$

Substituting (a) and (b) into (5.40), we find the expression for ψ_{s2} :

$$\psi_{s2} = f_3(\varphi_{c2}''', \varphi_{c2}'', \varphi_{c2}', \varphi_{c2}) \quad (c)$$

By differentiating the last equation once with by r , we equate the obtained expression with (a) by substituting (c) in it. As a result, we obtain a fourth-order equation with respect to the function φ_{c2} :

$$r^4 \varphi_{c2}^{IV} + (6 + 2\delta)r^3 \varphi_{c2}''' + (5\delta + \delta^2 + \nu\delta - 3)r^2 \varphi_{c2}'' + (\nu\delta^2 + \nu\delta - 9\delta - 9)r \varphi_{c2}' + (3\nu\delta^2 + 3\nu\delta - 3\delta + 9)\varphi_{c2} = 0. \quad (14)$$

The resulting equation can be reduced to a differential equation with constant coefficients by introducing a variable t with the dependence $r = e^t$:

$$\frac{d^4 \varphi_{c2}}{dt^4} + 2\delta \frac{d^3 \varphi_{c2}}{dt^3} + (\delta^2 + \nu\delta - \delta - 10) \frac{d^2 \varphi_{c2}}{dt^2} + (\nu\delta^2 - \delta^2 - 10\delta) \frac{d\varphi_{c2}}{dt} + (3\nu\delta^2 + 3\nu\delta - 3\delta + 9)\varphi_{c2} = 0.$$

The characteristic equation corresponding to the resulting equation will be

$$l^4 + 2\delta l^3 + (\delta^2 + \nu\delta - 10)l^2 + (\nu\delta^2 - \delta^2 - 10\delta)l + 3\nu\delta^2 + 3\nu\delta - 3\delta + 9 = 0.$$

Using the substitution $\eta = l^2 + \delta l$, this equation can be reduced to a quadratic one:

$$\eta^2 + (\nu\delta - \delta - 10)\eta + 3\nu\delta^2 + 3\nu\delta - 3\delta + 9 = 0.$$

The final solution of equation (14) has the form

$$\varphi_{c2} = \sum_{i=1}^4 D_i e^{l_i t},$$

its constants D_i are determined from the boundary conditions for the non-axisymmetric component:

$$r = a; \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0; \quad r = b; \quad \sigma_r = p_0 \cos 2\theta/2; \quad \tau_{r\theta} = -p_0 \sin 2\theta/2.$$

The function ψ_{s2} can be found from equality (c).

Below is an example of a calculation performed for the following initial data: $\delta = -1$; $b/a = 2$; $\nu = 1/3$; $E = 2 \cdot 10^4$ MPa.

Figure 2 shows the stress diagrams along the three radius directions. It can be concluded from the graphs shown above that the consideration of heterogeneity in this case does not lead to a qualitative change in the character of the diagrams. Numerical differences in some cases amount to approximately 20%. It is logical to assume that with more substantial heterogeneity, the differences in the results for homogeneous and heterogeneous materials may be more significant.

In this case, it is simple enough to trace the dependence of displacements on the inhomogeneity of the material. Figure 3 shows the diagrams of the displacements of the points along the angular coordinate of the inner contour of the ring. It can be noticed that the displacements in the inhomogeneous ring are larger than in the homogeneous ring. This fact is explained by the fact that when $\delta = -1$ then the modulus of elasticity decreases from the inner contour to the outer contour twice, and this leads to a decrease in the stiffness of the ring as a whole.

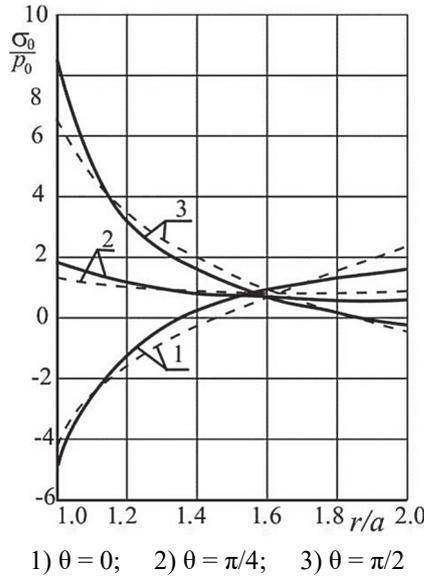


Figure 2. Stresses σ_θ in the ring:
 -- inhomogeneous material; - - - homogeneous material

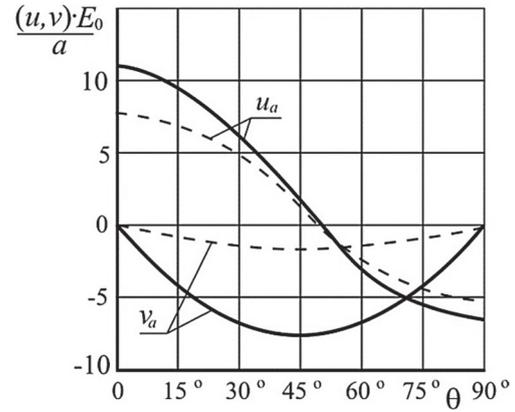


Figure 3. Displacements of points on the inner contour of the ring:
 -- inhomogeneous material; - - - homogeneous material

Solution using numerical-analytical method

In this section we consider the problem, the analytical solution of which was obtained in item 3. By the example of this problem the application of numerical-analytical method will be demonstrated, including numerical solution of systems of ordinary differential equations [6; 7]. At the same time it is possible to determine the accuracy of the method under consideration.

As it was shown above, in order to satisfy the boundary conditions (4) considering (1), it is sufficient to restrict formulas (3) to the summands φ_0 , $\varphi_{c2}\cos 2\theta$ and $\psi_{s2}\sin 2\theta$. The expressions for the stresses σ_r and $\tau_{r\theta}$ in the boundary conditions will have the form

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \left[\left(\varphi'_0 + \nu \frac{\varphi_0}{r} \right) + \left(\varphi'_{c2} + \nu \frac{\varphi_{c2} + 2\Psi_{s2}}{r} \right) \cos 2\theta \right];$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\Psi'_{s2} - \frac{\Psi_{s2} + 2\varphi_{c2}}{r} \sin 2\theta \right). \tag{15}$$

Equations (10)–(12) are valid for the functions φ_0 , φ_{c2} and ψ_{s2} for the law of changing for the modulus of elasticity (2).

Equation (10) is reduced to a system of two first-order equations, introducing the following notations $y_1 = \varphi_0, y_2 = \varphi'_0$:

$$y'_1 = y_2; \quad y'_2 = -(1+\delta) \frac{y_2}{r} - (\delta\nu - 1) \frac{y_1}{r^2}. \tag{16}$$

Boundary conditions (4) for the *axisymmetric* component of stresses will take the form:

$$r = a, \quad y_2 + \nu \frac{y_1}{r} = 0; \quad r = b, \quad y_2 + \nu \frac{y_1}{r} = -\frac{p_0(1+\nu)(1-\nu)}{2E(b)}. \tag{17}$$

Equations (11), (12) with introduction of notations $y_1 = \varphi_{c2}$, $y_2 = \varphi'_{c2}$, $y_3 = \psi_{s2}$, $y_4 = \psi'_{s2}$ are transformed to a system of four equations of the first order. Adding the boundary conditions (4) for the non-axisymmetric component to these equations, we obtain the boundary task for functions φ_{c2} and ψ_{s2} .

The calculation was carried out on the interval (a, b) with an equal division into 100 steps for the same initial data as in item 3. Table shows comparative values of stresses in the inhomogeneous ring at $\theta = 45^\circ$, obtained as a result of analytical and numerical calculations.

Stresses in the ring

| r/a | Analytical solution | | Numerical solution | |
|-------|---------------------|------------------|--------------------|------------------|
| | σ_r | $\tau_{r\theta}$ | σ_r | $\tau_{r\theta}$ |
| 1.0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.2 | 0.252 | -1.266 | 0.263 | -1.296 |
| 1.4 | 0.377 | -1.338 | 0.378 | -1.363 |
| 1.6 | 0.444 | -1.108 | 0.444 | -1.121 |
| 1.8 | 0.480 | -0.807 | 0.480 | -0.813 |
| 2.0 | 2.000 | -0.500 | 2.000 | -0.500 |

Comparison of the results obtained by the two methods allows us to conclude that the accuracy of the numerical-analytical method is sufficiently high.

If we consider a ring with sufficiently large ratio of outer and inner radii, then we can obtain the solution of the problem of tension-compression of a plate with a small circular hole using the calculation method shown above. The solutions for tension of an inhomogeneous plate with a hole in one direction, tension-compression in two directions, and shearing of a plate with a hole were obtained in [8]. It was demonstrated on the basis of numerical-analytical calculation of a homogeneous plate and comparison of the results with the solution of the Kirsch problem [4] that satisfactory accuracy can be achieved when the ratio of the plate dimensions to the hole radius is more than 10.

Conclusion

The problem considered in the paper is an example of using a generalized method for calculating a plane two-dimensional problem for a radially inhomogeneous ring. The possibility of obtaining an analytical solution to such problems largely depends on the inhomogeneity of the material, i.e., first of all, on the dependence of the modulus of elasticity of the material on the radius. The degree dependence of the modulus of elasticity on the radius selected in the paper is the simplest one.

The second solution obtained by the numerical method shows good compliance with the analytical solution and may be used for calculations of two-dimensional planar problems with radial inhomogeneity at any *continuous* dependence of the modulus of elasticity on the radius.

References

1. Mikhlin S.G. The plane problem of elasticity theory. *Proceedings of Seism. Institute of the USSR Academy of Sciences*. 1935;65:81–82. (In Russ.)
2. Lehnitsky S.G. Radial stress distribution in a wedge and a half-plane with a variable modulus of elasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1962;26(1):146–151. (In Russ.)
3. Lomakin V.A. *Theory of elasticity of inhomogeneous bodies*. Moscow: URSS Publ.; 2014. (In Russ.)
4. Kolchin G.B. On the applicability of the iterative method in problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies. *Applied Mathematics and Programming* (issue 2). Chisinau: AN MSSR; 1969. (In Russ.)
5. Kolchin G.B. *Planar problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies*. Chisinau: Stiinza Publ.; 1977. (In Russ.)
6. Olszak W., Urbanowski W., Rychlewski J. Elastic-plastic thick-walled inhomogeneous cylinder under the influence of internal pressure and longitudinal force. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. 1955;VII:315–336.
7. Olszak W., Rychlewski J. Nichthomogenitats-Probleme in elastischen und vorplastischen Bereich. *Osterreich. Ingen.* 1961;15:61–76.

8. Andreev V.I., Shishchits I.Yu. Investigation of stresses around holes in space taking into account the compressibility of the material. *Collection of works of MISI*. 1974;(118):59–62. (In Russ.)
9. Andreev V.I., Dubrovsky A.V. Taking into account the heterogeneity of the material when calculating the dry protection of the reactor. *Issues of Atomic Science and Technology. Design and Construction*. 1982;(3):3–8. (In Russ.)
10. Andreev V.I. About one method of solving of plane problem of the theory of elasticity for radial inhomogeneous body. *Applied Mechanics*. 1987;23(4):16–23. (In Russ.)
11. Andreev V.I. A method for solving a certain class of three-dimensional problems for an elastic radially inhomogeneous cylinder. *News of Universities. Construction and Architecture*. 1985;(8):27–31. (In Russ.)
12. Andreev V.I. *Some problems and methods of mechanics of inhomogeneous bodies*. Moscow: ASV Publ.; 2002. (In Russ.)
13. Andreev V.I., Tsybin N.Yu. Generalization of Michel’s solution to plane problem theory of elasticity in polar coordinates in the event of a radially inhomogeneous body. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2014;57:215–227.
14. Polyakova L.S., Andreev V.I. Solution of the axisymmetric problem of thermoelasticity of a radially inhomogeneous cylindrical shell by numerical-analytical method and the finite element method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(4):323–326. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-323-326>
15. Andreev V., Maksimov M. Elastic – plastic equilibrium of a hollow ball made of inhomogeneous ideal-plastic material. In: Akimov P., Vatin N. (eds.) *Proceedings of FORM 2021. Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021;170:177–188. https://doi.org/10.1007/978-3-030-79983-0_16
16. Timoshenko S., Goodier J.N. *Theory of elasticity*. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company; 1951.
17. Kukudzhанov V.N. *Numerical methods in continuum mechanics*. Moscow: MATI Publ.; 2006. (In Russ.)



DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72
 EDN: FVOZAA
 UDC 539.3

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Quadrilateral element in mixed FEM for analysis of thin shells of revolution

Yuriy V. Klochkov¹ , Valeria A. Pshenichkina² , Anatoliy P. Nikolaev¹ ,
 Olga V. Vakhnina¹ , Mikhail Yu. Klochkov² 

¹Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russian Federation

²Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

✉ klotchkov@bk.ru

Article history

Received: November 15, 2022

Revised: February 20, 2023

Accepted: February 24, 2023

For citation

Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. Quadrilateral element in mixed FEM for analysis of thin shells of revolution. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72>

Abstract. The purpose of study is to develop an algorithm for the analysis of thin shells of revolution based on the hybrid formulation of finite element method in two dimensions using a quadrilateral fragment of the middle surface as a discretization element. Nodal axial forces and moments, as well as components of the nodal displacement vector were selected as unknown variables. The number of unknowns in each node of the four-node discretization element reaches nine: six force variables and three kinematic variables. To obtain the flexibility matrix and the nodal forces vector, a modified Reissner functional was used, in which the total specific work of stresses is represented by the specific work of membrane forces and bending moments of the middle surface on its membrane and bending strains, and the specific additional work is determined by the specific work of membrane forces and bending moments of the middle surface. Bilinear shape functions of local coordinates were used as approximating expressions for both force and displacement unknowns. The dimensions of the flexibility matrix of the four-node discretization element were found to be 36×36 . The solution of benchmark problem of analyzing a truncated ellipsoid of revolution loaded with internal pressure showed sufficient accuracy in calculating the strength parameters of the studied shell.

Keywords: four-node discretization element, stress-strain state, flexibility matrix

Yuriy V. Klochkov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Electric Power and Energy Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1027-1811, Scopus ID: 57170472500, eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693; klotchkov@bk.ru

Valeriya A. Pshenichkina, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Building Structures, Foundations and Reliability of Structures, Faculty of Construction and Housing and Communal Services, Volgograd State Technical University, 28 Leninskii Prospekt, Volgograd, 400005, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9148-2815, Scopus ID: 57189646401, eLIBRARY SPIN: 3399-0668; vap_hm@list.ru

Anatoliy P. Nikolaev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Mechanics, Faculty of Engineering and Technology, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7098-5998, Scopus ID: 7202396806, eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484; anpetr40@yandex.ru

Olga V. Vakhnina, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Electric Power and Energy Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9234-7287, Scopus ID: 55235780600, eLIBRARY SPIN-code: 3593-0159; ovahnina@bk.ru

Mikhail Yu. Klochkov, postgraduate student, Department of Building Structures, Foundations and Reliability of Structures, Faculty of Construction and Housing and Communal Services, Volgograd State Technical University, 28 Leninskii Prospekt, Volgograd, 400005, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6751-4629, Scopus ID: 57215535887, eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955; m.klo4koff@yandex.ru

© Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения

Ю.В. Клочков¹  , В.А. Пшеничкина² , А.П. Николаев¹ ,
О.В. Вахнина¹ , М.Ю. Клочков² 

¹Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Российская Федерация

²Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Российская Федерация

✉ klotchkov@bk.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 15 ноября 2022 г.

Доработана: 20 февраля 2023 г.

Принята к публикации: 24 февраля 2023 г.

Для цитирования

Клочков Ю.В., Пшеничкина В.А., Николаев А.П., Вахнина О.В., Клочков М.Ю. Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72>

Аннотация. Цель исследования – разработка алгоритма конечно-элементного расчета тонких оболочек вращения на основе смешанной формулировки метода конечных элементов в двумерной постановке при использовании в качестве элемента дискретизации четырехугольного фрагмента срединной поверхности. Искомыми узловыми неизвестными были выбраны продольные усилия и моменты, а также компоненты вектора перемещения. Количество искомых неизвестных в каждом из узлов четырехугольного элемента дискретизации достигает девяти: шесть силовых и три кинематических искомых величин. Для получения матрицы податливости и столбца узловых усилий использовался модифицированный функционал Рейсснера, в котором полная удельная работа напряжений представлена удельной работой мембранных усилий и изгибающих моментов срединной поверхности на ее деформациях и искривлениях, а удельная дополнительная работа определена удельной работой мембранных усилий и изгибающих моментов срединной поверхности. В качестве аппроксимирующих выражений и для силовых, и для кинематических искомых неизвестных использовались билинейные функции формы локальных координат. Размерность матрицы податливости четырехугольного элемента дискретизации составила 36×36 . Решение тестовой задачи по анализу напряженно-деформированного состояния усеченного эллипсоида вращения, нагруженного внутренним давлением, показало достаточную для инженерной практики точность вычислений прочностных параметров исследуемой оболочечной конструкции.

Ключевые слова: четырехугольный элемент дискретизации, напряженно-деформированное состояние, матрица податливости

Introduction

Finite element analysis of thin shells based on the displacement method (when the unknown nodal variables are displacements and their partial derivatives) has been developed quite well and is widely used today in various software suites. In [1], FEM is presented as an alternative to the finite difference method with justification of its advantages. It is widely used in the calculations of beams and frame structures [2], as well as multi-

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, электроэнергетический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-1027-1811, Scopus ID: 57170472500, eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693; klotchkov@bk.ru

Пшеничкина Валерия Александровна, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Строительные конструкции, основания и надежность сооружений», факультет строительства и жилищно-коммунального хозяйства, Волгоградский государственный технический университет, Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр-кт Ленина, д. 28; ORCID: 0000-0001-9148-2815, Scopus ID: 57189646401, eLIBRARY SPIN-код: 3399-0668; vap_hm@list.ru

Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры механики, инженерно-технологический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-7098-5998, Scopus ID: 7202396806, eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484; anpetr40@yandex.ru

Вахнина Ольга Владимировна, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, электроэнергетический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0001-9234-7287, Scopus ID: 55235780600, eLIBRARY SPIN-код: 3593-0159; ovahnina@bk.ru

Клочков Михаил Юрьевич, аспирант, кафедра «Строительные конструкции, основания и надежность сооружений», факультет строительства и жилищно-коммунального хозяйства, Волгоградский государственный технический университет, Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр-кт Ленина, д. 28; ORCID: 0000-0001-6751-4629, Scopus ID: 57215535887, eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955; m.klo4koff@yandex.ru

layer plates and shells [3; 4], and in the calculation of three-dimensional structures and thick slabs [5; 6]. FEM was widely used in the formulation of the displacement method in the calculation of thin shells under elastic and elastoplastic deformation [7–11]. This method is also used in the analysis of the nonlinear deformation of plates and shells [12–15]. FEM is used in the formulation of the displacement method and in cases of large deformations during loading of plates and shells [16–18], as well as in shell stability calculations [19; 20]. In engineering stability problems, a mixed formulation based on the predictor-corrector scheme was proposed [21; 22]. To reach the appropriate level of accuracy for computing the unknown values, it is necessary to use the approximating expressions of class $C^{(2)}$, since the Cauchy relations for thin shells [23; 24] contain second order partial derivatives of the normal displacement vector. When using the mixed FEM (when the unknown nodal variables are displacements, axial forces and moments), approximating the unknowns with functions of classes $C^{(0)}$ and $C^{(1)}$ is sufficient. A major advantage of using the mixed FEM is the ability to compute stresses and deformations at an element node in terms of the evaluated unknowns of the element at this specific node. In contrast, to determine nodal stresses, FEM based on the displacement method requires calculating the unknowns at the adjacent nodes, which increases the computational error. In this regard, the most relevant problem now is the development of algorithms for linear and non-linear analysis of thin shells with the mixed FEM using curvilinear coordinates.

Methods

The Reissner functional is considered in the following definition [25; 26]:

$$\Phi_R = \int_V \{\sigma\}^T \left\{ \varepsilon^\zeta \right\} dV - \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [C_\varepsilon] \{\sigma\} dV - \frac{1}{2} \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \quad (1)$$

where $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}\}$, $\{\varepsilon^\zeta\}^T = \{\varepsilon_{11}^\zeta \ \varepsilon_{22}^\zeta \ \varepsilon_{12}^\zeta\}$ are the stresses and deformations at a point in the shell, which is located at vertical distance ζ from the corresponding point of the middle surface; matrix $[C_\varepsilon]$ represents the transformation matrix from vector $\{\varepsilon^\zeta\}$ to vector $\{\sigma\}$, which is composed based on the Hooke's law for thin shells [23; 24]; $\{U\}^T = \{uvw\}$ is the row vector of displacement components of the middle surface point; $\{P\}$ is the external load vector.

Stresses $\{\sigma\}$ in functional (1) are expressed in terms of the forces of the middle surface [23; 24]:

$$\sigma_{11} = \frac{N_{11}}{h} + \frac{\zeta M_{11}}{I}; \quad \sigma_{22} = \frac{N_{22}}{h} + \frac{\zeta M_{22}}{I}; \quad \sigma_{12} = \frac{N_{12}}{h} + \frac{\zeta M_{12}}{I}, \quad (2)$$

where $I = \frac{h^3}{12}$ is the moment of inertia of the cross-section; h is the height of the cross-section.

Deformations of an arbitrary layer of the shell are determined in terms of membrane and bending strains by relations [23; 24]:

$$\varepsilon_{11}^\zeta = \varepsilon_{11} + \zeta \mathcal{N}_{11}; \quad \varepsilon_{22}^\zeta = \varepsilon_{22} + \zeta \mathcal{N}_{22}; \quad \varepsilon_{12}^\zeta = \varepsilon_{12} + 2\zeta \mathcal{N}_{12}. \quad (3)$$

Physical and geometric expressions (2) and (3) may be represented in matrix form:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \Gamma_\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_0 \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon^\zeta\} = \begin{bmatrix} \Gamma_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

Deformations at a middle surface point (6) may be expressed using bilinear functions φ as the following matrix product:

$$\{\varepsilon_0\} = [L][A]\{U_y\} = [B]\{U_y\}, \tag{8}$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & 6 \times 3 & 3 \times 12 & 12 \times 1 & 6 \times 12 & 12 \times 1 \end{matrix}$

where $[A] = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{\varphi\}^T & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}$; $\{U_y\}^T = \left\{ \{u_y\}^T \{v_y\}^T \{w_y\}^T \right\}$; $\{q_y\}^T = \{q^i \ q^j \ q^k \ q^l\}$; q represents

$\begin{matrix} 1 \times 12 & 1 \times 4 \end{matrix}$

tangential u, v or normal w displacement vector component.

Considering (4), (6), (7) and (8), functional (1) may be represented as

$$\Phi_R = \{S_y\}^T \iint [H]^T \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ \int [\Gamma_\sigma]^T [\Gamma_\varepsilon] d\zeta \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] dF \{U_y\} - \\ \\ \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \{S_y\}^T \iint [H]^T \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ \int [\Gamma_\sigma]^T [C_\varepsilon][\Gamma_\sigma] d\zeta \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H] dF \{S_y\} - \\ \\ \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \{U_y\}^T \iint [A]^T \{P\} dF. \tag{9}$$

$\begin{matrix} 1 \times 24 & F & 24 \times 6 & 6 \times 12 & 12 \times 1 & 6 \times 24 & 24 \times 1 & 1 \times 12 & F & 12 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix}$

By minimizing functional (9) with respect to $\{S_y\}^T$, the following relation can be obtained:

$$\partial \Phi_R / \partial \{S_y\}^T = [Q] \{U_y\} - [Y] \{S_y\} = 0, \tag{10}$$

$\begin{matrix} 24 \times 12 & 12 \times 1 & 12 \times 24 & 24 \times 1 \end{matrix}$

where $[Q] = \iint [H]^T \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ \int [\Gamma_\sigma]^T [\Gamma_\varepsilon] d\zeta \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B] dF; \\ \\ \end{bmatrix}$; $[Y] = \iint [H]^T \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ \int [\Gamma_\sigma]^T [C_\varepsilon][\Gamma_\sigma] d\zeta \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H] dF. \\ \\ \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} 24 \times 12 & F & 24 \times 6 & 6 \times 12 & 12 \times 24 & F & 24 \times 6 & 6 \times 24 & 24 \times 1 \end{matrix}$

In order to minimize functional (7) with respect to unknown nodal displacements $\{U_y\}$, equation (9) needs to be represented in the following form:

$$\{U_y\}^T \iint [B]^T \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ \int [\Gamma_\varepsilon]^T [\Gamma_\sigma] d\zeta \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H] dF \{S_y\} - \\ \\ \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \{S_y\}^T \iint [H]^T \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ \int [\Gamma_\sigma]^T [C_\varepsilon][\Gamma_\sigma] d\zeta \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H] dF \{S_y\} - \\ \\ \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \{U_y\}^T \iint [A]^T \{P\} dF. \tag{11}$$

$\begin{matrix} 1 \times 12 & F & 12 \times 6 & 6 \times 24 & 24 \times 1 & 1 \times 12 & F & 12 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix}$

Minimizing (11) with respect to $\{U_y\}^T$ yields the following matrix expression:

$$\frac{\partial \Phi_R}{\partial \{U_y\}^T} = \begin{bmatrix} [Q] \\ 12 \times 24 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \{S_y\} \\ 24 \times 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{f_y\} \\ 12 \times 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (12)$$

By rearranging (10) and considering (12), it is possible to obtain the flexibility matrix and the nodal forces vector for the quadrilateral element in the following form:

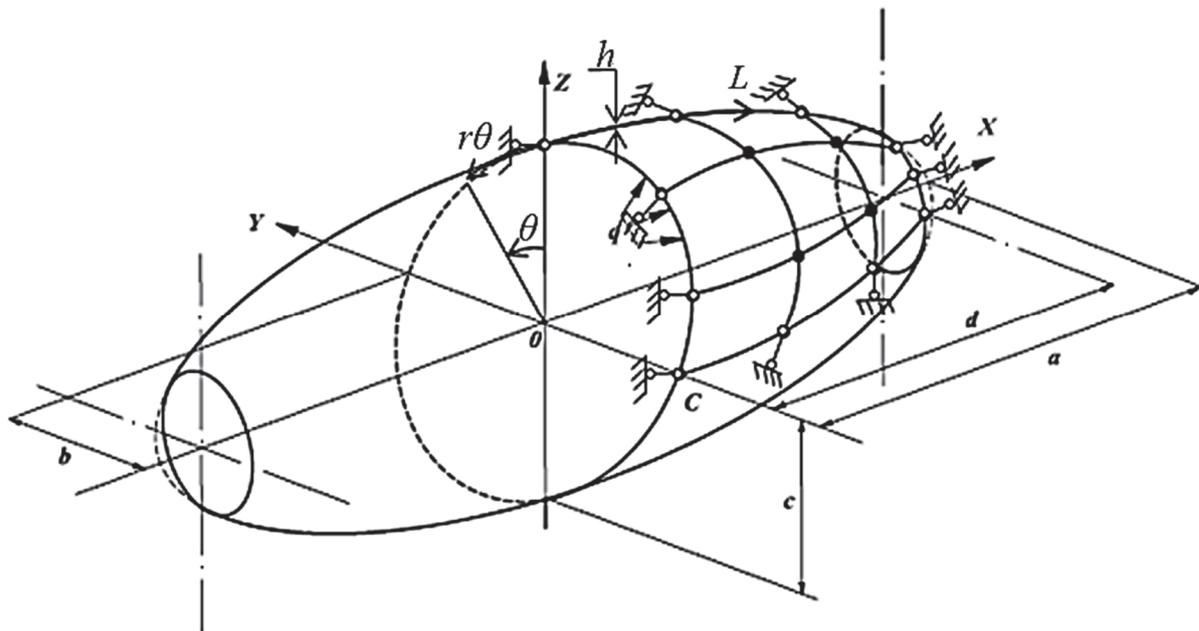
$$\begin{bmatrix} -[Y] & [Q] \\ 24 \times 24 & 24 \times 12 \\ [Q]^T & [0] \\ 12 \times 24 & 12 \times 12 \\ 36 \times 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{S_y\} \\ 24 \times 1 \\ \{U_y\} \\ 12 \times 1 \\ 36 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ 24 \times 1 \\ \{f\} \\ 12 \times 1 \\ 36 \times 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Thus, the dimension of the flexibility matrix of the quadrilateral element is 36×36 , and the nodal unknowns vector contains 24 force and 12 kinematic factors, which are axial forces $N_{\alpha\beta}$ and moments $M_{\alpha\beta}$ and displacement components of a nodal point of the middle surface.

Construction of the general flexibility matrix and nodal forces vector of the entire shell is conducted using the index matrix, which reflects the boundary conditions of the shell [28].

Results and discussion

Calculation example. In order to verify the developed algorithm, a truncated ellipsoid of revolution, which is illustrated in Figure, was analyzed.



Truncated ellipsoid of revolution

The following initial data was adopted: ellipsoid shape parameters $a = 1.3$ m; $b = c = 0.9$ m; shell thickness $h = 0.02$ m; modulus of elasticity $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; Poisson's ratio $\nu = 0.3$; internal pressure $q = 5$ MPa. Only $1/8$ of the shell was analyzed due to ellipsoid having planes of symmetry. The results of the analysis are presented in Table, in which the numerical values of normal stresses of the middle surface at the support ($x = 0.0$ m) and end ($x = 1.2$ m) sections of the ellipsoid with different finite element grid are given.

The results in Table imply that refining the grid leads to stable convergence of the computational process. However, convergence stability is a necessary, but not sufficient condition for the efficacy of the algorithm in regards to the real physical distribution of stress in the shell.

To evaluate the objectiveness of the results, let us compute meridional stress at the support and end sections. The meridional stress at the support section can be obtained from the following equilibrium equation:

$$\sigma_{11}|_{x=0} = \frac{q}{h2\pi R_0} (\pi R_0^2 - \pi R_k^2), \tag{14}$$

where R_0, R_k are the radii of revolution of the ellipsoid at the support and the end sections respectively, besides

$$R_0 = b = 0.9 \text{ m}; R_k = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_k^2} = \frac{0.9}{1.3} \sqrt{1.3^2 - 1.2^2} = 0.346 \text{ m}.$$

Values of normal stresses in the middle surface of the ellipsoid

| Section | Stress, MPa | Node grid | | | | | Analytical solution according to the Laplace equation |
|--------------------|---------------|-----------|---------|---------|-----------|-----------|---|
| | | 41 × 41 | 61 × 61 | 81 × 81 | 101 × 101 | 121 × 121 | |
| Support, x = 0.0 m | σ_{11} | 95.93 | 95.89 | 95.88 | 95.87 | 95.87 | 95.86 |
| | σ_{22} | 179.03 | 179.04 | 179.05 | 179.05 | 179.05 | 179.06 |
| End, x = 1.2 m | σ_{11} | 0.916 | 0.449 | 0.270 | 0.182 | 0.133 | 0.00 |
| | σ_{22} | 167.75 | 168.45 | 168.78 | 168.96 | 169.06 | 167.82 |

By substituting the initial data into (14), it is possible to obtain the following value of meridional stress at the support section: $\sigma_{11}|_{x=0} = \frac{5}{0.02 \cdot 2\pi \cdot 0.9} (\pi 0.9^2 - \pi 0.346^2) = 95.86 \text{ MPa}$.

The meridional stress at the end section must be zero, since the right end of the shell is not loaded: $\sigma_{11}|_{x=1.2} = 0.00 \text{ MPa}$.

Circumferential stress σ_{22} of the middle surface of the ellipsoid at the support and end sections may be expressed using the Laplace equation:

$$\frac{\sigma_{11}}{R_1} + \frac{\sigma_{22}}{R_2} = \frac{q}{h}. \tag{15}$$

Radii of curvature R_1 and R_2 in (15) are defined by

$$R_1 = -1/(x_{,S}^3 r_{,xx}); R_2 = 1/(r/x_{,S}), \tag{16}$$

where $r = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ is the radius of revolution of the ellipsoid, $r_{,xx}$ is the second order derivative of the radius of revolution; $x_{,S} = 1/\sqrt{1+(r_{,x})^2}$.

Thus, it is possible to obtain the analytical value of circumferential stress at the support and end sections of the ellipsoid from (15):

$$\sigma_{22} = \left(\frac{q}{h} - \frac{\sigma_{11}}{R_1} \right) R_2. \tag{17}$$

Substituting the corresponding initial data into (17) yields the values of the desired stresses: $\sigma_{22}|_{x=0} = 179.06 \text{ MPa}$; $\sigma_{22}|_{x=1.2} = 167.82 \text{ MPa}$.

Conclusion

By comparing the analytical values of meridional stress σ_{11} and circumferential stress σ_{22} computed with equations (14)–(17) and the values obtained via the developed algorithm, it can be concluded that the adequate level of accuracy of the finite element analysis has been reached, as the minimum computational error does not exceed 1%. The developed algorithm may be recommended for application in engineering practice for the analysis of thin shells.

References

1. Bate K.-Yu. *Finite element methods*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2010. (In Russ.)
2. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;578–579:858–863. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>
3. Agapov V. The Family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness. *E3S Web of Conferences. 2018 Topical Problems of Architecture, Civil Engineering and Environmental Economics, TPACEE 2018*. 2019. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199102013>
4. Chernysheva N., Rozin L. Modified finite element analysis for exterior boundary problems in infinite medium. In V. Murgul (Ed.), *MATEC Web of Conferences*. 2016. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20165301042>
5. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(9):2263–2271.
6. Tyukalov Yu.Ya. Quadrilateral finite element for thin and thick plates. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021;5(98):9802. <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.2>
7. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Sugiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015;10(5):051012. <https://doi.org/10.1115/1.4028657>
8. Klochkov Y.V., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Gureeva N.A., Klochkov M.Y. Calculation of an ellipsoid-shaped shell based on a consistent triangular discretization element with an in-variant interpolation procedure. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2022;51(3):216–229. <https://doi.org/10.3103/S1052618822030074>
9. Klochkov Yu., Nikolaev A., Vakhnina O., Sobolevskaya T., Klochkov M. Physically nonlinear shell deformation based on three-dimensional finite elements. *Magazine of Civil Engineering*. 2022;5(113):11314. <https://doi.org/10.34910/MCE.113.14>
10. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Y. Variable formation plasticity matrices of a three-dimensional body when implementing a step loading procedure. *Journal of Physics: Conference Series. 5. V International Scientific and Technical Conference "Mechanical Science and Technology Update" (MSTU 2021)*. 2021. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1901/1/012118>
11. Klochkov Yu.V., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. Algorithm of finite elemental SSS analysis of thin-walled technosphere objects based on a triangular discretization element with elastic-plastic deformation. *Journal of Physics: Conference Series. International Conference on IT in Business and Industry (ITBI 2021)*. 2021. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2032/1/012028>
12. Leonetti L., Magisano D., Madeo A., Garcea G., Kiendl J., Reali A. A simplified Kirchhoff – Love large deformation model for elastic shells and its effective isogeometric formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019;354:369–396. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.05.025>
13. Neto M.A., Amaro A., Roseiro L., Cirne J., Leal R. Finite element method for plates/shells. *Engineering Computation of Structures: The Finite Element Method*. Cham: Springer; 2015. p. 195–232. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17710-6_6
14. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018;39(9):1478–1483.
15. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. The method of calculating inelastic elements of rod structures under loading, unloading and reloading regimes. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042014>
16. Garcea G., Liguori F.S., Leonetti L., Magisano D., Madeo A. Accurate and efficient a posteriori account of geometrical imperfections in Koiter finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017;112(9):1154–1174.
17. Hanslo P., Larson Mats G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Computational Mechanics*. 2015;56(1):87–95.
18. Ren H. Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015;10(5):051018. <https://doi.org/10.1115/1.4030212>

19. Kositsyn S.B., Akulich V.Yu. Numerical analysis of the stability of a cylindrical shell interacting with an inhomogeneous surrounding base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):608–616. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>
20. Zhelezov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nonlinear deformation and stability of discrete-reinforced elliptical cylindrical composite shells under torsion and internal pressure. *Russian Aeronautics*. 2018;61(2):175–182.
21. Lei Zh., Gillot F., Jezeguel. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015;54:105–119. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.06.010>
22. Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variation-al reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2018;113(4):634–655.
23. Novozhilov V.V. *Theory of thin shells*. St. Petersburg: St. Petersburg University Press; 2010. (In Russ.)
24. Chernykh K.F. *Nonlinear elasticity (theory and applications)*. St. Petersburg; 2004. (In Russ.)
25. Rickards R.B. *The finite element method in the theory of shells and plates*. Riga: Zinatne Publ.; 1988. (In Russ.)
26. Gureeva N.A., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Comparative analysis of finite element formulations under plane loading of an elastic body. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):139–145. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145> (In Russ.)
27. Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Kiselev A.P., Gureeva N.A. *Vector interpolation of displacement fields in finite element calculations of shells*. Volgograd; 2012. (In Russ.)
28. Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Finite element method in calculations of ship structures*. Leningrad: Sudostroenie Publ.; 1974. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-73-83
EDN: FYSMCV
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Статика и динамика криволинейных стержней на основе гипотез Бернулли и соотношений для прямолинейного стержня

М.Н. Серазутдинов 

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация
✉ serazmn@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 19 октября 2022 г.
Доработана: 28 января 2023 г.
Принята к публикации: 30 января 2023 г.

Для цитирования

Серазутдинов М.Н. Статика и динамика криволинейных стержней на основе гипотез Бернулли и соотношений для прямолинейного стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 73–83. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-73-83>

Аннотация. Описывается и подробно обосновывается метод расчета статики и динамики криволинейных стержней, основанный на соотношениях для прямолинейного стержня. Используются гипотезы Бернулли и вариационный метод. Основное достоинство и особенность используемых соотношений состоит в том, что для расчетов криволинейных стержней применяются простейшие формулы, справедливые для прямолинейных стержней. В эти формулы не входят параметры, характеризующие кривизну продольной оси стержня. Данная особенность является существенным фактором при расчете криволинейных стержней, информация о продольной оси которых задается дискретно, так как не требуется использование специальных методов аппроксимации дискретно заданных данных, позволяющих получать информацию о радиусе-векторе продольной оси стержня и его производных с требуемой высокой точностью. Представлены решения тестовых статических и динамической задач. Рассмотрены изгиб стержня с продольной осью в виде окружности, естественно закрученного стержня и колебания пружины. Сравнение результатов расчета с опубликованными в литературе данными иллюстрирует достоверность и высокую точность получаемых решений.

Ключевые слова: криволинейные стержни, гипотезы Бернулли, статика, динамика, метод расчета

Statics and dynamics of curved rods based on Bernoulli hypotheses and relations for a rectilinear rod

Murat N. Serazutdinov 

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation
✉ serazmn@mail.ru

Article history

Received: October 19, 2022
Revised: January 28, 2023
Accepted: January 30, 2023

Abstract. Method for calculating the statics and dynamics of curved rods, based on the equations for a rectilinear rod, is described and justified in detail. Bernoulli's hypotheses and the variational method are applied. The main advantage and special feature of these formulas is that the simplest formulas that are valid

Серазутдинов Мурат Нуриевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры основ проектирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Российская Федерация, 420015, Казань, ул. Карла Маркса, д. 68; ORCID: 0000-0001-7222-1935, Scopus Author ID: 6506446566, ResearcherID: HKF-2636-2023, eLIBRARY SPIN-код: 9043-5123; serazmn@mail.ru
Murat N. Serazutdinov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Fundamentals of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, 68 Karla Marksa St, Kazan, 420015, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7222-1935, Scopus Author ID: 6506446566, ResearcherID: HKF-2636-2023, eLIBRARY SPIN-code: 9043-5123; serazmn@mail.ru

© Серазутдинов М.Н., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

For citation

Serazutdinov M.N. Statics and dynamics of curved rods based on Bernoulli hypotheses and relations for a rectilinear rod. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):73–83. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-73-83>

for rectilinear rods are used for the calculations of curved rods. These formulas do not contain parameters characterizing the curvatures of the longitudinal axis of the rod. This feature is an essential factor in the calculation of curved rods, where the information about their longitudinal axis is given discretely, since no special methods of approximation of discretely given data are required, which enable to obtain information about the radius-vector of the rod longitudinal axis and its derivatives with the required high accuracy. Solutions of test static and dynamic problems are provided. Bending of a rod with a longitudinal axis in the form of a circle, a naturally twisted rod, and a spring fluctuation are considered. Comparison of the calculation results with the data published in the literature illustrates the reliability and high accuracy of the solutions obtained.

Keywords: curved rods, Bernoulli hypotheses, statics, dynamics, calculation method

Введение

В настоящее время теория и методы расчета статики и динамики стержневых систем достаточно разработаны и отражены в ряде монографий [1–5]. Однако криволинейные стержни имеют очень широкий круг приложений (арки, пилоны мостов, композитные стержневые криволинейные структуры, пружины, сверла, трубопроводы, упругие подвески вибраторов, лопатки турбомашин упругие амортизаторы) и при их расчете возникают особенности, требующие отдельного внимания. Последнее связано с тем, что традиционно используемые вариационные принципы и уравнения равновесия криволинейных стержней содержат производные не ниже второго порядка от радиуса-вектора продольной оси стержня. Во многих случаях исходные данные о геометрии стержней сложной формы задаются дискретно, поэтому при расчетах используются аппроксимирующие функции, построение которых требует разработки специальных методов, позволяющих получать информацию о радиусе-векторе продольной оси стержня и его производных с требуемой точностью [6–9]. Кроме того, следует иметь в виду, что в настоящее время остаются актуальными вопросы расчета криволинейных стержней, так как возникает ряд особенностей при моделировании технологических процессов [10–12], исследовании контактных взаимодействий, хаотических колебаний и динамической потери устойчивости [13–17], при расчете больших перемещений, когда прямолинейный стержень при деформировании становится криволинейным стержнем сложной формы [18; 19], при расчете влияния ребер жесткости на напряженно-деформированное состояние оболочек сложной формы [20; 21]. Остаются не до конца исследованными вопросы влияния принятых при моделировании стержней гипотез на результаты расчетов сложных динамических процессов [22–25].

Представлен метод расчета криволинейных стержней, основанный на использовании гипотез Бернулли и соотношений для прямолинейного стержня. Приводятся обоснование метода и результаты расчетов. Особенность используемых для расчетов криволинейных стержней соотношений состоит в том, что в них не входят кривизны продольной оси стержня. Ранее подобный метод использовался для решения линейных и нелинейных задач статики стержней с использованием соотношений, полученных на основе гипотез Коссера – Тимошенко [26–28].

Основные соотношения

Рассмотрим стержневую систему, состоящую из прямолинейных и криволинейных стержней. Полагаем, что возникающие в стержневой системе деформации являются малыми, справедливы гипотезы Бернулли, зависимость между деформациями и напряжениями определяется законом Гука, криволинейные стержни являются стержнями малой кривизны, для которых отношением h/R можно пренебречь по сравнению с единицей (h – толщина сечения, R – радиус кривизны продольной оси).

Разобьем систему на N участков таким образом, чтобы на каждом из них направляющие косинусы касательного к продольной оси стержня вектора и ортов главных осей поперечных сечений изменялись непрерывно.

Воспользуемся принципом Гамильтона – Остроградского, в соответствии с которым должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{l_n} [\delta K(s, t) - \delta \Pi(s, t) + \delta' W(s, t)] dl_n(s) \right\} dt = 0, \quad (1)$$

где l_n – линия продольной оси стержня на n -м участке; $K, \Pi, \delta'W$ – кинетическая, потенциальная энергии деформации и элементарная работа внешних сил; t – время; s – параметр, используемый для описания линии l_n .

При исследовании статики и динамики сложных стержневых систем часто используются алгоритмы решения, в которых интегралы в условии (1) вычисляются численно. При использовании численного интегрирования выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I [\delta K(s_i, t) - \delta \Pi(s_i, t) + \delta' W(s_i, t)] H_{ni} \right\} dt = 0, \quad (2)$$

где s_i – координаты узлов интегрирования; H_{ni} – множители, величина которых зависит от формы линии l_n и от используемой при интегрировании квадратурной формулы.

Соотношения для прямолинейного стержня. Для описания деформации прямолинейного стержня используем декартову систему координат $Oxyz$ с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Полагаем, что ось Ox направлена вдоль продольной оси, а Oy, Oz – главные центральные оси поперечного сечения стержня. В этом случае $s = x$.

Введем вектор перемещения точек продольной оси стержня $\bar{U}(x, t) = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k}$ и вектор углов поворота поперечных сечений $\bar{\varphi}(x, t) = \varphi_1 \bar{i} + \varphi_2 \bar{j} + \varphi_3 \bar{k}$.

При использовании гипотезы Бернулли

$$\varphi_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x}; \quad \varphi_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$\bar{U} = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k}; \quad \bar{\varphi} = \varphi_1 \bar{i} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \bar{j} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \bar{k}. \quad (3)$$

Вектор перемещения стержня определяется по формуле

$$\bar{W}_\rho = \bar{U} + \bar{\varphi} \bar{\rho},$$

где $\bar{\rho} = y \bar{j} + z \bar{k}$.

Учитывая выражения для $\bar{U}, \bar{\varphi}, \bar{\rho}$, получаем

$$\bar{W}_\rho = \left(u_1 - z \frac{\partial u_3}{\partial x} - y \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \bar{i} + (u_2 - z \varphi_1) \bar{j} + (u_3 + y \varphi_1) \bar{k}. \quad (4)$$

Линейные и угловые деформации вычисляются по формулам

$$\varepsilon = \frac{\partial u_1}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_3}{\partial^2 x} - z \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x}; \quad \gamma_{xy} = z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = y \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}. \quad (5)$$

Напряжения и деформации связаны законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon; \quad \tau_1 = G\gamma_1; \quad \tau_2 = G\gamma_2, \quad (6)$$

где E, G – модули упругости и сдвига; $\gamma_1 = f_1(y, z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$; $\gamma_2 = f_2(y, z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$; $f_1(y, z), f_2(y, z)$ – функции, выражающие закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению стержня, вид этих функций зависит от формы сечения стержня, например для круглого сечения $f_1 = z, f_2 = y$.

С учетом соотношений (3)–(6) и того, что Oy, Oz – главные центральные оси поперечного сечения, выражения для вариаций кинетической и потенциальной энергий деформации можно записать следующим образом:

$$\delta K = -\rho_0 \iint_A \frac{\partial^2 \bar{w}_\rho}{\partial t^2} \delta \bar{w}_\rho dA = -\rho_0 \left[A \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \delta u_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \delta u_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \delta u_3 \right) + J_p \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \delta \varphi_1 + J_z \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + J_y \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right]; \quad (7)$$

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \delta \iint_A [\sigma \varepsilon + \tau_1 \gamma_1 + \tau_2 \gamma_2] dA = \frac{1}{2} \delta \left[EA \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + EJ_y \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 + EJ_z \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + GJ_{кр} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 \right],$$

где A, J_y, J_z – площадь, главные моменты инерции поперечного сечения; $J_{кр}$ – момент инерции при кручении.

Элементарная работа внешних сил

$$\delta' W = q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_3 \delta u_3 + M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \frac{\partial u_3}{\partial x} + M_3 \delta \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (8)$$

где q_i, M_i – компоненты внешних сил и моментов функции ($i = 1, 2, 3$).

Величины q_i, M_i являются функциями координат x и t , вид которых определяется характером распределения по стержню и во времени действующих внешних сил.

Основные соотношения для криволинейного стержня. Выделим некоторый участок криволинейного стержня, продольная ось которого l_n лежит на поверхности Ω_n . Введем декартову систему координат $Oxuz$ с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Выберем такие размеры выделенного участка, чтобы поверхность Ω_n можно было описать уравнением $z = Z(x, y)$. Зададим линию l_n в параметрическом виде:

$$x = x(s); y = y(s); z = Z(x(s); y(s)). \quad (9)$$

Радиус-вектор поверхности Ω_n

$$\bar{R}_\Omega = x \bar{i} + y \bar{j} + Z(x, y) \bar{k}.$$

Если в последнее соотношение подставить выражения (9), то получим радиус-вектор линии l_n

$$\bar{r} = x(s) \bar{i} + y(s) \bar{j} + Z(x(s), y(s)) \bar{k}. \quad (10)$$

В поперечных сечениях стержня введем репер с началом в центре тяжести O_1 :

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}; \bar{v}_2 = \frac{d\bar{r}}{dx} \cdot \frac{d\bar{r}}{dy}; \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \bar{\tau}. \quad (11)$$

Вектор $\bar{\tau}$ направлен по касательной к l_n , а \bar{v}_2 – по нормали к Ω_n . В направлении векторов \bar{v}_1, \bar{v}_2 введем оси координат $O_1 \xi_1$ и $O_1 \xi_2$. В этой системе координат радиус вектор точек поперечных сечений стержня

$$\bar{\rho} = \xi_1 \bar{v}_1 + \xi_2 \bar{v}_2.$$

Векторы перемещения точек продольной оси стержня и углов поворота поперечных сечений определяются по формулам

$$\bar{U}(s, t) = u_1 \bar{\tau} + u_2 \bar{v}_1 + u_3 \bar{v}_2; \bar{\varphi}(s, t) = \varphi_1 \bar{\tau} - \frac{\partial u_3}{\partial s} \bar{v}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial s} \bar{v}_2.$$

Вектор перемещения стержня

$$\bar{W}_\rho = \bar{U} + \bar{\varphi}\bar{\rho},$$

где $\bar{\rho} = \xi_1 \bar{j} + \xi_2 \bar{k}$.

С учетом выражений для \bar{U} , $\bar{\varphi}$, $\bar{\rho}$ получается, что вектор перемещения точек стержня при деформировании

$$\bar{W}_\rho = \bar{U} + \bar{\varphi}\bar{\rho} = \left(u_1 - \xi_2 \frac{\partial u_3}{\partial s} + \xi_1 \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{i} + (u_2 - \xi_2 \varphi_1) \bar{v}_1 + (u_3 + \xi_1 \varphi_1) \bar{v}_2.$$

Радиусы-векторы точек стержня до и после деформации вычисляются по формулам

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\rho} = x(s) \bar{i} + y(s) \bar{j} + Z(x(s), y(s)) \bar{k} + \xi_1 \bar{v}_1(s) + \xi_2 \bar{v}_2(s);$$

$$\bar{R}^* = \bar{R} + \bar{W}_\rho.$$

Используя выражения (10), (11) и учитывая, что

$$\frac{d\bar{r}}{dx} = \bar{i} + \frac{dZ}{dx} \bar{k}; \quad \frac{d\bar{r}}{dy} = \bar{j} + \frac{dZ}{dy} \bar{k},$$

находим

$$\bar{v}_1 = \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dZ}{ds} \bar{k}; \quad \bar{v}_2 = -\frac{dZ}{dx} \bar{i} - \frac{dZ}{dy} \bar{j} + \bar{k}.$$

$$\bar{v}_1 = -\left(\frac{dy}{ds} + \frac{dZ}{ds} \frac{dZ}{dy} \right) \bar{i} + \left(\frac{dx}{ds} + \frac{dZ}{ds} \frac{dZ}{dx} \right) \bar{j} + \left(\frac{dZ}{dy} \frac{dx}{ds} - \frac{dZ}{dx} \frac{dy}{ds} \right) \bar{k}.$$

Рассмотрим стержни малой кривизны, для которых должны выполняться условия

$$\left| \xi_1 \frac{d^2 x}{ds^2} \right| \ll 1; \quad \left| \xi_1 \frac{d^2 y}{ds^2} \right| \ll 1; \quad \left| \xi_2 \frac{d^2 Z}{ds^2} \right| \ll 1.$$

Используя приведенные в статье соотношения для $d\bar{R}^*$, $d\bar{R}$, получаем

$$d\bar{R}^* d\bar{R}^* - d\bar{R} d\bar{R} = 2d\bar{R} d\bar{W}_\rho = 2 \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} ds ds + 2 \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_1} \right) ds d\xi_1 + 2 \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_2} \right) ds d\xi_2.$$

Следовательно, компоненты деформации будут вычисляться по формулам

$$\varepsilon = \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s}; \quad \gamma_{\tau i} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_i}; \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} &= \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dZ}{ds} \bar{k} + \xi_1 \frac{d\bar{v}_1}{ds} + \xi_2 \frac{d\bar{v}_2}{ds} = \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dZ}{ds} \bar{k} - \xi_1 \left[\left(\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{d^2 Z}{ds^2} + \frac{dZ}{ds} \frac{d^2 Z}{ds dy} \right) \bar{i} - \right. \\ &\left. - \left(\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dZ}{dx} \cdot \frac{d^2 Z}{ds^2} + \frac{dZ}{ds} \cdot \frac{d^2 Z}{dx ds} \right) \bar{j} - \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2 Z}{dy ds} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2 Z}{dx ds} - \frac{dZ}{ds} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2} \right) \bar{k} \right] - \xi_2 \left[\frac{d^2 Z}{ds dx} \bar{i} + \frac{d^2 Z}{ds dy} \bar{j} \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} = - \left(\frac{dy}{ds} + \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{dZ}{ds} \right) \bar{i} + \left(\frac{dx}{ds} + \frac{dZ}{dx} \cdot \frac{dZ}{ds} \right) \bar{j} + \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dZ}{dy} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dZ}{dx} \right) \bar{k}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} = - \frac{dZ}{dx} \bar{i} - \frac{dZ}{dy} \bar{j} + \bar{k};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} = & \frac{\partial u_1}{\partial s} \bar{i} + \frac{\partial u_2}{\partial s} \bar{j} + \frac{d\theta}{ds} \bar{k} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} \bar{\rho} + \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial s} = \frac{\partial u_1}{\partial s} \bar{i} + \frac{\partial u_2}{\partial s} \bar{j} + \frac{\partial u_3}{\partial s} \bar{k} - \xi_1 \left[\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{d^2 Z}{ds dy} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial s} + \frac{d^2 x}{ds^2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{i} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{d^2 Z}{ds dy} \varphi_1 + \frac{d^2 y}{ds^2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{j} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} - \frac{d^2 x}{ds^2} \varphi_1 + \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) \bar{k} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \xi_2 \left[\left(- \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + \frac{d^2 Z}{ds dy} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} + \frac{d^2 Z}{ds dy} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{j} - \left(\frac{d^2 Z}{ds dy} \varphi_1 + \frac{d^2 Z}{ds dy} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) \bar{k} \right];$$

$$\frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_1} = - \frac{\partial u_2}{\partial s} \bar{i} - \frac{\partial u_3}{\partial s} \bar{k}; \quad \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_2} = - \frac{\partial u_3}{\partial s} \bar{i} - \varphi_1 \bar{j}.$$

Как видно из соотношений (12)–(13), выражения для компонентов деформации являются сравнительно громоздкими и справедливы в случае, когда продольная ось стержня l_n находится на полой поверхности Ω_n . Кроме того, коэффициенты перед искомыми функциями в (13) являются первой и второй производной уравнения поверхности $z = Z(x, y)$, поэтому в общем случае, когда линия продольной оси стержня l_n имеет недостаточно простой вид, эти коэффициенты будут переменными величинами и для их определения с нужной точностью необходимо использовать специальные алгоритмы [1–5].

Отметим, что указанные особенности в выражениях для компонентов деформации имеются и в классических теориях криволинейных стержней [6–9].

Для существенного упрощения указанных формул и снятия ограничения, связанного с пологостью Ω_n , поступаем следующим образом.

Введем две декартовы системы координат, глобальную – $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ и локальную – $Oxyz$. Начало локальной системы координат совместим с точкой продольной оси стержня, находящейся в сечении, для которого нужно вычислить деформации. Обозначим координату этой точки s_i . Совместим направления ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ локальной системы координат $Oxyz$ с направлением векторов репера $\bar{\tau}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2$. В этом случае в точке начала координат при $s = s_i$

$$\frac{dx}{ds} = 1; \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dZ}{ds} = \frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dy} = 0; \quad \xi_1 = y; \quad \xi_2 = z. \quad (14)$$

С учетом (14) соотношения (13) существенно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = \bar{i}; \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} = \bar{j}; \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} = \bar{k};$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial s} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \bar{j} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \bar{k} - \xi_1 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \bar{i} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \bar{k} \right) - \xi_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \bar{i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \bar{j} \right);$$

$$\frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \bar{k}; \quad \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_2} = - \frac{\partial u_3}{\partial x} \bar{i} - \varphi_1 \bar{j}.$$

Подставляя эти выражения в соотношения (12), получим формулы для вычисления деформаций, такие же как формулы для прямолинейного стержня в виде (5).

Таким образом показано, что для криволинейного стержня компоненты деформации в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ определяются такими же соотношениями, как и для прямолинейно-

го стержня. Деформации вычисляются по формуле (5). Вариации потенциальной и кинетической энергий деформации, работа внешних сил определяются соотношениями (7), (8).

При проведении расчетов следует ввести вектор перемещения

$$\{\tilde{U}\}^T = \{\tilde{u}_1(s, t), \tilde{u}_2(s, t), \tilde{u}_3(s, t)\}$$

и вектор углов поворота поперечных сечений стержня

$$\{\tilde{\varphi}\}^T = \left\{ \tilde{\varphi}_1(s, t), -\frac{\partial \tilde{u}_3(s, t)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{u}_2(s, t)}{\partial x} \right\}$$

с компонентами, определенными в глобальной декартовой системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$. Перемещения $\{U\}^T = \{u_1(s, t), u_2(s, t), u_3(s, t)\}$ и повороты $\{\varphi\}^T = \{\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t), \varphi_3(s, t)\}$ в локальной системе координат $Oxuz$ будут выражаться через $\{\tilde{U}\}$ и $\{\tilde{\varphi}\}$ по формулам

$$\{U\} = [A_u]\{\tilde{U}\}; \{\varphi\} = [A_u]\{\tilde{\varphi}\}, \quad (15)$$

где $[A_u]$ – матрица направляющих косинусов n_{ij} ($i, j = 1, 3$) локальной системы координат.

Вследствие того, что при дифференцировании по направлению Ox направляющие косинусы n_{ij} являются константами, справедливы равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\{U\} = [A_u]\frac{\partial}{\partial x}\{\tilde{U}\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\varphi\} = [A_u]\frac{\partial}{\partial x}\{\tilde{\varphi}\}. \quad (16)$$

При вычислении деформаций и напряжений, а также при записи условия (2) следует, с учетом (15), (16), все величины выражать через компоненты векторов $\{\tilde{U}\}$, $\{\tilde{\varphi}\}$, определенные в глобальной системе координат.

Для проведения расчетов на основе описанной математической модели использовался вариационный метод. Опишем методику расчета.

На каждом их участков стержневой системы с продольной осью l_n введем вектор $\bar{U}_n(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ и угол поворота $\tilde{\varphi}_n(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)$ с компонентами в глобальной системе координат.

С учетом соотношений (7), (8), (6), (16) условие (1) можно записать следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_i^I [\delta K(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}_n(s_i, t)) - \delta \Pi(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}_n(s_i, t)) + \delta' W(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}_n(s_i, t)) H_{ni}] \right\} = 0. \quad (17)$$

Представим перемещения и угол поворота $\tilde{\varphi}_1(t, s)$ в виде рядов

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k(t, s) &= \sum_{m=1}^M A_{km}^n(t) f_m(s), k = \overline{1, 3}; \\ \tilde{\varphi}_1(t, s) &= \sum_{m=1}^M B_m^n(t) f_m(s), \end{aligned} \quad (18)$$

где $A_{km}^n(t)$, $B_m^n(t)$ – функции, подлежащие определению из решения; $0 \leq s \leq 1$; $f_1(s) = (1 - s^2)^2$; $f_2(s) = [s(2 - s)]^2$; $f_3(s) = s(s - 1)^2$; $f_4(s) = s^2(s - 1)$; $f_j(s) = [(1 - s^2)s^2]s^{j-1}$; $j = \overline{1, M - 4}$.

Значению $s = 0$ соответствует начало участка стержня, значению $s = 1$ – конец.

Функции $f_m(s)$ таковы, что на концах отрезка $0 \leq s \leq 1$ выполняются равенства

$$\tilde{u}_k(0, t) = A_{k1}^n(t); \quad \tilde{u}_k(1, t) = A_{k2}^n(t);$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_k(0, t)}{\partial s} = A_{k3}^n(t); \quad \frac{\partial \tilde{u}_k(1, t)}{\partial s} = A_{k4}^n(t); \quad k = \overline{1, 3};$$

$$\tilde{\varphi}_1(0, t) = B_1^n(t); \quad \tilde{\varphi}_1(1, t) = B_2^n(t);$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1(0, t)}{\partial s} = B_3^n(t); \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(1, t)}{\partial s} = B_4^n(t).$$

Следовательно, $A_{k1}^n(t)$, $A_{k2}^n(t)$, $A_{k3}^n(t)$, $A_{k4}^n(t)$, $B_1^n(t)$, $B_2^n(t)$, $B_3^n(t)$, $B_4^n(t)$ – это значения функций $\tilde{u}_k(t, s)$, $\tilde{\varphi}_1(t, s)$ и их первых производных при $s = 0$ и при $s = 1$. Использование аппроксимирующих функций в виде (18) позволяет легко удовлетворять геометрическим граничным условиям для искомых функций и их производной. Например, для удовлетворения условий $\tilde{u}_1 = 1$ при $s = 0$, $\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial s} = 0$ при $s = 1$ следует положить $A_{11}^n = 1$, $A_{14}^n = 0$.

Использование аппроксимирующих функций в виде (18) также позволяет легко осуществить стыковку перемещений и углов поворота на концах участков стержневой системы. Так, если положить $A_{k2}^n = A_{k1}^{n+1}$, $A_{k4}^n = A_{k3}^{n+1}$, то будет выполнено условие стыковки концов двух стержней с номерами n и $n + 1$ для перемещений и первых производных от перемещений.

Поэтому при проведении расчетов часть коэффициентов рядов (18) находится из геометрических граничных условий, а также из условий стыковки перемещений и первых производных от перемещений на границах участков стержней.

Подставляя выражение (18) в условие (17), получим систему уравнений для определения $A_{km}^n(t)$, $B_m^n(t)$:

$$[M]\{\ddot{C}\} + [K]\{C\} = \{F\}, \quad (19)$$

где $[M]$, $[K]$ – матрицы масс и жесткости стержневой системы; $\{C\} = \{A_{11}, A_{12}, \dots, B_M^N\}^T$ – вектор функция; $\{F\}$ – вектор, зависящий от действующей внешней нагрузки; точка над обозначением означает дифференцирование по времени.

При свободных колебаниях конструкции внешние силы равны нулю и система уравнений (19) записывается следующим образом:

$$[M]\{\ddot{C}\} + [K]\{C\} = 0.$$

Полагая $\{C\} = \sin(\omega t) \{V\}$, получаем

$$[K]\{V\} + \omega^2[M]\{V\} = 0.$$

Для статической задачи уравнения (20) принимают вид

$$[K]\{C\} = \{F\}.$$

Результаты расчетов

Представим примеры сравнения результатов расчета по описанному методу с опубликованными в литературе данными. Эти примеры показывают достоверность и высокую точность получаемых решений.

На рис. 1, а схематически показан стержень с продольной осью в виде окружности радиуса $R = 50$ см, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой $q = 0,1$ н/см. Один конец стержня зашцеplен, другой – свободен. Поперечное сечение – квадрат со стороной $h = 1$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $N = 1$, $M = 14$. В результате решения получено $u_3 = 1,3$ см (при $\alpha = 90^\circ$), $\sigma_{\max} = -29,5$ МПа ($\alpha = 180^\circ$). На основе классической теории криволинейных стержней [29] получается $u_3 = 1,4$ см, $\sigma_{\max} = -29,8$ МПа.

Представленные здесь соотношения являются справедливыми и для естественно закрученных стержней. Приведем решение задачи изгиба сосредоточенным моментом M_0 равномерно закрученного консольного стержня (рис. 1, б). На одном конце стержня заделка, а на другом конце, в плоскости $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{z}$ дей-

стствует момент M_0 . При расчетах полагалось $M_0 = 1,28 \cdot 10^5$ н·см, $l = 100$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $N = 1$, $M = 8$. Поперечное сечение стержня – прямоугольник со сторонами $b = 4$ см, $h = 6$ см. Рассмотрены случаи, когда вдоль продольной оси стержня угол закручивания $\alpha(\tilde{x})$ изменяется по линейному закону, а на конце – $\alpha(l) = 45^\circ$ и $\alpha(l) = 90^\circ$. Получены расчетные значения перемещения на конце стержня $\tilde{u}_1 = -0,94$ см и $\tilde{u}_1 = -0,83$ см. Эти величины с точностью до двух значащих цифр совпали с данными, приведенными в [29].

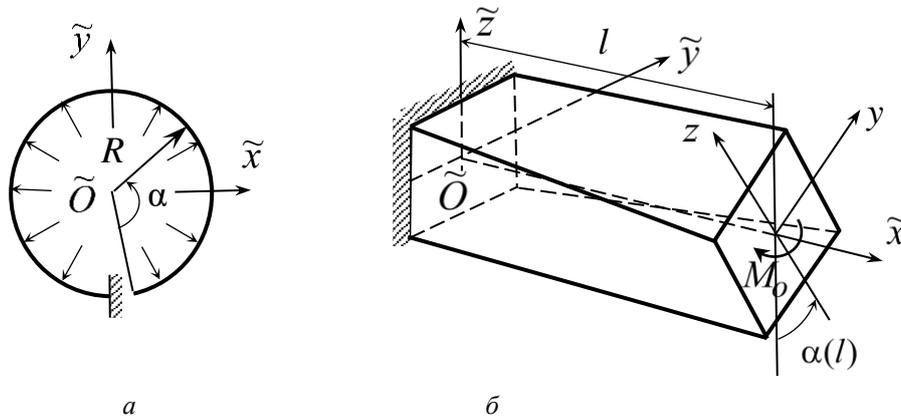


Рис. 1. Стержень с продольной осью в виде окружности (а), естественно закрученный стержень (б)
 Figure 1. A rod with a longitudinal axis in the form of a circle (a), naturally twisted rod (б)

Частоты собственных колебаний пружины с сосредоточенной на конце массой M^* (рис. 2) представлены во втором столбце таблицы. В последнем столбце таблицы приводятся данные из [29]. При расчетах полагалось, что длина пружины $l = 50$ см, радиус поперечного сечения $r = 0,5$ см, радиус винтовой оси $R = 10$ см, $\alpha = 15^\circ$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $\rho = 8 \cdot 10^{-7}$ н сек²/см⁴, $M^* = 4,19 \cdot 10^{-5}$ н сек²/см, $N = 3$, $M = 6$.

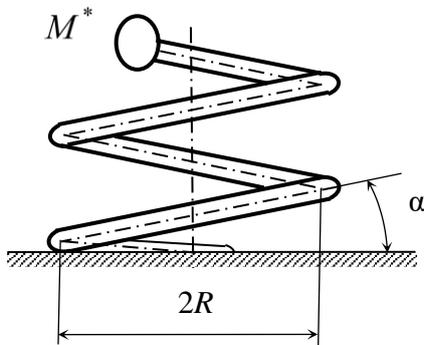


Рис. 2. Пружина
 Figure 2. Spring

Частоты колебаний пружины
 Spring vibration frequencies

| ω , Гц / Hz | Расчетные данные / Calculating data | Данные из [29] / Data from [29] |
|--------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| ω_1 | 5,6 | 5,79 |
| ω_2 | 7,3 | 7,04 |
| ω_3 | 15,8 | 14,31 |

Отметим, что в [29] результаты расчетов представлены в виде графиков, поэтому в последнем столбце таблицы данные могут иметь погрешность.

Заключение

Представлен метод расчета криволинейных стержней, основанный на использовании соотношений для прямолинейного стержня и гипотез Бернулли. Основное достоинство и особенность метода состоит в том, что для расчетов криволинейных стержней используются простейшие соотношения, в которые не входят кривизны продольной оси стержня. Как показывают численные расчеты тестовых задач, метод позволяет с высокой точностью получать решения задач статики и динамики криволинейных стержней.

Список литературы

1. Шулькин Ю.Б. Теория упругих стержневых конструкций: монография. М.: Наука, 1984. 271 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней: монография: в 2 ч. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1987. 320 с.
3. Светлицкий В.А. Механика стержней: монография: в 2 ч. Ч. 2. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
4. Грудев И.Д. Колебания криволинейных стержней: монография. М.: МИК, 2007. 254 с.
5. Левин В.Е., Пустовой Н.В. Механика деформирования криволинейных стержней: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. 208 с.
6. Серазутдинов М.Н., Недорезов О.А. Об аппроксимации срединной поверхности оболочки. Исследования по теории оболочек // Исследования по теории оболочек: труды семинара. Казань: Казанск. физ.-техн. ин-т КНЦ АН СССР, 1990. Вып. 25. С. 97–102.
7. Хайруллин Ф.С., Серазутдинов М.Н. Метод параметризации срединной поверхности тонкостенного элемента конструкции // Известия вузов. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 14–16.
8. Сахбиев О.М., Хайруллин Ф.С. Об одном из методов изогометрической аппроксимации кубическими сплайнами // Вестник технологического университета. 2022. Т. 25. № 5. С. 111–114.
9. Квасов Б.И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами: монография. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 360 с.
10. Кривошапко С.Н. О параболическом изгибании плоского металлического листа в торсовую конструкцию // Технологии машиностроения. 2020. № 11. С. 14–24.
11. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 553–561. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>
12. Papkova I.V., Krysko A.V., Krysko V.A. Theory and methods for studying the nonlinear dynamics of a beam – plate nano resonator taking into account the temperature and strain fields connection in additive color noise // Proceedings of the 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2020. <http://doi.org/10.23919/ICINS43215.2020.9133824>
13. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Deterministic chaos in one dimensional continuous system. World Scientific Publishing, 2016.
14. Papkova I.V., Krysko A.V., Saltykova O.A., Krysko V.A., Zakharova A.A. Contact interaction of flexible Timoshenko beams with small deflections // Journal of Physics: Conference Series. 2018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012087>
15. Saltykova O.A., Papkova I.V., Krysko V.A. Chaotic dynamics of two beams described by the kinematic hypothesis of the third approximation in the case of small clearance // Journal of Physics: Conference Series. 2018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012102>
16. Krysko V.A., Yakovleva T.V., Papkova I.V., Saltykova O.A., Pavlov S.P. The contact interaction of size-dependent and multi-modulus rectangular plate and beam // Journal of Physics: Conference Series. 2019. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032021>
17. Papkova I.V., Krylova E.Yu., Krysko A.V. Contact interaction of NEMS shell elements in a color noise field // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020;747(1):012059. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/747/1/012059>
18. Артюхин Ю.П. Приближенный аналитический способ исследования деформаций пространственных криволинейных стержней // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2012. Т. 154. № 3. С. 97–111.
19. Артюхин Ю.П. Произвольный изгиб консольного стержня консервативной силой // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. Т. 155. № 2. С. 144–157.
20. Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии: монография. Казань: ИММ РАН, 1993. 206 с.
21. Кривошапко С.Н. Оболочки и стержневые структуры в форме аналитически задаваемых поверхностей в современной архитектуре // Строительство и реконструкция. 2020. № 3 (89). С. 20–30.
22. Papkova I.V., Krysko A.V., Barulina M.A., Krysko V.A. Mathematical modeling of the nonlinear dynamics components of nanoelectromechanical sensors taking into account thermal, electrical and noise impacts // Proceedings of the 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2019. <http://doi.org/10.23919/ICINS.2019.8769406>
23. Tebyakin A., Papkova I.V., Krysko V.A. The variational iterations method for the three-dimensional equations analysis of mathematical physics and the solution visualization with its help // CEUR Workshop Proceedings. 2020;l:2744.
24. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Saltykova O.A. Analysis of the nonlinear dynamics of flexible two-layer beams, with account for their stratification // Engineering Dynamics and Life Sciences / ed. by J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, J. Mrozowski, P. Olejnik. Lodz: DAB&M of TUL Press, 2017. Pp. 297–308.
25. Saltykova O.A., Papkova I.V., Vetsel S.S., Krysko V.A. Investigation of the influence of changing the boundary conditions along the side of the plate on its chaotic dynamics // Journal of Physics Conference Series. 2019. Vol. 1158. No. 4. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042008>
26. Серазутдинов М.Н., Хайруллин Ф.С. Метод расчета криволинейных стержней // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1991. № 5. С. 104–108.
27. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Вариационный метод расчета прямолинейных и криволинейных тонкостенных стержней: монография. Казань: Изд-во КНИТУ, 2016. 144 с.
28. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. The method of calculating inelastic elements of rod structures under loading, unloading and reloading regimes // Journal of Physics Conference Series. 2019. Vol. 1158. No. 4. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042014>
29. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания: справочник: в 3 т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 821 с.

References

1. Shulkin Yu.B. *Theory of elastic rod structures*. Moscow: Nauka Publ.; 1984. (In Russ.)
2. Svetlitsky V.A. *Mechanics of rods* (part 1). Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1987. (In Russ.)
3. Svetlitsky V.A. *Mechanics of rods* (part 2). Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1987. (In Russ.)
4. Grudev I.D. *Vibrations of curved rods*. Moscow: MIK Publ.; 2007. (In Russ.)
5. Levin V.E., Pustovoy N.V. *Mechanics of deformation of curved rods*. Novosibirsk: NSTU Publ.; 2008. (In Russ.)
6. Serazutdinov M.N., Nedorezov O.A. On the approximation of the median surface of the shell. *Research on the Theory of Shells: Proceedings of the Seminar*. 1990;(25):97–102. (In Russ.)
7. Khairullin F.S., Serazutdinov M.N. Method of parametrization of the median surface of a thin-walled structural element. *Izvestiya Vuzov. Aviation Equipment*. 2006;(4):14–16. (In Russ.)
8. Sakhbiev O.M., Khairullin F.S. About one of the methods of isogeometric approximation by cubic splines. *Bulletin of the Technological University*. 2022;25(5):111–114. (In Russ.)
9. Kvasov B.I. *Methods of isogeometric approximation by spline*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)
10. Krivoshapko S.N. On parabolic bending of a flat metal sheet into a torso structure. *Technology of Mechanical Engineering*. 2020;(11):14–24. (In Russ.)
11. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):553–561. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>
12. Papkova I.V., Krysko A.V., Krysko V.A. Theory and methods for studying the nonlinear dynamics of a beam – plate nano resonator taking into account the temperature and strain fields connection in additive color noise. *Proceedings of the 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. 2020. <http://doi.org/10.23919/ICINS43215.2020.9133824>
13. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. *Deterministic chaos in one dimensional continuous system*. World Scientific Publishing; 2016.
14. Papkova I.V., Krysko A.V., Saltykova O.A., Krysko V.A., Zakharova A.A. Contact interaction of flexible Timoshenko beams with small deflections. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012087>
15. Saltykova O.A., Papkova I.V., Krysko V.A. Chaotic dynamics of two beams described by the kinematic hypothesis of the third approximation in the case of small clearance. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012102>
16. Krysko V.A., Yakovleva T.V., Papkova I.V., Saltykova O.A., Pavlov S.P. The contact interaction of size-dependent and multimodulus rectangular plate and beam. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032021>
17. Papkova I.V., Krylova E.Yu., Krysko A.V. Contact interaction of NEMS shell elements in a color noise field. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;747(1):012059. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/747/1/012059>
18. Artyukhin Yu.P. The analytical method for studying deformations of spatial curved rods. *Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 2012;154(3):97–111. (In Russ.)
19. Artyukhin Yu.P. Arbitrary bending of a cantilever rod by conservative force. *Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 2013;155(2):144–157. (In Russ.)
20. Yakupov N.M., Serazutdinov M.N. *Calculation of elastic thin-walled structures of complex geometry*. Kazan; 1993. (In Russ.)
21. Krivoshapko S.N. Shells and rod structures in the form of analytically undefined surfaces in modern architecture. *Construction and Reconstruction*. 2020;(3):20–30. (In Russ.)
22. Papkova I.V., Krysko A.V., Barulina M.A., Krysko V.A. Mathematical modeling of the nonlinear dynamics components of nanoelectromechanical sensors taking into account thermal, electrical and noise impacts. *Proceedings of the 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. 2019. <http://doi.org/10.23919/ICINS.2019.8769406>
23. Tebyakin A., Papkova I.V., Krysko V.A. The variational iterations method for the three-dimensional equations analysis of mathematical physics and the solution visualization with its help. *CEUR Workshop Proceedings*. 2020;(1):2744.
24. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Saltykova O.A. Analysis of the nonlinear dynamics of flexible two-layer beams, with account for their stratification. In: Awrejcewicz J., Kaźmierczak M., Mrozowski J., Olejnik P. (eds.) *Engineering Dynamics and Life Sciences* (pp. 297–308). Lodz: DAB&M of TUL Press; 2017.
25. Saltykova O.A., Papkova I.V., Vetsel S.S., Krysko V.A. Investigation of the influence of changing the boundary conditions along the side of the plate on its chaotic dynamics. *Journal of Physics Conference Series*. 2019;1158(4):042008. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042008>
26. Serazutdinov M.N., Khairullin F.S. Method of calculating curved rods. *News of Universities. Construction and Architecture*. 1991;(5):104–108. (In Russ.)
27. Serazutdinov M.N., Ubaydullov M.N. *Variational method of calculation of rectilinear and curved thin-walled rods*. Kazan: KNITU Publ.; 2016. (In Russ.)
28. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. The method of calculating inelastic elements of rod structures under loading, unloading and reloading regimes. *Journal of Physics Conference Series*. 2019;1158(4):042014. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042014>
29. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Strength, stability, fluctuations* (vol. 1). Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1968. (In Russ.)

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК GEOMETRICAL MODELING OF SHELL FORMS

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-84-93

EDN: GFIGAE

УДК 69:624.074:624.012.4

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Геометрия и статический расчет тонких оболочек в форме поверхности диагонального переноса велароидального типа

О.О. Алёшина 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ xiaofeng@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 8 октября 2022 г.

Доработана: 24 декабря 2022 г.

Принята к публикации: 27 декабря 2022 г.

Для цитирования

Алёшина О.О. Геометрия и статический расчет тонких оболочек в форме поверхности диагонального переноса велароидального типа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 84–93. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-84-93>

Аннотация. Представлены результаты изучения геометрии и напряженно-деформированного состояния поверхности с каркасом из трех плоских кривых в координатных плоскостях, нашедших на сегодняшний день применение в основном в судостроительной промышленности. Цель исследования – выявление с точки зрения напряженно-деформированного состояния от действия постоянной равномерно распределенной нагрузки оптимальной оболочки диагонального переноса велароидального типа с одинаковым главным каркасом из трех суперэллипсов. Статический расчет выполнен с помощью программы SCAD на базе метода конечных элементов, предназначенной для выполнения прочностных расчетов различного вида и назначения конструкций. Показано влияние параметрических уравнений задания поверхности в зависимости от образующего семейства однотипных сечений на картину распределения нормальных напряжений и изгибающих моментов. Полученные результаты могут помочь архитекторам и конструкторам с выбором формы оболочек для новых проектов.

Ключевые слова: алгебраическая поверхность, параметрические уравнения поверхности, суперэллипс, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов

Geometry and static analysis of thin shells in the form of a diagonal translation surface of the velaroidal type

Olga O. Aleshina 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

✉ xiaofeng@yandex.ru

Article history

Received: October 8, 2022

Revised: December 24, 2022

Accepted: December 27, 2022

Abstract. The author presents the results of a study of the geometry and stress-strain state of a surface with a frame of three flat curves in coordinate planes, which have found application today mainly in the shipbuilding industry. The purpose of the work is to identify from the point of view of the stress-strain state

Алёшина Ольга Олеговна, кандидат технических наук, ассистент, департамент строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-8832-6790, Scopus Author ID: 6506458086, eLIBRARY SPIN-код: 8550-4986; xiaofeng@yandex.ru

Olga O. Aleshina, PhD, Assistant, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8832-6790, Scopus Author ID: 6506458086, eLIBRARY SPIN-code: 8550-4986; xiaofeng@yandex.ru

© Алёшина О.О., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>



For citation

Aleshina O.O. Geometry and static analysis of thin shells in the form of a diagonal translation surface of the velaroidal type. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):84–93. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-84-93>

from the action of a constant uniformly distributed load the most optimal shell of a diagonal transfer of a velaroidal type with the same main frame of three superellipses. The static calculation was performed using the SCAD program based on the finite element method, designed to perform strength calculations of various types and purposes of structures. The influence of parametric equations for defining a surface depending on the generative family of the same type of cross sections on the distribution pattern of normal stresses and bending moments is shown. The results obtained can help architects and designers with choosing the shape of shells for new projects.

Keywords: algebraic surface, parametric equations, surface, superellipse, stress-strain state, finite element method

Введение

В [1] впервые рассматриваются обобщенные алгебраические поверхности с каркасом из трех суперэллипсов [2]. Подтверждено, что имея один и тот же каркас из трех плоских суперэллипсов, можно получить три алгебраические поверхности разных порядков. Суперэллипсы как образующие кривые поверхностей переноса с пространственной направляющей линией на цилиндре применяются для построения поверхностей в [3].

Известны *поверхности диагонального переноса*. Они образуются по принципу переноса конгруэнтной плоской кривой по направляющей так, что при скольжении образующей кривой по плоскому неподвижному контуру две ее симметричные точки непрерывно его касаются [4]. Приведенное определение не совсем точно идентифицирует изучаемые поверхности. *Велароидальной* называется *поверхность переноса* на плоском прямоугольном плане с образующей кривой переменной кривизны. Таким образом, поверхность ограничена четырьмя взаимно ортогональными контурными прямыми, лежащими в одной плоскости [5]. Это определение также не совсем корректно для рассматриваемых поверхностей. Известна также группа *поверхностей велароидального типа* [6]. По-видимому, рассматриваемые поверхности должны быть выделены в особую группу *поверхностей диагонального переноса велароидального типа с главным каркасом из трех плоских кривых*.

В [7] впервые предложено использовать алгебраические поверхности с каркасом из трех плоских кривых в координатных плоскостях, нашедших применение в судостроительной промышленности [8] и в строительной отрасли в качестве оболочек для перекрытия больших площадей.

Цель исследования – выявить с точки зрения напряженно-деформированного состояния от действия постоянной равномерно распределенной нагрузки оптимальную оболочку диагонального переноса велароидального типа с одинаковым главным каркасом из трех суперэллипсов.

Метод***Геометрия поверхностей диагонального переноса велароидального типа с главным каркасом из трех плоских кривых***

Пусть три плоских суперэллипса, лежащие в трех главных координатных плоскостях, формируют главный каркас исследуемой поверхности, то есть:

– кривая 1 в плоскости $z = 0$:

$$|y|^r = W^r \left(1 - \frac{|x|^t}{L^t} \right); \quad (1)$$

– кривая 2 в плоскости $x = 0$:

$$z^n = T^n \left(1 - \frac{|y|^m}{W^m} \right); \quad (2)$$

– кривая 3 в плоскости $y = 0$:

$$z^s = T^s \left(1 - \frac{|x|^k}{L^k} \right), \quad (3)$$

где для выпуклых кривых $r, t, n, m, s, k > 1$; для вогнутых кривых $r, t, n, m, s, k < 1$.

В этом случае, как указывалось во введении, можно получить явные алгебраические уравнения трех разных поверхностей, содержащих одинаковые плоские кривые (1)–(3) [1]. Эти явные алгебраические уравнения поверхностей легко перевести в параметрическую форму с образующим семейством однотипных сечений:

– $x = \text{const}$:

$$\begin{aligned} x &= x(u) = \pm uL; \quad y = y(u, v) = vW[1 - u^t]^{1/r}; \\ z &= z(u, v) = T[1 - u^k]^{1/s}[1 - |v|^m]^{1/n}; \end{aligned} \quad (4)$$

– $y = \text{const}$:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = vL[1 - u^r]^{1/t}; \quad y = y(u) = \pm uW; \\ z &= z(u, v) = T[1 - u^m]^{1/n}[1 - |v|^k]^{1/s}; \end{aligned} \quad (5)$$

– $z = \text{const}$:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = vL[1 - u^s]^{1/k}; \quad y = y(u, v) = \pm W[1 - u^n]^{1/m}[1 - |v|^t]^{1/r}; \\ z &= z(u) = uT, \end{aligned} \quad (6)$$

где $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$; u, v – безразмерные параметры.

Для дальнейшего рассмотрения примем

$$L = 10 \text{ м}; \quad W = 7 \text{ м}; \quad T = 10 \text{ м}; \quad s = k = 2; \quad n = m = 2; \quad r = t = 1,5. \quad (7)$$

На рис. 1 изображены три поверхности, имеющие один и тот же главный каркас (1)–(3), но заданные тремя разными системами параметрических уравнений (4)–(6).

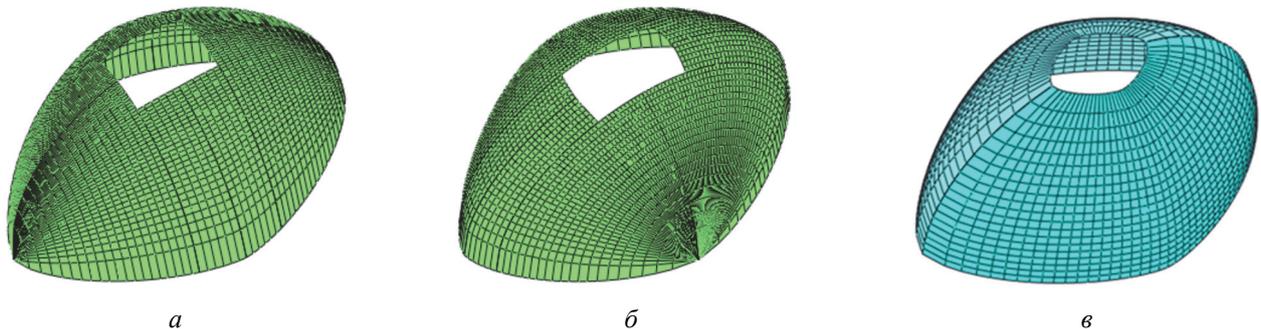


Рис. 1. Поверхности, описываемые параметрическими уравнениями (4)–(6),

$$L = 10 \text{ м}; \quad W = 7 \text{ м}; \quad T = 10 \text{ м}; \quad s = k = 2; \quad n = m = 2; \quad r = t = 1,5;$$

a – поверхность построена по формулам (4); b – поверхность построена по формулам (5); v – поверхность построена по формулам (6)

Figure 1. Surfaces governed by parametric equations (4)–(6),

$$L = 10 \text{ m}; \quad W = 7 \text{ m}; \quad T = 10 \text{ m}; \quad s = k = 2; \quad n = m = 2; \quad r = t = 1,5;$$

a – the surface is constructed according to the formulae (4); b – the surface is constructed according to the formulae (5);

v – the surface is constructed according to the formulae (6)

Пусть поверхность на рис. 1, a имеет отверстие в вершине с полуразмером вдоль оси y , равным $y_0 = 2$ м. Тогда из формулы (2) находим

$$z_0 = T \left(1 - \left(\frac{y_0}{W} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

то есть $z_0 = 9,583$ м.

Из формулы (3) определяем полуразмер отверстия в направлении оси x :

$$x_0 = L \left(1 - \left(\frac{z_0}{T} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

то есть $x_0 = 2,86$ м.

Таким образом, отверстие в вершине имеет размеры в осях $2x_0 \times 2y_0 = 2 \cdot 2,86 \times 2 \cdot 2$ м.

Поверхности на рис. 1, б, в также имеют аналогичные фонарные отверстия в вершинах. Края отверстий совпадают с координатными линиями. Поверхность на рис. 1, в имеет отверстие в вершине, совпадающее с координатной линией $u_0 = 0,958$, с размерами $2x_0$ и $2y_0$, равными $2 \cdot 2,86$ м и $2 \cdot 2$ м соответственно. Края отверстия совпадают также с линией пересечения поверхности, задаваемой параметрическими уравнениями (6), с горизонтальной плоскостью $z_0 = 9,583$ м.

Можно запроектировать отверстия так, чтобы их края на поверхностях, задаваемых уравнениями (4), (5), совпадали с линиями пересечения этих поверхностей с горизонтальной плоскостью $z_0 = \text{const}$, причем $z_0 < T$. В этом случае из явных уравнений рассматриваемых поверхностей, приведенных в [1; 7], находится явное уравнение линии пересечения поверхности (4) с плоскостью $z_0 = \text{const}$:

$$y = \pm W \left(1 - \frac{x^{3/2}}{L^{3/2}} \right)^{2/3} \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{T^2 \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)}}, \quad (10)$$

а также явное уравнение линии пересечения поверхности (5) с плоскостью $z_0 = \text{const}$:

$$x = \pm L \left(1 - \frac{y^{3/2}}{W^{3/2}} \right)^{2/3} \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{T^2 \left(1 - \frac{y^2}{W^2} \right)}}. \quad (11)$$

На рис. 2 изображены две поверхности, имеющие один и тот же главный каркас (1)–(3), но заданные двумя разными системами параметрических уравнений (4), (5). Края фонарных отверстий совпадают с линиями пересечения этих поверхностей с горизонтальной плоскостью $z_0 = 9,583$ м = const. Третья поверхность с отверстием в вершине, показанная на рис. 1, в, будет одинакова для обоих случаев. В последних двух формулах $-2,86$ м $\leq x \leq 2,86$ м, -2 м $\leq y \leq 2$ м.

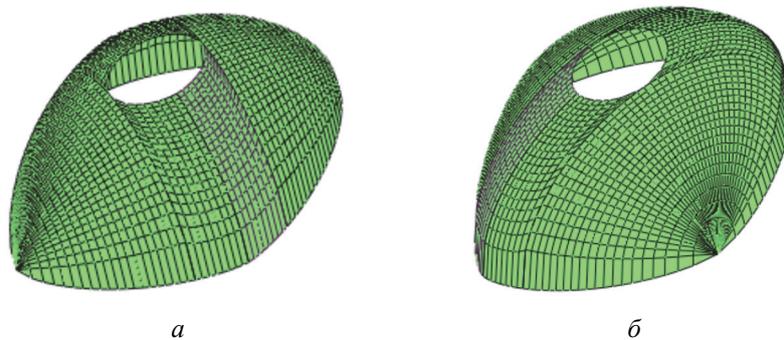


Рис. 2. Поверхности, описываемые параметрическими уравнениями (4), (5) с фонарными отверстиями, совпадающими с линией пересечения поверхности с горизонтальной плоскостью $z_0 = 9,583$ м; $L = 10$ м; $W = 7$ м; $T = 10$ м; $s = k = 2$; $n = m = 2$; $r = t = 1,5$:

a – поверхность построена по формулам (4); *б* – поверхность построена по формулам (5)

Figure 2. Surfaces governed by parametric equations (4), (5)

with lantern holes coinciding with the line of intersection of the surface with the horizontal plane

$z_0 = 9,583$ м; $L = 10$ м; $W = 7$ м; $T = 10$ м; $s = k = 2$; $n = m = 2$; $r = t = 1,5$:

a – the surface is constructed according to the formulae (4); *б* – the surface is constructed according to the formulae (5)

Статический расчет трех оболочек с одинаковым главным каркасом

Рассчитаем оболочки, представленные на рис. 1, на действие нагрузки типа собственного веса $q = 4$ кН/м², действующего в направлении, обратном направлению неподвижной координатной оси Oz . Геометрические параметры L , W , T и показатели степеней в уравнениях (4)–(6) срединных поверхностей оболочек даны в виде (7). Кроме того, примем постоянную толщину оболочек, равную $h = 7$ см, модуль упругости материала оболочки $E_b = 32\,500$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,17$. Будем считать, что обо-

лочка закреплена в основании по контуру $z = 0$. В вершине оболочек предусмотрено отверстие $2x_0 \times 2y_0$ со свободным контуром $z = z_0 = \text{const}$. Для получения результатов используем вычислительный комплекс SCAD¹ [9] на базе метода конечных элементов² [10] в перемещениях.

На рис. 3 и 4 представлены результаты расчета тонкой оболочки, изображенной на рис. 1, а. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки (рис. 1, а) выполнен с помощью программы SCAD. Для этого создана конечно-элементная математическая модель, собранная из восьми моделей-схем при автоматическом разбиении на различные сетки (разное количество разбиений по криволинейным координатным линиям поверхности u и v) для получения относительно равномерной аппроксимации срединной поверхности исследуемой оболочки плоскими четырехугольными конечными элементами (КЭ). При выполнении данной операции в нижней области оболочки со стороны оси Ox наблюдается сгущение сетки (рис. 1, а), при этом четырехугольные КЭ вырождаются в слишком вытянутые треугольные КЭ, и программа не может выполнить расчет. В связи с этим проблемная зона сгущения сетки была удалена и с помощью режима генерации сетки произвольной формы проведена локальная триангуляция. Однако в протоколе выполнения расчета выведена ошибка о наличии недопустимых углов в КЭ, то есть расчет не выполнен. После этого проведена трудоемкая работа по нанесению пользовательской сетки КЭ, результат представлен на рис. 3 и 4. Более того, для корректного отображения изополей напряжений и изгибающих моментов (рис. 3) необходимо выполнить выравнивание направлений выдачи результатов напряженного состояния. Количество конечных элементов в расчетной схеме 6066, узлов – 6078.

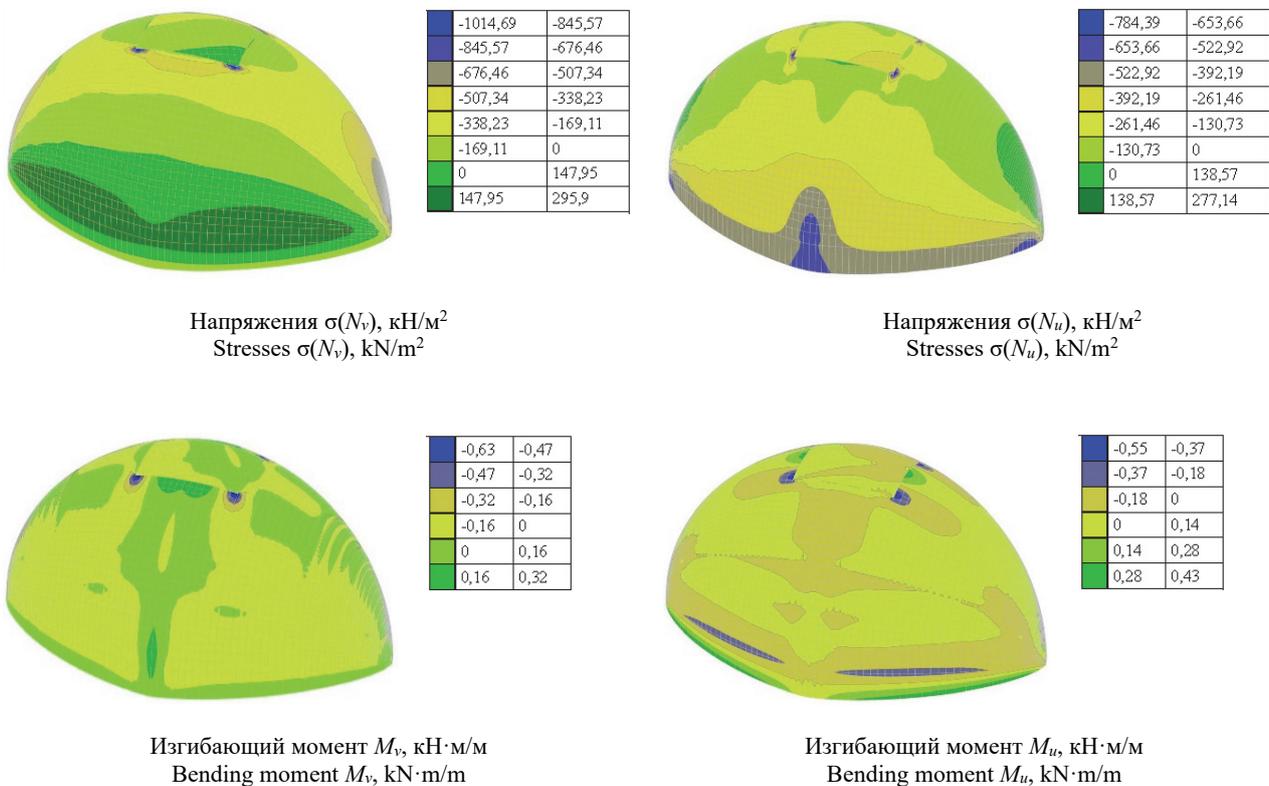


Рис. 3. Пример 1. Нормальные напряжения и внутренние изгибающие моменты
Figure 3. Example 1. Normal stresses and internal bending moments

На рис. 5 и 6 представлены результаты расчета тонкой оболочки, изображенной на рис. 1, б. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки (рис. 1, б) выполнен также в программе SCAD. По аналогии с примером 1 (рис. 1, а, 3 и 4) для примера 2 (рис. 1, б) создана конечно-элементная математическая модель, собранная из восьми моделей-схем. При построении расчетной схемы оболочки по

¹ Семенов А.А., Маляренко А.А., Порываев И.А., Нафиков К.Д. Вычислительный комплекс SCAD в строительном вузе (примеры и задачи): учебное пособие. М.: Изд-во АСВ: СКАД СОФТ, 2021. 395 с.

² Сидоров В.Н., Вершинин В.В. Метод конечных элементов в расчете сооружений. Теория, алгоритм, примеры расчетов в программном комплексе SIMULIA Abaqus: учебное пособие. М.: Изд-во АСВ, 2015. 288 с.

уравнениям (5) сгущение сетки образуется в нижней области со стороны оси Oy (рис. 1, б), при этом четырехугольные КЭ также вырождаются в вытянутые треугольные КЭ. Данная зона сгущения сетки была заменена на пользовательскую сетку КЭ (рис. 5 и 6). Количество конечных элементов в расчетной схеме 2896, узлов – 2942.

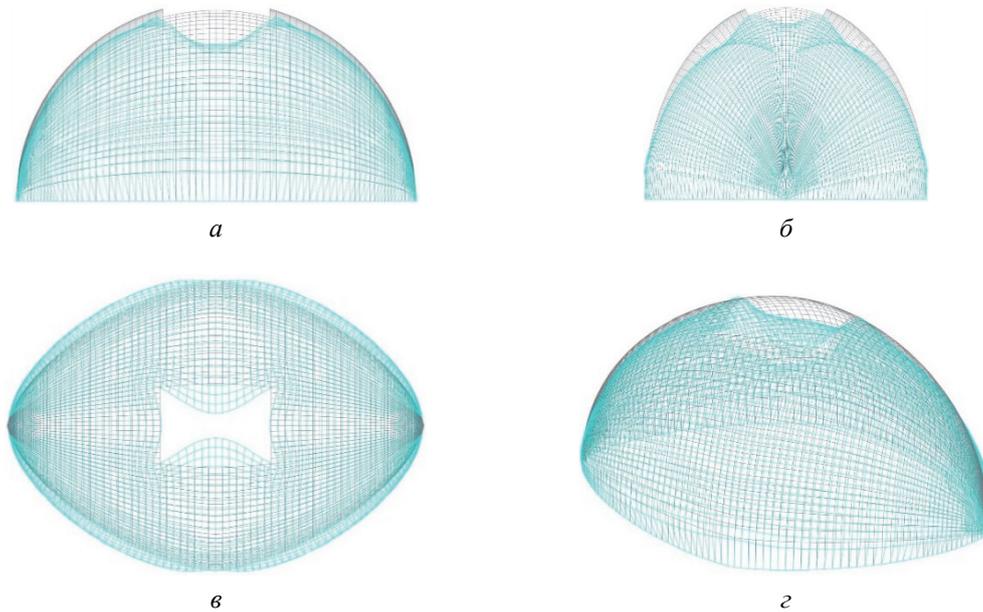


Рис. 4. Пример 1. Деформация срединной поверхности оболочки от внешней нагрузки типа собственного веса: a – вид со стороны оси Oy ; b – вид со стороны оси Ox ; v – вид сверху со стороны оси Oz ;

Figure 4. Example 1. Deformation of the middle surface of the shell from an external load of its own weight type: a – view from the Oy axis; b – view from the Ox axis; v – top view from the Oz axis; z – isometry of the deformed middle surface of the shell

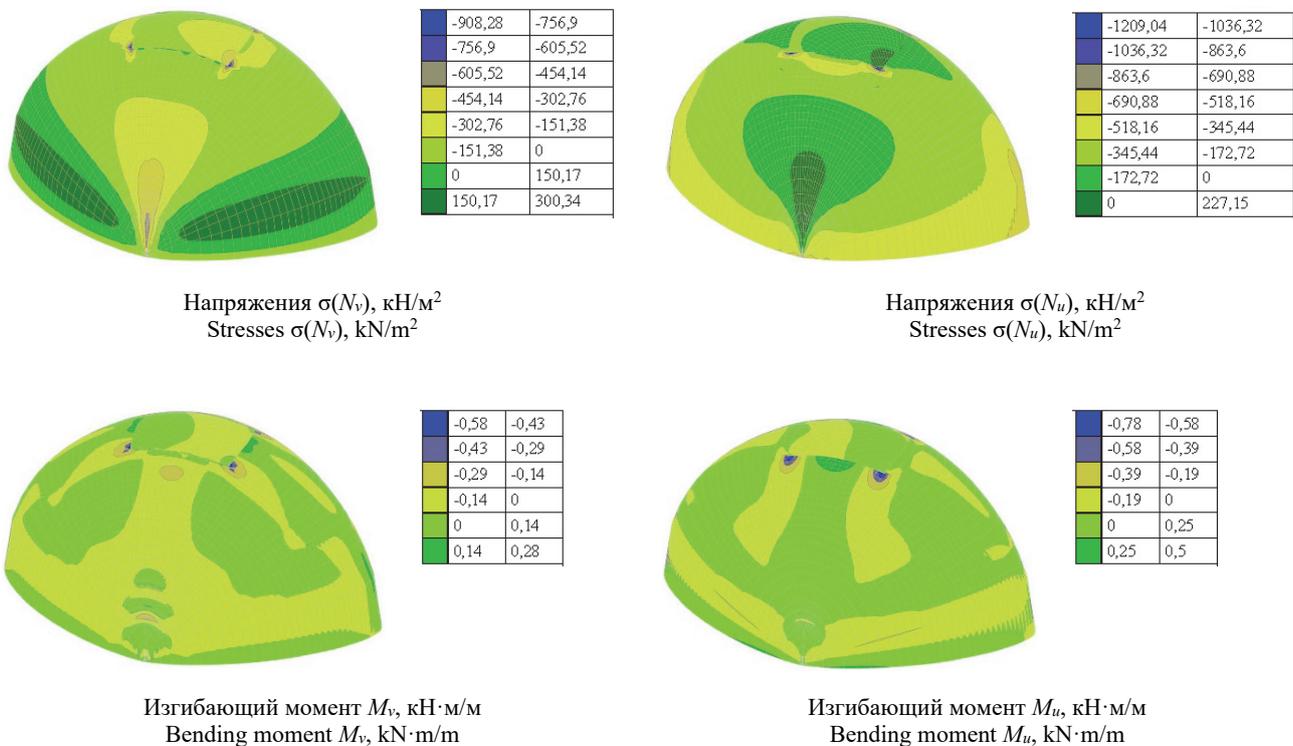


Рис. 5. Пример 2. Нормальные напряжения и внутренние изгибающие моменты
Figure 5. Example 2. Normal stresses and internal bending moments

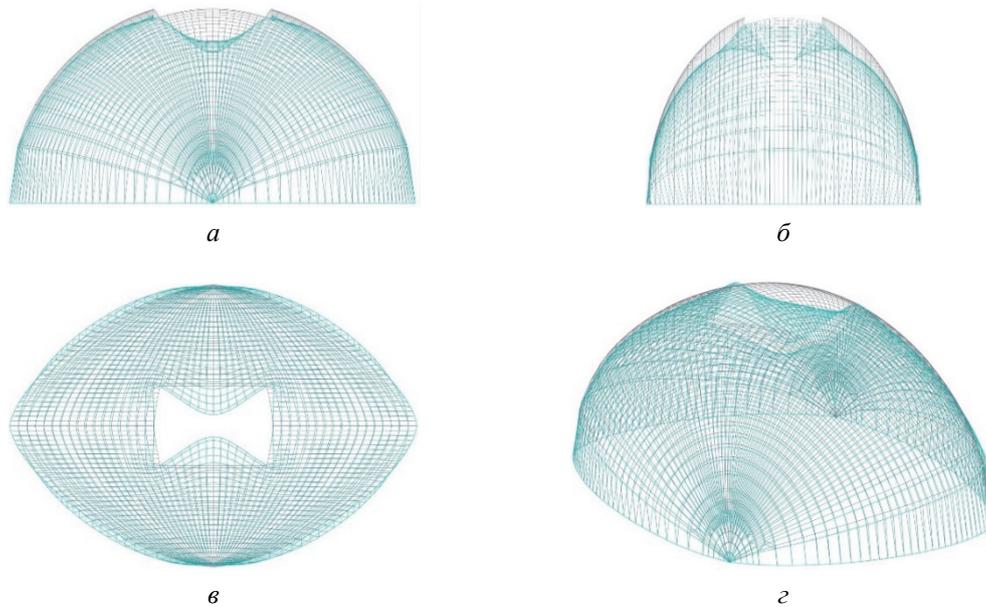


Рис. 6. Пример 2. Деформация срединной поверхности оболочки от внешней нагрузки типа собственного веса:

a – вид со стороны оси *Oy*; *б* – вид со стороны оси *Ox*; *в* – вид сверху со стороны оси *Oz*;

z – изометрия деформированной срединной поверхности оболочки

Figure 6. Example 2. Deformation of the middle surface of the shell from an external load of its own weight type:
a – view from the *Oy* axis; *б* – view from the *Ox* axis; *в* – top view from the *Oz* axis; *z* – isometry of the deformed middle surface of the shell

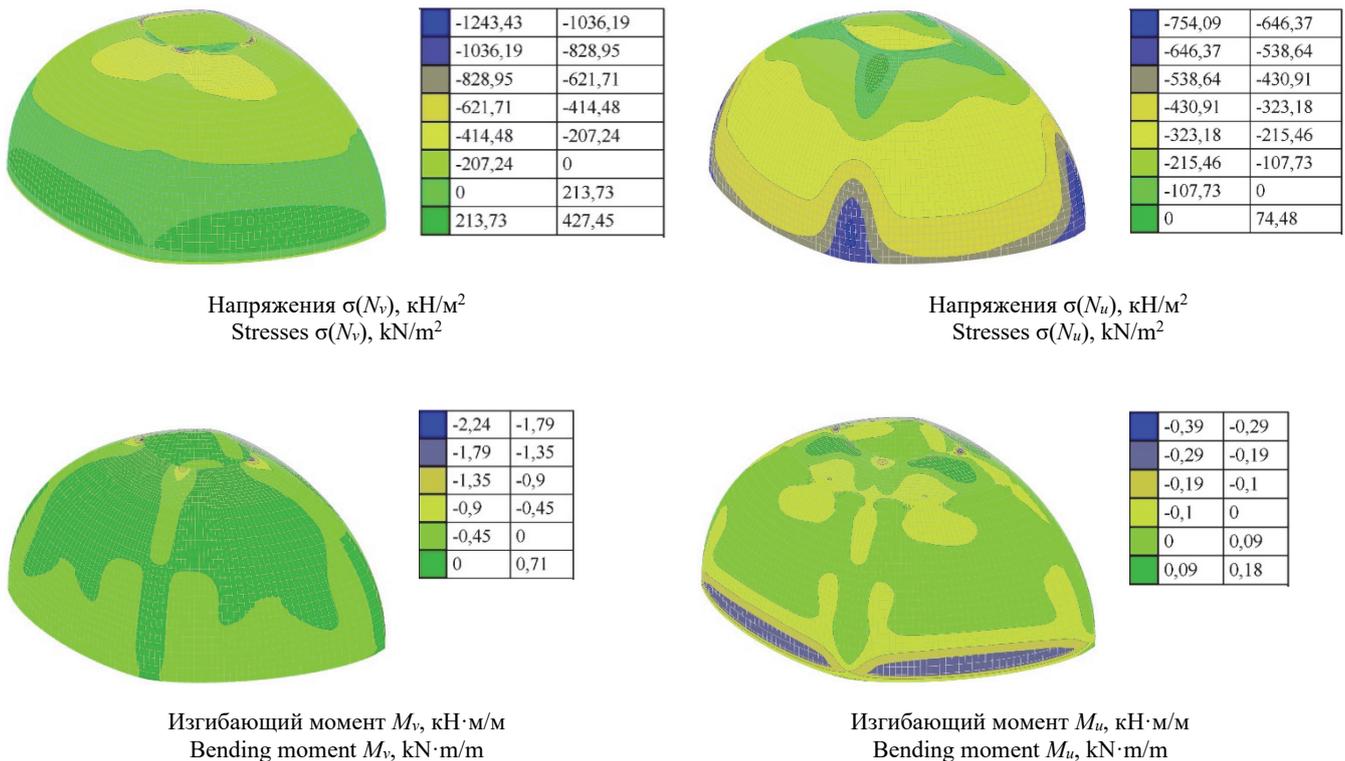


Рис. 7. Пример 3. Нормальные напряжения и внутренние изгибающие моменты

Figure 7. Example 3. Normal stresses and internal bending moments

На рис. 7 и 8 представлены результаты расчета тонкой оболочки, изображенной на рис. 1, в. Рис. 7 и 8 взяты из ранее опубликованной статьи [7], где рассматривались оболочки с теми же геометрическими параметрами $L = 10$ м, $W = 7$ м, $T = 10$ м, но с разными показателями степеней в формулах

суперэллипсов (1)–(3). Сделана попытка выяснить оптимальные оболочки в той группе тонких оболочек. При построении расчетной схемы оболочки на рис. 1, *в* по параметрическим уравнениям (6) в вычислительном комплексе SCAD область сгущения сетки КЭ находится в верхней части (зона отверстия) [7].

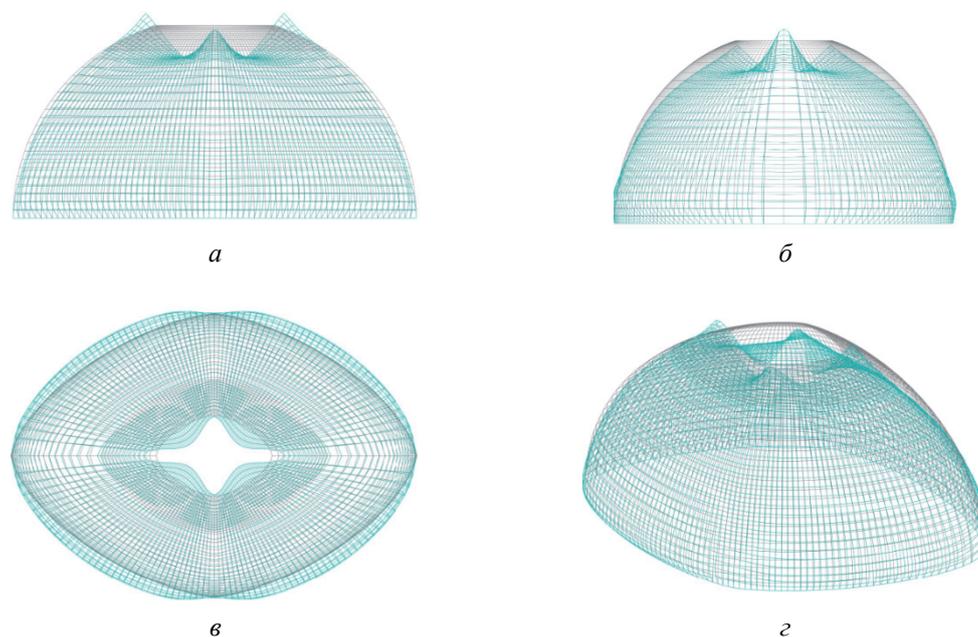


Рис. 8. Пример 3. Деформация срединной поверхности оболочки от внешней нагрузки типа собственного веса: *a* – вид со стороны оси *Oy*; *б* – вид со стороны оси *Ox*; *в* – вид сверху со стороны оси *Oz*; *г* – изометрия деформированной срединной поверхности оболочки

Figure 8. Example 3. Deformation of the middle surface of the shell from an external load of its own weight type: *a* – view from the *Oy* axis; *б* – view from the *Ox* axis; *в* – top view from the *Oz* axis; *г* – isometry of the deformed middle surface of the shell

Результаты и обсуждение

Анализ полученных результатов напряженного состояния трех исследуемых оболочек (рис. 1) показывает, что в них при действии нагрузки типа собственного веса возникают как сжимающие, так и растягивающие напряжения.

Вдоль координатной линии *v* при действии рассматриваемого типа нагрузки в примере 1 (рис. 1, *a*) числовые значения напряжений $\sigma(Nv)$ при растяжении от 0,00 до 295,90 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в нижней части оболочки со стороны оси *Oy* (рис. 3), а со стороны оси *Ox* – сжимающие напряжения $\sigma(Nv)$ (в зоне сгущения сетки КЭ). Значения напряжений $\sigma(Nv)$ при сжатии от –676,46 до 0,00 кН/м², в области отверстия в верхней части оболочки значения от –1014,69 до –676,46 кН/м² (рис. 3). В примере 2 (рис. 1, *б*) числовые значения напряжений $\sigma(Nv)$ при растяжении от 0,00 до 300,34 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в нижней части оболочки со стороны оси *Ox* (рис. 5), а со стороны оси *Oy* – сжимающие напряжения $\sigma(Nv)$ (в зоне сгущения сетки КЭ). Значения напряжений $\sigma(Nv)$ при сжатии от –605,52 до 0,00 кН/м², в области отверстия в верхней части оболочки значения от –908,28 до –605,52 кН/м². В примере 3 (рис. 1, *в*) числовые значения напряжений $\sigma(Nv)$ при растяжении от 0,00 до 427,45 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в нижней части оболочки по всей длине координатной линии *v* ($-1 \leq v \leq 1$) (рис. 7). Значения напряжений $\sigma(Nv)$ при сжатии от –621,71 до 0,00 кН/м², в области отверстия в верхней части оболочки значения от –1243,43 до –621,71 кН/м².

Вдоль координатной линии *u* при действии заданного типа нагрузки в примере 1 (рис. 1, *a*) числовые значения напряжений $\sigma(Nu)$ при растяжении от 0,00 до 277,14 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в оболочке со стороны оси *Ox* (в зоне сгущения сетки КЭ) (рис. 3). Значения напряжений $\sigma(Nu)$ при сжатии от –653,66 до 0,00 кН/м², в области отверстия в верхней части оболочки значения от –784,39 до –653,66 кН/м² (рис. 3). В примере 2 (рис. 1, *б*) числовые значения напряжений $\sigma(Nu)$ при растяжении от 0,00 до 227,15 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в оболочке со стороны оси *Oy* (в зоне сгущения сетки КЭ) (рис. 5). Значения напряжений $\sigma(Nu)$ при сжатии от –690,88 до 0,00 кН/м²,

в области отверстия в верхней части оболочки значения от $-1209,04$ до $-690,88$ кН/м². В примере 3 (рис. 1, в) вдоль криволинейной координатной линии u в срединной поверхности оболочки возникают сжимающие напряжения $\sigma(Nu)$ от $-754,09$ до $0,00$ кН/м², а растягивающие напряжения локализованы в верхней части оболочки около отверстия (рис. 7).

Исследование оболочек (рис. 1) в настоящей работе выполнено с помощью программы SCAD на базе метода конечных элементов, предназначенной для выполнения прочностных расчетов различного вида и назначения конструкций и сооружений, в том числе оболочечных конструкций [11; 12].

Поверхности диагонального переноса велароидального типа с главным каркасом из трех суперэллипсов значительно расширяют число поверхностей, пригодных к внедрению, несмотря на то что в настоящее время имеется значительный резерв форм, ждущих своего применения [13]. Предложенную методику поиска оптимальных оболочек среди троек оболочек с одинаковым главным каркасом можно использовать для случаев, когда суперэллипсы вырождаются в ромбы [14].

Интересные предложения даны в [15]. А.В. Коротич считает, что новые нетрадиционные формы оболочек могут стать альтернативой в традиционной архитектуре [16]. Оболочки в форме поверхностей диагонального переноса велароидального типа также можно использовать как составные фрагменты новых архитектурных оболочек [17]. В [18] показывается, что нет в мире страны, где бы не было построено хотя бы несколько большепролетных оболочек.

Заключение

Анализ полученных результатов напряженного состояния трех исследуемых оболочек (рис. 1) показывает, что в них при действии нагрузки типа собственного веса возникают как сжимающие, так и растягивающие напряжения.

Результаты полученных данных позволяют говорить об относительно схожих интервалах числовых значений нормальных напряжений $\sigma(Nv)$ и $\sigma(Nu)$ в оболочках в примерах 1–3, возникающих от действия нагрузки типа собственного веса. Как видно на рис. 1 формы каркасов трех оболочек одинаковые. При этом немного отличается картина распределения сжимающих и растягивающих напряжений в зависимости от параметрических уравнений (4)–(6) для построения поверхностей.

Список литературы

1. *Кривошапко С.Н.* Алгебраические судовые поверхности с каркасом из трех плоских кривых в координатных плоскостях // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 3. С. 207–212. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-3-207-212>
2. *Gardner M.* “Piet Hein’s Superellipse”, *Mathematical Carnival*. A new round-up of tantalizers and puzzles from scientific American. New York: Vintage Press, 1977. Pp. 240–254.
3. *Alborova L.A., Strashnov S.V.* Surfaces of congruent sections of pendulum type on cylinders with generatrix superellipses // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-64-72>
4. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. М.: Либроком, 2010. 560 с.
5. *Алборова Л.А.* Возможности велароидальных оболочек // Инженерные системы – 2020: труды научно-практической конференции с международным участием, посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов: в 2 т. Т. 1. М.: РУДН, 2020. С. 59–65.
6. *Krivoshapko S.N., Gil-Oulbe M.* Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids // *International Journal of Soft Computing and Engineering*. 2013. Vol. 3. Issue 3. Pp. 71–73.
7. *Кривошапко С.Н., Алёшина О.О., Иванов В.Н.* Статический расчет оболочки, очерченной по поверхности с каркасом из трех заданных суперэллипсов в координатных плоскостях // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 6 (305). С. 18–27. <http://doi.org/10.37538/0039-2383.2022.6.18.27>
8. *Карневич В.В.* Построение гидродинамических поверхностей каркасами из кривых Ламе на примере корпуса подводной лодки // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 1. С. 30–37. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-1-30-37>
9. *Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маларенко А.А., Микитаренко М.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.* Вычислительный комплекс SCAD. М.: СКАД СОФТ, 2021. 656 с.
10. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Vol. 1. The basis. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 707 p.
11. *Алёшина О.О., Иванов В.Н., Кахамарка-Сунига Д.* Анализ напряженного состояния оболочки одинакового ската при действии равномерно распределенной касательной нагрузки различными методами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 51–62. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>

12. Aleshina O., Cajamarca D., Barbecho J. Numerical comparative analysis of a thin-shell spatial structure for the Candela's Cosmic Rays Pavilion // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2021. Vol. 174. Pp. 741–752.
13. Adriaenssens S., Block P., Veenendaal D., Williams C.J.K. Shell structures for architecture: form finding and optimization. London, 2014. 340 p. <http://doi.org/10.4324/9781315849270>
14. Мамиева И.А. Линейчатые алгебраические поверхности с главным каркасом из трех суперэллипсов // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 4. С. 387–395. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-387-395>
15. Мингалимова В.Р. Применение поверхности переноса для образования составных оболочек // *Дни студенческой науки: сборник докладов научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ студентов Института цифровых технологий и моделирования в строительстве (ИЦТМС) НИУ МГСУ*. М., 2022. С. 104–107.
16. Коротич А.В. Инновационные решения архитектурных оболочек: альтернатива традиционному строительству // *Академический вестник УралНИИпроект РААСН*. 2015. № 4. С. 70–75.
17. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures // *Строительство и реконструкция*. 2019. № 5 (85). С. 23–34.
18. Кривошапко С.Н. Оболочечные структуры и оболочки в начале XXI в. // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 6. С. 553–561. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>

References

1. Krivoshapko S.N. Algebraic ship hull surfaces with a main frame from three plane curves in coordinate planes. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2022;23(3):207–212. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-3-207-212>
2. Gardner M. “Piet Hein's Superellipse”, *Mathematical Carnival. A new round-up of tantalizers and puzzles from scientific American*. New York: Vintage Press; 1977. p. 240–254.
3. Alborova L.A., Strashnov S.V. Surfaces of congruent sections of pendulum type on cylinders with generatrix superellipses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-64-72>
4. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of analytical surfaces*. Moscow: Librocom Publ.; 2010. (In Russ.)
5. Alborova L.A. Opportunities of velaroidal shells // *Engineering Systems – 2020: Proceedings of the Scientific and Practical Conference with International Participation Dedicated to the 60th Anniversary of the Peoples' Friendship University of Russia (vol. 1, pp. 59–65)*. Moscow: RUDN University; 2020. (In Russ.)
6. Krivoshapko S.N., Gil-Oulbe M. Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids. *International Journal of Soft Computing and Engineering*. 2013;3(3):71–73.
7. Krivoshapko S.N., Alyoshina O.O., Ivanov V.N. Static analysis of shells with middle surfaces containing the main frame from three given superellipses. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2022;(6):18–27. <http://doi.org/10.37538/0039-2383.2022.6.18.27>
8. Carnevich V.V. Generating hydrodynamic surfaces by families of Lamé curves for modelling submarine hulls. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2022;23(1):30–37. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-1-30-37>
9. Karpilovskii V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Mikitarenko M.A., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. *Computer system SCAD*. Moscow: SCAD SOFT; 2021.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. Vol. 1. The basis*. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2000.
11. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):51–62. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>
12. Aleshina O., Cajamarca D., Barbecho J. Numerical comparative analysis of a thin-shell spatial structure for the Candela's Cosmic Rays Pavilion. *Advances in the Astronautical Sciences*. 2021;174:741–752.
13. Adriaenssens S., Block P., Veenendaal D., Williams C.J. K. *Shell structures for architecture: form finding and optimization*. London; 2014. <http://doi.org/10.4324/9781315849270>
14. Mamieva I.A. Ruled algebraic surfaces with a main frame from three superellipses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):387–395. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-387-395>
15. Mingalimova V.R. Application of the transfer surface for the formation of composite shells. *Days of Student Science: Proceedings of the Scientific and Technical Conference on the Results of Research Work of Students of the Institute of Digital Technologies and Modeling in Construction (ICTMS) NRU MGSU*. Moscow; 2022. p. 104–107. (In Russ.)
16. Korotich A.V. Innovative solutions for architectural shells: an alternative to traditional construction. *Academic Bulletin UralNIIProekt RAASN*. 2015;(4):70–75. (In Russ.)
17. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures. *Building and Reconstruction*. 2019;(5):23–34.
18. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):553–561. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>

ГИДРОТЕХНИЧЕСКИЕ СООРУЖЕНИЯ HYDRAULIC CONSTRUCTIONS

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-94-109

EDN: GJKIEK

УДК 627.82+693.5

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Оценка безопасности массивно-контрфорсных плотин при наличии в них трещин температурного происхождения

В.А. Зимнюков , М.И. Зборовская  

Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, Москва, Российская Федерация

 moo_abh@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 20 ноября 2022 г.

Доработана: 22 января 2023 г.

Принята к публикации: 25 января 2023 г.

Для цитирования

Зимнюков В.А., Зборовская М.И. Оценка безопасности массивно-контрфорсных плотин при наличии в них трещин температурного происхождения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 94–109. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-94-109>

Аннотация. В 1950-е годы началось строительство гидроузлов в районах Сибири и Дальнего Востока, характеризующихся суровыми климатическими условиями, с учетом которых нужно уметь прогнозировать напряженное состояние плотин. Цель исследования – оценка условий формирования температурных трещин в бетонных плотинах и их влияния на дальнейшую работу сооружения, а также мероприятий и технологии по борьбе с трещинообразованием в массивном бетоне. Температурные напряжения нередко по величине превышают напряжения, вызванные действием внешних нагрузок, и приводят к появлению в бетоне трещин. Температурному трещинообразованию и сегодня подвержены практически все современные бетонные плотины. Необходимо предусматривать соответствующие конструктивные и технологические мероприятия. При изучении термонапряженного состояния облегченных бетонных плотин применяют метод непосредственного воспроизведения температурных деформаций на моделях из хрупких материалов и расчетные методы, ориентированные на компьютерные методы решения задач. Представлены результаты модельных и расчетных исследований массивных контрфорсных плотин, рассмотрено влияние основных воздействующих факторов с учетом влияния трещинообразования на работу таких плотин.

Ключевые слова: массивный бетон, перепад температуры, трещинообразование, суровый климат, температурный режим, термонапряженное состояние, охлаждение бетона, поверхностная изоляция, трубное охлаждение

Зимнюков Владимир Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры гидротехнических сооружений, Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, Российская Федерация, 127434, Москва, Тимирязевская ул., д. 49.; ORCID: 0000-0002-9892-146X, eLIBRARY SPIN-код: 9152-1962; zimnyukov@rgau-msha.ru

Зборовская Марина Ильинична, кандидат технических наук, доцент кафедры гидротехнических сооружений, Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, Российская Федерация, 127434, Москва, Тимирязевская ул., д. 49.; ORCID: 0000-0002-8405-8757, eLIBRARY SPIN-код: 6748-0927; moo_abh@mail.ru

© Зимнюков В.А., Зборовская М.И., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Safety assessment of massive buttress dams in the presence of thermal cracks in them

Vladimir A. Zimnyukov , Marina I. Zborovskaya  

Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russian Federation

 moo_abh@mail.ru

Article history

Received: November 20, 2022

Revised: January 22, 2023

Accepted: January 25, 2023

Abstract. In the 1950s, the construction of hydropower facilities began in the regions of Siberia and the Far East, characterized by harsh climatic conditions, which should be taking into account to predict the stress state of dams. The aim of the study is an assessment of the conditions for the formation of temperature cracks in concrete dams and their influence on the further operation of the structure, as well as measures and technologies to combat cracking in massive concrete. Thermal stresses often exceed the stresses caused by the action of external loads and lead to the appearance of cracks in the concrete. Almost all modern concrete dams are subject to thermal cracking today. Appropriate design and technological measures must be provided for. When studying the thermally stressed state of lightweight concrete dams, the method of direct reproduction of thermal deformations on models made of brittle materials and computational methods oriented towards computer methods of solving problems are used. The results of modeling and computational studies of massive buttress dams are presented and the influence of the main influencing factors is considered, taking into account the effect of cracking on the operation of such dams.

Keywords: massive concrete, temperature difference, cracking, harsh climate, temperature regime, thermal stress state, concrete cooling, surface insulation, pipe cooling

For citation

Zimnyukov V.A., Zborovskaya M.I. Safety assessment of massive buttress dams in the presence of thermal cracks in them. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):94–109. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-94-109>

Введение

В 1950-е годы началось строительство гидроузлов в районах Сибири и Дальнего Востока и во второй половине XX века гидроэнергетическое строительство продвинулось на восток России: Иркутская (1958 г.), Братская (1967 г.), Усть-Илимская (1974 г.) ГЭС на р. Ангаре; Красноярская (1972 г.), Саяно-Шушенская (1983 г.) ГЭС на р. Енисее; Вилюйская ГЭС на р. Вилюе (1976 г.); Колымская ГЭС на р. Колыме (1988 г.) и др.

С началом проектирования и строительства, а также эксплуатации бетонных плотин гидроузлов стало очевидно, что для таких плотин и природно-климатических условий весьма актуальными являются температурные воздействия и нужно уметь прогнозировать напряженное состояние плотин с их учетом.

Для особо суровых климатических условий средняя многолетняя температура может быть ниже $-3-4$ °C и им соответствуют большие величины амплитуды колебаний температуры (до 90 °C). Это Бухтарминская, Братская, Мамаканская и прочие гидроэлектростанции с бетонными плотинами [1].

Другими районами, где очевидно существует и остро стоит вопрос учета температурных воздействий на работу бетонных плотин и куда в 1970–1980-е годы пришло гидротехническое строительство, являются южные горные районы бывшего СССР. Их преимущество в возможности строительства высоконапорных гидроузлов большой емкости при малых площадях затопления. Но с целью облегчения доставки строительных материалов и с учетом наличия прочных скальных оснований для таких районов характерно строительство облегченных бетонных плотин – арочных и контрфорсных. Кроме того, такие плотины позволяют оптимальным образом регулировать температурный режим в строительный период, а районы строительства характеризуются перепадами до 20 °C в разрезе суток. Для их нормальной работы необходимо обеспечивать монолитность, а температурные трещины, возникающие во время строительства в

Vladimir A. Zimnyukov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Hydraulic Structures, Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, 49 Timiryazevskaya St, Moscow, 127434, Russia Federation; ORCID: 0000-0002-9892-146X, eLIBRARY SPIN-code: 9152-1962; zimnyukov@rgau-msha.ru

Marina I. Zborovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Hydraulic Structures, Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, 49 Timiryazevskaya St, Moscow, 127434, Russia Federation; ORCID: 0000-0002-8405-8757, eLIBRARY SPIN-code: 6748-0927; moo_abh@mail.ru

сейсмически активных зонах, могут нарушать монолитность сооружения в эксплуатационный период и вести возникновению недопустимой фильтрации [2].

В России существует уникальный опыт проектирования и строительства плотин в суровых условиях, когда воздействие внешних температур и тепловыделение бетона при гидратации цемента ведут к трещинообразованию в блоках секций плотины, что может сказаться на напряженно-деформированном состоянии плотины в условиях дальнейшей эксплуатации. Вопросы оценки условий формирования температурных трещин в бетонных плотинах и их влияния на дальнейшую работу сооружения, а также мероприятия и технологии по борьбе с трещинообразованием в массивном бетоне по-прежнему актуальны.

На ряде отечественных гидроузлов проводятся натурные наблюдения, в том числе для плотин Братской, Красноярской и Усть-Илимской ГЭС (гравитационные плотины); Зейской и Андижанской ГЭС (массивно-контрфорсные плотины); Саяно-Шушенской ГЭС (арочно-гравитационная плотина) [3]. Это уникальный российский опыт, не имеющий аналогов.

Конструктивные и технологические мероприятия по регулированию температурного режима плотины в период кладки и твердения бетона

Характерным примером трещинообразования в строительный период может быть бетонная плотина Андижанской и некоторых других ГЭС. Образовавшиеся в ее теле системы трещин вызвали необходимость дополнительного изучения их влияния на работу Андижанской плотины.

Начальный этап строительства – период укладки бетона в тело плотины – закладывает основу будущей работы плотины в период приложения всех эксплуатационных нагрузок.

Учет релаксации напряжений позволяет снижать требования к температурному режиму бетона. Поэтому так активно разрабатываются и используются методы по регулированию температурного режима плотины в период кладки и твердения бетона. В настоящее время продолжается изучение поведения бетонных плотин в строительный период, оценки температурного и напряженно-деформированного состояний бетона раннего возраста и их регулирования для предотвращения трещинообразования [2; 4; 5].

Необходимо предусматривать соответствующие конструктивные и технологические мероприятия. Одним из них является столбчатая разрезка, которая позволяет более свободно проявляться температурным деформациям бетонной плотины и формировать более благоприятное термонапряженное состояние.

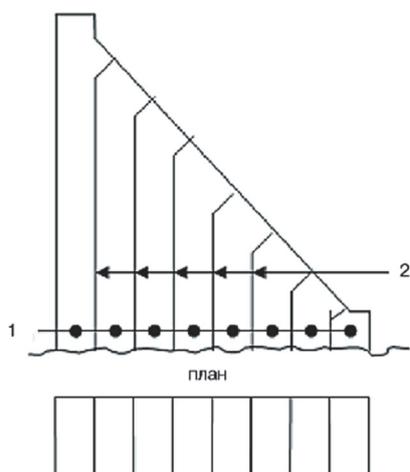


Рис. 1. Бетонная плотина со столбчатой разрезкой:

1 – столбы бетонирования; 2 – строительные швы

Figure 1. Concrete dam with column cut:

1 – concreting pillars; 2 – building seams

При таком подходе между отдельными бетонными столбами формируются временные строительные швы (искусственно создаются «трещины», рис. 1) [6; 7].

Технологические мероприятия состоят в основном в понижении температуры бетона во время максимума экзотермического разогрева и в последующий период [7].

Раскрытие блочных швов появляется после снижения температуры бетона (от максимальной) в среднем на 10–11 °С [7], а величина раскрытия определяет условия их цементации.

На Братской ГЭС раскрытие швов составляло менее 0,3 мм в 29 % и 0,3–0,5 мм в 13,3 % случаев.

При раскрытии более 0,5 мм цементация швов может быть выполнена с использованием обычных цементов. При меньшем раскрытии нужны материалы с меньшими размерами фракций, например особо тонкого дисперсного вяжущего (ОТДВ «Микродур») [8].

Согласно [3], низкая отрицательная температура наружной среды способствуют изменению физико-механических характеристик бетона из-за промораживания блоков, поведения швов и трещин, влияющих на работу плотин. Необходимо дальнейшее изучение процессов, возникающих при замораживании и оттаивании бетонов.

Температурное трещинообразование отмечено во многих плотинах и в настоящее время, в том числе и в возведенных по современной технологии укатанного бетона с малым количеством цемента [4].

Бетонных массивно-контрфорсных плотин и гравитационных облегченных плотин с расширенными швами более 500, и они имеют некоторые преимущества по сравнению с гравитационными плотинами – это экономия материала и восприятие температуры, а также возможности ее регулирования. Данные преимущества хорошо видны на примере плотины Зейской ГЭС.

Проблема трещинообразования в строительный период и сегодня остается актуальным вопросом, которому необходимо уделять должное внимание [4].

Роль температурных напряжений в статической работе гидротехнических сооружений

Температурные напряжения играют в статической работе большинства гидротехнических сооружений существенную роль. Нередко по величине они превышают напряжения, вызванные действием внешних нагрузок, и приводят к появлению в бетоне трещин. Большой интерес представляют напряжения, обусловленные сезонными колебаниями температуры воздуха в зоне у граней сооружения. Термонапряженное состояние сооружения зависит также от механических и тепловых характеристик бетона, размеров изучаемого сооружения и их конфигурации, характера и жесткости связей с основанием.

Большую помощь при изучении термонапряженного состояния облегченных бетонных плотин оказывает метод непосредственного воспроизведения температурных деформаций на моделях из хрупких материалов.

Рассмотрим результаты модельных исследований термонапряженного состояния секции облегченной бетонной плотины с расширенными швами от сезонных колебаний температуры воздуха при наполненном водохранилище, когда температура воды, воздушной полости и основания постоянны во времени при граничных условиях первого рода. В этом случае моделирование термонапряженного состояния для упругой стадии работы осуществлялось по критериям Гука σ_0 и Фурье F_0 . На основе принятых критериев подобия выведены масштабы подобия: времени, температуры, модулей упругости и напряжений. Годовая гармоника температур с амплитудой 15°C воспроизводилась на модели за 40 минут и амплитудой $8,9\text{ K}$ [9].

Исследования позволили выявить весьма существенные величины растягивающих напряжений, являющихся очевидно следствием температурного защемления.

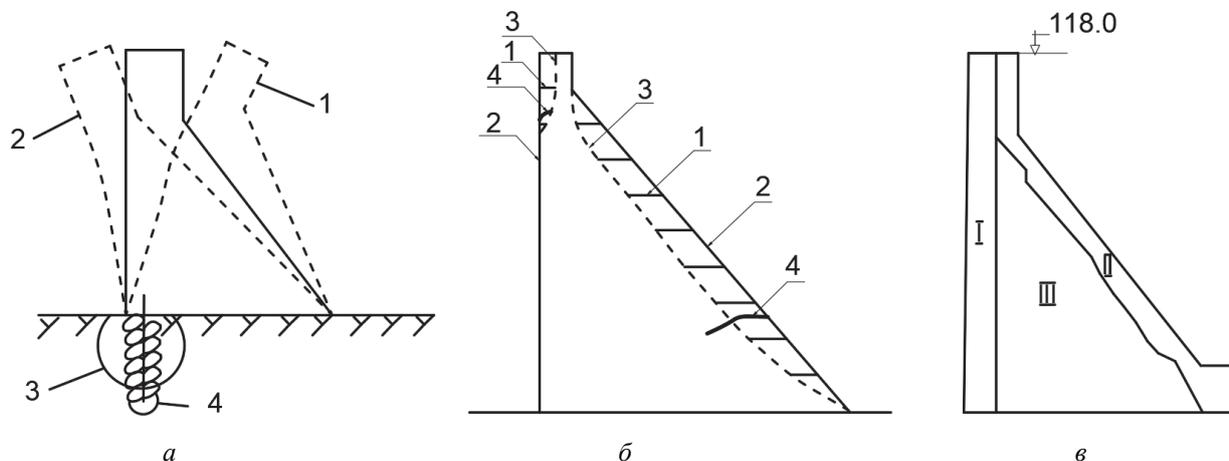


Рис. 2. Конструктивные особенности бетонной плотины:

a – перемещение гребня плотины при изменении температуры наружного воздуха: 1 – профиль плотины при охлаждении зимой; 2 – профиль плотины при нагревании летом; 3 – зона, в которой могут возникнуть растягивающие напряжения, что может привести к разрыву противофильтрационной завесы; 4 – противофильтрационная завеса; *б* – раскрытие строительных швов при понижении температуры наружного воздуха: 1 – строительный шов; 2 – расчетный профиль плотины; 3 – реальный профиль плотины; 4 – трещина; *в* – схема разбивки плотины на зоны различной деформативности (I, II, III)

Figure 2. Design features of a concrete dam:

a – movement of the crest of the dam with a change in the temperature of the outside air: 1 – profile of the dam during cooling in winter; 2 – profile of the dam during heating in summer; 3 – zone in which tensile stresses can occur, which can lead to rupture of the impervious curtain; 4 – impervious curtain; *б* – opening construction joints when the outside temperature drops: 1 – construction joint; 2 – design profile of the dam; 3 – real profile of the dam; 4 – crack; *в* – scheme of dividing the dam into zones of different deformability (I, II, III)

Бетон низовой и верхней частей верховой грани работает в условиях двухосного (возможно трехосного) растяжений σ_1, σ_2 и σ_3 . Величины растягивающих напряжений на низовой грани (за исключением зоны

в верхней части плотины) не превосходят величины прочности бетона на растяжение ($R = 18 \times 10^5$ Па). Учитывая, что прочность швов значительно ниже (на 30–40 %) прочности на растяжение монолита, следует ожидать раскрытия строительных швов на низовой грани плотины (рис. 2, б).

Перемещения гребня плотины с расширенными швами носят циклический характер. При наполненном водохранилище амплитуда их составляет 0,7 мм на 1 К амплитуды колебаний температуры низовой грани; зимой гребень плотины перемещается в сторону нижнего бьефа (НБ). Запаздывание и продолжительность максимальных величин перемещения гребня плотины составляет 1 месяц (рис. 2, а).

Полученные результаты указывают на необходимость учета температурных воздействий и термонапряженного состояния облегченной бетонной плотины при анализе ее работы в целом.

Межблочные строительные швы и швы надрезы оказывают существенное влияние на формирование термонапряженного состояния плотины. Характер их влияния одинаков и между ними имеются лишь конструктивные отличия [9]. Они снижают растягивающие напряжения в зимний период и могут явиться эффективным конструктивным мероприятием по регулированию напряженно-деформированного состояния облегченных бетонных плотин.

Согласно [10; 11], расчетные методы, ориентированные на компьютерные методы решения задач, имеют преимущество перед экспериментальными в смысле оперативности и меньшей трудоемкости, тогда как модельные исследования дают возможность более полного учета пространственного характера работы сооружений, его конструктивных особенностей, граничных условий, физической и геометрической нелинейности.

При обосновании прочности и устойчивости ответственных гидротехнических сооружений в практике проектирования принято проведение и расчетных, и экспериментальных исследований. Существенным является также учет деформативности скального основания, которая характеризуется модулем деформации и влияет на напряженно-деформированное состояние плотины. Важны метод определения модуля упругости основания и оценка возможной погрешности в определении расчетной деформативности скальных пород основания на термонапряженное состояние бетонных плотин [12].

В действительности температурное поле основания не остается постоянным, изменяясь как вследствие теплообмена между плотиной и основанием, так и воздействия температурных колебаний воздуха на основание со стороны нижнего бьефа плотины. Существование не равных нулю напряжений, обусловленных изменениями температурного поля основания, подтверждается как модельными исследованиями, так и натурными измерениями.

Представляет интерес выявление размеров такой зоны основания (назовем ее «температурно-активной» зоной), вне пределов которой изменение температур основания не влияет на термонапряженное состояние плотины.

Согласно расчетным исследованиям по специальной программе, изменение расчетного модуля деформации в два раза (в ту и другую сторону от исходной величины $410\,000 \times 10^5$ Па) незначительно сказывается на термонапряженном состоянии облегченной гравитационной плотины. Изменения в величинах напряжений не превышают 10 % от исходных. Напряжения, обусловленные температурными изменениями основания, имеют местный характер. Вблизи контакта сооружения с основанием пренебрежение указанными температурными изменениями или их учет в неполном объеме существенно искажают картину термонапряженного состояния плотины.

При возможном возникновении системы вертикальных трещин на высоту получаем в целом улучшение термонапряженного состояния плотины по сравнению со случаем монолитного профиля. Наиболее существенное уменьшение величины растягивающих напряжений имеет место в прискальной зоне в связи с уменьшением общей жесткости сооружения из-за уменьшения осредненного модуля упругости при наличии вертикальных трещин. А наличие вертикальных незацементированных трещин (со значительным развитием по высоте) ухудшает суммарное напряженное состояние плотины по сравнению с монолитным профилем с появлением растягивающих напряжений на верховой грани и в контактной зоне основания. Наличие такой системы вертикальных трещин приводит к значительному снижению коэффициента запаса (примерно на 46 %).

Появление больших величин растягивающих напряжений на верховой грани может привести не только к раскрытию строительных швов в ее верхней части, но и к раскрытию контактного шва. Эта тенденция может вызвать ряд неблагоприятных воздействий при наличии достаточно жесткого основания под напорной гранью. Аналогичная ситуация может возникнуть при раскрытых межстолбчатых швах.

Одним из главных направлений прогресса в области проектирования и строительства бетонных плотин является регулирование их напряженного состояния, направленное на повышение степени исполь-

зования прочностных свойств бетона и основания и обеспечение равнопрочности отдельных зон тела плотины. Традиционный метод направленного воздействия на напряженное состояние сооружения – использование конструктивных мероприятий, таких как рационализация формы плотины, устройство различных швов, шарниров, прослоек, теплоизоляции, напряженной анкеровки и др. К этому направлению можно отнести и допущение раскрытия горизонтальных межблочных швов на низовой грани сооружения при низких температурах наружного воздуха [13].

Наряду с конструктивными существуют технологические методы регулирования напряженного состояния, например зонирование тела плотины по деформативности бетона (рис. 2, в).

Технологические методы выгодно отличаются от конструктивных тем, что не требуют изменения формы плотины, не связаны с эксплуатационными издержками.

Исследования влияния разномодульности тела плотины на ее термонапряженное состояние выполнены расчетным методом по специальной программе [12]. В совокупности рассмотрено семь расчетных вариантов зонирования тела плотины по деформативности, включая вариант однородной плотины (табл. 1).

Согласно [13], изменение модуля упругости бетона внутренней зоны не является эффективным с точки зрения регулирования термонапряженного состояния плотины, а указывает на возможность применения в определенном объеме материала с пониженными характеристиками для внутренних зон сооружения, не нарушая при этом картину суммарного напряженного состояния.

Конкретные изменения суммарных напряжений определяются геометрией сооружения и ее конструктивными особенностями, соотношением модулей упругости низового клина (II – рис. 2, в) и основного тела плотины (I – рис. 2, в), климатическими условиями створа. Наибольшее влияние на термонапряженное состояние облегченной бетонной плотины оказывают изменения модуля упругости в зоне низового клина.

Таблица 1

Расчетные модули упругости в зависимости от зоны плотины

| Тип элемента | Расчетная схема 1, $E_{пл} \times 10^8$ Па | | | Расчетная схема 2, $E_{пл} \times 10^8$ Па | | | Расчетная схема 3, $E_{пл} \times 10^8$ Па | | |
|--------------|---|-----|-----|---|-----|-----|---|-----|-----|
| | | | | | | | | | |
| I | 265 | 265 | 265 | 53 | 265 | 530 | 265 | 265 | 265 |
| II | 53 | 265 | 530 | 265 | 265 | 265 | 265 | 265 | 265 |
| III | 265 | 265 | 265 | 265 | 265 | 265 | 53 | 265 | 530 |
| № варианта | 3 | 0 | 4 | 5 | 0 | 6 | 1 | 0 | 2 |

Table 1

Calculated modulus of elasticity depending on the dam zone

| Element type | Calculation scheme 1, $E_{dam} \times 10^8$ Па | | | Calculation scheme 2, $E_{dam} \times 10^8$ Па | | | Calculation scheme 3, $E_{dam} \times 10^8$ Па | | |
|---------------|---|-----|-----|---|-----|-----|---|-----|-----|
| | | | | | | | | | |
| I | 265 | 265 | 265 | 53 | 265 | 530 | 265 | 265 | 265 |
| II | 53 | 265 | 530 | 265 | 265 | 265 | 265 | 265 | 265 |
| III | 265 | 265 | 265 | 265 | 265 | 265 | 53 | 265 | 530 |
| Option number | 3 | 0 | 4 | 5 | 0 | 6 | 1 | 0 | 2 |

Работа гравитационных и контрфорсных плотин с трещинами в зоне контакта со скальным основанием в период эксплуатации

В период эксплуатации не всегда благоприятными оказываются условия работы плотин с трещинами и, в частности, сквозными вертикальными трещинами, возникшими в зоне контакта со скальным основанием. В гравитационных и контрфорсных плотинах могут возникать вертикальные или несколько наклонные трещины, распространяющиеся на большую высоту и разделяющие сооружение на отдельные части.

Основной причиной образования таких трещин являются растягивающие напряжения в бетоне, возникающие в результате его остывания на скальном основании. С другой стороны, появление таких трещин связано с неравномерностью распределения температур по сечению массивных сооружений, вызванной экзотермией бетонной смеси, начальным перепадом температур и колебанием температуры наружной среды.

Так, например, сквозные вертикальные трещины, возникшие в контактной зоне со скальным основанием в плотине Кировской ГЭС (рис. 3) связаны с приостановкой в бетонировании, что привело к остыванию ядровой части массивов на 10–12 К по отношению к максимальной температуре.

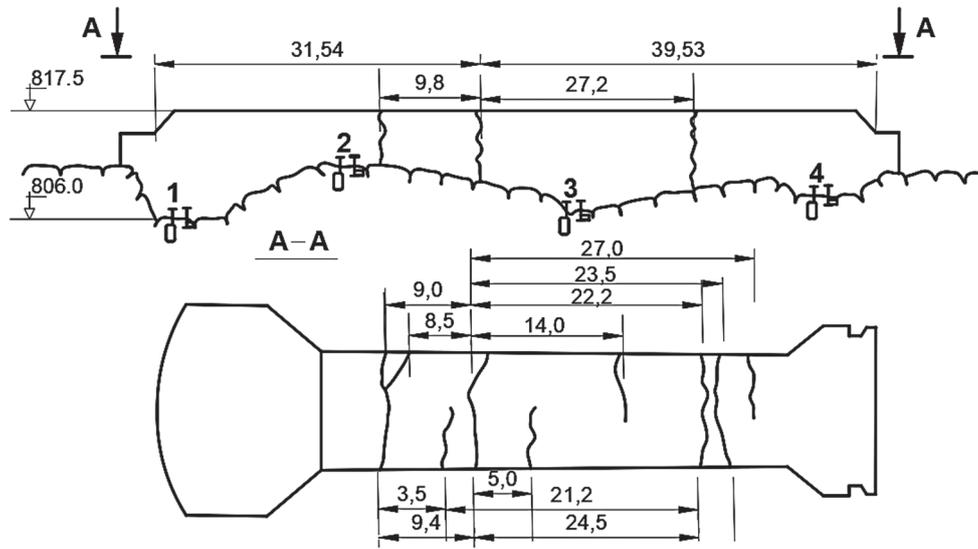


Рис. 3. Схема трещинообразования Кировской плотины (секция 6):

1–4 – места установки приборов

Figure 3. Fracturing scheme of the Kirov Dam (section 6):

1–4 – instrument installation locations



Рис. 4. Схема типичных трещин 24 секции плотины Андижанской ГЭС

Figure 4. Scheme of typical cracks in section 24 of the Andijan HPP dam

Большое количество различных типов трещин зафиксировано в плотине Андижанской ГЭС. На рис. 4 представлены характерные трещины, отмеченные в 24-й секции плотины. Основными причинами трещинообразования стали длительные перерывы в бетонировании, неравномерность возведения элементов секции, отсутствие современной теплозащиты наружных граней.

Известно, что температурные трещины в большем или меньшем количестве зафиксированы на всех плотинах, построенных и строящихся гидроузлов. Меры борьбы по предотвращению образования и ликвидации их неблагоприятных последствий сложны и дорогостоящи.

В связи с этим возникает вопрос: какие трещины являются допустимыми, а какие нет (то есть необходимо оценить степень их опасности). Для решения вопроса требуется проведение соответствующих теоретических и экспериментальных исследований.

В задачу настоящих исследований входило экспериментальное определение на хрупких моделях термонапряженного состояния секции массивно-контрфорсной плотины с одиночным контрфорсом (рис. 5) высотой 75,5 м и массивно-контрфорсной плотины с диафрагмой (рис. 6) высотой 110,5 м в случае появления в них трещин. Это позволило провести сопоставительный анализ с ранее полученными экспериментальными данными на эталонных (без трещин) моделях.

Физико-механические и теплофизические характеристики бетона плотин и скальных оснований описаны в [9; 14].

Модели секции массивно-контрфорсной плотины с одиночным контрфорсом и скального основания выполнены из гипсовых растворов. Высота модели плотины составила 50,3 см (геометрический масштаб 1:150), а основание имело размеры 180×60,3×14,6 см.

Сквозные вертикальные трещины на контакте с основанием (рис. 7) воспроизводились следующим образом. Вначале организовывались сквозные пропилы с помощью шлицовки. Затем поверхности полученного шва покрывались шеллачным лаком, а одна из этих поверхностей после высыхания лака смазывалась тонким слоем жировой смазки. С помощью пластилина около каждого шва организовывались карты для нагнетания гипсового раствора, состава, принятого для данной модели, но с добавлением гашеной извести. Последняя не дает увеличиваться раствору в объеме при его схватывании и позволяет получить требуемое раскрытие швов. В данном случае их раскрытие на модели не превышало 0,05 мм.

Модель секции массивно-контрфорсной плотины с диафрагмой выполнялась из гипсопесчаного раствора в масштабе 1:200.

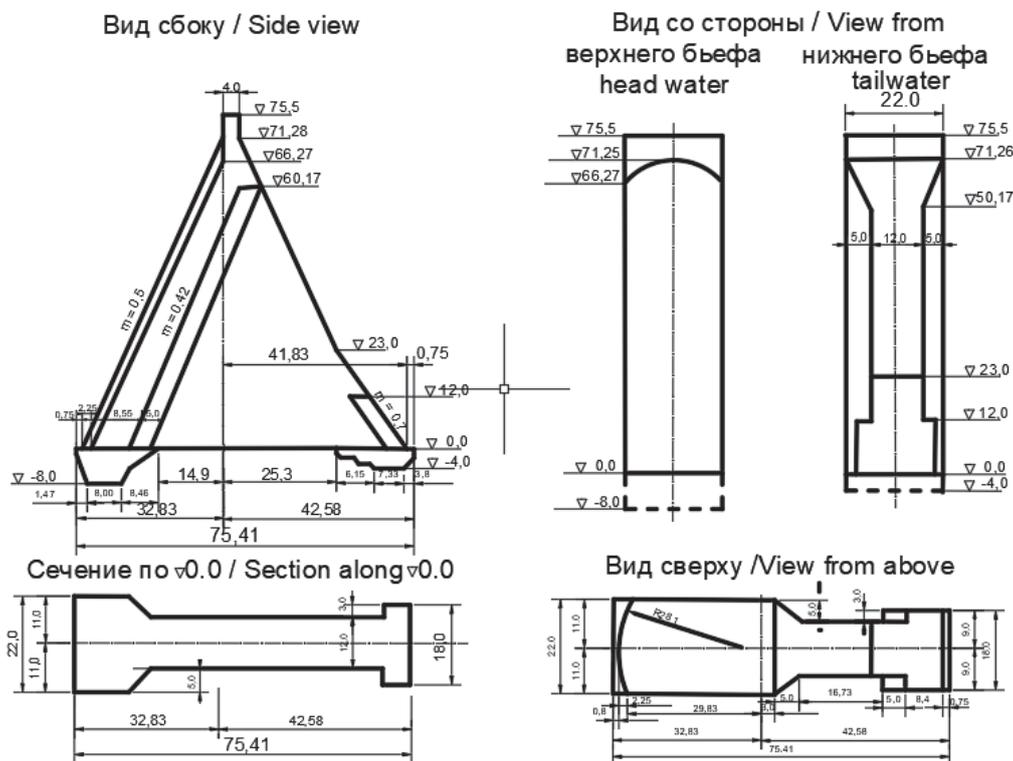


Рис. 5. Основные размеры массивно-контрфорсной плотины с одиночным контрфорсом
 Figure 5. Main dimensions of a massive buttress dam with a single buttress

Для воспроизведения системы внутренних трещин модель массивно-контрфорсной плотины с диафрагмой изготавливалась отдельными блоками (9 блоков). В каждом блоке моделирование трещин осу-

щевлялось с помощью фольговых пластинок. Они изготавливались из высокопрочной фольги от 10 до 100 микрон в соответствии с требуемой шириной раскрытия.

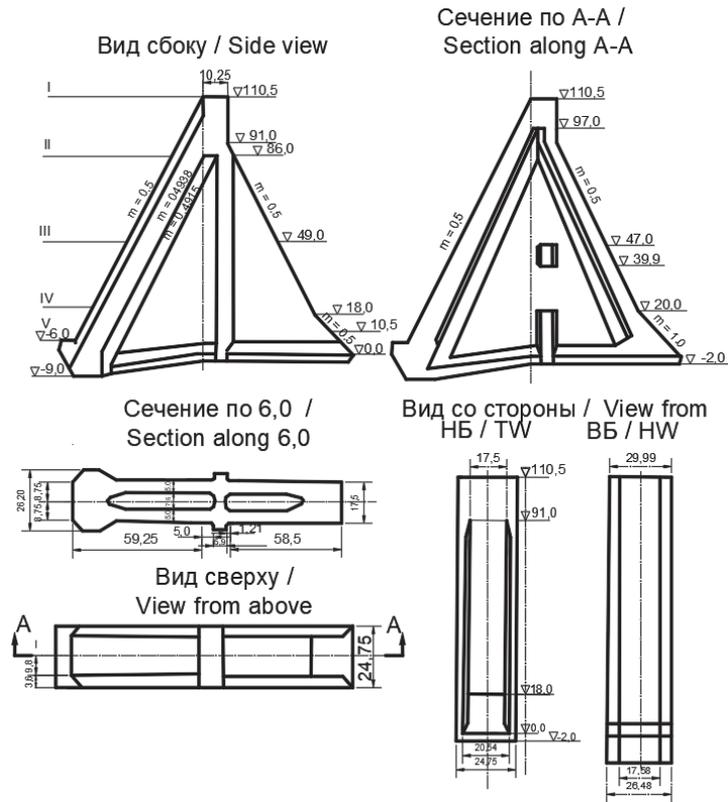


Рис. 6. Основные размеры массивно-контрфорсной плотины с диафрагмой
Figure 6. The main dimensions of a massive buttress dam with a diaphragm

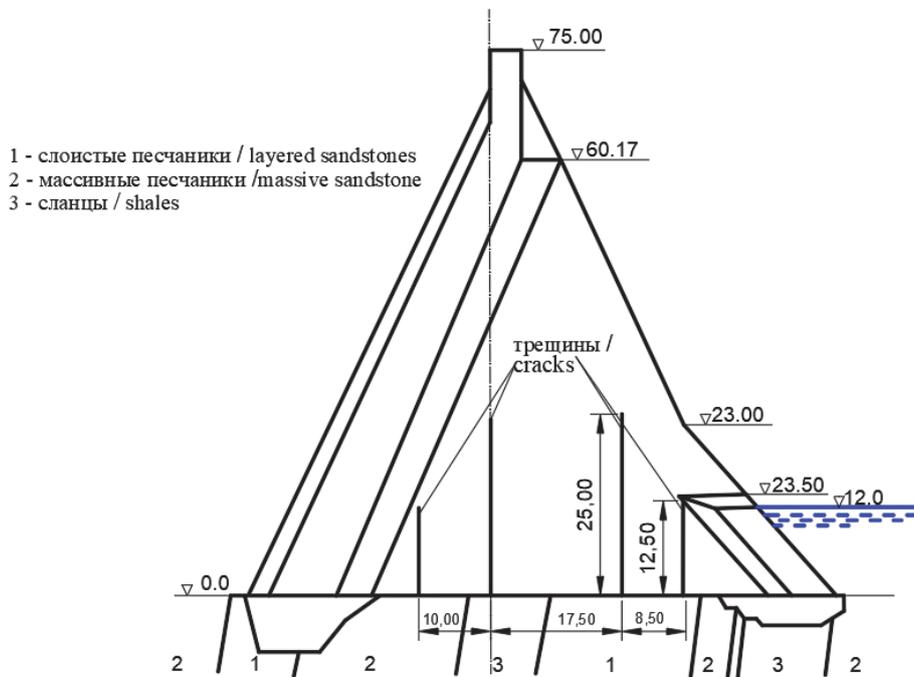


Рис. 7. Схема расположения вертикальных трещин на модели массивно контрфорсной плотины с одиночным контрфорсом со значительным развитием их по высоте
Figure 7. Scheme of location of vertical cracks on the model of a massive buttress dam with a single buttress with their significant development in height

На основании методических проработок определялось время выдергивания полосок фольги из охватывающего раствора. Контроль за качеством полученных трещин осуществлялся по распилам образцов с использованием электрического микроскопа. В пересчете на натуру ширина раскрытия трещин составила 1,4–2,0 мм. На рис. 8 представлена система замоделированных в сооружении трещин.

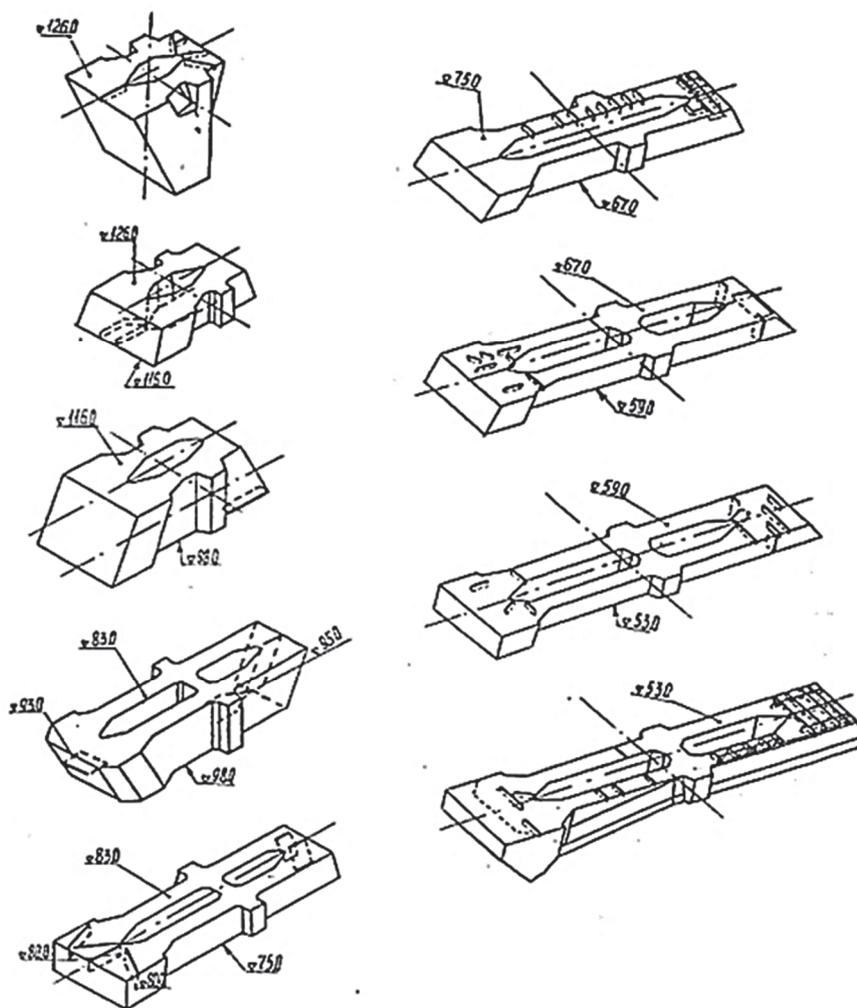


Рис. 8. Схема смоделированных трещин на поверхностях блоков (отметки 126–53, в скобках даны размеры для модели в см)
Figure 8. Scheme of simulated cracks on block surfaces (marks 126–53, in parentheses are the dimensions for the model in cm)

При проведении исследований на модели массивно-контрфорсной плотины с одиночным контрфорсом сезонные колебания температуры воздуха аппроксимировались температурной гармоникой с амплитудой 20 К, толщина низовой отепляющей стенки принималась равной 4,5 м, температура воды в водохранилище и воздушных полостей, образуемых соседними секциями плотины, принималась постоянной.

На модели массивно-контрфорсной плотины с диафрагмой и без отепляющей стенки воспроизводились сезонные колебания температуры наружного воздуха с амплитудой $A_T = 15$ К при наполненном водохранилище. При этом учитывались колебания температуры воды водохранилища (на основе анализа данных по температуре воды водохранилища) и периодические колебания температуры наружного воздуха со стороны боковых граней плотины с $A_T = 15$ К при незамкнутой низовой межсекционной полости.

Для случая наполненного водохранилища тепловое состояние и значение перемещений секции плотины были получены путем сложения соответствующих величин при раздельном приложении тепловой циклической нагрузки со стороны низовой и боковой граней и с учетом колебания температуры воды водохранилища.

Такое сложение на основе принципа суперпозиции является правомерным для монолитного профиля плотины, а для модели с трещинами справедливо для амплитуды тепловой нагрузки, имевшей место в экспериментах.

Масштабы моделирования в данных исследованиях получены на основе критериев подобия (Фурье и Гука) с учетом свойств материалов плотин и их моделей. В соответствии с полученными масштабами годовая гармоника температур с амплитудой 20 и 15 К воспроизводилась на моделях за 80 и 32 минуты с амплитудой 11,1 и 8 К соответственно.

Внешний нестационарный тепловой режим на моделях создавался с помощью специальной системы температурного нагружения, работающей в ручном и автоматических режимах. Для воспроизведения заданного режима потребовалось изменять напряжение тока, питающего нагреватель от 0 до 62 В и понижать температуру хладоносителя до 257 К.

Для замера температур применялись термометры сопротивления (термодатчики) и хромель-копелевые термоэлектрические преобразователи. Запись температуры осуществлялась непрерывно до начала опыта и в процессе всего опыта на 24-точечном самопишущем потенциометре ЭПП-09МЗ.

Деформации, возникающие от тепловой нагрузки, замерялись с помощью термокомпенсированных тензорезисторов. Замер деформаций выполнялся через определенные промежутки времени на полуавтоматическом мосту переменного тока типа АЭЛТ-4М. Цена деления прибора – с $1,0 \cdot 10^{-6}$ единиц относительной деформации.

Для замера температурных перемещений использовались датчики перемещений ДП-10 (И30-29) чувствительностью 0,01 мм, а также индикаторы часового типа с чувствительностью 0,001 мм.

В качестве клея для крепления датчиков применялся ВФ-4. Термообработка клея и тарировка контрольно-измерительной аппаратуры, установленной на модели, осуществлялась в климатической камере Feutron 3001, где температура поддерживалась с точностью $\pm 0,2$ К.

За исходное состояние моделей был принят их установившийся тепловой режим непосредственно перед температурным нагружением. Средняя температура моделей в экспериментах соответствовала температуре помещения и равнялась 291–295 К. Температурные напряжения в моделях определялись через деформации и упругие контакты материала по законам теории упругости. Пересчет результатов, полученных на моделях, на натуру осуществлялся согласно масштабам моделирования

Вертикальные сквозные трещины

Как видно из рис. 9, в случае появления трещин, распространившихся на высоту 12,5 и 25,0 м (0,16 и 0,34 Н соответственно), в целом происходит улучшение термонапряженного состояния плотины по сравнению со случаем монолитного профиля. Наиболее существенное уменьшение величины растягивающих напряжений имеет место на низовой и верховой гранях в прискальной зоне.

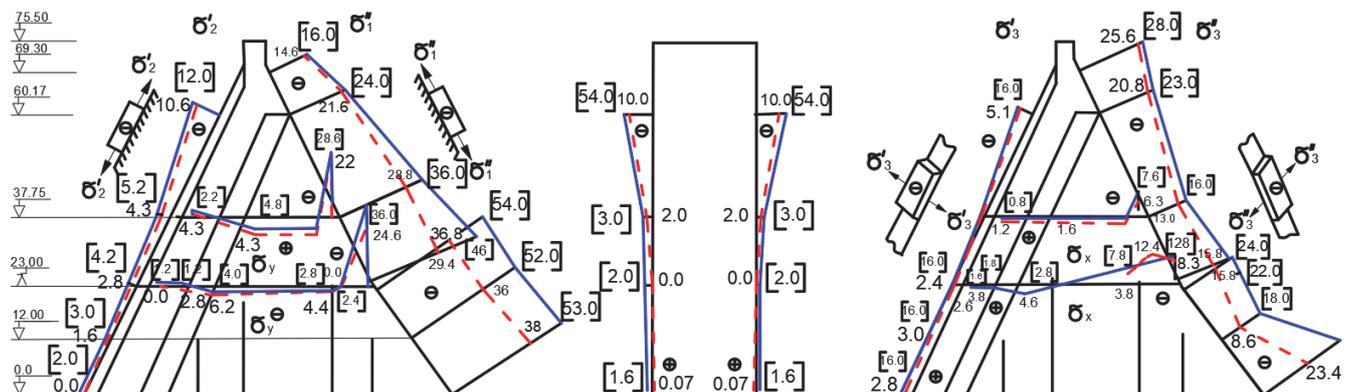


Рис. 9. Термонапряженное состояние секции плотины в январе при наполненном водохранилище ($A_T = 20$ К):
 --- монолитный профиль; ---- плотина с трещинами; величины напряжений даны в 10^5 Па

Figure 9. Thermally stressed state of the dam section in January with a filled reservoir ($A_T = 20$ K):
 --- monolithic profile; ---- dam with cracks; stress values are given in 10^5 Pa

На верховой грани в прискальной зоне величина растягивающих напряжений σ'_2 снижается на отметках 23,0 и 12,0 м на (33–46) % и составляет $(2,8–1,6) \times 10^5$ Па, а величина сжимающих напряжений увеличивается на (50–66) % и составляет $(2,4–3,0) \times 10^5$ Па. На отметке 0,0 м величина растягивающих напряжений σ'_2 близка к нулю.

На низовой грани, начиная с отметки 23,0 м до нулевой отметки, величина растягивающих напряжений σ'_2 и σ'_3 снижается на (34–38) % и составляет $(36–38) \times 10^5$ Па и $(8,6–23,4) \times 10^5$ Па соответственно.

В стенке контрфорса также происходит перераспределение напряжений и σ_x и σ_y (увеличение сжимающих и уменьшение растягивающих напряжений). Так, максимальная величина растягивающих напряжений на отметке 23,0 м уменьшается на 36 % и составляет $8,3 \times 10^5$ Па, а максимальная величина сжимающих напряжений увеличивается на 64 % и составляет $4,6 \times 10^5$ Па. Следовательно, это ограничит дальнейшее распространение трещин по высоте.

Улучшение термонапряженного состояния плотины в прискальной зоне связано с уменьшением общей жесткости сооружения вследствие уменьшения осредненного модуля упругости плотины при наличии вертикальных трещин.

Амплитуда перемещения гребня плотины с вертикальными швами увеличивается по сравнению с монолитным профилем на 15 %.

Для оценки суммарного напряженно-деформированного состояния плотины температурные напряжения, возникающие в плотине зимой, были сложены с напряжениями, полученными экспериментально на аналогичной хрупкой модели от воздействия на плотину гидростатического давления и собственного веса при принятой системе вертикальных трещин, возникших в контактной зоне (рис. 9).

На рис. 10 приведена картина суммарного напряженного состояния только для верхней грани, так как на низовой грани от статических нагрузок при данной схеме раскрывшихся вертикальных трещин величина сжимающих напряжений возрастает незначительно.

Как видно из рис. 10, наличие вертикальных незацементированных трещин со значительным развитием по высоте ухудшает суммарное напряженное состояние плотины. На верхней грани на верхних отметках происходит увеличение растягивающих напряжений, а в приконтактной зоне появились растягивающие напряжения, достигающие у подошвы плотины до $4,5 \times 10^5$ Па. Это связано с ухудшением напряженного состояния от силовых нагрузок. Последнее подтверждается результатами исследований методом фотоупругости напряженного состояния облегченной плотины с расширенными швами при наличии сквозных трещин в контактной зоне

Следует отметить, что наличие такой системы вертикальных трещин в сооружении приводит к значительному снижению (на ~40 %) коэффициента запаса (величина, численно равная отношению разрушающей нагрузки к расчетной – эксплуатационной). На основе полученной картины напряженного состояния можно отметить, что в секции плотины с вертикальными трещинами возможно также раскрытие горизонтальных строительных швов в верхней части напорной грани, где величины растягивающих напряжений превышают прочность швов.

Наличие больших величин растягивающих напряжений на верхней грани может привести не только к раскрытию строительных швов в ее верхней части, но и к раскрытию контактного шва. Вероятность этого увеличивается при наличии достаточного жесткого основания или его части под напорной гранью. Появление в сооружении трещин с развитием по высоте до 12,5 и 25,0 м (при значительном их раскрытии) недопустимо, так как это не только сказывается на суммарном напряженном состоянии, но и существенно снижает коэффициент запаса. Аналогичная ситуация может возникнуть при раскрытых межстолбчатых швах.

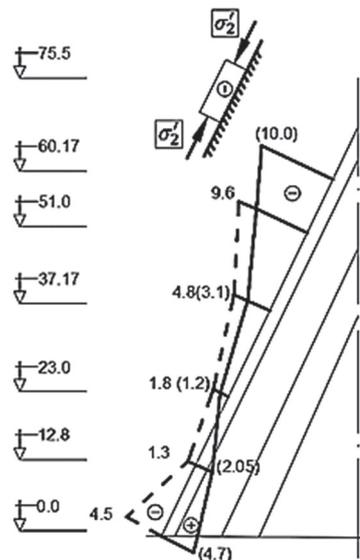


Рис. 10. Суммарное напряженное состояние верхней грани секции плотины в январе при наполненном водохранилище (Т+Р+Г): --- монолитный профиль; - · - · - плотина с трещинами; величины напряжений даны в 10^5 Па
Figure 10. The total stress state of the upper face of the dam section in January with a filled reservoir (T+P+G): --- monolithic profile; - · - · - dam with cracks; stress values are given in 10^5 Pa

Система внутренних трещин

Схема воспроизведенных трещин на модели соответствует реальной трещиноватости бетона, зафиксированной в 24-й секции плотины Андиганской ГЭС и характерной для ряда других секций.

Результаты воздействия сезонных колебаний температуры наружного воздуха на работу секции плотины с трещинами при наполненном водохранилище представлены в табл. 2 и на рис. 11. Амплитуды колебаний температуры и перемещений получены при температуре наружного воздуха с $A_T = 15$ К.

Таблица 2

Величины температурных перемещений для монолитного профиля и плотины с системой трещин

| № индикаторов | Отметки, м | Наполненное водохранилище | | | Плотина с системой трещин | | |
|---------------|------------|---|---|--|---|---|--|
| | | Перемещения от сезонного колебания температуры $A_T = 15$ К | Перемещения от гидростатики и собственного веса | Суммирующие перемещения G, P и $t(A_T = 15$ К) | Перемещения от сезонного колебания температуры $A_T = 15$ К | Перемещения от гидростатики и собственного веса | Суммирующие перемещения G, P и $t(A_T = 15$ К) |
| 13 | 987,5 | 9,45 | 39 | 48,45 | 8,6 | 46 | 54,6 |
| 12 | 883 | 4,95 | 32 | 36,95 | 4,8 | 42 | 46,8 |
| 11 | 883 | 4,8 | 32 | 36,8 | 5,0 | 42 | 47,0 |
| 9 | 846 | 0,81 | 25 | 25,81 | 0,84 | 32 | 32,84 |
| 8 | 846 | 0,84 | 25 | 25,84 | 0,82 | 32 | 32,82 |
| 7 | 818 | 0,3 | 18 | 18,3 | 0,33 | 25 | 25,33 |

Table 2

Values of temperature displacements for a monolithic profile and a dam with a system of cracks

| No. of indicators | Marks, m | Filled reservoir | | | Dam with cracks system | | |
|-------------------|----------|--|---|--|--|---|--|
| | | Displacement from seasonal temperature fluctuations $A_T = 15$ К | Moving from hydrostatics and own weight | Summing movements G, P and $t(A_T = 15$ К) | Displacement from seasonal temperature fluctuations $A_T = 15$ К | Moving from hydrostatics and own weight | Summing movements G, P and $t(A_T = 15$ К) |
| 13 | 987.5 | 9.45 | 39 | 48.45 | 8.6 | 46 | 54.6 |
| 12 | 883 | 4.95 | 32 | 36.95 | 4.8 | 42 | 46.8 |
| 11 | 883 | 4.8 | 32 | 36.8 | 5.0 | 42 | 47.0 |
| 9 | 846 | 0.81 | 25 | 25.81 | 0.84 | 32 | 32.84 |
| 8 | 846 | 0.84 | 25 | 25.84 | 0.82 | 32 | 32.82 |
| 7 | 818 | 0.3 | 18 | 18.3 | 0.33 | 25 | 25.33 |

Как видно из табл. 2 наличие трещин практически не сказалось на распределении температур в сооружении (изменения в амплитудах температур по сравнению с монолитным профилем не превышали 5–6 %). В плотине с трещинами термоэлектрические преобразователи были установлены на внутренней поверхности замкнутой полости со стороны низовой грани. Это позволило зафиксировать колебание температуры, имевшее место на поверхности низовой части внутренней полости с $A_T = 5,4$ К с запаздыванием в ~3 месяца. Максимальная амплитуда колебания температуры была отмечена в низовой части внутренней полости со стороны низовой грани и равнялась 5,9 К.

На рис. 11 приводится ход изменения температуры на гранях плотины и графики перемещений при наполненном водохранилище с учетом колебания температуры воды водохранилища.

В табл. 2 для сравнения приведены величины температурных перемещений для монолитного профиля и плотины с системой трещин. Из табл. 2 видно, что трещины не оказывают существенного влияния на поведение сооружения. Величины перемещений колеблются от 1 до 8 % и в ряде случаев находятся в пределах точности измерений.

Значения суммарных перемещений для указанных случаев также даны в табл. 2. Они получены в результате сложения соответствующих величин, замеренных на тепловых и статических моделях.

Анализ приведенных данных показывает, что при наличии достаточно слабого основания решающее воздействие на величину перемещений сооружения оказывают силовые нагрузки.

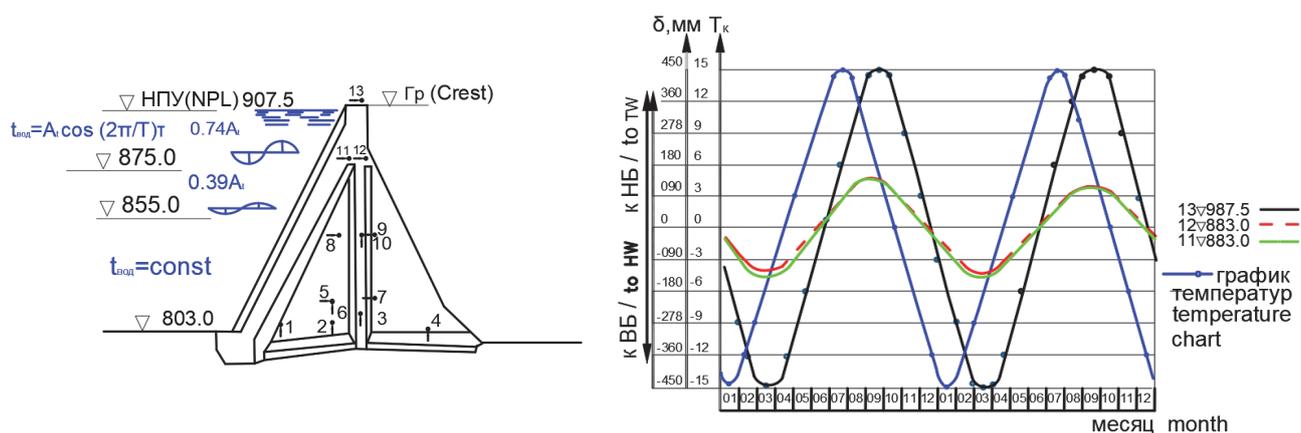


Рис. 11. Графики перемещений заданных точек секции плотины (с имеющейся системой трещин) при наполненном водохранилище с учетом колебания температуры воды водохранилища
Figure 11. Graphs of displacements of given points of the dam section (with the existing system of cracks) when the reservoir is filled, considering fluctuations in the reservoir water temperature

Стремление сделать конструкцию более экономичной и уменьшить риск трещинообразования за счет снижения расхода цемента привело к появлению плотин из укатанного бетона [15; 16].

Чтобы свести к минимуму трещинообразование в период строительства необходимо использовать методы регулирования температурного режима при возведении (выбирать состав бетона и технологические параметры его укладки).

Важным фактором, влияющим на тепловое и термонапряженное состояние плотины, является частичная или полная сработка водохранилища. В этом случае происходит изменение направления перемещения плотины и перераспределение перемещений.

Важно при расчетах на ЭВМ учитывать наличие и величину температурно-активной зоны, так как плотины активно взаимодействует с основанием. Необходимо выработать подход к назначению величины такой зоны.

Также, как показывает изучение практики эксплуатации бетонных плотин, весьма важным фактором является влажность наружного воздуха и влажность бетона, особенно в суровых климатических условиях [17; 18].

Необходимо разработать надежные методы анализа для оценки текущего состояния этих плотин и определения безопасности частично поврежденных сооружений [19].

Заключение

Исследованная система вертикальных трещин (с развитием по высоте до 25 м) при наполненном водохранилище и амплитуде колебания температуры в 20 К оказывает в целом положительное влияние на термонапряженное состояние плотины.

Полученная картина суммарного напряженно-деформированного состояния для случая с вертикальными трещинами характеризуется увеличением растягивающих напряжений на верховой грани, превышающих предельно допустимые на стадии нормальной эксплуатации и ведущих к появлению больших величин растягивающих напряжений в контактной зоне. Это может вызвать раскрытие швов и трещинообразование в верхней части напорной грани и, возможно, раскрытие контактного шва под верховой гранью.

Для обеспечения нормальной эксплуатации сооружения необходимо предотвратить появление сквозных трещин в контактной зоне, а в случае возникновения таких трещин ограничить их распространение в верхние ярусы. Появление вертикальных трещин с распространением по высоте >10 м существенно ухудшает напряженное состояние верховой грани из-за значительного перераспределения напряжений от статических воздействий и снижает величину коэффициента запаса.

Принятая к исследованиям система трещин, имеющая место в 24-й секции плотины, не оказывает существенного влияния на ее тепловое состояние и величину температурных перемещений при наполненном водохранилище.

Вопрос о степени опасности различных типов трещин должен решаться в каждом конкретном случае лишь после тщательного расчетного и экспериментального обоснования, с учетом всех внешних си-

ловых и температурных факторов, свойств материала самого сооружения и характера его взаимодействия с основанием.

Приведенные выше модельные исследования подтвердили широкие возможности разработанной ранее методики моделирования термонапряженного состояния бетонных сооружений при решении различных задач эксплуатационного периода, в том числе связанных с образованием трещин.

Как показывает опыт проектирования и эксплуатации бетонных плотин, наилучшим способом изучения их работы и проектирования является сочетание модельного и расчетного исследований сооружений, основанных на данных натуральных наблюдений эксплуатируемых плотин, которые позволяют вырабатывать новые физические представления о работе плотин и развивать расчетные методы прогнозирования их поведения с учетом факторов влияния.

Ожидаемый срок службы многих бетонных плотин в мире приближается к концу, среди них многие треснули из-за воздействия окружающей среды. Таким образом, желательно иметь возможность продлить срок службы таких плотин. Поэтому важно разработать надежные методы анализа для оценки текущего состояния этих плотин и определения безопасности частично поврежденных сооружений. Например, тонкая железобетонная арочная плотина сильно треснула вниз по течению, в основном из-за сезонных колебаний температуры. Разработана подробная модель конечных элементов для имитации истории плотины с учетом изменений условий окружающей среды, которые имели место в течение ее срока службы. Результаты продемонстрировали хорошее совпадение как картины трещины, так и смещения плотины. Процедура имитации постепенного разрушения плотины начиная с текущего состояния, используется для оценки текущего уровня безопасности. Результаты показывают, что растрескивание оказывает влияние на коэффициент безопасности плотины.

Список литературы

1. *Телешев В.И.* Совершенствование конструктивно-технологических решений бетонных плотин на скальных основаниях // Гидротехническое строительство. 2007. № 5. С. 22–24.
2. *Фомичева Н.Н.* Термонапряженное состояние блоков бетонирования гидротехнических сооружений в строительный период с учетом упруго-податливых связей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск, 1984. 16 с.
3. *Козлов Д.В., Крутов Д.А.* Применение утеплителя в конструкции бетонных плотин, эксплуатирующихся в условиях сурового климата // Природообустройство. 2017. № 2. С. 27–33.
4. *Анискин Н.А., Хоанг Н.* Прогноз трещинообразования бетонных массивных плотин при возведении в суровых климатических условиях // Вестник МГСУ. 2014. № 8. С. 165–178.
5. *Анискин Н.А., Чонг Чык Н.* Проблема температурного трещинообразования в бетонных гравитационных плотинах // Вестник МГСУ. 2020. № 3. С. 380–398. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.3.380-398>
6. *Вознесенская Н.В., Гинзбург С.М., Добрецова И.В., Шейнкер Н.Я.* Исследования по термике бетонных сооружений // Известия ВНИИГ имени Б.Е. Веденеева. 2011. Т. 263. С. 87–97.
7. *Фомин Б.Г., Корнюшина М.П.* Цементационные материалы для омоноличивания бетонных плотин // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2010. № 2. С. 100–108.
8. *Демьянова Э.А.* К вопросу определения минимального размера трещин, поддающихся цементации // Труды ВНИИ ВОДГЕО. 1971. Вып. 31.
9. *Зимнюков В.А.* Влияние трещинообразования на термонапряженное состояние массивно-контрфорсных плотин // Гидротехнические сооружения, основания и фундаменты. 1979. Т. 62. С. 123–135.
10. *Бронштейн В.И., Зимнюков В.А.* Сравнение результатов экспериментов и расчетов методом конечных элементов термонапряженного состояния облегченных бетонных плотин // Гидротехнические сооружения. 1978. Т. 58. С. 78–85.
11. *Трапезников Л.П.* Температурная трещиностойкость массивных бетонных сооружений. М.: Энергоатомиздат, 1986. 272 с.
12. *Бронштейн В.И., Зимнюков В.А., Каганов Г.М.* Исследование термонапряженного состояния бетонных плотин с учетом податливости основания // Работа бетонных плотин совместно со скальным основанием: материалы конференций и совещаний по гидротехнике. Л.: Энергия, 1979. С. 101–108.
13. *Зимнюков В.А., Зборовская М.И., Зайцев А.И.* Учет температурных воздействий при работе гидротехнических сооружений. М.: Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, 2019. 119 с.
14. *Зимнюков В.А., Зборовская М.И.* Моделирование термонапряженного состояния бетонных гидротехнических сооружений с использованием термобатарей // Безопасность энергетических сооружений: научно-технический и производственный сборник. М.: НИИЭС, 2003. Вып. 12. С. 137–146.
15. *Ali W., Urgessa G.* Numerical prediction model for temperature distributions in concrete at early ages // American Journal of Engineering and Applied Sciences. 2012. Vol. 5. No. 4. Pp. 282–290. <https://doi.org/10.3844/ajeassp.2012.282.290>

16. Abdulrazeg A.A., Noorzaei J., Khanehzaei P., Jaafar M.S., Mohammed T.A. Effect of temperature and creep on roller compacted concrete dam during the construction stages // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2010. Vol. 68. No. 3. Pp. 239–268. <https://doi.org/10.3970/cmcs.2010.068.239>
17. Malm R., Ansell A. Cracking of concrete buttress dam due to seasonal temperature variation // *ACI Structural Journal*. 2011. Vol. 1. Issue 1. Pp. 13–22. <https://doi.org/10.14359/51664198>
18. Enzell J., Malm R., Tollsten M. Predicting the influence of seasonal thermally induced cracking on a reinforced concrete arch dam // *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2022. Vol. 26. Pp. 2707–2721. <https://doi.org/10.1007/s12205-022-0112-7>
19. Aufleger M., Goltz M., Conrad M. Distributed fibre optic temperature measurements – a competitive alternative for temperature monitoring in large RCC dams // *The 5th International Symposium on RCC Dams*. Guiyang, 2007. Pp. 1–8.

References

1. Teleshev V.I. Improvement of constructive and technological solutions for concrete dams on rocky foundations. *Gidrotekhnicheskoe Stroitel'stvo*. 2007;(5):22–24. (In Russ.)
2. Fomicheva N.N. *Thermally stressed state of concreting blocks of hydraulic structures during the construction period, considering elastic-yielding bonds* (dissertation of the Candidate of Technical Sciences). Novosibirsk; 1984. (In Russ.)
3. Kozlov D.V., Krutov D.A. The use of insulation in the design of concrete dams operating in a harsh climate. *Prirodobustrojstvo*. 2017;(2):27–33. (In Russ.)
4. Aniskin N.A., Hoang N. Predicting crack formation in solid concrete dams in severe climatic conditions during construction period. *Vestnik MGSU. Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2014;(8):165–178. (In Russ.)
5. Aniskin N.A., Trong Chuc N. The problem of temperature cracking in concrete gravity dams. *Vestnik MGSU. Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2020;15(3):380–398. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.3.380-398>
6. Ginzburg S.M., Sheinker N.Ya., Dobretsova I.V., Voznesenskaya N.V. Research on the thermal behavior of concrete structures. *Proceeding of the VNIIG*. 2011;263:87–97. (In Russ.)
7. Fomin B.G., Korniyushina M.P. Cementing materials for monolithic concrete dams. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2010;(2):100–108. (In Russ.)
8. Demyanova E.A. On the issue of determining the minimum size of cracks that can be cemented. *Proceedings of VNII VODGEO*. 1971;31. (In Russ.)
9. Zimnyukov V.A. Influence of crack formation on the thermally stressed state of massive buttress dams. *Gidrotekhnicheskije Sooruzheniya, Osnovaniya i Fundamenty*. 1979;62:123–135. (In Russ.)
10. Bronstein V.I., Zimnyukov V.A. Comparison of the results of experiments and calculations by the finite element method of the thermally stressed state of lightweight concrete dams. *Gidrotekhnicheskije Sooruzheniya*. 1978;58:78–85. (In Russ.)
11. Trapeznikov L.P. *Temperature crack resistance of massive concrete structures*. M.: Energoatomizdat Publ.; 1986. (In Russ.)
12. Bronstein V.I., Zimnyukov V.A., Kaganov G.M. Investigation of the thermally stressed state of concrete dams, considering the compliance of the foundation. *Work of Concrete Dams Together with a Rocky Base: Proceedings of Conferences and Meetings on Hydraulic Engineering*. Leningrad: Energiya Publ; 1979. p. 101–108. (In Russ.)
13. Zimnyukov V.A., Zborovskaya M.I., Zaitsev A.I. *Accounting for temperature effects during the operation of hydraulic structures*. Moscow: Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy; 2019. (In Russ.)
14. Zimnyukov V.A., Zborovskaya M.I. Modeling of the thermally stressed state of concrete hydraulic structures using thermopiles. *Safety of Energy Facilities: Scientific, Technical and Production Collection* (issue 12, p. 137–146). Moscow: NIIES Publ.; 2003. (In Russ.)
15. Ali W., Urgessa G. Numerical prediction model for temperature distributions in concrete at early ages. *American Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2012;5(4):282–290. <https://doi.org/10.3844/ajeassp.2012.282.290>
16. Abdulrazeg A.A., Noorzaei J., Khanehzaei P., Jaafar M.S., Mohammed T.A. Effect of temperature and creep on roller compacted concrete dam during the construction stages. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2010;68(3):239–268. <https://doi.org/10.3970/cmcs.2010.068.239>
17. Malm R., Ansell A. Cracking of concrete buttress dam due to seasonal temperature variation. *ACI Structural Journal*. 2011;1(1):13–22. <https://doi.org/10.14359/51664198>
18. Enzell J., Malm R., Tollsten M. Predicting the influence of seasonal thermally induced cracking on a reinforced concrete arch dam. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2022;26:2707–2721. <https://doi.org/10.1007/s12205-022-0112-7>
19. Aufleger M., Goltz M., Conrad M. Distributed fibre optic temperature measurements – a competitive alternative for temperature monitoring in large RCC dams. *The 5th International Symposium on RCC Dams*. Guiyang; 2007. p. 1–8.



DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-110-116

EDN: HKIUSI

УДК 502/504:627.8:69.05

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Оценка основных параметров волнового воздействия на пологие откосы берегов крупных водных объектов

О.Н. Черных¹  , А.В. Бурлаченко² 

¹Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, Москва, Российская Федерация

²Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Москва, Российская Федерация

 chon36@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 23 ноября 2022 г.

Доработана: 25 января 2023 г.

Принята к публикации: 30 января 2023 г.

Аннотация. При проектировании берегозащитных мероприятий особое внимание обращается на создание и расширение естественного пляжного откоса на побережье водного объекта. Для назначения геометрических размеров относительно устойчивых пляжных откосов необходимо оценить взаимосвязь волнения с учетом режима уровней, характерного для данного участка берега. Цель работы – изучение особенностей трансформации профиля волны на мелководье и проведение сопоставительного анализа теории и эксперимента. Исследования выполнялись в волновом лотке, где волны воспроизводились качающимся щитом. Рассмотрены особенности трансформации профиля волн на уменьшающихся глубинах мелководья крупного водного объекта. Дана оценка изменения кинематических характеристик волны, набегавшей в мелководной зоне на неукрепленный пляжный склон, имеющий заложение 10, 20 и 30. Приводятся и анализируются результаты экспериментальных исследований, выявивших влияние крутизны волны на кинематические характеристики и особенности трансформации волны на мелководье. Выполнен сопоставительный анализ теоретических решений и данных экспериментов с оценкой области их применимости. В целом профиль волны и горизонтальная составляющая орбитальной скорости при прохождении гребня волны удовлетворительно согласуются с расчетами по теории Стокса при относительных глубинах более 0,07. Установлено, что для условий мелководья на относительную высоту гребня волны воздействующей на пляжный откос приурезовой зоны берега крупного водного объекта наиболее заметное влияние оказывает заложение откоса, с увеличением которого от 10 до 30 величина крутизны волны может возрасти в 1,2 раза.

Ключевые слова: берегозащита, разрушение, гребень волны, мелководье, подпорные грунтовые сооружения

Для цитирования

Черных О.Н., Бурлаченко А.В. Оценка основных параметров волнового воздействия на пологие откосы берегов крупных водных объектов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 110–116. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-110-116>

Черных Ольга Николаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры гидротехнических сооружений, Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева, Российская Федерация, 127550, Москва, Большая Академическая, д. 44; ORCID: 0000-0003-2905-446X, eLIBRARY SPIN-код: 7757-7969; chon36@mail.ru

Бурлаченко Алена Владимировна, кандидат технических наук, доцент кафедры гидравлики, Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Российская Федерация, 125319, Москва, Ленинградский пр-кт, д. 64; ORCID: 0000-0003-2617-9515, eLIBRARY SPIN-код: 3155-2490; chtara@mail.ru

© Черных О.Н., Бурлаченко А.В., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Estimation of the main parameters of wave action on the gentle slopes of the banks of large water bodies

Olga N. Chernykh¹  , Alena V. Burlachenko² 

¹Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev, Moscow, Russian Federation

²Moscow Automobile and Road Construction State Technical University, Moscow, Russian Federation

 chon36@mail.ru

Article history

Received: November 23, 2022

Revised: January 25, 2023

Accepted: January 30, 2023

Abstract. When designing coastal protection measures, special attention is paid to the creation and expansion of a natural beach slope on the coast of a water body. To assign geometric dimensions to relatively stable beach slopes, it is necessary to evaluate the relationship of waves, taking into account the level regime characteristic of a given section of the coast. The aim of the research is to explore the features of the transformation of the wave profile in shallow water and to conduct a comparative analysis of theory and experiment. The studies were carried out in a wave tray, where the waves were reproduced by a swinging shield. The features of the transformation of the wave profile at decreasing depths of the shallow water of a large water body are considered. An assessment is given of the change in the kinematic characteristics of a wave incident in a shallow water zone on an unfortified beach slope with a depth of 10, 20 and 30. The results of experimental studies are presented and analyzed, as a result of which the influence of the wave steepness on the kinematic characteristics and features of wave transformation in shallow water is revealed. A comparative analysis of theoretical solutions and experimental data with an assessment of the area of their applicability is carried out. On the whole, the wave profile and the horizontal component of the orbital velocity during the passage of the wave crest are in satisfactory agreement with the calculations according to the Stokes theory at relative depths of more than 0.07. It has been established that for shallow water conditions the relative height of the wave crest affecting the beach slope of the near-shore zone of the coast of a large water body is most noticeably affected by the slope, with an increase from 10 to 30 the magnitude of the wave steepness can increase by 1.2 times.

Keywords: bank protection, wave crest failure, shallow water, beach slopes, retaining ground constructions, retaining ground structures

For citation

Chernykh O.N., Burlachenko A.V. Estimation of the main parameters of wave action on the gentle slopes of the banks of large water bodies. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):110–116. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-110-116>

Введение

Защита от волновых воздействий береговых участков водных объектов рекреационного назначения, откосов приканальных земляных дамб, прибрежных транспортных магистралей, откосов судоходных и крупных мелиоративных каналов и водотоков, подвергающихся разрушению под действием как природных – ветер, волны, дождь, снег, лед, выходы грунтовых вод и т. д., так и искусственных (производственных) – колебания уровня от работы шлюзов, затворов водопропускных сооружений, насосных станций, действия волн проходящих судов, работы землечерпательных снарядов, когда в этом возникает необходимость, факторов, осуществляется с помощью специальных гидротехнических сооружений (ГТС). В мировой практике для проведения берегозащитных мероприятий в прибрежных зонах используются различные классические типы пляжеудерживающих ГТС¹ [1]. Среди них можно выделить следующие основные типы [2]: галечные и песчаные пляжи (рис. 1); покрытия из камня или фасонных массивов;

Olga N. Chernykh, Ph.D. Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Hydraulic Structures, Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy named after K.A. Timiryazev; 49 Timiryazevskaya St, Moscow, 127434, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-2905-446X, eLIBRARY SPIN-code: 7757-7969; chon36@mail.ru

Alena V. Burlachenko, Ph.D. Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Hydraulics, Moscow Automobile and Road Construction State Technical University; 64 Leningradskii Prospekt, Moscow, 125319, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-2617-9515, eLIBRARY SPIN-code: 3155-2490; chrtara@mail.ru

¹ Черных О.Н., Ханов Н.В., Бурлаченко А.В. Берегоукрепительные конструкции водных объектов: учебное пособие. М.: РГАУ МСХА, 2019. Ч. 1. 145 с.; Черных О.Н., Ханов Н.В., Бурлаченко А.В. Берегоукрепительные конструкции водных объектов: учебное пособие. М.: РГАУ МСХА, 2020. Ч. 2. 185 с.

поперечные сооружений типа пляжеудерживающих бун, шпоры, подводные волноломы с траверсами, подводные банкеты (рис. 2), мысы и острова; подводные рифы, вдольбереговые банкеты, волнозащитные стены с вертикальной, криволинейной либо ступенчатой передней гранью; сквозные стены, свайные поля и другие сооружения [3–5].



Рис. 1. Эрозия берегов крупного водного объекта (обследование выполнено осенью 2022 г.):
a – с песчаным пляжем [2]; *б* – искусственного пляжа, отсыпанного щебнем и гравийно-галечниковым материалом [2];
в – р. Протва в месте впадения в р. Оку (фото О.Н. Черных)

Figure 1. Erosion of the banks of a large water body (survey completed in autumn 2022):
a – with a sandy beach [2]; *b* – an artificial beach, backfilled with rubble and gravel-pebble material [2];
v – Protva River at the confluence with the Oka River (photo by O.N. Chernykh)

Защита морских побережий и берегов крупных водохранилищ является сравнительно молодой отраслью гидротехнического строительства. В нашей стране впервые морские берегозащитные ГТС были построены в Сочи в конце 1940-х гг. [6]. Научные основы морской берегозащиты уже прошли стадию становления. Однако в области береговой гидротехники существует много проблем, которые ждут своего разрешения. В частности, в дальнейшем изучении нуждается явление взаимодействия волн с ГТС и пляжами. Существует необходимость в разработке теории расчета конструкций биопозитивных берегозащитных ГТС на устойчивость и прочность, также имеются нерешенные технологические проблемы. Намечились две тенденции в практике защиты берегов. Приверженцы первой отдают предпочтение инженерным методам, основанным на использовании ГТС; сторонники второй исключают инженерное вмешательство в береговую зону водного объекта и считают, что в основе берегозащиты должен лежать принцип сохранения естественного ландшафта побережий. Задача береговой гидротехники как науки – обеспечить оптимальное сочетание этих двух тенденций.

Для обеспечения рекреационных потребностей на крупных водных объектах везде, где это приемлемо по технико-экономическим показателям, уширяют существующие или создают новые искусственные пляжи, стремясь по возможности не обострять проблемы охраны используемых территорий. В существующих крупных акваториях большое место занимают галечниковые пляжи, общая длина которых составляет около 5 % от всей береговой линии Мирового океана, или порядка 40 тыс. км. Из современных технологий можно выделить: экологические технологии «Строительство вместе с природой», базирующиеся на создании намывных прибрежных территорий, они часто применяются в Европе и получили широкое распространение в Азии, Африке, Америке и Австралии; устройство на дне биологического укрепления в виде посадок влаголюбивых растений; полосы из полипропилена искусственных водорослей и ряд других решений из природных и природоприближенных материалов экодинамического проектирования (габионов, валунного камня, специальных полименизированных бетонов, миксированных биопозитивных, типизированных фасонных блоков, заборчатых конструкций для образования отмелей, использование сочетания укрепления шпунтом или сваями с другими типами креплений или применение биоинженерных систем с геоболочками и геотубами, искусственных рифов). Среди инновационных решений берегозащиты можно выделить пляжеудерживающие сооружения, например искусственные рифы, которые возводятся на глубине 3–4 м, на участках длиной по 80–100 м (Евпатория, Охотское море, Южно-Курильское мелководье и др.). За последнее десятилетие установлено более полумиллиона рифболов из экобетона в 70 странах мира [6].

Методы и материалы

Прогрессивные волны при выходе на мелководье и приближении к берегу трансформируются [7; 8]. Трансформации подвержен профиль волны, при этом ее высота, длина и скорость распространения изменяются. Вопрос о критических параметрах волн в настоящее время рассмотрен в литературе достаточно

подробно, как теоретически, так и экспериментально, предложены формулы для определения критической высоты h_k , соответствующей длине волны λ_k к моменту разрушения на пологом склоне, а также критической глубины воды в водоеме H_k , при которой волна теряет устойчивую форму правильного периодического движения и разрушается. Подобные эксперименты проводились в лаборатории гидравлики Московского автомобильно-дорожного института под руководством кандидата технических наук В.И. Алтунина, во Всесоюзном научно-исследовательском институте водоснабжения, канализации, гидротехнических сооружений и инженерной гидрогеологии Д.И. Алтуниным [7; 8], а ранее выполнялись в гидротехнической лаборатории Московского гидромелиоративного института и в лаборатории отдела динамических исследований Научно-исследовательского института энергетических сооружений под руководством доктора технических наук, профессора В.М. Лятхера [9–11]. Однако особенности трансформации профиля волны, в частности изменение профиля ее гребня к моменту разрушения, а также закономерности вертикального распределения горизонтальных составляющих орбитальных скоростей на ограниченных глубинах исследованы недостаточно. Вместе с тем точность расчета взаимодействия волн с берегозащитными и другими ГТС зависит от достоверности значений кинематических характеристик волн. В этой связи **цель исследования** – изучение особенностей трансформации профиля волны на мелководье и проведение сопоставительного анализа теории и эксперимента.

Большая часть экспериментальных исследований выполнялась в стеклянном волновом лотке длиной рабочей части 8 м, шириной 0,55 м и наполнением 0,5 м [12]. Волны воспроизводились качающимся щитом, приводимым в движение волновой машиной, периоды волны τ равнялись 0,92, 1,22 и 1,64 с. Высоты генерируемых волн составляли для глубоководной зоны $h_d = 8\text{--}12$ см, при исходной пологости $\lambda_d/h_d = 10\text{--}65$, где λ_d – соответствующая длина волны. Коэффициент начального заложения прибрежного склона m составлял 10, 20 и 30. Профиль волны, время ее набегания t и орбитальные скорости фиксировались с помощью индикаторов и кинокамеры, устанавливаемой на расстоянии 1 м от боковой стеклянной стенки лотка.

Результаты и обсуждение

На предварительных стадиях наблюдения за процессом трансформации волн установлено, что в мелководной зоне на глубинах $H/\lambda_d < 0,3$, где H – глубина воды в водном объекте, происходит перестроение профиля волны. Увеличивается высота гребня волны η , а ее длина уменьшается, в то же время длина ложбины увеличивается. Гребень волны сужается и заостряется, а ложбина становится плоской. Сопоставление с расчетным профилем волны на мелководье, построенным по формулам третьего приближения волновой теории Стокса [13; 14] и второму приближению кноидальной теории волн [15], трансформации волны, зафиксированной на относительных глубинах $H/\lambda_d = 0,07; 0,04; 0,03$, показало, что при $H/\lambda_d \geq 0,07$ расчетные и опытные профили совпадают. При меньшей относительной глубине $H/\lambda_d = 0,04$ и $0,03$ расчетные профили гребня волны все более отличаются от экспериментальных. Лобовая или передняя сторона гребня становится круче ее задней грани. Оказалось, что теоретические решения не учитывают асимметрию профиля волны и дают только симметричную форму гребня на мелководье. Таким образом, расчетные профили гребня волны хорошо согласуются с опытными данными при 0,07, а при уменьшении относительных глубин они все более отличаются.

Изучение закономерности изменения профиля гребня волны перед ее разрушением показало, что в зависимости от крутизны исходной волны и заложения склона, результаты которых приведены на рис. 2, для пологих волн с крутизной $h_d/\lambda_d = 0,017\text{--}0,02$ значение отношения t/τ не зависит от заложения пологого склона и остается постоянной величиной в пределах 0,19–0,21. Эти величины t/τ отражают максимальное перестроение профиля волны перед разрушением. Для волны большей крутизны значения t/τ возрастают и при $h_d/\lambda_d = 0,08$ равняются 0,40–0,47. На изменение величины t/τ влияет заложение склона. Для более пологих склонов при постоянстве отношения h_d/λ_d величина t/τ становится больше.

В исследованном диапазоне изменения заложения прибрежного склона и пологости исходных волн вычленены два вида разрушения гребня волны: скользящее и ныряющее. При скользящем разрушении (тип I) величина t/τ изменяется в диапазоне 0,21–0,48, а при ныряющем (тип II), соответственно, 0,19–0,30. Причем для склона с $m = 30$ скользящее разрушение имеет место только для пологих волн с $h_d/\lambda_d < 0,02$, для склона $m = 10$ крутизна волны возрастает до 0,05. Этот результат согласуется с ранее полученными данными [13; 16]. Анализируя изменение относительной высоты гребня (η/h_k) (рис. 3), можно отметить, что для крутых волн с $h_d/\lambda_d = 0,08\text{--}0,09$ наблюдается минимальное значение параметра, равное $t/\tau = 0,66\text{--}0,71$. При уменьшении крутизны волны относительная высота гребня возрастает и для

склона с $m = 30$ при $h_d/\lambda_d = 0,017$ достигает 0,81. Для более крутого склона ($m = 10$) и при той же крутизне волны величина η/h_k меньше и составляет 0,73.

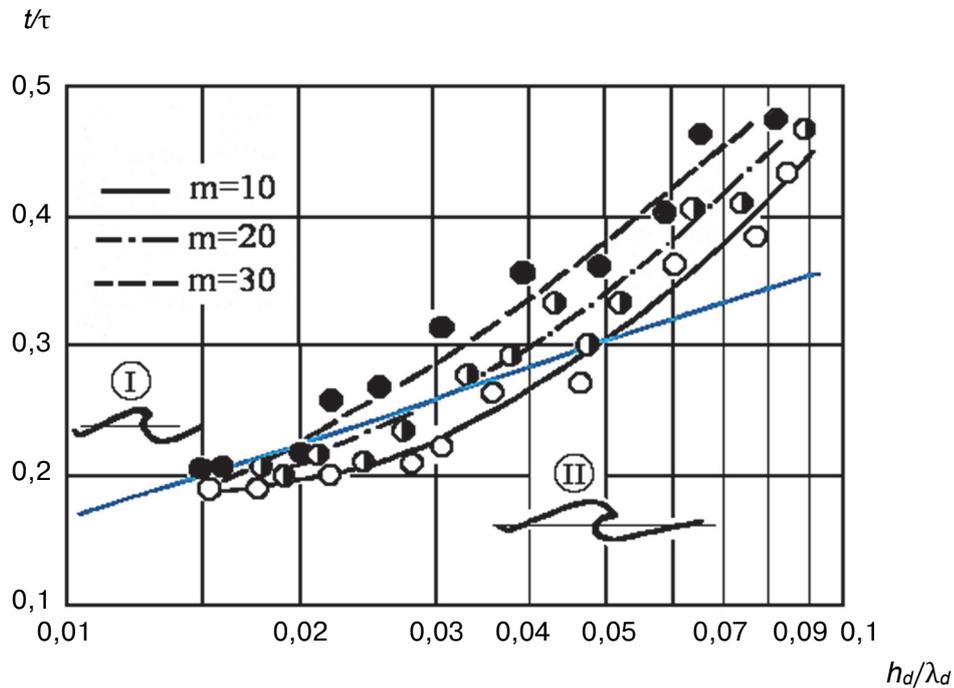


Рис. 2. График зависимости относительных параметров волны перед разрушением от крутизны исходных волн $t/\tau = f(h_d/\lambda_d)$ на склонах с различным заложением (синим цветом указана граница областей с разным типом разрушения волн):

I – область скользящего разрушения волны; *II* – область ныряющего разрушения волны

Figure 2. Graph of the dependence of the relative parameters of the wave before breaking on the steepness of the initial waves $t/\tau = f(h_d/\lambda_d)$ on slopes with different inclinations (blue color indicates the boundary of areas with different types of wave destruction):

I – the region of sliding wave breaking; *II* – the area of the diving destruction of the wave

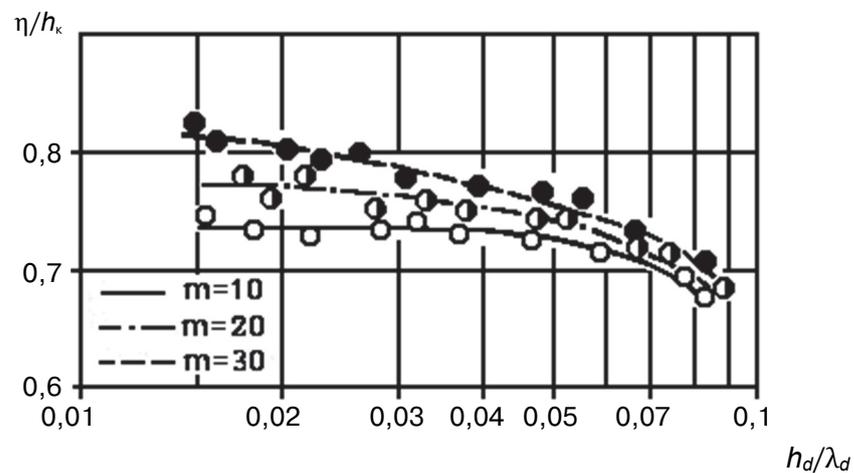


Рис. 3. График зависимости относительной высоты гребня волны от крутизны исходных волн $\eta/h_k = f(h_d/\lambda_d)$ при изменении заложения откоса берега m от 10 до 30

Figure 3. Graph of the dependence of the relative height of the wave crest on the curvature of the initial waves $\eta/h_k = f(h_d/\lambda_d)$ when changing the bank slope m from 10 to 30

Таким образом, на относительную высоту гребня волны η/h_k , помимо относительной величины h_d/λ_d , заметное влияние оказывает заложение склона, с увеличением которого величина отношения η/h_k возрастает. Так как величины отношений t/τ и η/h_k получены в створе перед разрушением волны, то их значения соответствуют максимальным значениям исследуемых параметров при фиксированных h_d/λ_d

и $m = 10\text{--}30$. Очевидно, что установленное ранее Д.И. Алтуниным [13; 14] для мелководья отличие расчетного и экспериментального профилей гребня волны на уменьшающихся глубинах должно сказаться и на кинематических характеристиках волны, что необходимо проверить в дальнейшем и сопоставить с данными [2; 17] по теории Стокса при близких значениях h_d/λ_d .

Заключение

Выполненные экспериментальные исследования позволили выявить некоторые закономерности построения профиля волны на мелководье и изменений кинематических характеристик волнового потока.

Сопоставление опытных данных с расчетными формулами теории Стокса (3-е приближение) показало, что профиль волны и горизонтальная составляющая орбитальной скорости при прохождении гребня волны удовлетворительно согласуются при относительных глубинах $H/\lambda_d > 0,07$.

В результате модельных исследований выяснено, что для условий мелководья на относительную высоту гребня волны, воздействующей на неукрепленный пляжный откос приурезовой зоны берега крупного водного объекта, наиболее заметное влияние оказывает заложение откоса, с увеличением которого от 10 до 30 величина крутизны волны η/h_k может возрасти в 1,2 раза.

Список литературы

1. Курбанов С.О., Румянцев И.С. Основы проектирования природно-технических систем биопозитивной конструкции по регулированию русел, защиты и восстановления прибрежных зон // Проблемы развития мелиорации и водного хозяйства и пути их решения: материалы международной научно-практической конференции: в 3 ч. М.: МГУП, 2011. Ч. III. С. 121–135.
2. Левкевич В.Е. Крепление берегов и верховых откосов подпорных сооружений гидроузлов Беларуси. Минск: БНТУ, 2019. 172 с.
3. Коренева В.В., Козырь И.Е., Штеренлихт Д.В. Гидравлическое и конструктивное обоснование берегозащитных и берегоукрепительных мероприятий на водных объектах. М.: МГУП, 2002. 116 с.
4. Правдивец Ю.П., Смирнова Т.Г., Смирнов Г.Н. Берегозащитные сооружения. М.: Изд-во АСВ, 2002. 303 с.
5. Смирнова Т.Г., Кантаржи И.Г. Расчет и проектирование искусственных свободных песчаных пляжей. М.: МГСУ, 2000. 125 с.
6. Черных О.Н., Бурлаченко А.В. Пути решения проблем Имеретинской бухты // Вестник учебно-методического объединения по образованию в области природообустройства и водопользования. 2021. № 23. С. 33–39.
7. Алтунин Д.И., Алтунин В.И. Переформирование откосов пойменных дамб // Гидравлика водопропускных сооружений: тезисы докладов V Республиканской конференции по научно-техническим проблемам гидравлики дорожных водопропускных сооружений. Саратов, 1985. 205 с.
8. Weinel R.L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application // Journal of Fluid Mechanics. 1960. Vol. 7. Issue 2. Pp. 273–286. <http://doi.org/10.1017/s0022112060001481>
9. Chernykh O.N., Komelkov L.V. Hydrodynamic loads and stability of the lower-pool apron of hydraulic structures // Hydrotechnical Construction. 1983. Vol. 17. No. 8. Pp. 410–416.
10. Suetina T.A., Chernykh O.N., Burlachenko A.V. Hydraulic calculation features of helically corrugated steel culverts // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. Article 012129. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012129>
11. Ляхтер В.М., Милетеев А.Н. Расчет наката длинных гравитационных волн на откос // Океанология. 1974. Т. 14. № 1. С. 37–43.
12. Алтунин Д.И. Кинематические характеристики волн на пологих прибрежных склонах // Водопротусные сооружения в условиях Крайнего Севера: сборник научных трудов. Якутск: ЯГУ, 1986. 132 с.
13. Алтунин Д.И., Сидоров Н.Н. Распределение волновых скоростей на критической глубине в зоне берегозащиты // Труды ВОДГЕО. Инженерная защита территорий. М., 1982. С. 100–105.
14. Iwagaki Y., Sakai T., Tsukioka K., Sawai N. Relationship between vertical distribution of water particle velocity and type of breakers on beaches // Coastal Engineering in Japan. 1974. Vol. 17. Pp. 51–58. <https://doi.org/10.1080/05785634.1974.11924182>
15. Francis J.R.D. Experiments on the motion of solitary grains along the bed of a water-stream // Proceedings of the Royal Society of London. 1973. Vol. 332. Issue 1591. Pp. 443–471. <https://doi.org/10.1098/rspa.1973.0037>
16. Volkova E. Experimental researches of creation beaches on the artificial territories // MEDCOAST 2009: The Ninth International Conference on the Mediterranean Coastal Environment. Sochi, 2009. Pp. 1121–1127.
17. Ranieri G. The surf zone distortion of beach profiles in small-scale coastal models // Journal of Hydraulic Research. 2007. Vol. 45. No. 2. Pp. 261–269. <https://doi.org/10.1080/00221686.2007.9521761>

References

1. Kurbanov S.O., Rumyantsev I.S. Fundamentals of designing natural and technical systems of biopositive design for channel regulation, protection and restoration of coastal zones. *Problems of Development of Melioration and Water Management and Ways to Solve Them: Materials of the International Scientific-Practical Conference* (part 3, p. 121–135). Moscow: MGUP Publ.; 2011. (In Russ.)
2. Levkevich V.E. *Fastening of banks and upstream slopes of retaining structures of hydropower facilities in Belarus*. Minsk: BNTU Publ., 2019. (In Russ.)
3. Koreneva V.V., Kozyr I.E., Shterenlikht D.V. *Hydraulic and constructive substantiation of bank protection and bank protection measures at water bodies*. Moscow: MGUP Publ.; 2002. (In Russ.)
4. Pravdivets Yu.P., Smirnova T.G., Smirnov G.N. *Shore protection structures*. Moscow: ASV Publ.; 2002. (In Russ.)
5. Smirnova T.G., Kantarzhii I.G. *Calculation and design of artificial free sandy beaches*. Moscow: MGSU Publ.; 2000. (In Russ.)
6. Chernykh O.N., Burlachenko A.V. Ways to solve the problems of the Imeretinskaya Bay. *Bulletin of the Educational and Methodological Association for Education in the Field of Environmental Management and Water Use*. 2021;(23):33–39. (In Russ.)
7. Altunin D.I., Altunin V.I. Reformation of slopes of floodplain dams // *Hydraulics of culverts: Abstracts of the V Republican Conference on Scientific and Technical Problems of Road Culvert Hydraulics*. Saratov; 1985. (In Russ.)
8. Weinel R.L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application. *Journal of Fluid Mechanics*. 1960;7(2):273–286. <http://doi.org/10.1017/s0022112060001481>
9. Chernykh O.N., Komelkov L.V. Hydrodynamic loads and stability of the lower-pool apron of hydraulic structures. *Hydrotechnical Construction*. 1983;17(8):410–416.
10. Suetina T.A., Chernykh O.N., Burlachenko A.V. Hydraulic calculation features of helically corrugated steel culverts. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018;456:012129. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012129>
11. Lyakhter V.M., Mileteev A.N. Calculation of run-up of long gravitational waves on a slope. *Oceanology*. 1974;14(I):37–43. (In Russ.)
12. Altunin D.I. Kinematic characteristics of waves on gentle coastal slopes. *Culvert Structures in the Conditions of the Far North: Collection of Scientific Papers*. Yakutsk: YSU Publ.; 1986. (In Russ.)
13. Altunin D.I., Sidorov N.N. Distribution of wave velocities at critical depth in the coastal protection zone. *Proceedings of VODGEO. Engineering Protection of Territories*. Moscow; 1982. p. 100–105. (In Russ.)
14. Iwagaki Y., Sakai T., Tsukioka K., Sawai N. Relationship between vertical distribution of water particle velocity and type of breakers on beaches. *Coastal Engineering in Japan*. 1974;17:51–58. <https://doi.org/10.1080/05785634.1974.11924182>
15. Francis J.R.D. Experiments on the motion of solitary grains along the bed of a water-stream. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1973;332(1591):443–471. <https://doi.org/10.1098/rspa.1973.0037>
16. Volkova E. Experimental researches of creation beaches on the artificial territories. *MEDCOAST 2009: The Ninth International Conference on the Mediterranean Coastal Environment*. Sochi; 2009. p. 1121–1127.
17. Ranieri G. The surf zone distortion of beach profiles in small-scale coastal models. *Journal of Hydraulic Research*. 2007;45(2):261–269. <https://doi.org/10.1080/00221686.2007.9521761>