

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Рынкoвская М.И.*, канд. техн. наук, РУДН, Москва, Россия

### ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*Ерофеев В.Т.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

### ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

*Мамиева И.А.*, РУДН, Москва, Россия

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

*Асапов В.П.*, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

*Андреев В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

*Ванин В.В.*, д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

*Варум У.*, д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

*Войцкицкий З.*, проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

*Евкин А.*, д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

*Зверев Е.М.*, д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

*Иванов С.П.*, д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

*Карпенко Н.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

*Какоби С.*, д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

*Колчунов В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

*Красич С.*, канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

*Лисичкин С.Е.*, д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

*Ляхович Л.С.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

*Магуле Ф.*, проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюдпек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

*Мендонка П.*, д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

*Санжаровский Р.С.*, д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

*Сантос Р.*, исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

*Травуш В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

*Якунов Н.М.*, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Федоров В.С.</i> Виталий Михайлович Бондаренко – жизнь во имя Отчизны .....	487
<b><u>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ</u></b>	
<i>Андросова Н.Б., Колчунов В.И., Емельянов С.Г.</i> Неравновесные и нелинейные процессы при оценке потенциала живучести железобетонных конструктивных систем в запредельных состояниях .....	490
<i>Карпенко Н.И., Моисеенко Г.А.</i> Свойства высокопрочного сталефибробетона с минимальным эффективным содержанием фибры при нагружениях различной длительности .....	503
<i>Колесников А.Г., Осадчая А.В.</i> Устойчивость пологих оболочек покрытия при местном изменении прочностных характеристик .....	515
<i>Колчунов В.И.</i> Численно-аналитический метод в механике железобетона .....	525
<i>Ларионов Е.А., Назаренко В.Г., Рынкoвская М.И., Гринько Е.А.</i> Релаксация напряжений в элементах железобетонных конструкций .....	534
<i>Леонтьев Е.В., Травуш В.И.</i> Колебания трубопроводов газосодержащих жидкостей при изменяющихся условиях опирания .....	544
<i>Римшин В.И., Амелин П.А.</i> Численный расчет изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения в программной среде Abaqus .....	552
<i>Савин С.Ю., Федорова Н.В.</i> Экспозиция устойчивости длительно нагруженных конструктивных систем зданий при средовом повреждении .....	564
<i>Тамразян А.Г., Черник В.И., Мацевич Т.А., Манаенков И.К.</i> Аналитическая модель деформирования железобетонных колонн на основе механики разрушения .....	573
<i>Федоров В.С., Левитский В.Е., Исаева Е.А.</i> Базовые принципы в теории силового и термосилового сопротивления бетона .....	584

Редактор Ю.А. Заикина

Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова

Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i\_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 03.02.2023. Выход в свет 10.02.2023. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 13,02. Тираж 250 экз. Заказ № 1717. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

# STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2022 VOLUME 18 No. 6

## Scientific Legacy of Academician Vitaly Mikhailovich Bondarenko

Scientific Editor *Vitaly I. Kolchunov*

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

### EDITORIAL BOARD

#### EDITOR-IN-CHIEF

*Marina I. Rynkovskaya*, PhD of Technical Science, RUDN University, Moscow, Russia

#### ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

*Vladimir T. Erofeev*, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

#### MANAGING EDITOR

*Iraida A. Mamieva*, RUDN University, Moscow, Russia

#### MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

*Vladimir P. Agapov*, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

*Vladimir I. Andreev*, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

*Sergey P. Ivanov*, DSc, Professor, VSUT (Volga Tech), Yoshkar-Ola, Russia

*Saeid Kakooei*, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

*Nikolay I. Karpenko*, member of the RAACS, DSc, Professor, NISF RAACS, Moscow, Russia

*Vitaly I. Kolchunov*, member of the RAACS, DSc, Professor, SWSU, Kursk, Russia

*Sonja Krasic*, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

*Sergey E. Lisichkin*, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

*Leonid S. Lyakhovich*, member of the RAACS, DSc, Professor, TSUAB, Tomsk, Russia

*Fredéric Magoulès*, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

*Paulo Mendonca*, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

*Rudolf S. Sanjarovsky*, DSc, Professor, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

*Ricardo Santos*, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

*Vladimir I. Travush*, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

*Vladimir V. Vanin*, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

*Humberto Varum*, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

*Zbigniew Wójcicki*, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

*Nukh M. Yakupov*, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

*Alex Yevkin*, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

*Evgeniy M. Zveryaev*, DSc, Professor, KIAM RAS, Moscow, Russia

### CONTENTS

<i>Fedorov V.S.</i> Vitaly Mikhailovich Bondarenko – life in the name of the Fatherland .....	487
<b>ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES</b>	
<i>Androsova N.B., Kolchunov V.I., Emelyanov S.G.</i> Non-equilibrium and nonlinear processes in robustness potential evaluation of reinforced concrete structural systems in ultimate states .....	490
<i>Karpenko N.I., Moiseenko G.A.</i> Investigation of the properties of high-strength steel fiber concrete with a minimum effective fiber content under loads of various durations .....	503
<i>Kolesnikov A.G., Osadchaya A.V.</i> Stability of shallow shells with local changes in strength characteristics .....	515
<i>Kolchunov V.I.</i> Numerical-analytical method in reinforced concrete mechanics .....	525
<i>Larionov E.A., Nazarenko V.G., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A.</i> Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures .....	534
<i>Leontiev Ye.V., Travush V.I.</i> Fluctuations of pipelines of gas-containing liquids under changing bearing conditions .....	544
<i>Rimshin V.I., Amelin P.A.</i> Numerical calculation of bent reinforced concrete elements of rectangular section in the Abaqus software .....	552
<i>Savin S.Yu., Fedorova N.V.</i> Stability exposure of building structural systems under environmental damage .....	564
<i>Tamrazyan A.G., Chernik V.I., Matseevich T.A., Manaenkov I.K.</i> Analytical model of deformation of reinforced concrete columns based on fracture mechanics .....	573
<i>Fedorov V.S., Levitsky V.E., Isaeva E.A.</i> Basic principles in the theory of force and thermal force resistance of concrete .....	584

Copy Editor Iu.A. Zaikina  
Graphic Designer Iu.N. Efremova  
Layout Designer Iu.A. Zaikina

#### Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia  
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: [stmj@rudn.ru](mailto:stmj@rudn.ru); [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia  
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University  
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia, 2022  
© Kireev S.A., photo on the cover of the journal  
(Golden Bridge, Vladivostok, Russia), 2022

*Номер посвящен видному российскому ученому-строителю, академику РААСН Виталию Михайловичу Бондаренко, признанному специалисту в области теории железобетонных конструкций, внесшему значительный вклад в диссипативную теорию силового сопротивления бетона и железобетона.*

БИОГРАФИЧЕСКАЯ СТАТЬЯ / BIOGRAPHICAL ARTICLE

## Виталий Михайлович Бондаренко – жизнь во имя Отчизны

В.С. Федоров 

*Российская академия архитектуры и строительных наук, Москва, Российская Федерация  
 Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация*

✉ fvs\_skzs@mail.ru

## Vitaly Mikhailovich Bondarenko – life in the name of the Fatherland

Viktor S. Fedorov 

*Russian Academy of Architecture and Building Sciences, Moscow, Russian Federation  
 Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation*

✉ fvs\_skzs@mail.ru

Солдат, строитель, доктор технических наук, профессор, академик В.М. Бондаренко за боевые заслуги в годы Великой Отечественной войны, за достижения в трудовой и научной деятельности был удостоен более 20 орденов и медалей, множества государственных и профессиональных премий.

В. Бондаренко родился 22 июня 1925 года. Его отец Бондаренко Михаил Ильич – видный деятель Советской Украины – в августе 1937 года был назначен председателем Совета Народных Комиссаров УССР, а в октябре 1937 года его вместе с женой – матерью Виталия Михайловича – арестовали в ходе развернувшихся в стране репрессий. Зная, что ночью за ними придут из НКВД, отец отправил Виталия к тетке под Харьков, чтобы сына не забрали в специальную детскую колонию для детей осужденных. Михаил Ильич Бондаренко был расстрелян 10 февраля 1938 года, мать содержалась в лагерях до 1952 года.

В 1940 году 15-летний Виталий Бондаренко поступил в строительный техникум, директором которого был друг отца. В день 16-летия, 22 июня 1941 года, началась Великая Отечественная война. К учебе добавились дежурства по ночам на крышах зданий, куда при вражеских бомбардировках часто падали бомбы-«зажигалки», а также работы по строительству противотанковых рвов. В 1942 году, когда Виталию Бондаренко исполнилось 17 лет, он пошел добровольцем в Красную армию. Долгий, трудный и героический путь на передовой фронта начинался в качестве рядового сапера. Судьбой было определено так, что при освобождении Харькова – 9 февраля 1943 года – молодой боец получил первое тяжелое ранение в



В.М. Бондаренко  
 (фото из личного архива В.М. Бондаренко)  
 Vitaly M. Bondarenko  
 (photo from the personal archive  
 of Vitaly M. Bondarenko)

ночном бою у поселка Великий Бурлук и не попал в родной город. После выздоровления рядовой В. Бондаренко был направлен на учебу в 33-ю Челябинскую танковую школу, по окончании которой в звании гвардии старшины получил назначение на должность помощника командира танкового взвода, а затем командира САУ СУ-152 (самоходная артиллерийская установка). Виталий Михайлович участвовал в Воронежском прорыве, Курской битве, во взятии Берлина и в освобождении Праги от фашистских захватчиков.

В конце войны в арсенале 20-летнего фронтовика было девять боевых наград, среди которых два ордена Красной Звезды, орден Отечественной войны I степени, две медали «За отвагу», а также нашивки за четыре ранения.

После демобилизации в 1945 году по ранению юноша приехал в родной Харьков, продолжил учебу в строительном техникуме и участвовал в послевоенном восстановлении объектов промышленного и гражданского строительства. В 1946 году, работая мастером-строителем на заводе «Запорожсталь», поступил в Харьковский инженерно-строительный институт (ХИСИ), который с отличием окончил в 1952 году, и по распределению был направлен в г. Краснодар. В Донбасский край Виталий Михайлович Бондаренко приехал уже с супругой Надеждой. Вспоминая о тех годах, он говорил: «Работали, работали и еще раз работали на благо страны». Пятидесятые годы – это время сильных духом людей, когда высокие темпы экономического роста требовали фундаментальных знаний, инициативы, энтузиазма и самостоятельности в принятии решений. Молодой инженер участвовал в возведении промышленных предприятий, шахт, сооружений коммунальной и транспортной инфраструктуры. В Краснодаре Виталий Михайлович прошел ступени профессионального роста от рядового до главного инженера треста «Краснодоншахтстрой», строил новый город Красногвардейск. После переезда в Харьков работал главным инженером строительного комбината Мингорсельстроя. Последствия тяжелых ранений не позволили Виталию Михайловичу продолжать практическую деятельность строителя, он перешел работать преподавателем в свою alma mater – Харьковский инженерно-строительный институт. Это предопределило судьбу будущего крупного ученого.

В 1962–1972 годах В.М. Бондаренко вел научную и преподавательскую деятельность в ХИСИ. Огромный практический опыт, увлеченность наукой, желание заниматься исследовательской деятельностью и развивать идеи харьковской научной школы привели его к защите кандидатской диссертации (1961 год), а через восемь лет и докторской (1969 год). Он работал доцентом, профессором, заведующим кафедрой, проректором ХИСИ по научной работе.

В 1972 году Правительством СССР назначен директором Всесоюзного отраслевого проектно-научного исследовательского института (Гидрониисельхоз) в Москве, который под его руководством стал ведущим проектно-исследовательским институтом в области строительства зданий и сооружений сельскохозяйственной инфраструктуры. С 1976 по 2013 год преподавал во Всесоюзном заочном инженерно-строительном институте (ВЗИСИ), преобразованном в Московский институт коммунального хозяйства и строительства (МГАКХиС), занимал должности заведующего кафедрой, проректора по учебной работе. После воссоздания Российской академии архитектуры и строительных наук в 1992 году одним из первых был избран действительным членом-академиком РААСН. С 1994 по 1999 год был вице-президентом Российской академии архитектуры и строительных наук, а затем председателем Ученого совета отделения строительных наук.

В научной деятельности В.М. Бондаренко опирался на научные достижения предыдущих поколений, творчески их анализировал, что позволило ему внести весомый вклад в теорию железобетона, стать известным ученым и авторитетным специалистом в области строительных наук. Среди основных направлений его исследований создание диссипативной теории силового сопротивления железобетонных конструкций и конструктивная безопасность сооружений. Он сформулировал и решил задачи управления напряженным состоянием конструкций. Академик РААСН В.М. Бондаренко является основателем и руководителем научной школы «Теория силового сопротивления, конструктивной безопасности и оптимизации технологического энергопотребления зданий и сооружений». Им подготовлено более двадцати учеников – докторов и кандидатов технических наук.

Более тридцати лет доктор технических наук, профессор В.М. Бондаренко был членом экспертного совета ВАК России по строительству, где требовательно и доброжелательно рассматривал аттестационные дела и диссертационные работы соискателей ученых степеней.

Им опубликовано свыше 400 научных работ, в том числе 12 монографий и учебников. Книги и статьи Виталия Михайловича отличаются четким и ясным изложением сложных вопросов теории расчета конструкций с учетом особенностей и наличия несовершенств в железобетоне.

В.М. Бондаренко принимал участие в научном сопровождении проектирования и строительства многих важных объектов СССР и России, в том числе храма Христа Спасителя, комплекса подземных

сооружений на Манежной площади, покрытия Большой спортивной арены в Лужниках, Лефортовского тоннеля, Третьего транспортного кольца Москвы и др.

Виталий Михайлович Бондаренко крупнейший ученый советской, российской и зарубежной науки в области строительных конструкций, организатор науки и прекрасный педагог. Глубокое проникновение в сущность явлений сочетались с яркой и доходчивой формой изложения. Запоминающиеся образы, цитаты и меткие сравнения удачно выделяли главное, глубоко раскрывали суть вопроса и повышали интерес слушателей к теме. Научные выступления, лекции В.М. Бондаренко тесно связаны с живой действительностью, отличались смелостью обобщения, прививали гордость за нашу отечественную науку, любовь к знаниям, творческому труду ученого, преподавателя и строителя – к своей профессии. Преподавать и творить – это основа труда В.М. Бондаренко, его любовь к специальности, избранному делу, своему труду.



Заседание ученого совета отделения строительных наук РААСН:

*слева направо:* член-корреспондент РААСН А.А. Кальгин, председатель ученого совета академик РААСН В.М. Бондаренко, академик и вице-президент РААСН В.И. Травуш (фото из личного архива В.С. Федорова)

Meeting of the Academic Council of the Department of Construction Sciences of the RAASN:

*from left to right:* corresponding member of the RAASN Alexander Kalgin, Chairman of the Academic Council, Academician of the RAASN Vitaly Bondarenko, Academician and Vice-President of the RAASN Vladimir Travush (photo from the personal archive of Viktor S. Fedorov)

Вклад Виталия Михайловича в строительство и строительную науку удостоен высоких правительственных наград, среди которых орден Ленина, орден Трудового Красного Знамени, орден Почета, персональная благодарность президента РФ «За большой вклад в развитие отечественной фундаментальной строительной науки», орден преподобного Андрея Рублева Русской православной церкви, звания заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, почетного строителя России и почетного работника высшего профессионального образования Российской Федерации, Большая медаль РААСН, лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники.

В.М. Бондаренко являлся действительным членом Российской и Международной инженерных академий, Международной академии экологической реконструкции; избирался членом Центрального совета всероссийского общественно-политического движения «Духовное наследие», членом правления национальной палаты «Культурно-историческое наследие России»; был руководителем советской, затем российской стороны ряда совместных научно-технологических программ развития (с Италией, Швецией, странами Восточной Европы), действительным членом Британского института гражданских инженеров, иностранным членом Академии строительства Украины, почетным профессором двух университетов – Белгородского государственного технического университета имени В.Г. Шухова и Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры.

Виталий Михайлович также увлекался историей нашей страны первой половины XX столетия. Свидетель и участник судьбоносных событий в истории Родины и ее народа, он написал четыре книги, в которых критически анализировал послереволюционную, предвоенную и послевоенную историю советской власти и советского народа. В.М. Бондаренко писал: «Это книги о наших соотечественниках, павших и немногих оставшихся в живых, живших в сталинские времена, творивших в трагические и героические годы Родины ее историю и поэтому неотъемлемых от нее».

В.М. Бондаренко как гражданин видел свою задачу в необходимости вселить в современников, молодежь веру и любовь в свою страну, доказать необходимость самоотверженной обороны ее суверенитета и благополучия.

Его девизом были слова Юлии Друниной, которые как нельзя лучше характеризуют жертвенный путь самого Виталия Михайловича: «Шагаю по белому свету, порой пробиваюсь сквозь тьму, считая присягой лишь это: „Жизнь – Родине, честь – никому!“».

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-490-502  
УДК 69.07

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Неравновесные и нелинейные процессы при оценке потенциала живучести железобетонных конструктивных систем в запредельных состояниях

Н.Б. Андросова<sup>1,3</sup> , В.И. Колчунов<sup>2,3</sup> , С.Г. Емельянов<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орел, Российская Федерация

<sup>2</sup>Юго-Западный государственный университет, Курск, Российская Федерация

<sup>3</sup>Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Москва, Российская Федерация

✉ ramia84@rambler.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 12 сентября 2022 г.

Доработана: 27 октября 2022 г.

Принята к публикации: 30 октября 2022 г.

#### Для цитирования

Андросова Н.Б., Колчунов В.И., Емельянов С.Г. Неравновесные и нелинейные процессы при оценке потенциала живучести железобетонных конструктивных систем в запредельных состояниях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 490–502. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-490-502>

**Аннотация.** Рассмотрены задачи о неравновесных и нелинейных процессах при оценке потенциала живучести железобетонных конструктивных систем в запредельных состояниях. Дано определение понятия «экспозиция живучести» для количественной оценки потенциала живучести. Предложена расчетная модель, основанная на обобщении известной классической связи между скоростью изменения текущего относительного дефицита напряженно-деформированного состояния железобетона по отношению к каждому фиксированному времени, значению для описания во времени неравновесных процессов силового сопротивления конструкционных материалов в зависимости от режима и уровня нагружения. На основе теории линейной ползучести стареющих материалов построен алгоритм для определения меры ползучести коррозионно повреждаемого бетона и железобетона и определения параметра «экспозиция живучести» железобетонной статически неопределимой конструктивной системы с учетом неравновесных и нелинейных процессов ее деформирования во времени. Рассмотрен пример расчета потенциала живучести однопролетной жестко защемленной железобетонной балки с позиции критерия особого предельного состояния.

**Ключевые слова:** железобетонные конструкции, ползучесть, коррозионные повреждения, экспозиция живучести, особое воздействие, прогрессирующее обрушение

**Андросова Наталья Борисовна**, кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой строительных конструкций и материалов, Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Российская Федерация, 302026, Орел, ул. Комсомольская д. 95; научный сотрудник, Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Российская Федерация, 127238, Москва, Локомотивный пр-д, д. 21; ORCID: 0000-0003-1251-7106, Scopus Author ID: 57205225480, eLIBRARY SPIN-код: 1987-0753; ramia84@rambler.ru

**Колчунов Виталий Иванович**, академик РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой уникальных зданий и сооружений, Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Российская Федерация, 127238, Москва, Локомотивный пр-д, д. 21; ORCID: 0000-0001-5290-3429, Scopus Author ID: 57219004839, eLIBRARY SPIN-код: 4512-6499; asiorel@mail.ru

**Емельянов Сергей Геннадьевич**, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры уникальных зданий и сооружений, Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; ORCID: 0000-0002-3012-0383, Scopus Author ID: 7003651549, eLIBRARY SPIN-код: 1218-1835; rector@mail.ru

© Андросова Н.Б., Колчунов В.И., Емельянов С.Г., 2022



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>


## Non-equilibrium and nonlinear processes in robustness potential evaluation of reinforced concrete structural systems in ultimate states

Natalia B. Androsova<sup>1,3</sup>, Vitaly I. Kolchunov<sup>2,3</sup>, Sergey G. Emelyanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russian Federation

<sup>2</sup>South-West State University, Kursk, Russian Federation

<sup>3</sup>Scientific Research Institute of Construction Physics of the RAACS, Moscow, Russian Federation

 ramia84@rambler.ru

### Article history

Received: September 12, 2022

Revised: October 27, 2022

Accepted: October 30, 2022

### For citation

Androsova N.B., Kolchunov V.I., Emelyanov S.G. Non-equilibrium and nonlinear processes in robustness potential evaluation of reinforced concrete structural systems in ultimate states. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):490–502. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-490-502>

**Abstract.** The problems of non-equilibrium and nonlinear processes in the evaluation of reinforced concrete structural systems robustness potential in ultimate states are considered. The definition of concept of “robustness exposition” is given for a quantitative assessment of the robustness potential. A calculation model based on the generalization of the well-known classical relationship between the current relative deficit change rate of the reinforced concrete stress-strain state with respect to each fixed time value is proposed to describe in time non-equilibrium processes of structural materials force resistance depending on the mode and level of loading. On the basis of the linear creep theory, aging materials, an algorithm was developed to determine the measure of creep, corrosion-damaged concrete and reinforced concrete and to determine the parameter “robustness exposition” of a reinforced concrete statically indeterminate structural system, taking into account non-equilibrium and nonlinear processes of its deformation in time. An example of a single-span rigidly clamped reinforced concrete beam calculating the robustness potential from the position of a special limiting state criterion is considered.

**Keywords:** reinforced concrete structure, creep, corrosion damage, robustness exposure, accidental action, progressive collapse

### Введение

Проблема конструктивной живучести зданий и сооружений при особых воздействиях в настоящее время является одной из новых направлений в исследованиях строительных конструкций. За последние два десятилетия в стране и за рубежом накоплены некоторые результаты теоретических исследований по изучению сопротивления железобетонных конструкций при внезапной структурной перестройке конструктивной системы, вызванной удалением несущего элемента или связи, и установлению возможных картин разрушения при таком воздействии. Однако до настоящего времени выполнено крайне мало экспериментально-теоретических исследований по решению задач сохранения потенциала живучести эксплуатируемых железобетонных конструктивных систем во времени с учетом накопления повреждений неравновесного характера. Отдельными задачами силового сопротивления железобетонных конструкций под действием режимных длительных неравновесных процессов занимались В.М. Бондаренко [1], В.И. Колчунов [2], Н.В. Федорова [3], С.Ю. Савин [4], А.Г. Тамразян [5], О.В. Кабанцев [6], Н.Н. Трекин [7], J. Li [8], E. Vasanelli [9] и др.

Под термином «живучесть» конструктивной системы в научных публикациях нет установившегося определения и используются несколько различающиеся определения и понятия. Так, профессор В.Д. Райзер [10] определяет живучесть как свойство конструкций сохранять при аварийных воздействиях способность к выполнению основных функций, не допуская лавинообразного (каскадного) развития возмущений и отказов.

**Natalia B. Androsova**, PhD of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Department of Building Constructions and Materials, Orel State University named after I.S. Turgenev, 95 Komsomolskaya St, Orel, 302026, Russian Federation; Research Associate, Scientific Research Institute of Construction Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; 21 Lokomotivnyi Proezd, Moscow, 127238, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-1251-7106, Scopus Author ID: 57205225480, eLIBRARY SPIN-code: 1987-0753; ramia84@rambler.ru

**Vitaly I. Kolchunov**, Academician of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, D.Sc. in Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Unique Buildings and Structures, South-West State University, 94 50 let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation; Research Associate, Scientific Research Institute of Construction Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 21 Lokomotivnyi Proezd, Moscow, 127238, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5290-3429, Scopus Author ID: 57219004839, eLIBRARY SPIN-code: 4512-6499; asiorel@mail.ru

**Sergey G. Emelyanov**, corresponding member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, D.Sc. in Technical Sciences, Professor of the Department of Unique Buildings and Structures, South-West State University, 94 50 let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-3012-0383, Scopus Author ID: 7003651549, eLIBRARY SPIN-code: 1218-1835; rector@swsu.ru

Ю.П. Назаров [11] предлагает определять живучесть как свойство сохранять общую несущую способность при локальных разрушениях, вызванных природными и техногенными воздействиями, по крайней мере, в течение некоторого времени.

В работах В.М. Бондаренко, В.И. Колчунова [2; 12] под живучестью понимается способность системы распределять нагрузку между остальными элементами в случае повреждения или ослабления одного из элементов (внезапное выключение «лишних» элементов статически неопределимых схем).

Однако все эти определения подразумевают оценку живучести при неизменных начальных условиях, то есть для вновь проектируемых конструкций, живучесть которых рассчитывается без учета эксплуатационного накопления повреждений и, соответственно, изменений несущей способности сечений конструктивных элементов во времени при различной величине эксплуатационной нагрузки и режимах ее приложения. Для учета этих особенностей эксплуатируемых конструкций при расчете реконструируемых объектов в [2] предложено, наряду с понятием «живучесть», ввести дополнительно понятие «экспозиция живучести», под которым подразумевается продолжительность сохранения потенциала живучести строительной системы во времени при неравновесной постановке задачи (наложение во времени деформаций ползучести и коррозионных повреждений) разрушительным воздействиям агрессивной среды с исключением из системы конструктивных элементов, ответственных за геометрическую неизменяемость сооружения.

Решение этих задач связано с привлечением деформационных моделей по оценкам ползучести бетона. Анализ существующих в настоящее время в России и за рубежом теорий ползучести бетона (Н.Х. Арутюняна [13], С.В. Александровского [14], В.М. Бондаренко [15], П.И. Васильева [16], А.А. Гвоздева [17], Г.А. Гениева [18], О.В. Кабанцева [6], Г.Н. Маслова [19], И.Е. Прокоповича [20], Ю.Н. Работнова [21], А.Р. Ржаницына [22], Р.С. Санжаровского [23], И.И. Улицкого [24], В.Д. Харлаба [25], Z.P. Vařant [26], R.I. Gilbert [27], E. Nemed [28] и др.) показал, что все существующие теории ползучести носят феноменологический характер. Многие из них из-за отсутствия нормируемых параметров в настоящее время не могут быть доведены до числа. В связи с этим, для решения рассматриваемых задач по количественной оценке потенциала живучести железобетонных конструктивных систем в запредельных состояниях целесообразно привлечение простейших реологических моделей ползучести. Такой подход позволяет получить достаточно простые аналитические выражения для критериев экспозиции живучести и критериев живучести, удобных для практического применения, а главное довести предлагаемые решения до числа.

## Методы

В теории силового сопротивления конструкций профессорами В.М. Бондаренко и Н.И. Карпенко предложено внестадийное описание развития во времени неравновесных процессов силового сопротивления твердых тел из конструкционных материалов в зависимости от режима и уровня нагружения [15]. Эта модель является нелинейным обобщением известной классической связи между скоростью изменения текущего относительного дефицита величины исследуемого фактора напряженно-деформированного состояния твердого тела по отношению к его каждому фиксируемому во времени значению:

$$\frac{d(\Delta C)}{dt} = -\alpha[\Delta C]^m, \quad (1)$$

где  $\Delta C = (C_f - C)/C_f$  – текущие и предельные (фиксируемые) значения меры ползучести бетона;  $t$  – время наблюдения;  $\alpha$  – эмпирический параметр скорости;  $m$  – эмпирический параметр уровня нагружения.

Неравновесные процессы силового сопротивления бетона во времени силового и среднего происхождения описываются единой математической моделью, предложенной В.М. Бондаренко [29] и основанной на зависимости (1). Она представляет собой специфическую предпосылку о феноменологическом единообразии кинетики неравновесных процессов продвижения повреждений и развития деформаций ползучести бетонов в виде нелинейного обобщения закона Гольдберга – Вааге:

$$\frac{\Delta[\Delta L(t, t_0)]}{dt} = -\alpha[\Delta L(t, t_0)]^m, \quad (2)$$

где  $\Delta L$  – относительный дефицит текущего значения исследуемого фактора неравновесного силового сопротивления  $L(t, t_0)$  по отношению к предельному значению  $L_{пр}$ ;  $t, t_0$  – текущее время наблюдения, время



начала наблюдения;  $\alpha$  – эмпирический параметр скорости изменения  $\Delta L$ ;  $m$  – эмпирический параметр нелинейной связи между значением дефицита  $\Delta L$  и скоростью его изменения во времени.

Важно отметить, что соотношение (2) определяет *константность* режимных, термодинамических и физико-химических факторов силового сопротивления. Будем полагать, что это соотношение применимо для учета неравновесных процессов и при анализе потенциала живучести железобетонных конструктивных систем каркасов зданий при особом воздействии. При таком воздействии в элементах конструктивной системы из железобетона помимо догружения, вызванного статическим перераспределением силовых потоков по альтернативным путям передачи нагрузки, возникнут дополнительные динамические догружения [30]. Для определения усилий в элементах рамы с учетом их динамического догружения в данной работе использован подход: квазистатический метод в постановке, предложенной Г.А. Гениевым [18; 31].

На основе теории линейной ползучести стареющего материала (модель Маслова – Арутюняна) [32] и рекомендаций по учету ползучести [33] выполнен расчет и построен график зависимости меры ползучести бетона  $C(t)$  от времени  $t$  нагружения (рис. 1). Мера ползучести бетона к моменту времени  $t$  при нагружении бетона в возрасте  $t_0$  определяется по формуле [33]

$$C(t, t_0) = \left[ \frac{1}{E_b(t_0)} \right] - \left[ \frac{1}{E_b(t)} \right] + C_{28, \text{besk}} \Omega(t_0) f(t, t_0), \quad (3)$$

где  $C_{28, \text{besk}}$  – предельное значение меры ползучести, принимаемое согласно п. 2.9 [33];  $\Omega(t_0)$  – функция, учитывающая влияние старения бетона на меру ползучести ( $t_0$  – время загрузки конструкции);  $f(t, t_0)$  – функция, учитывающая нарастание во времени меры ползучести ( $t$  – общее время испытания образца, время наблюдения).

Функция  $\Omega(t_0)$  определяется по формуле

$$\Omega(t_0) = c + de^{-\gamma t_0}. \quad (4)$$

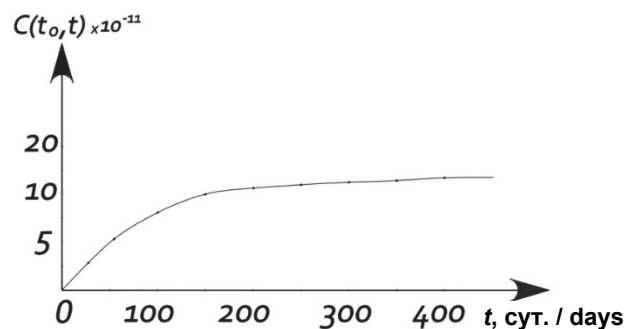
Функция  $f(t, t_0)$ , следуя рекомендациям [33], определяется по формуле

$$f(t, t_0) = 1 - ke^{-\gamma_1(t-t_0)}. \quad (5)$$

Предельное значение меры ползучести  $C_{28, \text{besk}}$  вычисляется по формуле

$$C_{28, \text{besk}} = C_{28, \text{besk}}^N \xi_{2C} \xi_{3C}, \quad (6)$$

где  $\xi_{2C}$ ,  $\xi_{3C}$  – коэффициенты, зависящие от модуля открытой поверхности элемента  $M_0$  и относительной влажности среды;  $C_{28, \text{besk}}^N$  – предельное значение меры ползучести бетона, загруженного в возрасте  $t_0 \leq 28$  суток.



**Рис. 1.** График зависимости меры ползучести от времени  $t$  при начале нагружения в возрасте  $t_0 = 28$  суток для бетона B20  
**Figure 1.** Dependence graph of the creep measure on time  $t$  at the loading beginning at the age of  $t_0 = 28$  days for concrete B20

Аналогичный график зависимости функции меры ползучести бетона от времени  $t$  был построен В.И. Травушем и В.Г. Марашкиным [34].

Длительный модуль деформаций бетона, отвечающий линейной зависимости между напряжениями и деформациями в момент времени  $t$  при начале загрузки  $t_0$  рекомендациями [33] определяется по формуле

$$E_b(t, t_0) = \left[ \frac{1}{E_b} + c(t, t_0) \right]^{-1}, \quad (7)$$

где  $E_b$  – модуль начальной упругости.

Для решения задачи об оценке потенциала живучести введены следующие гипотезы и допущения:

– условие совместности деформаций бетона и арматуры в точках поверхности сцепления при одинаковых значениях ординаты  $z$  (расстояние от нейтральной оси сечения по эпюре напряжений до рассматриваемой точки):

$$\varepsilon_s = \varepsilon_b; \quad \dot{\varepsilon}_s = \dot{\varepsilon}_b; \quad (8)$$

– допущение о плоских сечениях, т.е. деформацией для нетонкостенных сечений элементов можно пренебречь;

– закон изменения деформаций по высоте сечения можно описывать зависимостью полученной с учетом допущения о плоских сечениях [35]:

$$\varepsilon = \frac{\pm a_0 + z}{x} \varepsilon_f, \quad (9)$$

где  $a_0$  – смещение нулевой линии эпюры деформаций по отношению к нейтральной оси эпюры напряжений (при знаке  $+$  высота эпюры сжимающих нормальных напряжений во времени уменьшается, при знаке  $-$ , соответственно, увеличивается);  $\varepsilon_f$  – деформации фибрового волокна сжатого бетона;

– опираясь на результаты исследований [34], принято допущение о том, что значение деформаций в арматуре с течением времени является постоянной величиной равной  $\varepsilon_s$ ;

– следуя [36] принято, что предельные деформации бетона при статическом и динамическом режимах нагружения равны между собой;

– функция повреждения бетона коррозией  $k(z)$  остается одинаковой для всех физико-механических характеристик силового сопротивления бетона (признак эквивалентности – константность режимных и физико-механических факторов [29]):

$$k(z) = \frac{R^*(z)}{R} = \frac{E^*(z)}{E} = \frac{c_0}{c_*(z)} = \text{const}. \quad (10)$$

Следуя [31; 37], если для оценки экспозиции живучести принять параметр обобщенной нагрузки  $\lambda_n$ , то экспозиция живучести конструктивной системы при ее нагружении может быть описана зависимостью  $\lambda_n(t) - M^*(t)$ . Определим параметр экспозиции живучести статически неопределимой защемленной на опорах железобетонной балки нагруженной распределенной нагрузкой (рис. 2, а).

На рис. 2, б приведен график зависимости «параметр живучести – момент» ( $\lambda_n(t) - M^*(t)$ ) для произвольного сечения  $k$  рассматриваемой конструкции балки, отражающий развитие неравновесных нелинейных процессов ползучести во времени при анализе потенциала живучести рассматриваемого изгибаемого железобетонного элемента защемленной балки при запроектом воздействии. Участок 0–1 графика характеризует нагружение  $n$ -раз статически неопределимой системы эксплуатационной нагрузкой.

Участок 1–2 графика характеризует принятое состояние в наиболее напряженном сечении балки при длительном действии неравновесных процессов силового характера в виде ползучести бетона. Под действием постоянной длительной нагрузки  $q(t)$  в момент приложения нагрузки  $t = 0$  сжатая зона в сечении железобетонного изгибаемого элемента укоротится на величину  $\Delta_{el}$ , а относительные деформа-

ции будут равны в сжатом бетоне и сжатой арматуре  $\dot{\varepsilon}_{b(t)}$  и  $\dot{\varepsilon}_{s(t)}$  соответственно. Напряжения в бетоне сжатой зоны будут равны  $\sigma_b$ , в сжатой арматуре –  $\sigma_s$  (рис. 2, в). Через определенный промежуток времени  $t = \tau$  под влиянием ползучести фибровый слой сжатой зоны бетона еще укоротится на величину  $\Delta\tau$ . Но благодаря сцеплению бетона и арматуры при их совместной работе деформации одинаковы. Сжатая арматура укоротится на ту же величину, что и фибровый слой сжатой зоны бетона в сечении балки в силу неразрывности деформаций продольной арматуры и окружающего ее бетона, то есть

$$\dot{\varepsilon}_s(\tau) = \dot{\varepsilon}_b(\tau) = \sigma_b / E_b. \quad (11)$$

Но так как внешняя длительная нагрузка осталась неизменной, то для сохранения условий равновесия в сечении напряжения в бетоне должны уменьшиться до величины  $\sigma_{b\tau}$ . Равнодействующая усилий в сжатой зоне бетона снижается, а равнодействующая растягивающих усилий в арматуре увеличивается. В таких конструкциях важно отметить, что известный процесс смещения нейтральной оси, описанный в монографии В.М. Бондаренко [35], при развитии процесса ползучести во времени нагруженного изгибаемого железобетонного элемента, определяется снижением равнодействующих усилий в сжатой зоне бетона и увеличением равнодействующих усилий в арматуре. В результате через определенный промежуток времени  $t = \tau$  в рассматриваемом наиболее нагруженном сечении балки момент достигает предельного значения и образуется пластический шарнир. Статическая неопределимость балки уменьшается на единицу. Если исчерпание предельного момента в сечении  $k$  произойдет хрупко (разрушение по хрупкому бетону), то балка получит динамическое догружение и, соответственно, увеличится параметр обобщенной нагрузки ( $\lambda_{n-1}(t)$ ) и значение динамического момента ( $M_{k,n-1}^d(t)$ ) (точка 3 на графике, рис. 2, б). Если при этом в других сечениях балки не достигнуты значения предельных моментов возможно дальнейшее увеличение во времени экспозиции живучести  $\lambda_n(t)$ . Если же в другом сечении достигнуто предельное значение момента, то статическая неопределимость балки уменьшается на единицу и, соответственно, на графике получим точку 4.

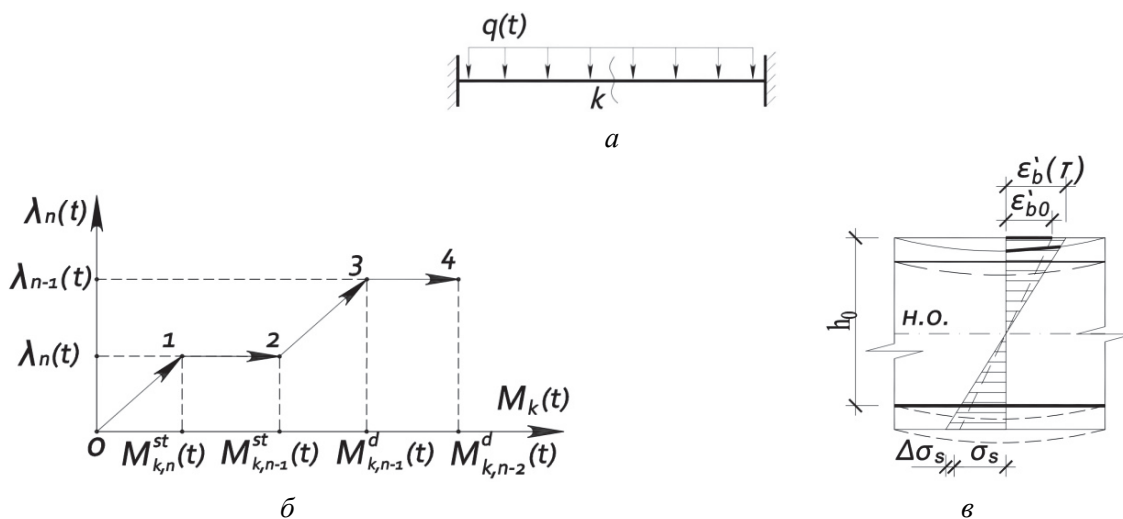


Рис. 2. Оценка живучести жестко защемленной железобетонной балки:

*a* – расчетная схема изгибаемого железобетонного элемента защемленной балки;

*б* – график зависимости «параметр живучести – момент» ( $\lambda_n - M^*(t)$ ) для произвольного сечения  $k$  рассматриваемой конструкции балки;

*в* – определение изменения деформаций в сечении изгибаемого железобетонного элемента в процессе ползучести

Figure 2. To assess the robustness of a rigidly pinched reinforced concrete beam:

*a* – design scheme of a pinched beam bent reinforced concrete element;

*б* – graph of the dependence “robustness parameter – moment” ( $\lambda_n - M^*(t)$ ) for an arbitrary section  $k$  of the considered beam structure;

*в* – determination of changes in the section deformations of a bent reinforced concrete element in the creep’s process

Алгоритм для определения параметра экспозиции живучести железобетонной статически неопределимой конструктивной системы включает следующие этапы:

1. Определение усилий в элементах конструктивной системы на заданном уровне эксплуатационной нагрузки во времени.

2. Определение модулей деформаций элементов системы на заданном уровне нагружения и критерияльные проверки достижения предельных усилий в зависимости от времени нагружения. В особом предельном состоянии можно допустить большее раскрытие трещин и развитие прогибов, а также частичное разрушение некоторых сечений, что противоречит действующим критериям предельных состояний, обеспечивающих эксплуатационную пригодность конструкций и здания, но исключает наступление геометрической изменяемости конструктивной системы в зоне возможного локального разрушения.

3. Определение наиболее напряженного сечения  $k$  в элементах конструктивной системы, в котором при приложении заданной нагрузки длительностью  $t = \tau$  достигается предельное усилие (момент) и образуется первый пластический шарнир в исходной  $n$ -раз статически неопределимой конструктивной системе ( $\lambda_n(t)$  на рис. 2, б).

4. Критериальная проверка достижения предельных усилий в сечениях других элементов конструктивной системы.

5. Если хотя бы в одном сечении  $k$  других элементов достигается предельное усилие, соответственно, уменьшается статическая неопределимость системы ( $n-2$ )-раз, то при вычисленном уровне экспозиции живучести  $\lambda_n(t)$  производится определение параметра живучести  $\lambda_{n-1}(t)$ ,  $\lambda_{n-2}(t)$  и т. д.

### Результаты и обсуждение

1. Геометрические размеры и схема армирования железобетонной балки с сечением  $120 \times 70$  мм длиной 1000 мм представлено на рис. 3, а. Балка запроектирована из тяжелого бетона класса В20. Арматура А500С, диаметр продольной верхней и нижней арматуры 8 мм. Значение  $\xi_R = 0,493$ . Предельное расчетное значение момента в сечении балки составит:  $M_{ult} = 3,7$  кН·м. Момент трещинообразования балки  $M_{cr} = 0,331$  кН·м.

Параметры приведенного сечения:  $A_{red} = 9131,36$  мм<sup>2</sup>;  $S_{t,red} = 547881,72$  мм<sup>3</sup>;  $I_{red} = 11309419,52$  мм<sup>4</sup>. Вычисленное по формуле (3) значение меры ползучести составит  $C(t, t_0) = 0,898 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/Н.

2. Усилия в жестко защемленной железобетонной балке от эксплуатационной равномерно распределенной нагрузки  $q(t) = 31,2$  кН/м в виде эпюры моментов  $M_{k,n}^{st}(t)$  (где  $k = 1, 2, 3 \dots$ , номер сечения в элементе)

показаны на рис. 3, б. В середине пролета (сечение 1,  $k = 1$ ) момент составит  $M_{1,n}^{st} = \frac{ql^2}{24} = 1,3$  кН·м.

В приопорной зоне балки (сечение 2,  $k = 2$ ) момент составит  $M_{2,n}^{st} = \frac{ql^2}{12} = 2,6$  кН·м.

3. Модуль деформаций от непродолжительной эксплуатационной нагрузки составит: модуль деформации бетона в начальный момент времени  $E_b(t_0) = E_b(28) = 27,5 \cdot 10^3$  МПа (по СП 63.13330<sup>1</sup>); приведенный модуль деформаций железобетонной балки в нагруженном состоянии на участке с трещинами в растянутой зоне  $E_{b,red} = 5357$  МПа. Изгибная жесткость приведенного поперечного сечения элемента в нагруженном состоянии на участке с трещинами в растянутой зоне при  $t = 28$  суток равна:

$$D_0 = E_{b,red}(t, t_0) I_{red} = 5357 \cdot 10^6 \cdot 1,13 \cdot 10^5 = 6,05 \cdot 10^{14} \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Модуль деформаций от продолжительно действующей эксплуатационной нагрузки с учетом неравновесных процессов (ползучесть) составит следующее значение. Для практического (количественного) определения модуля деформаций бетона  $E_b(t)$  использованы рекомендации по учету ползучести и усадки бетона при расчете бетонных и железобетонных конструкций, НИИЖБ [33]. Длительный модуль деформаций бетона, отвечающий линейной зависимости между напряжениями и деформациями в момент времени  $t = \tau$  при начале нагружения  $t_0$  находится по формуле (7):

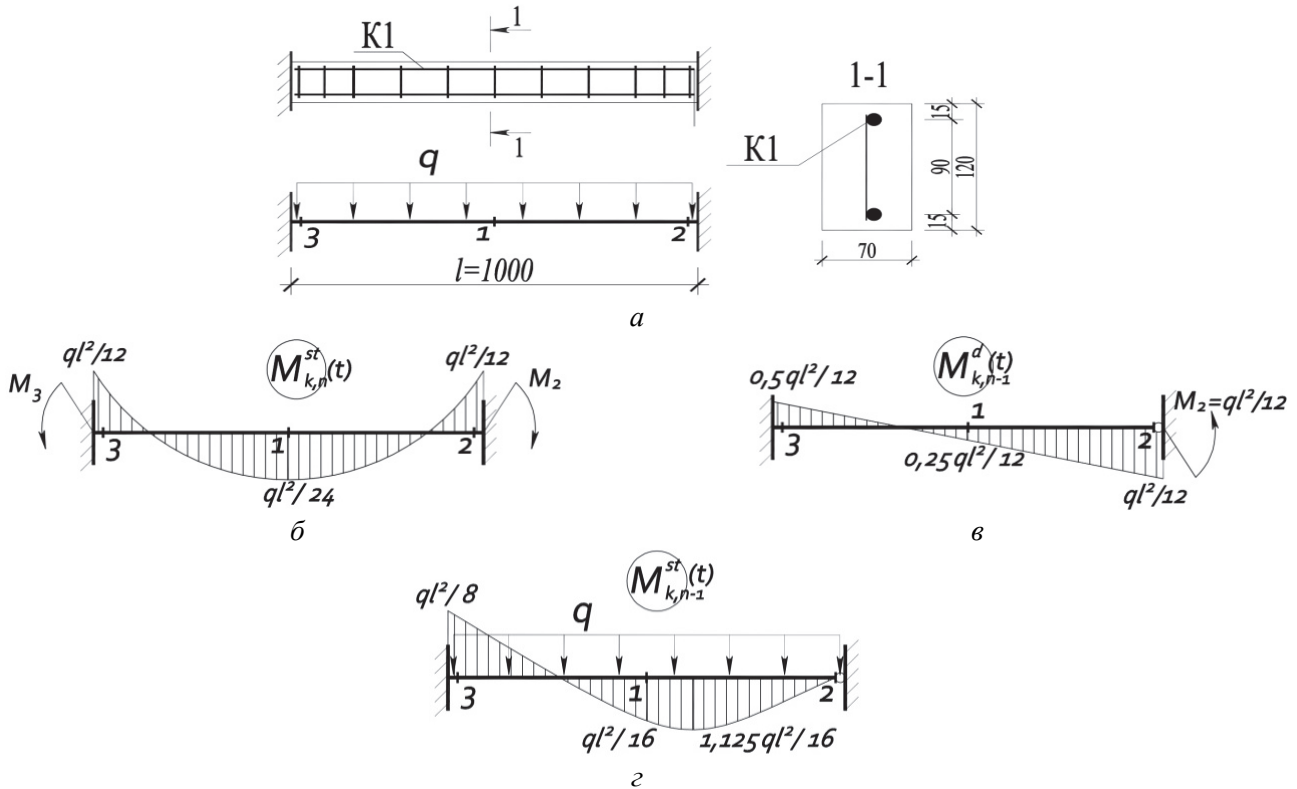
$$E_b(t, t_0) = \left[ \frac{1}{E_b} + c(t, t_0) \right]^{-1} = \left[ \frac{1}{27,5 \cdot 10^9} + 0,898 \cdot 10^{-10} \right]^{-1} = 7,93 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

<sup>1</sup> СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. М.: Минстрой России, 2018. 152 с.

Модуль деформаций бетона при продолжительном действии нагрузки (согласно СП 63.13330):

$$E_{b,cr} = \frac{E_b}{1 + \varphi_{b,cr}} = \frac{27,5 \cdot 10^3}{1 + 2,8} = 7,2 \cdot 10^3 \text{ МПа,}$$

где  $\varphi_{b,cr} = 2,8$  – коэффициент ползучести бетона, зависящий от условий окружающей среды (относительной влажности воздуха 40–75 %) и класса бетона В20.



**Рис. 3.** Оценка потенциала живучести жестко защемленной железобетонной балки:

*a* – расчетная схема; *б* – эпюра моментов в железобетонной балке *n*-раз статически неопределимой на заданном уровне эксплуатационной нагрузки во времени; *в* – эпюра моментов от динамического догружения; *г* – эпюра моментов в балке (*n*–1)-раз статически неопределимой после перераспределения усилий от динамического догружения

**Figure 3.** Assessment of the robustness potential of a rigidly clamped reinforced concrete beam:

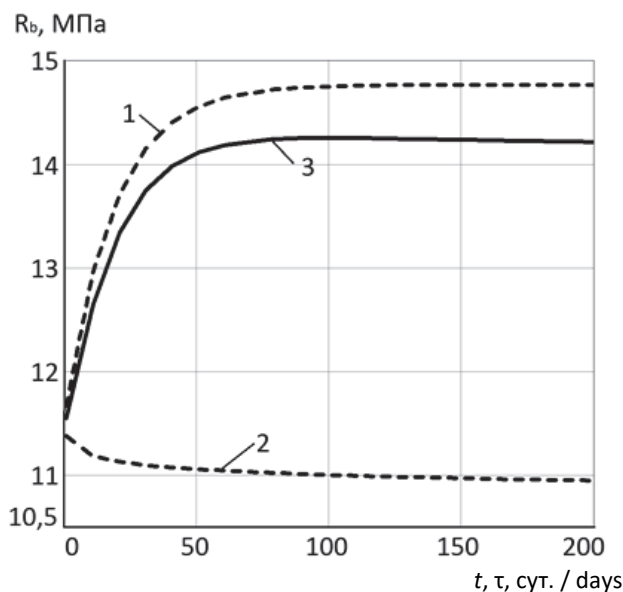
*a* – design scheme; *b* – diagram of moments in a reinforced concrete beam *n*-times statically indeterminate at a given level of operational load in time; *c* – diagram of moments from dynamic additional loading; *d* – diagram of moments in the beam (*n*–1)-times statically indeterminate after the redistribution of forces from dynamic additional loading

4. Определение наиболее напряженного сечения *k* в элементах конструктивной системы и параметра  $\lambda_n(t)$ . Первый пластический шарнир в наиболее напряженном сечения *k* элемента конструктивной системы образуется при достижении предельного усилия (момента). Такое деформирование сечения железобетонного элемента объясняется тем, что в конструкции проявляются неравновесные процессы силового сопротивления и процессы деградации железобетона от коррозии. Такие разнонаправленные неравновесные процессы нарастания прочности бетона во времени, нейтрализации бетона агрессивной средой, процесс «старения» и коррозии бетона одновременно, следуя [38], могут быть представлены диаграммами рис. 4.

В первом приближении изменения прочности нагруженного и коррозионно поврежденного бетона во времени, учитывающие процесс нарастания прочности здорового бетона (теория старения бетона), и процесс воздействия агрессивной среды на бетон, могут быть описаны с помощью деформационной модели Г.А. Гениева [31] в следующем виде:

$$R_b(t, \tau) = R_b^*(\tau) + R_b(t) - R_b(t_0), \quad (12)$$

где  $R_b^*(\tau)$  – зависимость предела прочности коррозионно поврежденного бетона на сжатие от времени  $\tau$ ;  $R_b(t)$  – зависимость предела прочности здорового бетона на сжатие от времени  $t$ ;  $R_b(t_0)$  – предел прочности бетона на сжатие до момента воздействия агрессивной среды.



**Рис. 4.** График изменения предела прочности бетона  $R_b$  во времени:

1 – процесс нарастания прочности бетона во времени  $t$  (старение бетона); 2 – процесс нейтрализации бетона агрессивной средой во времени  $\tau$  (коррозия бетона); 3 – одновременно процесс «старения» и коррозии бетона

**Figure 4.** Diagram of the change of a concrete limit strength  $R_b$  at time:

1 – the process of increasing the concrete strength at time  $t$  (aging of concrete); 2 – the process of neutralizing concrete with a corrosive medium at time  $\tau$  (concrete corrosion); 3 – at the same time the process of “aging” and concrete corrosion

Применительно к рассматриваемой железобетонной балке предел прочности бетона на сжатие до момента воздействия агрессивной среды составит:  $R_b(t_0) = 11,5$  МПа.

Используя зависимость для практического расчета длительной прочности бетона, предложенную Г.А. Гениевым [31], определим предел прочности здорового бетона на сжатие от времени в момент времени  $t$  по формуле

$$R_b(t) = R_m \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R_{28}}{R_m} \right)^{\frac{t+t_0}{28}} \right]. \quad (13)$$

Зависимость предела прочности коррозионно порожденного бетона определяется на основе полученных экспериментально-теоретических исследований коррозионно поврежденного нагруженного бетона В.П. Селяева [39]. Так как сжимающие напряжения замедляют процесс переноса агрессивной среды в объеме образца и коэффициент диффузии уменьшается в 2–3 раза, то глубину повреждения цементного камня в общем виде определяют функциональной зависимостью [39]

$$\delta = a = k(\xi) \sqrt{Dt} = 0,1 \sqrt{Dt}, \quad (14)$$

где  $t$  – время воздействия агрессивной среды;  $k(\xi)$  – коэффициент, учитывающий инструментальную точность определения ординаты, для цементного камня можно принять равным 0,1;  $D$  – коэффициент продвижения фронта разрушения (диффузии).

Значения коэффициентов диффузии ( $D \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/ч) от уровня сжимающей нагрузки на цементный камень без заполнителя (используются результаты экспериментов В.П. Селяева [39]): при  $P = 0,7P_{\text{разр}}$  составит  $D = 1,8$ . Значение предела прочности коррозионно поврежденного бетона под действием нагрузки  $0,7P_{\text{разр}}$  составит  $R_b^*(\tau) = 3,05$  МПа.

Прочность нагруженного и коррозионно поврежденного бетона во времени составит при  $t = 40$  лет и время воздействия агрессивной среды  $\tau = 40$  лет составит  $R_b(t, \tau) = 3,75$  МПа.

Пластический шарнир образуется в сечении 2 (рис. 3, в), и предельное значение момента в сечении нагруженной балки при действии агрессивной среды через 40 лет составит  $M = M_{\text{ult}}^* = 2,6$  кН·м. При этом система становится  $(n-1)$ -раз статически неопределимой, параметр живучести равен  $\lambda_{n-1}(t)$ .

5. Критериальная проверка достижения предельных усилий в других сечениях других элементов конструктивной системы. При особом предельном состоянии в наиболее нагруженном сечении (сечение 1 балки) выполняется проверка прочности, а затем проверка деформационного критерия особого предельного состояния. После образования пластического шарнира (сечение 2 балки) в наиболее нагруженном сечении (сечение 1 балки) от динамического догружения момент достигнет значения

$$M_{1,n-1}^{st} = M_{1,n}^{st}(t) + M_{1,n}^d = \frac{ql^2}{16},$$

где  $M_{1,n}^d$  – момент в сечении 1  $n$ -раз статически неопределимой системы от мгновенной нагрузки  $M_2 = \frac{ql^2}{12}$ .

Используем критерий прочности материала (бетона), предложенный Г.А. Гениевым [31], который определяется достижением главной линейной деформации  $\varepsilon$  ее предельного значения  $\varepsilon^*$ :

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon^*, \quad (15)$$

где  $\varepsilon_0$  – деформации, характеризующие процесс кратковременного нагружения;  $\varepsilon_1$  – деформации, характеризующие процесс длительного нагружения.

При использовании для бетона рассмотренного критерия определяющее уравнение его длительной прочности при  $\sigma = \text{const}$  записывается, согласно [31], в виде

$$\varepsilon^* = \varepsilon^* \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma^*}{R_{b,ser}}} \right) + \frac{\sigma}{E_l} (1 - e^{-\omega t}). \quad (16)$$

При  $\omega = 0,1 \text{ сут}^{-1}$ ;  $\varepsilon^* = 2 \cdot 10^{-3}$ ;  $E_l = 1,3 \cdot E_0 = 1,3 \cdot 27,5 \cdot 10^3 = 35,75 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ;  $R_{b,ser} = 15 \text{ МПа}$ ;  $t = \infty$  значение предельного напряжения сжатой зоны бетона составит  $\sigma^* = 13,26 \text{ МПа}$ .

Далее выполняется проверка деформационного критерия особого предельного состояния сечения железобетонной балки в зависимости от времени нагружения и заключается в проверке неравенства по СП 385.1325800.2018<sup>2</sup>:

$$f \leq f_{ult} = (1/10 - 1/30)L. \quad (17)$$

Для этого вычисляется кривизна в сечениях 1, 2, 3 жестко заземленной железобетонной балки от длительной эксплуатационной нагрузки  $q(t)$  при  $t = 40$  лет.

Полная кривизна на первой полуволне колебаний от эксплуатационной нагрузки и динамического догружения в сечениях 1 и 3 составит:

$$\left( \frac{1}{r} \right)_{1,n-1}^{st} = 7,3 \cdot 10^{-7} ql^2 \frac{1}{\text{м}}; \quad \left( \frac{1}{r} \right)_{3,n-1}^{st} = 1,46 \cdot 10^{-6} ql^2 \frac{1}{\text{м}}.$$

Применительно к рассматриваемой конструкции балки при  $q = 31,2 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1,0 \text{ м}$  прогиб от длительно действующей эксплуатационной нагрузки и динамического догружения  $f = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,9 \text{ мм} < 1/30L = 0,033 \text{ м} = 33 \text{ мм}$ , то есть при заданном времени эксплуатации  $t = 40$  лет после особого воздействия живучесть балки будет исчерпана.

<sup>2</sup> СП 385.1325800.2018. Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения: правила проектирования. Основные положения. М.: Минстрой России, 2019. 29 с.

## Заключение

При расчете конструкций железобетонных каркасов зданий и сооружений с учетом неравновесных процессов длительного воздействия силовых и средовых факторов при оценке экспозиции ее живучести следует учитывать длительность эксплуатации строительных конструкций и степень ее коррозионного повреждения во времени.

## Список литературы

1. *Бондаренко В.М., Мигаль Р.Е., Ягунов Б.А.* Резервы и экспозиция конструктивной безопасности зданий, эксплуатирующийся в агрессивной среде // *Строительство и реконструкция*. 2014. № 1. С. 3–10.
2. *Бондаренко В.М., Колчунов В.И.* Концепция и направления развития теории конструктивной безопасности зданий и сооружений при силовых и средовых воздействиях // *Промышленное и гражданское строительство*. 2013. № 2. С. 28–31.
3. *Fedorova N.V., Gubanova M.S.* Crack-resistance and strength of a contact joint of a reinforced concrete composite wall beam with corrosion damages under loading // *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2018. No. 2. Pp. 6–18.
4. *Kolchunov V.I., Savin S.Yu.* Survivability criteria for reinforced concrete flame at loss of stability // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. No. 80. Pp. 73–80. <https://doi.org/10.18720/MCE.80.7>
5. *Tamrazyan A.G., Mineev T.K., Zhukova L.I.* Influence of chloride corrosion on probabilistic assessment of bearing capacity of beamless slabs overlap // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 661. Article 012117. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/661/1/012052>
6. *Kabantsev O., Mitrovic B.* Modeling post-critical deformation processes of flat reinforced concrete elements under biaxial stresses // *MATEC Web of Conference*. 2017. Vol. 117. Article 00071. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711700071>
7. *Кодыш Э.Н., Трекин Н.Н.* Особое предельное состояние железобетонных конструкций при аварийных воздействиях. Бетон и железобетон – проблемы и перспективы // *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2018. № 1. С. 120–125.
8. *Li J., Yao Y.* A study on creep and drying shrinkage of high performance concrete // *Cement and Concrete Research*. 2001. Vol. 31. Issue 8. Pp. 1203–1206. [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(01\)00539-7](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(01)00539-7)
9. *Vasanelli E., Micelli F., Aiello M.A., Plizzari G.* Long term behavior of FRC flexural beams under sustained load // *Engineering Structures*. 2013. Vol. 56. Pp.1858–1867. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.07.035>
10. *Райзер В.Д.* К проблеме живучести зданий и сооружений // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2012. № 5. С. 77–78.
11. *Назаров Ю.П., Городецкий А.С., Симбиркин В.Н.* К проблеме обеспечения живучести строительных конструкций при аварийных воздействиях // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2009. № 4. С. 5–9.
12. *Колчунов В.И., Тамразян А.Г.* Основные направления развития теории конструктивной безопасности и синтеза железобетонных конструкций зданий и сооружений // *Бетон и железобетон – взгляд в будущее: научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону, Москва, 12–16 мая 2014 г.* М., 2013. С. 176–191.
13. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
14. *Александровский С.В., Васильев П.И.* Экспериментальные исследования ползучести бетона // *Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций*. М.: Стройиздат, 1976. С. 97–152.
15. *Бондаренко В.М., Карпенко Н.И.* Уровень напряженного состояния как фактор структурных изменений и реологического силового сопротивления // *Academia. Архитектура и строительство*. 2007. № 4. С. 56–59.
16. *Васильев П.И., Лившиц Я.Д.* Приложение теории ползучести бетона к расчетам конструкций и мостов // *Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций*. М.: Стройиздат, 1976. С. 268.
17. *Гвоздев А.А., Яшин А.В., Петрова К.В.* Прочность, структурные изменения и деформации бетона. М.: Стройиздат, 1978. 299 с.
18. *Гениев Г.А.* Об оценке динамических эффектов в стрелневых системах из хрупких материалов // *Бетон и железобетон*. 1992. № 9. С. 25–27.
19. *Маслов Г.Н.* Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона // *Известия ВНИИГ*. 1941. Т. 28. С. 175–183.
20. *Прокопович И.Е., Зедгендзе В.А.* Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.
21. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
22. *Ржанецкий А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
23. *Санжаровский Р.С.* Нелинейная наследственная теория ползучести // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 1. С. 63–68.
24. *Улицкий И.И.* Определение величин деформаций ползучести и усадки бетонов. Киев: Госстройиздат УССР, 1963. 132 с.
25. *Харлаб В.Д.* Принципиальные вопросы линейной теории ползучести (с привязкой к бетону): монография. СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2014. 212 с.



26. *Vařant Z.P., Prasannan S.* Solidification theory for concrete creep. Formulation // *Journal of Engineering Mechanics*. 1989. Vol. 115. No. 8. Pp. 1691–1703.
27. *Gilbert R.I.* Creep and shrinkage models for high strength concrete – proposals for inclusion in AS3600 // *Australian Journal of Structural Engineering*. 2002. Vol. 4. No. 2. Pp. 95–106.
28. *Hamed E.* Nonlinear creep response of reinforced beams // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2012. Vol. 7. No. 5. Pp. 435–460. <https://doi.org/10.2140/jomms.2012.7.435>
29. *Бондаренко В.М., Колчунов В.И.* Экспозиция живучести // *Известия вузов. Строительство*. 2007. № 5. С. 4–8.
30. *Колчунов В.И., Федорова Н.В., Савин С.Ю.* Динамические эффекты в статически неопределимых физически и конструктивно нелинейных системах // *Промышленное и гражданское строительство*. 2022. № 9. С. 42–50.
31. *Гениев Г.А., Колчунов В.И., Клюева Н.В.* Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях: научное издание. М.: Изд-во АСВ, 2004. 216 с.
32. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
33. *Рекомендации по учету ползучести и усадки бетона при расчете бетонных и железобетонных конструкций*. М.: Стройиздат, 1988. 120 с.
34. *Травуш В.И., Мурашкин В.Г.* Влияние ползучести на распределение деформаций и напряжений в изгибаемом элементе // *Строительство и реконструкция*. 2017. № 2. С. 57–70.
35. *Бондаренко В.М.* Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1968. 323 с.
36. *Федорова Н.В., Медянкин М.Д., Бушова О.Б.* Определение параметров статико-динамического деформирования бетона // *Промышленное и гражданское строительство*. 2020. № 1. С. 4–11.
37. *Колчунов В.И., Клюева Н.В., Андросова Н.Б., Бухтиярова А.С.* Живучесть зданий и сооружений при запроектных воздействиях. М.: Изд-во АСВ, 2016. 208 с.
38. *Федорова Н.В., Колчунов В.И., Губанова М.С.* Деформирование составных плосконапряженных железобетонных конструкций: монография. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ, 2022. 111 с.
39. *Селяев В.П., Селяев П.В.* Физико-химические основы механики разрушения цементных композитов. Саранск: Изд-во Мордовского университета, 2018. 220 с.

## References

1. Bondarenko V.M., Migal R.E., Ygurov B.A. Reserves and exposition of constructive safety of buildings operated in an aggressive environment. *Building and Reconstruction*. 2014;(1):3–10. (In Russ.)
2. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. The concept and directions of theory development of buildings and structures constructive safety under force and environmental influences. *Industrial and Civil Engineering*. 2018;(2):28–31. (In Russ.)
3. Fedorova N.V., Gubanova M.S. Crack-resistance and strength of a contact joint of a reinforced concrete composite wall beam with corrosion damages under loading. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2015;(2):6–18.
4. Kolchunov V.I., Savin S.Y. Survivability criteria for reinforced concrete flame at loss of stability. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;80:73–80. <https://doi.org/10.18720/MCE.80.7>
5. Tamrazyan A.G., Mineev T.K., Zhukova L.I. Influence of chloride corrosion on probabilistic assessment of bearing capacity of beamless slabs overlap. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019;661:012117. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/661/1/012052>
6. Kabantsev O., Mitrovic B. Modeling post-critical deformation processes of flat reinforced concrete elements under biaxial stresses. *MATEC Web of Conference*. 2017;117:00071. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711700071>
7. Kodysh E.N., Trekin N.N. Special limiting state of reinforced concrete structures under emergency impacts. Concrete and reinforced concrete – problems and prospects. *Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2018;(1):120–125. (In Russ.)
8. Li J., Yao Y. A study on creep and drying shrinkage of high performance concrete. *Cement and Concrete Research*. 2001;31:1203–1206. [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(01\)00539-7](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(01)00539-7)
9. Vasanelli E., Micelli F., Aiello M.A., Plizzari G. Long term behavior of FRC flexural beams under sustained load. *Engineering Structures*. 2013;56:1858–1867. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.07.035>
10. Raiser V.D. Problem of buildings and structures survivability. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2012;(5):77–78. (In Russ.)
11. Nazarov Y.P., Gorodetsky A.S., Simbirkin V.N. On the problem of ensuring the survivability of building structures under emergency impacts. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2009;(4):5–9. (In Russ.)
12. Kolchunov V.I., Tamrazyan A.G. The main directions of development of constructive safety theory and reinforced concrete structures synthesis of buildings and structures. Concrete and Reinforced Concrete – a Look Into the Future: Scientific Works of the III All-Russian (II International) Conference on Concrete and Reinforced Concrete, Moscow, 12–16 May 2014. Moscow; 2014. p. 176–191. (In Russ.)
13. Arutyunyan N.Kh., Kolmanovsky V.B. *Theory of creep of inhomogeneous bodies*. Moscow: Nauka Publ.; 1983. (In Russ.)

14. Aleksandrovsky S.V., Vasiliev P.I. Experimental studies of concrete creep. *Creep and Shrinkage of Concrete and Reinforced Concrete Structures*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1976. p. 97–152. (In Russ.)
15. Bondarenko V.M., Karpenko N.I. Stress state level as a factor of structural changes and rheological power resistance. *Academia. Architecture and Construction*. 2007;(4):56–59. (In Russ.)
16. Vasiliev P.I., Livshits Y.D. Application of concrete creep theory to the calculations of structures and bridges. *Creep and Shrinkage of Concrete and Reinforced Concrete Structures*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1976. p. 268. (In Russ.)
17. Gvozdev A.A., Yashin A.V., Petrova K.V. *Strength, Structural Changes and Concrete Deformations*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1978. (In Russ.)
18. Geniev G.A. On the evaluation of dynamic effects in beam systems made of brittle materials. *Concrete and Reinforced Concrete*. 1992;(9):25–27.
19. Maslov G.N. Thermal stress state of concrete masses when taking into account the concrete creep. *Izvestiya VNIIG*. 1941;28:175–183.
20. Prokopovich I.E., Zedgenidze V.A. *Applied theory of creep*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1980. (In Russ.)
21. Rabotnov Y.N. *Creep of structural elements*. Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russ.)
22. Rzhansitsyn A.R. *Creep theory*. Moscow: Nauka Publ.; 1968. (In Russ.)
23. Sanzharovsky R.S. Nonlinear hereditary theory of creep. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(1):63–68.
24. Ulitsky I.I. *Determination of creep deformations values and concrete shrinkage*. Kyiv: Gosstroyizdat USSR Publ.; 1963. (In Russ.)
25. Kharlab V.D. *Fundamental questions of the linear theory of creep (with reference to concrete)*. St. Petersburg: St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, ASV Publ.; 2014. (In Russ.)
26. Bažant Z.P., Prasanna S. Solidification theory for concrete creep. Formulation. *Journal of Engineering Mechanics*. 1989;115(8):1691–1703.
27. Gilbert R.I. Creep and shrinkage models for high strength concrete – proposals for inclusion in AS3600. *Australian Journal of Structural Engineering*. 2002;4(2):95–106.
28. Hamed E. Nonlinear creep response of reinforced beams. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2012;7(5):435–460.
29. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Exposition of robustness. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2007;(5):4–8.
30. Kolchunov V.I., Fedorova N.V., Savin S.Y. Dynamic effects in statically indeterminate physically and structural-nonlinear systems. *Industrial and Civil Engineering*. 2022;(9):42–50.
31. Geniev G.A., Kolchunov V.I., Klyueva N.V. *Strength and deformability of reinforced concrete structures under accidental actions*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)
32. Arutyunyan N.Kh. *Some questions of the theory of creep*. Moscow: Gostekhizdat Publ.; 1952. (In Russ.)
33. *Recommendations for taking into account creep and shrinkage of concrete in the calculation of concrete and reinforced concrete structures*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1988. (In Russ.)
34. Travush V.I., Murashkin V.G. Influence of creep to deformation and stress distributions of bending element. *Building and Reconstruction*. 2017;(2):57–70.
35. Bondarenko V.M. *Some questions of the nonlinear reinforced concrete theory*. Kharkov: Kharkov University Press; 1968. (In Russ.)
36. Fedorova N.V., Medyankin M.D., Bushova O.B. Determination of static-dynamic deformation parameters of concrete. *Industrial and Civil Construction*. 2020;(1):4–11. (In Russ.)
37. Kolchunov V.I., Klyueva N.V., Androsova N.B., Bukhtiyarova A.S. *Robustness of buildings and structures under accidental actions*. Moscow: ASV Publ.; 2016. (In Russ.)
38. Fedorova N.V., Kolchunov V.I., Gubanova M.S. *Deformation of composite plane-stressed reinforced concrete structures*. Moscow: MISI-MGSU Publ.; 2022. (In Russ.)
39. Selyaev V.P., Selyaev P.V. *Physico-chemical foundations of fracture mechanics of cement composites*. Saransk: Mordovia State University Publ.; 2018. (In Russ.)




DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-503-514  
 УДК 691.32

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Свойства высокопрочного сталефибробетона с минимальным эффективным содержанием фибры при нагружениях различной длительности

Н.И. Карпенко , Г.А. Моисеенко  

Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Москва, Российская Федерация

 gecklock@yandex.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 1 сентября 2022 г.  
 Доработана: 20 ноября 2022 г.  
 Принята к публикации: 27 ноября 2022 г.

### Для цитирования

Карпенко Н.И., Моисеенко Г.А. Свойства высокопрочного сталефибробетона с минимальным эффективным содержанием фибры при нагружениях различной длительности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 503–514. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-503-514>


**Аннотация.** Проводится обзор результатов комплексных теоретических исследований физико-механических и реологических свойств высокопрочного сталефибробетона в сравнении с неармированным мелкозернистым высокопрочным бетоном из самоуплотняющихся смесей при кратковременном и длительном воздействии нагрузки. На основании данных обширных экспериментальных исследований подобраны и разработаны методики математического описания свойств бетона в зависимости от ключевых факторов влияния. Исследован сталефибробетон с минимальным содержанием выбранного типа фибры, при котором начинает проявляться положительное влияние фибрового армирования. Получил развитие теоретический подход В.М. Бондаренко к описанию мер ползучести сталефибробетона. Представленные методики могут использоваться для расчета конструкций из высокопрочного сталефибробетона с применением современного диаграммного метода.

**Ключевые слова:** высокопрочный сталефибробетон, мелкозернистый высокопрочный бетон, фибра, диаграмма деформирования, ползучесть бетона, мера ползучести бетона

## Investigation of the properties of high-strength steel fiber concrete with a minimum effective fiber content under loads of various durations

Nikolay I. Karpenko , Gennady A. Moiseenko  

Research Institute of Building Physics of the RAACS, Moscow, Russian Federation

 gecklock@yandex.ru

### Article history

Received: September 1, 2022  
 Revised: November 20, 2022  
 Accepted: November 27, 2022

**Abstract.** The authors review the results of complex theoretical studies of the physico-mechanical and rheological properties of high-strength steel-fiber concrete in comparison with non-reinforced fine-grained high-strength concrete made of self-compacting mixtures under short-term and long-term load expo-

**Карпенко Николай Иванович**, академик-секретарь РААСН, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Проблемы прочности и качества в строительстве», Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Российская Федерация, Москва, Локомотивный пр-д, д. 21; ORCID: 0000-0001-9307-7952, Scopus Author ID: 57201536233, ResearchID: A-7245-2016, eLIBRARY SPIN-код: 1725-1550; niisf\_lab9@mail.ru

**Моисеенко Георгий Александрович**, ведущий инженер, лаборатория «Проблемы прочности и качества в строительстве», Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Российская Федерация, 127238, Москва, Локомотивный пр-д, д. 21; ORCID: 0000-0002-5080-116X, Scopus Author ID: 57205366968; gecklock@yandex.ru

**Nikolay I. Karpenko**, Academician Secretary of the RAACS, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Research Officer of the laboratory “Problems of Strength and Quality in Construction”, Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 21 Lokomotivnyi Proezd, Moscow, 127238, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9307-7952, Scopus Author ID: 57201536233, ResearchID: A-7245-2016, eLIBRARY SPIN-code: 1725-1550; niisf\_lab9@mail.ru

**Georgiy A. Moiseenko**, leading engineer, Laboratory “Problems of Strength and Quality in Construction”, Research Institute of Building Physics of the RAACS, 21 Lokomotivnyi Proezd, Moscow, 127238, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5080-116X, Scopus Author ID: 57205366968; gecklock@yandex.ru

© Карпенко Н.И., Моисеенко Г.А., 2022

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>



**For citation**

Karpenko N.I., Moiseenko G.A. Investigation of the properties of high-strength steel fiber concrete with a minimum effective fiber content under loads of various durations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):503–514. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-503-514>

sure. Based on the data of extensive experimental studies, methods of Mathematical description of concrete properties depending on the key factors of influence have been selected and developed. A steel fiber concrete with a minimum content of the selected type of fiber is studied, at which the positive effect of fiber reinforcement begins to manifest itself. The theoretical approach of V.M. Bondarenko to the description of creep measures of steel fiber concrete has been developed. The developed methods can be used to calculate structures made of high-strength steel-fiber concrete using the modern diagram method.

**Keywords:** high-strength steel fiber concrete, fine-grained high-strength concrete, fiber, deformation diagram, concrete creep, concrete creep measure

**Введение**

Применение мелкозернистых высокопрочных бетонов (МВБ) в строительстве открывает широкие перспективы при возведении сложных, уникальных объектов, в число которых входят монолитные сооружения, большепролетные мосты, оболочки. При этом негативное влияние основного недостатка мелкозернистого бетона – повышенной хрупкости – может быть существенно снижено путем введения в матрицу бетона стальной фибры в количестве 1–3 % по массе.

Зарубежные смеси для производства высокопрочного бетона обладают сравнительно высокой жесткостью. Для применения в монолитном строительстве в России под руководством С.С. Каприелова была разработана технология получения самоуплотняющихся смесей на основе комплексных модификаторов, отличающихся повышенной сегрегационной устойчивостью [1–3]. Применение этих смесей при введении в матрицу короткой стальной фибры длиной 13 мм позволяет существенно оптимизировать технологический процесс монолитного строительства. Процент содержания фибры оказывает ключевое влияние на стоимость получаемого сталефибробетона. На основании комплекса обширных экспериментальных исследований [4] было показано, что для выбранного типа фибры минимальный процент содержания фибры, при котором проявляются положительные свойства фибрового армирования, составляет 1,5 % по массе (120 кг/м<sup>3</sup>).

Для полноценного применения получаемого высокопрочного сталефибробетона (ВСФБ) в строительстве необходимо разработать и обосновать методики теоретического описания его свойств, как при кратковременном, так и при длительном нагружении. Для внедрения в практику проектирования и расчета конструкций из сталефибробетона особенно актуальным является разработка экспериментально обоснованных методик определения свойств, совместимых с современным диаграммным методом расчета железобетонных конструкций. Данный метод построен на использовании реальных диаграмм деформирования материала под нагрузкой.

Целью проведенного теоретического исследования являлась разработка и обоснование математических зависимостей для описания физико-механических и реологических свойств исследуемых бетонов при нагружениях различной длительности, применимых для диаграммного метода расчета конструкций. В настоящей статье приведено обобщение основных результатов данного исследования.

**Состав матрицы бетона для проведения экспериментальных исследований**

Для проведения комплекса экспериментальных исследований [4] был использован следующий состав бетонной смеси: портландцемент марки ПЦ 500 ДОН – 900 кг/м<sup>3</sup>; суперпластификатор МБЗ-50К – 360 кг/м<sup>3</sup>; песок с  $M_k = 2,5$  – 860 кг/м<sup>3</sup>; вода – 190 кг/м<sup>3</sup>.

Полученная смесь показала высокую подвижность и обладала сегрегационной устойчивостью. Для получения сталефибробетона в состав смеси вводилась латунированная фибра прямого профиля из высокоуглеродистой стали длиной 13 мм Ø0,3 мм.

**Методика построения теоретических диаграмм деформирования МВБ и ВСФБ при кратковременном сжатии**

Исследование диаграмм сжатия  $\varepsilon_b - \sigma_b$  высокопрочного сталефибробетона в сравнении с неармированной матрицей проводилось по двум сериям образцов – первая серия изготавливалась без фибры, а во вторую была введена стальная фибра в количестве 1,5 % по массе. Методика экспериментальных исследований, разработанная в [5] и подробно описанная в [6], позволяет получить диаграммы сжатия бетона до высоких уровней напряжения, близких к пределу прочности.

Аналитическое описание полученных диаграмм проводится на основании методики, описанной в [7]. Зависимость относительных продольных деформаций бетона от напряжений представляется в виде

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b \nu_b}, \quad (1)$$

где  $E_b$  – начальный модуль упругости бетона, принимаемый при уровне напряжений  $\sigma = 0,25R_b$ ;  $\nu_b$  – коэффициент изменения секущего модуля, вычисляемый по формуле

$$\nu_b = \hat{\nu}_b \pm (\nu_0 - \hat{\nu}_b) \sqrt{1 - \omega\eta - (1 - \omega)\eta^2}. \quad (2)$$

В формуле (2) для восходящей ветви диаграммы применяется знак плюс, а нисходящей – минус,  $\eta$  – уровень напряжений в бетоне:

$$\eta = \sigma_b / \hat{\sigma}_b; \quad (3)$$

$\sigma_b$  – действующее напряжение в бетоне;  $\hat{\sigma}_b$  – напряжение в вершине диаграммы сжатия, для нормативной диаграммы принимается  $\hat{\sigma}_b = -R_{b,ser}$ ;  $\hat{\nu}_b$  – коэффициент изменения секущего модуля в вершине диаграммы сжатия;  $\nu_0$  – начальный коэффициент изменения секущего модуля;  $\omega$  – коэффициент, характеризующий кривизну диаграммы сжатия:

– для восходящей ветви диаграммы принимается

$$\nu_0 = 1,0; \quad \omega = 2 - 2,5\hat{\nu}_b; \quad (4)$$

– для нисходящей ветви диаграммы принимается

$$\nu_0 = 2,05\hat{\nu}_b; \quad \omega = 1,95\hat{\nu}_b - 0,138. \quad (5)$$

Коэффициент изменения секущего модуля в вершине диаграммы сжатия вычисляется по зависимости

$$\hat{\nu}_b = \frac{\hat{\sigma}_b}{E_b \hat{\varepsilon}_b}, \quad (6)$$

где  $\hat{\varepsilon}_b$  – относительная деформация бетона в вершине диаграммы сжатия:

$$\hat{\varepsilon}_b = -\frac{B}{E_b} \lambda \frac{k + \left(0,8 - 0,15 \frac{B^2}{10\,000}\right) \lambda B / 60 + 0,2\lambda / B}{0,12 + 1,03B / 60}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  – безразмерный коэффициент, зависящий от вида бетона, принимаемый равным 1 для тяжелого и мелкозернистого бетона;  $B$  – условный класс бетона, принимается равным  $1,4R_{b,ser}$ ;  $k$  – безразмерный коэффициент, для МВБ  $k = 1$ , для ВСФБ  $k = 1,3$ .

Величина  $\hat{\varepsilon}_b$  может также вычисляться по зависимости

$$\hat{\varepsilon}_b = k 10^{-5} \left( \sqrt[4]{\frac{R_b}{R_0}} \right), \quad (8)$$

где  $k$  – безразмерный коэффициент, для МВБ  $k = 200$ , для ВСФБ  $k = 220$ ;  $R_0$  – размерный коэффициент, принимаемый равным 20 МПа.

Относительные поперечные деформации бетона определяются по зависимости

$$\varepsilon_p = -\varepsilon_b \mu_b, \tag{9}$$

где  $\mu_b$  – коэффициент поперечных деформаций бетона:

$$\mu_b = \hat{\mu}_b + (\mu_b^0 - \hat{\mu}_b) \sqrt{1 - \eta^2}, \tag{10}$$

здесь  $\mu_b$  – начальный коэффициент поперечных деформаций, принимаемый при уровне напряжений  $\sigma = 0,25R_b$ ;  $\hat{\mu}_b$  – значение коэффициента поперечных деформаций в вершине диаграммы сжатия:

$$\hat{\mu}_b = \mu_b^0 + (1 - 0,9^3 \sqrt{\hat{\nu}_b}). \tag{11}$$

Результаты сопоставления полученных по описанной методике теоретических диаграмм сжатия МВБ и ВСФБ с опытными данными представлены на рис. 1.

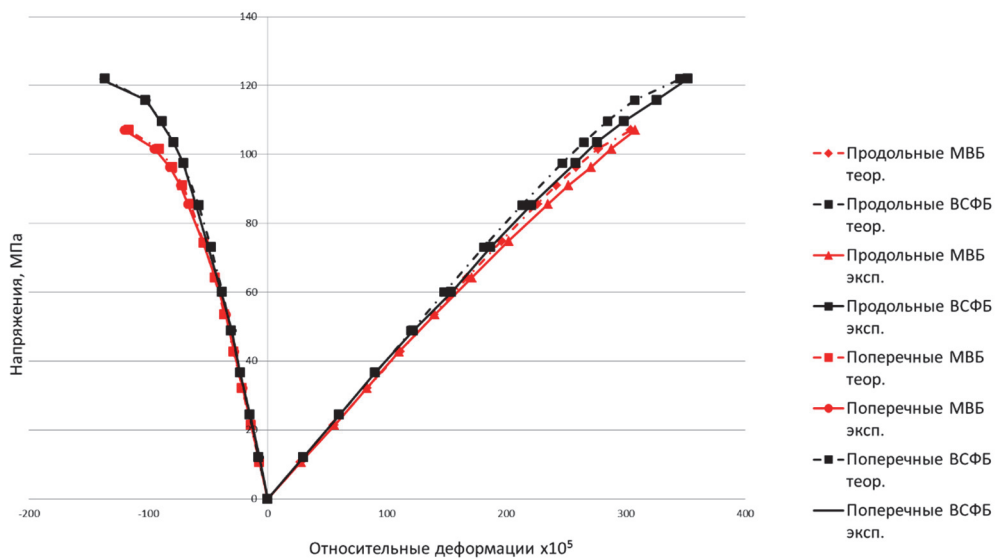


Рис. 1. Сравнение теоретических и экспериментальных диаграмм сжатия МВБ и ВСФБ

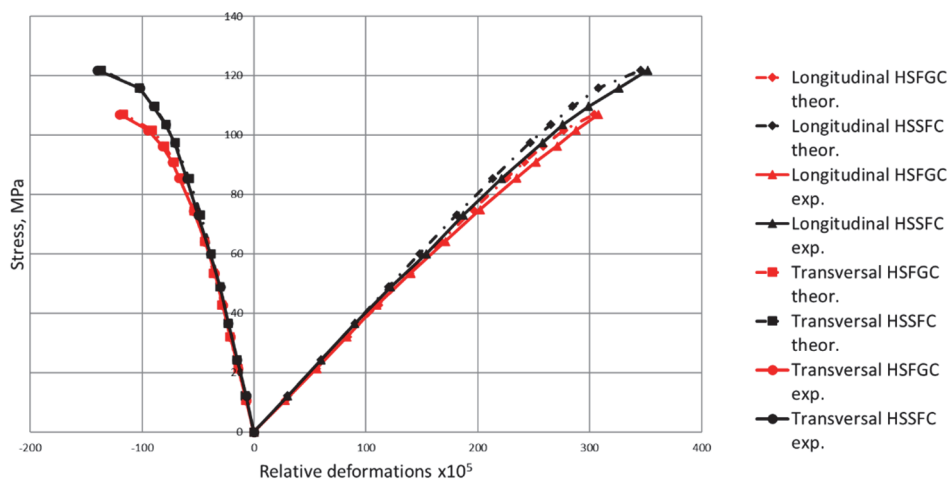


Figure 1. Comparison of theoretical and experimental compression diagrams of the fine-grained high-strength concrete (FGHSC) and high-strength steel fiber concrete (HSSFC)

### Методика теоретического описания общих мер ползучести МВБ и ВСФБ с учетом возраста в момент нагружения

Реологические свойства высокопрочного сталефибробетона в сравнении с неармированной матрицей в части деформаций ползучести исследовались по двум сериям образцов-призм, в одну из которых вводилась стальная фибра в количестве 1,5 % по массе. Нагружение образцов длительным сжатием производилось в возрасте 7, 28 или 100 суток в соответствии с программой исследования. Варьировались также уровни прикладываемой нагрузки –  $0,3R_b$  и  $0,6R_b$ , а для возраста нагружения 28 суток – и  $0,8R_b$ . Измерение деформаций ползучести производилось в течение 180 суток после нагружения, а затем исследовались деформации последствия в течение 60 суток. Методика экспериментальных исследований подробно описана в [4].

Для теоретического описания мер ползучести предлагались различные подходы. Экспериментальный подход к описанию мер простой ползучести был предложен И.Е. Прокоповичем и М.М. Заставой [8] и развит на случай нелинейной ползучести для исследуемых бетонов в [9]. В данной статье рассмотрим теоретический подход к описанию ползучести, предложенный В.М. Бондаренко и Н.И. Карпенко [10; 11]. В соответствии с этим подходом зависимость общей меры ползучести бетона от возраста нагружения  $t_0$ , уровня прикладываемой нагрузки  $\eta$  и момента времени  $t$  представляется в виде:

$$C_0(\eta, t, t_0) = C_0(\eta, \infty, t_0) - \left[ \frac{C_0(\eta, \infty, t_0) - C_0(\eta, t_0, t_0)}{\left[1 + \alpha \frac{m-1}{s+1} (\tilde{t}^{s+1} - 1)\right]^{\frac{1}{m-1}}} \right], \quad (12)$$

где  $C_0(\eta, \infty, t_0)$  – предельная мера ползучести бетона возраста  $t_0$ ;  $C_0(\eta, t_0, t_0)$  – начальный вертикальный отрезок меры ползучести бетона;  $\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$  – относительное время нагружения;  $\alpha, m, s$  – безразмерные эмпирические коэффициенты.

Для практического расчета в данной формуле возможно принятие значения  $C_0(\eta, t_0 + 1, t_0)$  вместо  $C_0(\eta, t_0, t_0)$ , соответствующее длительности нагружения 1 сутки, при этом  $\tilde{t} = \frac{t}{t_0+1}$ .

Значения общих мер ползучести  $C_0(\eta, t_0 + 1, t_0)$  определялись по опытным данным. Предельные меры ползучести  $C_0(\eta, \infty, t_0)$  были определены на основании предельных деформаций ползучести  $\epsilon^n(\infty, t_0)$ , вычисленных по методике ГОСТ 24544–2020.

Для описания ползучести исследуемого МВБ и ВСФБ в соответствии с данной методикой был произведен подбор параметров  $s, \alpha, m$  зависимости (13), обеспечивающий соответствие теоретических кривых опытным данным. Значения подобранных параметров в зависимости от возраста бетона в момент нагружения и уровня прикладываемой нагрузки приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Значения параметров общей меры ползучести для МВБ

Возраст нагружения, сут.	s			α			m		
	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>
7	3,3	3,9	–	3	0,5	–	9,46	14,5	–
28	4,8	6,4	6,5	0,9	1	1,4	8,4	9,5	10,5
100	10,9	7,9	–	4,7	4,6	–	7,4	5,6	–

Table 1

Values of the parameters of the overall creep measure for the FGHS

Loading age, days	s			α			m		
	0.3R <sub>b</sub>	0.6R <sub>b</sub>	0.8R <sub>b</sub>	0.3R <sub>b</sub>	0.6R <sub>b</sub>	0.8R <sub>b</sub>	0.3R <sub>b</sub>	0.6R <sub>b</sub>	0.8R <sub>b</sub>
7	3.3	3.9	–	3	0.5	–	9.46	14.5	–
28	4.8	6.4	6.5	0.9	1	1.4	8.4	9.5	10.5
100	10.9	7.9	–	4.7	4.6	–	7.4	5.6	–

Таблица 2

Значения параметров общей меры ползучести для ВСФБ

Возраст нагрузки, сут.	s			α			m		
	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>
7	4,3	13	–	0,35	0,3	–	7,9	20	–
28	0,6	2,8	7,7	0,7	1,27	3,2	11	5,85	9,9
100	9	4	–	4	4	–	6,7	4	–

Table 2

Values of the parameters of the overall creep measure for the HSSFC

Loading age, days	s			α			m		
	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>	0,3R <sub>b</sub>	0,6R <sub>b</sub>	0,8R <sub>b</sub>
7	4.3	13	–	0.35	0.3	–	7.9	20	–
28	0.6	2.8	7.7	0.7	1.27	3.2	11	5.85	9.9
100	9	4	–	4	4	–	6.7	4	–

Результаты построения теоретических кривых мер ползучести в сравнении с опытными данными для МВБ и ВСФБ в возрасте нагрузки 28 суток представлены на рис. 2, 3.

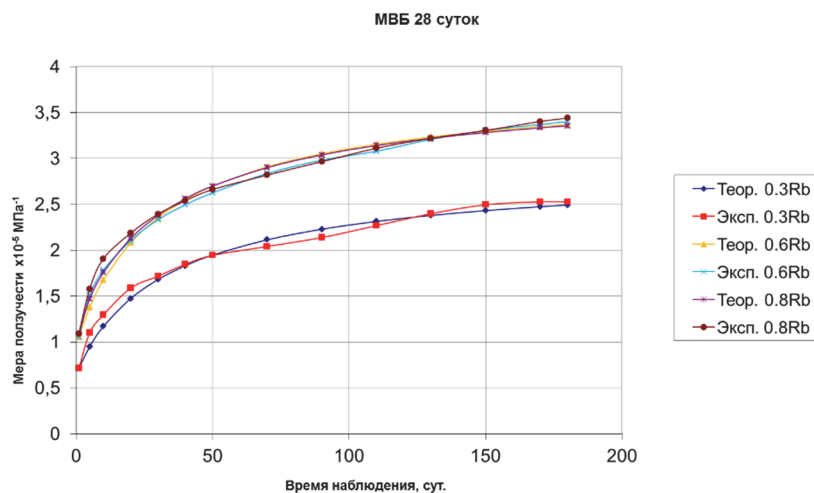


Рис. 2. Кривые мер ползучести для МВБ, загруженного в возрасте 28 суток

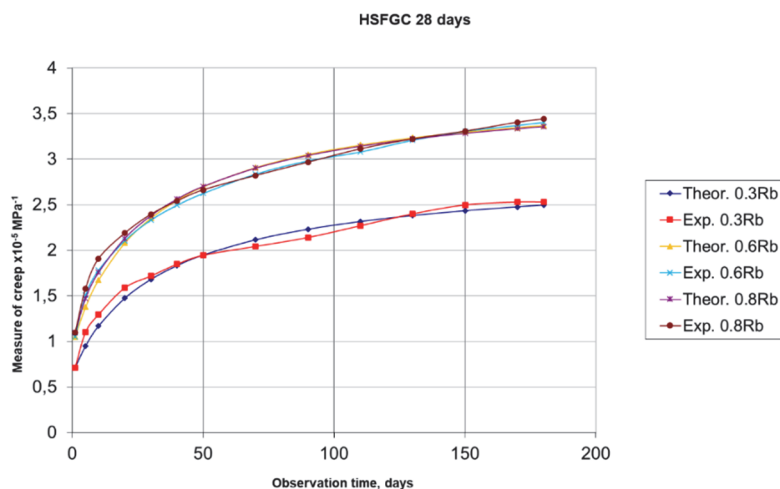


Figure 2. Curves of creep measures for the FGHSFC loaded at the age of 28 days



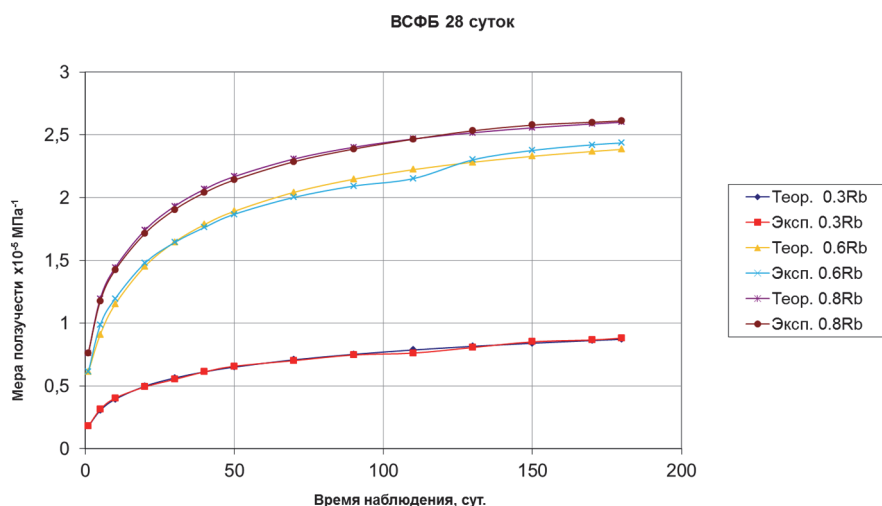


Рис. 3. Кривые мер ползучести для ВСФБ, загруженного в возрасте 28 суток

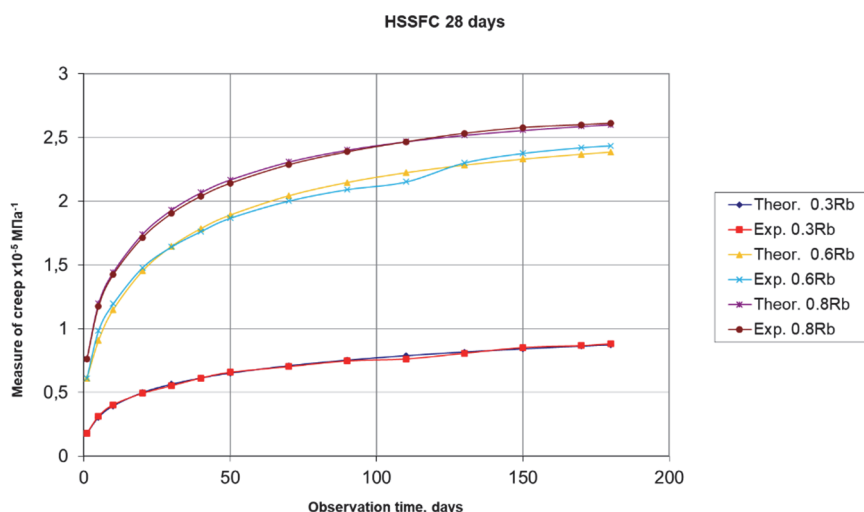


Figure 3. Curves of creep measures for HSSFC loaded at the age of 28 days

### Методика построения диаграмм-изохрон МВБ и ВСФБ при жестком режиме нагружения

На процесс деформирования бетона в момент времени  $t$  существенно влияют два фактора – возраст загружаемого бетона  $t_0$  и длительность действия нагрузки ( $t-t_0$ ). Чем больше длительность действия нагрузки, тем значительнее проявляется влияние деформаций ползучести на общую картину деформирования. Если все точки диаграммы деформирования бетона  $\varepsilon_b-\sigma_b$  получены при одном и том же времени нагружения ( $t-t_0$ ), то такую диаграмму называют диаграммой-изохроной при заданном времени нагружения. Впервые идея построения диаграмм-изохрон появилась в работе П.И. Васильева [12]. Позднее диаграммы-изохроны рассматривались В.М. Бондаренко в [13]. Методика построения диаграмм-изохрон, позволяющая определять деформации в зависимости от уровня нагружения в любой момент времени, может быть использована при расчете конструкций в соответствии с диаграммным методом расчета. В связи с этим актуальным представляется разработка обоснованной методики теоретического построения диаграмм-изохрон для исследуемого ВСФБ.

В качестве эталонных режимов нагружения при построении диаграмм-изохрон рассматриваются две ситуации:

- жесткий режим нагружения предполагает приложение всей нагрузки в течение непродолжительного времени (до 1 часа) и ее сохранение на неизменном уровне в течение дальнейшего времени ( $t-t_0$ );
- мягкий режим нагружения предполагает линейное возрастание нагрузки от нуля до проектного значения на протяжении всего времени ( $t-t_0$ ) со скоростью, близкой к постоянной.

Комплекс экспериментов, описанный в [4], позволяет исследовать жесткий режим нагружения МВБ и ВСФБ от 1 часа загрузки до 180 суток. На основании опытных данных была разработана методика построения диаграмм-изохрон для исследуемых бетонов, подробно описанная в [14]. Приведем основные зависимости данной методики.

Длительное нагружение бетона сжатием снижает его призмную прочность. Длительная прочность бетона при жестком режиме нагружения определяется по зависимости:

$$R_{b,ser}(t, t_0) = R_{b,ser}(t_0) \left\{ [0,95 - 1,57 \cdot 10^{-2} \ln(t - t_0)] \gamma_t + \frac{\bar{\gamma}_{b2}(1 - \gamma_t)}{1 - (1 - \bar{\gamma}_{b2})e^{-4\gamma_1(t - t_0)}} \right\}, \quad (13)$$

где  $\gamma_t = 1$  для жесткого режима нагружения;  $\gamma_{b2}$  – коэффициент для учета влияния возраста бетона и условий твердения на длительное сопротивление;  $R_{b,ser}(t_0)$  – начальный предел прочности при сжатии для данного возраста загрузки.

Практическое построение диаграмм-изохрон для момента времени  $t$  выполняется с использованием зависимости, аналогичной случаю кратковременного сжатия, но входящие в него величины определяются с учетом времени нагружения ( $t - t_0$ ):

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t, t_0)}{E_b(t, t_0) \nu_b(t, t_0)}, \quad (14)$$

где  $\sigma_b(t, t_0)$  – напряжение сжатия в момент времени ( $t - t_0$ ), определяемое с учетом уровня нагружения по выражению  $\sigma_b(t, t_0) = \eta(t, t_0) R_b(t, t_0)$ , здесь

$$\eta(t, t_0) = \eta(t_0) \frac{R_b(t, t_0)}{R_b(t_0)}, \quad (15)$$

$E_b(t, t_0)$  – начальный модуль упругости в момент времени ( $t - t_0$ ), для жесткого режима нагружения принимаемый как  $E_b(t_0)$ ;  $\nu_b(t, t_0)$  – коэффициент изменения секущего модуля с учетом длительности нагружения, вычисляется по зависимостям:

$$\nu_b(t, t_0) = \hat{\nu}_b(t, t_0) + [\nu_0(t, t_0) - \hat{\nu}_b(t, t_0)] \sqrt{1 - \omega \eta(t, t_0) - (1 - \omega) \eta^2(t, t_0)}, \quad (16)$$

$$\omega = 2 - 2,5 \hat{\nu}_b(t, t_0). \quad (17)$$

Граничные значения коэффициента изменения секущего модуля рекомендуется вычислять по зависимостям:

$$\nu_0(t, t_0) = \frac{1}{1 + \varphi_0(t, t_0)}; \quad (18)$$

$$\hat{\nu}_b(t, t_0) = \frac{\hat{\nu}_b}{1 + \hat{\nu}_b \hat{\varphi}(t, t_0)}, \quad (19)$$

где  $\hat{\nu}_b$  – коэффициент изменения секущего модуля при краткосрочном сжатии, определяемый по формуле (6).

Величина  $\varphi(t, t_0)$  называется характеристикой ползучести; величины  $\varphi_0(t, t_0)$  и  $\hat{\varphi}(t, t_0)$ , входящие в (18), (19) – соответственно характеристики ползучести в начале и в вершине диаграммы-изохроны при сжатии. Приведем алгоритм расчета характеристики ползучести с учетом ее нелинейной зависимости от уровня нагружения.

Характеристика ползучести для жесткого режима нагружения исследуемых бетонов в момент времени ( $t - t_0$ ) определяется выражением:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi f(t - t_0) \Delta(t, t_0), \quad (20)$$

здесь  $\varphi = \varphi(\infty, t_0)$  – предельная характеристика ползучести;  $f(t - t_0)$  – функция для учета нарастания во времени меры ползучести;  $\Delta(t, t_0)$  – функция для учета влияния быстроснатекающей ползучести в начале загрузки.

Предельная характеристика ползучести с учетом нелинейности в формуле (20) вычисляется по выражению:

$$\varphi = \varphi^N \xi_1 \xi_2 \Omega(t_0) f_c, \quad (21)$$

где  $\varphi^N$  – предельная функция для бетонов, находящихся в эталонных условиях, зависит преимущественно от вида бетона; из сопоставления теоретических и опытных данных для МВБ  $\varphi^N = 4,5$ , для ВСФБ  $\varphi^N = 3,6$ ; коэффициенты  $\xi_1$  и  $\xi_2$  учитывают влияние влажности среды и условия влагообмена со средой соответственно;  $\Omega(t_0)$  – функция для учета влияния старения бетона на меру ползучести, определяемая выражением

$$\Omega(t_0) = 0,5 + d e^{-2\gamma_1 t_0}, \quad (22)$$

где параметры  $d$  и  $\gamma_1$  назначаются в зависимости от модуля открытой поверхности конструкции;  $f_c$  – функция нелинейности ползучести в зависимости от уровня нагружения, определяется выражением:

$$f_c = 1 + v_c \left( \frac{R_b(t, t_0)}{R_b(t_0)} \right)^2 \eta^2(t, t_0), \quad (23)$$

где  $v_c$  – коэффициент учета зависимости функции нелинейности от возраста загрузки бетона, подбираемый с учетом вида бетона и возраста нагружения.

Функция для учета нарастания во времени меры ползучести в формуле (20) определяется как

$$f(t - t_0) = 1 - D e^{-\alpha(t-t_0)} - B e^{-\gamma_1(t-t_0)}, \quad (24)$$

где  $\gamma_1$  назначается в зависимости от модуля открытой поверхности конструкции; для исследуемых бетонов параметры  $B = 0,475$ ;  $D = 0,525$ ;  $\alpha = 0,1$ .

Функция для учета влияния быстроснатекающей ползучести в начале загрузки в формуле (20) при  $t - t_0 \leq 1$  сутки определяется следующим образом:

$$\Delta(t, t_0) = \sqrt{1 + 0,314 \ln(t - t_0)}, \quad (25)$$

при  $t - t_0 > 1$  сут функция  $\Delta(t, t_0) = 1$ .

Таким образом, граничные значения характеристик ползучести  $\varphi_0(t, t_0)$  и  $\hat{\varphi}(t, t_0)$ , входящие в выражения (18)–(19), вычисляются по приведенному выше алгоритму при  $\eta(t, t_0) = 0$  и при  $\eta(t, t_0) = 1$  соответственно.

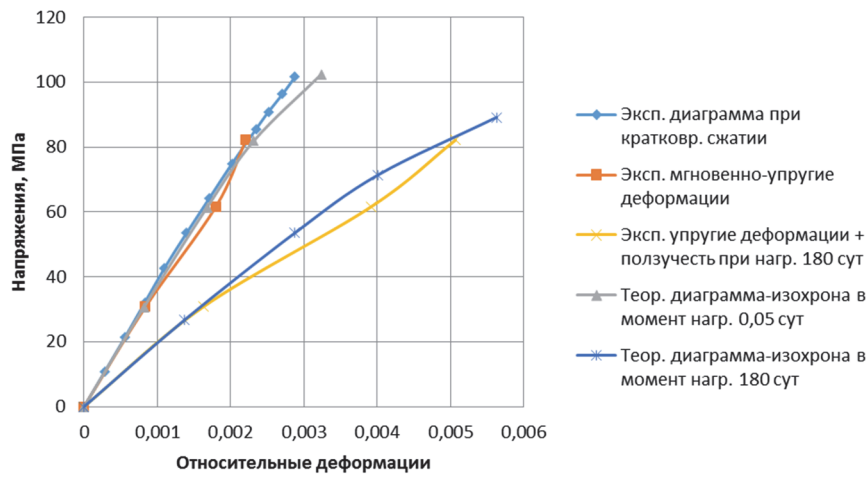
Следует отметить, что разработанная в рамках данной методики форма записи характеристики ползучести (21) дает возможность вычисления общей меры ползучести с учетом ее нелинейной зависимости от уровня нагружения по выражению

$$C(t, t_0, \eta) = \frac{\varphi(t, t_0)}{E_b(t_0)}. \quad (26)$$

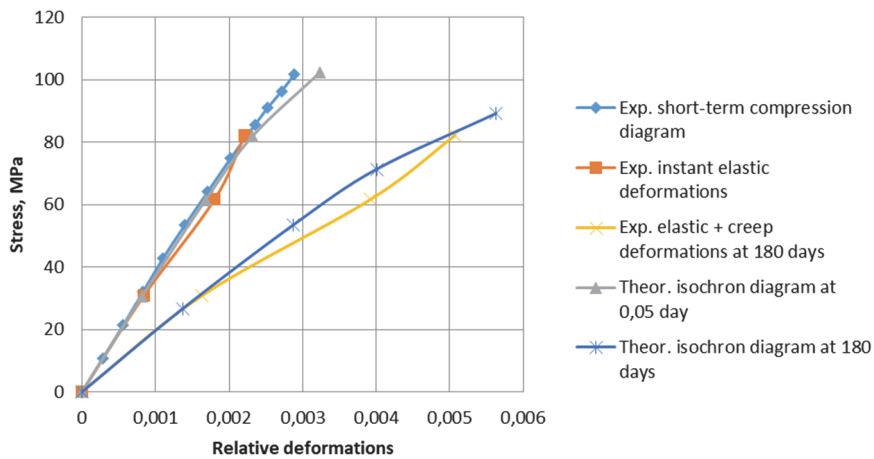
При этом предельная мера ползучести для бетона, загружаемого в эталонном возрасте 28 суток, с приемлемой точностью может вычисляться по выражению

$$C(\infty, 28) = \frac{\varphi^N \xi_1 \xi_2}{E_b(t_0)} f_c. \quad (27)$$

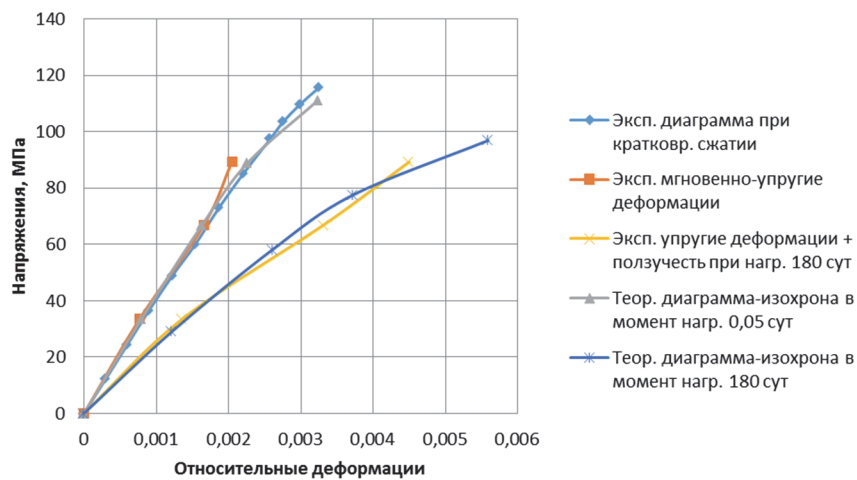
На рис. 4 и 5 представлено сопоставление теоретических и экспериментальных диаграмм-изохрон МВБ и ВСФБ, загруженного в возрасте 28 суток, при продолжительности нагружения 0,05 суток (1 час) и 180 суток.



**Рис. 4.** Теоретические и экспериментальные диаграммы-изохроны для МВБ, загруженного в возрасте 28 суток



**Figure 4.** Theoretical and experimental isochron diagrams for the FGHSC loaded at the age of 28 days



**Рис. 5.** Теоретические и экспериментальные диаграммы-изохроны для ВСФБ, загруженного в возрасте 28 суток

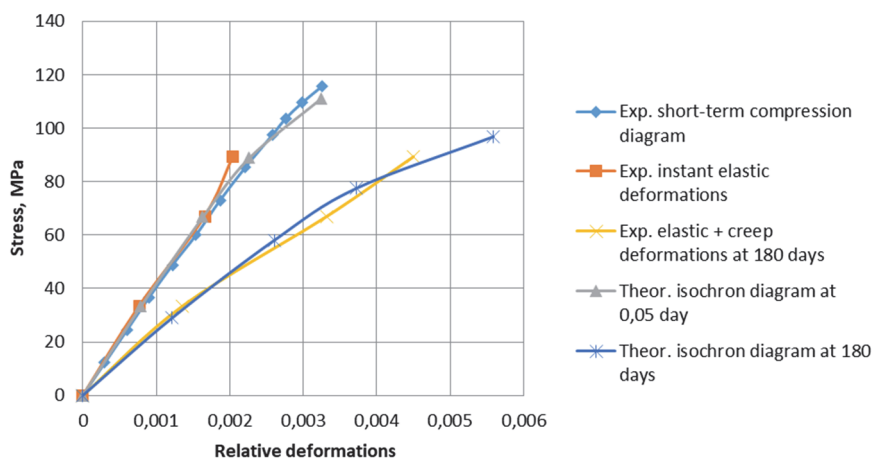


Figure 5. Theoretical and experimental isochron diagrams for the HSSFC loaded at the age of 28 days

### Заклучение

Представлены основные результаты теоретических исследований физико-механических и реологических свойств высокопрочного сталефибробетона с минимальным эффективным содержанием выбранного типа фибры 1,5 % по массе в сравнении с неармированным мелкозернистым высокопрочным бетоном на основании комплекса опытных данных. В рамках данного исследования получены следующие основные результаты:

- откорректирована методика описания диаграмм продольного и поперечного деформирования исследуемых бетонов при кратковременном сжатии вплоть до высоких уровней напряжения в вершине диаграмм;

- проведено описание общих мер ползучести исследуемых бетонов в соответствии с теоретическим подходом В.М. Бондаренко и Н.И. Карпенко с подбором соответствующих параметров;

- на основании работ В.М. Бондаренко разработана методика построения диаграмм-изохрон исследуемых бетонов для любого момента времени с учетом нелинейной зависимости ползучести от уровня нагружения.

Представленные методики прошли проверку путем сопоставления с опытными данными и могут быть использованы при расчете конструкций из исследуемых бетонов в соответствии с диаграммным методом расчета.

### Список литературы

1. Каприелов С.С., Шейнфельд А.В., Кардунян Г.С., Дондуков В.Г. Модифицированные высокопрочные мелкозернистые бетоны с улучшенными деформативными характеристиками // Бетон и железобетон. № 2. 2006. С. 2–7.
2. Каприелов С.С., Шейнфельд А.В., Кардунян Г.С. Новые модифицированные бетоны. М.: Типография «Парадиз», 2010. 258 с.
3. Каприелов С.С., Чилин И.А. Сверхвысокопрочный самоуплотняющийся фибробетон для монолитных конструкций // Строительные материалы. 2013. № 7. С. 28–30.
4. Карпенко Н.И., Каприелов С.С., Петров А.Н., Безгодков И.М., Моисеенко Г.А., Степанов М.В., Чилин И.А. Исследование физико-механических и реологических свойств высокопрочных сталефибробетонов из самоуплотняющихся смесей // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2017 году: сборник научных трудов РААСН: в 2 т. Т. 2. М.: Изд-во АСВ, 2018. С. 237–246.
5. Безгодков И.М. К вопросу оценки предельной относительной деформации бетона при сжатии для разных классов бетона // Бетон и железобетон. 2015. № 5. С. 9–11.
6. Степанов М.В., Моисеенко Г.А. Диаграммы деформирования мелкозернистого высокопрочного бетона и сталефибробетона при сжатии // Строительство и реконструкция. 2019. № 3 (83). С. 11–21. <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-83-3-11-21>
7. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. С. 97.
8. Прокопович И.Е., Застава М.М. О расчетном определении предельных длительных деформаций тяжелого бетона // Бетон и железобетон. 1972. № 5. С. 35–37.

9. Степанов М.В., Моисеенко Г.А. Развитие экспериментального подхода к определению меры ползучести мелкозернистого высокопрочного бетона и сталефибробетона при рациональном содержании фибры // Строительство и реконструкция. 2018. № 3 (77). С. 98–104.
10. Бондаренко В.М., Ягунов Б.А. К вопросу о расчетной оценке ползучести бетона // Academia. Архитектура и строительство. 2006. № 3. С. 73–78.
11. Бондаренко В.М., Карпенко Н.И. Уровень напряженного состояния как фактор структурных изменений и реологического силового сопротивления бетона // Academia. Архитектура и строительство. 2007. № 4. С. 56–59.
12. Васильев П.И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона // Известия ВНИИГ. 1953. Т. 49. С. 83–113.
13. Бондаренко В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1968. 324 с.
14. Moiseenko G.A. Method for construction of isochron diagrams of high-strength steel fiber concrete and its matrix // Строительство и реконструкция. 2020. № 5 (91). С. 32–45. <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-90-4-32-45>

### References

1. Kaprielov S.S., Sheinfeld A.V., Kardumyan G.S., Dondukov V.G. Modified high-strength fine-grained concrete with improved deformative characteristics. *Beton i Zhelezobeton*. 2006;(2):2–7. (In Russ.)
2. Kaprielov S.S., Sheinfeld A.V., Kardumyan G.S. *New modified concretes*. Moscow: Tipografiya Paradiz Publ.; 2010. (In Russ.)
3. Kaprielov S.S., Silin I.A. Super high-strength self-sealing fibroconcrete for monolithic structures. *Stroitel'nye Materialy*. 2013;(7):28–30. (In Russ.)
4. Karpenko N., Kaprielov S., Petrov A., Bezgodov J., Moiseenko G., Stepanov M., Chilin I. Study of physical-mechanical and rheological properties of high-strength steel fiber concretes produced from self-compacting mixtures. *Fundamental, Exploratory and Applied Research of the RAASN on Scientific Support for the Development of Architecture, Urban Planning and the Construction Industry of the Russian Federation in 2017: Collection of Scientific Papers of the RAASN* (vol. 2). Moscow: ASV Publ.; 2018. p. 237–246. (In Russ.)
5. Bezgodov I.M. On the issue of estimating the ultimate relative deformation of concrete under compression for different classes of concrete. *Beton i Zhelezobeton*. 2015;(5):9–11. (In Russ.)
6. Stepanov M.V., Moiseenko G.A. Deformation diagrams of fine-grained high-strength concrete and high-strength steel-fibro concrete under compression. *Building and Reconstruction*. 2019;(3):11–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-83-3-11-21>
7. Karpenko N.I. *General models of reinforced concrete mechanics*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1996. (In Russ.)
8. Prokopovich I.E., Zastava M.M. On the calculated determination of the maximum long-term deformations of heavy concrete. *Beton i Zhelezobeton*. 2012;(5):35–37. (In Russ.)
9. Stepanov M.V., Moiseenko G.A. Elaboration of the experimental approach to determination of measure of the creep of fine-grained high-strength concrete and high-strength steel fiber concrete with a rational fiber content. *Building and Reconstruction*. 2018;(3):98–104. (In Russ.)
10. Bondarenko V.M., Yagupov B.A. On the issue of the estimated creep of concrete 2006. *Academia. Architecture and Construction*. 2006;(3):73–78. (In Russ.)
11. Bondarenko V.M., Karpenko N.I. Stress state level as a factor of structural changes and rheological force resistance of concrete. *Academia. Architecture and Construction*. 2007;(4):56–59. (In Russ.)
12. Vasiliev P.I. Some issues of plastic deformations of concrete. *Izvestiya VNIIG*. 1953;49:83–113.
13. Bondarenko V.M. *Some questions of the nonlinear theory of reinforced concrete*. Kharkiv: Kharkiv University Press; 1968. (In Russ.)
14. Moiseenko G.A. Method for construction of isochron diagrams of high-strength steel fiber concrete and its matrix. *Building and Reconstruction*. 2020;(5):32–45. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-90-4-32-45>

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-515-524  
УДК 624.074

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Устойчивость пологих оболочек покрытия при местном изменении прочностных характеристик

А.Г. Колесников<sup>ID</sup>, А.В. Осадчая<sup>ID</sup>

Юго-Западный государственный университет, Курск, Российская Федерация  
✉ ag-kolesnikov@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 22 августа 2022 г.  
Доработана: 12 октября 2022 г.  
Принята к публикации: 15 октября 2022 г.

### Для цитирования

Колесников А.Г., Осадчая А.В. Устойчивость пологих оболочек покрытия при местном изменении прочностных характеристик // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 515–524. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-515-524>

**Аннотация.** Рассматриваются конструкции покрытий зданий и сооружений в виде пологих оболочек, имеющих некоторые повреждения. Выводятся уравнения, учитывающие геометрическую нелинейность работы тонкостенной конструкции. Дается методика решения систем уравнений с помощью метода Бубнова – Галеркина. Моделируется работа конструкции с различными способами закрепления краев. Повреждения задаются изменением модуля упругости на произвольном участке конструкции. Исследуется влияние формы и расположения дефекта на величину критической нагрузки. Результаты проведенных исследований приводятся в безразмерном виде и иллюстрируются графиками, что делает удобным их использование в инженерных расчетах. Даются рекомендации по корректировке формы и толщины конструкций покрытий в виде пологих оболочек для сохранения их несущей способности при возникновении дефектов. Предложенная постановка задачи может использоваться для определения и исследования напряженно-деформированного состояния конструкций в виде пологих оболочек с учетом геометрической нелинейности работы при наличии в них дефектов. Построенные графики зависимости критической нагрузки от различных параметров позволяют оценить работу конструкций с учетом изменения различных факторов на разных стадиях работы конструкции. Использование изменяющихся характеристик снижения модуля упругости, возникающих вследствие возникновения дефекта, показывает результаты, приближенные к реальным условиям.

**Ключевые слова:** полая оболочка, напряженно-деформированное состояние, пространственная конструкция, дефект, критическая нагрузка

**Колесников Александр Георгиевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры уникальных зданий и сооружений, Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; ORCID: 0000-0001-7874-3646, Scopus Author ID: 56035426300, eLIBRARY SPIN-код: 7667-6685; ag-kolesnikov@mail.ru

**Осадчая Антонина Валерьевна**, магистрант, кафедра уникальных зданий и сооружений, Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; ORCID: 0000-0002-0076-3695; tonechka.84@mail.ru

© Колесников А.Г., Осадчая А.В., 2022




This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Stability of shallow shells with local changes in strength characteristics

Alexander G. Kolesnikov  , Antonina V. Osadchaya 

South-West State University, Kursk, Russian Federation

 ag-kolesnikov@mail.ru

### Article history

Received: August 22, 2022

Revised: October 12, 2022

Accepted: October 15, 2022

### For citation

Kolesnikov A.G., Osadchaya A.V. Stability of shallow shells with local changes in strength characteristics. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):515–524. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-515-524>

**Abstract.** The authors deal with the structures of buildings in the form of shallow shells with some damage. The derivation of equations is given taking into account the geometric nonlinearity of the work of a thin-walled structure. A technique for solving systems of equations using the Bubnov – Galyorkin method is given. The work of the structure with various ways of fixing the edges is simulated. Damage is specified by changing the modulus of elasticity in an arbitrary section of the structure. The influence of the shape and location of the defect on the value of the critical load is investigated. The results of the studies carried out are given in a dimensionless form and illustrated by graphs, which makes it convenient to use them in engineering calculations. Recommendations are given for correcting the shape and thickness of coating structures in the form of shallow shells in order to maintain their bearing capacity in the event of defects. The proposed method can be used to determine and investigate the stress-strain state of structures in the form of shallow shells, taking into account the geometric nonlinearity of work in the presence of defects in them. The constructed graphs of the dependence of the critical load on various parameters make it possible to evaluate the operation of structures, taking into account changes in various factors at various stages of the structure's operation. The use of varying characteristics of the reduction in the modulus of elasticity, which appears because of the occurrence of a defect, shows results that are close to real conditions.

**Keywords:** shallow shell, stress-strain state, spatial structure, defect, critical load

### Введение

Пространственные конструкции в виде пологих оболочек нашли широкое применение при возведении большепролетных зданий и сооружений, в которых есть требования к отсутствию внутренних опор. При этом, на стадии эксплуатации могут возникнуть местные дефекты в конструкции, которые приводят к общей потере прочности или устойчивости (рис. 1).

Изучению конструкций в виде пологих оболочек в настоящее время уделяется значительное внимание во всем мире. Проводятся исследования устойчивости [1–3] и колебаний конструкций [4–7], в том числе в нелинейной постановке [8; 9] и различных форм срединной поверхности [10–12]. Интересны работы, анализирующие поведения слоистых [13–15] и ортотропных пологих оболочек [16], результаты которых могут быть использованы для моделирования железобетонных и армоцементных конструкций.

Особый интерес представляют работы, в которых исследуется длительная прочность оболочек покрытия и снижение ее в следствии различных факторов [17; 18].

Но перед проектировщиками зачастую стоят задачи не только расчета конструкций, но и их исследования, поэтому разработка методов их анализа является важной задачей. В настоящее время большинство таких конструкций рассчитываются и исследуются при помощи программного обеспечения, основанного на методе конечных элементов [19; 20]. Это удобно для инженерного проектирования. Однако, в случае нелинейных задач можно получить результаты, точность которых трудно оценить. Решение сильно зависит от типа и числа конечных элементов, причем увеличение количества элементов не приводит к достаточному уровню точности.

*Alexander G. Kolesnikov*, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Unique Buildings and Structures, Southwestern State University, 94 50 Let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7874-3646, Scopus Author ID: 56035426300, eLIBRARY SPIN-code: 7667-6685; ag-kolesnikov@mail.ru

*Antonina V. Osadchaya*, master student, Department of Unique Buildings and Structures, Southwestern State University, 94 50 Let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0076-3695; tonechka.84@mail.ru





**Рис. 1.** Обрушение пространственной конструкции покрытия здания Трансвааль-парка, Москва (*сверху*) и здания Басманного рынка, Москва (*снизу*)  
**Figure 1.** The collapse of the elite structure of the covering of the Transvaal Park building, Moscow (*above*) and the building of the Basmannyi market, Moscow (*below*)

В решении некоторых задач проектирования, а особенно синтеза и анализа конструкций более точные результаты можно получить с использованием численных методов прямого вариационного исчисления [21–24].

Разработка численных методов расчета и анализа тонкостенных конструкций с дефектами, работающих в нелинейной стадии деформирования остается актуальной задачей.

### Методы

Задача расчета конструкций покрытий зданий и сооружений в виде пологих оболочек, имеющих дефекты, полученные в результате каких-либо воздействий (рис. 2) с любым отношением сторон в плане и видом опирания, а также загруженными вертикальной равномерно распределенной нагрузкой, может

быть представлена системой уравнений (1). При этом толщина конструкции весьма мала по сравнению с размерами в плане, а величины прогибов соизмеримы с толщиной, следовательно, необходимо учесть геометрическую нелинейность работы конструкции [21; 22]:

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \nabla^2 \nabla^2 \frac{1}{E(x,y)} \varphi + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{h}{12} \nabla^2 \nabla^2 \frac{E(x,y)}{(1-\nu(x,y)^2)} w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left( k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left( k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left( k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - Z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi$  – функция напряжений;  $w$  – функция прогибов;  $Z$  – функция нагрузки.

Переменная форма оболочки на прямоугольном плане описывается уравнением ее срединной поверхности:

$$F(x, y) = f \left[ \alpha \left( \frac{x}{a} \right)^{2\xi} + \beta \left( \frac{y}{b} \right)^{2\xi} + 1 \right], \quad (2)$$

где  $f$  – стрела подъема в центре оболочки;  $\alpha = -\frac{f_1}{f}$ ,  $\beta = -\frac{f_2}{f}$  – параметры, характеризующие форму оболочки;  $f_1, f_2$  – стрелы подъема опорных арок оболочки;  $a, b$  – размеры в плане.

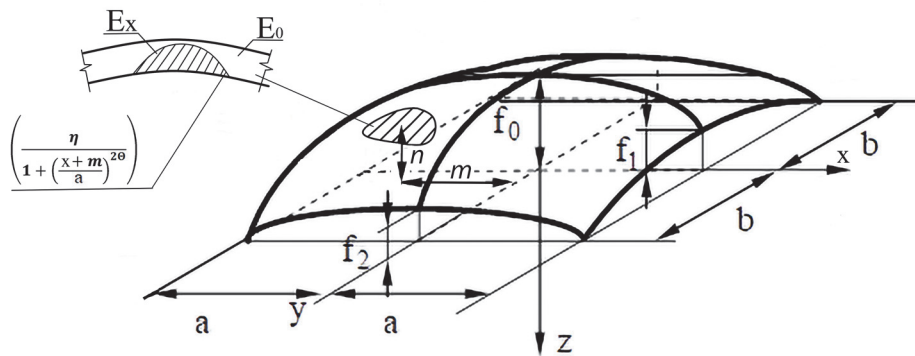


Рис. 2. Покрытие в виде полой оболочки с произвольным дефектом  
Figure 2. Coating in the form of a shallow shell with an arbitrary defect

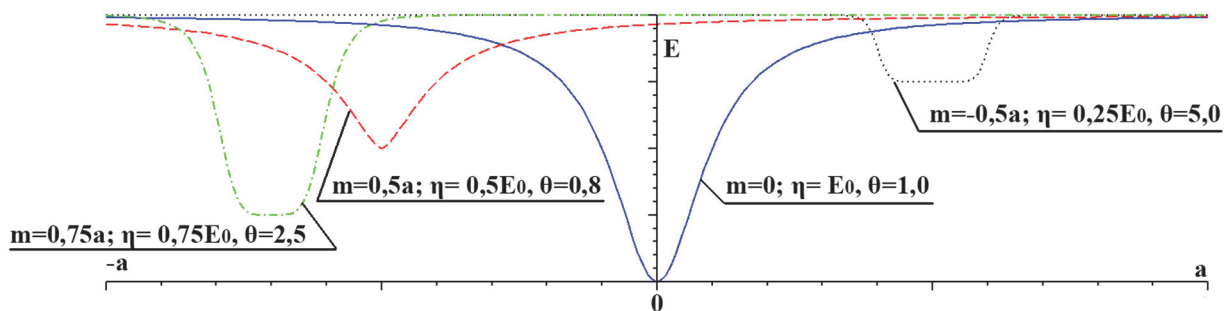


Рис. 3. Форма изменения модуля упругости в зависимости от варьирования параметров  $m, \eta, \theta$   
Figure 3. The form of change in the modulus of elasticity depending on changes in the parameters  $m, \eta, \theta$

Дефект моделируется в виде изменения модуля упругости на произвольной области конструкции в виде

$$E(x, y) = E_0 - \left( \frac{\eta}{1 + \left( \frac{x+m}{a} \right)^{2\theta}} \right) \left( \frac{\eta}{1 + \left( \frac{y+n}{b} \right)^{2\theta}} \right), \quad (3)$$

где  $E_0$  – начальный модуль упругости (рис. 3);  $\eta, \gamma$  – коэффициенты износа конструкции вдоль оси  $x$  и  $y$  соответственно ( $0; E_0$ ];  $m$  – коэффициент, характеризующий смещение точки наименьшего модуля упругости вдоль оси  $x$  [ $-a; a$ ];  $n$  – коэффициент, характеризующий смещение точки наименьшего модуля упругости вдоль оси  $y$  [ $-b; b$ ];  $\theta, \vartheta$  – коэффициенты, характеризующие форму изменения модуля упругости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно ( $0,5; \infty$ ).

Варьирование коэффициентов  $m, \eta, \theta$  позволяет задавать большое количество вариантов возможных дефектов (уменьшение прочностных характеристик некоторой области конструкции, степень уменьшения прочностных характеристик).

Напряжения в любой точке оболочки можно определить с помощью метода Бубнова – Галеркина [24]:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)^2]}, \quad (4)$$

где

$$\bar{\sigma}_1 = \left| \frac{6}{\bar{t}} \bar{D} \bar{B} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x Z_y + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_y Z_x \right) \right| + \left| \bar{A} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_y Z_x \bar{t} \right| + \left| \frac{g}{\bar{t}^2} \bar{D} \bar{B} \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} Z_x Z_y + \frac{\partial}{\partial x} Z_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_y \right) \right|; \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \left| \frac{6}{\bar{t}} \bar{D} \bar{B} \left( \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x Z_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_y Z_x \right) \right| + \left| \bar{A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x Z_y \bar{t} \right| + \left| \frac{g}{\bar{t}^2} \bar{D} \bar{B} \left( \frac{\partial^3}{\partial y^3} Z_y Z_x + \frac{\partial}{\partial y} Z_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x \right) \right|; \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_3 = \left| \frac{6}{\bar{t}} (1 - \nu) \bar{D} \bar{B} \frac{\partial}{\partial x} Z_x \frac{\partial}{\partial y} Z_y \right| + \left| \bar{A} \frac{\partial}{\partial x} Z_x \frac{\partial}{\partial y} Z_y \bar{t} \right|. \quad (7)$$

$$\bar{D} = \frac{D}{E_0 h^3}; \quad D = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (8)$$

$$\bar{A} = \frac{A a^2}{E f^5}; \quad \bar{B} = \frac{B a^2}{f^2}. \quad (9)$$

$$g = \frac{f}{a}; \quad \bar{t} = \frac{h}{f}. \quad (10)$$

$$A = -\frac{1}{J_1} (B J_2 + B^2 J_3). \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{6C_1} (36C_3 C_2 C_1 + 108q C_1^2 - 8C_2^3 + 12\sqrt{3}(4C_3^3 C_1 - C_3^2 C_2^2 + 18C_3 C_2 C_1 q + \\ & + 12\sqrt{3}(4C_3^3 C_1 - C_3^2 C_2^2 + 18C_3 C_2 C_1 q + 27q^2 C_1^2 - 4q C_2^3)^{1/2} C_1)^{1/3} - \\ & - \frac{2}{3} (3C_3 C_1 - C_2^2) / (C_1 (36C_3 C_2 C_1 + 108q C_1^2 - 8C_2^3 + 12\sqrt{3}(4C_3^3 C_1 - C_3^2 C_2^2 + \\ & + 18C_3 C_2 C_1 q + 27q^2 C_1^2 - 4q C_2^3)^{1/2} C_1)^{1/3} - \frac{1}{3} \frac{C_2}{C_3}). \end{aligned} \quad (12)$$

$$C_1 = 2E_0 h \frac{J_3^2}{J_1 J_4}; \quad C_2 = 3E_0 \frac{J_3 J_2}{J_1 J_4}; \quad C_3 = D \frac{J_1^2}{J_1 J_4} + E_0 h \frac{J_2^2}{J_1 J_5}. \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 J_1 = & \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left( -\frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial y} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial y^3} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} + \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial y} E(x, y) \right)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^3} - \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} + \right. \\
 & + \frac{\frac{\partial^4}{\partial x^4} \bar{w}(x, y)}{hE(x, y)} - \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial y} E(x, y) \right)^2 \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^3} + \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y) \right) \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} - \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial x} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} + \\
 & + \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial x} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^3} - \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} + \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial x} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^3} - \\
 & - \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} - \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial x} E(x, y) \right)^2 \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^3} + \\
 & + \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) \right) \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} - \frac{2 \left( \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} - \frac{2 \left( \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} - \\
 & - \frac{2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bar{w}(x, y) \right)}{hE(x, y)^2} + \frac{4 \left( \frac{\partial}{\partial x} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bar{w}(x, y) \right) \nu}{hE(x, y)^3} - \\
 & \left. - \frac{\frac{\partial^4}{\partial y^4} \bar{w}(x, y)}{hE(x, y)} - \frac{2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} E(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bar{w}(x, y) \right) \nu}{hE(x, y)^2} \right) \bar{w}(x, y) dx dy. \tag{14}
 \end{aligned}$$

$$J_2 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right) \bar{w} dx dy. \tag{15}$$

$$J_3 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\Delta \bar{w}) \bar{w} dx dy. \tag{16}$$

$$J_4 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b Z \bar{w} dx dy. \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 J_5 = & \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}(x, y) \right) + 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} D(x, y) \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} \bar{w}(x, y) \right) + \right. \\
 & + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x, y) \right) \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{w}(x, y) \right) + D(x, y) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} \bar{w}(x, y) \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} D(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bar{w}(x, y) \right) + \\
 & + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} D(x, y) \right) + \left( \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \bar{w}(x, y) \right) + D(x, y) \left( \frac{\partial^4}{\partial y^4} \bar{w}(x, y) \right) - 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} D(x, y) \right) \times \\
 & \times \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bar{w}(x, y) \right) \nu + 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} D(x, y) \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \bar{w}(x, y) \right) + 2 D(x, y) \left( \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \bar{w}(x, y) \right) + \\
 & + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} D(x, y) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{w}(x, y) \right) + 2 \left( \frac{\partial}{\partial y} D(x, y) \right) \left( \frac{\partial^3}{\partial y^3} \bar{w}(x, y) \right) + \\
 & \left. + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} D(x, y) \right) \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}(x, y) \right) \right) \bar{w}(x, y) dx dy, \tag{18}
 \end{aligned}$$

где  $h$  – толщина конструкции покрытия в виде полой оболочки;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $A, B$  – известные метода Бубнова – Галеркина;  $Z_x, Z_y$  – балочные функции В.З. Власова.

Так как рассматриваемые конструкции можно отнести к тонким пологим оболочкам (толщина значительно меньше размеров в плане), в большинстве случаев возникает необходимость проверки конструкции на устойчивость. Коэффициент критической нагрузки для пологих оболочек на упругом основании может быть представлен уравнением

$$p_{cr} = \frac{2}{27} \frac{1}{c_1^2} \left[ (C_1^2 - 3C_1 C_3)^{3/2} + C_2 \left( C_2^2 - \frac{9}{2} C_1 C_3 \right) \right]. \tag{19}$$

Значения, полученные с помощью представленной методики, сравнивались с результатами других авторов. Проводилось сравнение изгибающего момента, возникающего в металлической оболочке на квадратном плане. Результаты решения показали хорошую сходимость со значениями авторов, использующих другие численные методы [22]. При расчете методом конечных элементов результат сильно зависел от количества используемых конечных элементов в модели.

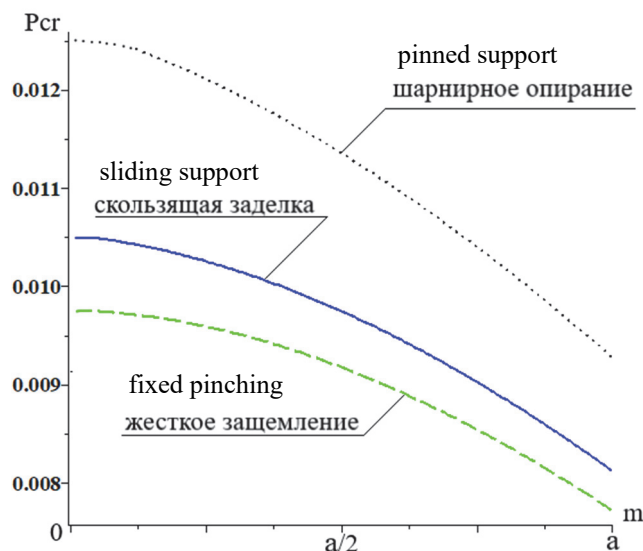
### Результаты и обсуждение

Представленная постановка задачи определения напряжений и критической нагрузки в покрытиях в виде пологих оболочек позволяет проводить исследования влияния различных факторов на напряженно-деформированное состояние конструкций, что не всегда возможно при помощи методик, основанных на методе конечных элементов.

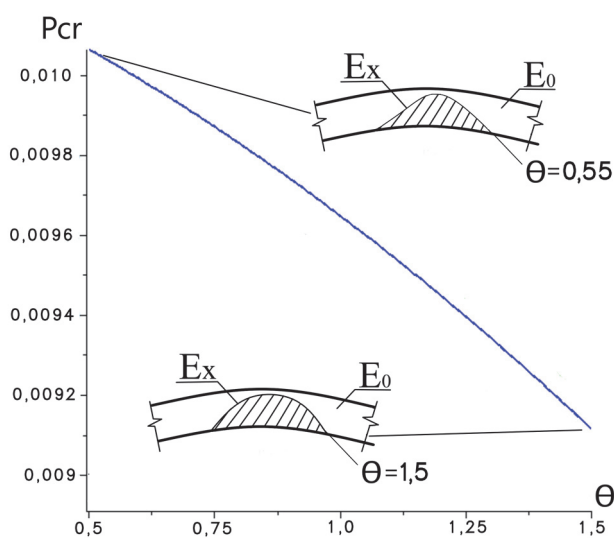
Для примера рассматривалась конструкция покрытия в виде оболочки на квадратном плане с соотношением толщины к размеру в плане  $h/2a = 1/20$ . На рис. 4 показано уменьшение значения критической нагрузки тонкостенной конструкции покрытия, определяемых по формуле (19), при увеличении параметра  $m$ , то есть смещении дефекта от центра к краю конструкции.

Рисунок наглядно иллюстрирует опасность возникновения дефектов, приводящих к снижению прочностных характеристик оболочек и возможности использования приведенных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния в них.

На рис. 5 показано изменение критической нагрузки при возникновении дефекта на расстоянии четверти размера в плане от центра для той же конструкции в зависимости от коэффициента, характеризующего форму снижения значения модуля упругости  $m$ .



**Рис. 4.** Влияние размещения дефекта на значение величины критической нагрузки  
**Figure 4.** Influence of defect placement on the value of the critical load



**Рис. 5.** Зависимость критической нагрузки от параметра, характеризующего форму снижения значения модуля упругости  
**Figure 5.** Dependence of the critical load on the parameter characterizing the shape of the decrease in the value of the modulus of elasticity

Графики показывают возможность использования представленной численной методики определения напряженно-деформированного состояния конструкций в виде пологих оболочек для анализа влияния различных параметров дефектов (величина снижения модуля упругости, местонахождение дефекта, форма снижения модуля упругости) и размеров конструкции (толщины, формы конструкции, стрелы подъема) на исследуемые характеристики.

Постановка задачи определения напряженно-деформированного состояния конструкций в виде пологих оболочек с дефектами позволяет проводить исследования и оценивать несущую способность конструкции исходя из условий проектирования.

Представление уравнений (4), (19) в безразмерном виде удобно для получения зависимостей и анализа вносимых изменений без привязки к конкретным размерам.

Задание срединной поверхности  $F$ , входящей в систему (1) в виде поверхности переноса [23] позволило исследовать влияние дефектов на конструкции различной формы при одинаковых размерах в плане и стреле подъема. У конструкций в виде пологих оболочек с образующей в форме, находящейся между сферической и цепной функциями влияния дефектов на величину критической нагрузки, проявляется в меньшей степени [21; 24].

Использование изменяющейся формы изменения модуля упругости (рис. 3) позволяет смоделировать дефекты, максимально приближенные к реальным.

Рис. 4 показывает влияние размещения дефекта на значение величины критической нагрузки, как наиболее важный параметр дефекта после значения его величины, влияние которого очевидно. Он позволяет оценить степень снижения несущей способности в зависимости от приближения дефекта к опорной зоне. График же, показанный на рис. 5 показывает влияние формы снижения значения модуля упругости на величину критической нагрузки.

Из графиков видно, что помимо величины уменьшения модуля упругости в месте возникновения дефекта, важно место его нахождения, область повреждения и форма снижения модуля упругости по толщине конструкции. Аналогичные зависимости были обнаружены для значения напряжений, возникающих в конструкции. Уменьшить значение влияния возможных дефектов можно придав на этапе проектирования конструкции форму, близкую к оптимальной или задав рациональные изменение толщины конструкции вдоль ее образующей [24; 25].

### Заключение

Предложенная постановка задачи может быть использована для определения и исследования напряженно-деформированного состояния конструкций в виде пологих оболочек с учетом геометрической нелинейности работы при наличии в них дефектов. Построенные графики зависимости критической нагрузки от различных параметров позволили оценить работу конструкций с учетом изменения различных факторов. Использование изменяющихся характеристик снижения модуля упругости, возникающее вследствие возникновения дефекта, показывает результаты, приближенные к реальным условиям.

### Список литературы / References

1. Nie G., Chan C., Yao J., He X. Asymptotic solution for nonlinear buckling of orthotropic shells on elastic foundation. *AIAA Journal*. 2009;47(7):1772–1783. <https://doi.org/10.2514/1.43311>
2. Ivanov V.N., Krivoschapko S.N. *Analytical methods for calculating shells of non-canonical form*. Moscow: RUDN University Publ.; 2010. (In Russ.)  
Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: монография. М.: РУДН, 2010. 540 с.
3. Sofiyev A.H., Omurtag M.H., Schnack E. The vibration and stability of orthotropic conical shells with non-homogeneous material properties under a hydrostatic pressure. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;319(3–5):963–983.
4. Bahrami S., Mohammad F.Sh., Saadatpour M. Vibration analysis of thin shallow shells using spectral element method. *Applied Mathematical Modelling*. 2017;44:470–480. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.02.001>
5. Eisenberger M., Godoy L.A. Navier type exact analytical solutions for vibrations of thin-walled shallow shells with rectangular planform. *Thin-Walled Structures*. 2020;160:107356. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107356>
6. Pavlysh V.N., Storozhev S.V., Nombre S.B. Study of fuzzy models of stability and resonant vibrations, closed spherical and ellipsoidal shells. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2020;(3):32–42. (In Russ.)  
Павлыш В.Н., Сторожев С.В., Номбре С.Б. Исследование нечетких моделей устойчивости и резонансных колебаний, замкнутых сферических и эллипсоидальных оболочек // Журнал теоретической и прикладной механики. 2020. № 3. С. 32–42.
7. Eisenberger M., Deutsch A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 2019;452:1–12. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.03.024>
8. Sofiyev A.H., Turan F. On the nonlinear vibration of heterogenous orthotropic shallow shells in the framework of the shear deformation shell theory. *Thin-Walled Structures*. 2021;161:107181. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107181>
9. Krivoschapko S.N., Gil-Oulbe M. Geometry & strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids. *International Journal of Soft Computing and Engineering*. 2013;3(3):71–73
10. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):51–62. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>

11. Ivanov V.N., Abbushi N.Y.A. Calculation of the compartments of the epitrochoidal shell by the variation-difference method. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2003;(2):13–18. (In Russ.)  
*Иванов В.Н., Аббуши Н.Ю.А.* Расчет отсеков эпитрохоидальной оболочки вариационно-разностным методом // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2003. № 2. С. 13–18.
12. Quan T.Q., Cuong N.H., Duc N.D. Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells. *Aerospace Science and Technology*. 2019;90:169–180. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.04.037>
13. Huang S., Qiao P. A new semi-analytical method for nonlinear stability analysis of stiffened laminated composite doubly-curved shallow shells. *Composite Structures*. 2020;251:112526. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112526>
14. Trushin S., Zavoronok S. Nonlinear analysis of multilayered composite shells using finite difference energy method. *Space Structures 5: Proceedings of the Fifth International Conference on Space Structures, held at the University of Surrey*. Guildford: Thomas Telford Ltd; 2002. p. 1527–1533.
15. Qin Zh., Shengnan Zh., Xuejia P., Safaei B., Chua F. A unified solution for vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells reinforced by graphene with general boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019;170:105341. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105341>
- 16 Wang J., Li Zh.L., Yu W. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach. *Thin-Walled Structures*. 201;138:430–457. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.02.006>
17. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I., Klyueva N.V. Once again about the constructive safety and survivability of buildings. *Bulletin of the Department of Building Sciences of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences*. 2007;(11):81–86. (In Russ.)  
*Бондаренко В.М., Колчунов В.И., Ключева Н.В.* Еще раз о конструктивной безопасности и живучести зданий // Вестник отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук. 2007. № 11. С. 81–86.
18. Geniev G.A., Pyatikrestovsky K.P. *Issues of longterm dynamic strength of anisotropic structural materials*. Moscow: GUP TsNIISK imeni V.A. Kucherenko Publ.; 2000. (In Russ.)  
*Гениев Г.А., Пятикрестовский К.П.* Вопросы длительной динамической прочности анизотропных конструктивных материалов. М.: ГУП ЦНИИСК имени В.А. Кучеренко, 2000. 38 с.
19. Andreev V., Barmenkova E., Potekhin I. Way of optimization of stress state of elements of concrete structures. *Procedia Engineering*. 2016;153–169:37–44. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.077>
20. Gil-Oulbé M., Farhan I.T. Using FGM for cyclic shell structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(4):14–20.
21. Stupishin L.Y., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E. Variable form forming investigation for flexible shallow shells on circular base. *Asian Journal of Civil Engineering*. 2017;18(2):163–171.
22. Straughan W. Analysis of plates on elastic foundations. Texas: Texas Tech University; 1980.
23. Stupishin L., Kolesnikov A., Tolmacheva T. Analysis of flexible layered shallow shells on elastic foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017;201(1):012018. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/201/1/012018>
24. Stupishin L.Y., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E. Optimal design of flexible shallow shells on elastic foundation. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017;15(3):349–353. <https://doi.org/10.5937/jaes15-14654>
25. Serpik I.N., Tarasova N.V. Optimisation of steel trusses with a choice of multi-stage prestressing conditions. *Magazine of Civil Engineering*. 2020;5(97):9705. <https://doi.org/10.18720/MCE.97.5>





DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533

УДК 624.012

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Численно-аналитический метод в механике железобетона

Вл.И. Колчунов 

Юго-Западный государственный университет, Курск, Российская Федерация

Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, Москва, Российская Федерация

✉ vlik52@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 2 октября 2022 г.

Доработана: 28 ноября 2022 г.

Принята к публикации: 30 ноября 2022 г.

### Для цитирования

Колчунов Вл.И. Численно-аналитический метод в механике железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 525–533. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533>

**Аннотация.** Предложен вариант численно-аналитического метода в нелинейной механике железобетона. Расчетные модели позволяют учитывать ряд важных факторов, таких как дискретные трещины, эффект несплошности бетона и реакций арматуры в трещине. При решении обратной задачи определения ширины раскрытия трещин деформационное воздействие не задается, а моделируется с помощью «расшивки» назначаемой минимально возможной ширины, ее раскрытия при соответствующем нагружении. В расчетной схеме выделяются пары конечных элементов, прилегающих к такой трещине с противоположных специальных сторон, называемые двухэлементной консольной моделью. Пары рассматриваются в двух состояниях: до «расшивки» трещин и после их «расшивки» с учетом деформационного воздействия и эффекта нарушения сплошности бетона. Алгоритм расчета строится на основе комбинаций аналитической модели расчета жесткости сложно напряженных конструкций и интеллекта программного комплекса «ЛИРА-САПР».

**Ключевые слова:** эффект несплошности, железобетон, ширина раскрытия, моделирование, дискретные трещины, поверхность, двухэлементная консоль

## Numerical-analytical method in reinforced concrete mechanics

Vladimir I. Kolchunov 

Southwestern State University, Kursk, Russian Federation

Research Institute of Building Physics of the RAACS, Moscow, Russian Federation

✉ vlik52@mail.ru

### Article history

Received: October 2, 2022

Revised: November 28, 2022


Accepted: November 30, 2022

**Abstract.** A variant of the numerical-analytical method in the nonlinear mechanics of reinforced concrete is proposed. Calculation models make it possible to take into account a number of important factors, such as discrete cracks, the effect of concrete discontinuity, and reinforcement reactions in a crack. When solving

**Колчунов Владимир Иванович,** член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры уникальных зданий и сооружений, Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, Российская Федерация, 127238, Москва, Локомотивный пр-д, д. 21; ORCID: 0000-0001-5075-1134, eLIBRARY SPIN-код: 3990-0345; vlik52@mail.ru

**Vladimir I. Kolchunov,** corresponding member of the RAASN, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Unique Buildings and Structures, Southwest State University, 94 50 let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation; Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 21 Lokomotivnyi Proezd, Moscow, 127238, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5075-1134, eLIBRARY SPIN-code: 3990-0345; vlik52@mail.ru

© Колчунов Вл.И., 2022

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

**For citation**

Kolchunov V.I. Numerical-analytical method in reinforced concrete mechanics. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):525–533. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533>

the inverse problem of determining the width of the crack opening, the deformation effect is not set, but is modeled using the “joining” of the assigned minimum possible width, its opening under the appropriate loading. In the calculation scheme, pairs of finite elements are distinguished, adjacent to such a crack from opposite special sides, called a two-element cantilever model. Pairs are considered in two states: before their jointing of cracks and after their jointing, taking into account the deformation effect and the effect of concrete discontinuity. The calculation algorithm is based on combinations of an analytical model for calculating the stiffness of complexly stressed structures and the intelligence of the “LIRA-SAPR” software package.

**Keywords:** discontinuity effect, reinforced concrete, opening width, modeling, discrete cracks, surface, two-element console

**Введение**

В связи с все более широким внедрением компьютерных технологий в практику проектирования железобетонных конструкций для повышения их безопасности, учет физических процессов и особенностей их силового сопротивления становится все более актуальной проблемой. В практике современного компьютерного моделирования уже имеются ряд вычислительных комплексов, в которых используют конечно-элементные модели железобетона, но еще недостаточно привлекают современные физические модели, в частности расчетные модели сопротивления плосконапряженного и сложно напряженного железобетона<sup>1</sup> [1–17].

В связи с этим в рассматриваемой работе предложен численно-аналитический вариант метода механики железобетона, в котором соединены метод расчетных моделей сопротивления железобетона [1] и метод конечных элементов в интеллекте вычислительного комплекса «ЛИРА-САПР» для решения задач жесткости и эффекта железобетона в виде несплошности бетона и реакции с учетом арматуры в трещине. Раскрыта физическая суть эффекта железобетона, состоящего в дополнительном деформационном воздействии нарушения сплошности бетона и реакции арматуры в трещине. Механизм «стягивания» трещины построен на энергетической основе и заложен в зоне предразрушения, с локализованной здесь деформацией и с образованием новых удельных поверхностей трещины. Определение скорости высвобождения энергии выполнено на основе функционала механики разрушения с использованием множителей Лагранжа и предложенного универсального двухконсольного элемента (ДКЭ). При этом в растянутой области бетона для определения расстояния между трещинами и ширины раскрытия в местных зонах, прилегающих к трещине, учитывается сцепление бетона с арматурой.

**Метод в механике железобетона**

Предлагаемая аналитическая модель наряду с моделированием процесса совместного деформирования арматуры с бетоном может рассматриваться для определения текущей жесткости арматурных реакций – связей, пересекающих дискретную трещину. Продольная податливость  $\lambda_{sm}$  (жесткость) связи  $C_{sm}$  определяется отношением осевым перемещением  $U_{sm}$  и реакцией связи  $N_{sm}$ :

$$\lambda_{sm} = \frac{1}{C_{sm}} = \frac{U_{sm}}{N_{sm}}. \quad (1)$$

Эта реакция зависит от краевых условий, которыми в процессе исследования можно варьировать.

В расчетной модели рассматривается характерный железобетонный элемент – представительный объем бетона, с одиночным арматурным стержнем. Случай центрального армирования одним стержнем при выдергивании его из бетонной матрицы наиболее полно раскрывает закономерность деформирования при выдергивании арматурного стержня из бетонной матрицы. Деформирование такого характерного элемента (рис. 1) является одной из характерных задач строительной механики железобетона при наличии дискретных трещин [3]. Именно к такому случаю точно или приближенно сводятся все виды армирования железобетонных конструкций системой арматурных стержней<sup>2</sup> [1–4; 18–21 и др.].

<sup>1</sup> Верюжский Ю.В., Колчунов Вл.И. Методы механики железобетона: учебное пособие. К.: Книжное издательство НАУ, 2005. 653 с.

<sup>2</sup> Там же.

В расчетной модели характерного элемента левый торец жестко закреплен от любых перемещений, правый торец – свободный. К арматурному стержню прикладывается растягивающее усилие  $N_s$ , вызывающее перемещения стержня и торца элемента  $U_s$  и  $U_b$ , соответственно по всей длине железобетонного стержня (рис. 1).

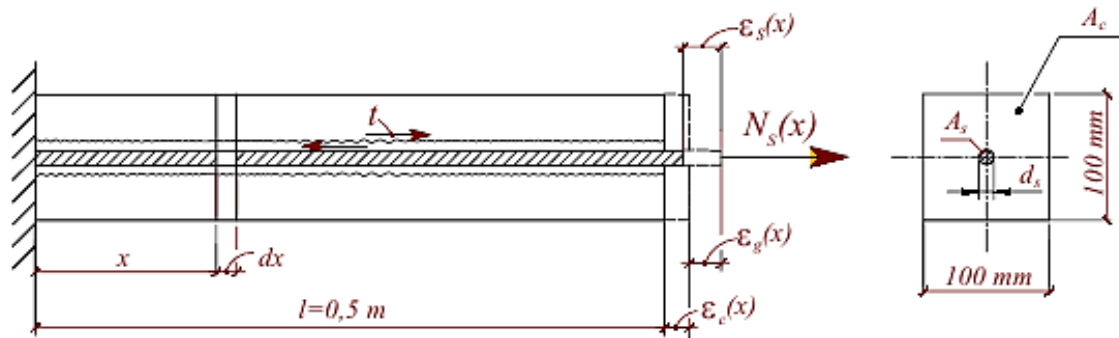


Рис. 1. Расчетная схема элемента характерного железобетонного элемента  
 Figure 1. Calculation scheme of an element of a characteristic reinforced concrete element

Силы сцепления, действующие по контакту арматуры с бетоном характеризуются погонными касательными усилиями  $\tau_{\text{bond}}(x)$ , в бетоне – по направлению действующей нагрузки, а в арматуре, – противоположно направленные.

Закон сцепления между бетоном и арматурой в исследуемой модели – упругопластический. Он описывается с привлечением билинейной диаграммы  $\tau_{\text{bond}} - \epsilon_q(x)$ , учитывающей экспериментальные данные А.Б. Голышева, В.М. Кольнера, М.М. Холмянского, Е.М. Бабича и др.<sup>3</sup> [1–4; 18–21].

$$\tau_{\text{bond}} = k\epsilon_q(x) = 0,4E_{\text{cm}}[\epsilon_s(x) - \epsilon_c(x)] \quad (2)$$

при  $\epsilon_q(x) = [\epsilon_s(x) - \epsilon_c(x)] \leq \epsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}$ ;

$$\tau_{\text{bond}} = 0,0232E_{\text{cm}}[\epsilon_s(x) - \epsilon_c(x)] + 1,866f_{\text{ctm}}, \quad (3)$$

при  $\epsilon_q(x) = [\epsilon_s(x) - \epsilon_c(x)] > \epsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}$ ,

где  $\epsilon_q(x)$  – относительное взаимное смещение бетона и арматуры в сечении  $x$ ; накопление которых на участке между трещинами и составляет ширину раскрытия трещин  $a_{\text{cre}}$ ;  $\epsilon_q^*x$  – граничное относительное смещение бетона и арматуры, соответствующее конечной точке первого участка диаграммы сцепления (рис. 2).

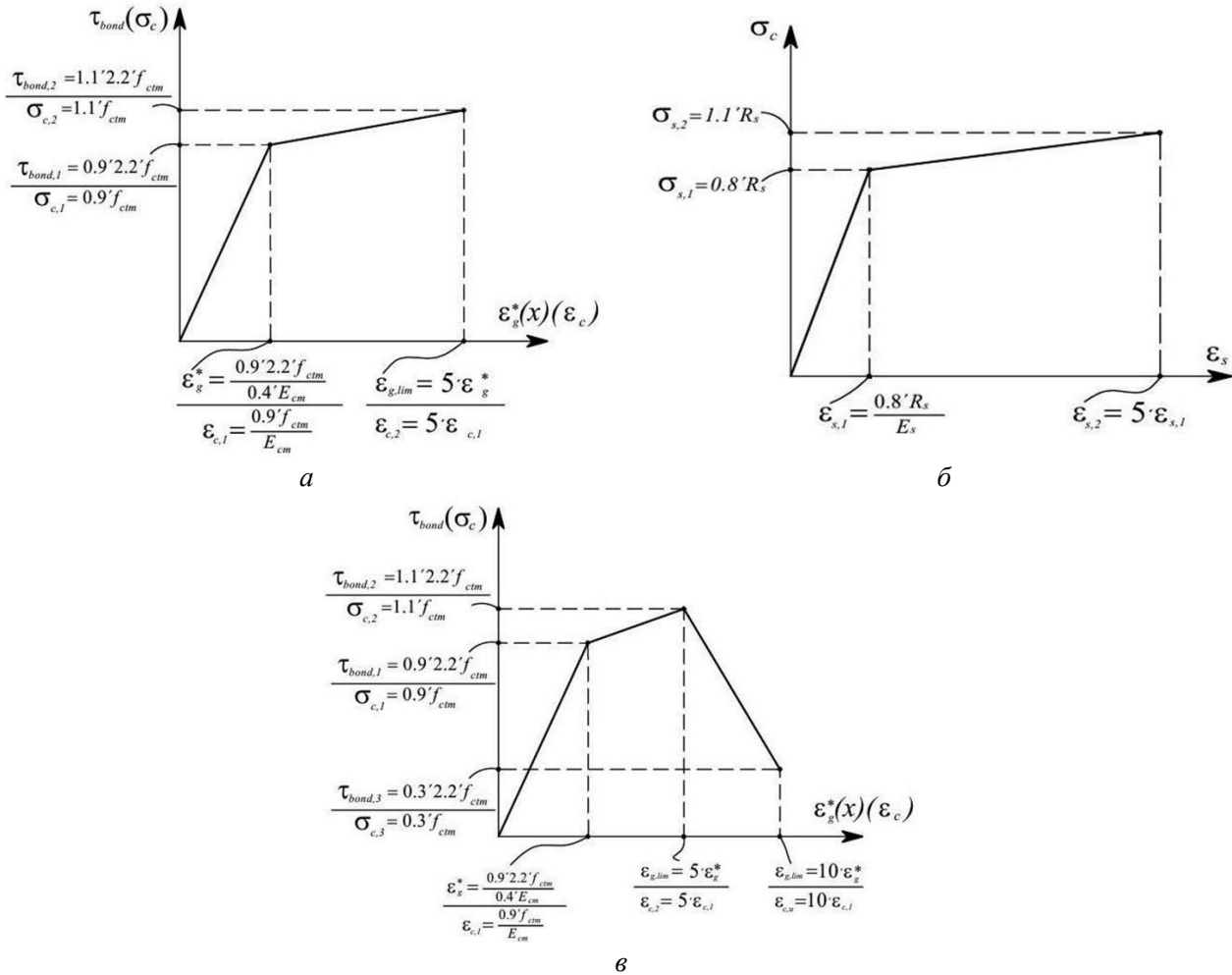
Работа бетона в данной модели также описывается с помощью билинейной диаграммы  $\sigma_c - \epsilon_c$ , представлена на рис. 2. Для бетона используем следующую зависимость, моделирующую упругопластическую работу материала:

$$\epsilon_c(x) = \begin{cases} \frac{N_c(x)}{E_{\text{cm}}A_c}, & \text{если } \frac{N_c(x)}{A_c} \leq 0,9f_{\text{ctm}}, \\ \frac{18N_c(x)}{E_{\text{cm}}A_c} - 15,3 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}, & \text{если } \frac{N_c(x)}{A_c} > f_{\text{ctm}}. \end{cases} \quad (4)$$

<sup>3</sup> Верюжский Ю.В., Колчунов Вл.И. Методы механики железобетона...

В рассматриваемой модели реализованы следующие варианты диаграмм деформирования арматуры, бетона и сцепления арматуры с бетоном путем изменения выражений системы уравнений:

- вариант модели с нелинейным бетоном, нелинейной зависимостью сцепления и линейной работой арматуры (рис. 2 и 3);
- вариант модели с нелинейными бетоном, арматурой и зависимостью сцепления;
- вариант модели с трехлинейными бетоном, зависимостью сцепления и билинейной диаграммой деформирования арматуры.



**Рис. 2.** Диаграммы деформирования, реализованные в аналитической модели:

*a* – билинейная зависимость сцепления и диаграмма деформирования бетона, линейная диаграмма деформирования арматурной стали;

*б* – билинейная зависимость сцепления и диаграммы деформирования бетона и арматурной стали;

*в* – трехлинейная зависимость сцепления, диаграмма деформирования бетона и билинейная работа арматуры

**Figure 2.** Deformation diagrams implemented in the analytical model:

*a* – bilinear bond dependence and concrete deformation diagram, linear diagram of reinforcing steel deformation;

*б* – bilinear dependence of adhesion and deformation diagrams of concrete and reinforcing steel;

*в* – three-line dependence of adhesion, concrete deformation diagram and bilinear work of reinforcement

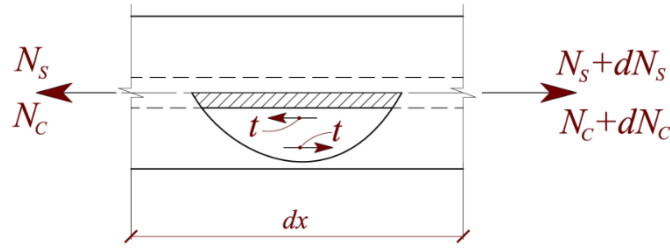
Используя условия равновесия двухкомпонентного железобетонного элемента, получаем следующие два дифференциальных уравнения, связывающие усилия (рис. 3):

– для арматуры:

$$-N_s + N_s + dN_s - tdx = 0; \quad (5)$$

– для усилий сцепления в бетоне:

$$-N_c + N_c + dN_c + tdx = 0. \quad (6)$$



**Рис. 3.** Схема усилий арматуры в бетоне  
**Figure 3.** Scheme of reinforcement forces in concrete

Продифференцировав (5) и (6) по координате  $x$ , получим

$$\frac{dN_s}{dx} = \tau_{\text{bond}} \pi d_s. \quad (7)$$

$$\frac{dN_c}{dx} = -\tau_{\text{bond}} \pi d_s. \quad (8)$$

Приняв для арматуры справедливым закон Гука можно заметить

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s; \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{N_s(x)}{E_s A_s}. \quad (9)$$

Отсюда получим

$$\varepsilon_s(x) = \frac{1}{E_s A_s} N_s(x). \quad (10)$$

Таким образом, решена нелинейная краевая задача, определяемая четырьмя уравнениями, два из которых – дифференциальные первого порядка.

Граничные условия задачи записываются в следующем виде:

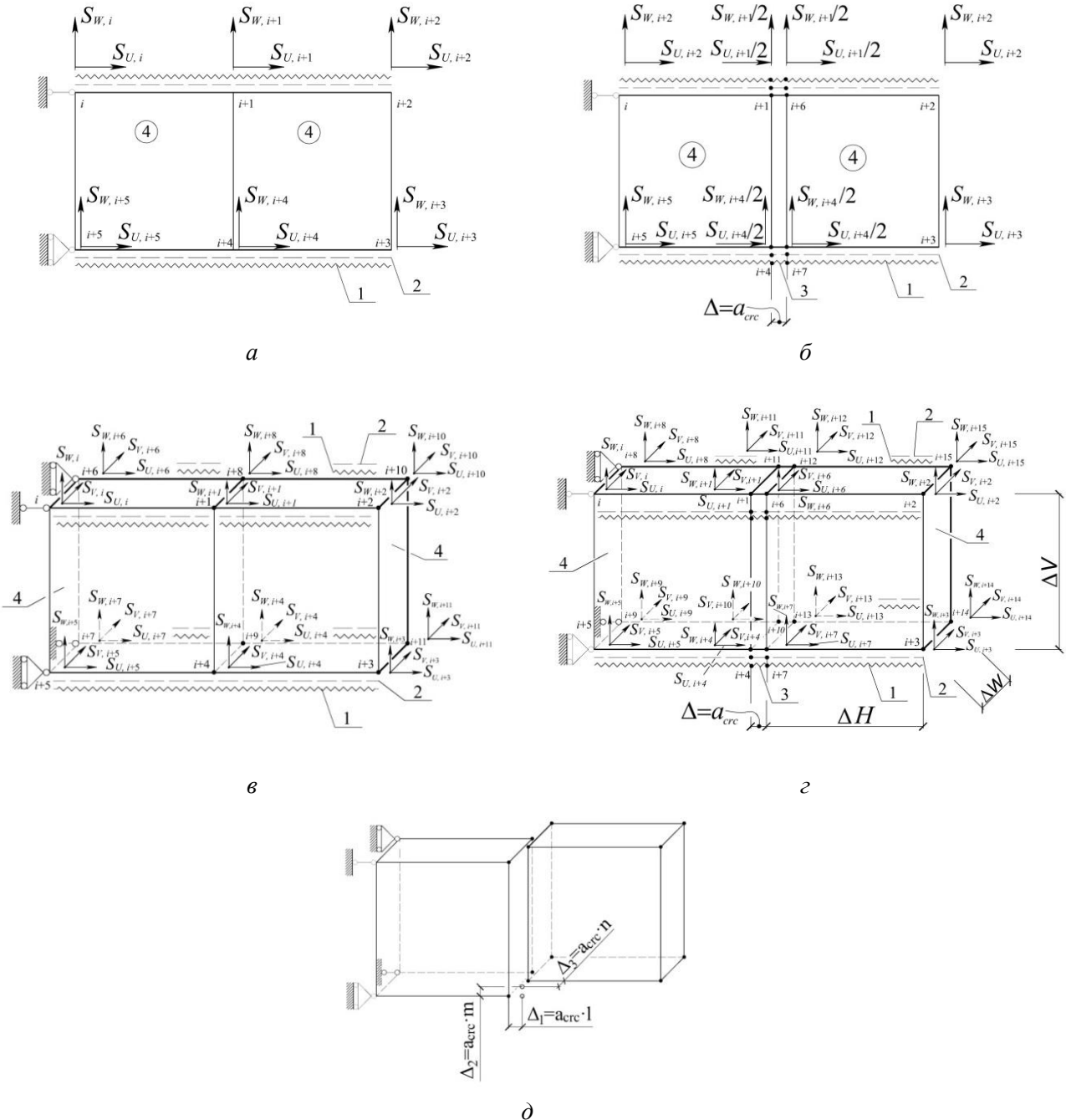
$$N_c(x=1) = 0; \quad N_s(x=1) = C. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s(x) = \frac{1}{E_s A_s} N_s(x); \\ \varepsilon_c(x) = \begin{cases} \frac{N_c(x)}{E_{\text{cm}} A_c}, & \text{если } \frac{N_c(x)}{A_c} \leq 0,9 f_{\text{ctm}}, \\ \frac{18 N_c(x)}{E_{\text{cm}} A_c} - 15,3 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}, & \text{если } \frac{N_c(x)}{A_c} > f_{\text{ctm}}; \end{cases} \\ \frac{dN_s(x)}{dx} = \begin{cases} \pi d_s 0,4 E_{\text{cm}} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)], & \text{если } \varepsilon_q(x) \leq \varepsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}, \\ \pi d_s \{0,0232 E_{\text{cm}} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)] + 1,866 f_{\text{ctm}}\}, & \text{если } \varepsilon_q(x) > \varepsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}; \end{cases} \\ \frac{dN_c(x)}{dx} = \begin{cases} -\pi d_s 0,4 E_{\text{cm}} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)], & \text{если } \varepsilon_q(x) \leq \varepsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}, \\ -\{0,0232 E_{\text{cm}} [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)] + 1,866 f_{\text{ctm}}\}, & \text{если } \varepsilon_q(x) > \varepsilon_q^*(x) = 4,95 \frac{f_{\text{ctm}}}{E_{\text{cm}}}. \end{cases} \end{array} \right. \quad (12)$$

Граничные условия задачи записываются в следующем виде:

$$N_c(x=1) = 0; \quad N_s(x=1) = C. \quad (13)$$

**Специальная двухэлементная консольная модель (ДКМ)** привлекается для двух типов конечных элементов, в первом случае плоские, в соответствии рис. 4, а, б, во втором случае пространственный (рис. 4, в–д).



**Рис. 4.** Двухэлементная плоская и пространственная модель:

а – плоская без «расшивки»; б – плоская после «расшивки»; в – пространственная до «расшивки»; з – пространственная после «расшивки»; д – деформационные воздействия  $\Delta_1 = a_{circ}l$ ,  $\Delta_2 = a_{circ}m$ ,  $\Delta_3 = a_{circ}n$ ; 1 – 255 КЭ до «расшивки»; 2 – 201 КЭ; 3 – 255 КЭ после «расшивки»; 4 – 233 КЭ

**Figure 4.** Two-element planar and spatial model:

а – flat without “embroidery”; б – flat after “stitching”; в – spatial up to “embroidery”; з – spatial after “embroidery”; д – deformation effects  $\Delta_1 = a_{circ}l$ ,  $\Delta_2 = a_{circ}m$ ,  $\Delta_3 = a_{circ}n$ ; 1 – 255 FE before “joining”; 2 – 201 FE; 3 – 255 FE after “spreading”; 4 – 233 FE

## Результаты и обсуждение

По первому варианту жесткость определяется с использованием приема моделирования явных трещин-щелей, с учетом эффекта нарушения сплошности и несовместности деформаций бетона (конечные элементы 232,201). На участках, где возможное закрытие трещин моделируется 255 КЭ. При этом распределенное армирование в элементах заменяется двумя – для плоской модели и четырьмя – для пространственной модели стержневыми конечными элементами в каждом взаимно перпендикулярном направлении соответственно.

Перемещение узлов определяются из расчета двухэлементной расчетной модели с заданными в узлах нагрузками. При этом опорные закрепления двух узлов в плоской модели и четырех узлов – в пространственной модели выполняется чередующимися шарнирно неподвижными и шарнирно подвижными опорами. В целях усреднения результатов расчета чередование необходимо задавать в такой последовательности: слева – справа, спереди – сзади, снизу – сверху. Важным является и то, что наряду с узловыми нагрузками в двухэлементной модели задаются еще и деформационные воздействия, связанные с раскрытием трещины, которая, в свою очередь, как показано в [1; 19; 22], связана с эффектом нарушения сплошности. Задание деформационного воздействия выполняется в каждом узле (кроме опорных) по трем направлениям в соответствии с рисунком 4,  $\delta$ , где  $l$ ,  $m$  и  $n$  – направляющие косинусы главного вектора раскрытия трещины в той или иной ее точке по отношению к осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

Во втором варианте при решении обратной задачи деформационные воздействия не задаются, а моделируются «расшивается» щель между конечными элементами с ее минимальной возможной шириной, с помощью которой производится последовательный итерационный анализ.

Для решения обратной задачи, связанной не задаются деформационные воздействия, а моделируется щель между конечные элементы «расшиваются» с ее минимально возможной шириной. При этом с помощью которой выполняется последовательный итерационный анализ напряженно-деформированного состояния.

Перемещения берегов трещины по трем взаимно перпендикулярным направлениям в результате использования ДКМ определяется соответствующими составляющими ширины раскрытия дискретной трещины между парой КЭ из интеллекта вычислительного комплекса «ЛИРА-САПР».

Другой вариант расчета предполагает выполнение расчетных процедур без изменения заданного порядка и номеров КЭ. В этом варианте, в конечных элементах, прилегающих к неясным трещинам, уменьшается их толщина. Работа каждой пары КЭ рассчитывается дважды с использованием двухэлементной консольной модели: до «расшивки» КЭ и после «расшивки» КЭ, с приложенными узловыми усилиями и деформационными воздействиями от раскрытия трещины и с учетом эффекта нарушения сплошности.

Усредненные усилия в узлах в различных направлениях для ДКМ определяются из физически нелинейного расчета всей конструкции. Для этого используются узловые усилия в соответствующих конечных элементах бетона и арматуры. В местах переходов горизонтальных участков моделируемых трещин к вертикальным и боковым, работа для угловых конечных элементов определяются путем их усреднения. В результате новая толщина конечных элементов, прилегающих к трещине, определяется по формуле

$$b = \frac{W_1}{W_2} b_1, \quad (14)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  – работы двухэлементной модели «до расшивки» и «после и «после расшивки» соответственно.

Предлагаемый алгоритм предусматривает наличие итерационного процесса, регулируемого достигнутой точностью толщины отмеченных конечных элементов, которые прилегают к мнимым трещинам.

Здесь уместно заметить, что жесткость стержневых железобетонных конструкций на участках с наклонными трещинами, в том числе пересекающимися, заменяется эквивалентной жесткостью, вычисляемой по формуле:

$$B(\lambda) = \frac{M^2 \Delta x}{2W_3}, \quad (15)$$

где  $W_3$  – работа сил выделенного участка.

Итерационный процесс заканчивается после достижения заданной погрешности при определении  $B_1(\lambda)$ .

На участках с нормальными трещинами жесткость стержневых железобетонных конструкций определяется с использованием значений изгибающего момента  $M$  и радиуса кривизны  $\rho$  по нормативной методике:

$$B_i(\lambda) = M_i \rho_i. \quad (16)$$

**Алгоритм расчета**, в соответствии с предложенным вариантом численно-аналитического метода расчета жесткости плосконапряженных и пространственных сложно напряженных железобетонных конструкций с привлечением программного комплекса «ЛИРА-САПР», который включает следующие модули:

Модуль 1. Деформационные эффекты – учитывают деформационное воздействие реакции арматуры и бетона.

Модуль 2. «Двухконсольный элемент (ДКЭ)», связанный с нарушением сплошности бетона.

Модуль 3. «Билинейная поверхность», определяется уравнением пучка билинейной поверхности, которая конкретизируется применительно к заданному поперечному сечению.

Модуль 4. «Экстремальные значения функции, многих переменных для железобетона», определяет максимальную ширину раскрытия трещин проекции и расстояния между смежными трещинами в многоуровневом процессе.

Модуль 5. «Податливость», определяет параметры сцепления арматуры с бетоном.

Модуль 6. «Расшивка конечных элементов», при трещинообразовании.

Модуль 7. «ДКМ консоль» – используется для нелинейного расчета всей железобетонной конструкции на заданные силовые и деформационные воздействия. В этом инструменте выделяются *пары конечных элементов*, прилегающих к такой трещине, и привлекается специальная расчетная *двухэлементная консольная модель (ДКМ) сопротивления железобетона*.

### Заключение

На основе варианта анализа и обобщения экспериментально-теоретических исследований с предложением численно-аналитического метода в механике железобетона и на его основе разработаны методика и алгоритм, позволяющие моделировать дискретные трещины и жесткость железобетонных конструкций.

В интеллекте «ЛИРА-САПР» выполнено моделирование раскрытия трещин и с учетом эффекта железобетона в виде нарушения сплошности бетона, реакции арматуры в трещине. При этом в качестве инструментов использованы двухконсольный элемент (ДКЭ) для пространственной трещины, аналитическая модель сцепления арматуры с бетоном, «расшивка» трещин, специальная расчетная двухэлементная консольная модель (ДКМ); «закрытие трещины» после «расшивки».

Предложена методика определения раскрытия трещин, жесткости элементов с трещинами, расстояния между трещинами. Решение выполнено прямым и обратным способом построения формул для ширины раскрытия и закрытия трещин.

### Список литературы / References

1. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Calculation models of force resistance of reinforced concrete. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)

*Бондаренко В.М., Колчунов В.И.* Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: Изд-во АСВ, 2004. 471 с.

2. Bashirov Kh.Z., Kolchunov V.I., Fedorov V.S., Yakovenko I.A. *Reinforced concrete composite structures of buildings and structures*. Moscow: ASV Publ.; 2017. (In Russ.)

*Баширов Х.З., Колчунов В.И., Федоров В.С., Яковенко И.А.* Железобетонные составные конструкции зданий и сооружений. М.: Изд-во АСВ, 2017. 248 с.

3. Veryuzhsky Yu.V., Golyshev A.B., Kolchunov V.I., Klyueva N.V., Lisitsin B.M., Mashkov I.L., Yakovenko I.A. *Reference manual on structural mechanics* (vol. 2). Moscow: ASV Publ.; 2014. (In Russ.)

*Верюжский Ю.В., Гольшев А.Б., Колчунов В.И., Ключева Н.В., Лисицин Б.М., Машков И.Л., Яковенко И.А.* Справочное пособие по строительной механике: в 2 т. Т. 2. М.: Изд-во АСВ, 2014. 432 с.

4. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Konorev A.V. Results of experimental studies of structures of square and box sections made of high-strength concrete when twisting with bending. *Construction and Reconstruction*. 2018;(6):32–43. (In Russ.)



Травуш В.И., Карпенко Н.И., Колчунов В.И., Каприелов С.С., Демьянов А.И., Коноров А.В. Результаты экспериментальных исследований конструкций квадратного и коробчатого сечений из высокопрочного бетона при кручении с изгибом // *Строительство и реконструкция*. 2018. № 6 (80). С. 32–43.

5. Fedorov V.S., Kolchunov V.I., Pokusaev A.A., Naumov N.V. Calculation models of deformation of reinforced concrete constructions with spatial cracks. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2020;(3):6–26. <http://doi.org/10.36622/VSTU.2020.47.3.001>

6. Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Travush V.I. Calculation model of a complex stress reinforced concrete element of a boxed section during torsion with bending. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2021;(3):7–26. <http://doi.org/10.36622/VSTU.2021.51.3.001>

7. Kim C., Kim S., Kim K.-H., Shin D., Haroon M., Lee J.-Y. Torsional Behavior of Reinforced Concrete Beams with High-Strength Steel Bars. *ACI Structural Journal*. 2019;116:251–233. <https://doi.org/10.14359/51718014>

8. Bernardo L. Modeling the full behavior of reinforced concrete flanged beams under torsion. *Applied Sciences*. 2019;9:2730. <https://doi.org/10.3390/app9132730>

9. Lin W. Experimental investigation on composite beams under combined negative bending and torsional moments. *Advances in Structural Engineering*. 2021;24(6):1456–1465. <http://doi.org/10.1177/1369433220981660>

10. Kolchunov V., Demyanov A., Naumov N. Analysis of the “nagel effect” in reinforced concrete structures under torsion with bending. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;953:012052. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/953/1/012052>

11. Kolchunov V., Smirnov B., Naumov N. Physical essence of the “nagel effect” for main reinforcement in an inclined crack of reinforced concrete structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;896:012055. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012055>

12. Kolchunov V.I., Demyanov A.I., Naumov N.V., Mikhaylov M.M. Calculation of the stiffness of reinforced concrete structures under the action of torsion and bending. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1425:012077. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012077>

13. Kolchunov V.I., Demyanov A.I., Naumov N.V. The second stage of the stress-strain state of reinforced concrete constructions under the action of torsion with bending (theory). *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: International Science and Technology Conference “FarEastCon 2019”, Vladivostok, Russky Island*. Vladivostok, Russky Island: Institute of Physics Publishing; 2020. p. 1–9.

14. Kolchunov V.I., Demyanov A.I. The modeling method of discrete cracks and rigidity in reinforced concrete. *Magazine of Civil Engineering*. 2019;(4):60–69. <http://doi.org/10.18720/MCE.88.6>

15. Demyanov A.I., Kolchunov V.I. The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017;15(3):381–386. <http://doi.org/10.5937/jaes15-14663>

16. Kolchunov V.I., Demyanov A.I. The modeling method of discrete cracks in reinforced concrete under the torsion with bending. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;(5):160–173. <http://doi.org/10.18720/MCE.81.16>

17. Kolchunov V.I., Kolchunov V.I., Fedorova N.V. Deformation models of reinforced concrete under special impacts. *Promyshlennoe i Grazhdanskoe Stroitelstvo*. 2018;8:54–60.

18. Karpenko N.I. *General models of reinforced concrete mechanics*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1996. (In Russ.)

Карпенко Н.И. *Общие модели механики железобетона*. М.: Стройиздат, 1996. 410 с.

19. Golyshv A.B., Kolchunov V.I. *Resistance of reinforced concrete*. Kyiv: Osnova Publ.; 2009. (In Russ.)

Гольшев А.Б., Колчунов В.И. *Сопротивление железобетона*. Киев: Основа, 2009. 432 с.

20. Golyshv A.B., Kolchunov V.I., Yakovenko I.A. *Resistance of reinforced concrete structures, buildings and structures erected in difficult engineering and geological conditions*. Kyiv: Talcom Publ.; 2015. (In Russ.)

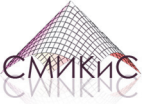
Гольшев А.Б., Колчунов В.И., Яковенко И.А. *Сопротивление железобетонных конструкций, зданий и сооружений, возводимых в сложных инженерно-геологических условиях*: монография. Киев: Талком, 2015. 371 с.

21. Kolchunov V.I., Mikhailov M.M., Demyanov A.I. Static-dynamic deformation of compressed concrete in an indeterminate reinforced concrete frame during bending with torsion. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2020;(4):5–21. (In Russ.)

Колчунов В.И., Михайлов М.М., Демьянов А.И. Статико-динамическое деформирование сжатого бетона в неопределимой железобетонной раме при изгибе с кручением // *Известия вузов. Строительство*. 2020. № 4. С. 5–21.

22. Kolchunov V.I., Yakovenko I.A., Tugay T.V. Method for calculating the stiffness of plane-stressed reinforced concrete structures using the Lira-Pro software package. *Collection of Scientific Papers (Series of Industrial Engineering, Construction)*. 2014;3(2):55–66. (In Russ.)

Колчунов В.И., Яковенко И.А., Тугай Т.В. Методика расчета жесткости плосконапряженных железобетонных конструкций с привлечением программного комплекса «Лира-Про» // *Сборник научных трудов (Серия: Отраслевое машиностроение, строительство)*. Полтава: ПолтНТУ, 2014. Вып. 3 (42). Т. 2. С. 55–66.



DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543

UDC 624.012:691.328.004.12

REVIEW / НАУЧНЫЙ ОБЗОР

## Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures

Evgeny A. Larionov<sup>1</sup>, Vitaly G. Nazarenko<sup>2</sup>, Marina I. Rynkovskaya<sup>1</sup>, Elena A. Grinko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Research Center "Construction", JSC, Moscow, Russian Federation

✉ [grinko-ea@rudn.ru](mailto:grinko-ea@rudn.ru)

### Article history

Received: September 12, 2022

Revised: November 27, 2022

Accepted: November 28, 2022

### For citation

Larionov E.A., Nazarenko V.G., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A. Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):534–543. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543>

**Abstract.** The calculation and prediction of the long-term safety of building structures is associated with the dynamics of the stress state of their composite elements and leads to relaxation problems for assessing the redistribution of stresses between the components that make up the structural element. In this study, reinforced concrete elements and the redistribution of stress from concrete to reinforcement are considered. To solve the corresponding relaxation problem an approach based on the concept of the strength structure of materials is proposed, which considers them as a union of their fractions (layers, fibers) with statistically distributed strengths. The loss of the ability of force resistance caused by loading by part of the fractions of the element entails a redistribution of stresses to its entire fractions. As a result of this, a nonlinear dependence of deformations on the design stresses arises, calculated under the assumption of equal strength of all fractions. For a material isotropic in strength, the relaxation problem is reduced to solving a linear integral equation conjugated with its linear rheological equation. The linear integral equation relatively structural stresses is reduced. After solving it, the desired stress is determined as the root of the algebraic equation connecting the structural and design stresses. The proposed approach significantly simplifies the obtaining of necessary for the long-term safety prediction of structures stress estimates in the components of structural elements.

**Keywords:** stress relaxation, creep of constructions, deformation of constructions elements, long-term safety of constructions

**Evgeny A. Larionov**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-4906-5919, Scopus Author ID: 57195228824, AuthorID: 365207; [evgenylarionov39@yandex.ru](mailto:evgenylarionov39@yandex.ru)

**Vitaly G. Nazarenko**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Research Center "Construction", JSC, 6 2-ya Institutskaya St, Moscow, 109428, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9035-9214, AuthorID: 392022; [kilativnazarenko@yandex.ru](mailto:kilativnazarenko@yandex.ru)

**Marina I. Rynkovskaya**, PhD, Docent, Director of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-2206-2563, eLIBRARY SPIN-code: 9184-7432; [rynkovskaya-mi@rudn.ru](mailto:rynkovskaya-mi@rudn.ru)

**Elena A. Grinko**, Head of the Materials Resistance Laboratory, Department of Mechanical Engineering Technologies, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0459-8359, Scopus Author ID: 57251451500, eLIBRARY SPIN-code: 5360-7164; [grinko-ea@rudn.ru](mailto:grinko-ea@rudn.ru)

© Larionov E.A., Nazarenko V.G., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A., 2022


This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Релаксация напряжений в элементах железобетонных конструкций

Е.А. Ларионов<sup>1</sup> , В.Г. Назаренко<sup>2</sup> , М.И. Рынковская<sup>1</sup> , Е.А. Гринько<sup>1</sup>  

<sup>1</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>Научно-исследовательский центр «Строительство», Москва, Российская Федерация

 grinko-ea@rudn.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 12 сентября 2022 г.

Доработана: 27 ноября 2022 г.

Принята к публикации: 28 ноября 2022 г.

### Для цитирования

Ларионов Е.А., Назаренко В.Г., Рынковская М.И., Гринько Е.А. Релаксация напряжений в элементах железобетонных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 534–543. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543>

**Аннотация.** Расчет и прогноз длительной безопасности строительных конструкций сопряжен с динамикой напряженного состояния их композитных элементов и приводит к задачам релаксации для оценки перераспределения напряжений между составляющими конструктивный элемент компонентами. В исследовании рассматриваются железобетонные элементы и перераспределение напряжения с бетона на арматуру. Для решения соответствующей релаксационной задачи предлагается подход, основанный на концепции прочностной структуры материалов, рассматривающей их как объединение своих фракций (слоев, волокон) со статистически распределенными прочностями. Порождаемая нагрузением потеря способности силового сопротивления частью фракций элемента влечет перераспределение напряжений на его целые фракции. В результате возникает нелинейная зависимость деформаций от расчетных напряжений, рассчитанных в предположении равнопрочности всех фракций. Для изотропного по прочности материала релаксационная задача сводится к решению линейного интегрального уравнения, сопряженного с его линейным реологическим уравнением. Выводится линейное интегральное уравнение относительно так называемого структурного напряжения способной к силовому сопротивлению частью элемента. После его решения искомое напряжение определяется как корень алгебраического уравнения, связывающего структурные и расчетные напряжения. Предлагаемый подход существенно упрощает получение необходимых в прогнозе длительной безопасности сооружений оценок напряжений в компонентах конструктивных элементов.

**Ключевые слова:** релаксация напряжений, ползучесть бетона, деформация элементов конструкций, длительная безопасность конструкций

## Introduction

In a global sense, the relaxation phenomenon represents the process of thermodynamic equilibrium establishing in a system consisting of a large number of particles. In structural mechanics, relaxation is understood as a reduction in stresses when the initial deformation is fixed by the bonds. From the point of view of physical chemistry, stress reduction occurs due to intermolecular displacements and reorientation of the intramolecular structure, and therefore the similarity of relaxation and creep phenomena is manifested. In this paper on the basis of the accepted concept of the strength structure of materials the modification of known in the linear creep theory L. Boltzmann's superposition principle [1] is obtained allowing its applicability under nonlinear dependence of deformations on design stresses.

Relaxation problems are associated with the phenomenon of creep – an increase in deformation  $\varepsilon(\tau)$  generated by stress  $\sigma(t_0)$  when  $\tau > t_0$ . Stresses  $\sigma(\tau)$  decrease over time with constant deformation  $\varepsilon(t_0)$  and this phenomenon is called stress relaxation. The phenomenon of relaxation is a consequence of

*Ларионов Евгений Алексеевич*, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-4906-5919, Scopus Author ID: 57195228824, AuthorID: 365207; [evgenylarionov39@yandex.ru](mailto:evgenylarionov39@yandex.ru)

*Назаренко Виталий Григорьевич*, доктор технических наук, профессор, Научно-исследовательский центр «Строительство», Российская Федерация, 109428, Москва, 2-я Институтская ул., д. 6; ORCID: 0000-0002-9035-9214, AuthorID: 392022; [kilativnazarenko@yandex.ru](mailto:kilativnazarenko@yandex.ru)

*Рынковская Марина Игоревна*, кандидат технических наук, доцент, директор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0003-2206-2563, eLIBRARY SPIN-код: 9184-7432; [gynkovskaaya-mi@rudn.ru](mailto:gynkovskaaya-mi@rudn.ru)

*Гринько Елена Алексеевна*, заведующая лабораторией сопротивления материалов, кафедра машиностроительных технологий, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-0459-8359, Scopus Author ID: 57251451500, eLIBRARY SPIN-код: 5360-7164; [grinko-ea@rudn.ru](mailto:grinko-ea@rudn.ru)

the development of creep deformation in the material  $\varepsilon_{\text{n}}(\tau, t_0)$ , because with a constant total deformation  $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_{\text{m}}(t) + \varepsilon_{\text{n}}(t, t_0)$  due to an increase in deformation  $\varepsilon_{\text{n}}(t, t_0)$ , the portion  $\varepsilon_{\text{m}}(t)$  of instantaneous deformation decreases and the stress  $\sigma(t) = E(t)\varepsilon_{\text{m}}(t)$  decreases. This means that creep and relaxation phenomena take place simultaneously.

Continuous redistribution of stresses between concrete and reinforcement is essential for their current stress-strain state. Stress relaxation in the concrete component of the structural element entails an increase in the stress in the reinforcement and its significant excess over the calculated one can lead to breaking of the reinforcement and to serious consequences in critical structures (in reinforced concrete reactor shells, water ducts).

The standard method for solving the considered problems is the preliminary determination of the relaxation kernel by a given creep kernel. However, the solution of the corresponding integral equation is expressed in a very slowly converging series [2]. The application of the Laplace transform and the Poincaré small parameter method is busy and time-consuming [3].

The solution of relaxation problems is greatly simplified when the corresponding integral equations of state are reduced to their differential forms. In this paper, the linear integral equation of state of uniaxially loaded concrete is reduced to a simple linear differential equation of the first order. This takes into account the presence of a single aging function that determines the evolution of the elastic modulus and the creep measure.

*Remark 1.* The key point of this method is the linearity of the integral equation of state. In the nonlinear statement, the transformation to a linear differential equation becomes possible after the derivation of the linear relative to structural stress (based on a modification of L. Boltzmann's principle) statement equation of concrete.

### Rheological equations of mechanical state

Creep deformation under simple loading  $\sigma(\tau)$ ,

$$\varepsilon_{\text{n}}(t, \tau) = C^*(t, \tau)\sigma(\tau). \quad (1)$$

Take the measure of creep of concrete in the form

$$C^*(t, \tau) = C(\infty, 28)\theta(\tau)f(t - \tau), \quad (2)$$

where  $\theta(\tau)$  – the aging function;  $f(t - \tau)$  – the creep strain accumulation function;  $\lim_{t \rightarrow \infty} C^*(t, \tau) = C^*(\infty, \tau)$ .

Based on experimental data [4], the following structure of the aging function was established in [5]:

$$\theta(\tau) = \frac{R(28)}{R(\tau)} = \frac{E(28)}{E(\tau)} = \frac{C^*(\infty, \tau)}{C(\infty, 28)}. \quad (3)$$

Denoting  $C^*(\infty, 28)f(t - \tau) = C_0^*f(t - \tau)$  и  $\theta(\tau)\sigma(\tau) = \widehat{\sigma}(\tau)$ , according to (2) and (3) we have

$$C^*(t, \tau) = \theta(\tau)C_0^*(t, \tau); \quad \widehat{\sigma}(\tau) = R(28)\eta(\tau), \quad (4)$$

where  $\eta(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}$  – the stress level;  $R(28)$  – the strength of concrete at the age of 28 days.

Corresponding to the increment of the stress level  $\Delta\eta(\tau_i) = \frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{R(28)}$  at the moment  $\tau_i$  a partial increment of creep deformations at the moment  $t$  is

$$\Delta\varepsilon_{\text{n}}(t, \tau_i) = C^*(t, \tau_i)R(28)\Delta\eta(\tau_i) = C_0^*(t, \tau_i)\Delta\widehat{\sigma}(\tau_i). \quad (5)$$

Since each increment  $\Delta\varepsilon_{\text{n}}(t, \tau_i)$  depends only on the magnitude of the level and  $t - \tau_i$ , then the increment

$$\Delta\widehat{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\widehat{\sigma}(\tau_i) \quad (6)$$

responds to creep deformation increment

$$\Delta\varepsilon_{\text{n}}(t, t_0) = \sum_{i=1}^n C_0^*(t, \tau_i)\Delta\widehat{\sigma}(\tau_i). \quad (7)$$

By passing in (7) to the limit and integrating in parts we have

$$\Delta \varepsilon_{\Pi}(t, t_0) = C_0^*(t, t) \hat{\sigma}(t) - C_0^*(t, t_0) \hat{\sigma}(t_0) - \int_{t_0}^t \hat{\sigma}(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (8)$$

The increment of the total deformation  $\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_M(t) - \varepsilon_M(t_0) + \Delta \varepsilon_{\Pi}(t, t_0)$  and, adding to  $\Delta \varepsilon_{\Pi}(t, t_0)$  the deformation, caused by stress  $\sigma(t_0)$ , we obtain a linear rheological equation of concrete under uniaxial loading

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + C_0^*(t, t) \sigma(t) - \int_{t_0}^t \theta(\tau) \sigma(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (9)$$

When  $\theta(\tau) = 1$  the parameters  $E(\tau)$  and  $C^*(t, \tau)$  are time-invariant for ageless concrete

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + C_0^*(t, t) \sigma(t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (10)$$

*Remark 1.* Boltzmann's superposition principle is formulated for ageless concrete (ideal) material. When taking into account aging, the superposition of partial creep deformations is realized by partial increments of the reduced stress  $\hat{\sigma}(\tau) = \theta(\tau) \sigma(\tau)$ , corresponding to increments of the level  $\eta(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}$  of stresses  $\sigma(\tau)$ .

The creep deformation accumulation function is selected in the form

$$f(t - \tau) = [1 - k e^{-\gamma(t-\tau)}]; \quad 0 < k \leq 1$$

and thus [6]:

$$C^*(t, \tau) = C(\infty, 28) \theta(\tau) [1 - k e^{-\gamma(t-\tau)}]. \quad (11)$$

*Remark 2.* When in (11) we have  $k < 1$ , a summand  $C^*(t, t) \sigma(t) \neq 0$  and it is called short-term creep. Taking measure (11) with  $k < 1$ , some authors [7] assume the inertia-free nature of the creep phenomenon, while other authors [8] (since the creep measure determines precisely delayed deformations), assuming the inertia in time of this phenomenon, take the creep measure (11) with  $k = 1$

$$C^*(t, \tau) = C(\infty, 28) \theta(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]. \quad (12)$$

According to (9) and (12) we have  $C^*(t, t) = 0$

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \theta(\tau) \sigma(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (13)$$

The measure (12) is taken in this paper.

Since with measure (12) we have  $-\theta(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial C^*(t, \tau)}{\partial t}$ , then according to (13)

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C^*(t, \tau)}{\partial t} d\tau. \quad (14)$$

The value of

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (15)$$

in building codes it is taken as the general compliant of instantaneous and delayed deformations and under simple loading  $\sigma(\tau)$

$$\varepsilon(t, \tau) = \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} + C(t, \tau) \sigma(\tau). \quad (16)$$

The imposition of deformations is carried out with general compliance

$$\delta^*(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + C^*(t, \tau) \tag{17}$$

and when loading  $\sigma(\tau)$ , we assume

$$\varepsilon(t, \tau) = \frac{\sigma(\tau)}{E(t)} + C^*(t, \tau)\sigma(\tau). \tag{18}$$

According to (16) and (18)

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) &= \frac{1}{E(t)} + C^*(t, \tau), \\ C^*(t, \tau) &= C(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Equality (19) means, that with compliance  $\delta(t, \tau)$  the measure  $C^*(t, \tau)$  of creep deformations decreases by an amount

$$\left[ \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)} \right].$$

In the works [7–9], assuming  $E(\tau) = E(t)$ ;  $t_0 \leq \tau \leq t$  the rheological equation is derived by applying partial increments of creep deformation

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{20}$$

equivalent according to (19) to equation

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} d\tau - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \tag{21}$$

*Remark 3.* Equations (20) and (21) describe the same mechanical state of concrete, which was not noticed by the authors of [10]. This led to the statement [10] that the second component in (21) is unnecessary and to an incorrect representation of the superposition principle “as a fundamental error in the theory of creep” [11].

The force increasing by a normal cross-section  $N(\tau)$  entails the destruction of a part of the fractions, reducing the cross-sectional area  $A$  to  $A(\tau)$ , formed by whole fractions at the moment  $\tau$ . The value associated with structural damage

$$\sigma_c(\tau) = \frac{N(\tau)}{A(\tau)} \tag{22}$$

is called the structural, and the value of

$$\sigma(\tau) = \frac{N(\tau)}{A} \tag{23}$$

is called the calculated normal voltage in the structural element. According to (22) and (23)

$$\sigma_c(\tau) = \frac{A}{A(\tau)} \sigma(\tau) = S^0(\tau)\sigma(\tau), \tag{24}$$

where the function  $S^0(\tau) = \frac{A}{A(\tau)}$  describes the process of destruction of fractions, accompanied by a redistribution of loading  $N(\tau)$  on the area  $A(\tau)$ , because only fractions that are entire at this moment exert force resistance. In contrast to the linear formulation, which means the equal strength of all fractions of the element,

the stepwise increment of stress  $\Delta\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma(\tau_i)$  does not correspond to mutually independent increments of creep deformations – the action  $\Delta\sigma(\tau_i)$  at the moment  $\tau = \tau_i$  is enhanced by the action of  $\Delta\sigma(\tau_j)$ , where  $j > i$  [12]. Note also that the area  $A(\tau_i)$  is determined by all increments  $\Delta\sigma(\tau_k)$ ;  $k < i$ .

This circumstance leads to the need to modify the principle of L. Boltzmann's superposition. Since the cause of the dependence between  $\Delta\varepsilon_n(t, \tau_i)$  is the equal strength of the fractions, we will (mentally) select in the concrete component  $V$  of the structural element its part  $V_t$ , consisting of entire fractions in the segment  $[t_0, t]$ . Just for this part the rheological equation describes the stress-strain state (SSS) taking into account the rheology at  $[t_0, t]$ .

Since the (SSS) of the part  $V_t$  at the current moment  $\tau \in [t_0, t]$  coincides with the (SSS) in the part  $V_\tau$ , consisting of entire fractions at the moment  $\tau$ , the stress in  $V_t$  is a structural stress  $\sigma_c(\tau)$ . Strength balance of the fractions  $V_t$  to  $\tau = t$  entails mutual independence of increments

$$\Delta\varepsilon_n(t, \tau_i) = C^*(t, \tau_i)\Delta\sigma_c(\tau_i)$$

and stress  $\Delta\sigma_c(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_c(\tau_i)$  generates deformation

$$\Delta\varepsilon_n(t, t_0) = \sum_{i=1}^n C^*(t, \tau_i)\Delta\sigma_c(\tau_i) = \sum_{i=1}^n C_0^*(t, \tau_i)\theta(\tau_i)\Delta\sigma_c(\tau_i). \quad (25)$$

The relation (25) allows (by repeating the above constructions) the derivation of the rheological equation of the mechanical state in a nonlinear formulation [13; 14]

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \theta(\tau)\sigma_c(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (26)$$

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{S^0(\tau)\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \theta(\tau)S^0(\tau)\sigma_c(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (27)$$

*Remark 4.* Relation (25) represents the principle of superposition of creep deformations for an aging material (in the concept of its strength structure) in a nonlinear formulation.

In [9], assuming the interdependence of partial increments, the equation is derived

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{S_M \left[ \frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]}{E(t)} - \int_{t_0}^t S_n \left[ \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \right] \frac{\partial C^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (28)$$

In (28)  $S_M \left[ \frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]$  and  $S_n \left[ \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \right]$  – nonlinear functions of instantaneous deformations and creep deformations.

*Remark 5.* In the physical aspect, both types of deformations are generated by a single force factor – structural stress  $\sigma_c(\tau)$  – and therefore  $S_M[\eta(t)] = \sigma_c(t)$  and  $S_n[\eta(\tau)] = \sigma_c(\tau)$ . According to  $\sigma_c(\tau) = S^0(\tau)\sigma(\tau)$  the unified stress function is represented as  $S[\sigma(\tau)] = S^0(\tau)\sigma(\tau)$ .

The nonlinear function  $S^0(\tau)$  in applications is given by the equation [15]

$$S^0(\tau) = 1 + V \left[ \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \right]^m, \quad (29)$$

where  $V$  and  $m$  are empirical parameters and for concrete  $m = 4$  is usually assumed.

Equation (9) does not take into account the nonlinearity of the diagram  $\sigma - \varepsilon$  observed in experiments and, as A.A. Gvozdev first noted, is not suitable for the theory of reinforced concrete. Assuming the dependence of the instantaneous deformation on the linear one  $\sigma(\tau)$ , and the creep deformation as the nonlinear one, he considered the surge in the initial section  $\sigma - \varepsilon$  as a consequence of the rapidly flowing creep. According to A.A. Gvozdev [16], creep is two-component and deformation  $\varepsilon_n(t, t_0)$  consists of the so-called partially reversible deformation of the 2nd kind and irreversible deformation of the 1st kind generated by force damage. Equation of two-component creep theory under uniaxial loading [3]

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_0^{\max \sigma} f(\sigma) F[T(\sigma, t)] \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\sigma, \quad (30)$$

where  $f(\sigma)$  is a nonlinear stress function;  $F[T(\sigma, t)]$  – a function of the total duration  $T(\sigma, t)$  of the stress to the moment  $t$ .

Denoting  $A_d(\tau)$  as a part of the area  $A$ , corresponding to the fractions destroyed at the moment  $\tau$

$$A = A(\tau) + A_d(\tau); \quad S^0(\tau) = 1 + \frac{A_d(\tau)}{A(\tau)}; \quad \alpha(\tau) = \frac{A_d(\tau)}{A(\tau)}; \quad S^0(\tau) = 1 + \alpha(\tau);$$

$$\sigma_c(\tau) = \sigma(\tau) + \alpha(\tau) \sigma(\tau). \tag{31}$$

The representation (31) of the structural stress corresponds to the equations

$$\varepsilon_M(t) = \varepsilon_{ML}(t) + \varepsilon_{MH}(t); \quad \varepsilon_{\Pi}(t, t_0) = \varepsilon_{\Pi L}(t, t_0) + \varepsilon_{\Pi H}(t, t_0), \tag{32}$$

meaning that instantaneous and delayed deformations are composed of their linear and nonlinear parts. According to (30) and (32), the last summand on the right side of the equality is the sum  $\varepsilon_{MH}(t) + \varepsilon_{\Pi H}(t, t_0)$  and is represented in [3] as a creep deformation of the 1st kind.

*Remark 6.* The incorrectness of considering the nonlinear part of instantaneous deformation as creep deformation is also noted in [10].

In [17], the creep equation of concrete is given on the basis of nonlinear Eurocode diagrams

$$\varepsilon(t, t_0) = f_2[\sigma(t)] - \int_{t_0}^t f_1[\varepsilon_M(\tau)] \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{33}$$

where  $\sigma(t) = f_1[\varepsilon_M(t)]$  and  $\varepsilon_M(\tau) = f_2[\sigma(\tau)]$  represent the direct and inverse function of a nonlinear diagram  $\sigma - \varepsilon_M$ .

According to (33), in the equation of state, along with the nonlinear dependence of instantaneous deformations on  $\sigma(\tau)$ , creep is represented as linearly dependent on  $\sigma(\tau)$ .

### Relaxation problems

#### *Stress relaxation in concrete under uniaxial loading*

To determine the design and structural stresses for a given deformation according to equations (9) and (26), we have the following integral equations

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t, t_0) + E(t) \int_{t_0}^t \theta(\tau)\sigma(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{34}$$

$$\sigma_c(t) = E(t)\varepsilon(t, t_0) + E(t) \int_{t_0}^t \theta(\tau)\sigma_c(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \tag{35}$$

Both equations (9) and (26) and equations (34) and (35) have the same structure with the same parameters  $E(\tau)$  and  $C_0^*(t, \tau)$  in linear and nonlinear formulations. Within the framework of the concept we have adopted the nonlinearity is determined by the structure of the material and force loading, and parameters that do not depend on these factors –  $E(\tau)$  and  $C_0^*(t, \tau)$  are determined by physico-chemical processes.

The scheme of definition  $\sigma(\tau)$  and  $\sigma_c(\tau)$  is the same. Consider equation (34). Because  $\theta(\tau) = \frac{E(28)}{E(\tau)}$  and  $\sigma(\tau) = E(\tau)\varepsilon_y(\tau)$ ;  $\varepsilon_y(\tau)$  – elastic deformation, then according to (9) with measure (12), we obtain the equality

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_y(t) + \gamma\varphi e^{-\gamma t} \int_{t_0}^t \varepsilon_y(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau; \quad \varphi = E(28)C(\infty, 28), \tag{36}$$

that represent a linear integral equation with respect to elastic deformation  $\varepsilon_y(\tau)$ .

Equation (36) is reduced to the differential form [18]: multiply both parts (36) by  $e^{\gamma t}$

$$e^{\gamma t} \varepsilon(t) = \varepsilon^{\gamma t} \varepsilon_y(t) + \gamma\varphi \int_{t_0}^t \varepsilon_y(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau. \tag{37}$$



We differentiate all summands (37) by  $t$ , taking into account the known equality

$$\frac{d}{d(t)} \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau = f(t),$$

$$\varepsilon^{\gamma t} [\dot{\varepsilon}(t) + \gamma\varepsilon(t)] = e^{\gamma t} [\dot{\varepsilon}_y(t) + \gamma\varepsilon_y(t)] + \gamma\varphi e^{\gamma t} \varepsilon_y(t). \quad (38)$$

Now, multiplying all the summands by  $e^{-\gamma t}$ , we obtain a linear differential equation of the first order with respect to  $\varepsilon_y(t)$

$$\dot{\varepsilon}_y(t) + b\varepsilon_y(t) = \dot{\varepsilon}(t) + \gamma\varepsilon(t); \quad b = \gamma(1 + \varphi). \quad (39)$$

The function  $\varepsilon_{y0}(t) = Ce^{-bt}$  represents the general solution of a homogeneous equation  $\dot{\varepsilon}(t) + b\varepsilon_y(t) = 0$ . We look for the general solution of equation (39) in the form  $\varepsilon_y(t) = C(t)e^{-bt}$  and, substituting it into (39), we get

$$\dot{C}(t)e^{-bt} - bC(t)e^{-bt} + bCe^{-bt} = \varphi_0(t); \quad \varphi_0(t) = \dot{\varepsilon}(t) + \gamma\varepsilon(t);$$

$$\dot{C}(t)e^{-bt} = \varphi_0(t) \quad \text{и} \quad C(t) = \int e^{bt} \varphi_0(t) dt = \Phi_0(t) + C.$$

So, the general solution of equation (39) is

$$\varepsilon_y(t) = Ce^{-bt} + e^{-bt}\Phi_0(t) = Ce^{-bt} + \Phi(t); \quad \Phi(t) = e^{-bt}\Phi_0(t). \quad (40)$$

Since according to (37) we have  $\varepsilon_y(t_0) = \varepsilon(t_0)$  and  $\varepsilon_y(t_0) = \Phi(t_0) + Ce^{-bt_0}$ , then

$$C = [\varepsilon(t_0) - \Phi(t_0)]e^{bt_0}.$$

Thus,

$$\varepsilon_y(t) = [\varepsilon(t_0 - \Phi(t_0))]e^{-b(t-t_0)} + \Phi(t), \quad (41)$$

$$\sigma(t) = E(t)[\varepsilon(t_0 - \Phi(t_0))]e^{-b(t-t_0)} + E(t)\Phi(t). \quad (42)$$

In the nonlinear formulation, equation (26) is reduced to the form (39) using the above transformations and the structural stress is determined as

$$\sigma_c^*(t) = E(t)[\varepsilon(t_0 - \Phi(t_0))]e^{-b(t-t_0)} + E(t)\Phi(t). \quad (43)$$

According to the stress found by this formula  $\sigma_c^*(t)$  the required calculated stress  $\sigma^*(t)$  is determined by the solution of the algebraic equation

$$S^0[\sigma(t)]\sigma(t) = \sigma_c^*(t). \quad (44)$$

When the nonlinear function  $S^0[\sigma(t)]$  is taken as (29) for  $m = 4$ , according to (44) we have the equation

$$V \left[ \frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]^5 + \sigma(t) = \sigma_c^*(t) \quad (45)$$

and the largest of the real roots is taken as an estimate of the calculated stress.

In [18], model cases of forced deformations  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  and  $\varepsilon(t) = v(t - t_0)$  are considered;  $v$  is the constant rate of deformation.

In work [19–20] linear integral equations (34) and (35) are solved by iteration method.

*Remark 1.* In (17), equation (33) is reduced to a first-order differential equation. In this case, the function  $f_1[\varepsilon_M(\tau)] = \sigma(t)$  according to the nonlinear Eurocode diagrams is taken as

$$\sigma(t) = \frac{a(t)\varepsilon_M(t) + \delta(t)\varepsilon_M^2(t)}{1 + g(t)\varepsilon_M(t)},$$

where functions  $a(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $g(t)$  are selected empirically.

As a result, in contrast to equation (39), a rather complex nonlinear equation is obtained [17], and the question of its solution arises.

### ***Stress relaxation in bent reinforced concrete elements***

Let's consider stress relaxation in a single reinforced concrete beam bent by a moment  $M(t)$ . At a distance  $h_a$  from the neutral axis  $Ox$

$$\sigma_a(t) = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{M(t)h_a}{J_b} - \sigma_b(t, h_a) \right]. \tag{46}$$

Here  $\mu = \frac{A_a}{A_b}$ ,  $A_a$  and  $A_b$  are the areas of normal sections of the reinforcement and the concrete component of the beam;  $n_0 = \frac{J}{J_b}$ , where  $J$  and  $J_b$  are the moments of inertia of the concrete part of the beam and the reduced normal section relative to the  $Ox$  axis;  $\sigma_b(t, h_a)$  is stress in the concrete layer in contact with the reinforcement.

At the level  $h_a$  according to the condition of compatibility of deformations, we obtain the equation

$$\sigma_b(t, h_a) = \widehat{\sigma}_b(t, h_a) + \lambda(t) \int_{t_0}^t \theta(\tau) \sigma_b(\tau, h_a) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{47}$$

where  $\widehat{\sigma}_b(t, h_a) = \frac{M(t)h_a}{J_b(\mu n_0 m(t) + 1)}$  – instant elastic stress;  $\lambda(t) = \frac{M(t)E_a(t)}{\mu n_0 m(t) + 1}$ ;  $m(t) = \frac{E_a(t)}{E_b(t)}$ ;  $E_a(t)$  – modulus of elastic deformations of reinforcement;  $E_b(t)$  – modulus of elastic deformations of concrete.

For a given elastic stress  $\widehat{\sigma}_b(t, h_a)$  the integral equation (47) is solved by reducing to a differential equation of the form (39) relatively to  $\varepsilon_y(\tau)$  or by simple iterations with zero approximation  $\sigma_{b0}(t, h_a) = \widehat{\sigma}_b(t, h_a)$ .

At a constant bending moment  $M$  we have the equation

$$\widehat{\sigma}_b(t, h_a) + (\lambda + \gamma)\sigma_b(t, h_a) = \gamma\widehat{\sigma}_b(t, h_a). \tag{48}$$

According to the solution of equation (48) with an initial condition  $\sigma_{b0}(t, h_a) = \widehat{\sigma}_b(t, h_a)$  for sufficiently large  $t$  the estimate of  $\sigma_b(t, h_a)$  is

$$\sigma_b(\infty, h_a) = \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} \widehat{\sigma}_b(0, h_a). \tag{49}$$

As a result of a prolonged redistribution of stresses from concrete to reinforcement its initial stress  $\sigma_a(0) = \frac{Mh_a n_0 m}{J(\mu n_0 m + 1)}$  increases to value

$$\sigma_a(\infty) = \frac{1}{\mu n_0} \left[ \frac{M(t)h_a}{J_b} - \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} \widehat{\sigma}_b(0, h_a) \right]. \tag{50}$$

Structural damage leads to an intensification of this process and makes a significant contribution to the assessment  $\sigma_b(\infty, h_a)$  and  $\sigma_a(\infty)$ .

*Remark 1.* In [3], a combination of the small parameter method by introducing a multiplier  $\varsigma$  into the last summand of equation (30) and the Laplace transform is used to solve relaxation problems. The structure of equation (30), together with the methods used, makes finding stresses  $\sigma_b(\tau)$  and  $\sigma_a(t)$  quite a difficult task.

## Conclusion

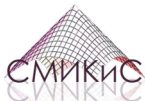
In the long-term forecast of the safety of reinforced concrete structures and buildings, estimates of the maximum stress values in the reinforcement are essential, because its rupture can lead to serious consequences. These estimates are obtained by solving the problem of stress relaxation in the concrete component of the structural element, entailing an increase of stress in the reinforcement.

Based on the concept of statistical strength distribution of fractions which union forms an element of a reinforced concrete structure, an approach is proposed for solving relaxation problems by reducing integral equations of state to a differential form. At the same time, according to the linearity of the integral equation of state with respect to the so-called structural stresses and the generality of the aging function for the modulus of elasticity and the creep measure of concrete, a simple linear differential equation of the first order is obtained.

The approach proposed in this paper, based on the strength structure of constructive materials (concrete, steel, wood, plastic), is significantly simpler than the known methods of stress assessment in the components of reinforced concrete structural elements.

## References

1. Boltzmann L.E. Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Sitzungsberichte Kaiserliche Akademie Wissenschaft Wien Mathematische-Naturwissenschaft.* 1874;70:275–306.
2. Rabotnov Yu.N. *Creep of construction elements.* Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russ.)
3. Galustov K.Z. *Nonlinear theory of concrete creep and calculation of reinforced concrete structures.* Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)
4. Aleksandrovskii S.V., Solomonov V.V. Dependence of creep deformations of concrete on the initial level of stress. *Intersectoral Issues of Construction. Domestic Experience: an Abstract Collection.* 1972;(6):6–12. (In Russ.)
5. Nazarenko V.G. *Development of the fundamentals of the theory of calculation of reinforced concrete structures taking into account the peculiarities of regime loading* (Doctor of Technical Sciences dissertation). Moscow; 1988. (In Russ.)
6. Prokopovich I.E. *Influence of long processes on the intense and deformed conditions of constructions.* Moscow: Gosstrojizdat Publ.; 1963. (In Russ.)
7. Arutyunyan N.Kh. Creep of aging materials. *Inzhenernyy Zhurnal. Mekhanika Tverdogo Tela.* 1967;(6):200. (In Russ.)
8. Aleksandrovskii S.V. *Calculation of concrete and reinforced concrete structures for temperature stability taking into account creep.* Moscow; 1973. (In Russ.)
9. Bondarenko V.M., Bondarenko S.V. *Engineering methods of the nonlinear theory of reinforced concrete.* Moscow: Stroyizdat Publ.; 1982. (In Russ.)
10. Sanjarovsky R., Manchenko M. Errors in the theory of creep of reinforced concrete and modern norms. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2016;(3):25–32. (In Russ.)
11. Sanzharovsky R.S., Ter-Emmanuilyan T.N., Manchenko M.M. Superposition principle as the fundamental error of the creep theory and standards of the reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2018;14(2):92–103. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104>
12. Bondarenko V.M., Larionov E.A. Strains superposition principle when construction elements have structural damages. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2011;(2):16–22. (In Russ.)
13. Larionov E.A., Larionov A.E. Nonlinear creep theory. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions.* 2015;(2):58–65. (In Russ.)
14. Larionov E.A., Larionov A.E. The theory of nonlinear creep of materials. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions.* 2017;(4):35–39. (In Russ.)
15. Vasilyev P.I. On the question of choosing a phenomenological theory of concrete creep. *Polzuchest Stroitelnykh Materialov.* Moscow; 1964. p. 106–114. (In Russ.)
16. Gvozdev A.A. Remark on the nonlinear theory of concrete creep under uniaxial compression. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mehanika Tverdogo Tela.* 1972;(5):33. (In Russ.)
17. Sanzharovsky R.S., Manchenko M.M. The creep of concrete and its instantaneous nonlinearity of deformation in the structural calculations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2015;(2):33–40. (In Russ.)
18. Larionov E.A., Ryjovskaya M.I., Grinko E.A. Rheological equations of concrete state and relaxation of stress. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2022;18(1):22–34. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34>
19. Vasilkova N.T., Bashcatova M.E., Larionov E.A. Stress relaxation of reinforced concrete beam under axial load. *Structural Mechanics of Engineering Construction and Buildings.* 2012;(1):24–29.
20. Larionov E., Zveryaev E. Stress relaxation of construction elements. *MATEC. Web of Conferences.* 2017;117:00101. <http://doi.org/10.1051/mateconf/201711700102>



DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-544-551  
УДК 621.643.3:534.11


НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Колебания трубопроводов газосодержащих жидкостей при изменяющихся условиях опирания

Е.В. Леонтьев<sup>1</sup> , В.И. Травуш<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Главное управление государственной экспертизы, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>Городской проектный институт жилых и общественных зданий, Москва, Российская Федерация

 e.leontyev@gge.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 12 сентября 2022 г.

Доработана: 27 ноября 2022 г.

Принята к публикации: 29 ноября 2022 г.

### Для цитирования

Леонтьев Е.В., Травуш В.И. Колебания трубопроводов газосодержащих жидкостей при изменяющихся условиях опирания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 544–551. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-544-551>

**Аннотация.** Рассматривается колебание трубопровода, возникающее при транспортировании газосодержащей жидкости в связи с неравномерным распределением по длине трубопровода скопления газа, которое производит пульсирующие перемещения центра тяжести движущейся жидкости, при изменении условий опирания средней части. Решение построено с использованием расчетной схемы балки, лежащей на упругом основании, описываемым моделью Винклера. Для оценки влияния на напряженно-деформированное состояние балки внезапного исключения упругого основания под средней частью балки определены круговые частоты и формы собственных поперечных колебаний балки, происходящие при отсутствии возмущающих сил. Приведенное решение задачи о колебаниях трубы, по которой транспортируется газосодержащая жидкость, при изменении условий опирания средней части балки может быть использовано для прогноза долговечности трубы.


**Ключевые слова:** трубопровод, балка, упругое основание, метод начальных параметров, свободные колебания, вынужденные колебания, динамический анализ, изменение условий опирания

## Fluctuations of pipelines of gas-containing liquids under changing bearing conditions

Yevgeny V. Leontiev<sup>1</sup> , Vladimir I. Travush<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Main State Expertise of Russia, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Urban Planning Institute of Residential and Public Buildings, Moscow, Russian Federation

 e.leontyev@gge.ru

### Article history

Received: September 12, 2022

Revised: November 27, 2022

Accepted: November 29, 2022

**Abstract.** The authors deal with the vibration of the pipeline that occurs during the transportation of a gas-containing liquid due to the uneven distribution of gas accumulation along the length of the pipeline, which produces pulsating movements of the center of gravity of the moving liquid, when the conditions for sup-

Леонтьев Евгений Владимирович, кандидат технических наук, начальник управления строительных решений, Главное управление государственной экспертизы, Российская Федерация, 119049, Москва, ул. Большая Якиманка, д. 42, стр. 1–2; ORCID: 0000-0002-8805-8615, Scopus Author ID: 57222058316, eLIBRARY SPIN-код: 9201-2140; e.leontyev@gge.ru

Травуш Владимир Ильич, вице-президент РААСН, доктор технических наук, профессор, главный конструктор – заместитель генерального директора по науке, Городской проектный институт жилых и общественных зданий, Российская Федерация, 105064, Москва, Нижний Сусальный пер., д. 5, стр. 5А; ORCID: 0000-0003-1991-7233, Scopus Author ID: 6602647191, eLIBRARY SPIN-код: 6462-2331; travush@mail.ru

Yevgeny V. Leontiev, Candidate of Technical Sciences, Head of the Construction Solutions Department, Main State Expertise of Russia, 42 Bolshaya Yakimanka St, bldg 1–2, Moscow, 119049, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-8805-8615, Scopus Author ID: 57222058316, eLIBRARY SPIN-code: 9201-2140; e.leontyev@gge.ru

Vladimir I. Travush, Vice President of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Designer – Deputy General Director for Science, Urban Planning Institute of Residential and Public Buildings, 5 Nizhnii Susalnyi Pereulok, bldg 5A, Moscow, 105064, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-1991-7233, Scopus Author ID: 6602647191, eLIBRARY SPIN-code: 6462-2331; travush@mail.ru

© Леонтьев Е.В., Травуш В.И., 2022

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

**For citation**

Leontiev Ye.V., Travush V.I. Fluctuations of pipelines of gas-containing liquids under changing bearing conditions. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):544–551. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-544-551>

porting the middle part change. The solution is constructed using the calculation scheme of a beam lying on an elastic foundation described by the Winkler model. To assess the impact on the stress-strain state of the beam of the sudden exclusion of the elastic foundation under the middle part of the beam, the circular frequencies and forms of natural transverse vibrations of the beam that occur in the absence of disturbing forces are determined. The given solution of the problem of vibrations of a pipe, through which a gas-containing liquid is transported, with a change in the conditions of support of the middle part of the beam, can be used to predict the durability of the pipe.

**Keywords:** pipeline, beam, elastic foundation, method of initial parameters, free vibrations, forced vibrations, dynamic analysis, change in support conditions

**Введение**

В современной строительной практике для выполнения требований механической безопасности зданий и сооружений, которые регламентированы законодательно и получили развитие в современных нормативно-технических документах, актуальной является задача исследования конструктивных систем, изменяющих расчетную схему в силу различных причин при локальном разрушении или в результате проявления опасных природных процессов и явлений, технологических или техногенных воздействий [1–4]. Состояния, возникающие при особых воздействиях и ситуациях, превышение которых приводит к разрушению сооружений с катастрофическими последствиями, необходимо учитывать для обеспечения требований особой группы предельных состояний.

При перекачивании газосодержащих жидкостей (например, нефти) по трубопроводам с помощью заданного напора, создаваемого компрессорными установками, происходит разделение газосодержащей жидкости на жидкую и газовую фазы. Соотношение объемов жидкости и газа зависит от исходного вида химического состава составляющих веществ и их количественных характеристик, давления и температуры. Причем, скопление газа неравномерно распределяется по длине трубопровода, что производит пульсирующие перемещения центра тяжести движущейся жидкости и сопровождается вибрационными воздействиями на трубопровод. Это вызывает дополнительные потери мощности потока транспортирования и приводит к ускоренному износу труб. Диагностике трубопроводов газосодержащих жидкостей при различных условиях опирания по собственным частотам их колебаний посвящено множество трудов. Можно привести исследования [2; 5–8].

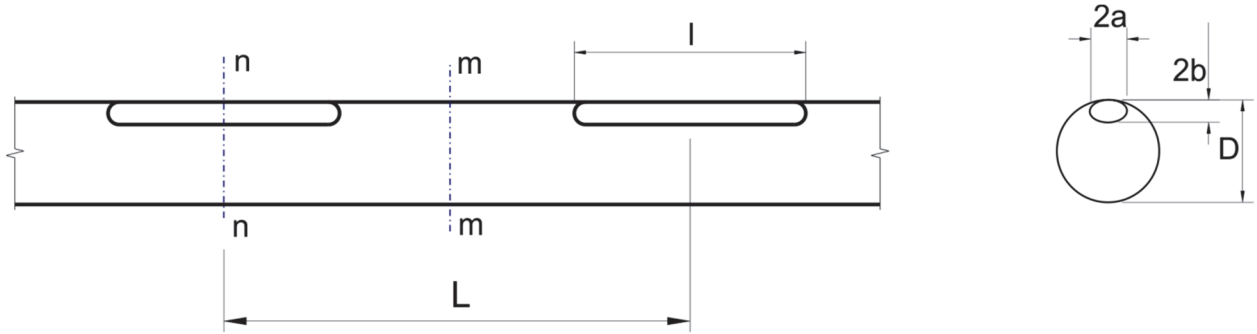
Если трубопровод расположен на грунтовом основании, то для определения напряженно-деформированного состояния трубопровода его можно рассмотреть, как балку, длиной  $L$ , лежащую на упругом основании, описываемым моделью Винклера, подверженную действию пульсационной нагрузки [5; 9; 10]. В частности, в [2] приведено решение о свободных и гармонических колебаниях трубопровода, возникающие при транспортировке газосодержащей жидкости. Колебания происходят за счет неравномерного распределения по длине трубы скопления газа. Сам трубопровод рассматривается как балка на упругом основании, описываемая моделью Винклера, подверженная действию пульсационной нагрузки. Определяется спектр частот колебаний. Приведенное решение может быть использовано для прогноза долговечности трубы. В развитие этих исследований в данной статье рассмотрена задача по определению влияния на напряженно-деформированное состояние балки внезапного исключения упругого основания под средней частью балки и определению круговых частот и формы собственных поперечных колебаний балки.

**Методы**

Известно [2; 5; 6], что по мере продвижения газосодержащей жидкости происходит потеря напора и, как следствие, снижение давления и соответствующее увеличение объема газовой фазы.

Газ скапливается в верхней части трубы и в зависимости от количества формируется либо струйно, либо в форме отдельно распределенных эллипсоидов (рис. 1).

В обоих случаях центр тяжести потока смещается вниз по сечению трубы – при струйном потоке газа величина этого смещения по длине трубы не меняется (или меняется медленно), при отдельном расположении газовой фазы центр тяжести потока перемещается из центра сечения трубы, в котором газовые скопления отсутствуют отдельно от газового эллипсоида, в сечение, в котором расположены газовые скопления.

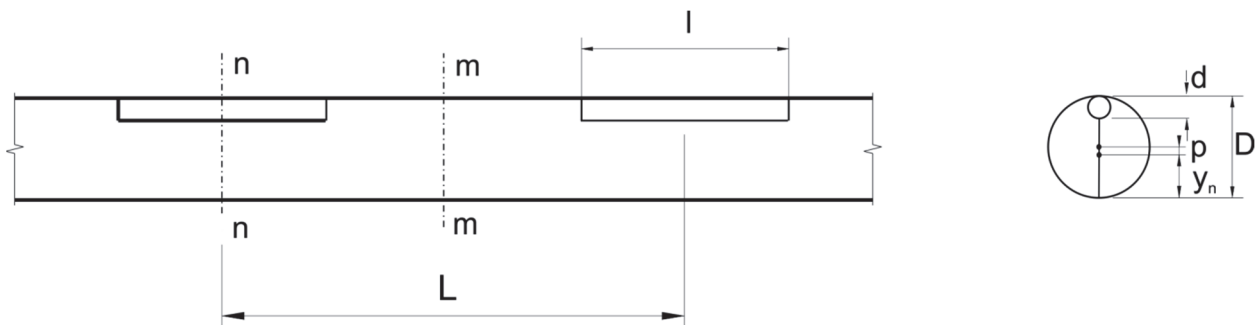


**Рис. 1.** Схема формирования газовой фазы в трубопроводе  
**Figure 1.** Diagram of the formation of the gas phase in the pipeline

Это приводит к пульсации центра тяжести потока при движении жидкости, сопровождающейся дополнительными динамическими нагрузками. При этом отметим, что размеры газовых включений и расстояния между ними определяются натурными измерениями (например, ультразвуковыми методами), а в дальнейшем могут быть табулированы.

### Результаты и обсуждение

Далее для упрощения расчетного алгоритма, сохраняя расчетную длину  $l$ , эллипсоидное сечение единичного газового компонента заменяем кругом равновеликой площади (рис. 2).



**Рис. 2.** Схема расчетных участков трубопровода с газовыми включениями  
**Figure 2.** Diagram of the design sections of the pipeline with gas inclusions

Наибольшая сила пульсации

$$\max F = \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{2} p_i \mu_i \left( \frac{2\pi v}{L_i} \right)^2; \quad (1)$$

$$\mu_i = \frac{\pi}{4} (D_i^2 L_i - d_i^2 l_i); \quad (2)$$

$$p_i = \frac{1}{2} D_i - y_i; \quad (3)$$

$$y_i = \frac{\sum_{m=1}^k S_{im} Y_{im} r_{im}}{\sum_{m=1}^k S_{im} Y_{im}}, \quad (4)$$

где  $p_i$  – наибольшее смещение центра тяжести потока газосодержащей жидкости между сечениями без газовых включений и с газовыми включениями;  $\mu_i$  – масса расчетного участка трубы;  $L_i$  – длина расчетного участка трубы;  $v$  – скорость движения жидкости;  $D_i$  – внутренний диаметр участка трубы;  $d_i$  – расчетный диаметр участка газового эллипсоида, приведенного к равновеликому кругу;  $l_i$  – длина участка газового эллипсоида;  $S_i$  – площадь сечения жидкой и газовой фаз абсциссы середины участка газового

эллипсоида;  $r_i$  – расстояние от нижней точки трубы до центра тяжести  $i$ -той фазы;  $\gamma_i$  – объемный вес  $i$ -той фазы.

Таким образом, динамическое догружение пульсирующего типа имеет амплитуду  $A_i = p_i/2$ , период пульсации  $T_i = \frac{L_i}{v}$ , частоту пульсации  $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ .

Падение напора на участках между компрессорными станциями может быть учтено уточнением величины массы.

Если трубопровод расположен на грунтовом основании, то для определения напряженно-деформированного состояния трубопровода его можно рассмотреть, как балку, длиной  $L$ , лежащую на упругом основании, описываемым моделью Винклера, подверженную действию пульсационной нагрузки.

Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний балки на упругом основании при любом законе изменения возмущающей силы  $q(x, t)$  имеет следующий вид [1; 2]:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + ry(x, t) = q(x, t), \quad (5)$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки, Па;  $I$  – момент инерции поперечного сечения балки,  $m^4$ ;  $y(x, t)$  – функция прогиба балки, зависящая от координаты  $x$  и времени  $t$ , м;  $q(x, t)$  – возмущающая нагрузка, изменяющаяся во времени  $t$ ;  $r = r_0 b : r_0$  – коэффициент отпора основания или коэффициент постели,  $N/m^3$ ;  $b$  – ширина балки, м.

Для определения влияния на напряженно-деформированное состояние балки внезапного исключения упругого основания под средней частью балки, определим круговые частоты и формы собственных поперечных колебаний балки (рис. 3), происходящие при отсутствии возмущающих сил, то есть при  $q(x, t) = 0$  уравнение (5) приобретает следующий вид:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + ry(x, t) = 0. \quad (6)$$

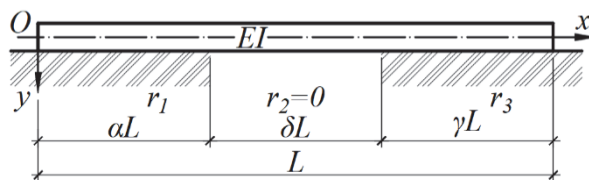


Рис. 3. Балка при изменении условий опирания на упругое основание средней части  
 Figure 3. Beam when the conditions of support on the elastic base of the middle part change

Методом разделения переменных с использованием функции А.Н. Крылова  $S(\kappa_j x)$ ,  $T(\kappa_j x)$ ,  $U(\kappa_j x)$ ,  $V(\kappa_j x)$  получим выражение для прогиба балки [1; 2]:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) (C_j \sin \omega_j t + D_j \cos \omega_j t) \quad (7)$$

или

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j X_j(x) \sin(\omega_j t + \varphi_j), \quad (8)$$

где  $\omega_j$  – частота свободных колебаний балки:

$$\omega_j = \sqrt{\left(\frac{EI}{\mu} \kappa_j^4 + \frac{r}{\mu}\right)}. \quad (9)$$

Изучим свободные поперечные колебания балки на упругом основании (рис. 3). Левая часть балки длиной  $\alpha L$  расположена на упругом основании с постоянным коэффициентом  $r_1$ , средняя часть балки длиной  $\delta L$  расположена на упругом основании с постоянным коэффициентом  $r_2$ , правая часть балки длиной  $\gamma L$  расположена на упругом основании с постоянным коэффициентом  $r_3$ . Внезапное изменение условий опирания средней части балки, расположенной на упругом основании, из-за изменения коэффициента постели, значения которого может уменьшиться до нуля, приведет к изменению расчетной схемы системы «балка – упругое основание».

Определение собственных частот и форм колебаний, перемещений и внутренних усилий балки на упругом основании при исключении основания под любой частью балки выполним, используя метод начальных параметров и функции А.Н. Крылова. Составим уравнения в универсальном виде для трех участков балки, расположенной на упругом основании. Для первого участка балки аргумент функций А.Н. Крылова обозначим  $\kappa_{1i}$ , для второго участка балки –  $\kappa_{2i}$ , для третьего участка балки –  $\kappa_{3i}$ .

Определим круговые частоты и формы собственных поперечных колебаний балки со свободными концами с учетом собственного веса. Составим последовательно для каждого участка балки уравнения линейных  $y_{ni}(x_n)$  и угловых перемещений  $\varphi_{ni}(x_n)$  оси балки, изгибающих моментов  $M_{ni}(x_n)$  и поперечных сил  $Q_{ni}(x_n)$ , используя формулы (3).

Запишем значения граничных условий для балки со свободными концами:

$$\left. \begin{aligned} x = 0: M(0) = Q(0) = 0 \\ x = L: M(L) = Q(L) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Участок 1.  $0 \leq x_1 \leq \alpha L$ . Начало координат на левом конце балки. Начальные параметры на участке 1:  $y_{10i}$ ,  $\varphi_{10i}$ ,  $M_{10i}$ ,  $Q_{10i}$ . Составим уравнения для произвольного сечения первого участка балки:

$$y_{1i}(x_1) = y_{10i}S(\kappa_{1i}x_1) + \varphi_{10i} \frac{T(\kappa_{1i}x_1)}{\kappa_{1i}}; \quad (11)$$

$$\varphi_{1i}(x_1) = y_{10i}\kappa_{1i}V(\kappa_{1i}x_1) + \varphi_{10i}S(\kappa_{1i}x_1); \quad (12)$$

$$M_{1i}(x_1) = -EI y_{10i} \kappa_{1i}^2 U(\kappa_{1i}x_1) - EI \varphi_{10i} \kappa_{1i} V(\kappa_{1i}x_1); \quad (13)$$

$$Q_{1i}(x_1) = -EI y_{10i} \kappa_{1i}^3 T(\kappa_{1i}x_1) - EI \varphi_{10i} \kappa_{1i}^2 U(\kappa_{1i}x_1). \quad (14)$$

Участок 2.  $0 \leq x_2 \leq \delta L$ . Начало координат на левом конце участка 2. Начальные параметры на участке 2:  $y_{20i}$ ,  $\varphi_{20i}$ ,  $M_{20i}$ ,  $Q_{20i}$ . Условия сопряжения участков 1 и 2 при  $x_1 = \alpha L$  и  $x_2 = 0$ :  $y_{20i} = y_{1i}(\alpha L)$ ,  $\varphi_{20i} = \varphi_{1i}(\alpha L)$ ,  $M_{20i} = M_{1i}(\alpha L)$ ,  $Q_{20i} = Q_{1i}(\alpha L)$ .

Составим уравнения для произвольного сечения второго участка балки:

$$y_{2i}(x_2) = y_{10i}\eta_{1i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) + \varphi_{10i}\eta_{2i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2); \quad (15)$$

$$\varphi_{2i}(x_2) = y_{10i}\eta_{3i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) + \varphi_{10i}\eta_{4i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2); \quad (16)$$

$$M_{2i}(x_2) = -EI y_{10i}\eta_{5i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) - EI \varphi_{10i}\eta_{6i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2); \quad (17)$$

$$Q_{2i}(x_2) = -EI y_{10i}\eta_{7i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) - EI \varphi_{10i}\eta_{8i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2), \quad (18)$$



где обозначены

$$\eta_{1i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) = \left[ S(\kappa_{1i}\alpha L)S(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}}{\kappa_{2i}}V(\kappa_{1i}\alpha L)T(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}^2}{\kappa_{2i}^2}U(\kappa_{1i}\alpha L)U(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}^3}{\kappa_{2i}^3}T(\kappa_{1i}\alpha L)V(\kappa_{2i}x_2) \right]; \quad (19)$$

$$\eta_{2i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) = \left[ \frac{1}{\kappa_{1i}}T(\kappa_{1i}\alpha L)S(\kappa_{2i}x_2) + \frac{1}{\kappa_{2i}}S(\kappa_{1i}\alpha L)T(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}}{\kappa_{2i}^2}V(\kappa_{1i}\alpha L)U(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}^2}{\kappa_{2i}^3}U(\kappa_{1i}\alpha L)V(\kappa_{2i}x_2) \right]; \quad (20)$$

$$\eta_{3i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) = \left[ \kappa_{2i}S(\kappa_{1i}\alpha L)V(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}V(\kappa_{1i}\alpha L)S(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}^2}{\kappa_{2i}}U(\kappa_{1i}\alpha L)T(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}^3}{\kappa_{2i}^2}T(\kappa_{1i}\alpha L)U(\kappa_{2i}x_2) \right]; \quad (21)$$

$$\eta_{4i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) = \left[ \frac{\kappa_{2i}}{\kappa_{1i}}T(\kappa_{1i}\alpha L)V(\kappa_{2i}x_2) + S(\kappa_{1i}\alpha L)S(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}}{\kappa_{2i}}V(\kappa_{1i}\alpha L)T(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}^2}{\kappa_{2i}^2}U(\kappa_{1i}\alpha L)U(\kappa_{2i}x_2) \right]; \quad (22)$$

$$\eta_{5i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) = \left[ \kappa_{2i}^2S(\kappa_{1i}\alpha L)U(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}\kappa_{2i}V(\kappa_{1i}\alpha L)V(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}^2U(\kappa_{1i}\alpha L)S(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}^3}{\kappa_{2i}}T(\kappa_{1i}\alpha L)T(\kappa_{2i}x_2) \right]; \quad (23)$$

$$\eta_{6i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) = \left[ \frac{\kappa_{2i}^2}{\kappa_{1i}}T(\kappa_{1i}\alpha L)U(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{2i}S(\kappa_{1i}\alpha L)V(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}V(\kappa_{1i}\alpha L)S(\kappa_{2i}x_2) + \frac{\kappa_{1i}^2}{\kappa_{2i}}U(\kappa_{1i}\alpha L)T(\kappa_{2i}x_2) \right]; \quad (24)$$

$$\eta_{7i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) = \left[ \kappa_{2i}^3S(\kappa_{1i}\alpha L)T(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}\kappa_{2i}^2V(\kappa_{1i}\alpha L)U(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}^2\kappa_{2i}U(\kappa_{1i}\alpha L)V(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}^3T(\kappa_{1i}\alpha L)S(\kappa_{2i}x_2) \right]; \quad (25)$$

$$\eta_{8i}(\kappa_{1i}\alpha L, \kappa_{2i}x_2) = \left[ \frac{\kappa_{2i}^3}{\kappa_{1i}}T(\kappa_{1i}\alpha L)T(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{2i}^2S(\kappa_{1i}\alpha L)U(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}\kappa_{2i}V(\kappa_{1i}\alpha L)V(\kappa_{2i}x_2) + \kappa_{1i}^2U(\kappa_{1i}\alpha L)S(\kappa_{2i}x_2) \right]. \quad (26)$$

Участок 3.  $0 \leq x_3 \leq \gamma L$ . Начало координат на левом конце участка 3. Начальные параметры на участке 3:  $y_{30i}$ ,  $\varphi_{30i}$ ,  $M_{30i}$ ,  $Q_{30i}$ . Условия сопряжения участков 2 и 3 при  $x_2 = \delta L$  и  $x_3 = 0$ :  $y_{30i} = y_{2i}(\delta L)$ ,  $\varphi_{30i} = \varphi_{2i}(\delta L)$ ,  $M_{30i} = M_{2i}(\delta L)$ ,  $Q_{30i} = Q_{2i}(\delta L)$ . Составим уравнения для произвольного сечения третьего участка балки:

$$y_{3i}(x_3) = y_{10i}\eta_{9i}(\kappa_{3i}x_3) + \varphi_{10i}\eta_{10i}(\kappa_{3i}x_3); \quad (27)$$

$$\varphi_{3i}(x_3) = y_{10i}\eta_{11i}(\kappa_{3i}x_3) + \varphi_{10i}\eta_{12i}(\kappa_{3i}x_3); \quad (28)$$

$$M_{3i}(x_3) = -EI[y_{10i}\eta_{13i}(\kappa_{3i}x_3) + \varphi_{10i}\eta_{14i}(\kappa_{3i}x_3)]; \quad (29)$$

$$Q_{3i}(x_3) = -EI[y_{10i}\eta_{15i}(\kappa_{3i}x_3) + \varphi_{10i}\eta_{16i}(\kappa_{3i}x_3)], \quad (30)$$

где обозначены

$$\eta_{9i}(\kappa_{3i}x_3) = \left[ \eta_{1i}S(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{3i} \frac{T(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}} + \eta_{5i} \frac{U(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}^2} + \eta_{7i} \frac{V(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}^3} \right]; \quad (31)$$

$$\eta_{10i}(\kappa_{3i}x_3) = \left[ \eta_{2i}S(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{4i} \frac{T(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}} + \eta_{6i} \frac{U(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}^2} + \eta_{8i} \frac{V(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}^3} \right]; \quad (32)$$

$$\eta_{11i}(\kappa_{3i}x_3) = \left[ \eta_{1i}\kappa_{3i}V(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{3i}S(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{5i} \frac{T(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}} + \eta_{7i} \frac{U(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}^2} \right]; \quad (33)$$

$$\eta_{12i}(\kappa_{3i}x_3) = \left[ \eta_{2i}\kappa_{3i}V(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{4i}S(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{6i} \frac{T(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}} + \eta_{8i} \frac{U(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}^2} \right]; \quad (34)$$

$$\eta_{13i}(\kappa_{3i}x_3) = \left[ \eta_{1i}\kappa_{3i}^2U(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{3i}\kappa_{3i}V(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{5i}S(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{7i} \frac{T(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}} \right]; \quad (35)$$

$$\eta_{14i}(\kappa_{3i}x_3) = \left[ \eta_{2i}\kappa_{3i}^2U(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{4i}\kappa_{3i}V(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{6i}S(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{8i} \frac{T(\kappa_{3i}x_3)}{\kappa_{3i}} \right]; \quad (36)$$

$$\eta_{15i}(\kappa_{3i}x_3) = \left[ \eta_{1i}\kappa_{3i}^3T(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{3i}\kappa_{3i}^2U(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{5i}\kappa_{3i}V(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{7i}S(\kappa_{3i}x_3) \right]; \quad (37)$$

$$\eta_{16i}(\kappa_{3i}x_3) = \left[ \eta_{2i}\kappa_{3i}^3T(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{4i}\kappa_{3i}^2U(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{6i}\kappa_{3i}V(\kappa_{3i}x_3) + \eta_{8i}S(\kappa_{3i}x_3) \right]. \quad (38)$$

Составим систему уравнений, используя граничные условия на правом краю (3) при  $x_3 = \gamma L$  и уравнения (3) и (3):

$$\begin{cases} M_{3i}(\gamma L) = -EI[y_{10i}\eta_{13i}(\kappa_{3i}\gamma L) + \varphi_{10i}\eta_{14i}(\kappa_{3i}\gamma L)] = 0. \\ Q_{3i}(\gamma L) = -EI[y_{10i}\eta_{15i}(\kappa_{3i}\gamma L) + \varphi_{10i}\eta_{16i}(\kappa_{3i}\gamma L)] = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Для нетривиального решения уравнений (39) необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при произвольных постоянных  $y_{10i}$  и  $\varphi_{10i}$ , был равен нулю:

$$D = \eta_{13i}(\kappa_{3i}\gamma L)\eta_{16i}(\kappa_{3i}\gamma L) - \eta_{14i}(\kappa_{3i}\gamma L)\eta_{15i}(\kappa_{3i}\gamma L) = 0. \quad (40)$$

Корнями частотного уравнения (40) является бесчисленное множество значений  $\kappa_{1i}$ ,  $\kappa_{2i}$  и  $\kappa_{3i}$ . Выбор значений корней выполним из условия равенства собственных частот поперечных колебаний частей балки, на упругом основании и без основания. Каждому значению корня будет соответствовать определенная круговая частота собственных поперечных колебаний частей балки.

Используя выражение (9), определим собственные круговые частоты поперечных колебаний балки, которые образуют спектры  $\omega_{1\kappa} < \omega_{2\kappa} < \dots < \omega_{n\kappa}$ .

Используя полученные значения корней, определим значения начальных параметров  $y_{10i}$  и  $\varphi_{10i}$  из системы уравнений (39). Для определения форм собственных колебаний полученные значения  $y_{10i}$  и  $\varphi_{10i}$  подставим в решение уравнений (11), (15) и (27) соответственно, которые определяют значения относительных ординат  $i$ -той формы собственных колебаний балки.

## Заключение

Рассмотрена задача по определению влияния на напряженно-деформированное состояние балки внезапного исключения упругого основания под средней частью балки и определению круговых частот и формы собственных поперечных колебаний балки. Приведенное решение задачи о колебаниях трубы, по которой транспортируется газосодержащая жидкость, при изменении условий опирания средней части балки может быть использовано для прогноза долговечности трубы.

## Список литературы

1. Новацкий В. Динамика сооружений. М.: Госстройиздат, 1963. 376 с.
2. Бондаренко В.М., Травуш В.И. Колебания трубопроводов при транспортировании газосодержащих жидкостей // *Academia. Архитектура и строительство*. 2017. № 1. С. 101–103.
3. Akbarly R.S. Waves propagation in the fluid flowing in an elastic tube, considering viscoelastic friction of surrounding medium // *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2018. Vol. 35. Pp. 39–42.
4. Овчинников И.Г., Овчинников И.И., Баширзаде С.Р. Прогнозирование поведения трубопроводных конструкций в сложных грунтово-геологических условиях. Часть 1. Обобщенная модель деформирования трубопровода // *Наукоедение*. 2016. Т. 8. № 4. С. 1–26. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/60TVN416.pdf> (дата обращения: 21.09.2022).
5. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Собственные колебания участка трубопровода // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2011. № 1. С. 172–187.
6. Акуленко Л.Д., Иванов М.И., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2013. № 4. С. 119–134.
7. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2015. № 2. С. 139–144.
8. Березнев А.В. Влияние внутреннего гидростатического давления на частоты свободных колебаний криволинейного участка трубопровода // *Известия вузов. Нефть и газ*. 2011. № 3. С. 77–80.
9. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev Ye.V. Dynamic effects in the beam on an elastic foundation caused by the sudden transformation of supporting conditions // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. Vol. 14. No. 4. Pp. 27–47. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-4-27-47>
10. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev Ye.V. Mathematic model of a beam partially supported on elastic foundation // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. Vol. 15. No. 2. Pp. 144–158. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-2-144-158>

## References

1. Novatsky V. *Dynamics of structures*. Moscow: Gosstroizdat Publ.; 1963. (In Russ.)
2. Bondarenko V.M., Travush V.I. Fluctuations of pipelines during transportation of gas-containing liquids. *Academia. Architecture and Construction*. 2017;(1):101–103. (In Russ.)
3. Akbarly R.S. Waves propagation in the fluid flowing in an elastic tube, considering viscoelastic friction of surrounding medium. *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*. 2018;35:39–42.
4. Ovchinnikov I.G., Ovchinnikov I.I., Bashirzade S.R. Forecasting the behavior of pipeline structures in complex soil and geological conditions. Part 1. Generalized model of pipeline deformation. *Naukovedenie*. 2016;8(4): 1–26. (In Russ.) Available from: <http://naukovedenie.ru/PDF/60TVN416.pdf> (accessed: 21.09.2022).
5. Akulenko L.D., Korovina L.I., Nesterov S.V. Natural vibrations of a pipeline section. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2011;(1):172–187. (In Russ.)
6. Akulenko L.D., Ivanov M.I., Korovina L.I., Nesterov S.V. The main properties of natural oscillations of an extended pipeline section. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2013;(4):119–134. (In Russ.)
7. Akulenko L.D., Georgievsky D.V., Nesterov S.V. The spectrum of transverse oscillations of a section of a moving rod under the influence of a longitudinal load. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2015;(2):139–144. (In Russ.)
8. Bereznev A.V. Influence of internal hydrostatic pressure on the frequencies of free oscillations of a curved section of the pipeline. *Oil and Gas Studies*. 2011;(3):77–80. (In Russ.)
9. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev Ye.V. Dynamic effects in the beam on an elastic foundation caused by the sudden transformation of supporting conditions. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018;14(4):27–47. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-4-27-47>
10. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev Ye.V. Mathematic model of a beam partially supported on elastic foundation. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019;15(2):144–158. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-2-144-158>

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563  
УДК 624.01

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE


## Численный расчет изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения в программной среде Abaqus

В.И. Римшин<sup>1,2</sup>  , П.А. Амелин<sup>3</sup> 

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, Москва, Российская Федерация

<sup>3</sup>Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова, Белгород, Российская Федерация

 v.rimshin@niisf.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 17 сентября 2022 г.

Доработана: 22 ноября 2022 г.

Принята к публикации: 24 ноября 2022 г.

**Аннотация.** Расчет строительных конструкций в значительной степени стал выполняться с использованием автоматизированных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов. Актуальным вопросом повсеместного применения данного вида расчетов является точность их результатов в сравнении с экспериментальными данными. В данном исследовании путем численного моделирования с использованием программного комплекса Abaqus изучается напряженно-деформированное состояние изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного поперечного сечения. Численное моделирование элемента выполнено объемными конечными элементами с учетом нелинейной (фактической) диаграммы состояния бетона, описанной моделью пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP). Армирование задано стержневыми конечными элементами с комбинацией упругих свойств и модели пластичности металла. Нагружение элемента балки в модели выполнено статически с приложением сосредоточенных сил по центрам третей расчетного пролета. В результате конечно-элементного расчета получены распределения напряжений в бетоне и арматуре по Мизесу, деформации конечных элементов вдоль главных осей, а также модель повреждения бетона при нарастании нагрузки. Полученные результаты показали высокую сходимость с экспериментальными данными испытания балок на изгиб по нормальному сечению, что позволяет использовать данный алгоритм автоматизированного конечно-элементного расчета при проектировании изгибаемых железобетонных конструкций.

**Ключевые слова:** железобетон, нелинейный численный анализ, упругость, пластичность, повреждение, конечно-элементное моделирование

### Для цитирования

Римшин В.И., Амелин П.А. Численный расчет изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения в программной среде Abaqus // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 552–563. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563>

**Римшин Владимир Иванович**, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, кафедра жилищно-коммунального комплекса, Институт инженерно-экологического строительства и механизации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, Российская Федерация, 129238, Москва, Локомотивный пр-д, д. 21; ORCID: 0000-0003-0209-7726, eLIBRARY SPIN-код: 9629-5322, AuthorID: 420903; v.rimshin@niisf.ru

**Амелин Павел Андреевич**, аспирант, ассистент кафедры строительства и городского хозяйства, Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова, Российская Федерация, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46; ORCID: 0000-0002-7104-3214, eLIBRARY SPIN-код: 8237-9002, AuthorID: 1144529; p.amelin@inbox.ru

© Римшин В.И., Амелин П.А., 2022



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>


## Numerical calculation of bent reinforced concrete elements of rectangular section in the Abaqus software

Vladimir I. Rimshin<sup>1,2</sup>, Pavel A. Amelin<sup>3</sup>

<sup>1</sup>National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Research Institute of Construction Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup>Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Belgorod, Russian Federation

 v.rimshin@niisf.ru

### Article history

Received: September 17, 2022

Revised: November 22, 2022

Accepted: November 24, 2022

**Abstract.** The calculation of building structures to a large extent began to be performed using automated software systems based on the finite element method. An urgent issue of the widespread use of this type of calculation is the accuracy of the calculation results in comparison with experimental data. In this study, by numerical simulation using the Abaqus software package, the stress-strain state of a bent reinforced concrete element of a rectangular cross section is investigated. Numerical modeling of the element is performed by volumetric finite elements, taking into account the non-linear (actual) state diagram of concrete, described by the model of plastic fracture of concrete with damage (CDP). Reinforcement is specified by rod finite elements, with a combination of elastic properties and metal plasticity model. The loading of the beam element in the model is performed statically with the application of concentrated forces at the centers of the thirds of the design span. As a result of the finite element calculation, the distribution of stresses in concrete and reinforcement according to Mises, deformations of finite elements along the main axes, as well as a model of concrete damage with increasing load were obtained. The obtained results showed a high convergence with the experimental data of testing beams for bending along a normal section, which allows using this algorithm for automated finite element analysis in the design of bending reinforced concrete structures.

**Keywords:** reinforced concrete, nonlinear numerical analysis, elasticity, plasticity, damage, finite-element simulation

### For citation

Rimshin V.I., Amelin P.A. Numerical calculation of bent reinforced concrete elements of rectangular section in the Abaqus software. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):552–563. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563>

## Введение

Для расчета строительных конструкций все чаще применяются автоматизированные программные комплексы, основанные на методе конечных элементов (FEM), который является численным методом решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики [1].

Используя конечно-элементный анализ, автоматизированные программные системы способны решать широкий спектр инженерных задач:

- расчет конструкций на прочность и деформативность под действием статических и динамических нагрузок;
- расчет частот собственных колебаний, анализ вибраций;
- анализ теплового потока, градиента температур;
- решение задач механики жидкости.

Актуальной проблемой при расчете железобетонных конструкций с помощью автоматизированных систем конечно-элементного анализа является учет силового сопротивления железобетона во времени, характеризующегося нелинейным соотношением напряжений и деформаций бетона, учетом таких факторов, как ползучесть, сцепление стальной и композитной арматуры с бетоном, образование трещин и их распространение. Расчет силового сопротивления железобетонных конструкций основан на гипотезах

**Vladimir I. Rimshin**, full member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Housing and Communal Complex, Institute of Environmental Engineering and Mechanization, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Research Institute of Construction Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 21 Lokomotivnyi Proezd, Moscow, 129238, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0209-7726, eLIBRARY SPIN-code: 9629-5322, AuthorID: 420903; v.rimshin@niisf.ru

**Pavel A. Amelin**, postgraduate student, assistant of the Department of Construction and Urban Economy, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, 46 Kostyukova St, Belgorod, 308012, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7104-3214, eLIBRARY SPIN-code: 8237-9002, AuthorID: 1144529; p.amelin@inbox.ru

о малости относительных деформаций, сложности деформаций и сопротивлений, плоских сечений, идентификации гравитационных и инерционных нагрузок, взаимонезависимости и сложении частных деформаций, Фрама-Каминского о «равнодоступности» разнофакторных процессов становления среднего повреждения материалов во времени, Гульберта-Вааге о пропорциональности скорости изменения механических и физико-химических характеристик материала при постоянных силовых и средовых воздействиях. Теоретические основы расчета железобетонных конструкций с учетом силового сопротивления железобетона широко рассмотрены в работах В.М. Бондаренко, Н.И. Карпенко, В.И. Колчунова, В.И. Травуша, В.С. Федорова, В.И. Римшина, С.И. Меркулова, А.В. Боровских, Е.А. Ларионова, Н.В. Федоровой и др.<sup>1</sup> [2–11]. Установлено, что из-за сложности и количества математических итерационных процессов, данные расчеты возможно производить только с помощью вычислительной техники по специальным программам.

Simulia Abaqus является специализированным программным комплексом конечно-элементного моделирования работы конструкций, который имеет возможность производить расчет напряженно-деформированного состояния при статическом и динамическом нагружении с учетом физически и геометрически нелинейного поведения материалов (включая ползучесть бетона), а также контактного взаимодействия между элементами конструкции. В данный программный комплекс был внедрен расширенный метод конечных элементов (XFEM), позволяющий выполнить реалистичное 3D-моделирование роста трещин по произвольным путям, не зависящим от границ элементов [12].

В программном комплексе Abaqus нелинейное поведение бетона задается с помощью модели пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP), которая впервые была изложена в работе Дж. Люблинера [13]. Данная модель базируется на голономной связи между повреждениями и эквивалентными пластическими деформациями. При низком ограничивающем давлении бетон ведет себя хрупко, основными механизмами его разрушения являются растрескивание при растяжении и дробление при сжатии. Хрупкость бетона исчезает, когда ограничивающее давление достаточно велико, чтобы предотвратить распространение трещин. В этих условиях разрушение вызвано уплотнением и разрушением микропористой микроструктуры бетона, что приводит к макроскопической реакции, напоминающей реакцию пластичного материала при упрочнении [14–18].

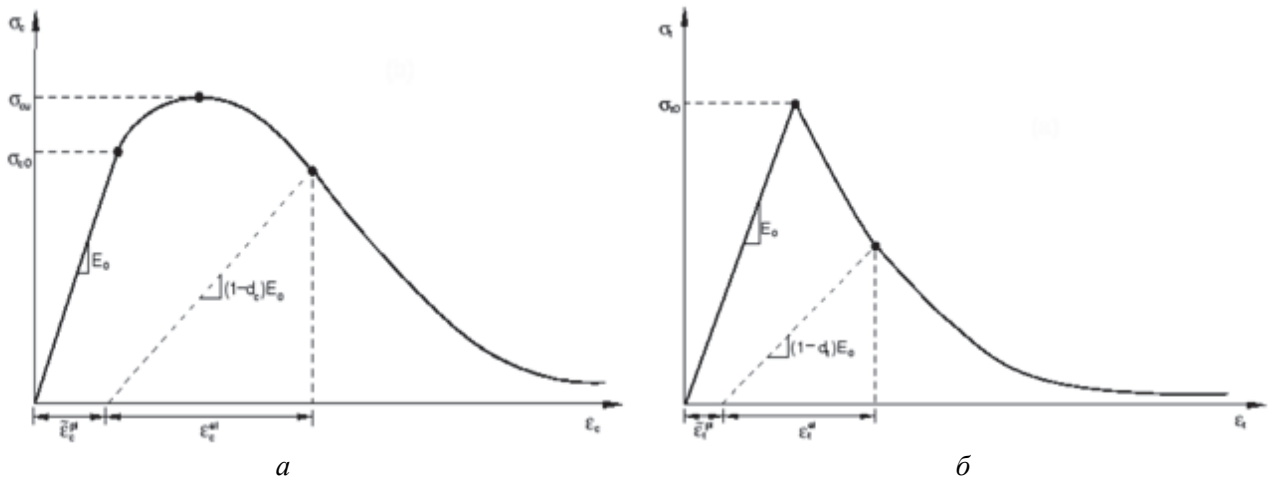
Модель пластичного разрушения бетона с повреждениями имеет свои особенности:

- позволяет проводить моделирование бетона и других квазихрупких материалов в составе конструкций;
- моделирование нелинейного бетона основано на принципе упругой изотропной поврежденности и пластичности;
- имеет возможность моделировать различные циклы нагружения – возрастающего, циклического или динамического;
- состоит из сочетания несвязанной многоуровневой пластичности и скалярной (изотропной) упругой поврежденности для описания необратимого повреждения, которое происходит во время процесса трещинообразования;
- позволяет пользователю контролировать эффекты восстановления жесткости при циклических изменениях нагрузки;

Развитие механизма разрушения бетона контролируется двумя переменными  $\tilde{\epsilon}_t^{pl}$  и  $\tilde{\epsilon}_c^{pl}$ , которые являются растягивающими и сжимающими эквивалентными пластическими деформациями соответственно. Теоретические закономерности описывают эффекты накопления необратимых повреждений в бетоне и других квазихрупких материалов при достаточно низких напряжениях. Согласно модели, одноосное поведение бетона при сжатии и растяжении характеризуется пластическим разрушением (рис. 1).

Когда бетонный образец разгружается из любой точки кривой напряжения-деформации, реакция разгрузки ослабляется, упругая жесткость материала оказывается поврежденной. Деградация упругой жесткости характеризуется двумя коэффициентами повреждения  $d_t$  и  $d_c$ , находящимися в пределах от 0 (для неповрежденных материалов) до 1 (полностью разрушенный материал), которые являются функциями пластических деформаций, температуры и других переменных.

<sup>1</sup> Бондаренко В.М., Римшин В.И. Диссипативная теория силового сопротивления железобетона: учебное пособие для учреждений высшего образования. М.: Студент, 2015. 111 с.; Бондаренко В.М., Римшин В.И. Усиление железобетонных конструкций при коррозионных повреждениях: учебное пособие. М.: Московская государственная академия коммунального хозяйства и строительства, 2009. 87 с.



**Рис. 1.** Поведение бетона при одноосном сжатии (а) и растяжении (б)  
**Figure 1.** Behavior of concrete under uniaxial compression (а) and tension (б)

Если  $E_0$  исходная (неповрежденная) упругая жесткость материала, то отношения напряжений и деформаций при одноосном растяжении и нагрузке сжатия равны

$$\sigma_t = (1 - d_t)E_0 (\varepsilon_t - \tilde{\varepsilon}_t^{pl}); \quad (1)$$

$$\sigma_c = (1 - d_c)E_0 (\varepsilon_c - \tilde{\varepsilon}_c^{pl}). \quad (2)$$

Нелинейные деформации бетона при сжатии и растяжении определяются по формулам

$$\varepsilon_b = \varepsilon_b - \frac{\sigma_b}{E_b}; \quad (3)$$

$$\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{bt} - \frac{\sigma_{bt}}{E_{bt}}. \quad (4)$$

Пластические деформации бетона при сжатии и растяжении определяются по формулам

$$\varepsilon_b^{pl} = b_c \varepsilon_b; \quad (5)$$

$$\varepsilon_{bt}^{pl} = b_t \varepsilon_{bt}, \quad (6)$$

где  $b_c$  и  $b_t$  – параметры цикличности нагружения при сжатии и растяжении по [13].

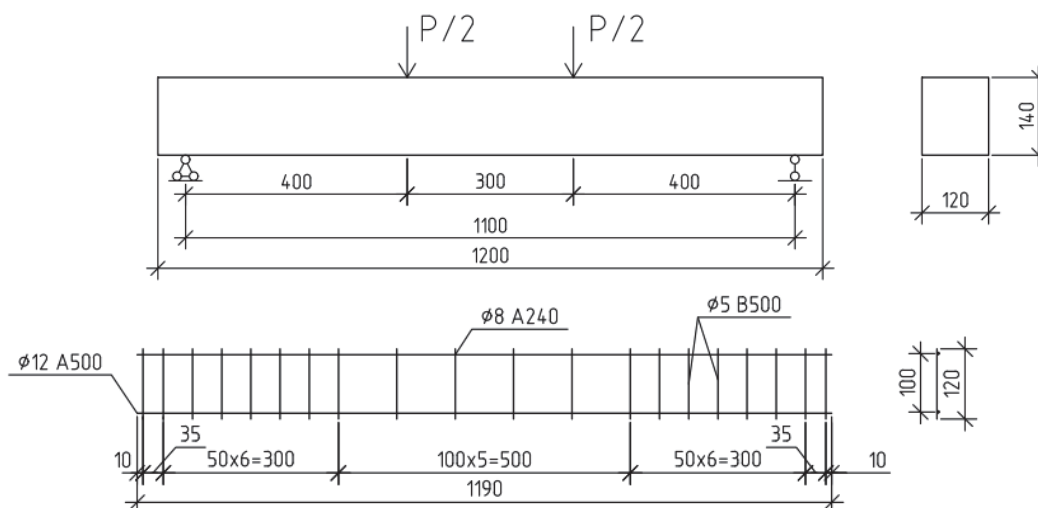
Коэффициенты повреждения тяжелого бетона при сжатии и растяжении определяются по формулам

$$d_b = 1 - \frac{\sigma_b}{E_b (\varepsilon_b - \varepsilon_b^{pl})}; \quad (7)$$

$$d_{bt} = 1 - \frac{\sigma_{bt}}{E_b (\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{bt}^{pl})}. \quad (8)$$

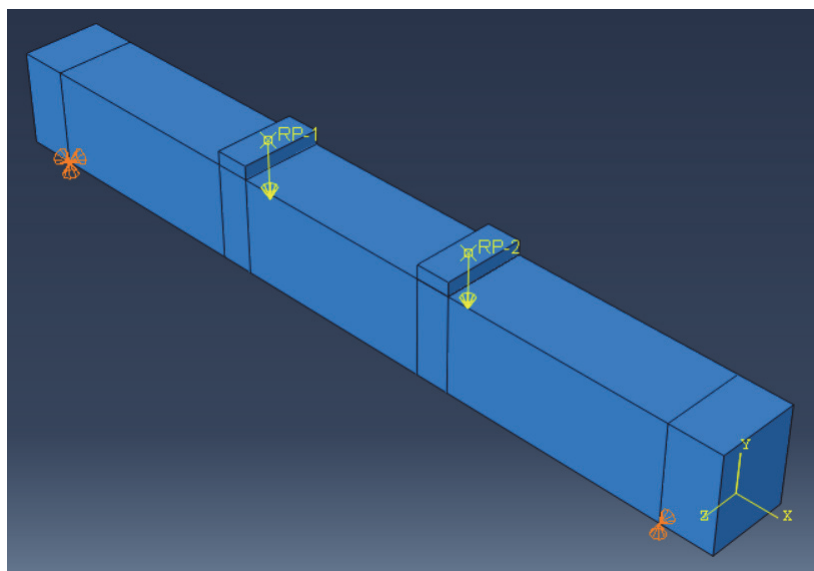
## Методы

В данном исследовании моделируется работа железобетонной балки прямоугольного сечения при испытании на изгиб, результаты сравниваются с экспериментальными данными [19] для железобетонной балки прямоугольного сечения из бетона В22,5 плотностью 2300 кг/м<sup>3</sup>. Армирование балки выполняется одиночным каркасом, в качестве рабочей и конструктивной арматуры каркасов использовалась стальная горячекатаная арматура  $\varnothing$  12 мм класса А500 и  $\varnothing$  8 мм класса А240. Роль поперечной арматуры выполняет холоднотянутая проволока  $\varnothing$  5 мм из низкоуглеродистой стали класса В500. Геометрические размеры и схема армирования железобетонной балки показаны на рис. 2.



**Рис. 2.** Схема армирования и нагружения железобетонной балки  
**Figure 2.** Scheme of reinforcement and loading of a reinforced concrete beam

Геометрические характеристики железобетонной балки задавались объемными и стержневыми элементами для тела бетона и стержней арматуры соответственно (рис. 3).



**Рис. 3.** 3D-вид исследуемой железобетонной балки  
**Figure 3.** 3D view of the investigated reinforced concrete beam

Физико-механические характеристики бетона задавались упругими и пластичными свойствами (табл. 1), которые были определены по формулам (3)–(8). Исходные зависимости сжимающих и растяги-



вающих напряжений  $\sigma_c$  и  $\sigma_t$ , а также деформации бетона при сжатии и растяжении  $\varepsilon_c$  и  $\varepsilon_t$  получены из экспериментальной диаграммы состояния бетона, приведенной в [20].

Таблица 1

## Физико-механические характеристики бетона

Начальный модуль упругости $E_b$ , МПа		Коэффициент Пуассона	
31 500 МПа		0,2	
Напряжения и деформации при сжатии		Повреждение бетона при сжатии	
Напряжения $\sigma_b$ , МПа	Пластические деформации $\varepsilon_b$	Коэффициент повреждения $d_b$	Пластические деформации $\varepsilon_b$
12,5	0	0	0
14,779363	0,000015	0	0,000015
16,897181	0,00004	0	0,00004
18,815096	0,000079	0	0,000079
20,499689	0,000132	0	0,000132
21,925443	0,000202	0	0,000202
22,354643	0,001964	0,105814	0,001964
20,860155	0,002386	0,165594	0,002386
19,314226	0,002811	0,227431	0,002811
18,549152	0,003023	0,258034	0,003023
15,682397	0,00386	0,372704	0,00386
13,23977	0,004669	0,470409	0,004669
12,184584	0,005062	0,512617	0,005062
11,69608	0,005257	0,532157	0,005257
10,792054	0,005641	0,568318	0,005641
9,977867	0,006019	0,600885	0,006019
8,905476	0,006576	0,643781	0,006576
7,5	0,007448	0,7	0,007448
Напряжения и деформации при растяжении		Повреждение бетона при растяжении	
Напряжения $\sigma_{bt}$ , МПа	Пластические деформации $\varepsilon_{bt}$	Коэффициент повреждения $d_{bt}$	Пластические деформации $\varepsilon_{bt}$
3	0	0	0
1,664354	0,000281	0,445215	0,000281
1,179148	0,000507	0,606951	0,000507
0,923358	0,000718	0,692214	0,000718
0,76383	0,000923	0,74539	0,000923
0,654173	0,001124	0,781942	0,001124
0,573836	0,001324	0,808721	0,001324
0,512265	0,001522	0,829245	0,001522
0,463463	0,00172	0,845512	0,00172
0,423761	0,001917	0,858746	0,001917
Параметры модели пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP)			
Угол дилатации	Эксцентриситет	$f_{b0}/f_{c0}$	Параметр вязкости
35	0,1	1,16	0,667

Table 1

## Physical and mechanical characteristics of concrete

The initial modulus of elasticity $E_b$ , MPa		Poisson's Ratio	
31 500 MPa		0.2	
Stress and strain in compression		Damage of concrete under compression	
Stress $\sigma_b$ , MPa	Plastic deformation $\varepsilon_b$	Damage factor $d_b$	Plastic deformation $\varepsilon_b$
12.5	0	0	0
14.779363	0.000015	0	0.000015
16.897181	0.00004	0	0.00004
18.815096	0.000079	0	0.000079
20.499689	0.000132	0	0.000132
21.925443	0.000202	0	0.000202
22.354643	0.001964	0.105814	0.001964
20.860155	0.002386	0.165594	0.002386
19.314226	0.002811	0.227431	0.002811
18.549152	0.003023	0.258034	0.003023
15.682397	0.00386	0.372704	0.00386
13.23977	0.004669	0.470409	0.004669
12.184584	0.005062	0.512617	0.005062
11.69608	0.005257	0.532157	0.005257
10.792054	0.005641	0.568318	0.005641
9.977867	0.006019	0.600885	0.006019
8.905476	0.006576	0.643781	0.006576
7.5	0.007448	0.7	0.007448
Stress and strain tensile		Damage of concrete under tensile	
Stress $\sigma_{bt}$ , MPa	Plastic deformation $\varepsilon_{bt}$	Damage factor $d_{bt}$	Plastic deformation $\varepsilon_{bt}$
3	0	0	0
1.664354	0.000281	0.445215	0.000281
1.179148	0.000507	0.606951	0.000507
0.923358	0.000718	0.692214	0.000718
0.76383	0.000923	0.74539	0.000923
0.654173	0.001124	0.781942	0.001124
0.573836	0.001324	0.808721	0.001324
0.512265	0.001522	0.829245	0.001522
0.463463	0.00172	0.845512	0.00172
0.423761	0.001917	0.858746	0.001917
Parameters of the model plastic fracture of concrete damage (CDP)			
Dilation angle	Eccentricity	$f_{b0}/f_{c0}$	Viscosity parameter
35	0.1	1.16	0.667

Для арматуры так же использовалась комбинация упругих свойств и модели пластичности металла, представленные в табл. 2.

Таблица 2

## Параметры модели пластичности металла

Начальный модуль упругости $E_s$ , МПа	Коэффициент Пуассона
210 000 МПа	0,3
Напряжения и деформации при растяжении	
Напряжения $\sigma_s$ , МПа	Пластические деформации $\varepsilon_s$ , %
Арматура класса А240	
160	0
240	0,19
Арматура класса А500	
372	0
500	0,23

Table 2

## Parameters of the metal plasticity model

Initial modulus of elasticity $E_s$ , MPa	Poisson's ratio
210 000 MPa	0.3
Tensile stresses and deformations	
Stresses $\sigma_s$ , MPa	Plastic deformations $\varepsilon_s$ , %
Reinforcement of class A240	
160	0
240	0.19
Reinforcement of class A500	
372	0
500	0.23

Нагружение балки выполнялось с помощью приращения по 5% от разрушающей нагрузки  $P_{ср}$ , которая составляла 40,218 кН. Задание статической нагрузки осуществлялось с помощью двух стальных пластин  $120 \times 50 \times 20$  мм, которые находились по краям центральной трети расчетного пролета. Расчетная схема – шарнирно опертая балка на двух опорах.

Первая опора ограничивалась в перемещении по плоскостям  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ , вторая – по плоскостям  $U_1$  и  $U_2$ . Далее определялись места контактного взаимодействия исследуемой балки, опор и элементов приложения нагрузки. В итоге модель тела бетона и опор разбивалась на объемные конечные элементы арматура разбивалась на отрезки (рис. 4).

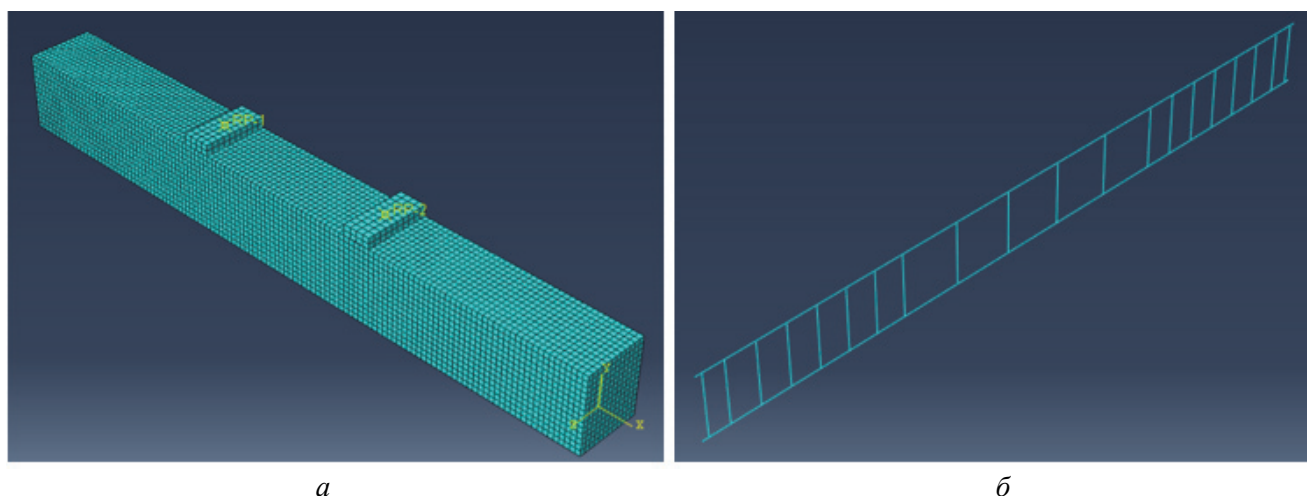
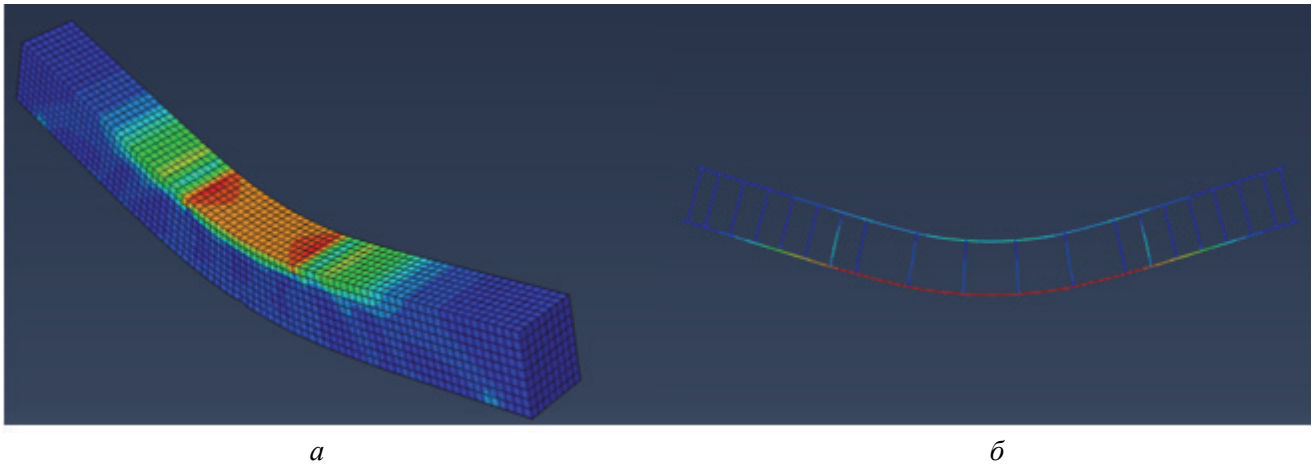


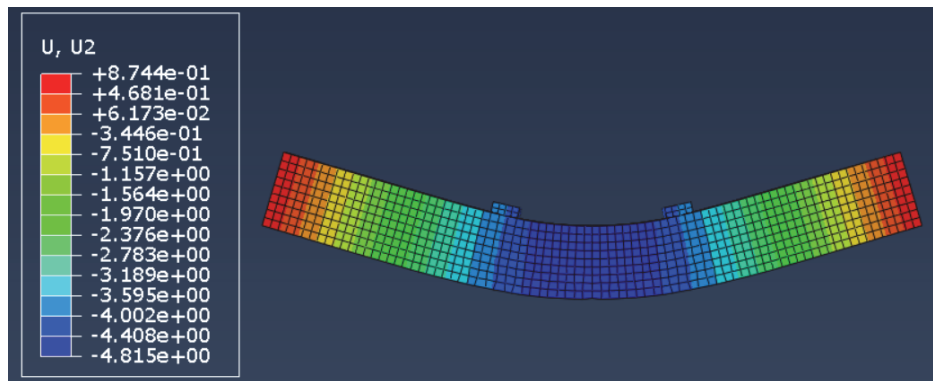
Рис. 4. Разбивание модели балки на объемные (а) и стержневые (б) конечные элементы  
Figure 4. Splitting the beam model into volumetric (a) and rod (b) finite elements

## Результаты и обсуждение

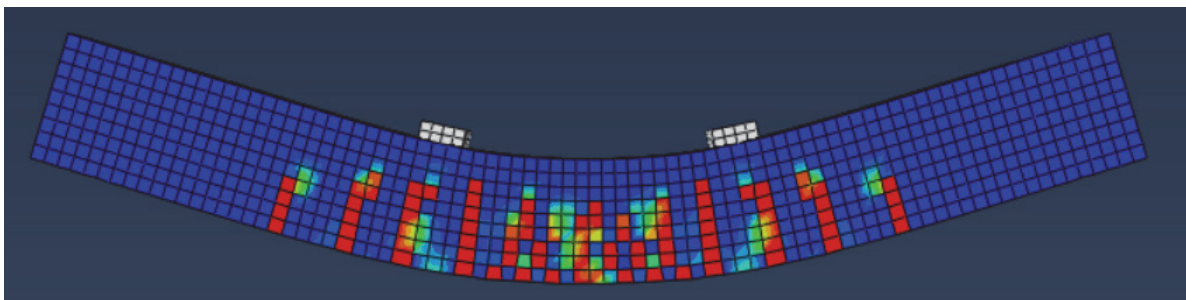
В результате конечно-элементного расчета были получены распределения напряжений в бетоне и арматуре по Мизесу (рис. 5), деформации конечных элементов вдоль главных осей (рис. 6), а также модель повреждения бетона при нарастании нагрузки (рис. 7).



**Рис. 5.** Распределение напряжений бетона (а) и арматуры (б) по Мизесу, МПа  
**Figure 5.** Concrete (a) and reinforcement (b) Mises stress distribution, MPa



**Рис. 6.** Деформации вдоль вертикальной оси  $U_2$  (прогибы балки  $f$ ) при нагрузке 32 кН  
**Figure 6.** Deformations along the vertical axis  $U_2$  (deflections of the beam  $f$ ) at a load of 32 kN



**Рис. 7.** Процесс раскрытия трещин в железобетонной балке при нагрузке 32 кН  
**Figure 7.** The process of cracking in a reinforced concrete beam at a load of 32 kN

Для верификации результатов данного исследования с экспериментальными данными были выбраны критерии: нагрузка трещинообразования и величина максимального прогиба балки  $f$  при нагрузках 16, 24 и 32 кН. Нагрузкой трещинообразования в данном случае является величина нагрузки, при которой относительные деформации в растянутой зоне бетона достигают предельных значений  $\varepsilon_{bt}$ , равных 0,00012 (рис. 8).

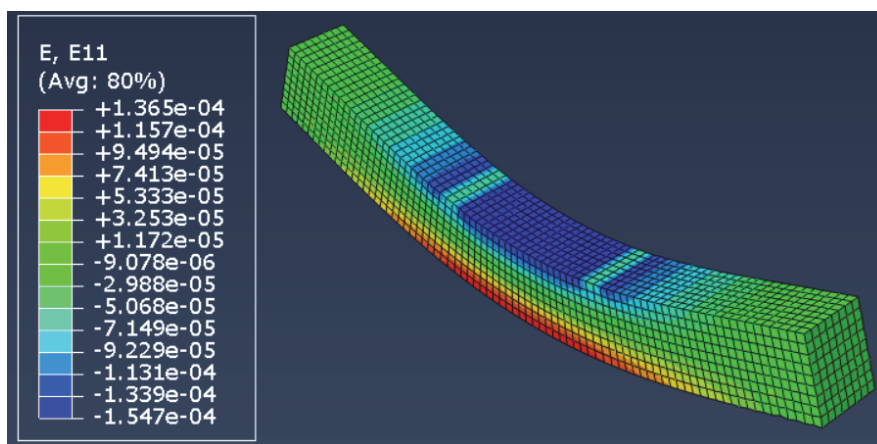


Рис. 8. Относительные деформации в бетоне при нагрузке 6,85 кН  
 Figure 8. Relative deformations in concrete at a load of 6.85 kN

На основании результатов численного моделирования и экспериментальных данных, представленных в табл. 3, можно сделать следующие выводы:

- расчетный прогиб балки при нагрузке 16 кН на 2 % меньше, при нагрузке 24 кН на 3,6 % больше, а при нагрузке 36 кН на 1,8 % меньше средних экспериментальных значений прогибов соответственно;
- бетон в растянутой зоне достигает предельной величины растяжимости при нагрузке 6,85 кН, что является моментом трещинообразования. Расчетная нагрузка оказалась на 4,9 % больше экспериментальной.

Таблица 3

Результаты численного моделирования и экспериментальных данных

Нагрузка, кН	Максимальные напряжения бетона (по Мизесу), МПа	Максимальные напряжения арматуры (по Мизесу), МПа	Прогиб, мм	Нагрузка трещинообразования, кН
16	10,97	152,5	1,726	6,85
24	17,05	279,1	3,343	
32	21,3	372,6	4,815	

Table 3

Results of numerical modeling and experimental data

Load, kN	Maximum concrete stresses (by Mises), MPa	Maximum reinforcement stresses (by Mises), MPa	Deflection, mm	Crack formation load, kN
16	10.97	152.5	1.726726	6.85
24	17.05	279.1	3.343	
32	21.3	372.6	4.815	

### Заключение

Проведена верификация результатов численного расчета изгибаемых железобетонных элементов с экспериментальными данными при различных степенях нагружения. Наибольшее отклонение расчетного прогиба балки составляет 3,6 % при нагрузке 24 кН, а расчетная разрушающая нагрузка на балку на 4,9 % больше экспериментальной, что подтверждают высокую сходимость и говорит о точности примененной модели пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP) в ПК Simulia Abaqus для расчета железобетонных элементов, работающих на изгиб.

### Список литературы

1. Карпунин В.Г., Голубева Е.А. Компьютерное моделирование строительных конструкций зданий и сооружений // Архитектон: известия вузов. 2019. № 4 (68). URL: [http://archvuz.ru/2019\\_4/16](http://archvuz.ru/2019_4/16) (дата обращения: 01.02.2023).

2. Бондаренко В.М., Римшин В.И. Квазилинейные уравнения силового сопротивления и диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$  бетона // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 6. С. 40–44.
3. Карпенко Н.И., Колчунов В.И., Травуш В.И. Расчетная модель сложнапряженного железобетонного элемента коробчатого сечения при кручении с изгибом // *Научный журнал строительства и архитектуры*. 2021. № 2 (62). С. 9–26. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.62.2.001>
4. Крючков А.А. Напряженно-деформированное состояние изгибаемых железобетонных элементов сплошного и составного сечения на основе уточненной нелинейной методики расчета // *Вестник Белгородского государственного технологического университета имени В.Г. Шухова*. 2022. № 4. С. 82–91. <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2021-7-4-82-91>
5. Бондаренко В.М., Римшин В.И. Остаточный ресурс силового сопротивления поврежденного железобетона // *Вестник РААСН*. 2005. № 9. С. 119–126.
6. Mander J.B., Priestley M.J.N., Park R. Theoretical stress-strain model for confined concrete // *Journal of Structural Engineering, ASCE*. 1988. Vol. 114. No. 8. Pp. 1804–1826.
7. Бондаренко В.М., Боровских А.В., Марков С.В., Римшин В.И. Элементы теории реконструкции железобетона: монография. М., 2002. 190 с.
8. Варламов А.А., Римшин В.И. Модели поведения бетона. Общая теория деградации. М.: ИНФРА-М, 2019. 436 с.
9. Ларионов Е.А., Римшин В.И., Василькова Н.Т. Энергетический метод оценки устойчивости сжатых железобетонных элементов // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2012. № 2. С. 77–81.
10. Римшин В.И., Меркулов С.И. Элементы теории развития бетонных конструкций с неметаллической композитной арматурой // *Промышленное и гражданское строительство*. 2015. № 5. С. 38–42.
11. Теличенко В.И., Римшин В.И. Критические технологии в строительстве // *Вестник Отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук*. 1998. № 4. С. 16–18.
12. Abaqus 6.14. Abaqus/CAE User's Guide. URL: <http://wufengyun.com/v6.14/books/usi/default.htm> (дата обращения: 20.09.2022).
13. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E. A plastic-damage model for concrete // *International Journal of Solids and Structures*. 1989. Vol. 25. No. 3. Pp. 299–326.
14. Квасников А.А. Методика расчета взаимодействия бетона и арматуры железобетонных конструкций в программном комплексе Abaqus // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 1. С. 65–70.
15. Shen X., Yang L., Zhu F. A plasticity-based damage model for concrete // *Advances in Structural Engineering*. 2004. Vol. 7. Pp. 461–467.
16. Taqieddin Z., Voyiadjis G. Studying the effect of a hydrostatic stress-strain reduction factor on damage mechanics of concrete materials // *Journal of Mechanical Behavior of Materials*. 2013. Vol. 22. Pp. 149–159. <https://doi.org/10.1515/jmbm-2013-0022>
17. Kueres D., Stark A., Herbrand M., Clalien M. Finite element simulation of concrete with a plastic damage model – basic studies on normal strength concrete and UHPC // *Bauingenieur: Zeitschrift fuer das Gesamte Bauwesen*. 2015. Vol. 90. No. 6. Pp. 252–264.
18. Rakic D., Bodić A., Milivojevic N., Dunić V., Živković M. Concrete damage plasticity material model parameters identification // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2021. Vol. 15. Pp. 111–122. <https://doi.org/10.24874/jsscm.2021.15.02.11>
19. Обернихин Д.В., Нукулин А.И. Экспериментальные исследования прочности, трещиностойкости и деформативности железобетонных балок трапециевидного и прямоугольного поперечных сечений // *Инновационная наука*. 2016. № 8–2. С. 73–77.
20. Попов В.М., Плюснин М.Г. Влияние деформационных характеристик бетона на несущую способность изгибаемых железобетонных элементов // *Промышленное и гражданское строительство*. 2015. № 8. С. 5–10.

## References

1. Karpunin V.G., Golubeva E.A. Computer modeling of building structures. *Architecton: Proceedings of Higher Education*. 2019;(4). (In Russ.) Available from: [http://archvuz.ru/2019\\_4/16](http://archvuz.ru/2019_4/16) (accessed: 01.02.2023).
2. Bondarenko V.M., Rimshin V.I. Quasi-linear equations of force resistance and diagram  $\sigma$ – $\varepsilon$  of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(6):40–44. (In Russ.)
3. Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Travush V.I. Computational model of a complex-stressed reinforced concrete element of a box section during torsion with bending. *Scientific Journal of Construction and Architecture*. 2021;(2):9–26. (In Russ.)
4. Kryuchkov A.A. Stress-strain state of bent reinforced concrete elements of continuous and composite cross-section based on a refined nonlinear calculation method. *Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov*. 2022;(4):82–91. (In Russ.) <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2021-7-4-82-91>
5. Bondarenko V.M., Rimshin V.I. Residual resource of force resistance of damaged reinforced concrete. *Bulletin of the RAASN*. 2005;(9):119–126. (In Russ.)

6. Mander J.B., Priestley M.J.N., Park R. Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Structural Engineering, ASCE*. 1988;114(8):1804–1826.
7. Bondarenko V.M., Borovskikh A.V., Markov S.V., Rimshin V.I. *Elements of the theory of reinforced concrete reconstruction*. Moscow; 2002. (In Russ.)
8. Varlamov A.A., Rimshin V.I. *Models of concrete behavior. General theory of degradation*. Moscow: INFRA-M Publ.; 2019. (In Russ.)
9. Larionov E.A., Rimshin V.I., Vasilkova N.T. Energy assessment method stability of compressed reinforced concrete elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012;(2):77–81. (In Russ.)
10. Rimshin V.I., Merkulov S.I. Elements of the theory of development of concrete structures with non-metallic composite reinforcement. *Industrial and Civil Construction*. 2015;(5):38–42. (In Russ.)
11. Telichenko V.I., Rimshin V.I. Critical technologies in construction. *Bulletin of the Department of Construction Sciences of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences*. 1998;(4):16–18. (In Russ.)
12. *Abaqus 6.14. Abaqus/CAE User's Guide*. Available from: <http://wufengyun.com/v6.14/books/usi/default.htm> (accessed: 20.09.2022).
13. Lubliner J., Oliver J., Oñate E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 1989;25(3):299–326.
14. Kvasnikov A.A. Methodology for calculating the interaction of concrete and reinforcement of reinforced concrete structures in the ABAQUS software package. *Construction Mechanics and Calculation of Structures*. 2019;(1):65–70. (In Russ.)
15. Shen X., Yang L., Zhu F. A plasticity-based damage model for concrete. *Advances in Structural Engineering*. 2004;7:461–467.
16. Taqieddin Z., Voyiadjis G. Studying the effect of a hydrostatic stress-strain reduction factor on damage mechanics of concrete materials. *Journal of Mechanical Behavior of Materials*. 2013;22:149–159. <https://doi.org/10.1515/jmbm-2013-0022>
17. Kueres D., Stark A., Herbrand M., Clalien M. Finite element simulation of concrete with a plastic damage model – basic studies on normal strength concrete and UHPC. *Bauingenieur: Zeitschrift fuer das Gesamte Bauwesen*. 2015;90(6): 252–264.
18. Rakic D., Bodić A., Milivojevic N., Dunić V., Živković M. Concrete damage plasticity material model parameters identification. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2021;15:111–122. <https://doi.org/10.24874/jsscm.2021.15.02.11>
19. Obernikhin D.V., Nikulin A.I. Experimental studies of strength, crack resistance and deformability of reinforced concrete beams of trapezoidal and rectangular cross sections. *Innovative Science*. 2016;(8–2):73–77. (In Russ.)
20. Popov V.M., Plyusnin M.G. Influence of deformation characteristics of concrete on the bearing capacity of bent reinforced concrete elements. *Industrial and Civil Construction*. 2015;(8):5–10. (In Russ.)



DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-564-572  
UDC 624.012

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Stability exposure of building structural systems under environmental damage

Sergey Yu. Savin<sup>ID</sup>, Natalia V. Fedorova<sup>ID</sup>

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

✉ suwin@yandex.ru

### Article history

Received: August 12, 2022  
Revised: November 14, 2022  
Accepted: November 20, 2022

**Abstract.** Environmental impacts on reinforced concrete structures may cause a decrease of in resource of their robustness under design and unforeseen actions. The research in this field mainly focusses on investigation of the behavior of bending elements as eccentrically compressed and damaged by corrosion reinforced concrete elements such as columns require more intensive investigation. Thus, the study has the purpose to assess the influence of the depth of corrosion on the bearing capacity of eccentrically compressed reinforced concrete columns of building frames, as well as to evaluate the time for exhaustion of load capacity. The phenomenological model, which was proposed by V.M. Bondarenko, has been adopted in order to account long-term processes of corrosion damage. The study established an increase in the depth of corrosion damage leads to a decrease in the bearing capacity of eccentrically compressed reinforced concrete columns since the effective cross-sectional depth decreases which makes column more flexible. The relative cross-sectional depth lost strength resistance resource due to corrosion varies depending on the current stress-strain state of the reinforced concrete column that is adaptation mechanism of the structure to long-term actions. The exposure of building structural systems under environmental damage depends significantly on the parameters of the action as well as the stress-strain state of the structural element. The paper established that it may differ by several times depending on avalanche or clogging damage scenario.

**Keywords:** reinforced concrete, column, corrosion, load capacity, exposure, slenderness ratio

### For citation

Savin S.Yu., Fedorova N.V. Stability exposure of building structural systems under environmental damage. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022; 18(6):564–572. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-564-572>

## Экспозиция устойчивости длительно нагруженных конструктивных систем зданий при средовом повреждении

С.Ю. Савин<sup>ID</sup>, Н.В. Федорова<sup>ID</sup>

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ suwin@yandex.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 12 августа 2022 г.  
Доработана: 14 ноября 2022 г.  
Принята к публикации: 20 ноября 2022 г.

**Аннотация.** Ряд аварий, произошедших в последние годы с объектами капитального строительства, показывает, что средовые воздействия на железобетонные конструктивные системы приводят с течением времени к снижению ресурса их силового сопротивления при особых аварийных воз-

**Sergey Yu. Savin**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-6697-3388, Scopus Author ID: 57052453700, ResearcherID: M-8375-2016, eLIBRARY SPIN-code: 1301-4838; suwin@yandex.ru

**Natalia V. Fedorova**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Director of the branch of National Research Moscow State University of Civil Engineering in Mytishchi, Head of the Department of Architectural and Construction Design, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5392-9150, Scopus Author ID: 57196437054, ResearcherID: O-8119-2015, eLIBRARY SPIN-code: 3365-8320; fedorovaNV@mgsu.ru

**Савин Сергей Юрьевич**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-6697-3388, Scopus Author ID: 57052453700, ResearcherID: M-8375-2016, eLIBRARY SPIN-код: 1301-4838; suwin@yandex.ru

**Федорова Наталья Витальевна**, доктор технических наук, профессор, директор филиала НИУ МГСУ в г. Мытищи, заведующая кафедрой архитектурно-строительного проектирования, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-5392-9150, Scopus Author ID: 57196437054, ResearcherID: O-8119-2015, eLIBRARY SPIN-код: 3365-8320; fedorovanv@mgsu.ru

© Savin S.Yu., Fedorova N.V., 2022

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>



**Для цитирования**

Савин С.Ю., Федорова Н.В. Экспозиция устойчивости длительно нагруженных конструктивных систем зданий при средовом повреждении // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 564–572. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-564-572>

действиях. При этом представленные в научной литературе результаты исследований по данному вопросу преимущественно относятся к изгибаемым элементам, в то время как применительно к внецентренно сжатым коррозионно повреждаемым железобетонным элементам рассмотрены либо частные аспекты силового сопротивления в условиях контакта конструкций с агрессивными средами, либо полученные расчетные зависимости достаточно сложные для их практического применения. В связи с этим цель исследования – оценить влияние глубины продвижения фронта коррозии на несущую способность внецентренно сжатых железобетонных элементов конструктивных систем зданий и сооружений, а также спрогнозировать время исчерпания несущей способности. Для учета длительных неравновесных процессов коррозионного повреждения использована феноменологическая модель В.М. Бондаренко. Установлено, что рост глубины коррозионного повреждения приводит к снижению несущей способности внецентренно сжатых железобетонных элементов вследствие уменьшения эффективной рабочей высоты сечения и увеличения их гибкости. При этом относительная глубина разрушенного слоя, не учитываемого в расчете, меняется в зависимости от текущего напряженно-деформированного состояния, реализуя механизм приспособления конструкции к меняющимся во времени параметрам воздействий. Время достижения критической глубины коррозионного повреждения существенно зависит от параметров средовых воздействий и напряженно-деформированного состояния элемента и может отличаться в несколько раз при реализации траекторий лавинного или колыматационного повреждения.

**Ключевые слова:** железобетон, колонна, коррозия, несущая способность, экспозиция, гибкость

## Introduction

Structural systems of buildings and structures during their service life are subject to the action of combinations of force and environmental factors. The latter one considers exposure to high or extremely low temperatures, aggressive media action. With regard to reinforced concrete structural systems, environmental impact factors can lead to degradation of the mechanical characteristics of cross sections, a decrease in the adhesion resistance between reinforcement and concrete. The result of this may be the exhaustion of the bearing capacity of individual load-bearing elements and, as a result, the complete or partial collapse of the building's load-bearing system, as happened in the case of a partial collapse of the building of a residential complex in Surfside [1] or the collapse of the pavement structure of the Basmanny market [2]. In this regard, an urgent problem is the prediction of changes in the parameters of the survivability of reinforced concrete structural systems of buildings during the evolutionary accumulation of environmental damage in them.

The studies presented in the scientific literature on the problem of the force resistance of reinforced concrete structural elements under conditions of their contact with aggressive media can be conditionally separated into two groups: a) studies of the effect of corrosion damage of longitudinal and transverse working reinforcement on the force resistance of elements [3–12]; b) studies of degradation processes in concrete under various types and concentrations of aggressive media, the shape and size of samples, stress-strain state, etc. [13–18]. However, it is appropriate to note that the degradation processes of concrete and reinforcing steel, as a rule, occur in load-bearing elements at the same time and should be taken into account jointly when assessing the exposure of the survivability of a structural system, following the terminology [3; 7; 19].

Given the large number of factors affecting the development of non-equilibrium processes in reinforced concrete elements exposed to aggressive media, as well as the largely random nature of the change in the parameters of impacts over time, for practical purposes, they often resort to the use of phenomenological degradation functions [6; 8; 12]. The studies presented in the scientific literature on this problem mainly cover the issues of resistance of bent reinforced concrete elements [6; 10; 12; 18; 20]. For eccentrically compressed elements, the evaluation of their load-bearing capacity is complicated by the influence of the phenomenon of buckling, changes in stiffness and eccentricities of the application of longitudinal force overtime due to the accumulation of corrosion damage. In this regard, the results of research in this area mainly cover particular aspects of force resistance under conditions of contact of structures with aggressive media [15; 17] or lead to calculated dependences that are quite complex for their practical application [3].

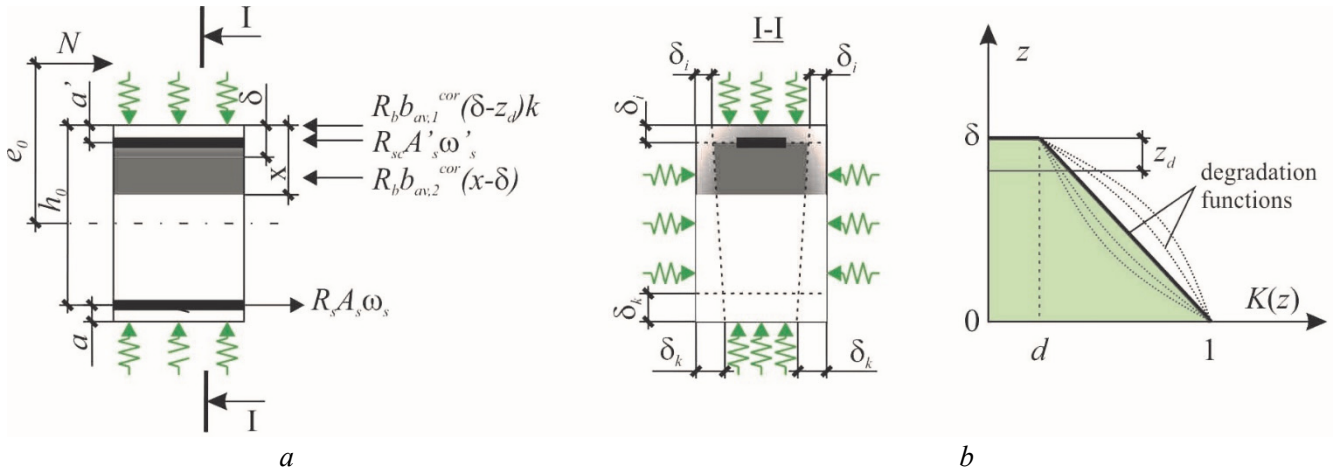
Therefore, the presented study was aimed to assess the effect of the depth of corrosion front advancement on the bearing capacity of the structural system of reinforced concrete frames of buildings in case of corrosion damage to eccentrically compressed columns, as well as to predict the exposure of stability which is the time of operation under conditions of force and environmental impact until the load bearing capacity is exhausted.

### Methods

Let us use the hypothesis of the constant change in the parameters of the force resistance of corrosion-damaged concrete [6; 7] (Figure 1, a):

$$\frac{R_{b(bt)}^{\text{cor}}(t)}{R_{b(bt)}} = \frac{E_b^{\text{cor}}(t)}{E_b} = \frac{\varepsilon_{b2(bt2)}^{\text{cor}}(t)}{\varepsilon_{b2(bt2)}}, \quad (1)$$

where  $R_{b(bt)}$ ,  $E_b$ ,  $\varepsilon_{b2(bt2)}$  is the design compressive (tensile) resistance, initial modulus of elasticity, ultimate compressive (tensile) strain of concrete without corrosion damage;  $R_{b(bt)}^{\text{cor}}(t)$ ,  $E_b^{\text{cor}}(t)$ ,  $\varepsilon_{b2(bt2)}^{\text{cor}}(t)$  are the same for corrosion-damaged concrete with duration of exposure to an aggressive environment  $t$ .



**Figure 1.** Design scheme of an eccentrically compressed corrosion-damaged reinforced concrete element: a – cross-sectional design scheme; b – a general view of the degradation function for the concrete layer damaged with corrosion

The change in the parameters of the force resistance along the depth of the corrosion-damaged layer of concrete, we accept an empirically established degradation function of the form (Figure 1, b) [6; 21]:

$$K(z) = \sum_0^2 a_i z^i. \quad (2)$$

Taking into account the above assumptions, the bearing capacity of an eccentrically compressed corrosion-damaged element of a rectangular element is determined by the expressions:

– for  $x \geq \delta$ :

$$(Ne_0\eta)_{\text{ult}} = R_b \left[ b_{av,1}^{\text{cor}}(\delta - z_d)k(h_0 - \delta + z_{c.t,1}) + b_{av,2}^{\text{cor}}(x - \delta) \left( h_0 - \frac{x + \delta}{2} \right) \right] + \left( R_{sc} A'_s \omega'_s - \frac{N}{2} \right) (h_0 - a'); \quad (3)$$

– for  $x < \delta$ :

$$(Ne_0\eta)_{\text{ult}} = R_b b_{av,1}^{\text{cor}}(x - z_d)k(h_0 - x + z_{c.t,1}) + \left( R_{sc} A'_s \omega'_s - \frac{N}{2} \right) (h_0 - a'). \quad (4)$$

In expressions (3), (4)  $\eta = 1 / (1 - N / N_{cr})$  is the coefficient that takes into account the effect of buckling, which can be determined in accordance with the current regulatory documents<sup>1</sup>;  $N$ ,  $N_{cr}$  are the calculated value of

<sup>1</sup> SP 63.13330.2018. *Concrete and reinforced concrete structures. General provisions.* (In Russ.) Available from: <https://docs.cntd.ru/document/554403082> (accessed: 20.06.2022); BS EN 1992-1-1. *Eurocode 2. Design of concrete structures. Part 1-1. General rules and rules for buildings.* British Standards Institution; 2004. Available from: <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1992.1.1.2004.pdf> (accessed: 20.06.2022).

the longitudinal force, determined by the static calculation of the carrier system for the main combination of loads, and the value of the conditional critical force in the event of buckling;  $R_b$ ,  $R_{sc}$ ,  $R_s$  are design resistance of concrete to compression, reinforcing steel to compression and tension respectively;  $A_s$ ,  $A'_s$  are the area of tensioned (least compressed) and compressed longitudinal reinforcement;  $h_0$  is the working depth of the section;  $\delta$  is the depth of corrosion damage of the element;  $\omega_s$ ,  $\omega'_s$  are coefficients that take into account the reduction in the effective cross section of bars of longitudinal tension and compression reinforcement and (or) the reduction in adhesion resistance due to corrosion damage to reinforcement and concrete;  $b_{av,1}^{cor}$ ,  $b_{av,2}^{cor}$  are the average reduced width of the cross section within the depth of the corrosion-damaged layer  $\delta$  and within the range from  $\delta$  to  $(x - \delta)$  respectively, determined from the expression:

$$b_{av,1(2)}^{cor} = b - 2\delta_{i(k)} \left( 1 - \frac{1}{\delta_{i(k)}} \int_0^{\delta_{i(k)}} K(z) dz \right);$$

$k$  is the reduction factor for the area of the corrosion-damaged part of the section, determined from the expression:

$$k = \frac{1}{\delta - z_d} \int_0^{\delta - z_d} K(z) dz;$$

$x$  is the height of the compressed zone of the section, determined at  $x \leq x_R$  by the formula

$$x = \delta + \frac{N + R_s A_s \omega_s - R_{sc} A'_s \omega'_s - R_b b_{av,1}^{cor} (\delta - z_d) k}{R_b b_{av,2}^{cor}};$$

– for  $x > x_R$  by formula

$$x = \delta + \frac{N + R_s A_s \omega_s \frac{1 + \xi_R}{1 - \xi_R} - R_{sc} A'_s \omega'_s - R_b b_{av,1}^{cor} (\delta - z_d) k}{R_b b_{av,2}^{cor} + \frac{2R_s A_s \omega_s}{h_0 (1 - \xi_R)}},$$

where  $z_d$  is the thickness of the corrosion-damaged layer, counted from the most compressed face, for which the condition  $\varepsilon \leq \varepsilon_{b2} \cdot K(z_d)$  is not satisfied, i.e., it lost resource of force resistance.

The limiting value of the height of the compressed zone  $x_R$  of the corrosion-damaged section with a two-line approximation of the state diagram of concrete is determined from the expression:

$$x_R = \frac{\alpha(h_0 - z_d)}{1 + \frac{\varepsilon_{s,el}}{\varepsilon_{b2} K(z_d)}},$$

where  $\alpha$  is determined depending on the deformation at a depth  $\delta$  of a corrosion-damaged element by the formula:

– for  $\varepsilon(\delta) > \varepsilon_{b1,red}$ :

$$\alpha = 1 - \frac{\varepsilon_{b1,red}}{2\varepsilon_{b2} K(z_d)};$$

– for  $(\delta) \leq \varepsilon_{b1,red}$   $\alpha = 0.5$ .

When determining the conditional critical force, the stiffness of the reduced corrosion-damaged section in the first approximation will be determined by the formula

$$B_{red,cor} = k_b E_b \int_{-\frac{h}{2} - z_{c.t.}}^{\frac{h}{2} - z_{c.t.}} b(z) K(z) z^2 dz + k_s E_s \left( A_s \omega_s \left( \frac{h}{2} + z_{c.t.} - a \right)^2 + A'_s \omega'_s \left( \frac{h}{2} - z_{c.t.} - a' \right)^2 \right),$$

where  $k_b, k_s$  are the coefficients according to SP 63.13330.2018, EN 1992-1-1, taking into account the physical non-linearity of concrete and reinforcement deformation;  $z_{c.t}$  is the displacement of the geometric center of gravity of a corrosion-damaged section relative to the center of gravity of the same section, which is not exposed to an aggressive environment.

The displacement of the geometric center of gravity  $z_{c.t}$  leads to an increase in the eccentricity of the application of the longitudinal force, so it should be added to the calculated eccentricity obtained for the element without corrosion damage.

To assess the exposure of the survivability of the structural system of reinforced concrete frames of buildings in case of corrosion damage to the columns, which is determined by the time of exhaustion of the bearing capacity, we used the phenomenological model of V.M. Bondarenko [7], according to which the depth of corrosion damage of a structural element for time  $t$  can be found from the expression

$$\delta(t, t_0) = \delta(\infty, t_0) \left\{ 1 - \left[ \alpha(1 - m)(t - t_0) + \left( 1 - \frac{\delta(t_0, t_0)}{\delta(\infty, t_0)} \right)^{1-m} \right]^{\frac{1}{1-m}} \right\}, \quad (5)$$

where  $t, t_0$  are the current time and the start time of the observation;  $\delta(\infty, t_0)$  is the limiting depth of corrosion damage with the established parameters of the aggressive environment, the shape and material of the structural element, as well as the stress-strain state (Figure 2);  $\delta(t_0, t_0)$  is the depth of corrosion damage at the time of the start of observation (if the start of observation coincides with the beginning of exposure to an aggressive environment, then  $\delta(t_0, t_0) = 0$ );  $\alpha, m$  are empirically set parameters (Figure 2).

From (5) we find the time  $t_{cr}$  to reach the critical depth of corrosion damage and, accordingly, the exhaustion of the resource of the power resistance of the element of the reinforced concrete carrier system:

$$t_{cr} - t_0 = \frac{1}{\alpha(1 - m)} \left[ \left( 1 - \frac{\delta_{cr}(t_{cr}, t_0)}{\delta(\infty, t_0)} \right)^{1-m} - \left( 1 - \frac{\delta(t_0, t_0)}{\delta(\infty, t_0)} \right)^{1-m} \right]. \quad (6)$$

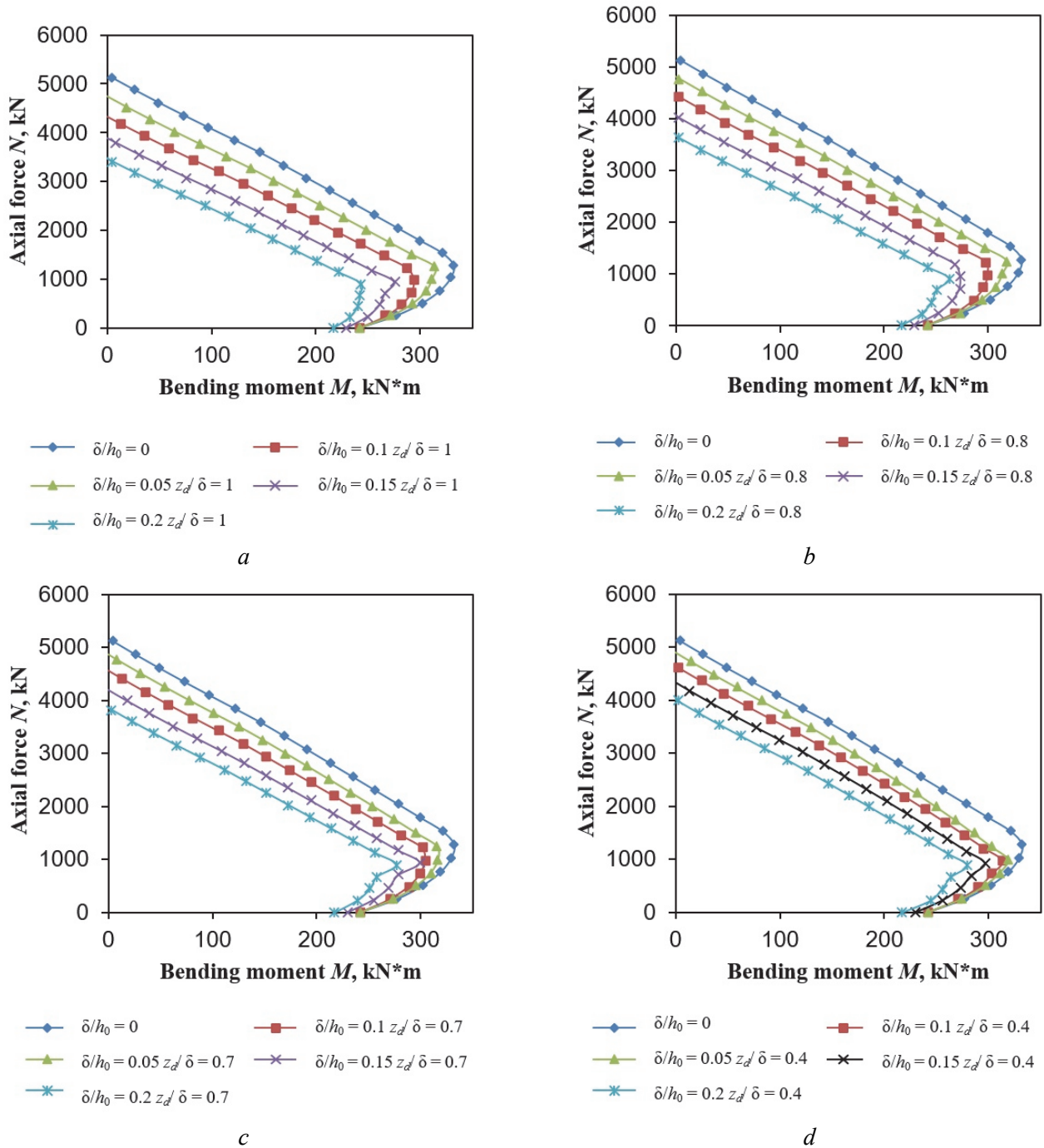
## Results and discussion

Let us evaluate the change in the parameters of the force resistance of a column with a section of 400×400 mm of a reinforced concrete frame of a multistory building exposed to an aggressive environment along all four faces. Column construction materials: class B30 concrete (normative resistance of concrete to axial compression  $R_{b,n} = 22$  MPa,  $E_b = 32\,500$  MPa), longitudinal working reinforcement – 4Ø32 A500 ( $R_{s,n} = R_{sc,n} = 500$  MPa,  $E_s = 200\,000$  MPa),  $a = a' = 50$  mm. By varying the parameters of the depth of corrosion damage  $\delta(t, t_0)$ ; the thickness of the corrosion-damaged layer  $z_d$ , which has exhausted the resource of force resistance, and the flexibility of the element  $\lambda_h$ , we determine the boundaries of the areas of the bearing capacity of such elements in the coordinate axes  $N - M$ , corresponding to a special limiting state<sup>2</sup>. At the same time, when constructing diagrams  $N - M$ , in order to take into account the effect of flexibility of reinforced concrete corrosion-damaged elements on their bearing capacity, we divide the right and left parts of expressions (3) and (4) by the coefficient of influence of buckling  $\eta$ . Diagrams of the bearing capacity of eccentrically compressed corrosion-damaged reinforced concrete elements in the coordinate axes  $N - M$  are shown in Figures 2–3.

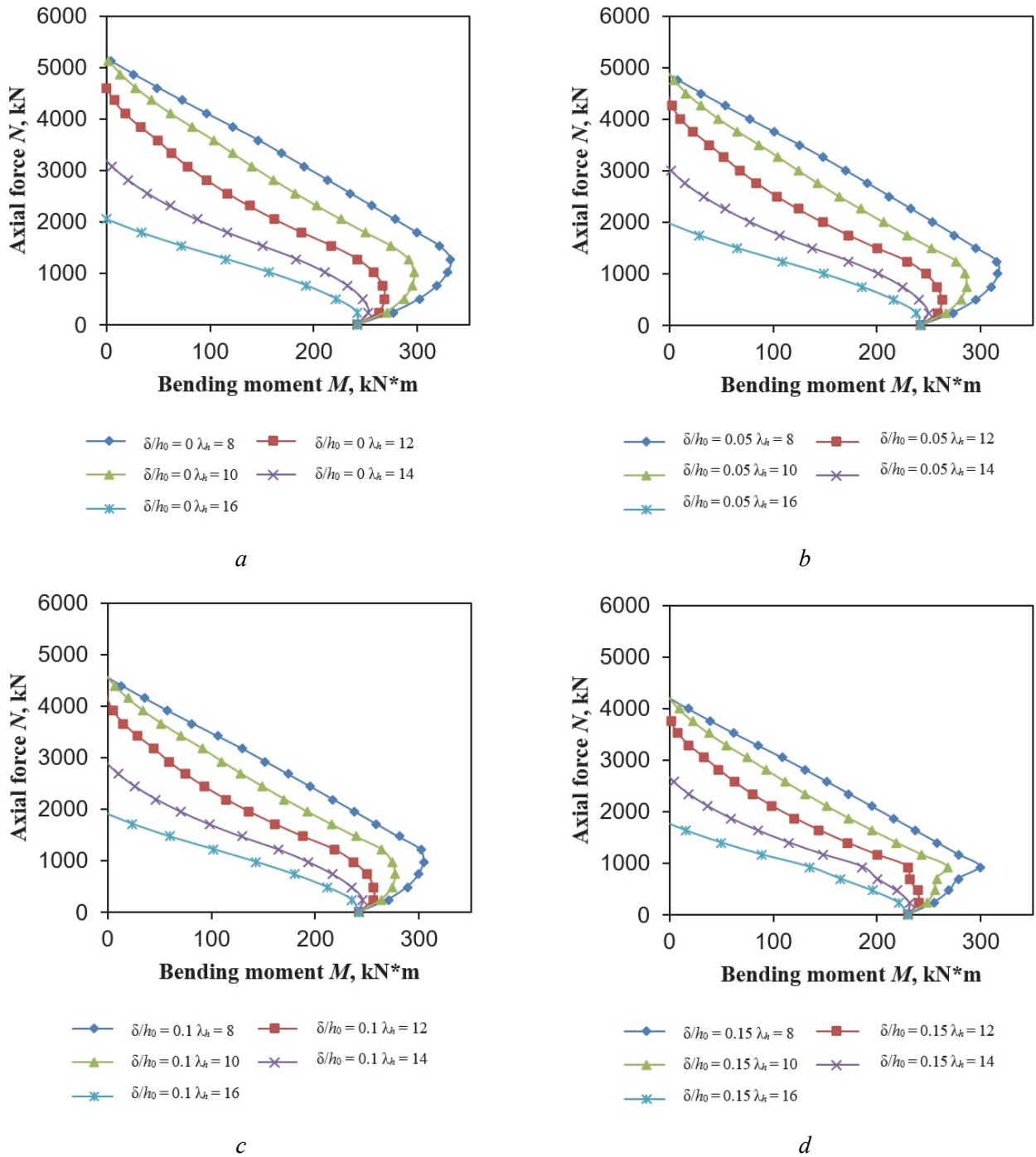
Analysis of diagrams in Figure 2 indicates that with an increase in the depth of corrosion damage, a decrease in the bearing capacity occurs due to a decrease in the effective working height of the section and the flexibility of the element. Thus, with flexibility  $\lambda_h = 8$  and an established relative depth of the destroyed layer  $z_d/\delta = 0.8$  for a relative depth of corrosion damage  $\delta/h_0 = 0.2$ , the limiting value of the longitudinal force decreases by 11.4%, and the limiting bending moment by 21.0% compared to an element undamaged by corrosion. In this case, the limiting moment for bending elements ( $N = 0$ ) decreases only when the longitudinal reinforcement bars are within the corrosion-damaged layer  $\delta$  (Figure 2 at  $\delta/h_0 = 0.15, 0.2$ ) and their effective area decreases cross section, as well as reduced adhesion resistance. It should be noted that a decrease in the relative depth of the damaged layer introduced into the calculation leads to an increase in the limiting value of the longi-

<sup>2</sup> BS EN 1992-1-1. *Eurocode 2. Design of concrete structures. Part 1-1. General rules and rules for buildings*. British Standards Institution; 2004. Available from: <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1992.1.1.2004.pdf> (accessed: 20.06.2022).

tudinal force for a fixed relative depth of corrosion damage  $\delta/h_0$ , which is associated with the redistribution of forces on the sections of the section not damaged by corrosion in elements with random and small eccentricities of the longitudinal force. At the same time, there is a downward shift of the limiting bending moment point in the diagram, which is due to a decrease in the limiting compressive strains  $\varepsilon_{b2(bt2)}^{cor}(t)$ . It is pertinent to note that the relative depth of the destroyed layer  $z_{raz}/\delta$ , taken fixed when plotting the diagrams in Figure 2, in fact, will change during loading of a structural element, realizing the mechanism of adaptation of the structure, therefore, to fully take into account the reserves of the bearing capacity, one should use the envelope of the  $N - M$  diagram constructed at a fixed value of the relative depth of corrosion damage  $\delta/h_0$  and a variable value of the relative depth of the destroyed layer  $z_{raz}/\delta$ .



**Figure 2.**  $M - N$  interaction diagrams for corrosion-damaged eccentrically compressed reinforced concrete elements with slenderness ratio  $\lambda_{ti} = 8$  depending on the relative depth of corrosion damage:  
*a* – for  $z_d/\delta = 1$ ; *b* – for  $z_d/\delta = 0.8$ ; *c* – for  $z_d/\delta = 0.6$ ; *d* – for  $z_d/\delta = 0.4$



**Figure 3.**  $M - N$  interaction diagrams depending on the slenderness ratio  $\lambda_h$  of eccentrically compressed reinforced concrete elements for  $z_d/\delta = 0.6$ :  
 a -  $\delta/h_0 = 0$ ; b -  $\delta/h_0 = 0.05$ ; c -  $\delta/h_0 = 0.1$ ; d -  $\delta/h_0 = 0.15$

With an increase in the flexibility of the elements  $\lambda_h$  over 12 (Figure 3), there is a decrease in the value of the limiting longitudinal force perceived by eccentrically compressed elements with random and small eccentricities. With flexibility  $\lambda_h = 16$ , there is an almost twofold decrease in the limiting longitudinal force perceived by the section, and the limiting bending moment corresponds to the case of transverse bending ( $N = 0$ ). At the same time, an increase in the relative depth of corrosion damage enhances this effect due to an increase in the effective flexibility of corrosion-damaged elements compared to elements without damage.

Let us evaluate the exposure of the bearing capacity of the column under consideration in continuous contact with a sulfate medium with  $\text{pH} = 3.5$ . To determine the parameters of equation (5), which determine the kinetics of the corrosion damage process, we used the experimental data presented in [10]. Taking  $\delta(\infty, t_0) = 0.5 h$ ,

corresponding to the corrosion of the entire section, we obtain the average value  $\alpha = -0.00024$ , which practically does not change when the parameter  $m$  changes. The results of determining the time to reach the depth of corrosion damage  $\delta_{cr}(t_{cr}, t_0)$  depending on the value of the parameter  $m$  are shown in Figure 4.

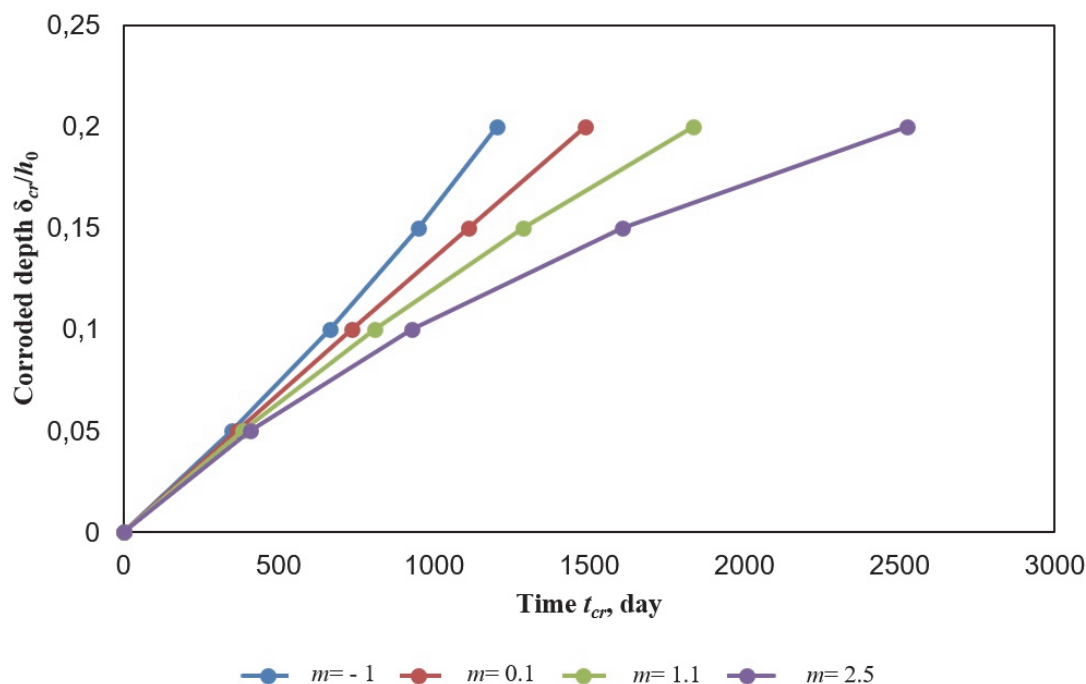


Figure 4. Time  $t_{cr}$  for reaching the critical depth of corrosion damage  $\delta_{cr}(t_{cr}, t_0)$

The time to reach the relative depth of corrosion damage  $\delta/h_0 = 0.2$  with the avalanche damage trajectory ( $m = -1$ ,  $t = 1203$  days, Figure 4) for the considered reinforced concrete element turned out to be almost two times less than the time to reach this depth with the avalanche damage trajectory clogging damage ( $m = 2.5$ ,  $t = 2523$  days). With the trajectory of filtration damage, reaching the same depth of corrosion damage will take  $t = 1488$  days.

### Conclusion

If the depth of corrosion damage increases then it leads to a decrease in the bearing capacity of eccentrically compressed reinforced concrete elements due to a decrease in the effective working height of the section and an increase in their flexibility. Then the relative depth of the damaged layer  $z_d/\delta$ , which is not taken into account in the calculation, varies depending on the current stress-strain state.

An increase in the flexibility of elements  $\lambda_f$  leads to a decrease in the value of the limiting longitudinal force perceived by eccentrically compressed reinforced concrete elements. At the same time, an increase in the relative depth of corrosion damage enhances this effect due to an increase in the effective flexibility of such elements compared to elements without damage.

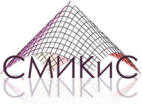
The duration of exposure under aggressive media until reaching the critical depth of corrosion damage depends significantly on the parameters of this media as well as the stress-strain state of the structural member and may vary in accordance with avalanche or clogging damage implementing.

### References

1. Kong X., Smyl D. Investigation of the condominium building collapse in Surfside, Florida: a video feature tracking approach. *Structures*. 2022;43:533–545. <http://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.06.009>
2. Nazarov Yu.V., Zhuk Yu.N., Simbirkin V.N., Egorov M.I. Basmanny market: analysis of design solutions and possible mechanisms of building destruction. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2007;211(2):49–55. (In Russ.)
3. Bondarenko V.M. Exposure of the stability of reinforced concrete columns operated in an aggressive environment. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2014;(3):27–34. (In Russ.)

4. Bondarenko V.M. Features of deformation of reinforced concrete during additional loading and unloading, associated with corrosion and energy dissipation of force resistance. *Building and Reconstruction*. 2010;27(1):3–11. (In Russ.)
5. Bondarenko V.M. Corrosion damage as a cause of avalanche destruction of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2009;(5):13–17. (In Russ.)
6. Bondarenko V.M., Klyueva N.V. Analysis of structures that change the design scheme due to corrosion damage. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2008;589(1):4–12. (In Russ.)
7. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Exposition of reinforced concrete viability. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2007;581(5):4–8. (In Russ.)
8. Selyaev V.P., Selyaev P.V., Alimov M.F., Sorokin E.V. Estimation of residual resources of reinforced concrete bending elements subjected to the action of chloride corrosion. *Building and Reconstruction*. 2017;74(6):49–58. (In Russ.) Available from: <https://construction.elpub.ru/jour/article/view/83> (accessed: 20.06.2022).
9. Xiao J., Long X., Qu W., Li L., Jiang H., Zhong Z. Influence of sulfuric acid corrosion on concrete stress-strain relationship under uniaxial compression. *Measurement*. 2022;187:110318. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110318>
10. Zhou C., Zhu Zh., Wang Zh., Qiu H. Deterioration of concrete fracture toughness and elastic modulus under simulated acid-sulfate environment. *Construction and Building Materials*. 2018;176:490–499. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.05.049>
11. Yang D., Yan Ch., Liu Sh., Zhang J., Hu Zh. Stress-strain constitutive model of concrete corroded by saline soil under uniaxial compression. *Construction and Building Materials*. 2019;213:665–674. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.03.153>
12. Wen Q.Q., Chen M.Ch. Study on the nonlinear performance degradation of reinforced concrete beam under chloride ion corrosion. *Engineering Failure Analysis*. 2021;124:105310. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105310>
13. Liu M., Jin L., Zhang R., Chen F., Du X. Combined effect of corrosion and strain rate on the bond behavior: a two-stage simulation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022;227:107438. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107438>
14. Smolyago G.A., Dronov V.I., Dronov A.V., Merkulov S.I. Investigation of influence of defects of reinforced concrete structures on corrosion processes of steel reinforcement. *Industrial and Civil Engineering*, 2014;12:25–27. (In Russ.)
15. Popov D.S. Experimental studies of dynamic properties of corrosion-damaged compressed reinforced concrete elements. *Building and Reconstruction*. 2022;100(2):55–64. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-100-2-55-64>
16. Tamrazyan A.G., Popov D.S., Ubysz A. To the dynamically loaded reinforced-concrete elements' calculation in the absence of adhesion between concrete and reinforcement. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;913:022012. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/913/2/022012>
17. Ma J., Yu L., Li B., Yu B. Stress-strain model for confined concrete in rectangular columns with corroded transverse reinforcement. *Engineering Structures*. 2022;267:114710. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114710>
18. Jeon C.H., Lee J.B., Lon S., Shim Ch.S. Equivalent material model of corroded prestressing steel strand. *Journal of Materials Research and Technology*, 2019;8(2):2450–2460. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2019.02.010>
19. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. The concept and directions of development of the theory of structural safety of buildings and structures under the influence of force and environmental factors. *Industrial and Civil Engineering*. 2013;(2):28–31. (In Russ.)
20. Fedorova N.V., Gubanova M.S., Savin S.Y. Deformation of intermediate zones of two-layers elements of reinforced concrete structures. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1425(1):012063. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012063>
21. Chupichev O.B. Models for calculating the force resistance of a corrosion-damaged reinforced concrete element. *Building and Reconstruction*. 2010;27(1):55–59. (In Russ.)





DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-573-583


UDC 624.012.35

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Analytical model of deformation of reinforced concrete columns based on fracture mechanics

Ashot G. Tamrazyan , Vladimir I. Chernik , Tatiana A. Matseevich , Ivan K. Manaenkov 

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

 tamrazian@mail.ru

### Article history

Received: August 15, 2022

Revised: October 22, 2022

Accepted: October 25, 2022

### Acknowledgements

This work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project “Theoretical and experimental design of new composite materials to ensure safety during the operation of buildings and structures in conditions of man-made and biogenic threats” No. FSWG-2020-0007).

### For citation

Tamrazyan A.G., Chernik V.I., Matseevich T.A., Manaenkov I.K. Analytical model of deformation of reinforced concrete columns based on fracture mechanics. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):573–583. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-573-583>

**Abstract.** When conducting seismic calculations of reinforced concrete buildings and structures, it is quite important to use nonlinear models of structural performance, including those taking into account the overcritical operation in the fracture stage. The application of such models is especially important if the structures have an initial damage from fire or corrosion, as well as mechanical damage caused by force factors. The purpose of this study is to develop an analytical model of the deformation of eccentrically compressed reinforced concrete columns considering the stage of failure, which includes such processes as spalling of the protective layer, loss of stability of compressed reinforcement, and softening of confined concrete after reaching the design resistance. The existing models describing hysteresis behavior of reinforced concrete structures under low-cycle loading have been reviewed. The models have been analyzed in terms of considering the defining monotone curves, which are the boundaries of cyclic deformation. The model proposed in the research is constructed by analyzing the stages of the stress-strain state of a reinforced concrete column. At each stage, formulas are found for determining moment and curvature by solving equations of equilibrium of internal forces. Calculations based on the obtained model for a particular reinforced concrete column are carried out, monotonous diagrams are obtained, and a conclusion about the significant influence of the level of axial load on the character of deformation is made. On the basis of the obtained model, the construction of hysteresis diagrams under low-cycle loading is expected in the future.

**Keywords:** reinforced concrete column, deformation diagram, stages of destruction, hysteresis, seismic, low-cycle loads


**Ashot G. Tamrazyan**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Reinforced Concrete and Stone Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0569-4788, Scopus Author ID: 55975413900, eLIBRARY SPIN-code: 2636-2447; tamrazian@mail.ru

**Vladimir I. Chernik**, postgraduate, lecturer, Department of Reinforced Concrete and Stone Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6240-9993, Scopus Author ID: 57218420224, eLIBRARY SPIN-code: 5185-0373; chernik\_vi@mail.ru

**Tatiana A. Matseevich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-6292-0759, Scopus Author ID: 51461741900, ResearcherID: AAB-2742-2020, eLIBRARY SPIN-code: 1299-6980; MatseevichTA@mgsu.ru

**Ivan K. Manaenkov**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Reinforced Concrete and Stone Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5260-8793, Scopus Author ID: 57209888951, eLIBRARY SPIN-code: 5415-7373; ivanadekvatniy@mail.ru

© Tamrazyan A.G., Chernik V.I., Matseevich T.A., Manaenkov I.K., 2022

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Аналитическая модель деформирования железобетонных колонн на основе механики разрушения

А.Г. Тамразян , В.И. Черник , Т.А. Мацевич , И.К. Манаенков 

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ tamrazian@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 15 августа 2022 г.

Доработана: 22 октября 2022 г.

Принята к публикации: 25 октября 2022 г.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования (проект «Теоретико-экспериментальное конструирование новых композитных материалов для обеспечения безопасности при эксплуатации зданий и сооружений в условиях техногенных и биогенных угроз», № FSWG-2020-0007).

### Для цитирования

Тамразян А.Г., Черник В.И., Мацевич Т.А., Манаенков И.К. Аналитическая модель деформирования железобетонных колонн на основе механики разрушения // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 6. С. 573–583. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-573-583>

**Аннотация.** При проведении сейсмических расчетов железобетонных зданий и сооружений достаточно важным является применение нелинейных моделей работы конструкций, в том числе учитывающих закритическую работу в стадии разрушения. Особенно актуально применение таких моделей, если конструкции имеют начальные повреждения от пожара или коррозии, а также механические повреждения, вызванные силовыми факторами. Цель исследования – разработка аналитической модели деформирования внецентренно сжатых железобетонных колонн с учетом стадии разрушения, которая включает такие процессы, как откол защитного слоя, потеря устойчивости сжатой арматуры, разупрочнение ограниченного бетона после достижения расчетного сопротивления. Проведен обзор существующих моделей, описывающих гистерезисное поведение железобетонных конструкций при малоцикловом нагружении. Анализ моделей проводился в части рассмотрения определяющих монотонных кривых, которые являются границами циклического деформирования. Предлагаемая модель строится посредством анализа стадий напряженно-деформированного состояния железобетонной колонны. На каждой стадии находятся формулы для определения момента и кривизны путем решения уравнений равновесия внутренних сил. Проведен расчет на основе представленной модели для конкретной железобетонной колонны, получены монотонные диаграммы, сделан вывод о существенном влиянии уровня осевой нагрузки на характер деформирования. На основе полученной модели в дальнейшем предполагается построение диаграммы гистерезиса при малоцикловом нагружении.

**Ключевые слова:** железобетонная колонна, диаграмма деформирования, механика разрушения, гистерезис, сеймика, малоцикловые нагрузки

## Introduction

When performing calculations of reinforced concrete buildings and structures, it is quite important to apply non-linear methods of analysis which allow to ensure economical and reliable structures and to reveal reserves of bearing capacity of the system.

A widespread type of structural system used in seismic areas is the reinforced concrete frame, the feature of which is the perception of the horizontal component of seismic load due to the rigid joint between beams and columns.

In the nonlinear stage of frame frames, local areas of elastoplastic deformations occur in the vicinity of the girder support nodes. In accordance with this, in the design diagrams of frame frames, the nonlinear properties are concentrated in separate areas, which are called plastic joints, while the columns and spanning sections of the beams work elastically [1]. The appearance of plastic joints in columns in ordinary cases is considered to be unacceptable.

*Тамразян Ашот Георгиевич*, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0003-0569-4788, Scopus Author ID: 55975413900, eLIBRARY SPIN-код: 2636-2447; tamrazian@mail.ru

*Черник Владимир Игоревич*, аспирант, преподаватель кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0001-6240-9993, Scopus Author ID: 57218420224, eLIBRARY SPIN-код: 5185-0373; chernik\_vi@mail.ru

*Мацевич Татьяна Анатольевна*, доктор физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0001-6292-0759, Scopus Author ID: 51461741900, ResearcherID: AAB-2742-2020, eLIBRARY SPIN-код: 1299-6980; MatseevichTA@mgsu.ru

*Манаенков Иван Константинович*, кандидат технических наук, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-5260-8793, Scopus Author ID: 57209888951, eLIBRARY SPIN-код: 5415-7373; ivanadekvatniy@mail.ru

However, columns designed for elastic operation may suffer some damage during operation, e.g. caused by fire [2], reinforcement corrosion [3], mechanical damage, earthquake, etc. In such a case, due to the reduced mechanical characteristics, the behavior of the column in the elastic-plastic domain will have to be taken into account when carrying out verification calculations or justifying the reinforcement.

Description of nonlinear behavior of columns and beams in the plastic hinge region is usually carried out with the help of hysteresis diagrams (Figure 1), which take into account degradation of strength and stiffness at low-cycle vibrations, loss of dissipative energy, change of stiffness at opening and closing of cracks (pinching effect) [4]. Hysteresis diagrams are usually plotted in the axes “bending moment-curvature” or “horizontal force-horizontal displacement”.

The basic element of a hysteresis diagram is the monotonic loading curve, commonly referred to as skeleton curves. The monotonic curve limits the range of possible deformation under low-cycle loading (Figure 1).

The monotonic curves should, wherever possible, take into account the greatest ductility of reinforced concrete structures and include areas of hardening and softening to establish the true nature of the redistribution of forces in the system.

Many hysteresis models of varying degrees of accuracy have been developed by individual researchers. Let's consider these models in terms of monotonic curves used.

In [5] a bilinear elastic-plastic diagram is proposed which has a linear-elastic first section with an equivalent stiffness  $K_e$ , after reaching the bearing capacity the stiffness becomes zero – a yield point occurs. The determination of the value of carrying capacity and equivalent stiffness for a particular structure is a rather complex task, for reinforced concrete columns the method proposed in [6] can be used. Despite its simplicity, the bilinear diagram [5] is quite popular for seismic calculations as it has clear computational advantages.

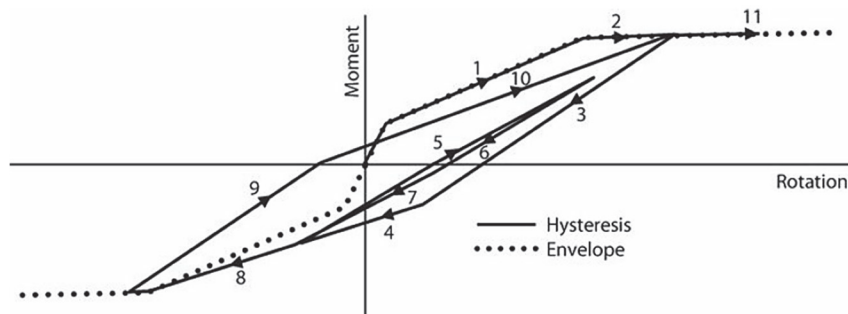


Figure 1. Hysteresis diagram based on the model of Takeda et al. [7]

In the bending of reinforced concrete columns and beams, the redistribution of stresses will cause the individual cross-sectional areas to engage gradually due to the non-linear behaviour of the reinforcement and the concrete. In this way, the bearing capacity of the elements will be realized and the possibility of absorbing a larger moment will be realized. In the deformation diagram, this can be accounted for by introducing a non-zero stiffness after the limit force is reached. This approach is implemented in the bilinear diagram proposed in [8]. The stiffnesses are usually determined by approximating real curvilinear diagrams obtained from experiments or numerical analysis. The bilinear diagram with strengthening combines computational simplicity and a more accurate account of strengthening effects, which justifies the choice of this model as the basis by other authors [9; 10].

A characteristic feature of reinforced concrete structures is the formation of normal and inclined cracks, which reduce the initial stiffness. In order to account for cracking, a three-line diagram of deformation has been proposed in [7] with a successive decrease in stiffness after the cracking force is reached and then when the yield strength in the reinforcement is reached. This approach makes it possible not only to take into account crack opening at the initial stages of deformation of the element, but also to provide a basis for describing the process of reopening and closing of cracks in subsequent cycles.

In addition to piecewise linear diagrams, some researchers use curvilinear diagrams in their models [11]. This allows a more accurate approximation of the real deformation diagram of the element and takes into account the consistent reduction of stiffness. In practice, this approach is less popular, which is justified by the complexity of the calculations and analysis of the results. It should also be noted that curvilinear diagrams have a rather narrow field of application, since the dependencies describing eccentrically compressed and bendable elements will be different.

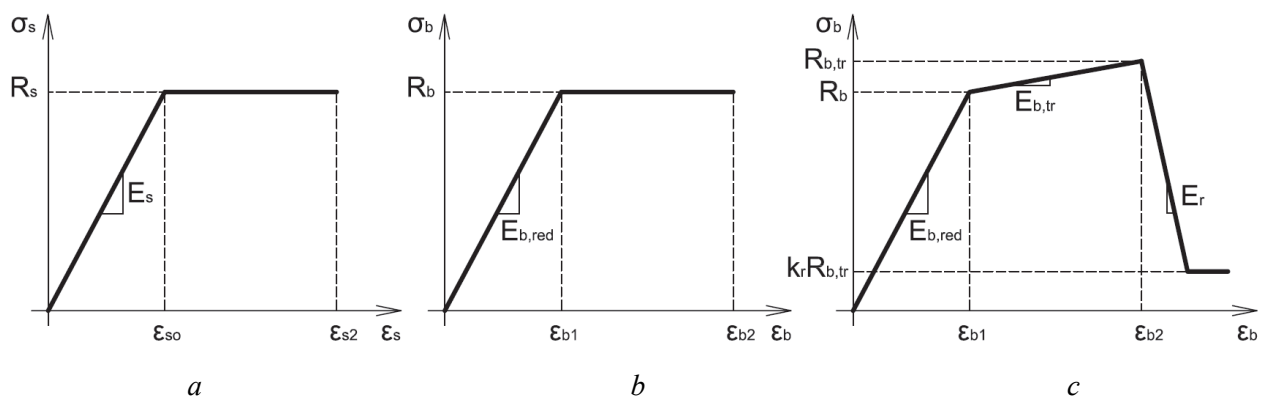
Columns and beams adjacent to the frame nodes where the highest bending moments occur, according to the standards of most countries, must be reinforced by densely placed, closed cross clamps, which in addition to providing the strength of the sloping sections act as indirect reinforcement. The indirect reinforcement increases the load-bearing capacity of the elements and the plastic deformation capacity, which contributes to the redistribution of forces in the system and a fuller use of the load-bearing capacity reserves. In addition, after the limit forces are reached, when the stresses in the clamps reach the yield strength, there is no sudden failure of the element, but a gradual reduction in the bearing capacity with increasing plastic deformations follows [12]. Strengthening can take place when such phenomena as loss of stability of compressed reinforcement, geometric non-linearity, chipping of concrete cover layer are taken into account.

The described processes can be taken into account in models which include a branch of unstrengthening [13]. The model allows to take into account the true nature of force redistribution in the framework more accurately and is particularly relevant when carrying out the analysis of bearing capacity reserves for elements with initial damage [14].

The unstrengthening branch allows taking into account an important aspect of low-cycle operation of reinforced concrete elements, such as within-cycle degradation of strength. This is especially important in loading programs with sharply varying amplitudes, which can lead to sudden collapse of the structure.

The hysteresis diagrams were further developed in [15], which takes into account the presence of residual strength after unstrengthening, which is observed in tests of reinforced concrete structures under low-cycle loading. The presence of residual strength makes it possible to take into account the incomplete disconnection of an element from operation and an increase in the resilience of the structural system as a whole when performing calculations based on the criterion of no collapse.

It should be noted that the description of the reference points of hysteresis diagrams can be made in different ways. The most common approach is the approximation of experimental diagrams or by using empirical dependencies, e.g. in [15]. This method can also be applied in combination with diagrams derived from numerical calculations [14]. This somewhat limits the scope of application of the model and does not allow direct consideration of processes related to concrete rebound, loss of reinforcement stability, etc.



**Figure 2.** Deformation diagrams of materials:  
*a* – reinforcement; *b* – unconfined concrete; *c* – confined concrete

Another approach would be to plot the diagrams based on taking into account the dissipation energy on the oscillation cycle. In this case, the dissipation energy can have either a constant value [16] or it can decrease with time based on the experimental dependence [17]. This approach allows a more accurate account of the energy dissipated by the structure at each cycle, however, it has the same drawbacks as the first one.

A more accurate way of setting the monotonic curve is the method based on the analysis of the stages of the stress-strain state (STS) of a reinforced concrete element. The procedure of the method is based on the identification of reference points in the diagram where the change in stiffness is observed. In this case, forces and displacements can be found both analytically and numerically. For bendable reinforced concrete elements such a diagram has been obtained in [18], which, however, does not take into account the branch of softening after reaching the limit force.

In this paper, the method based on the stages of the stress-strain diagram for the monotonic deformation of reinforced concrete columns is used to construct a monotonic deformation diagram. This approach is a generali-

zation of the method of ultimate forces, which is accepted in domestic and foreign design standards, taking into account the specific features of work of reinforced concrete element at the stage of failure: the value of axial load, the presence of indirect reinforcement in the form of clamps, concrete spalling of protective layer, loss of stability of compressed reinforcement, the presence of residual carrying capacity.

### Methods and materials

As noted above, the basis for constructing a monotonic diagram will be to consider the actual deformation pattern of the reinforced concrete column and to identify the characteristic stages at which the stiffness will change and the transition to a new stage of the stress-strain state will be observed.

The monotonic diagram will be plotted in the axis “bending moment  $M$  – curvature  $\rho$ ”. For a given column, the longitudinal force  $N$  is assumed to be constant during all loading phases. Such a diagram can serve as a basis for the transition to the horizontal force-displacement relation, in which case not only the bending stiffness but also the shear stiffness must be considered, and the displacements caused by the slip of the reinforcement must also be taken into account [18].

The diagram is based on a number of general assumptions inherent to the limit force method:

- flat section hypothesis – the cross-sections are flat before deformation and remain so afterwards;
- the following state diagrams are adopted for the materials: bilinear for compressed concrete (Figure 2, *a*) and reinforcement (Figure 2, *b*); three-linear for concrete bounded by transverse collars (Figure 2, *c*) [19];
- geometric non-linearity caused by the longitudinal bending of the reinforced concrete column is taken into account by means of an appropriate coefficient  $\eta$ ;
- the work of the tensile concrete is taken into account only at stage 1 – before the formation of cracks;
- stresses in concrete and reinforcement are found by composing and solving equations of equilibrium.

Assumptions made at specific stages will be described in the course of the presentation.

A general view of the deformation diagram of a reinforced concrete column is shown in (Figure 3). The diagram has 6 characteristic stages of deformation. Consider each stage separately and determine corresponding values of ultimate bending moment and curvature.

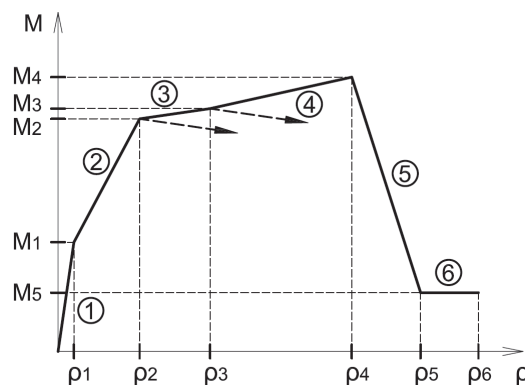


Figure 3. General view of reinforced concrete column deformation model

At the 1st stage (before cracking) the reinforcement and concrete in the tensile zone will be deformed together. The stress profile in the tensile concrete is non-linear trapezoidal and the highest stresses reach the design tensile strength of concrete  $R_{bt}$  (Figure 4, *a*). Compressed concrete works elastically, stress diagrams have a triangular shape. The ultimate bending moment at stage 1 is given by the equation

$$M_1 = R_{bt} W_{pl} + N e_x, \quad (1)$$

where  $W_{pl}$  – elastic-plastic moment of resistance of the section;

$$W_{pl} = 1,3 W_{red}; \quad (2)$$

$e_x$  – distance from the core point furthest from the tensile face to the force application point  $N$ ;

$$e_x = \frac{W_{\text{red}}}{A_{\text{red}}}. \quad (3)$$

The curvature corresponding to the moment  $M_1$  is determined by the equation

$$\rho_1 = \frac{M_1}{D_1}, \quad (4)$$

where  $D$  – bending stiffness of reinforced concrete section at stage 1;

$$D_1 = E_{b,\text{red}} I_{\text{red}}. \quad (5)$$

In formulae (1)–(5) the geometric characteristics of the reduced section (area  $A_{\text{red}}$ , moment of inertia  $I_{\text{red}}$ , resistance torque  $W_{\text{red}}$ ) are determined taking into account the entire cross-section of concrete and reinforcement.

Stage 2 is characterised by the operation after the formation of cracks in the tensile zone. The ultimate force in this stage can be achieved in two cases: the stresses in the reinforcement reach the yield stress  $R_s$  (stage 2.1) or the stresses in the concrete throughout the compressed zone have reached their design resistance  $R_b$  (stage 2.2). As we know which case the ratio of the relative height of the compressed zone  $\xi$  to its boundary value determines  $\xi_R$ :  $\xi \leq \xi_R$  – case of large eccentricities (stage 2.1);  $\xi > \xi_R$  – the case of small eccentricities (stage 2.2). Note here, however, that in the first case, unlike in the second, the element does not enter the fracture stage.

Consider stage 2.1 in more detail (Figure 4, c). As noted, the stresses in the reinforcement at this stage reach the design resistance  $R_s$ . Stresses in the compressed concrete and in the compressed reinforcement do not exceed the corresponding design resistance  $R_b$  and  $R_{sc}$ . The compressive stresses in the concrete are assumed to be triangular.

The values of the stresses in the concrete and the compressed reinforcement are then determined from the consideration of the deformations in the flat section (flat section hypothesis). If at stage 2.1 the deformations in the tensile reinforcement reach a value of  $\varepsilon_s = \varepsilon_{so}$ , then the required stresses are found from the expressions

$$\sigma_b = E_{b,\text{red}} \frac{\varepsilon_{so} x}{h_o - x} \leq R_b; \quad (6)$$

$$\sigma_{sc} = E_s \frac{\varepsilon_{so} (x - a')}{h_o - x} \leq R_{sc}. \quad (7)$$

The symbols used in formulae (6) and (7) are given in Figure 4, c.

Note that if the stresses in formula (6) exceed the design resistance, then the stress diagram should be corrected by taking it in trapezoidal form, whereby the boundary between the triangular and rectangular parts of the diagram will be the fiber where the condition is fulfilled  $\varepsilon_b = \varepsilon_{b1}$ . Composing the equilibrium conditions for the internal forces and the moments of these forces with respect to the center of gravity of the stretched reinforcement, we find the height of the concrete compressed zone and the ultimate bending moment

$$x = \frac{N + R_s A_s - \sigma_{sc} A_s'}{0,5 \sigma_b b}; \quad (8)$$

$$Ne_{2.1} = \sigma_{sc} A_s' (h_o - a') + \frac{1}{2} \sigma_b x b (h_o - \frac{x}{3}), \quad (9)$$

where  $A_s$  and  $A_s'$  – the areas of tensile and compressed reinforcement respectively.

The limiting bending moment with respect to the center of gravity will be found by taking into account the effects of longitudinal bending

$$M_i = \frac{Ne_i - N \frac{h_o - a'}{2}}{\eta}, \quad (10)$$

where  $i$  – index denoting the stress train stage number;  $\eta$  – coefficient longitudinal bending

$$\eta_i = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr_i}}}, \quad (11)$$

where  $N_{cr_i}$  – critical force at  $i$  stage;

$$N_{cr_i} = \frac{\pi^2 D_i}{l_o^2}, \quad (12)$$

where  $l_o$  – design element length.

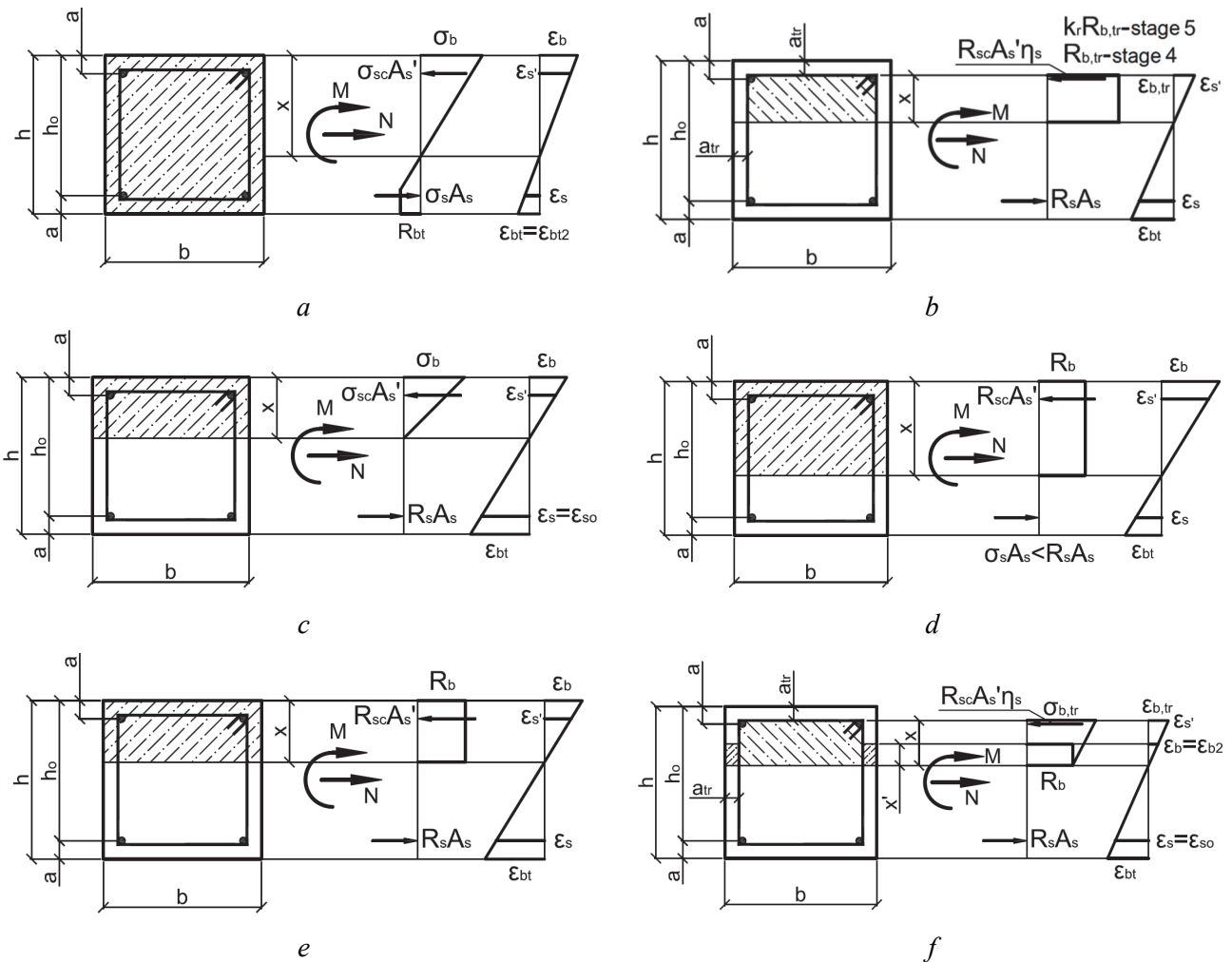


Figure 4. Stages of the stress-strain state of a reinforced concrete column: a – stage 1; b – stages 4 and 5; c – stage 2.1; d – stage 2.2; e – stage 3.1; f – stage 3.2

Stiffness in this and subsequent stages  $D_i$  we find with the variable height of the compression zone  $x_m$  and tensile concrete work between cracks, which is taken into account by the coefficient  $\psi_s$ . The relevant formulas are described in sufficient detail in the regulatory literature (SP63.13330.2018. Concrete and reinforced concrete structures) and, due to their cumbersome nature, are not given in the text of this article.

Stage 2.2 will in turn correspond to the failure stage of the reinforced concrete section for the case of small eccentricities. The stresses in the compressed concrete are distributed according to a rectangular law and are equal to the design resistance  $R_b$ , in the compressed reinforcement, the stresses also reach the design resistance  $R_{sc}$ , and in the stretched one less than the value  $R_s$  (Figure 4, *d*). Composing and transforming the equilibrium equations we find

$$x = \frac{N + R_s A_s \frac{1 + \xi_R}{1 - \xi_R} - R_{sc} A_s'}{R_b b + \frac{2 R_s A_s}{h_o (1 - \xi_R)}}; \quad (13)$$

$$Ne_{2.2} = R_{sc} A_s' (h_o - a') + R_b x b (h_o - 0,5x). \quad (14)$$

The limiting bending moment and curvature will be obtained from formulae (4) and (10).

Stage 3 will also be considered in two variants. In stage 3.1, for elements operating with large eccentricities, a subsequent increase in bending moment due to the yield strength of the tensile reinforcement will result in an increase in compressive stresses in the concrete to the value of  $R_b$  and stresses in the compressed reinforcement up to  $R_{sc}$  (Figure 4, *e*). The reinforced concrete section will enter the fracture stage. From the equilibrium conditions we have

$$x = \frac{N + R_s A_s - R_{sc} A_s'}{R_b b}; \quad (15)$$

$$Ne_{3.1} = Ne_{2.2}. \quad (16)$$

In turn, if the element failed at low eccentricities, a transition to stage 3.2 will follow (Figure 4, *f*). The deformation in this stage will take place until the yield point is reached in the stretched reinforcement. The compressed zone of the concrete will be divided into two parts: a protective layer and a concrete core bounded by transverse collars. If the bending moment increases, the concrete protective layer for the fibers will splinter off, where the relative deformations of the unconfined concrete reach the limit values  $\varepsilon_b = \varepsilon_{b2}$ . Then only the height of the compressed concrete protection layer will be taken into account in the calculation  $x'$ .

At this stage the indirect reinforcement is activated, as a result of which the stresses in the concrete core will increase. The compressive stress profile is assumed to be trapezoidal with a minimum value at the neutral fibre equal to  $R_b$  and maximum value  $\sigma_{b,tr}$ .

Applying the plane section hypothesis, determine the values of  $x'$  and  $\sigma_{b,tr}$  considering that the relative deformations in the reinforcement reach the limit values  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s0}$

$$x' = \frac{\varepsilon_{b2} (h_o - x - a_{tr})}{\varepsilon_{s0}}; \quad (17)$$

$$\sigma_{b,tr} = E_{b,tr} \frac{\varepsilon_{s0} x}{h_o - x - a_{tr}}. \quad (18)$$



Composing and solving the equilibrium equations we obtain

$$x = \frac{N + R_s A_s - R_{sc} A_s' \eta_s - 2R_b x' a_{tr}}{0,5b(R_b + \sigma_{b3})}, \quad (19)$$

$$Ne_{3,2} = R_{sc} A_s' \eta_s (h_o - a') + 2R_b x' a_{tr} (h_o - x - a_{tr} + 0,5x') + R_b x b (h_o - a_{tr} - 0,5x) + \frac{1}{2} (\sigma_{b,tr} - R_b) x b (h_o - a_{tr} - \frac{x}{3}), \quad (20)$$

where  $\eta_s = 0-1$  – a coefficient which takes into account the reduced contribution to the load-bearing capacity of the part of reinforcement bars which have lost stability due to ineffective retention by transverse reinforcement in the free-bending section of the clamp.

It is important to note that in stage 3.2 it is possible to increase the bending moment limit as well as to decrease it. This depends on the fraction of the resistance that the cross-section loses when the concrete protection layer rebounds and part of the compressed reinforcement becomes unstable. In Figure 3 the possible directions of unstrengthening are shown by the dotted arrow lines.

At stage 4, the load-bearing capacity of the section will be exhausted. As the bending moment increases, the stresses in the concrete core will reach their design resistance  $R_{b,tr}$ , which will be accompanied by the transverse clamps flowing (Figure 4, b).

The strength of confined concrete  $R_{b,tr}$  depends on the strength of unconfined concrete  $R_b$  and the effective lateral pressure  $R_e$  which results from the resistance of the clamps to the transverse deformations of concrete. According to [12] the strength of confined concrete can be determined as

$$R_{b,tr} = R_b + 4,1R_e. \quad (21)$$

The effective lateral pressure  $R_e$  in the case of a square cross-section is

$$R_e = k_e \rho_s R_{sw}, \quad (22)$$

where  $R_{sw}$  – yield strength of transverse reinforcement;  $k_e$  – retention factor, which takes into account the uneven compression of concrete in cross-sections other than circular;  $\rho_s$  – transverse reinforcement coefficient by volume.

In view of the considerable deformations in the cross-section and the consequent low height of the compressed zone  $x'$ , the component related to the resistance of the unconfined concrete at this stage will be neglected.

Composing and solving the equilibrium equations we obtain

$$x = \frac{N + R_s A_s - R_{sc} A_s' \eta_s}{R_{b,tr} b}; \quad (23)$$

$$Ne_4 = R_{sc} A_s' \eta_s (h_o - a') + R_{b,tr} x b (h_o - a_{tr} - 0,5x). \quad (24)$$

At stage 5, the load-bearing capacity of the reinforced concrete cross-section will be reduced, which is reflected in the diagram by the presence of a softening branch. Stresses in the concrete core will decrease to the value of  $k_r R_{b,tr}$ , where  $k_r$  – is the residual strength factor of the confined concrete (Figure 4, b). Otherwise, the design dependencies will be similar to the corresponding ones in stage 4.

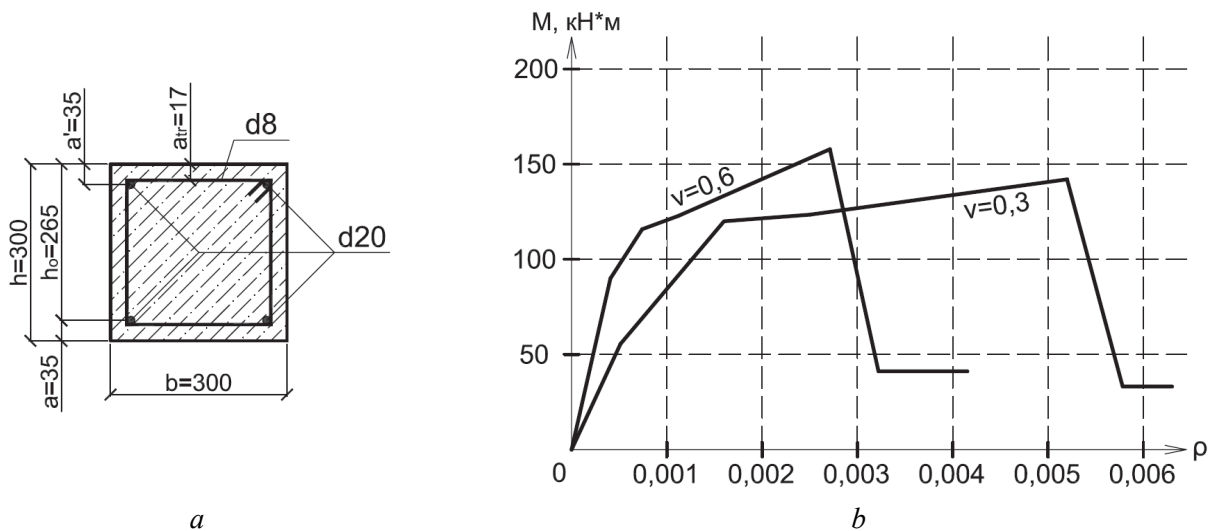
The curvature in stage 6 will increase with a constant value of bending moment until the longitudinal or transverse reinforcement reaches the limit of relative strain  $\varepsilon_{s2}$ , which will be accompanied by a rupture of the reinforcement and complete exhaustion of the load-bearing capacity.

It is worth noting that the latter criterion must be monitored at all stress-strain stages.

### Results and discussion

The dependencies obtained will be considered on the example of a reinforced concrete column of a frame structure. We will carry out the calculation in two variants – with the coefficient of longitudinal force  $\nu = 0,3$  and  $\nu = 0,6$ .

$$\nu = \frac{N}{R_b A_b} \tag{25}$$



**Figure 5.** Cross-section of a reinforced concrete column (a) and “moment – curvature” diagrams based on the results of calculations based on the proposed model (b)

The cross-section of the column is square 300×300 mm, the geometric dimensions are given in Figure 5, a. Longitudinal reinforcement of 4 bars Ø25A400,  $A_s = A_s' = 982 \text{ mm}^2$ . Cross reinforcement from Ø8A400 with pitch  $s_w = 100 \text{ mm}$ ,  $\rho_s = 0,005$ .

The design length of the column is assumed to be  $l_o = 3 \text{ m}$ . Consider all reinforcement effectively secured against loss of stability  $\eta_s = 1$ . The residual strength coefficient is assumed to be  $k_r = 0,25$  [20]. Concrete class B20.

The calculation results are shown in Figure 5, b. It can be seen from the graphs that the ultimate bearing capacity for the column with a higher longitudinal force coefficient  $\nu$  higher, although this column shows less load-bearing capacity prior to the failure of the protective layer than with  $\nu = 0,3$ .

It should be noted that due to the inclusion of the compressed zone of concrete in the work, the more loaded column has greater stiffness in all stress-strain stages. While the less loaded column shows greater capacity for plastic deformation, especially at the stage after the inclusion of indirect reinforcement.

Residual load-bearing capacity for column at  $\nu = 0,6$  is slightly higher. Failure in both cases is due to clamp rupture when the relative strain limits are reached.

### Conclusion

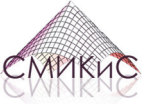
The analytical model for construction of monotone diagram “moment – curvature” for reinforced concrete columns at different level of axial load, taking into account indirect reinforcement by transverse collars, loss of stability of compressed reinforcement, residual strength of concrete is obtained. The model takes into account all stages of the static deformation of eccentrically compressed reinforced concrete elements, including the non-critical phases of operation. The model can also be used for calculation of frame beams.

The authors consider that the main purpose of constructing such a monotonic diagram is to use it as a basis for a hysteresis diagram which describes the behaviour of reinforced concrete elements under low cycle seismic loads. It is worth considering that bringing reinforced concrete elements to supercritical stages, when there is destruction of concrete protective layer and loss of stability of compressed rods, is not always justified in terms of efficiency of repair and further operation of structure. But when designing buildings based on the concept of non-destruction, the proposed model will allow to reveal reserves of bearing capacity of the system.

The developed model is suitable for solving by hand calculation, however in case of more complex deformation, e.g. oblique eccentric compression, section damage due to fire or corrosion, sections other than rectangular shape it is possible to apply for solving equilibrium equations at each stage a non-linear deformation model.

### References

1. Tamrazyan A.G., Chernik V.I. Consideration of the effects of fire in the design of reinforced concrete buildings in earthquake-prone areas. *Proceedings XIV Russian National Conference on Earthquake Engineering and Seismic Zoning (with International Participation)*. Sochi, Moscow; 2021. p. 114–117. (In Russ.) <https://doi.org/10.37153/2687-0045-2021-14-114-117>
2. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Behavior of compressed reinforced concrete columns under thermodynamic influences taking into account increased concrete deformability. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018;365:052034. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/365/5/052034>
3. Tamrazyan A., Popov D. Reduce of bearing strength of the bent reinforce-concrete elements on a sloping section with the corrosive damage of transversal armature. *MATEC Web of Conferences*. 2017;117:00162. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711700162>
4. Sengupta P., Li B. Hysteresis modeling of reinforced concrete structures: state of the art. *ACI Structural Journal*. 2017;114(1):25–38. <https://doi.org/10.14359/51689422>
5. Veletsos A.S., Newmark N.M., Chelapati C.V. Deformation spectra for elastic and elastoplastic systems subjected to ground shock and earthquake motions. *Proceedings of 3rd World Conference on Earthquake Engineering*. 1965;V(II):663–682.
6. Chernik V.I. Effective stiffness of reinforced concrete columns after a fire. *Science Prospects*. 2022;(5):82–86. (In Russ.)
7. Takeda T., Sozen M.A., Nielson N.N. Reinforced concrete response to simulated earthquakes. *Journal of the Structural Division, ASCE*. 1970;96:2557–2573.
8. Clough R.W., Johnston S.B. Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements. *Proceedings of 2nd Japan National Conference on Earthquake Engineering*. Tokyo; 1966. p. 227–232.
9. Imbeault F.A., Nielsen N.N. Effect of degrading stiffness on the response of multistory frames subjected to earthquakes. *Proceedings of 5th World Conference on Earthquake Engineering, Rome, 26–29 June 1973*. Rome; 1973. p. 1756–1765.
10. Saidi M., Sozen M.A. *Simple and complex models for nonlinear seismic response of reinforced concrete structures. A report to the National Science Foundation, University of Illinois at Urbana-Champaign*. Champaign; 1979.
11. Ozecebe G., Saatcioglu M. Hysteresis shear models for reinforced concrete members. *Journal of Engineering Mechanics*. 1989;115(1):132–148.
12. Mander J.B., Priestley J.N., Park R. Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Engineering Structures*. 1989;116:1804–1825.
13. Dowell R.K., Seible F., Wilson E.L. Pivot hysteresis model for reinforced concrete members. *ACI Structural Journal, ASCE*. 1998;95(5):607–617.
14. Tamrazyan A., Chernik V. Equivalent viscous damping ratio for a RC column under seismic load after a fire. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021;1030:012095. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1030/1/012095>
15. Ibarra L.F., Medina R.A., Krawinkler H. Hysteretic models that incorporate strength and stiffness deterioration. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 2005;34(12):1489–1511. <https://doi.org/10.1002/eqe.495>
16. Bondarenko V.M., Yagupov B.A. About connection between force load level and energy losses at deformation of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(3):44–50. (In Russ.)
17. Sucuoglu H., Erberik A. Energy-based hysteresis and damage models for deteriorating systems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 2004;33(1):69–88. <https://doi.org/10.1002/eqe.338>
18. Moehle J. *Seismic design of reinforced concrete buildings*. McGraw-Hill; 2014.
19. Tamrazyan A.G., Manaenkov I.K. To calculation of bendable reinforced concrete elements with indirect reinforcement of compressed zone. *Industrial and Civil Engineering*. 2016;(7):41–44. (In Russ.)
20. Chernik V.I., Samarina S.E. Numerical model of a compressed concrete element strengthened by FRP jackets. *Building and Reconstruction*. 2020;(1):40–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-87-1-40-53>



DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-6-584-596

UDC 624.012.4:624.042.5:614.841.33

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Basic principles in the theory of force and thermal force resistance of concrete

Viktor S. Fedorov , Valery E. Levitsky , Ekaterina A. Isaeva 

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

✉ [fvs\\_skzs@mail.ru](mailto:fvs_skzs@mail.ru)

### Article history

Received: September 12, 2022

Revised: November 16, 2022

Accepted: November 20, 2022

### For citation

Fedorov V.S., Levitsky V.E., Isaeva E.A. Basic principles in the theory of force and thermal force resistance of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):584–596. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-584-596>

**Abstract.** In the development of the ideas and approaches to the analysis of the force resistance of concrete of V.M. Bondarenko, the initial prerequisites for the model of the thermomechanical state of concrete under short-term sharp high-temperature exposure, characteristic of fire conditions, are formulated. The separation of force deformations into components is carried out on the basis of the connection with the accumulation of damage in the structure of the material, based on the principle of independence of the limiting structural stresses from temperature and the mode of force action, which makes it possible to establish basic thermomechanical relationships and determine the deformation parameters of concrete operating under conditions of unsteady heating in a loaded state. Based on the extension of the hypothesis of entropy damping of nonequilibrium processes to the area of action of an active destructive factor, the principle of normalization was formulated and a kinetic equation was proposed, from the solution of which exponential dependences having a single structure were obtained, which make it possible to describe the basic temperature parameters of concrete, the relationship of stresses with deformations, and other nonlinear characteristics. The application of the proposed principles creates a reliable theoretical basis for describing the mechanisms of thermal resistance of concrete and greatly simplifies the modeling of the effect of high temperature on the properties of concrete in the practical implementation of methods for the numerical calculation of reinforced concrete structures.

**Keywords:** calculation model prerequisites, invariants, structural stresses, heating under load, elasticity coefficient, kinetic equation

**Viktor S. Fedorov**, Academician of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Building Construction, Buildings and Structures, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St, bldg 9, Moscow, 127994, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0906-716X, Scopus Author ID: 57202801196, eLIBRARY AuthorID: 143968; [fvs\\_skzs@mail.ru](mailto:fvs_skzs@mail.ru)

**Valery E. Levitsky**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Building Construction, Buildings and Structures, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St, bldg 9, Moscow, 127994, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9355-4488; [dobriy\\_vecher@mail.ru](mailto:dobriy_vecher@mail.ru)

**Ekaterina A. Isaeva**, student, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St, bldg 9, Moscow, 127994, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-3864-662X; [ekayka@yandex.ru](mailto:ekayka@yandex.ru)

© Fedorov V.S., Levitsky V.E., Isaeva E.A., 2022




This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Базовые принципы в теории силового и термосилового сопротивления бетона

В.С. Федоров , В.Е. Левитский , Е.А. Исаева 

Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация

 fvs\_skzs@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 12 сентября 2022 г.

Доработана: 16 ноября 2022 г.

Принята к публикации: 20 ноября 2022 г.

### Для цитирования

Федоров В.С., Левитский В.Е., Исаева Е.А. Базовые принципы в теории силового и термосилового сопротивления бетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 584–596. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-584-596>

**Аннотация.** В развитие идей и подходов к анализу силового сопротивления бетона В.М. Бондаренко формулируются исходные предпосылки модели термомеханического состояния бетона при кратковременном резкорегимном высокотемпературном воздействии, характерном для условий пожара. Разделение силовых деформаций на компоненты осуществляется исходя из связи с накоплением повреждений в структуре материала, основываясь на принципе независимости предельных структурных напряжений от температуры и режима силового воздействия, что позволяет установить базовые термомеханические соотношения и определить параметры деформирования бетона, работающего в условиях нестационарного нагрева в нагруженном состоянии. На основе распространения гипотезы об энтропийном затухании неравновесных процессов на область действия активного разрушающего фактора сформулирован принцип нормализации и предложено кинетическое уравнение, из решения которого получены имеющие единую структуру экспоненциальные зависимости, позволяющие описывать базовые температурные параметры бетона, связь напряжений с деформациями и другие нелинейные характеристики. Применение предложенных принципов создаст надежную теоретическую основу для описания механизмов термосилового сопротивления бетона и существенно упрощает моделирование влияния высокой температуры на свойства бетона в практической реализации методик численного расчета железобетонных конструкций.

**Ключевые слова:** предпосылки расчетной модели, инварианты, структурные напряжения, нагрев под нагрузкой, коэффициент упругости, кинетическое уравнение

## Introduction

Regime heredity, disequilibrium, moment and lagged strains – this is an incomplete list of features, exhibited by concrete in conditions of resistance to external force action. There are many examples of calculations, where are used simplified models of material behavior. Nevertheless, since the very moment structural theory was born, researchers are concerned with the problem of the most adequate consideration of the real material behavior, which allows ones not to doubt obtained results. The processes having a place inside the material's structure mostly are hard to be directly observed, so there should be a reliable theory explaining known facts and predicting new ones as well.

From the beginning of the 20th century, especially with the appearance of such new materials as concrete and polymers, there were intensely taken efforts of creation theories that, on the one hand, were strict enough and, on the other, engineering-adapted and suitable for practical application. Research of long-lasting resistance to degradation and deformation features of the new materials led to the emergence of a new direction – *rheology* (this term was accepted at the 3rd symposium on plasticity in the USA). Temperature action leads to intensification of processes occurring in material over time. *Thermorheology* so is even more general, uniting impacts of

**Федоров Виктор Сергеевич**, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительные конструкции, здания и сооружения», Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9; ORCID: 0000-0002-0906-716X, Scopus Author ID: 57214645407, eLIBRARY SPIN-код: 5729-7193; fvs\_skzs@mail.ru  
**Левитский Валерий Евгеньевич**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения», Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9; ORCID: 0000-0002-9355-4488; dobriy\_vecher@mail.ru  
**Исаева Екатерина Андреевна**, студент, Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9; ORCID: 0000-0002-3864-662X; ekayka@yandex.ru

strain, temperature and time factors. Though at the moment there are no universal thermorheological models of material behavior, consideration of thermal-force concrete resistance allows us to have quite another look at the stability of its long-lasting resistance.

Loaded concrete demonstrates several special properties even in conditions of harsh-regime high-temperature heating when long-lasting processes don't evaluate fully. The most important of such properties is a sufficient (nearly in twice) increase of strain capacity, in comparison with concrete heated to the same temperature and then loaded. This effect looks similar to short-term concrete creep in normal thermal conditions, but it's not a creep, because it doesn't depend on time and it is determined by a sequence of thermal and force impacts.

Through his works V.M. Bondarenko founded a method based on a clear *division of levels of the research object's model of development* [1; 2], this method helps to understand the reasons and consequences of thermal-force resistance of loaded concrete. Vitaly Mikhailovich used to cite Leonardo da Vinci: “there is as much science in the scientific work as there is mathematics in it..” but he always mentioned, that before writing math expressions (mathematical model), one should have necessarily imagined physics of the process (physical model) also he should have reasonably formulated starting hypotheses and basis (calculation model). Clarity of understanding the basis provides better understanding essence of physical and mathematical models, also it allows one to estimate the accuracy of taken decisions, because, as academic A.N. Krylov (1863–1945) wrote, “despite all the accuracy of the mathematical solution, it'll never be more accurate, than the basis on which it was made.”

### **Separation of strain components. Invariance of ultimate structural stresses**

One of the important premises used in the creation of equations of mechanical and thermomechanical states of concrete is *the premise about the separation of strain components*. Total relative strains are traditionally divided into non-force (thermal, humidity, etc.) and force (mechanical) particular strains, which are often considered as mutually independent and subsequently summed. Mechanical strains are divided by the principles of linearity and non-linearity, reversibility, and time. In particular, phenomenological theories of concrete creep for the region of non-linear strains are based on different variants of division of components of total mechanical strains:

- concept of N.H. Arutyunyan and V.B. Kolmanovskiy [3] suppose that all non-linear strains of concrete strain rely upon concrete creep;
- in the concept of V.M. Bondarenko [4; 5] total strains consist of moment (inelastic, non-linear) and lagged (non-linear) strains concrete creep;
- in the concept of A.A. Gvozdev and K.Z. Galustov [6; 7] total strains are divided into elastic and long-timed, consisting of two components – reversible (strains of elastic aftereffect, which depends on strains linearly and obey the principle of superposition), and irreversible, which non-linearly depend on stresses that caused them; a theory based on this concept is named by A.A. Gvozdev “two-component theory of concrete creep”;
- in the V.M. Bondarenko and N.I. Karpenko concept of “non-equilibrium force deformation of concrete” [8] it's proposed to consider strains as the matter of structural changes in concrete. This concept continues those laid down in the works of O.Ya. Berg [9], E.N. Shcherbakov [10] the views on non-linear strains of concrete in a way of “quasi-plastic”, caused by an accumulation of damages in the structure, which make close physical and phenomenological ways of creating a general theory of concrete resistance.

Summarizing the approaches mentioned above we propose to divide mechanical strains into two types based on their connection with the accumulation of damages in concrete structure [11]. In this case concrete structure should be considered as a set of bonds that are viscoelastic deformable under stress but degradable when some limiting level of stress is achieved. Similar representations based on the implementation of the detachable fracture mechanism are used in statistical theories (V. Weibull [12], S.D. Volkov [13], V.V. Bolotin [14], L.G. Sedrakyan [15], V.D. Harlab [16], M.M. Holmyanskiy [17], etc.). Presented bonds possess unequal stability following some statistical distribution. When a sample is put under stress, the stress distributes between bonds. Not strong enough bonds cleave and the stress comes to others. So cleavage of the weakest bonds is compensated by increased stress on remained ones. In case of sample is being loaded either for a short or for a long time there is an accumulation of defects demonstrated by bond cleavage. It could be presented as a decrease in the workable part of the sample section (Figure 1).

Stresses having a place in bonds are structural (true). They increase with the load increase but more intensively because of the redistribution of strains from broken bonds (inner loading). Assuming in a mental model that the distribution of stress is equal between bonds (though it's being distributed proportionally to the rigidity

of bonds), structural stresses can be calculated by dividing the applied loading by the nominal area of the workable part of section (before the loading). In the same manner, dividing this loading by the total area of the sample section results in average stresses, which are usually considered “stresses” and are used in the determination of the strength characteristics of the material.

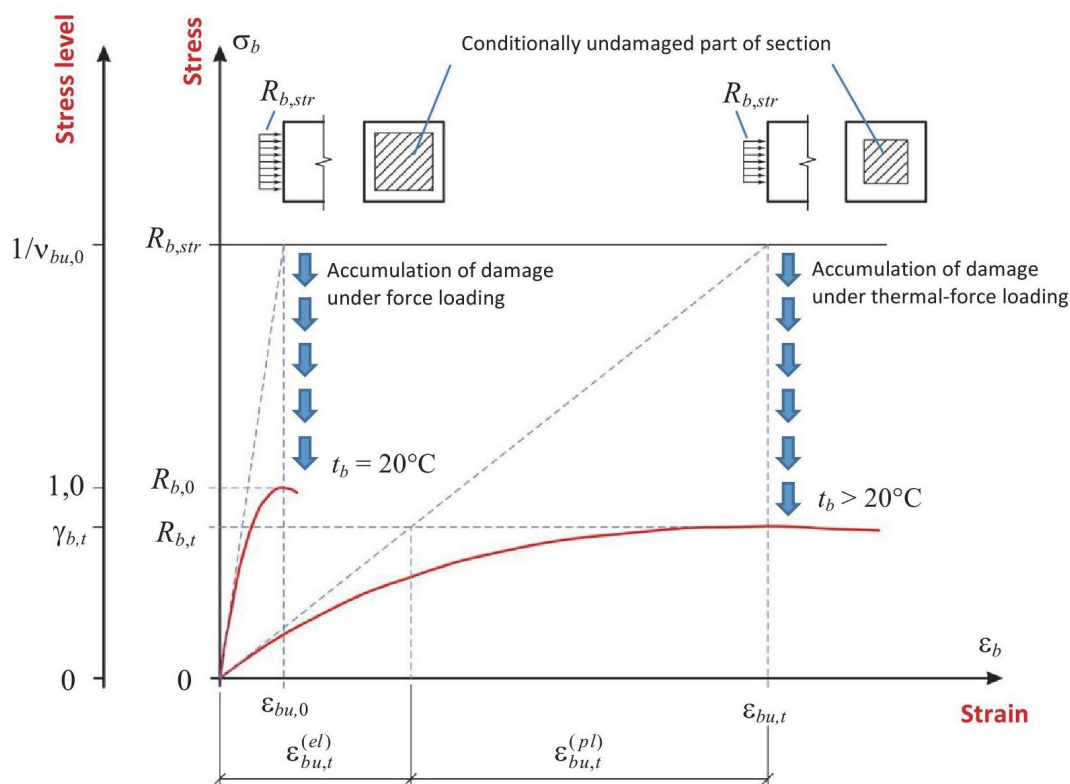


Figure 1. Graphical interpretation of the principle of independence of ultimate structural stresses

At the moment when the stability of remaining bonds isn't enough for load perception, the sample degrades and the stresses in the nominal workable part of section are ultimate structural stresses. Further increase of the sample loading is impossible and if there is no loading decrease there initiates the process of chain bond destruction with stress transfer to the remaining bonds. This results in avalanche destruction of all sample – such an effect is observed during concrete tests with a constant rate of stress increase.

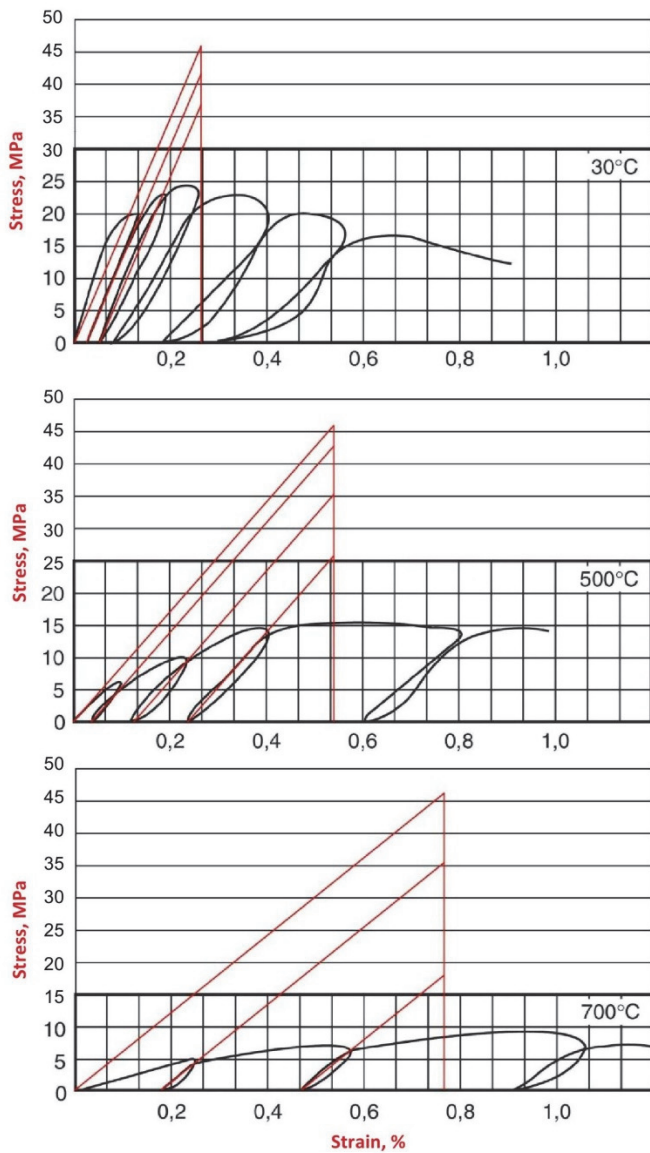
If after reaching ultimate structural stresses it's possible to decrease loading like when it happens during concrete tests with a constant rate of strain increase, the process of remaining bonds destruction is being carried under control and there is a descending branch on the stress-strain curve.

The mentioned example of destruction is related to increasing loading, but if one tries to destruct the other sample of the same concrete in a slightly different manner by adding heat to increasing loading the general trend would be quite the same. Factors of destructive impact (loading and heat) would lead to the accumulation of structure damages, which results in the increase of structural stresses to the very same ultimate level. It would be observed as a decrease in sample stability in the context of the ultimate structural stresses (Figure 1).

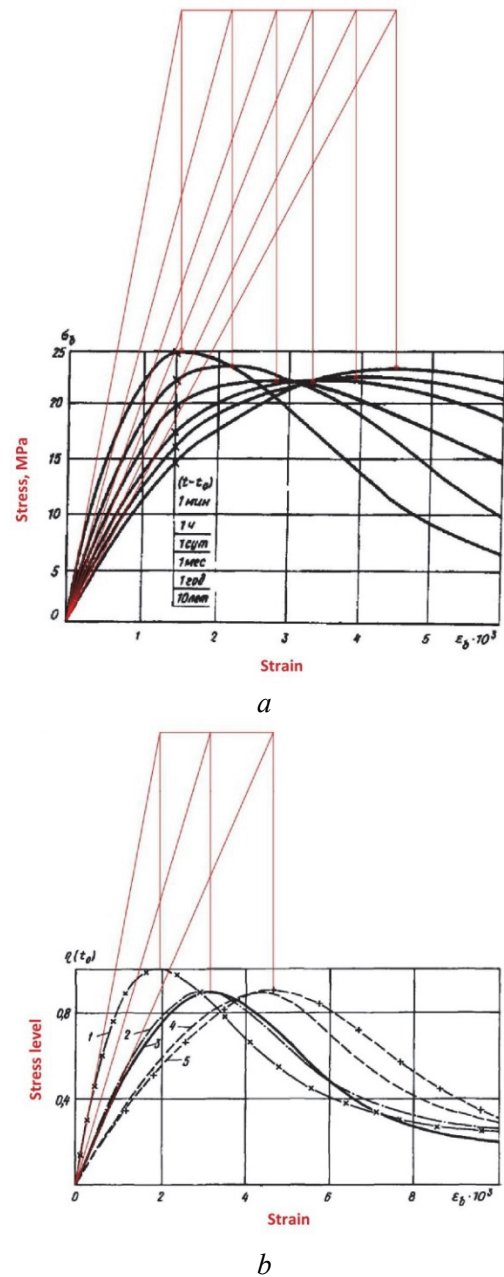
In that case whatever would be the way of destruction ultimate structural stresses remain constant because the sample is made from the same material (concrete of certain contains, age, and curing conditions). Obtained experimental diagrams of concrete deformation in different temperatures [18; 19] illustrate this very well (Figure 2).

V.M. Bondarenko mentioned not once that invariants take a special place in theory building. Invariants are values that remain unchanged during transformations. In papers and books of V.M. Bondarenko there are often mentioned invariants obtained directly from experiments or consequent generalizations. Many times there are mentioned widely used invariants of affine similarity, energy invariants of stability theory (M. Reiners invariant of the constant potential energy of material degradation particularly), N.N. Davidenkovs invariant about hysteresis loop area independence (specific dissipative scattered energy) from stationary oscillation frequency, equivalent deformational invariants, etc.

Acceptance of a precondition about the invariance of ultimate structural stresses from a regime of destructive impacts leads to an important consequence, specifically, it allows to divide components of total concrete strain into two types depending on whether they do or do not connect with the decrease of concrete stability towards the ultimate structural stresses. Both of these components can be moment, lagged, and evolving over time. It allows us to use the proposed principle in case of short-time and also long-time force actions. A principle of ultimate structural stresses independence keeps correctness for diagram-isochron N.I. Karpenko (Figure 3) [20]. Despite the generality of the principle in this work, the emphasis is placed on short-time thermo-mechanical loading, which is specific to fire conditions when the intensity of thermal impact becomes more significant than the rate of evolving of transition nonequilibrium processes, which can't fully exhibit itself.



**Figure 2.** Invariance of ultimate structural stresses under thermal force loading (experimental data by Furamura [18; 19])

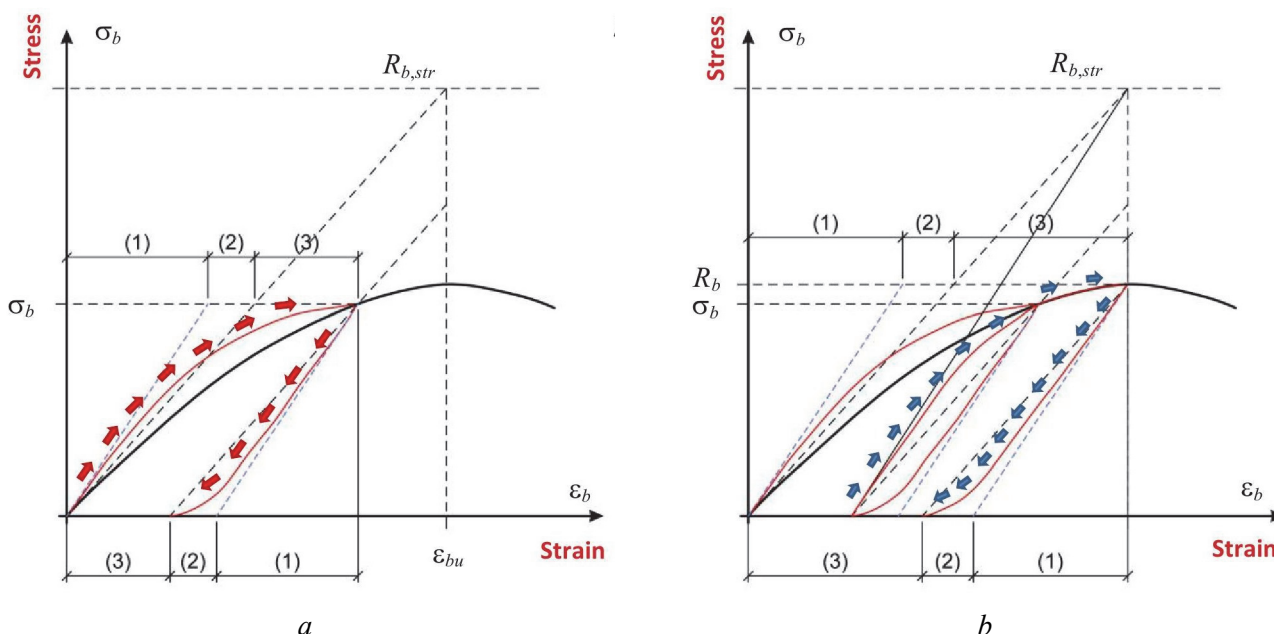


**Figure 3.** Invariance of ultimate structural stresses under long-term loading:  
*a* – isochrone diagrams by N.I. Karpenko under axial compression for various periods of time; *b* – reference diagram for short-term loading (1), isochrones of soft (2, 3) and hard (4, 5) loading modes according to N.I. Karpenko



The first strain component not connected with the accumulation of defects and not leading to stability decrease is linear towards the strains and is expressed by a straight line in the deformation diagram. This line connects the origin and a point above the top of the diagram on the level of ultimate structural stresses (Figure 1). Physically it's a viscoelastic bonds strain without their cleavage; an elastic component is a strain of crystal joint and a viscous component is a strain of calcium hydrosilicate gel, lagging from elastic one.

Experiments of unloading samples witness only partial reversibility of linear components of strains (Figure 4). A moment linear-elastic component with initial deformation module  $E_0 = \text{tg}\alpha_0$  appears right after loading then appears viscous component that is non-linear towards the strains but it is reversible. The viscous component is followed by the redistribution of strains from gel to joint. Everything goes the same way during unloading: firstly the unloading line goes at an angle of inclination  $\alpha_0$  (elastic component impact), then it deviates going back practically to the origin (viscous component impact). Because of losing energy in inner friction (hysteresis losses) deformation is restored partially. Despite some of the described demonstrations of non-linearity, the total strain (viscous and elastic) during loading is linear towards the stress and it's characterized by initial module of concrete deformations  $E_{b,0} = \text{tg}\alpha$ . The line goes from the origin exactly at an angle to the point of ultimate structural stresses.



**Figure 4.** Strains of concrete under modal loading-unloading:

*a* – first cycle; *b* – second cycle; (1) – instantaneous linear strains; (2) – delayed linear strains; (3) – instantaneous nonlinear strains

The second deformation component connected with the accumulation of defects and leading to stability decrease is non-linear towards acting stress (physical non-linearity). It's known that the accumulation of defects in the form of bonds cleavage in concrete structure is a thermofluctuation process and increases with the growth of strains and heating temperature. Overtime accumulation of damages in a sample during isothermal endurance under constant load is characterized by classical creep curves with three distinctive regions. Time before destruction (longevity of concrete) is described by the Boltzmann – Zhurkov kinetic equation [21].

Diagram non-linearity is characterized by an elasticity coefficient of concrete in V.I. Murashev terminology [22] or by a coefficient of secant modulus in N.I. Karpenko terminology [20]. The mentioned coefficient is calculated by dividing elastic deformations by total deformations and shows a ratio between acting average and structural stress, particularly for ultimate strain in normal temperature

$$V_{bu,0} = \frac{\varepsilon_{bu,0}^{(el)}}{\varepsilon_{bu,0}} = \frac{R_{b,0}}{E_{b,0}\varepsilon_{bu,0}} = \frac{R_{b,0}}{R_{b,str}}, \quad (1)$$

where  $R_{b,0}$ ,  $E_{b,0}$  и  $\varepsilon_{bu,0}$  – compressive strength, initial modulus, and limit (peak) strains of concrete before heating respectively;  $R_{b,str}$  – ultimate structural stresses (structure stability) of concrete.

Heating temperature impact on mechanic concrete properties in domestic and foreign regulatory and scientific literature is usually characterized by two main thermal parameters – stability decrease coefficient  $\gamma_{b,t}$  and elasticity module decrease coefficient  $\beta_{b,t}$  during heating, which are calculated as the ratio of the characteristics in the heated state ( $\sigma_{bu,t}$ ,  $E_{b,t}$ ) to the corresponding values before heating ( $R_{b,0}$ ,  $E_{b,0}$ ):

$$\gamma_{b,t} = \frac{\sigma_{bu,t}}{R_{b,0}}; \quad (2)$$

$$\beta_{b,t} = \frac{E_{b,t}}{E_{b,0}}. \quad (3)$$

Temperature dependences of these parameters are set as analytical expressions, tables, and graphs.

As the third temperature parameter, it's usually used either limiting deformations of concrete  $\varepsilon_{bu,t}$  (peak values, corresponding to the top of the diagram), or limiting elasticity coefficient  $\nu_{bu,t}$ , but when limiting structural strains independence principle is applied, there is no need for normalization of temperature dependences for these characteristics because they are expressed through general parameters as basic thermomechanical ratios:

– for ultimate strains through the initial module decrease coefficient

$$\varepsilon_{bu,t} = \frac{\varepsilon_{bu,0}}{\beta_{b,t}}; \quad (4)$$

– for ultimate the elasticity coefficient through the stability decrease coefficient

$$\nu_{bu,t} = \nu_{bu,0} \gamma_{b,t}. \quad (5)$$

Proposed ratios are easy to prove by geometrical conditions. The first one of these ratios represents the fact that limiting (peak) concrete strains value when heating are defined only by a initial module decrease:

$$\frac{\varepsilon_{bu,0}}{\varepsilon_{bu,t}} = \frac{R_{b,0}}{E_{b,0}} \cdot \frac{E_{b,t}}{R_{b,0}} = \frac{E_{b,t}}{E_{b,0}} = \beta_{b,t}. \quad (6)$$

The second ratio witnesses about the increase of deformation curve non-linearity increase as the concrete stability increase:

$$\frac{\nu_{bu,t}}{\nu_{bu,0}} = \frac{R_{b,0} \gamma_{b,t}}{R_{b,0}} \cdot \frac{R_{b,0}}{R_{b,0}} = \gamma_{b,t}. \quad (7)$$

Limiting structural strains' independence from temperature allows not only to simplify the normalization of temperature parameters but also to explain peculiarities of its behavior during heating under loading.

### **Resistance of loaded concrete during heating. Energy criterion for strain coupling**

Non-stationary heating of concrete samples under the action of initial compressive stresses as shown [19] leads to its stability increase (growth of  $\gamma_{b,t}$  coefficient) in comparison with concrete which was heated firstly and then loaded to destruction. It's explained by the restraining effect of the load on the development of microcracks (cracks caused by thermal incompatibility between aggregate and cement stone matrix first of all), which growth is unhindered in unloaded samples [23]. It has been proven by research [24] at least for residual crack density calculations.

But heating in a loaded state has a much more significant impact on concrete strains. During non-stationary heating of loaded samples mechanical strains (obtained by subtracting the temperature component from the total strains) were almost double the strain of samples which were loaded after heating.

Assume that sequence of applying heating and force actions has no impact on concrete strength and conditionally assume that it remains exactly the same at a given heating temperature, regardless of the loading condi-

tions. In this case deformability increase while maintaining the constancy of the ultimate structural stresses, it can be ensured only by increasing the linear component. Thus, the connection between stress and strains during loaded concrete heating is expressed as a diagram with the same value of elasticity coefficient as the one when loading has a place after heating (due to the fact that the stability to ultimate structural stresses does not decrease) but with less initial module (Figure 5, a). In this case, the difference in the description of diagrams will be fewer values of  $\beta_{b,t}$ , coefficient and it leads to an increase of peak strains from  $\varepsilon_{bu,t}^{HTL}$  up  $\varepsilon_{bu,t}^{LTH}$  to because of the thermomechanical equation (6).

The energy interpretation of the considered effect of increasing deformability is that when heated under load, the external force performs additional work on displacements caused by a decrease in the elastic properties of the material. Assuming that the value of work that external force has to make for the achievement of given deformation is the same, we obtain all the required work is done because of external force increase when loading occurs before heating. When the last ones occur at the same time part of this work is done because of initial module of material deformation decrease caused by heating, so the same deformation can be achieved with less value of force or the same force will lead to bigger deformation. Graphically, this is expressed in equality of shaded areas in Figure 5, b. It results in the following ratio between strains when concrete heated under load  $\varepsilon_{bu,t}^{LTH}$  (load-then-heat regime, LTH) and loading after heating  $\varepsilon_{bu,t}^{HTL}$  (heat-then-load regime, HTL), showing their nearly two times increase corresponding quite well with experimental data [25]:

$$\varepsilon_{bu,t}^{LTH} = \varepsilon_{bu,t}^{HTL} + \sqrt{\varepsilon_{bu,t}^{HTL} (\varepsilon_{bu,t}^{HTL} - \varepsilon_{bu,0})}. \tag{8}$$

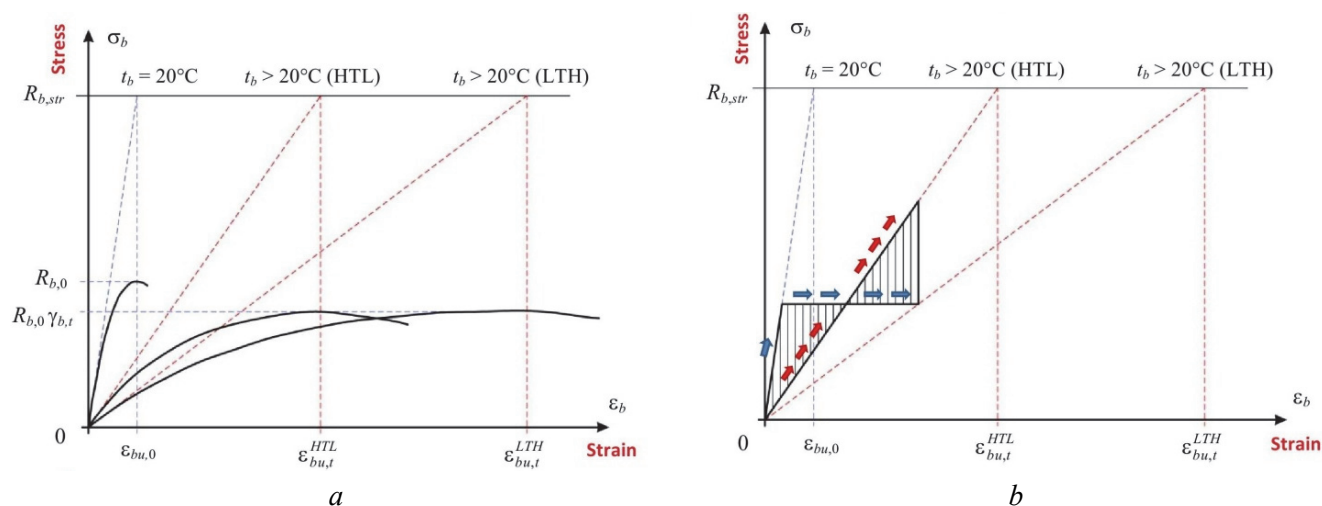


Figure 5. Isothermal stress-strain diagrams of concrete for loading conditions after heating and heating under load (a); energy criterion for strain coupling (b)

As noted many times by V.M. Bondarenko, besides evidence-based calculation explanation any fact should be given a clear physical interpretation. In the case of concrete, it should be done from the building materials science point of view, which is intended not only to explain the structure and composition of concrete, but also the mechanism of its deformation.

The closest demonstration of considered deformability increase when loaded concrete is being heated is drying creep also known as *Pickett effect* [26]. In normal thermal conditions creep deformations of drying concrete are bigger than ones of sealed (hermetic) samples. It's explained by diffusion of free (not chemically bound) moisture from the micropores of the cement gel into neighboring larger capillary macropores, accompanied by sliding of the layers caused by long-time action of loading.

During high-temperature heating, a similar process happens. It's caused by the migration of free moisture firstly and after 250 °C, when it fully evaporates, it's followed by migration of chemically bounded moisture, released during the dehydration of concrete stone minerals [27]. The observed facts prove that deformability increases during the heating of loaded concrete so as heated unloaded concrete elasticity module decrease happens during only the first heating and is irreversible [25].

### Analytical dependencies description. Principle of normalization

The examples shown above of using the affinity properties of the stress-strain- curves of concrete at different temperatures both under loading after heating and under heating under load are a consequence of a more general *principle of normalization*. According to this principle the processes occurring in the material over time or under the action of the active factor, despite their different physical nature, can be described by analytical dependencies that have a single structure due to the general laws that the observed processes obey.

In the works of V.M. Bondarenko [5; 28, etc.], when analytically describing the ongoing processes of force or environmental resistance of concrete, whether it is the non-equilibrium development of deformations or the advancement of the front of corrosion damage, the solution of the kinetic equation was used. Such a solution shows that the intensity of change of observed process parameter in conditions of environment and energetic constancy is proportional to the deficit of this parameter towards limiting values:

$$\frac{d(y-a)}{dt} = -k(y-a)^m, \quad (9)$$

where  $y$  and  $a$  – correspondingly present and ultimate values of observed process parameter;  $t$  – time;  $k$  and  $m$  – some empirical characteristics.

Represented equation reflects the hypotheses about entropy damping of non-equilibrium processes. This hypothesis is a consequence of the physicochemical law of mass action, which was formulated by C.M. Guldberg and P. Waage in 1867.

Concerning the conditions of the active action of the destructive factor (temperature or load), which are characteristic of the thermal strength resistance of concrete, the intensity of the change in the observed process parameter is proposed to be taken not only proportional to the deficit of this parameter towards the limiting values, but also to the value of the active factor itself. So, the kinetic equation is written as

$$\frac{dy}{dt} = -k(y-a)ut^{u-1}, \quad (10)$$

where  $t$  – a value of active factor;  $k$  – a process damping parameter;  $u$  – an intensity index.

The solution of this equation makes it possible to use in the analytical description of ongoing processes of various nature (loading, heating, damage accumulation, development of strains or thermal degradation of the mechanical properties of concrete, as well as the development of the temperature field over the cross-section [29]) uniform analytical dependences in the form of exponential functions, which is depending on the given boundary conditions acquire one form or another (Figure 6):

– at  $a = 0$  and initial condition  $y = A$  at  $t = 0$

$$y = A \exp[-kt^u]; \quad (11)$$

– at  $a \neq 0$  and initial condition  $y = 0$  at  $t = 0$

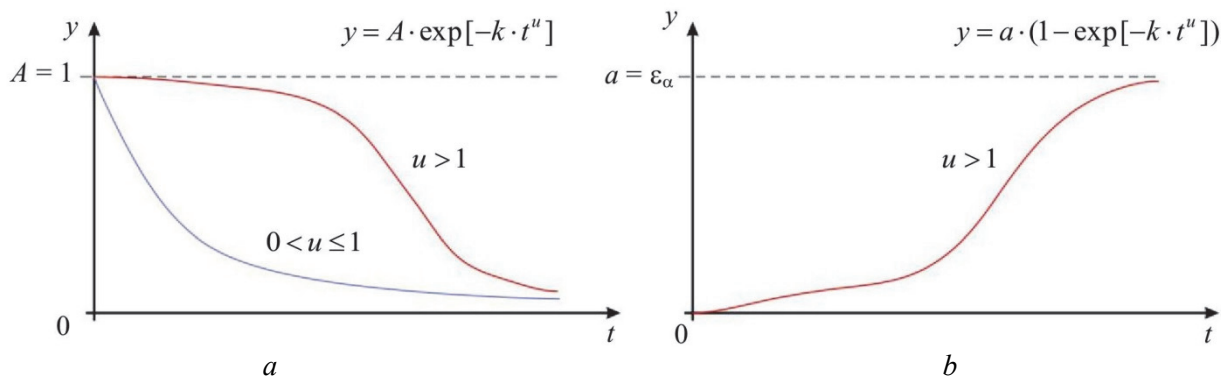
$$y = a(1 - \exp[-kt^u]). \quad (12)$$

The first solution at  $A = 1$  is suitable for describing the coefficient of reduction concrete stability decrease during heating (for  $u > 1$ ) and the coefficient of thermal degradation of the initial modulus of concrete deformation (for  $0 < u \leq 1$ ):

$$\gamma_{b,t} = \exp \left[ -\gamma \left( \frac{t_b - 20}{1000} \right)^m \right]; \quad (13)$$

$$\beta_{b,t} = \exp \left[ -\beta \left( \frac{t_b - 20}{1000} \right)^n \right], \tag{14}$$

where  $t_b$  – temperature of concrete heating, °C (active action factor);  $\gamma, m, \beta, n$  – experimental dimensionless parameters for a given concrete composition.



**Figure 6.** Characteristic dependences of changes in the main thermomechanical parameters of concrete: *a* – reduction in strength and initial modulus of deformation during heating; *b* – free temperature strains

Intensity index  $u$  is considered here as a parameter that characterizes material resistance to destructive factor  $t_b$ : due to its high values ( $u = 3-5$ ) concrete stability practically doesn't decrease in temperatures below 400 °C. And with  $u$  increase stability is constant till higher temperature, but it falls sharply afterward. At the same time values  $0 < u \leq 1$  make it possible to reflect the sharp falling of deformation modulus at the start of heating and a more gradual subsequent decrease at higher temperatures.

The second solution is supposed to be used for the description of free thermal strain at  $a = \epsilon_\alpha$ :

$$\epsilon_{b,th} = \alpha_1(t_b - 20) + \epsilon_\alpha \left( 1 - \exp \left[ -\alpha_2 \left( \frac{t_b - 20}{1000} \right)^p \right] \right), \tag{13}$$

where  $\epsilon_\alpha$  – maximal temperature strain of concrete;  $\alpha_1, \alpha_2, p$  – experimental dimensionless parameters for given concrete composition.

While construing it's taken into consideration that free thermal expansion can possess a linear component, characterized by  $\alpha_1$  coefficient, and a non-linear one, described by exponential dependence with  $\alpha_2, p$  parameters, and  $\epsilon_\alpha$  tending to its maximum value. Because of fire shrinkage, the given equation doesn't consider deformation decrease in temperatures over 600 °C.

The solution of the equation mentioned above can also be used for the description of the connection between stress and strains of concrete. Achieved strain level  $\eta_\epsilon = \epsilon_b / \epsilon_{bu}$  is considered an active acting factor because strains are linearly related to structural stress and their value forms an accumulation of concrete structural damages as a result of force action [30].

Assume as starting a  $\nu_b$  dependence of concrete in form of non-linear Hooke's law while considering coefficient as an integral function of the density distribution of structural bonds strength. Write an expression for  $\sigma$ - $\epsilon$  elasticity coefficient (secant modulus) as an exponential function of deformations level  $\eta_\epsilon$  with  $k, u$  parameters like in (11).

$$\sigma_b = \epsilon_b E_b \nu_b. \tag{14}$$

$$\nu_b = \exp[-k(\eta_\epsilon)^u]. \tag{15}$$

Unlike in previously mentioned cases  $k$ ,  $u$  parameters aren't independent and are defined by limiting conditions to which should correspond a stress-strain curve.

Parameter  $k$  defines conditions that at the top of the diagram ( $\eta_\varepsilon = 1$ ) elasticity coefficient is equal to its limiting value  $\nu_{bu}$ :

$$\nu_{bu} = \exp[-k]. \quad (16)$$

$$k = -\ln \nu_{bu}. \quad (17)$$

The parameter  $u$  is found from the condition that the angle of arrival of the tangent at the top of the diagram is zero. Calculate the first derivative:

$$\frac{d\sigma_b}{d\varepsilon_b} = E_b \nu_b + \varepsilon_b E_b \nu_b \frac{d\nu_b}{d\varepsilon_b} = E_b \nu_b + \varepsilon_b E_b \nu_b \left( -ku (\eta_\varepsilon)^{u-1} \right) \frac{1}{\varepsilon_{bu}}. \quad (18)$$

At  $\eta_\varepsilon = 1$  elasticity coefficient  $\nu_b = \nu_{bu}$ , strain  $\varepsilon_b = \varepsilon_{bu}$ , substituting into (18) and equating to zero, obtain

$$\frac{d\sigma_b}{d\varepsilon_b} = E_b \nu_{bu} + E_b \nu_{bu} (-ku) = E_b \nu_{bu} (1 - ku) = 0, \quad (19)$$

where

$$u = \frac{1}{k}. \quad (20)$$

Finally, the expression for the elasticity coefficient is:

$$\nu_b = \exp[-k(\eta_\varepsilon)^{1/k}]. \quad (21)$$

Proposed dependence corresponds to limiting conditions, which should be complied with by the curve of connection between stress and strains. This dependence also meets the requirements of continuity and differentiability over the entire range of concrete strain values. These properties do not create difficulties for its practical application in numerical analysis.

### Conclusion

Evolving the ideas of V.M. Bondarenko and standing on the basic premises of the calculation model of concrete force resistance proposed by him, we propose basic principles of analysis of loaded concrete behavior in sharp-regime temperature action conditions.

Division of total strain components supposes one to consider un-force (temperature, moisture, etc.) and force (moment and lagged) partial strains which are taken as independent.

We suppose to divide mechanical strains into linear and non-linear depending on whether they cause damages accumulation in the concrete structure and reduce its stability in relation to ultimate structural stresses. The principle of superposition is right for linear deformations. Non-linear deformations are estimated using the elasticity coefficient which reflects the material structure degradation index.

Regardless of the level, regime, and duration of loading and temperature actions mechanical strains are described by the affinity principle.

Remise about the variability of characteristics under conditions of environmental and energy constancy follows non-linear entropy laws, used by V.M. Bondarenko for the analytical description of anticorrosion, age, and other resistances was extended to the scope of the active destructive factor (temperature, load, etc.). This has made possible its application in the description of thermomechanical equations of concrete state.

Considering the concrete resistance to degradation and deformation from the structural changes and statistics point of view is mostly a staged direction. Nevertheless, it allows one to make a based and consistent explanation of many observed patterns of concrete behavior. And in this sense, V.M. Bondarenko's favorite citation of the famous mathematician and science popularizer G. Pólya (1887–1985) should be recited: “Nobody has reached Polar Star yet, but many had found the right way looking at it.”

## References

1. Bondarenko V.M., Fedorov V.S. Models in theories of deformation and destruction of building materials. *Academia. Architecture and Construction*. 2013;(2):103–105. (In Russ.)
2. Kolchunov V.I., Fedorov V.S. Conceptual hierarchy of models in the theory of resistance of building structures. *Industrial and Civil Engineering*. 2020;(8):16–23. (In Russ.) <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2020.08.16-23>
3. Arutyunyan N.Kh., Kolmanovskiy V.B. *Theory of creep of inhomogeneous bodies*. Moscow: Nauka Publ.; 1983. (In Russ.)
4. Bondarenko V.M., Bondarenko S.V. *Engineering methods of the nonlinear theory of reinforced concrete*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1982. (In Russ.)
5. Bondarenko V.M., Borovskikh A.V., Markov S.V., Rimshin V.I. *Elements of the theory of reinforced concrete reconstruction*. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University of Architecture, Building and Civil Engineering; 2002. (In Russ.)
6. Gvozdev A.A. Remark on the nonlinear theory of concrete creep under uniaxial compression. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*. 1972;(5):33. (In Russ.)
7. Galustov K.Z. *Nonlinear theory of concrete creep and calculation of reinforced concrete structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)
8. Bondarenko V.M., Karpenko N.I. The level of stress state as a factor of structural changes and rheological force resistance of concrete. *Academia. Architecture and Construction*. 2007;(4):56–59. (In Russ.)
9. Berg O.Ya. *Physical foundations of the theory of strength of concrete and reinforced concrete*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1962. (In Russ.)
10. Berg O.Ya., Shcherbakov Ye.N. To account for the nonlinearity of the relationship between stress and concrete creep deformation in engineering calculations. *Izvestiya Vuzov: Stroitel'stvo i Arhitektura*. 1973;(12):18–24. (In Russ.)
11. Fedorov V.S., Levitskiy V.Ye. Analysis of the thermal strength resistance of concrete from the standpoint of the structural-statistical approach. *Izvestiya OrolGTU. Seriya: Stroitel'stvo. Transport (k 80-letiyu G.A. Geniyeva)*. 2007;(2/14):138–145. (In Russ.)
12. Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*. 1951;18:293–297.
13. Volkov S.D. *Statistical theory of strength*. Moscow: Mashgiz Publ.; 1960. (In Russ.)
14. Bolotin V.V. Some questions of the theory of brittle fracture. *Raschety na Prochnost'*. 1962;(8):36–52. (In Russ.)
15. Sedrakyan L.G. *Elements of the statistical theory of deformation and fracture of brittle materials*. Yerevan: Ayastan Publ.; 1968. (In Russ.)
16. Kharlab V.D. Generalization of the Weibull statistical theory of brittle fracture. *Mekhanika Sterzhnevnykh Sistem i Sploshnykh Sred*. 1987;(11):150–152. (In Russ.)
17. Aliyev Sh.A., Kogan Ye.A., Kholmyanskiy M.M. *Strength of concrete as a statistically inhomogeneous non-solid body*. Baku: Azerbaydzhanskii politekhnicheskii institut Publ.; 1989. (In Russ.)
18. Furamura F. Stress-strain curve of concrete at high temperatures. *Transactions of the Architectural Institute of Japan*. 1966;(7004):686.
19. Purkiss J.A., Long-Yuan Li. *Fire safety engineering design of structures*. 3rd ed. CRC Press; 2013.
20. Karpenko N.I. *General models of reinforced concrete mechanics*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1996. (In Russ.)
21. Roytman V.M. Fire resistance of building materials as a basic characteristic of fire resistance kinetic theory. *Fire and Emergencies: Prevention, Elimination*. 2019;(1):62–69. (In Russ.) <https://doi.org/10.25257/FE.2019.1.62-69>
22. Murashov V.I. *Crack resistance, stiffness and strength of reinforced concrete*. Moscow: Mashstroyizdat Publ.; 1950. (In Russ.)

23. Purkiss J.A., Bali A. The transient behaviour of concrete at temperatures up to 800 °C. *Proceedings of the 10th Ibausil, Hochschule für Architektur und Bauwesen*. 1988;(2/1):234–239.
24. Guise S.E. *The use of colour image analysis for assessment of fire damaged concrete* (PhD thesis). Birmingham: Aston University; 1997.
25. Fedorov V.S., Levitskiy V.E., Molchadskiy I.S., Aleksandrov A.V. *Fire resistance and fire hazard of building structures*. Moscow: ASV Publ.; 2009. (In Russ.)
26. Pickett G. The effect of change in moisture-content on the creep of concrete under a sustained load. *ACI Journal Proceedings*. 1942;38:333–356.
27. Sabeur H., Meftah F. Dehydration creep of concrete at high temperature. *Materials and Structures*. 2008;41:17–30.
28. Bondarenko V.M., Rimshin V.I. *Dissipative theory of force resistance of reinforced concrete*. Moscow: Student Publ.; 2015. (In Russ.)
29. Fedorov V.S., Levitskiy V.Ye., Matviyenko V.Ye. Technique for constructing temperature profiles for calculating the fire resistance of reinforced concrete structures using the normalized curve method. *Inzhenerno-Stroitel'nyy Vestnik Prikaspiya*. 2021;(1):5–8. (In Russ.)
30. Fedorov V.S., Levitskiy V.E. Modeling of concrete thermal power resistance during the high-temperature heating. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018;456:012041. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012041>