

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Рынкoвская М.И.*, канд. техн. наук, РУДН, Москва, Россия

### ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*Ерофеев В.Т.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

### ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

*Мамиева И.А.*, РУДН, Москва, Россия

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

*Аганов В.П.*, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

*Андреев В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

*Ванин В.В.*, д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

*Варум У.*, д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

*Войццкий З.*, проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

*Евкин А.*, д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

*Зверев Е.М.*, д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

*Иванов С.П.*, д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

*Карпенко Н.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

*Какоби С.*, д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

*Колчунов В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

*Красич С.*, канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

*Лисичкин С.Е.*, д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

*Ляхович Л.С.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

*Магуле Ф.*, проф., Высшая инженерная школа «Централь Стопелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

*Мендонка П.*, д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

*Санжаровский Р.С.*, д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

*Сантос Р.*, исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

*Травуш В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

*Якупов Н.М.*, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

## СОДЕРЖАНИЕ

### РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Колчунов В.И., Московцева В.С.* Живучесть железобетонных каркасов многоэтажных зданий со сложнапряженными элементами ..... 195

*Якупов С.Н., Губайдуллин Р.И.* Жесткость, адгезия и расслоение покрытия в системе «подложка – покрытие» ..... 204

*Chongo P., Shambina S.L., Tembo O.* Analysis for the efficiency of additional dispersed reinforcement using coconut fiber for a concrete beam with traditional steel bar reinforcement (Анализ эффективности дополнительного дисперсного армирования кокосовым волокном для бетонной балки с традиционным армированием стальными стержнями) ..... 215

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

*Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Киселев А.П., Николаев А.П., Клочков Ю.В.* Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомым величин для нелинейного расчета оболочки вращения ..... 228

*Никитин К.Е., Кирсанов О.А.* Сравнительное исследование конечно-элементных методик расчета ребристых железобетонных перекрытий ..... 242

### ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

*Кривошапко С.Н.* К вопросу об основных архитектурных стилях, направлениях и стилевых течениях для оболочек и оболочечных структур ..... 255

### ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

*Агаларов Д.Г., Мамедова Г.А., Рустамова М.А.* Исследование волн в подкрепленной сети ..... 269

Редактор Ю.А. Заикина  
Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова  
Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

#### Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i\_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 23.09.2022. Выход в свет 30.09.2022. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 10,23. Тираж 250 экз. Заказ № 841. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

# STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2022 VOLUME 18 No. 3

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

## EDITORIAL BOARD

### EDITOR-IN-CHIEF

*Marina I. Rynkovskaya*, PhD of Technical Science, RUDN University, Moscow, Russia

### ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

*Vladimir T. Erofeev*, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

### MANAGING EDITOR

*Iraida A. Mamieva*, RUDN University, Moscow, Russia

### MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

*Vladimir P. Agapov*, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

*Vladimir I. Andreev*, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

*Sergey P. Ivanov*, DSc, Professor, VSUT (Volga Tech), Yoshkar-Ola, Russia

*Saeid Kakooei*, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

*Nikolay I. Karpenko*, member of the RAACS, DSc, Professor, NIIF RAACS, Moscow, Russia

*Vitaliy I. Kolchunov*, member of the RAACS, DSc, Professor, SWSU, Kursk, Russia

*Sonja Krasic*, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

*Sergey E. Lisichkin*, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

*Leonid S. Lyakhovich*, member of the RAACS, DSc, Professor, TSUAB, Tomsk, Russia

*Fredéric Magoulès*, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

*Paulo Mendonca*, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

*Rudolf S. Sanjarovskiy*, DSc, Professor, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

*Ricardo Santos*, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

*Vladimir I. Travush*, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

*Vladimir V. Vanin*, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

*Humberto Varum*, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

*Zbigniew Wójcicki*, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

*Nukh M. Yakupov*, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

*Alex Yevkin*, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

*Evgeniy M. Zveryaev*, DSc, Professor, KIAM RAS, Moscow, Russia

## CONTENTS

### ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

*Kolchunov V.I., Moskovtseva V.S.* Survivability of reinforced concrete frames of multistorey buildings with complex stress elements ..... 195

*Yakupov S.N., Gubaidullin R.I.* Rigidity, adhesion and delamination of the coating in the "substrate – coating" system ..... 204

*Chongo P., Shambina S.L., Tembo O.* Analysis for the efficiency of additional dispersed reinforcement using coconut fiber for a concrete beam with traditional steel bar reinforcement ..... 215

### ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS

#### OF ANALYSIS OF STRUCTURES

*Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Kiselev A.P., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V.* Volumetric element with vector approximation of the desired values for nonlinear calculation of the shell of rotation ..... 228

*Nikitin K.E., Kirsanov O.A.* Comparative study of finite element methods of calculation of ribbed reinforced concrete floors ..... 242

### THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

*Krivoshapko S.N.* On the basic architectural styles, directions, and style flows for shells and shell structures ..... 255

### DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

*Agalarov J.H., Mammadova G.A., Rustamova M.A.* Investigation of waves in the strengthened net ..... 269

Copy Editor Iu.A. Zaikina

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer Iu.A. Zaikina

#### Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: [stmj@rudn.ru](mailto:stmj@rudn.ru); [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation



## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-195-203  
 УДК 624.07

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Живучесть железобетонных каркасов многоэтажных зданий со сложнапряженными элементами

В.И. Колчунов<sup>1,2</sup> , В.С. Московцева<sup>1</sup>  

<sup>1</sup>Юго-Западный государственный университет, Курск, Российская Федерация

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, Москва, Российская Федерация

✉ lyavetka1@mail.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 10 марта 2022 г.

Доработана: 30 мая 2022 г.

Принята к публикации: 9 июня 2022 г.

**Аннотация.** Экспериментальное определение параметров силового сопротивления железобетонных конструкций, направленное на их защиту от аварийных запроектных воздействий, является важным направлением в повышении механической безопасности зданий и сооружений в условиях современных вызовов. В связи с этим целью исследования стала экспериментальная оценка параметров деформирования в сложнапряженных элементах железобетонных рам при особых аварийных воздействиях, вызванных внезапным удалением одного из несущих элементов. Экспериментальные исследования выполнены для двух железобетонных рам, одна из которых испытана при мгновенном удалении средней колонны, а вторая – при удалении крайней. Конструкции рам запроектированы двухпролетными с тремя этажами по высоте и с использованием пространственных арматурных каркасов, обеспечивающих сопротивление кручению с изгибом. Приведены результаты экспериментально-теоретических исследований конструкций железобетонных рам в запредельных состояниях при особых воздействиях и проведена оценка перемещений, трещинообразования и разрушения рассматриваемых сложнапряженных элементов конструкций при таких воздействиях. Установлено, что вид напряженного состояния, картина образования, раскрытие и развитие трещин существенно влияют на параметры деформирования и диссипативные свойства элементов конструктивной системы.

**Ключевые слова:** экспериментальные исследования, сложнапряженный железобетон, особые воздействия, живучесть, защита, прогрессирующее обрушение

#### Для цитирования

Колчунов В.И., Московцева В.С. Живучесть железобетонных каркасов многоэтажных зданий со сложнапряженными элементами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 195–203. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-195-203>

**Колчунов Виталий Иванович**, доктор технических наук, профессор, действительный член Российской академии архитектуры и строительных наук, заведующий кафедрой уникальных зданий и сооружений, факультет строительства и архитектуры, Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; ORCID: 0000-0001-5290-3429, Scopus Author ID: 57219004839, eLIBRARY SPIN-код: 4512-6499; asiorel@mail.ru

**Московцева Виолетта Сергеевна**, инженер кафедры уникальных зданий и сооружений, Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; ORCID: 0000-0002-5509-1937, Scopus Author ID: 57220160946, eLIBRARY SPIN-код: 2723-4002; lyavetka1@mail.ru

© Колчунов В.И., Московцева В.С., 2022



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Survivability of reinforced concrete frames of multi-storey buildings with complex stress elements

Vitaly I. Kolchunov<sup>1,2</sup> , Violetta S. Moskvotseva<sup>1</sup>  

<sup>1</sup>Southwest State University, Kursk, Russian Federation

<sup>2</sup>Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, Russian Federation

✉ lyavetka1@mail.ru

## Article history

Received: March 10, 2022

Revised: May 29, 2022

Accepted: June 9, 2022

## For citation

Kolchunov V.I., Moskvotseva V.S. Survivability of reinforced concrete frames of multi-storey buildings with complex stress elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):195–203. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-195-203>

**Abstract.** Experimental determination of the parameters of the force resistance of reinforced concrete structures aimed at protecting them from emergency beyond design impacts is an important direction in improving the safety of buildings and structures. In this connection, the purpose of the study was an experimental assessment of the deformation parameters in the complexly stressed elements of reinforced concrete frames under special impact in the form of a sudden column removal. Experimental studies were carried out for two frames, one of which was tested when removing the middle column, the second – when removing the extreme. Experimental two-span structures of reinforced concrete frames are designed with three floors in height, reinforcement was made with spatial reinforcing cages that provide resistance to torsion with bending. The results of experimental and theoretical studies of reinforced concrete frame structures under special influences and an assessment of displacements, cracking and destruction of the considered complex-stressed structural elements under such influences are presented. It is established that the type of stress state, the formation and width of crack opening significantly affect the dissipative properties of the structural system.

**Keywords:** experimental research, complex-stressed reinforced concrete, special impact, survivability, resistance, progressive collapse

## Введение

Вопросы создания методов по защите зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения все более актуальны в связи с постоянным увеличением на них количества и интенсивности воздействий природного и техногенного характера, приводящих к непропорциональному отказу конструкций, а в некоторых случаях к их полному разрушению. В России и ряде зарубежных стран в настоящее время разработаны и введены новые нормативные документы по защите зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения<sup>1</sup> [1]. Для их совершенствования и в развитие этого направления необходимы новые исследования, направленные на изучение силового сопротивления различных типов конструкций при таких воздействиях [2–4]. Анализируя теоретические [5–7] и экспериментальные [8–14] исследования отечественных и зарубежных ученых можно заметить, что в предлагаемых решениях по защите от прогрессирующего обрушения железобетонных рамно-стрешневых конструкций каркасов многоэтажных зданий рассмотрены простейшие напряженные состояния в конструктивных элементах: растяжение – сжатие, изгиб [8; 13], внецентренное сжатие [11; 12; 15; 16] и др. При этом следует отметить, что совместное действие изгибающего и крутящего моментов и поперечных сил относится к достаточно распространенному виду сочетания усилий, и решение задач по защите каркасов многоэтажных зданий со сложнапряженными железобетонными элементами в запредельных состояниях от таких воздействий до настоящего времени не рассматривались. В настоящей работе представлены результаты экспериментально-теоретического исследования монолитных железобетонных рам со сложнапряженными элементами

**Vitaly I. Kolchunov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, full member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Head of the Department of Unique Buildings and Structures, Faculty of Construction and Architecture, Southwest State University, 94 50 let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5290-3429, Scopus Author ID: 57219004839, eLIBRARY SPIN-code: 4512-6499; asiorel@mail.ru  
**Violetta S. Moskvotseva**, engineer of the Department of Unique Buildings and Structures, Southwest State University, 94 50 let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5509-1937, Scopus Author ID: 57220160946, eLIBRARY SPIN-code: 2723-4002; lyavetka1@mail.ru

<sup>1</sup> СП 385.1325800.2018. Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения. М.: Минстрой России, 2018. 33 с.; UFC 4-023-03. Design of buildings to resist progressive collapse text. Department of Defense USA, 2010. 176 p.; ДБН В.1.2-14-2009. Общие принципы обеспечения надежности и конструктивной безопасности зданий, сооружений строительных конструкций и оснований. К.: Минрегионстрой Украины, 2009. 43 с.

при особом статико-динамическом воздействии, вызванном внезапным удалением средней и крайней стоек рамы. Целью исследования являлась экспериментальная оценка параметров деформирования в сложно-напряженных элементах железобетонных рам при рассматриваемых воздействиях.

### Методика

Для решения поставленных задач разработана методика и проведены экспериментальные исследования живучести конструкций монолитных железобетонных рам двух серий при двух вариантах воздействий: РЖ-1 – рама с внезапным выключением из работы центральной стойки; РЖ-2 – рама с внезапным выключением из работы крайней стойки.

Перед проведением испытаний выполнен расчет напряженно-деформированного состояния опытных конструкций рам. Расчетная схема построена на основе модели деформирования железобетонных конструктивных систем в запредельном состоянии при особых воздействиях [17; 18].

Конечно-элементная модель рамы реализована в программном комплексе ЛИРА-САПР с использованием объемных конечных элементов для двух вариантов расчетных схем. Первичная расчетная схема – при действии симметричной нагрузки в виде сосредоточенных сил  $P$ , приложенных к ригелям над первым этажом в третях каждого пролета (на расстоянии 350 мм от опор) с эксцентриситетом 0,4 м из плоскости рамы. Вторичная расчетная схема – при действии тех же сосредоточенных сил и особом воздействии, вызванном внезапным удалением из рамы одной из стоек (центральной или крайней) первого этажа и приложением по месту отброшенной связи реакции с обратным знаком, действовавшей в этой стойке до приложения запроектного воздействия.

Расчет, в соответствии с комбинацией алгоритмов [18; 19], проведен по двухуровневой расчетной схеме. Расчетная схема первого уровня, построенная для фрагмента конструктивной системы здания, представляла собой конечно-элементную модель рамы с использованием объемных конечных элементов (рис. 1). Армирование сложнонапряженного ригеля определено по расчетной схеме второго уровня [20; 21] с использованием физических зависимостей деформационной модели [22; 23]. По результатам расчета запроектирована опытная конструкция рамы, в которой армирование ригелей выполнено замкнутыми пространственными каркасами, работающими на растяжение от изгиба с кручением при учете поперечной силы (рис. 2).

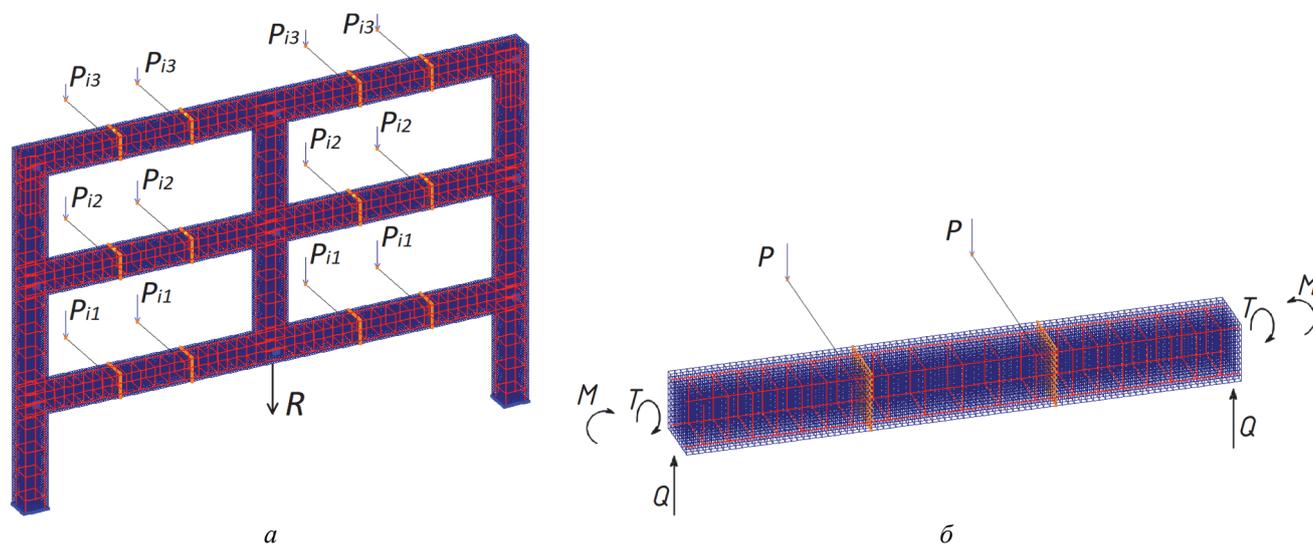
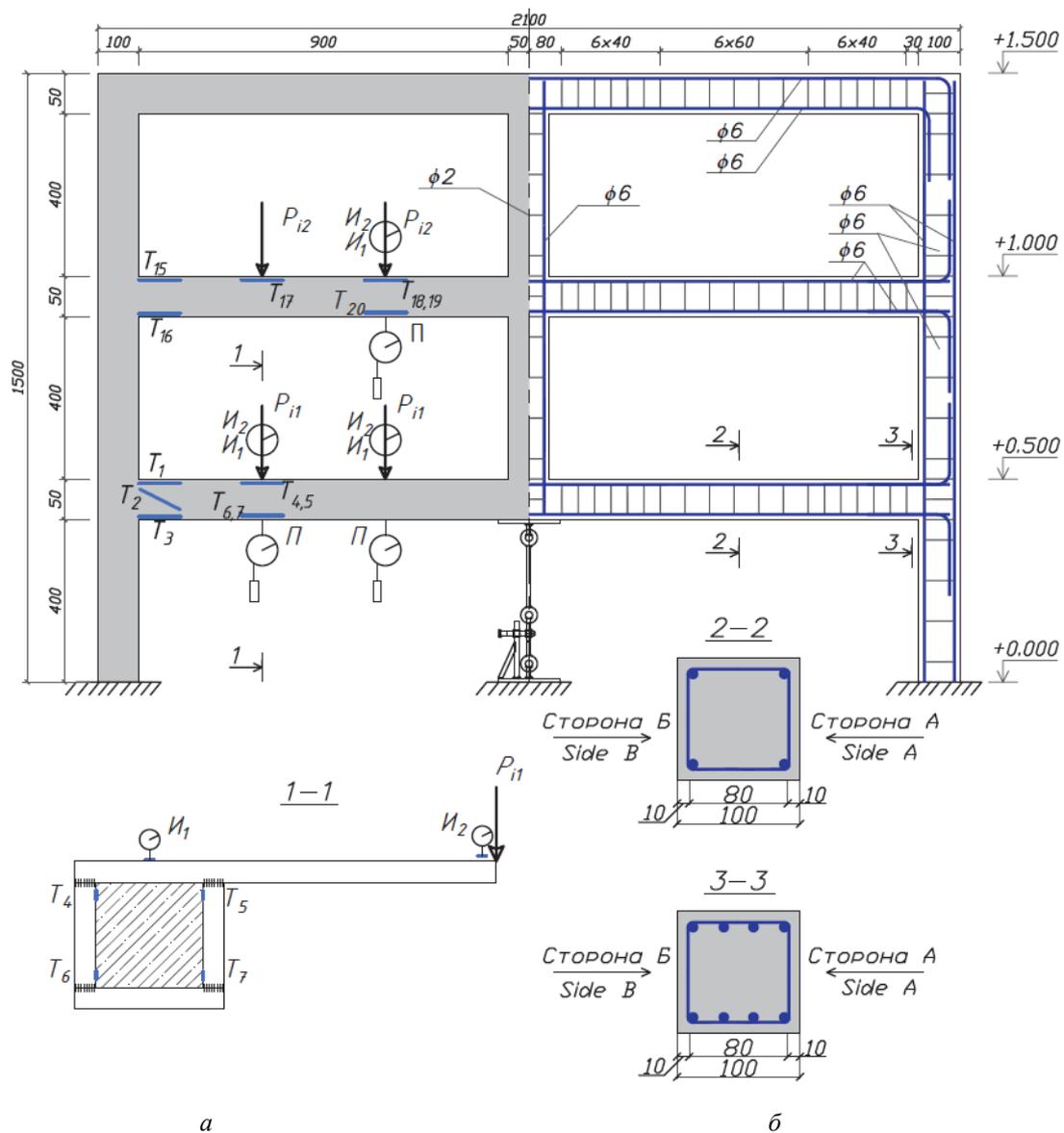


Рис. 1. Конечно-элементная расчетная схема первого (а) и второго (б) уровней  
Figure 1. Finite element calculation scheme of the first (a) and second (b) levels

Ригели опытной конструкции рамы армированы симметрично по высоте сечения в сжатой и растянутой зонах четырьмя (2+2) продольными стержнями, объединенными в пространственный каркас поперечной арматурой с шагом 40 мм на приопорных участках и 60 мм в пролете. Колонны армированы четырьмя продольными стержнями диаметром 6 мм с шагом хомутов 100 мм. Такая схема армирования конструкции принята из условия обеспечения силового сопротивления элементов рамы заданным проектным нагрузкам и рассматриваемому особому воздействию.

Стенд для проведения экспериментальных исследований рассматриваемых конструкций рам на особые воздействия включал рычажную установку, передающую нагрузку на раму, нагрузочные устройства, раскрепляющие распорки для обеспечения устойчивости положения рамы в проектном положении, рычаг для создания крутящего момента и другие элементы.

До проектной нагрузки рама нагружалась сосредоточенными силами в каждом пролете ригеля через специальные рычаги-консоли для создания в ригелях над первым этажом сложного напряженного состояния – изгиба с кручением. В опытных конструкциях исследуемых рам отсутствовала одна из колонн первого этажа, а в процессе испытаний она моделировалась специально изготовленной кинематически изменяемой опорой, позволяющей мгновенно выключать из работы колонну в составе рамы.



**Рис. 2.** Конструкция опытной рамы первой серии (РЖ-1):

*a* – схема установки приборов; *б* – армирование

**Figure 2.** The design of the experimental frame of the first series:

*a* – the installation scheme of the devices; *б* – reinforcement

В соответствии с методикой испытаний, с помощью механических приборов и методом электро-тензометрии тензорезисторами  $T_i$  измерялись перемещения и деформации бетона на фибровых волокнах поперечных сечений ригелей и в приопорных зонах вдоль оси ригеля и под углом  $45^\circ$  (рис. 2). Микроскопом фиксировалась картина образования и измерялась ширина раскрытия трещин. Учитывая динами-

ческий характер догружения конструкции рамы на втором этапе испытаний при особом воздействии, для фиксации показаний механических приборов в момент динамического догружения конструкции использовались осциллограф, а также цифровые фотокамеры. Общий вид испытаний конструкций рам первой и второй серий показан на рис. 3.



**Рис. 3.** Общий вид испытаний рам первой, РЖ-1 (а) и второй, РЖ-2 (б) серий  
**Figure 3.** General view of the tests of the frames of the first (а) and the second (б) series

### Результаты и обсуждение

Анализ результатов исследований опытных конструкций рам позволяет отметить следующее. Картина трещин при приложении проектной нагрузки и запроектного воздействия, вызывающих сложное сопротивление в конструкциях ригелей, носила пространственный характер (рис. 4 а, б) и коррелировалась с картиной трещин, полученной при испытаниях отдельных балок на кручение с изгибом в опытах [19]. На втором этапе испытаний, после приложения особого воздействия в виде внезапного удаления средней (рама РЖ-1) или крайней (рама РЖ-2) стойки, качественная картина образования пространственных трещин не изменилась (рис. 4 в, г). При этом предельная ширина раскрытия образовавшихся при проектной нагрузке трещин была превышена и образовались новые пространственные трещины в приопорных участках ригелей. После приложения особого воздействия продольная арматура практически достигает предела текучести, а в поперечной арматуре напряжения превышают временное сопротивление стали.

Значительные различия напряжений в продольной и поперечной арматуре, расположенной с разных сторон ригеля, и характер трещинообразования в конструкции (рис. 4) при проектной нагрузке свидетельствуют о сложном напряженном состоянии в приопорных зонах ригеля, испытывающего изгиб с кручением. После приложения особого воздействия произошло разрушение в наиболее напряженной приопорной зоне ригеля по одной из образовавшихся ранее пространственных трещин.

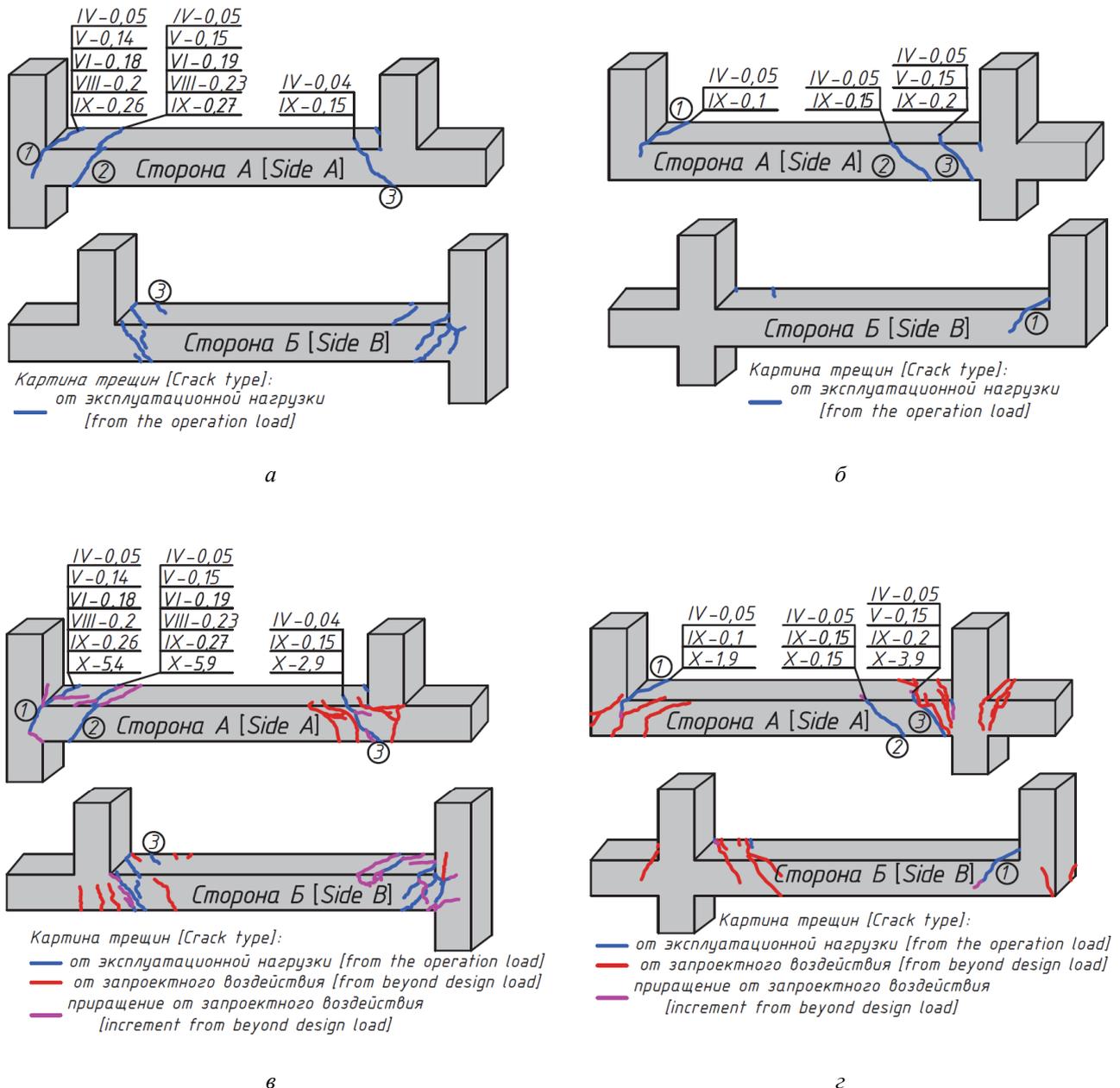
Сопоставительная оценка ширины раскрытия трещин и перемещений в сложнапряженных ригелях рамы при заданной эксплуатационной нагрузке и после особого воздействия приведены в таблице.

Для сложнапряженных конструкций ригелей выполнена оценка ширины раскрытия пространственных трещин на разных этапах нагружения конструкций (рис. 5). Установлено, что теоретические значения ширины раскрытия трещин, определенные по действующим нормам<sup>2</sup>, более чем на 40 % мень-

<sup>2</sup> СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М.: Минстрой России, 2018. 152 с.

ше опытных значений. Из этого следует вывод о том, что при рассматриваемом сложном напряженном состоянии расчетные зависимости норм нуждаются в уточнении.

Анализ этих данных показывает, что в обеих опытных конструкциях рам при принятом армировании, испытанных на втором этапе на особое воздействие в виде удаления одной из колонн рамы, ширина раскрытия трещин и, соответственно, предельные деформации арматуры превышают критерии, установленные СП 385.1325800.2018. Значение предельного прогиба (1/84 и 1/35) не превысило нормируемую величину (1/30), установленную для особого воздействия. Следовательно, выполнение деформационных критериев особого предельного состояния для опытных конструкций рам при рассматриваемых воздействиях может быть обеспечено увеличением интенсивности поперечного армирования ригелей.



**Рис. 4.** Схема образования и ширина раскрытия трещин в конструкциях до (а, б) и после (в, з) запроектного воздействия рам первой, РЖ-1 (а, в) и второй, РЖ-2 (б, з) серий

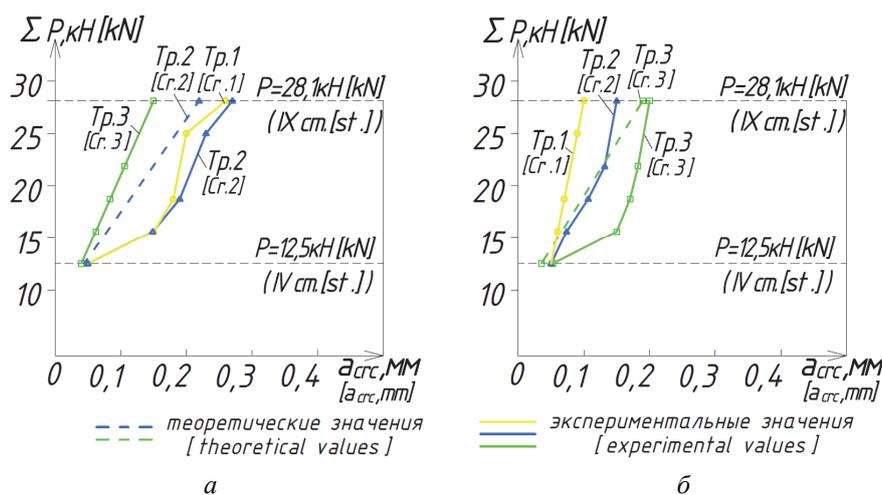
**Figure 4.** Scheme of formation and width of crack opening in structures before (a, б) and after (в, з) beyond the design impact of the frames of the first (a, в) and the second (б, з) series

**Ширина раскрытия трещин и относительные прогибы в сложнапряженных ригелях до и после запроектного воздействия**

Серия рамы	Параметры деформирования	До удаления конструктивного элемента	После удаления конструктивного элемента
РЖ-1	Ширина раскрытия трещин, $a_{cr,ст}$ , мм	0,19	Превышение критерия особого предельного состояния
	Относительный прогиб, $f/l$	1/954	1/84
РЖ-2	Ширина раскрытия трещин, $a_{cr,ст}$ , мм	0,19	Превышение критерия особого предельного состояния
	Относительный прогиб, $f/l$	1/755	1/35

**Width of crack opening and relative deflections in the complex-stressed crossbars before and after the beyond design impact**

Frame series	Deformation parameters	Before removing the column	After removing the column
First	The width of crack opening, $a_{cr,ст}$ , mm	0.19	Exceeding the criterion of a special limit state
	Relative deflections, $f/l$	1/954	1/84
Second	The width of crack opening, $a_{cr,ст}$ , mm	0.19	Exceeding the criterion of a special limit state
	Relative deflections, $f/l$	1/755	1/35



**Рис. 5.** Ширина раскрытия трещин в сложнапряженных ригелях рам первой, РЖ-1 (а) и второй, РЖ-2 (б) серий  
**Figure 5.** The width of crack opening in the complex-stressed crossbars of the frames of the first (а) and the second (б) series

**Заключение**

Предложенные физическая модель железобетонной рамы, моделирующей фрагмент каркаса многоэтажного здания, элементы которого испытывают сложное напряженное состояние, а также методика ее испытаний позволили экспериментально определить параметры деформирования и разрушения таких конструкций в запредельных состояниях в условиях статико-динамического деформирования.

Анализом экспериментальных данных деформирования, трещинообразования и разрушения конструкций железобетонных опытных рам в предельных и запредельных состояниях установлены приращения прогибов, изменения картины трещинообразования и раскрытия трещин до и после запроектного воздействия.

Моделирование деформирования, трещинообразования и разрушения железобетонных рам в физически и конструктивно нелинейной постановке выполнено с использованием объемных конечных элементов и уровневых расчетных схем. При этом учитывалось изменение структуры сечений при образовании трещин и пространственный характер трещин в рассматриваемых сложнапряженных конструкциях.

## Список литературы

1. Alternate path analysis & design guidelines for progressive collapse resistance / General Services Administration. Washington, 2016, 203 p.
2. Кодыш Э.Н., Трекин Н.Н., Чесноков Д.А. Защита многоэтажных зданий от прогрессирующего обрушения // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 6. С. 8–13.
3. Кодыш Э.Н. Проектирование защиты зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения с учетом возникновения особого предельного состояния // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 10. С. 95–101.
4. Adam J.M., Parisi F., Sagaseta J., Lu X. Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century // *Engineering Structures*. 2018. Vol. 173. Pp. 122–149.
5. Травуш В.И., Федорова Н.В. Расчет параметра живучести рамно-стержневых конструктивных систем // Научный журнал строительства и архитектуры. 2017. № 1. С. 21–28.
6. Pham A.T., Tana K.H., Yu J. Numerical investigations on static and dynamic responses of reinforced concrete subassemblages under progressive collapse // *Engineering Structures*. 2017. Vol. 149. Pp. 2–20. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.07.042>
7. Alogla K., Weekes L., Augusthus-Nelson L. Theoretical assessment of progressive collapse capacity of reinforced concrete structures // *Magazine of Concrete Research*. 2017. Vol. 69. No. 3. Pp. 145–162.
8. Федорова Н.В., Кореньков П.А., Ву Н.Т. Методика экспериментальных исследований деформирования монолитных железобетонных каркасов зданий при аварийных воздействиях // *Строительство и реконструкция*. 2018. Т. 4. № 78. С. 42–52.
9. Kolchunov V.I., Tuyen V.N., Korenkov P.A. Deformation and failure of a monolithic reinforced concrete frame under accidental actions // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. Vol. 753. Article 032037. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/753/3/032037>
10. Федорова Н.В., Гуок Ф.Д., Чанг Н.Т. Экспериментальные исследования живучести железобетонных рам с ригелями, усиленными косвенным армированием // *Строительство и реконструкция*. 2020. № 1 (87). С. 92–100.
11. Yu J., Tan K.H. Experimental and numerical investigation on progressive collapse resistance of reinforced concrete beam column sub-assemblages // *Engineering Structures*. 2013. Vol. 55. Pp. 90–106.
12. Xuan W., Wang L., Liu C., Xing G., Zhang L., Chen H. Experimental and theoretical investigations on progressive collapse resistance of the concrete-filled square steel tubular column and steel beam frame under the middle column failure scenario // *Shock and Vibration*. 2019. Vol. 2019. Pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2019/2354931>
13. Lin K., Lu X., Li Y., Guan H. Experimental study of a novel multi-hazard resistant prefabricated concrete frame structure // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2019. Vol. 119. Pp. 390–407.
14. Shan S., Li S., Xu S., Xie L. Experimental study on the progressive collapse performance of RC frames with infill walls // *Engineering Structures*. 2016. Vol. 111. Pp. 80–92. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.12.010>
15. Fedorova N.V., Ngoc V.T. Deformation and failure of monolithic reinforced concrete frames under special actions // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1425. Article 012033. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012033>
16. Weng J., Lee C.K., Tan K.H., Lim N.S. Damage assessment for reinforced concrete frames subject to progressive collapse // *Engineering Structures*. 2017. Vol. 149. Pp. 147–160. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.07.038>
17. Генцев Г.А., Колчунов В.И., Клюева Н.В., Никулин А.И., Пятикрестовский К.П. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях. М.: АСВ, 2004. 216 с.
18. Колчунов В.И., Клюева Н.В., Андросова Н.Б., Бухтиярова А.С. Живучесть зданий и сооружений при запроектных воздействиях. М.: АСВ, 2014. 208 с.
19. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S. Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020. Т. 16. № 4. С. 290–297. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297>
20. Alkadi S.A., Fedorova N.V., Osovskiy O.E. Analysis of reinforced concrete space frame deformation with composite sections elements // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 456. Article 012033. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012033>
21. Демьянов А.И., Алькади С.А. Статико-динамическое деформирование железобетонных элементов пространственной рамы при их сложном сопротивлении // *Известия вузов. Строительство*. 2018. № 11. С. 20–33.
22. Демьянов А.И., Колчунов В.И., Сальников А.С., Михайлов М.М. Расчетные модели статико-динамического деформирования железобетонной конструкции при кручении с изгибом в момент образования пространственной трещины // *Строительство и реконструкция*. 2017. Т. 3. С. 13–22.
23. Демьянов А.И., Наумов Н.В., Колчунов В.И. Методика определения параметров деформирования и трещиностойкости железобетонных составных конструкций, испытывающих кручение с изгибом // *Известия вузов. Строительство*. 2018. № 7. С. 5–16.

## References

1. *Alternate path analysis & design guidelines for progressive collapse resistance*. Washington: General Services Administration; 2016. 203 p.
2. Kodysh E.N., Trekin N.N., Chesnokov D.A. Protection of multistory buildings from progressive collapse. *Industrial and Civil Engineering*. 2016;(6):8–13. (In Russ.)
3. Kodysh E.N. Designing the protection of buildings and structures from progressive collapse, taking into account the occurrence of a special limit state. *Industrial and Civil Engineering*. 2018;(10):95–101. (In Russ.)
4. Adam J.M., Parisi F., Sagaseta J., Lu X. Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century. *Engineering Structures*. 2018;173:122–149.
5. Travush V.I., Fedorova N.V. Calculation of the parameter of survivability of frame-bar structural systems. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2017;(1):21–28. (In Russ.)
6. Pham A.T., Tana K.H., Yu J. Numerical investigations on static and dynamic responses of reinforced concrete sub-assemblages under progressive collapse. *Engineering Structures*. 2017;149:2–20. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.07.042>
7. Alogla K., Weekes L., Augustus-Nelson L. Theoretical assessment of progressive collapse capacity of reinforced concrete structures. *Magazine of Concrete Research*. 2017;69(3):145–162.
8. Fedorova N.V., Korenkov P.A., Ngoc V.T. Methodology for experimental studies of the deformation of monolithic reinforced concrete frames of buildings under emergency impacts. *Buildings and Reconstruction*. 2018;4(78):42–52. (In Russ.)
9. Kolcunov V.I., Tuyen V.N., Korenkov P.A. Deformation and failure of a monolithic reinforced concrete frame under accidental actions. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;753:032037.
10. Fedorova N.V., Guok F.D., Chang N.T. Experimental life studies of reinforced concrete frames with girders reinforced by indirect reinforcement. *Buildings and Reconstruction*. 2020;(1):92–100. (In Russ.)
11. Yu J., Tan K.H. Experimental and numerical investigation on progressive collapse resistance of reinforced concrete beam column sub-assemblages. *Engineering Structures*. 2013;55:90–106.
12. Xuan W., Wang L., Liu C., Xing G., Zhang L., Chen H. Experimental and theoretical investigations on progressive collapse resistance of the concrete-filled square steel tubular column and steel beam frame under the middle column failure scenario. *Shock and Vibration*. 2019;2019:1–12. <https://doi.org/10.1155/2019/2354931>
13. Lin K., Lu X., Li Y., Guan H. Experimental study of a novel multi-hazard resistant prefabricated concrete frame structure. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2019;119:390–407. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.04.011>
14. Shan S., Li S., Xu S., Xie L. Experimental study on the progressive collapse performance of RC frames with infill walls. *Engineering Structures*. 2016;111:80–92. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.12.010>
15. Fedorova N.V., Ngoc V.T. Deformation and failure of monolithic reinforced concrete frames under special actions. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1425:012033.
16. Weng J., Lee C.K., Tan K.H., Lim N.S. Damage assessment for reinforced concrete frames subject to progressive collapse. *Engineering Structures*. 2017;149:147–160. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.07.038>
17. Geniev G.A., Kolchunov V.I., Klyueva N.V. *Strength and deformability of reinforced concrete structures under non-design impacts*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)
18. Kolchunov V.I., Klyueva N.V., Androsova N.B., Bukhtiyarova A.S. *Survivability of buildings and structures under non-design impacts*. Moscow: ASV Publ.; 2014. (In Russ.)
19. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S. Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):290–297. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297>
20. Alkadi S.A., Fedorova N.V., Osovskiy O.E. Analysis of reinforced concrete space frame deformation with composite sections elements. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018;456:012033. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012033>
21. Demyanov A.I., Alkadi S.A., Static-dynamic deformation of reinforced concrete elements of the spatial frame with their complex resistance. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2018;(11):20–33. (In Russ.)
22. Demyanov A.I., Kolchunov V.I., Salnikov A.S., Mikhailov M.M. Computational models of static-dynamic deformation of a reinforced concrete structure during torsion with bending at the moment of formation of a spatial crack. *Buildings and Reconstruction*. 2017;3:13–22. (In Russ.)
23. Demyanov A.I., Naumov N.V., Kolchunov V.I. Method for determining the parameters of deformation and crack resistance of reinforced concrete composite structures undergoing torsion with bending. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2018;(7):5–16. (In Russ.)



DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-204-214  
УДК 539

НАУЧНЫЙ ОБЗОР / REVIEW

## Жесткость, адгезия и расслоение покрытия в системе «подложка – покрытие»

С.Н. Якупов  , Р.И. Губайдуллин 

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр РАН», Казань, Российская Федерация  
 [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

### История статьи

Поступила в редакцию: 15 января 2022 г.  
Доработана: 7 апреля 2022 г.  
Принята к публикации: 15 апреля 2022 г.

### Для цитирования

Якупов С.Н., Губайдуллин Р.И. Жесткость, адгезия и расслоение покрытия в системе «подложка – покрытие» // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 204–214. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-204-214>

**Аннотация.** Защитные покрытия находят широкое применение во всех отраслях производства и жизнедеятельности. Необходимые качества покрытий обеспечиваются путем разработки сложных тонкослойных композиций. Сложность структуры покрытия проявляется и в процессе эксплуатации в результате воздействия окружающей среды, физических полей, человеческого фактора. Многие покрытия исходно формируются непосредственно на поверхностях конструкций, имеющих исходно сложную геометрию. При этом ряд smart-покрытий наряду со сложной структурой при срабатывании изменяют физико-механические свойства. При выборе покрытия, адгезива и технологии его нанесения возникают вопросы, связанные с определением их необходимых геометрических и физических параметров, с оценкой механических свойств и сроков их службы в зависимости от окружающей среды, физических полей и т. д. Для этого необходим надежный инструмент исследования. В обзоре на базе известных публикаций и патентов на изобретение отмечены методы исследования механических свойств расчлняемых и нерасчлняемых покрытий, методы определения адгезии – прочности сцепления покрытия к подложке, методы исследования расслоения составных элементов и отслоения покрытия от подложки. Акцентировано внимание на эффективных экспериментально-теоретических методах оценки механических свойств покрытия и адгезива на плоских и неплюских поверхностях, а также на некоторых актуальных результатах.

**Ключевые слова:** защитное покрытие, система, подложка, покрытие, сложная геометрия, структура, жесткость на растяжение, модуль упругости, адгезия, расслоение, методы исследования, экспериментально-теоретический метод

## Rigidity, adhesion and delamination of the coating in the “substrate – coating” system

Samat N. Yakupov  , Ruslan I. Gubaidullin 

Federal Research Center «Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences», Kazan, Russian Federation  
 [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

### Article history

Received: January 15, 2022  
Revised: 7 April 2022  
Accepted: April 15, 2022

**Abstract.** Protective coatings are widely used in all branches of production and life. The necessary qualities of coatings are provided by developing complex thin-layer compositions. The complexity of the structure of the coating also arises during operation as a result of the influence of the environment, physical fields,

**Якупов Самат Нухович**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр РАН», Российская Федерация, 420111, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31; ORCID: 0000-0003-0047-3679, Scopus Author ID: 26968046600, eLIBRARY SPIN-код: 7382-4759; [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

**Губайдуллин Руслан Илгамович**, аспирант, Институт механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр РАН», Российская Федерация, 420111, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31; ORCID: 0000-0002-8047-7962; [ruslan\\_221294@mail.ru](mailto:ruslan_221294@mail.ru)

**Samat N. Yakupov**, PhD in Technical Sciences, senior researcher, Institute of Mechanics and Engineering, Federal Research Center “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,” 2/31 Lobachevsky St, Kazan, 420111, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0047-3679, Scopus Author ID: 26968046600, eLIBRARY SPIN-code: 7382-4759; [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

**Ruslan I. Gubaidullin**, postgraduate student, Institute of Mechanics and Engineering, Federal Research Center “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, 2/31 Lobachevsky St, Kazan, 420111, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-8047-7962; [ruslan\\_221294@mail.ru](mailto:ruslan_221294@mail.ru)

© Якупов С.Н., Губайдуллин Р.И., 2022

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

**For citation**

Yakupov S.N., Gubaidullin R.I. Rigidity, adhesion and delamination of the coating in the “substrate – coating” system. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):204–214. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-204-214>

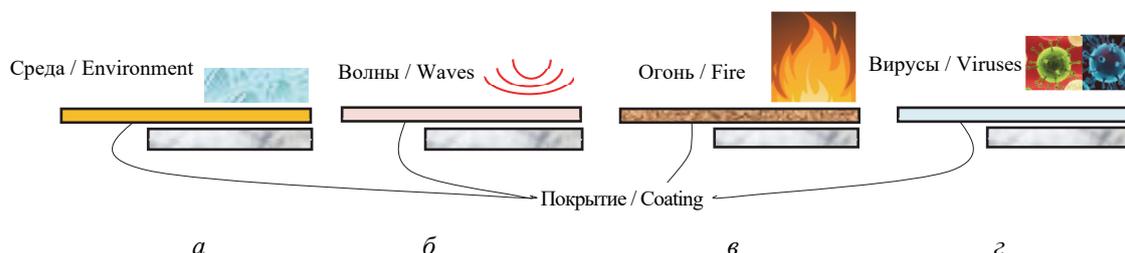
human factor. Many coatings are initially formed directly on the surfaces of structures with initially complex geometry. At the same time, a number of smart coatings, along with a complex structure, change their physical and mechanical properties when triggered. When choosing a coating, adhesive and technology for its application, questions arise related to determining their necessary geometric and physical parameters, assessing their mechanical properties and service life depending on the environment and physical fields, etc. This requires a reliable research tool. In the review, based on well-known publications and patents for the invention, the following are noted: methods for studying the mechanical properties of decomposable and non-decomposable coatings; methods for determining adhesion – the adhesion strength of the coating to the substrate; methods for studying the delamination of constituent elements and delamination of the coating from the substrate. Attention is focused on effective experimental and theoretical methods for assessing the mechanical properties of the coating and adhesive on flat and non-planar surfaces, as well as on some relevant results.

**Keywords:** protective coating, substrate, coating, system, complex geometry, structure, tensile rigidity, modulus of elasticity, adhesion, delamination, research methods, experimental-theoretical method

**Введение**

Среди тонкостенных элементов конструкций, сочетающих легкость с высокой прочностью, особо выделяются пленочные и мембранные элементы, к которым относятся и различные защитные покрытия. Они находят широкое применение во всех отраслях производства и жизнедеятельности<sup>1</sup> [1–3]. Сама природа подсказывает эффективность использования различных пленок и покрытий, достаточно рассмотреть строение флоры и фауны.

Нет сферы человеческой деятельности, где бы ни пытались решать технические и экономические проблемы на базе поверхностных покрытий<sup>1</sup> [1–5]. Это проблемы трения и износа, коррозии и эрозии (рис. 1, а), поглощения волн заданного диапазона (рис. 1, б), защиты от высоких температур и огня (рис. 1, в), защиты от вирусов и бактерий (рис. 1, г) и т. д.



**Рис. 1.** Защитные покрытия:

а – от коррозии; б – волн; в – огня; г – вирусов

**Figure 1.** Protective coatings:

а – against corrosion; б – waves; в – fire; г – viruses

Покрытия должны быть надежным барьером для защиты элементов конструкций в зависимости от своего назначения: теплоизоляционные и огнезащитные – предохранять от воздействия теплового потока и пламени; лакокрасочные – надежно защищать от коррозии и т. д. При этом покрытия должны быть технологичны в изготовлении и применении, иметь хорошую адгезию к конструкции и обеспечивать требуемую долговечность в заданных условиях эксплуатации. Применение защитных покрытий – эффективный способ защиты поверхностей конструкций от воздействия окружающей среды и различных физических полей<sup>1</sup> [1–3].

Необходимые качества покрытий обеспечиваются путем разработки сложных тонкослойных композиций с различными включениями (так называемые материал-конструкции) и адгезива. Создаются различные покрытия, в том числе smart-покрытия (умные) [4–7] и адгезионные компоненты, используя весь накопленный технологический арсенал, включая нанотехнологию. Разрабатываются smart-самозалечи-

<sup>1</sup> Якупов Н.М. Механика тонкостенных конструкций: история, диагностика, лечение: учебное пособие. Казань: Изд-во КГАСУ, 2020. 159 с.

вающиеся, противообрастающие, сверхгидрофобные покрытия [1–8], новые группы биоцидов и инкапсулированные противообрастающие вещества [9], супергидрофобное композиционное покрытие из сополимеров стирола, метилметакрилата и наночастиц диоксида кремния рассмотрено, в частности, в [10]. Модификация покрытий углеродными нанотрубками и нановолокнами позволяет получать наноструктурированные поверхности, способствующие повышению механических свойств [11]. Эпоксидные краски, содержащие силоксан, позволяют получать покрытия с заданными свойствами [12–15].

Многие покрытия исходно формируются непосредственно на поверхностях конструкций, имеющих исходно сложную геометрию. При этом ряд smart-покрытий наряду со сложной структурой при срабатывании (например, раскапсуляции – вливании определенных компонент в состав покрытия) изменяют физико-механические свойства.

Современные покрытия, как правило, обладают сложной внутренней структурой, формируются непосредственно на поверхностях элементов конструкций, которые, исходя из функционального назначения, зачастую имеют неплоскую геометрию. Сложность структуры покрытия возникает и в процессе эксплуатации в результате воздействия окружающей среды, физических полей, а также человеческого фактора – на поверхности покрытия появляются различные дефекты (царапины, вмятины, трещины, локальные углубления); происходит деградация полимерных частей композиций, образуются области расслоения и т. д. При этом изменяются механические и физические свойства покрытия и адгезива. Сложная структура покрытия вызывает появление различной анизотропии в механических свойствах покрытия и адгезива.

Деградация защитного покрытия приводит к серьезным последствиям, в частности к оголению поверхностей несущих элементов и интенсивному коррозионному износу несущего элемента конструкции, образованию царапин, локальных углублений и т. д.

Для обеспечения безаварийной работы конструкций с тонкослойным покрытием необходимо особое внимание уделять покрытиям, которые обеспечивают функциональное назначение самой конструкции. Необходимо достоверно определять исходные механические свойства покрытия и адгезива, сформированных на плоских и неплоских поверхностях элементов конструкций, а также изменение свойств покрытия и адгезива в процессе эксплуатации при воздействии физических полей и сред.

При выборе покрытия, адгезива и технологии его нанесения возникают вопросы, связанные с определением их необходимых геометрических и физических параметров, с оценкой механических свойств и сроков их службы в зависимости от окружающей среды и физических полей и т. д. Для этого необходим надежный инструмент исследования.

Грамотное проектирование тонкослойных покрытий, диагностика свойств покрытия, его адгезии к несущему элементу и учет расслоения в процессе эксплуатации – залог безопасного функционирования конструкций. Тема исследования актуальна для всех отраслей: машиностроения, транспорта, трубопроводов, нефтехимии и т. д.

### **Методы исследования механических свойств покрытий**

Вопросам определения механических свойств тонкослойных покрытий уделяется определенное внимание. По данной теме имеется ряд отечественных изобретений, авторских свидетельств<sup>2</sup>, а также патенты зарубежных стран<sup>3</sup>.

Широко используется стандартный способ одноосного испытания на растяжение образцов в форме прямоугольника шириной от 10 до 25 мм, длиной не менее 150 мм<sup>4</sup>. Однако стандартный способ малоэффективен при исследовании механических свойств покрытий, имеющих сложную структуру, различные поверхностные дефекты и повреждения. В зависимости от расположения вырезаемой полоски механические характеристики будут различными. Порой невозможно даже описать структуру материала и формы дефектов, не говоря уже об определении реальных характеристик композиций. При исследовании жесткостных характеристик покрытий сложной структуры стандартным способом наблюдается большой

<sup>2</sup> № 1742671, № 1458766, № 601599А, № 1441243А1, № 765697А, № 1756786, № 2184361, № 2296976, № 2310184, № 2387973, № 2403556, № 2421707, № 2572673, № 2653473.

<sup>3</sup> US 5764068А. США, 1998; US 6050139А. США, 1998; US 6951144В2. США, 2001; Японии JP 8313422А.

<sup>4</sup> ГОСТ 14236-81. Пленки полимерные. Метод испытания на растяжение. М., 1989; ASTM D 412-16. Standard test methods for vulcanized rubber and thermoplastic elastomers – tension. ASTM International, 2021; ГОСТ 29088-91. Материалы полимерные ячеистые эластичные. Определение условной прочности и относительного удлинения при разрыве. М., 1991.

разброс результатов испытания<sup>5</sup> [3]. Этот метод малоэффективен или вовсе неприменим для исследования исходно неплоских покрытий.

При рассмотрении покрытий сложной структуры малоэффективен и инденторный метод<sup>6</sup> [16], позволяющий определять свойства покрытий в окрестности исследуемой точки. В [17] методом наноиндентирования описан масштабный эффект при переходе к наномасштабам. Возникают большие трудности при оценке интегральных характеристик покрытий неоднородной структуры.

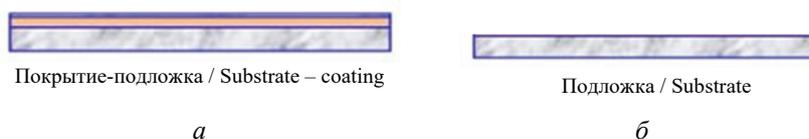
Делаются попытки моделирования деформирования тонких пленок на молекулярном уровне, в частности [18; 19]. Однако возникают трудности при описании сложной структуры на микро- и наноуровнях, а также задании информации о дефектах на разных уровнях одновременно.

Эффективным подходом определения механических свойств плоских покрытий сложной структуры является экспериментально-теоретический метод (ЭТМ) [20–23], основанный на синтезе экспериментальных данных и теоретических соотношений, полученных из нелинейной теории тонких оболочек, теории упругости и пластичности. Метод позволяет определять интегральные механические свойства оболочечных покрытий и может быть использован для исследования нанопокровтий и нанопленок [23].

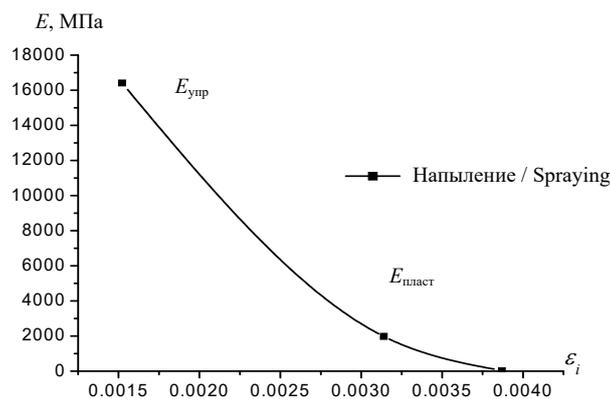
Экспериментально-теоретический метод [3; 20–23] можно использовать для оценки механических характеристик нерасчленимых плоских и неплоских покрытий в системе «покрытие – подложка». Раздельно исследуя свойства пакета «подложка – покрытие» ( $h_{\text{подл}} + h_{\text{покр}}$ ) (рис. 2, а), подложки толщиной  $h_{\text{подл}}$  (рис. 2, б) и из условия равенства модуля упругости композиции на растяжение  $E_c$  сумме модулей упругости на растяжение подложки  $E_{\text{подл}}$  и покрытия, оценивается модуль упругости  $E_{\text{покр}}$  [24; 25]:

$$E_{\text{покр}} = \frac{E_c (h_{\text{покр}} + h_{\text{подл}}) - E_{\text{подл}} h_{\text{подл}}}{h_{\text{покр}}}$$

Величины  $E_c$  и  $E_{\text{подл}}$  определяются экспериментально-теоретическим методом. Такой подход использован для оценки механических свойств нанопокровтия из оксида титана  $\text{TiO}_2$  толщиной  $h_{\text{покр}} \approx 80$  нм, нанесенной ионно-плазменным способом на полимерную пленку толщиной  $h_{\text{подл}} = 0,1$  мм [24; 25]. Зависимость модуля упругости от интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  приведена на рис. 3.



**Рис. 2.** Схема исследования системы:  
а – подложка – покрытие; б – подложка  
**Figure 2.** System study scheme:  
а – substrate – coating; б – substrate



**Рис. 3.** Модуль упругости покрытия – деформация  
**Figure 3.** Modulus of elasticity of the coating – deformation

<sup>5</sup> Куприянов В.Н. Пленочно-тканевые материалы для строительных конструкций: учебное пособие. Казань: КИСИ, 1989. 94 с.

<sup>6</sup> United States Patent US4699000. Automated device for determining and evaluating the mechanical properties of materials. 13.10.1987.

Развитие подхода [24; 25] для исследования жесткостных свойств нерасчленимых покрытий на подложке сложной формы изложено в [3]. Подход базируется на факте, что тангенциальная жесткость исследуемого покрытия  $B_{\text{coat}}$  равна разности тангенциальной жесткости тонкостенной подложки с покрытием  $B_{\text{sum}}$  за вычетом тангенциальной жесткости тонкостенной подложки  $B_{\text{shel}}$ :

$$B_{\text{coat}} = B_{\text{sum}} - B_{\text{shel}}.$$

При этом для оценки тангенциальных жесткостей подложки с покрытием  $B_{\text{sum}}$  и подложки  $B_{\text{shel}}$  используется ЭТМ. При исследовании произвольных объектов нужно выбрать рациональный вариант контура заземления, чтобы на экспериментальном этапе обеспечить эффективное заземление, а на теоретическом – упростить разработку численной модели.

Способ оценки уровня напряжений в пленке в консольной системе «пленка – подложка» рассмотрен в [26]. Влияние напряженно-деформированного состояния на границе раздела «пленка – подложка» на процессы упругой деформации пленок  $T_i$  при знакопеременном изгибе представлено в [27].

Экспериментально-теоретический метод развит для исследования механических свойств покрытий исходно неплоской формы [3; 28–30]. Рассмотрены сферические и цилиндрические мембранные покрытия, в том числе покрытие в виде катеноида (рис. 4). При исследовании фрагментов неплоских образцов используются зажимы конкретной формы. Изображение крепления для образцов сферической формы представлено на рис. 5. Метод развит для исследования механических характеристик биологических мембран (в частности, экзокарпий апельсина) [30], схема экспериментальной установки приведена на рис. 6.



Рис. 4. Образец «катеноид»  
Figure 4. Sample “catenoid”



Рис. 5. Крепление образца  
Figure 5. Sample holder

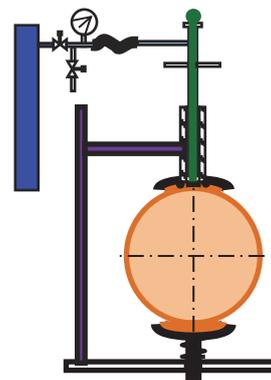


Рис. 6. Схема экспериментальной установки  
Figure 6. Scheme of the experimental setup

### Методы определения адгезии покрытия к подложке

Несмотря на актуальность вопросам определения адгезии тонкослойных покрытий к элементам конструкций уделяется относительно мало внимания. Известны различные способы определения прочности сцепления покрытия с подложкой, в частности авторские свидетельства СССР<sup>7</sup>.

Адгезия определяется на базе приборов<sup>8</sup>, адгезиметров (например, серии ПСО-ХМГ). Однако, известные приборы не всегда эффективны, а идентичность замеров в процессе изучения влияния различных факторов трудно обеспечить.

Способ определения адгезии пленки к подложке для малых прогибов, используя параметры «пузыря», описан в [31]. Используются соотношения для упругих пленок, которые дают значительный разброс с увеличением радиуса «пузыря».

Существует способ<sup>9</sup> определения прочности сцепления покрытий с подложкой, при котором в покрытие имплантируют ионы, идентичные по химическому составу. Ионы проникают через поры в покрытие при наличии в нем дефектов и повышают внутренние напряжения, приводящие в случае плохой прочности сцепления к отделению покрытия от основы. В способе измеряют дозу облучения покрытия

<sup>7</sup> № 183459; № 1305579; № 689411. РФ, 2012; № 2207544. РФ, 2003; US6050139A. США, 1998.

<sup>8</sup> US6050139A. Devices and methods for testing tack uniformity of a coating on a substrate. 18.04.2000.

<sup>9</sup> Авторское свидетельство СССР 1305579, 1985.

ионами и по ее величине судят о прочности сцепления покрытия с подложкой. Недостаток: исследуется не исходное покрытие, а покрытие, насыщенное структурными дефектами радиационного характера, вызванными имплантацией ионов.

Для жестких плоских покрытий разработан экспериментально-теоретический метод определения адгезии покрытий в виде пленки к плоской подложке в двумерной постановке<sup>10</sup>. В подложке формируют центральное отверстие путем удаления материала подложки до покрытия. Замеряют изменение диаметра основания купола в процессе отслаивания покрытия. Предполагается, что напряжение по радиусу, начиная от кромки, распределено по параболе четвертого порядка [4; 32]:

$$\sigma = ar^4 + b, \quad a = \frac{\sigma_m}{G}, \quad b = -\frac{\sigma_m A^4}{G}, \quad A = r_i + h, \quad G = r_i^4 - A^4,$$

где  $r_i$  – радиус образуемого купола;  $h$  – толщина покрытия;  $\sigma_m$  – напряжения отрыва.

Метод развит для оценки адгезии гибкого тонкослойного покрытия к несущему элементу конструкции (рис. 7)<sup>11</sup> [33; 34]. Способ повышает точность определения параметров адгезии вследствие учета механических свойств материала и толщины покрытия, а также высоты  $H$  (рис. 7) и эллипсности основания купола (рис. 8), возникающей вследствие анизотропии адгезива и материала покрытия.

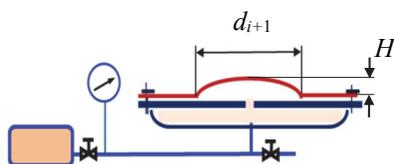


Рис. 7. Схема установки  
Figure 7. Installation scheme

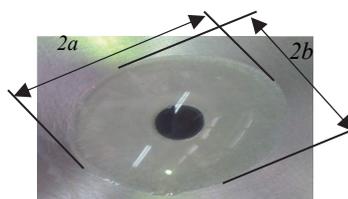


Рис. 8. Фото образуемого купола  
Figure 8. Photo of the formed dome

Прочность сцепления  $\eta_{otr}$  определяют через радиальное усилие  $T$  в пленке у основания купола в области малой полуоси  $b$  отрыва:

$$\eta_{otr} = \frac{2EH^3T \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[a^2 + H^2(\cos^2\theta + \lambda^2\sin^2\theta)]\sqrt{\lambda^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}}}{a(1 - \nu^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \lambda^2\sin^2\theta}}},$$

где  $E$  – модуль упругости пленки;  $H$  – высота подъема купола отслоившейся пленки;  $\theta$  – угловая координата в плоскости подложки;  $a, b$  – полуоси основания купола;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

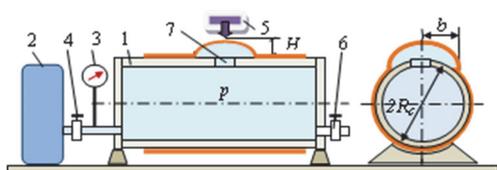
Усилие  $T$  определяется из решения задачи нелинейной теории оболочек, в частности при удовлетворении исходных данных можно воспользоваться решением [32]. Способ позволяет повысить точность определения адгезии за счет учета механических свойств и толщины материала пленки; снижается разброс результатов.

Экспериментально-теоретический метод оценки адгезии пленки к цилиндрической подложке описан в [35]. Алгоритм исследования: подаем ступенчато в емкость 1 давление (рис. 9); на каждом шаге нагружения  $p$  замеряем параметры купола  $a, b$  и  $H$  и получаем зависимость «прогиб  $H$  – давление  $p$ » для вершины купола; составляем модель фрагмента цилиндрического покрытия эллиптической формы в плане, например ANSYS или сплайновый вариант МКЭ; методом пристрелки – варьируя свойствами материала, приближаемся к параметрам купола, соответствующим экспериментальным параметрам  $a, b$  и  $H$  (рис. 10); определяем распределение НДС и усилие  $T_1$  покрытия, а также механические свойства покрытия; исследуем адгезионные свойства покрытия:

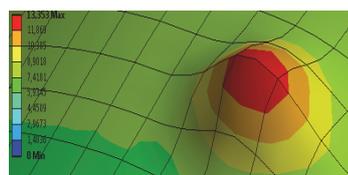
$$\eta_{otr} = T_{otr}/S_{otr}, \quad S_{otr} = h_0(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad T_{otr} = T_1 \frac{ab\sqrt{R_c^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) - a^2b^2\sin^2\theta}}{RR_c(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}.$$

<sup>10</sup> Патент 2421707 РФ. Способ определения адгезии пленки к подложке / Гольдштейн Р.В., Якупов Н.М., Нуруллин Р.Г., Якупов С.Н., Якупова Р.Н. 2011.

<sup>11</sup> Патент 2572673 РФ. Способ определения адгезии пленки к подложке / Якупов С.Н. 2016.

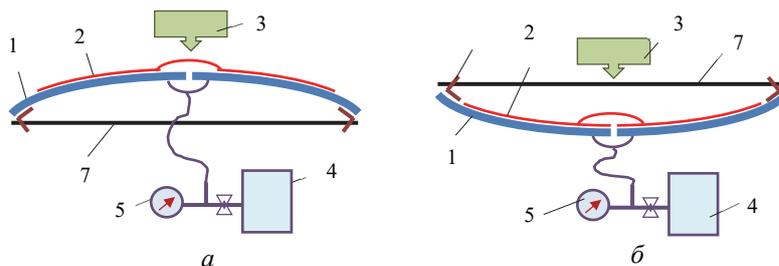


**Рис. 9.** Схема установки  
**Figure 9.** Installation scheme



**Рис. 10.** Фрагмент модели  
**Figure 10.** Model fragment

Влияние деформации поверхности подложки на адгезию покрытия изучено в [36]. Для этого была разработана специальная установка, схема которой приведена на рис. 11.



**Рис. 11.** Схема установки:

*a* – покрытие на растянутой поверхности подложки; *б* – покрытие на сжатой поверхности подложки;  
1 – подложка; 2 – покрытие; 3 – измерительное устройство; 4 – узел подачи сжатого воздуха; 5 – манометр; 6 – уголки; 7 – тяги

**Figure 11.** Installation scheme:

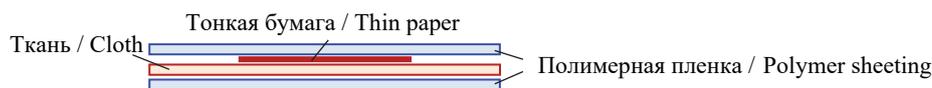
*a* – the coating on the stretched surface of the substrate; *b* – the coating on the compressed surface of the substrate;  
1 – substrate; 2 – coating; 3 – measuring device; 4 – compressed air supply unit; 5 – pressure gauge; 6 – angles; 7 – rods

Установлено, что наличие деформации поверхности пластины снижает прочность сцепления, причем на сжатой поверхности этот эффект более значителен.

### Методы исследования расслоения составных элементов и отслоения покрытия от подложки

В элементах композиционных конструкций, в том числе в системах «подложка – покрытие», под воздействием механических и физических полей могут возникать напряжения, вызывающие расслоение составных элементов композиций и отслоение покрытия от подложки [37; 38]. В частности, напряжения, возникающие в покрытии, приводят к образованию складок и гофров, растрескиванию покрытия<sup>12</sup> [37–41] и т. д. Актуальность проблемы стабильности тонких пленок на подложке отмечается в [37], где рассмотрены процессы упругой и пластической деформации металлических, оксидных и полупроводниковых пленок при механическом нагружении. Внешним осмотром трудно определить наличие расслоения. Важно знать, произошло ли расслоение, его размеры и местонахождение. Возникает потребность в методах исследования расслоения в композиционных структурах, в том числе в системах «покрытие – подложка».

Еще один подход – исследование жесткости композиционных структур с расслоением. В [41] рассмотрены варианты формирования композиции путем ламинирования отдельных слоев. Схема структуры образца «полимерная пленка + ткань + полимерная пленка» с участком расслоения представлена на рис. 12.



**Рис. 12.** Структура образца до ламинирования  
**Figure 12.** Sample structure before lamination

<sup>12</sup> United States Patent US6092414. Method for analyzing a separation in a deformable structure / John W; 25.07.2000.

Образцы для исследования в [41] получены путем ламинирования композиции: пленка из полиэстера, ткань – белая бязь, тонкая бумага (салфетка). Для определения жесткостных свойств композиций использован экспериментально-теоретический метод [20–23].

Исследованы полимерно-тканевые композиции диаметром  $D = 100$  мм с толщиной пленок  $t = 75$  мкм, 100 мкм и 125 мкм: группа 1 – склеенная композиция «пленка + ткань + пленка»; группа 2 – не склеенная композиция «пленка + бумага + ткань + бумага + пленка»; группа 3 – композиция «пленка + ткань + пленка», не склеенная в центре диаметром  $d = 1$  см. Результаты исследования по [41] приведены в таблице.

Экспериментальные и расчетные величины по [41]

$p$ , МПа	Группа 1		Группа 2		Группа 3	
	$H$ , мм	$B$ , кГ см	$H$ , мм	$B$ , кГ см	$H$ , мм	$B$ , кГ см
0,03	3,84	397,4	4,35	273,3	4,07	333,7
0,04	4,32	372,1	4,81	269,6	4,37	359,5
0,05	4,71	358,9	5,25	259,2	4,78	343,4
0,06	5,14	331,4	5,59	257,6	5,17	325,6
		$B_{cp} = 365$		$B_{cp} = 265$		$B_{cp} = 341$

Примечание:  $H$  – прогибы образцов от давления  $p$ ;  $B$  и  $B_{cp}$  – тангенциальные жесткости и средние значения жесткости для рассмотренного диапазона нагрузок.

Experimental and calculated values according to [41]

$p$ , МПа	Group 1		Group 2		Group 3	
	$H$ , mm	$B$ , kG cm	$H$ , kG cm	$B$ , kG cm	$H$ , mm	$B$ , kG cm
0.03	3.84	397.4	4.35	273.3	4.07	333.7
0.04	4.32	372.1	4.81	269.6	4.37	359.5
0.05	4.71	358.9	5.25	259.2	4.78	343.4
0.06	5.14	331.4	5.59	257.6	5.17	325.6
		$B_{average} = 365$		$B_{average} = 265$		$B_{average} = 341$

Note:  $H$  – deflections of samples from pressure  $p$ ;  $B$  и  $B_{average}$  – tangential stiffness and average stiffness values for the considered load range.

Как видно из таблицы, расслоение композиции влияет на ее жесткость, то есть на ее несущую способность.

Исследование расслоения в деформируемой конструкции представлено в патенте US6092414<sup>13</sup>. Выявляется выпуклость, образованная на поверхности шины автомобиля под и над брекерами при каждом испытательном давлении, и сравнивается площадь поперечного сечения выпуклости с площадью поперечного сечения эталонной выпуклости для определения глубины отрыва в испытательной деформируемой конструкции (рис. 13). Местоположение расслоения определяется путем снижения давления вблизи разрыва до обеспечения эталонной деформируемой конструкции того же размера.

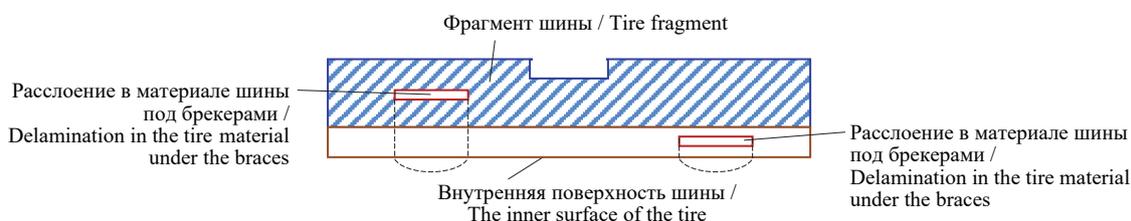


Рис. 13. Расслоение материала деформируемой шины (разрез) по патенту US 6092414<sup>12</sup>  
 Figure 13. Delamination of deformable tire material (cut) according to US 6092414

<sup>13</sup> United States Patent US6092414. Method for analyzing a separation in a deformable structure / John W; 25.07.2000.

## Заключение

Защитные покрытия – надежный барьер защиты элементов конструкций в зависимости от назначения. При исследовании защитных покрытий необходимо оценить свойства покрытий и прочность сцепления покрытия с подложкой, а также обратить внимание на расслоение составных элементов и отслоения покрытия от подложки. Двумерные экспериментально-теоретические методы исследования свойств покрытия и его адгезии к подложке – наиболее эффективные подходы.

Рассмотренная область исследования недостаточно изучена. Необходимо дальнейшее совершенствование методов исследования и создание на их базе новой приборной базы.

## Список литературы / References

1. Yakupov S.N., Yakupov N.M. Thin-layer films and coatings. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017;857(1):012056. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/857/1/012056>
2. Yakupov N.M., Yakupov S.N. Thin-layer coatings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;(1):6–14. (In Russ.)  
*Якупов Н.М., Якупов С.Н.* Тонкослойные покрытия // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 1. С. 6–14.
3. Yakupov S.N., Yakupov N.M. Research of mechanical characteristics thin coating. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1328:012103. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1328/1/012103>
4. Gad-el-Hak M. (ed.) *MEMS: Applications*. Boca Raton: CRC Press; 2006. <https://doi.org/10.1201/9781420036558>
5. Montemor M.F. Functional and smart coatings for corrosion protection: a review of recent advances. *Surface & Coatings Technology*. 2014;258:17–37. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.06.031>
6. Taryba M., Lamaka S.V., Snihirova D., Ferreira M.G.S., Montemor M.F., Wijting W.K., Toews S., Grundmeier G. The combined use of scanning vibrating electrode technique and micro-potentiometry to assess the self-repair processes in defects on “smart” coatings applied to galvanized steel. *Electrochim. Acta*. 2011;56(12):4475–4488.
7. García J., Fischer H.R., van der Zwaag S. A critical appraisal of the potential of self-healing polymeric coatings. *Progress in Organic Coatings*. 2011;72(3):211–221. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2011.06.016>
8. Taylor S.R., Shiflet G.J., Scully J.R., Buchheit R.G., Van Ooij W.J., Sieradzki K., Diaz R.E., Brinker C.J., Moran A.L. Increasing coating functionality using nanodimensioned materials. In: Fernando R.H., Sung L.-P. (eds.) *Nanotechnology Applications in Coatings*. American Chemical Society; 2009. p. 126–155. <https://doi.org/10.1021/bk-2009-1008.ch008>
9. Lejars M., Margailan A., Bressy C. Fouling release coatings: a nontoxic alternative to biocidal antifouling coatings. *Chemical Reviews*. 2012;112:4347–4390. <https://doi.org/10.1021/cr200350v>
10. Huang Y.F., Huang C., Zhong Y.L., Yi S.P. Preparing superhydrophobic surfaces with very low contact angle hysteresis. *Surface Engineering*. 2013;29:633–636. <https://doi.org/10.1179/1743294412Y.0000000087>
11. Ildarkhanova F.I., Mironova G.A., Bogoslovsky K.G., Menshikov V.V., Bykov E.D. Development of paint coatings with superhydrophobic properties. *Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces*. 2012;48:796–802. <https://doi.org/10.1134/S2070205112070076>
12. Ahmad S., Gupta A.P., Sharmin E., Alam M., Pandey S.K. Synthesis, characterization and development of high performance siloxane-modified epoxy paints. *Progress in Organic Coatings*. 2005;54:248–255. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2005.06.013>
13. Qian M., Soutar A.M., Tan X.H., Zeng X.T., Wijesinghe S.L. Two-part epoxy-siloxane hybrid corrosion protection coatings for carbon steel. *Thin Solid Films*. 2009;517(17):5237–5242. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2009.03.114>
14. Xue D., Van Ooij W.J. Corrosion performance improvement of hot-dipped galvanized (HDG) steels by electro-deposition of epoxy-resin-ester modified bis-[tri-ethoxy-silyl]ethane (BTSE) coatings. *Progress in Organic Coatings*. 2013;76:1095–1102. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2013.03.004>
15. Zhang X., He Q., Gu H., Colorado H.A., Wei S., Guo Z. Flame-retardant electrical conductive nanopolymers based on bisphenol F epoxy resin reinforced with nano polyanilines. *ACS Applied Materials & Interfaces*. 2013;5:898–910. <https://doi.org/10.1021/am302563w>
16. Tsui T.Y., Ross C.A., Pharr G.M. Nanoindentation hardness of soft films on hard substrates: effects of the substrate. *MRS Online Proceedings Library*. 1997;473:57–62. <https://doi.org/10.1557/PROC-473-57>
17. Gao H., Huang Y., Nix W. Modeling plasticity at the micrometer scale. *Naturwissenschaften*. 1999;86: 507–515. <https://doi.org/10.1007/s001140050665>
18. Bolesta A.V. Molecular dynamics simulation of the deformation of thin films. *Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky*. 2011;(4):396–398. (In Russ.)

Болеста А.В. Молекулярно-динамическое моделирование деформации тонких пленок // Вестник Нижегородского университета имени Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 396–398.

19. Yanovsky Yu.G., Nikitina E.A., Nikitin S.M., Karnet Yu.N. Quantum mechanical studies of the mechanism of deformation of carbon nanotubes. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2009;15(3):345–368. (In Russ.)

Яновский Ю.Г., Никитина Е.А., Никитин С.М., Карнет Ю.Н. Квантово-механические исследования механизма деформации углеродных нанотрубок // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. № 3. С. 345–368.

20. Yakupov N.M., Galimov N.K., Leontiev A.A. Experimental-theoretical method for studying the strength of polymer films. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2000;6(2):238–243. (In Russ.)

Якупов Н.М., Галимов Н.К., Леонтьев А.А. Экспериментально-теоретический метод исследования прочности полимерных пленок // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 2. С. 238–243.

21. Yakupov N.M., Nurgaliev A.R., Yakupov S.N. Method for testing films and membranes under conditions of uniformly distributed surface pressure. *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*. 2008;74(11):54–56. (In Russ.)

Якупов Н.М., Нургалиев А.Р., Якупов С.Н. Методика испытаний пленок и мембран в условиях равномерно распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74. № 11. С. 54–56.

22. Yakupov N.M., Yakupov S.N. Definition of mechanical characteristics of films with the pores, nano-inclusions and nanocoatings. *The Second Nanotechnology International Forum: Abstracts*. Moscow: Rusnanotech Publ.; 2009. p. 344–346. (In Russ.)

Якупов Н.М., Якупов С.Н. Определение механических характеристик пленок с порами, нановключениями и нанопокровками // Сборник тезисов докладов участников Второго Международного форума по нанотехнологиям. М.: РОСНАНО, 2009. С. 427–429

23. Yakupov N.M., Nurullin R.G., Yakupov S.N. Mechanical properties of thin films and nanofilms. *Russian Engineering Research*. 2010;29(6):571–574. <https://doi.org/10.3103/S1068798X09060100>

24. Yakupov S.N. Mechanical characteristics of thin titanium oxide coatings in the “coating – polymer film” system. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2010;16(3):436–444. (In Russ.)

Якупов С.Н. Механические характеристики тонких покрытий из оксида титана в системе «покрытие – полимерная пленка» // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 3. С. 436–444.

25. Yakupov S.N. Way of definition of mechanical characteristics of thin coverings in system “the covering – the substrate.” *The Second International Competition of Scientific Papers in Nanotechnology for Young Researchers: Abstracts*. Moscow: Rusnanotech Publ.; 2009. p. 439–440. (In Russ.)

Якупов С.Н. Способ определения механических характеристик тонких покрытий в системе «покрытие – подложка» // Сборник тезисов докладов участников Второго Международного конкурса научных работ молодых ученых в области нанотехнологий. М.: РОСНАНО, 2009. С. 488–489.

26. Markochev V.M., Egorov G.P. Deformations and stresses in the console system “film – substrate.” *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*. 2018;84(3):61–66. (In Russ.) <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2018-84-3-61-67>

Маркочев В.М., Егоров Г.П. Деформации и напряжения в консольной системе «пленка – подложка» // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2018. Т. 84. № 3. С. 61–66. <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2018-84-3-61-67>

27. Shugurov A.R., Panin A.V., Kazachenok M.S. Investigation of elastic deformation of Ti films under alternating bending. *Journal of Technical Physics*. 2010;80(11):35–40. (In Russ.)

Шугуров А.Р., Панин А.В., Казаченок М.С. Исследование упругой деформации пленок Ti при знакопеременном изгибе // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. № 11. С. 35–40.

28. Galimov N.K., Yakupov N.M., Yakupov S.N. Experimental-theoretical method for determining the mechanical characteristics of spherical films and membranes with a complex structure. *Solid Mechanics*. 2011;46(3):58–66. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/S0025654411030058>

Галимов Н.К., Якупов Н.М., Якупов С.Н. Экспериментально-теоретический метод определения механических характеристик сферических пленок и мембран со сложной структурой // Механика твердого тела. 2011. № 3. С. 58–66.

29. Yakupov N.M., Galimov N.K., Yakupov S.N. Methodology of studying non-planar films and membranes of complex structure. *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*. 2019;85(2):55–59. (In Russ.) <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2019-85-2-55-59>

Якупов Н.М., Галимов Н.К., Якупов С.Н. Методика исследования неплоских пленок и мембран сложной структуры // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2019. Т. 85. № 2. С. 55–59. <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2019-85-2-55-59>

30. Kharislamova L.U., Yakupov S.N. Methods for assessing strength of biological membranes. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(6):65–70. (In Russ.)

Харисламова Л.У., Якупов С.Н. Методы оценки прочности биологических мембран // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 65–70.

31. Goldstein R.V. (ed.) *Fracture mechanics. The destruction of the materials*. Moscow: Mir Publ.; 1979. p. 222–224. (In Russ.)

Механика разрушения. Разрушение материалов / под ред. Р.В. Гольдштейна. М.: Мир, 1979. С. 222–224.

32. Weil N.A., Newmark N.M. Large deflections of elliptical plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1956;23(1):21–26.

33. Yakupov S.N. Experimental – theoretical method for determining the adhesion of a film to a substrate. *Mechanics of Solids*. 2017;52(5):587–593. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/S0025654417050144>

Якупов С.Н. Экспериментально-теоретический метод определения адгезии пленки к подложке // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. Т. 52. № 5. С. 137–144.

34. Yakupov S.N. Mechanics of the “substrate – film” system. *XI All-Russian Congress on Fundamental Issues of Theoretical and Applied Mechanics*. Kazan; 2015. p. 4323–4325. (In Russ.)

Якупов С.Н. Механика системы «подложка – пленка» // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 2015. С. 4323–4325.

35. Yakupov S.N., Gubaidullin R.I., Yakupov N.M. Determination of hardness of thin layer coating and its adhesion to the shell of the cylindrical form. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1158(4):042039. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042039>

36. Yakupov S.N., Gubaidullin R.I., Yakupov N.M. Investigation of the influence of the nature of surface deformation on coating adhesion. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;1954:012053. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1954/1/012053>

37. Shugurov A.R., Panin A.V. Mechanisms of periodic deformation of the film-substrate system under the action of compressive stresses. *Physical Mesomechanics*. 2009;12(3):23–32. (In Russ.)

Шугуров А.Р., Панин А.В. Механизмы периодической деформации системы «пленка – подложка» под действием сжимающих напряжений // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12. № 3. С. 23–32.

38. Freund L.B., Suresh S. *Thin film materials: stress, defect formation and surface evolution*. Cambridge: Cambridge University Press; 2003.

39. Yoo P.J., Lee H.H. Evolution of a stress-driven pattern in thin bilayer films: spinodal wrinkling. *Physical Review Letters*. 2003;91(15):154502.

40. Tolpygo V.K., Clarke D.R. Wrinkling of  $\alpha$ -alumina films grown by oxidation. II. Oxide separation and failure. *Acta Materialia*. 1988;46(14):5167–5174.

41. Yakupov N.M., Kharislamova L.U. Stiffness of compositions with delaminations and the influence of ultraviolet on adhesion. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(6):840–845.



DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-215-227  
 UDC 539.4:624.01:691.32:691.328:666.198:691.619.8

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Analysis for the efficiency of additional dispersed reinforcement using coconut fiber for a concrete beam with traditional steel bar reinforcement

Peter Chongo , Svetlana L. Shambina  , Oliver Tembo 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

 shambina\_sl@mail.ru

### Article history

Received: March 10, 2022

Revised: May 29, 2022

Accepted: June 9, 2022

### For citation

Chongo P., Shambina S.L., Tembo O. Analysis for the efficiency of additional dispersed reinforcement using coconut fiber for a concrete beam with traditional steel bar reinforcement. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3): 215–227 <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-215-227>

**Abstract.** Concrete is widely used as a building material throughout the world. However, its use in building structures is limited due to its low tensile strength. This problem can be partially solved using steel bars reinforcement, as well as using dispersed reinforcement with various types of fibers. The authors propose the simultaneous traditional reinforcement of a concrete structure with steel bars with additional dispersed reinforcement with natural coconut fibers, relatively cheap and widely available in many countries in Africa, Asia and Latin America. The purpose of this study is to analyze the effectiveness of the proposed solution by comparing the required amount of steel reinforcement (by weight) for a beam made of traditional concrete and a similar beam with additional dispersed reinforcement with coconut fibers. Deflections and cracking in beams were investigated. The analysis was carried out using Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2022 software. The results showed that a beam additionally reinforced with coconut fiber requires 11% less steel reinforcement (by weight) compared to a similar beam made of traditional reinforced concrete. In addition, the coconut fiber reinforced beam experienced 6% less deflection and significantly less stress cracking compared to a simple concrete beam. These results proved that the approach proposed in the work noticeably improves the performance of reinforced concrete in the structure, and also makes it possible to obtain significant savings in reinforcing steel.

**Keywords:** steel reinforcement, plain concrete, additional disperse reinforcement, coconut fiber concrete, concrete beam, comparative analysis

**Peter Chongo**, master student, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-9930-5709, Scopus Author ID: 73338; pchongo.pc@gmail.com

**Svetlana L. Shambina**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9923-176X, Scopus Author ID: 57060572700, eLIBRARY SPIN-код: 5568-0834; shambina\_sl@mail.ru

**Oliver Tembo**, master student, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-5795-2932; tembokoli-ver3@gmail.com

© Chongo P., Shambina S.L., Tembo O., 2022



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Анализ эффективности дополнительного дисперсного армирования кокосовым волокном для бетонной балки с традиционным армированием стальными стержнями

П. Чонго , С.Л. Шамбина ✉, О. Тембо 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ shambina\_sl@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 10 марта 2022 г.

Доработана: 30 мая 2022 г.

Принята к публикации: 9 июня 2022 г.

**Аннотация.** Бетон широко используется в качестве строительного материала во всем мире. Однако его применение в строительных конструкциях ограничено по причине его низкой прочности на растяжение. Эта проблема частично решается использованием стальной стержневой арматуры и применением дисперсного армирования различными типами волокон. В исследовании предлагается одновременное традиционное армирование бетонной конструкции стальными стержнями с дополнительным дисперсным армированием натуральными кокосовыми волокнами, относительно дешевыми и широкодоступными во многих странах Африки, Азии и Латинской Америки. Цель исследования – анализ эффективности предложенного решения путем сравнения необходимого количества стальной арматуры (по массе) для балки из традиционного бетона и аналогичной балки с дополнительным дисперсным армированием кокосовыми волокнами. Изучены прогибы и трещинообразование в балках. Применялось программное обеспечение Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2022. Результаты показали, что балка, дополнительно армированная кокосовым волокном, требует меньшего на 11 % количества стальной арматуры (по массе) по сравнению с аналогичной балкой из традиционного железобетона. Кроме того, балка, армированная кокосовым волокном, испытывала на 6 % меньший прогиб, а также наблюдалось существенно меньшее образование трещин под действием нагрузки по сравнению с простой бетонной балкой. Доказано, что предложенный в работе подход заметно улучшает работу железобетона в конструкции, что в том числе позволяет получить существенную экономию арматурной стали.

**Ключевые слова:** стальная арматура, традиционный железобетон, дополнительное дисперсное армирование, бетон, добавка, кокосовые волокна, железобетонная балка, сравнительный анализ

### Для цитирования

Chongo P., Shambina S.L., Tembo O. Analysis for the efficiency of additional dispersed reinforcement using coconut fiber for a concrete beam with traditional steel bar reinforcement // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 3. С. 215–227. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-215-227>

### Introduction

Concrete is one building material that is widely used in everyday life. Its strength is greatly influenced by the composition and quality of the ingredients mixing. But one of the main problems of this material is its low tensile strength: the value of concrete tensile strength has range from 9–15% of its compressive strength. In line with the development of today's concrete technology, various attempts were made to improve the unfavorable character of concrete. One of these methods is to add some type of fibers into the concrete mixture to enhance the tensile and compressive properties of concrete [1].

**Чонго Питер**, магистрант, департамент строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-9930-5709, Scopus Author ID: 73338; pchon-go.pc@gmail.com

**Шамбина Светлана Львовна**, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-9923-176X, Scopus Author ID: 57060572700, eLIBRARY SPIN-код: 5568-0834; shambina\_sl@mail.ru

**Тембо Оливер**, магистрант, департамент строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-5795-2932; tembokoliver3@gmail.com

The properties of concrete are influenced by many factors mainly due to mix proportion of cement, sand, aggregates and water. The various properties of the produced concrete hugely depend on the mix ratios of these main materials. We are going to discuss the main properties of traditional concrete.

Concrete is known by its grade which is designated as M15, M20, etc. in which letter “M” refers to concrete mix and number 15 or 20 denotes the specified compressive strength ( $f_{ck}$ ) of 150 mm cube at 28 days, expressed in N/mm<sup>2</sup>. Thus, concrete is known by its compressive strength. M20 and M25 are the most common grades of concrete, and higher grades of concrete should be used for severe, very severe and extreme environments [2].

The characteristic strength of concrete in flexural member is taken as 0.67 times the strength of concrete cube. The strength to be taken for the purpose of design is known as design strength and is given by design strength ( $f_d$ ) = characteristic strength/partial safety factor for material strength. The value of partial safety factor depends upon the type of material and upon the type of limit state. According to IS code, partial safety factor is taken as 1.5 for concrete and 1.15 for steel. Design strength of concrete in member is equal to  $0.45f_{ck}$  [3].

The tensile strength of concrete is one of the basic and important properties which greatly affect the extent and size of cracking in structures. Moreover, the concrete is very weak in tension due to its brittle nature. Hence, it is not expected to resist the direct tension. So, concrete develops cracks when tensile forces exceed its tensile strength. The brittleness of lightweight concrete has developed concern among structural engineers [4].

Therefore, it is necessary to determine the tensile strength of concrete to find out the load at which the concrete members may crack. The question of increasing the reliability and durability of reinforced concrete structures is a priority [5]. Furthermore, splitting tensile strength test on concrete cylinder is a method to determine the tensile strength of concrete. The procedure is based on the ASTM C496 (Standard Test Method of Cylindrical Concrete Specimen) which is similar to the other codes like IS 5816 1999 [6].

Short term modular ratio is the modulus of elasticity of steel to the modulus of elasticity of concrete. Short term modular ratio =  $E_s / E_c$ , where  $E_s$  is the modulus of elasticity of steel ( $2 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>),  $E_c$  is modulus of elasticity of concrete ( $5000 \cdot \text{SQRT}(f_{ck})$  N/mm<sup>2</sup>). As the modulus of elasticity of concrete changes with time, age at loading, etc., the modular ratio also changes accordingly. Considering the effects of creep and shrinkage partially, IS code gives the following expression for the long-term modular ratio. Long term modular ratio (m) is equal to  $280/(3f_{cbc})$ , where  $f_{cbc}$  is the permissible compressive stress due to bending in concrete in N/mm<sup>2</sup> [3].

Different types of fibers can be used for additional disperse reinforcement of concrete, for example, basalt fibers [7]. But it is very promising to use for this purpose different types of organic fibers which are widely available in some regions. Natural fibers are a great solution because they are more sustainable and environmentally friendly. There is a wide range of natural fibers which can be utilized in concrete as reinforcement. In this research, the natural fiber that was considered was coconut fiber because it showed more consistent results during the literature review.

### ***Coconut fiber reinforced concrete***

Coconut fiber is extracted from the outer shell of a coconut. Its scientific name and the plant family of the coconut fiber is *Cocos nucifera* and *Arecaceae* (Palm) respectively, while it is commonly referred to as “Coir”. The cultivation of coconut is concentrated in the tropical belts of Asia and East Africa. There are currently two types of coconut fibres: white fibres and brown fibres. The white fibres are extracted from immature coconuts, whereas the brown fibres are extracted from already matured coconuts. Coconut fibres have a very low conductivity and high toughness. Coconuts are widely available in many west African countries. The fibres from concrete have a young modulus of 4–6 GPa and a tensile strength of 131–175 MPa. The addition of fibers to the concrete mix can improve its mechanical properties including flexure, deformation, toughness, ductility, and cracks [8]. Natural fibers were used by researchers as alternatives to synthetic fibers in composites like concrete [9].

Several experimental studies have been done on coconut fiber reinforced concrete (CFRC). Compressive and flexural strength of coconut fibre reinforced concrete using destructive and non-destructive test methods was studied in [10]. Conventional compression tests and Schmidt Hammer Rebounds on cube specimens and two-point bending test on short beam specimens with different coconut fibre content were conducted. From the results and analysis of this research work it was concluded that the addition of a 0.5% coconut husk fibre as a constitutive material of concrete affected the rheological properties of the fresh concrete, increased the compressive and flexural strength of concrete by 35.8 and 22.15% respectively.

Also, mechanical properties of coir fiber reinforced concrete were studied in [11]. The authors tried to determine coir fibers' length and volume in the concrete composition affect the general physical and mechanical properties of the resulting concrete. As the basis, plain concrete (PC) with the mix ratio of 1:2:2 for cement, sand and aggregate respectively was used. The water to cement ratio was 0.48. For preparing CFRC (the mixture of the same composition with additives of coconut fibers) it was necessary to add a little more water to make the mix more workable as the coir fiber caused the concrete to be less workable and possibly the increase in the overall porosity of the concrete. It was found that with an increase in fibre content and length, the static modulus of elasticity of the various CFRCs reduced. For CFRC with fiber's length of 25 mm, the values of static modulus of elasticity were larger than that of PC. Compared with the PC, the coir fiber inclusion either increased or reduced the static modulus of elasticity depending on the fiber's content and length used.

From the laboratory experiments carried out, it was reported that cubes with volume fraction of 1% and fibre length of 5cm had an average compressive strength of 42 MPa in comparison to other fibre lengths and fraction volumes and plain concrete mixture of 35 MPa.

Design of fiber-reinforced composite of minimum material consumption at guaranteed reliability and durability requires consideration of cases when cracks may appear in the binder [12].

In [13] a behavioural study of coconut in a concrete structure was conducted. The experiment was made based on high strength concrete with the addition of fiber with 5 mix proportions (1, 2, 3, 4, and 5%) by the weight of cement. The compressive strength and split tensile strength of cured concrete evaluated for 3, 7, 28 days. The study revealed that the compressive strength of the cubes differed depending on the percentage of fibre content. Maximum compressive strength was discovered in the cube with the volume fraction of 1% with a value of 66.52 MPa. The compressive strength dropped upon adding more fibres to the concrete.

For the split tensile strength test, cylinders with varying volume fractions of coconut fibres were examined. It was also found that the maximum tensile strength of the samples was at the fibre volume fraction of 1% at the value of 4.54 MPa. Further increase in the fibre volume led to a decrease in the split tensile strength of the samples.

In [13] the following conclusion were made:

- coconut fiber being low in density reduces the weight of the fiber reinforced concrete;
- the compressive strength and split tensile strength of the concrete gets the maximum value at the mix of fibre fraction of 1%;
- since by addition of fibers in the concrete the strengths of the specimens get decreasing and it can be concluded that the fibre should not be used beyond 1%.

In [14; 15] it was concluded that ductility of dispersed basalt fiber reinforced concrete depends not only in the percentage of basalt fiber in the concrete but also on the length and diameter of the basalt fiber. Increase in the percentage of basalt fiber in the concrete yielded an increase in the concrete ductility. Similar results might be found for coconut fiber reinforced concrete.

## **Methods**

The analysis in this research was conducted in the Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2022. A simply supported beam of length 6000 mm and cross section of 300×650 mm was the structural element that was analysed. It was loaded with a uniformly distributed live load and dead of magnitudes 7 and 20 kN/m respectively. The self-weight of the beam was also considered.

There is a great need of incorporating BIM technology in modern-day construction [16]. The simulations will basically compare how a concrete beam from coconut fiber reinforced concrete would perform in real life loading conditions as compared to a plain concrete beam of the same design mix. The demands in steel bar reinforcements, crack formation and depth and deflection for both beams will also be assessed. The software calculations are done in accordance with the Eurocode 1.

### ***Building structural element model***

The structural element to be used for our analysis is a simple pinned on both supports rectangular beam. The construction and analysis of the model was done in Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2022.

The beam is supported on two identical rectangular columns with dimensions 400×300 mm. The rectangular beam has the cross-section dimensions 300×650 mm and of length 6000 mm and was loaded with two uniformly distributed loads. One UDL is a dead load while the other one is a live load. The self-weight of the beam is also put into consideration in the calculations. The beam's calculation scheme is shown in Figure 1. Table 1 shows different loads and their meanings acting on the rectangular beam.

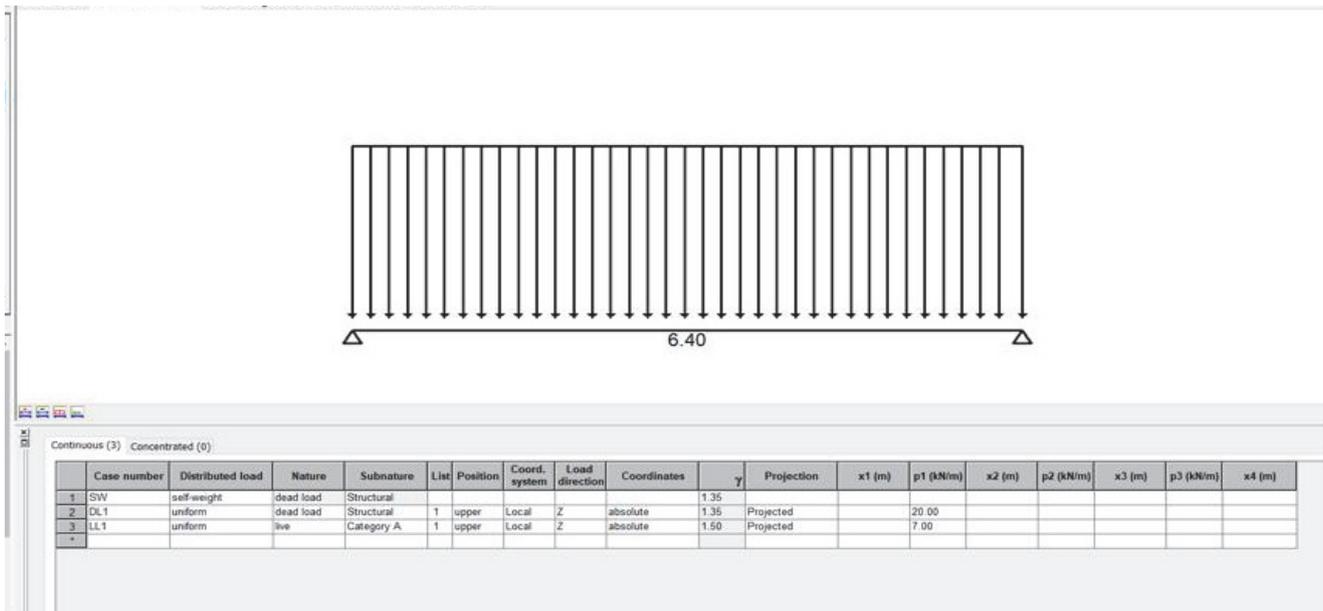


Figure 1. Loading on the rectangular beam

Table 1

Loads acting on the beam

No.	Case number	Distributed load	Nature	Sub-nature	<i>gf</i> -load factor	p1, kN/m
1	SW	Self-weight	Dead load	Structural	1.35	–
2	DL1	Uniform	Dead load	Structural	1.35	20.00
3	LL1	Uniform	Live load	Category A	1.5	7.00

Both the plain concrete and coconut fiber reinforced concrete beams were loaded with the same load pattern and quantity.

The following are the material properties of the plain concrete and coconut fiber reinforced concrete respectively.

1. Plain concrete beam

- Concrete: PC 20,  $f_{ck} = 20.00$  MPa.  
Rectangular stress distribution [3.1.7(3)].  
Density:  $2447.32 \text{ kG/m}^3$ .  
Aggregate size: 20.0 mm.
- Longitudinal reinforcement: B500C,  $f_{yk} = 500.00$  MPa.  
Horizontal branch of the stress-strain diagram.  
Ductility class: C.
- Transversal reinforcement : B500C,  $f_{yk} = 500.00$  MPa.  
Horizontal branch of the stress-strain diagram.  
Ductility class: C.
- Additional reinforcement: B500C,  $f_{yk} = 500.00$  MPa.  
Horizontal branch of the stress-strain diagram.

2. Coconut fiber reinforced concrete beam

- Concrete: CFRC20,  $f_{ck} = 26.40$  MPa.  
Rectangular stress distribution [3.1.7(3)].  
Density:  $2447.32 \text{ kG/m}^3$ .  
Aggregate size: 20.0 mm.  
Coconut fibre length: 60 mm.  
Coconut fibre fraction volume: 0.5%.
- Longitudinal reinforcement: B500C,  $f_{yk} = 500.00$  MPa.  
Horizontal branch of the stress-strain diagram.  
Ductility class: C.

- Transversal reinforcement: B500C,  $f_{yk} = 500.00$  MPa.  
Horizontal branch of the stress-strain diagram.  
Ductility class: C.
- Additional reinforcement: B500C,  $f_{yk} = 500.00$  MPa.  
Horizontal branch of the stress-strain diagram.

### **Methodology for calculation**

The following were the calculation options which were put into consideration when running the software simulation for both beams.

- Regulation of combinations: EN 1990:2002.
  - Calculations according to: EN 1992-1-1:2004/A1:2014.
  - Seismic dispositions: no requirements.
  - Precast beam: no.
  - Cover: bottom  $c = 5.0$  cm; side  $c_1 = 5.0$  cm; top  $c_2 = 5.0$  cm.
  - Cover deviations:  $C_{dev} = 1.0$  cm;  $C_{dur} = 0.0$  cm.
  - Coefficient  $b_2 = 0.50$ : long-term or cyclic load.
- Method of shear calculations: strut inclination.

### **Calculation results**

After running the calculations in the Robot Structural Analysis Professional software, the following results were obtained for the plain concrete and coconut fibre reinforced concrete beam respectively.

#### **PC and CFRC internal forces results**

Since the PC and CFRC beams had the same dimensions and were both equally loaded, the internal forces in both the beams were the same and are displayed Table 2.

From the values in the Table 2, the maximum moment in ultimate limit state (ULS) in the beam was 224.35 kN·m in the middle of the span. Bending moments at both ends of the beam were zero. The shear forces were maximum at the supports. They were of the same value, 131.45 and –131.45 kN respectively. The ultimate limit state shows values of internal forces beyond which the structure will collapse and lose its integrity.

Table 3 displays the values of the internal forces in the beam in the serviceability limit state (SLS). Serviceability limit state means checking the structure for service conditions such as stability analysis, check for deflection, stress checks in normal conditions. Like in the ultimate limit state, the maximum bending moment is in the middle of the span and the maximum shear force values are at the supports of the beam.

Table 2

**Internal forces in ULS**

Span	$Mt$ max, kN·m	$Mt$ min, kN·m	$MI$ , kN·m	$Mr$ , kN·m	$Ql$ , kN	$Qr$ , kN
P1	224.35	–0.00	58.46	58.46	131.45	–131.45

Table 3

**Internal forces in SLS**

Span	$Mt$ max, kN·m	$Mt$ min, kN·m	$MI$ , kN·m	$Mr$ , kN·m	$Ql$ , kN	$Qr$ , kN
P1	162.20	0.00	–24.33	–24.33	95.04	–95.04

### **Required reinforcement area, deflection, cracking and material survey**

1. *Plain concrete beam.* Now that we have the internal forces values in both ultimate limit state and serviceability limit state for both beams, we can now go on to compute the required reinforcement area, deflection values, cracking and finally do the material survey for both beams.

Computations will first be done for the plain concrete beam. We shall start with required reinforcement area. Table 4 shows the values of total reinforcement area required in the top and bottom sections of the beam.

Table 4 shows the required reinforcement areas for the middle span, left support and right support of the plain concrete beam respectively. As clearly visible in the table, the middle span bottom section of the beam

requires a larger area of reinforcement due to the maximum bending moments putting the beam under tension. The top part of the middle span requires almost no reinforcement because it is under compression. The left and right supports' bottom and top sections require a lesser area of reinforcement as shown in the table.

Table 5 is showing the deflection parameters of the plain concrete beam. From the table it can be observed that after the simulation, the perpendicular cracks formed were 0.4 mm in width and the total quasi-permanent combination  $w_t(QP)$  was 1.7 cm.

Table 4

Span	Span, cm <sup>2</sup>		Left support, cm <sup>2</sup>		Right support, cm <sup>2</sup>	
	Bottom	Top	Bottom	Top	Bottom	Top
P1	9.80	0.00	2.29	1.31	2.29	1.31

Table 5

Span	$w_t(QP)$ , cm	$w_t(QP)_{dop}$ , cm	$Dw_t(QP)$ , cm	$Dw_t(QP)_{dop}$ , cm	$w_k$ , mm
P1	1.7	2.6	0.2	1.3	0.4

We shall now look at the computations of the required reinforcement for the plain concrete in all the sections in detail.

P1: span from 0.40 to 6.40 m.

Longitudinal reinforcement:

- bottom (B500C):

3 d16  $l = 6.59$  from 0.11 to 6.69;

2 d16  $l = 4.74$  from 1.03 to 5.77;

- assembling (top) (B500C):

3 d14  $l = 5.77$  from 0.51 to 6.29;

- support (B500C):

3 d14  $l = 2.03$  from 0.05 to 1.78;

3 d14  $l = 2.03$  from 5.02 to 6.75.

Transversal reinforcement:

- main (B500C):

stirrups 32 d8  $l = 1.43$ ;

$e = 4 \cdot 0.30 + 9 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.30$  m.

Material survey:

- Concrete volume = 1.33 m<sup>3</sup>.

- Formwork = 11.03 m<sup>2</sup>.

- Steel B500C.

- Total weight = 99.87 kG.

- Density = 75.32 kG/m<sup>3</sup>.

- Average diameter = 11.9 mm.

- Survey according to diameters.

Table 6

Diameter, mm	Length, m	Weight, kg	Number	Total weight
8	1.43	0.56	32	18.04
14	2.03	2.45	6	14.71
14	5.77	6.98	3	20.93
16	4.79	7.49	2	14.98
16	6.59	10.40	3	31.21

Table 6 summarizes the steel bar reinforcement in terms of the diameter, length, weight, number of bars and total weight for each bar diameter in the plain concrete beam span. This includes the main longitudinal reinforcement bars, support bars, assembling bars and stirrups. The main longitudinal bars, diameter 16 mm in the middle of the span are the heaviest as displayed in the table.

2. *Coconut fiber reinforced concrete beam*. We shall now look at and analyze the results for coconut fiber reinforced concrete beam analysis.

Table 7 shows the required reinforcement areas for the middle span, left support and right support of the coconut fiber reinforced concrete beam respectively. As clearly visible in the table, the middle span bottom section of the beam requires a larger area of reinforcement due to the maximum bending moments putting the beam under tension. The top part of the middle span requires almost no reinforcement because it is under compression. The left and right supports' bottom and top sections require a lesser area of reinforcement as shown in the table. Comparing these values to the values of the required reinforcement areas for the plain concrete, the coconut fiber reinforced concrete beam has a slightly lesser requirement for reinforcement in the middle span and at the left and right supports.

In Table 8, we can see the total quasi-permanent combination  $wt(QP)$ , allowable due to quasi-permanent combination deflection  $wt(QP)dop$ , deflection due to quasi-permanent load combination after erecting a structure  $Dwt(QP)$ , the admissible deflection increment from the quasi-permanent load combination after erecting a structure  $Dwt(QP)dop$  and the width of the perpendicular cracks formed  $wk$ . After being loaded, the maximum perpendicular deflection cracks in the span of the CFRC beam was 0.4 mm as well.

Table 7

Required reinforcement area for CFRC

Span	Span, cm <sup>2</sup>		Left support, cm <sup>2</sup>		Right support, cm <sup>2</sup>	
	Bottom	Top	Bottom	Top	Bottom	Top
P1	9.54	0.00	2.25	1.29	2.25	1.29

Table 8

Deflection parameters of CFRC beam

Span	$wt(QP)$ , cm	$wt(QP)dop$ , cm	$Dwt(QP)$ , cm	$Dwt(QP)dop$ , cm	$wk$ , mm
P1	1.6	2.6	0.2	1.3	0.4

The next step is to make computations of the required reinforcement for the plain concrete in all the sections in detail (the number of bars, placement and length of each bar diameter in the CFRC beam).

P1: span from 0.40 to 6.40 m.

Longitudinal reinforcement:

- bottom (B500C):

3 d16  $l = 6.50$  from 0.15 to 6.65;

2 d16  $l = 4.61$  from 1.09 to 5.71;

- assembling (top) (B500C):

2 d14  $l = 5.40$  from 0.70 to 6.10;

- support (B500C):

3 d14  $l = 1.66$  from 0.05 to 1.71;

3 d14  $l = 1.66$  from 5.09 to 6.75.

Transversal reinforcement:

- main (B500C):

stirrups 29 d8  $l = 1.60$ ;

$e = 1 \cdot 0.04 + 8 \cdot 0.16 + 12 \cdot 0.28 + 8 \cdot 0.16$  m.

Material survey:

- Concrete volume = 1.33 m<sup>3</sup>.

- Formwork = 11.03 m<sup>2</sup>.

- Steel B500C.

- Total weight = 88.73 kG.

- Density = 66.92 kG/m<sup>3</sup>.

- Average diameter = 11.7 mm.

Table 9 summarizes the steel bar reinforcement in terms of the diameter, length, weight, number of bars and total weight for each bar diameter in the CFRC beam span. This includes the main longitudinal reinforcement bars, support bars, assembling bars and stirrups. The main longitudinal bars, diameter 16 mm in the middle of the span are the heaviest as displayed in the table.

Table 9

Steel reinforcement material survey for CFRC

Diameter	Length	Weight	Number	Weight
8	1.60	0.63	29	18.27
14	1.66	2.01	6	12.07
14	5.40	6.52	2	13.05
16	4.61	7.28	2	14.57
16	6.50	10.26	3	30.77

### Results and discussion

After running the structural analysis on the plain concrete and coconut fibre reinforced concrete beam, results were obtained. We are now going to analyse, compare the results obtained from the tests.

#### Internal forces in the beam

As earlier stated, both beams were loaded with the same amount and form of external loads. The beams also had the same geometrical properties (cross-section width, height and length). Due to this, the results for the support reactions, shear forces and bending moments were identical. The beams were loaded with a dead and live uniformly distributed load. The lead to having the maximum shear forces at the supports and the maximum bending moment in the centre of the beam. The Table 10 shows the results from the calculation in detail.

Table 10

Detailed theoretical results (ULS and SLS)

Abcissa, m	ULS			SLS		
	M max, kN·m	M min, kN·m	V max, kN	M max, kN·m	M min, kN·m	V max, kN
0.40	58.46	-33.65	131.45	18.25	-24.33	95.04
0.84	106.60	-20.13	112.17	58.39	0.00	81.10
1.48	162.04	-0.00	84.13	103.81	0.00	60.83
2.12	199.53	-0.00	56.09	136.25	0.00	40.55
2.76	219.07	-0.00	28.04	155.71	0.00	20.28
3.40	224.35	0.00	0.00	162.20	0.00	0.00
4.04	219.07	-0.00	-28.04	155.71	0.00	-20.28
4.68	199.53	-0.00	-56.09	136.25	0.00	-40.55
5.32	162.04	-0.00	-84.13	103.81	0.00	-60.83
5.96	106.60	-20.13	-112.17	58.39	0.00	-81.10
6.40	58.46	-33.65	-131.45	18.25	-24.33	-95.04

From the values of the bending moments in both ULS and SLS we can notice the need for horizontal beam steel bar reinforcements to absorb the flexural forces as a result of these bending moments in the beam. The supports of the beam are also in need of transverse reinforcements to prevent crack formation due to shear forces. We shall analyse the quantity of steel bar reinforcements for each beam in the sub-heading of reinforcements later in this chapter.

#### Deflection and cracking

When both beams were subjected to the uniformly distributed loads, they both underwent deflection and cracking. Through the help of the software, we were able to calculate deflections and cracking in both cases. We shall now look at and analyse them. Table 11 summarizes the findings.

Table of deflection and cracking for PC and CFRC beams

Beam	Span	$w_t(QP)$ , cm	$w_t(QP)_{dop}$ , cm	$Dwt(QP)$ , cm	$Dwt(QP)_{dop}$ , cm	$w_k$ , mm
PC	P1	1.7	2.6	0.2	1.3	0.4
CFRC	P1	1.6	2.6	0.2	1.3	0.4

$w_t(QP)$  – total due to quasi-permanent combination;  $w_t(QP)_{dop}$  – allowable due to quasi-permanent combination;  $Dwt(QP)$  – deflection increment from the quasi-permanent load combination after erecting a structure;  $Dwt(QP)_{dop}$  – admissible deflection increment from the quasi-permanent load combination after erecting a structure.

As clearly indicated in Table 11 the plain concrete beam has a higher value of deflection from the loading as compared to the coconut fibre reinforced concrete beam under the same loading.

### Reinforcement

As earlier stated, there is need for steel bar reinforcement in both beams as a result of the shear and bending moment forces which occurred in the beam due to the loading. We shall analyse the amount of steel reinforcement needed in each case and find where more steel reinforcement was needed. The reinforcement is in the span P1 from 0.4 to 6.4 m.

*For the PC beam.* Figure 2 graphically shows the placement of the different steel bars in the plain concrete beam. It clearly shows the positions of the main horizontal bars, assembling bars, support bars and stirrups. Let's break down the placement of the bars below for a better understanding.

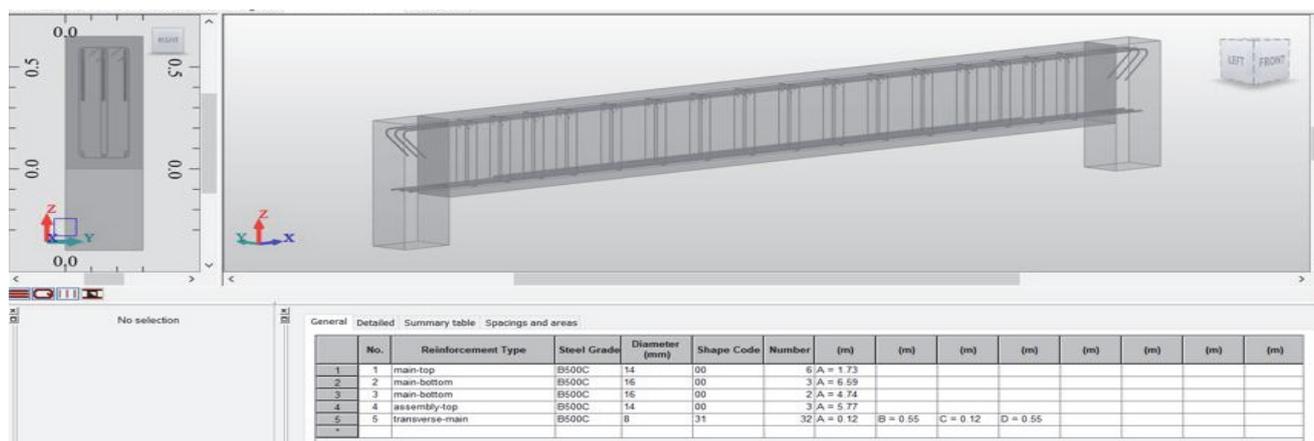


Figure 2. PC steel reinforcement diagram

Longitudinal reinforcement:

- bottom (B500C):  
3 d16  $l = 6.59$  from 0.11 to 6.69;  
2 d16  $l = 4.74$  from 1.03 to 5.77;
- assembling (top) (B500C):  
3 d14  $l = 5.77$  from 0.51 to 6.29;
- support (B500C):  
3 d14  $l = 2.03$  from 0.05 to 1.78;  
3 d14  $l = 2.03$  from 5.02 to 6.75.

Transversal reinforcement:

- main (B500C):  
stirrups 32 d8  $l = 1.43$ ;  
 $e = 4 \cdot 0.30 + 9 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.30$  m.

*For the CFRC beam.* Figure 3 on the other hand also graphically shows the placement of the different steel bars in the plain concrete beam. It clearly shows the positions of the main horizontal bars, assembling bars, support bars and stirrups. Below is the breakdown of the placement of steel bars in the beam.

Longitudinal reinforcement:

- bottom (B500C):  
3 d16  $l = 6.50$  from 0.15 to 6.65;  
2 d16  $l = 4.61$  from 1.09 to 5.71;
- assembling (top) (B500C):  
2 d14  $l = 5.40$  from 0.70 to 6.10;
- support (B500C):  
3 d14  $l = 1.66$  from 0.05 to 1.71;  
3 d14  $l = 1.66$  from 5.09 to 6.75.

Transversal reinforcement:

- main (B500C):  
stirrups 29 d8  $l = 1.40$ ;
- $$e = 1 \cdot 0.04 + 8 \cdot 0.16 + 12 \cdot 0.28 + 8 \cdot 0.16 \text{ m.}$$

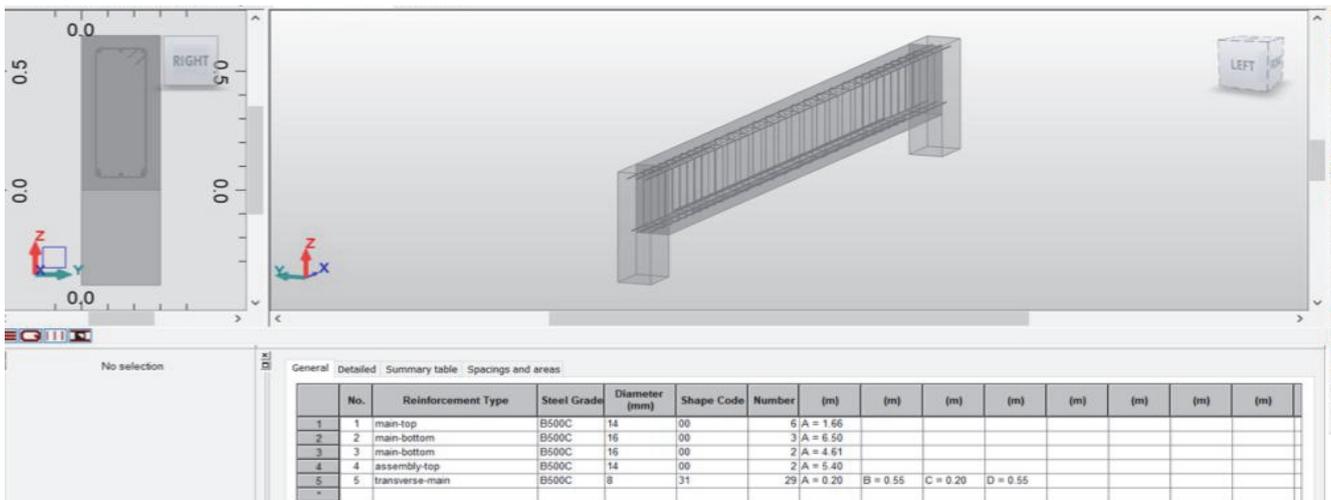


Figure 3. Steel bar reinforcement diagram for CFRC beam

After the analysis, the software generated the type and amount of steel needed for each beam type. Table 12 summarizes the results from the analysis. From the table, it can be seen that plain concrete beam required more bars of steel reinforcements in number and in length despite both beams requiring steels bars of the same diameters.

Table 12

Steel bar reinforcements in PC and CFRC beams

Type of concrete beam		Longitudinal reinforcement			Transverse reinforcement		
		Bottom (B500C)	Assembling (top) (B500C)		Support (B500C)	Main stirrups (B500C)	
PC beam	Number	3	2	3	3	3	32
	Diameter	16	16	14	14	14	8
	Length	6.59	4.74	5.77	2.03	2.03	1.43
CFRC beam	Number	3	2	2	3	3	29
	Diameter	16	16	14	14	14	8
	Length	6.50	4.61	5.40	1.66	1.66	1.40

### Material analysis

We shall now summarize the overall material requirements for the beams. This will summarize the concrete, formwork and steel material survey for erecting a 6000×300×650 beam from PC and CFRC.

Table 13

Total material survey for PC and CFRC

Type of concrete	Concrete volume, m <sup>3</sup>	Formwork, m <sup>2</sup>	Steel B500C		
			Total weight, kg	Density, kg/m <sup>3</sup>	Average diameter, mm
PC	1.33	11.03	99.87	75.32	11.90
CFRC	1.33	11.03	88.73	66.92	11.70

Table 13 draws a clear conclusive distinction in the material survey between the plain concrete and coconut fibre reinforced concrete beam. Since the two beams were of the same dimensions, there was hardly any difference in the concrete volume and formwork area needed to erect them. However, there was a reasonable difference in the total weight, density and average diameter of the steel bar reinforcement. The PC beam had larger values for total weight, density and average steel reinforcement bar diameter.

### Conclusion

The experimental structural analysis in the Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2022 software was carried out to determine the differences in material demands for a plain concrete beam and a coconut fibre reinforced concrete beam. Both beams were of the same geometrical characteristics and were loaded with the same uniformly distributed load (form and quantity).

The mechanical properties of the coconut fibre reinforced concrete were gotten from experimental researches from reviewed and published scientific articles from our literature review. The CFRC beam had a fraction volume of 0.5% of coconut fibre of length 6cm. After running the analysis in the software, the internal forces in the beams came out of the same value.

During the analysis of results, it was found that the PC beam had a greater deflection and cracking as compared to the CFRC beam. The PC beam also showed results of having a greater required reinforcement area as compared to the CFRC. This meant that the PC beam was in need of more steel reinforcement.

The results of the analysis also included the material survey for both beams. From the survey it was discovered that the both the PC and CFRC were of the same concrete volume and formwork area. However, there was a significant difference in the steel reinforcement total weight, density and average diameter of the bars. The PC beam requires a total weight of 99.87 kg of steel bar reinforcement while the CFRC beam of the same geometric dimensions requires 88.73 kg of steel bar reinforcement.

Based on this software analysis, it was found the following:

- 1) the CFRC beam experiences 6% less deflection and crack formation when loaded with a flexural force;
- 2) the PC beam requires a greater area of reinforcement as compared to the CFRC;
- 3) the material survey showed that CFRC requires 11% less of steel bars in weight as compared to the PC.

This makes the CFRC a light construction material and more economical in terms of steel reinforcement. From the results obtained from the research, the beam made from coconut fibre reinforced concrete showed better performance under the given loads. It also showed less deflection, crack formation and less steel bar reinforcement. This makes it a better and more sustainable material as compared to the plain concrete. However, more research is needed on the incorporation of natural fibres in concrete as there are no existing standards and code for their use as reinforcement in concrete.

### References

1. Octarina D., Fadilasari D., Juansyah Y. Comparative analysis the addition of natural and artificial fibres in concrete. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2020;807(1):012002. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/807/1/012002>
2. Chiadighikaobi P.C. Improving the compressive strength of lightweight cylindrical concrete column with basalt fiber reinforced polymer acting under imposed load. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):424–434. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-424-434>
3. Markovich A.S., Miloserdova D.A. Properties of dispersed fibers for efficient concrete reinforcement. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(2):182–192. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-2-182-192>

4. Galishnikova V.V., Heidari A., Chiadighikaobi P.C., Muritala A.A., Emiri D.A. Ductility and flexure of lightweight expanded clay basalt fiber reinforced concrete slab. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):74–81. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-74-81>.
5. Laverde V., Marin A., Benjumea J., Ortiz M.R. Use of vegetable fibers as reinforcements in cement-matrix composite materials: a review. *Construction and Building Materials*. 2022;340(1–3):127729. <http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.127729>
6. Savastano J.H., Santos S.F., Radonjic M., Soboyejo W.O. Fracture and fatigue of natural fiber-reinforced cementitious composites. *Cement and Concrete Composites*. 2009;31(4):232–243. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2009.02.006>
7. Rassokhin A., Ponomarev A., Shambina S., Karlina A. Different types of basalt fibers for disperse reinforcing of fine-grained concrete. *Magazine of Civil Engineering*. 2022;(1):10913. <http://doi.org/10.34910/MCE.109.13>
8. Amin M.N., Ahmad W., Khan K., Ahmad A. A comprehensive review of types, properties, treatment methods and application of plant fibers in construction and building materials. *Materials (Basel)*. 2022;15(12):4362. <http://doi.org/10.3390/ma15124362>
9. Ahmad W., Farooq S.H., Usman M., Khan M., Ahmad A., Aslam F., Yosef R.A., Abduljabbar H.A., Sufian M. Effect of coconut fiber length and content on properties of high strength concrete. *Materials (Basel)*. 2020;13(5):1075. <http://doi.org/10.3390/ma13051075>
10. Galishnikova V.V., Kharun M., Koroteev D.D., Chiadighikaobi P.C. Basalt fiber reinforced expanded clay concrete for building structures. *Magazine of Civil Engineering*. 2021;(1):10107. <https://doi.org/10.34910/MCE.101.7>
11. Mokhtari A., Ouali M.O., Tala-Ighil N. Damage modelling in thermoplastic composites reinforced with natural fibres under compressive loading. *International Journal of Damage Mechanics*. 2015;24:1239–1260. <http://doi.org/10.1177/1056789515573900>
12. Hwang C., Tran V., Hsieh Y. Effects of short coconut fiber on the mechanical properties, plastic cracking behaviour, and impact resistance of cementitious composites. *Construction and Building Materials*. 2016;127:984–992. <https://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2016.09.118>
13. Hasanov S.H. Modelling of cracks nucleation in fiber composite under bending. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(3):248–257. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-3-248-257>
14. Uday V.S., Ajitha B. Concrete reinforced with coconut fibers. *International Journal of Engineering Science and Computing*. 2017;7(4):10436.
15. Galishnikova V.V., Chiadighikaobi P.C., Emiri D.A. Comprehensive view on the ductility of basalt fiber reinforced concrete focus on lightweight expanded clay. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):360–366. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-360-366>
16. Iushkin I.I., Alamedy S.G.H., Stashevskaya N.A. Problems and benefits of implementing BIM in the construction industry. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(2):172–181. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-2-172-181>

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241

УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомых величин для нелинейного расчета оболочки вращения

Н.А. Гуреева<sup>1</sup> , Р.З. Киселева<sup>2</sup>  , А.П. Киселев<sup>2</sup> , А.П. Николаев<sup>2</sup> , Ю.В. Клочков<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация<sup>2</sup>Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Российская Федерация

✉ rumia1970@yandex.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 3 марта 2022 г.

Доработана: 2 июня 2022 г.

Принята к публикации: 2 июня 2022 г.

#### Для цитирования

Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Киселев А.П., Николаев А.П., Клочков Ю.В. Объемный элемент с векторной аппроксимацией искомых величин для нелинейного расчета оболочки вращения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 228–241. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241>

**Аннотация.** Описано использование традиционных аппроксимирующих функций непосредственно к искомому вектору перемещения внутренней точки конечного элемента для его определения через узловые неизвестные в виде векторов перемещений и их производных. Для анализа напряженного состояния геометрически нелинейно деформируемой оболочки вращения на шаге нагружения разработан алгоритм формирования матрицы жесткости шестигранного конечного элемента с узловыми величинами в виде приращений перемещений и их производных. Для получения искомых аппроксимирующих выражений использована традиционная теория интерполяции, которая при расчете в криволинейной системе координат применена к вектору перемещения внутренней точки конечного элемента для его аппроксимации класса  $C^{(1)}$  через узловые векторы перемещений и их производные. Для координатного преобразования получены выражения базисов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента. После координатных преобразований находятся аппроксимирующие выражения класса  $C^{(1)}$  для компонент вектора перемещения внутренней точки конечного элемента, приводящие в криволинейной системе координат к неявному учету смещения конечного элемента как жесткого целого. На примерах расчета получены подтверждающие результаты разработанного метода аппроксимации искомых величин МКЭ при значительных смещениях конструкции как абсолютного твердого тела.

**Ключевые слова:** оболочка вращения, геометрическая нелинейность, конечный шестигранный элемент, напряженно-деформированное состояние

**Гуреева Наталья Анатольевна**, доктор физико-математических наук, профессор, доцент департамента математики, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Российская Федерация, 125993, Москва, Ленинградский пр-кт, д. 49; ORCID: 0000-0003-3496-2008, Scopus ID: 30067680500, eLIBRARY SPIN-код: 8393-5900; nagureeva@fa.ru

**Киселева Румия Зайдуллаевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, эколого-мелиоративный факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-3047-5256, Scopus ID: 57212347650, eLIBRARY SPIN-код: 1948-5390; rumia1970@yandex.ru

**Киселев Анатолий Петрович**, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, эколого-мелиоративный факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-7138-2056, Scopus ID: 57215753276, eLIBRARY SPIN-код: 1340-0720; apkiselev1969@yandex.ru

**Николаев Анатолий Петрович**, доктор технических наук, профессор кафедры механики, инженерно-технологический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-7098-5998, Scopus ID: 7202396806, eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484; anpetr40@yandex.ru

**Клочков Юрий Васильевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, электроэнергетический факультет, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, д. 26; ORCID: 0000-0002-1027-1811, Scopus ID: 57170472500, eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693; klotchkov@bk.ru

© Гуреева Н.А., Киселева Р.З., Киселев А.П., Николаев А.П., Клочков Ю.В., 2022

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Volumetric element with vector approximation of the desired values for nonlinear calculation of the shell of rotation

Natalia A. Gureeva<sup>1</sup> , Rumia Z. Kiseleva<sup>2</sup>  , Anatoly P. Kiselev<sup>2</sup> ,  
Anatoly P. Nikolaev<sup>2</sup> , Yuriy V. Klochkov<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russian Federation

 rumia1970@yandex.ru

### Article history

Received: March 3, 2022

Revised: June 2, 2022

Accepted: June 2, 2022

**Abstract.** The usage of traditional approximating functions directly to the desired displacement vector of the internal point of a finite element to determine it through nodal unknowns in the form of displacement vectors and their derivatives is described. To analyze the stress state of a geometrically non-linearly deformable shell of rotation at the loading step, the developed algorithm for forming the stiffness matrix of a hexagonal finite element with nodal values in the form of displacement increments and their derivatives was used. To obtain the desired approximating expressions, the traditional interpolation theory is used, which, when calculated in a curved coordinate system, is applied to the displacement vector of the internal point of a finite element for its approximation of class  $C^{(1)}$  through nodal displacement vectors and their derivatives. For the coordinate transformation, expressions of the bases of nodal points are obtained in terms of the basis vectors of the inner point of the finite element. After the coordinate transformations, approximating expressions of class  $C^{(1)}$  are found for the components of the displacement vector of the internal point of the finite element, leading in a curved coordinate system to implicitly account for the displacement of the finite element as a rigid whole. Using calculation examples, the results of the developed method of approximation of the required values of the FEM with significant displacements of the structure as an absolute solid are obtained.

**Keywords:** shell of rotation, geometric nonlinearity, finite hexahedron element, stress-strain state

### For citation

Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Kiselev A.P., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. Volumetric element with vector approximation of the desired values for nonlinear calculation of the shell of rotation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):228–241. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-228-241>

### Введение

Теория механики сплошной среды и, в частности, оболочек разработана достаточно полно [1–3]. Уравнения для определения напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов агропромышленного комплекса, химического и авиационного машиностроения и других отраслей получились по сложности такими, что их использование в практике инженерных расчетов оказалось весьма ограниченным. Из-за сложности получения аналитических решений значительное количество исследований посвящено разработке численных и приближенных методов расчета деформируемых тел [4–8]. Среди методов численного определения напряженно-деформированного состояния (НДС) инженерных структур различного назначения метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее эффективных, что отражено в работах как отечественных [9–14], так и зарубежных исследователей<sup>1</sup> [15–22].

**Natalia A. Gureeva**, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics, Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradskii Prospekt, Moscow, 125993, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3496-2008, Scopus ID: 30067680500, eLIBRARY SPIN-code: 8393-5900; nagureeva@fa.ru

**Rumia Z. Kiseleva**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department, Ecology and Melioration Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-3047-5256, Scopus ID: 57212347650, eLIBRARY SPIN-code: 1948-5390; ru-mia1970@yandex.ru

**Anatoly P. Kiselev**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department, Ecology and Melioration Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7138-2056, Scopus ID: 57215753276, eLIBRARY SPIN-code: 1340-0720; ap-kiselev1969@yandex.ru

**Anatoliy P. Nikolaev**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Mechanics, Faculty of Engineering and Technology, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-7098-5998, Scopus ID: 7202396806, eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484; anpetr40@yandex.ru

**Yuriy V. Klochkov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Electric Power and Energy Faculty, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1027-1811, Scopus ID: 57170472500, eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693; klotchkov@bk.ru

<sup>1</sup> Баме К.Ю. Метод конечных элементов: учебник. М.: Физматлит, 2010. 1022 с.

Определение НДС тонкостенных конструкций в указанных работах выполнялось при использовании гипотезы прямой нормали на основе МКЭ в формулировке метода перемещений. Причем в криволинейных системах координат традиционные функции формы использовались непосредственно для аппроксимации компонент вектора перемещений через узловые величины, в результате каждая компонента вектора перемещений внутренней точки конечного элемента выражалась только через узловые значения этой же компоненты<sup>2</sup> [15; 17–22] и не зависела от других компонент. Эти положения использовались в матрицах жесткостей конечных элементов и при исследовании процессов деформирования в геометрически нелинейной постановке [19; 20; 22; 23].

На основе МКЭ созданы и широко применяются универсальные коммерческие программные продукты типа ANSYS, NFSTRAN, LS-DYNA, ADINA, ASTRA-МОВА и др. Следует отметить, что применение аппроксимирующих функций формы непосредственно к компонентам вектора перемещения внутренней точки конечного элемента корректно только при выполнении расчетов в декартовой системе координат. При выполнении расчетов на основе МКЭ в криволинейной системе координат такой прием аппроксимации приводит к общеизвестной проблеме учета смещения конечного элемента как твердого тела [16; 23].

В настоящей работе для определения НДС нелинейно деформируемой оболочки вращения без использования гипотезы прямой нормали разработан на шаге нагружения шестигранный конечный элемент в формулировке метода перемещений с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и их производных.

Для аппроксимации приращений перемещений через узловые значения разработана векторная аппроксимация класса  $C^{(1)}$ , использование которой после координатного преобразования дало возможность получить аппроксимирующие функции, приводящие к решению проблемы учета смещения конечного элемента как абсолютно твердого тела

## Методы

### Векторные параметры оболочки вращения

Положение произвольной точки  $M^0$  срединной поверхности оболочки вращения в декартовой системе координат  $Ox, y, z$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  определяется радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}, \quad (1)$$

где  $r$  – радиус вращения точки  $M^0$ .

Векторы базиса произвольной точки  $M^0$  определяются выражениями

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}^0_{,x} = \vec{i} + r_{,x} \sin \theta \vec{j} + r_{,x} \cos \theta \vec{k}; \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}^0_{,\theta} = r \cos \theta \vec{j} - r \sin \theta \vec{k};$$

$$\vec{a}_3^0 = \frac{\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0|} = \frac{1}{\sqrt{1+r_{,x}^2}} (-\vec{i} r_{,x} + \vec{j} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta).$$

Радиус-вектор произвольной точки  $M^{0\zeta}$  оболочки имеет вид

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{a}_3^0. \quad (2)$$

Векторы базиса произвольной точки  $M^{0\zeta}$  определяются дифференцированием (2) и представляются матричными выражениями

$$\{\vec{g}^0\} = [s] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{i}\} = [s]^{-1} \{\vec{g}^0\}, \quad (3)$$

где  $\{\vec{g}^0\}^T = \{\vec{g}_1^0 \vec{g}_2^0 \vec{g}_3^0\}$ ;  $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}$ .

<sup>2</sup> Бате К.Ю. Метод конечных элементов: учебник. М.: Физматлит, 2010. 1022 с.

Дифференцированием (2) с использованием (3) можно производные базисных векторов точки  $M^{0\zeta}$  представить компонентами в базисе этой же точки:

$$\begin{aligned} \{\bar{g}^0_{,x}\} &= [s_{,x}][s]^{-1} \{\bar{g}^0\} = [m] \{\bar{g}^0\}; \\ \{\bar{g}^0_{,0}\} &= [s_{,0}][s]^{-1} \{\bar{g}^0\} = [n] \{\bar{g}^0\}; \\ \{\bar{g}^0_{,\zeta}\} &= [s_{,\zeta}][s]^{-1} \{\bar{g}^0\} = [l] \{\bar{g}^0\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\{\bar{g}^0_{,x}\}^T = \{\bar{g}^0_{1,x} \ \bar{g}^0_{2,x} \ \bar{g}^0_{3,x}\}$ ;  $\{\bar{g}^0_{,0}\}^T = \{\bar{g}^0_{1,0} \ \bar{g}^0_{2,0} \ \bar{g}^0_{3,0}\}$ ;  $\{\bar{g}^0_{,\zeta}\}^T = \{\bar{g}^0_{1,\zeta} \ \bar{g}^0_{2,\zeta} \ \bar{g}^0_{3,\zeta}\}$ .

### Перемещения и деформации

В условиях шагового нагружения рассматриваются три положения произвольной точки оболочки: исходное состояние, деформированное состояние (вектор перемещения  $\vec{V}$ ) и соседнее с деформированным состоянием (вектор перемещения  $\vec{w}$ ).

Компоненты векторов перемещений  $\vec{V}$  и  $\vec{w}$  определяются в базисе точки  $M^{0\zeta}$ :

$$\vec{V} = v^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{w} = w^i \bar{g}_i^0. \quad (5)$$

После дифференцирования (5) с учетом (4) получаются соотношения

$$\vec{V}_{,x} = f_1^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{V}_{,0} = f_2^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{V}_{,\zeta} = f_3^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{w}_{,x} = \alpha_1^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{w}_{,0} = \alpha_2^i \bar{g}_i^0; \quad \vec{w}_{,\zeta} = \alpha_3^i \bar{g}_i^0, \quad (6)$$

где  $f_m^i, \alpha_m^i$  – являются функциями компонент векторов перемещений  $\vec{V}, \vec{w}$  соответственно и определяются выражениями такого вида:

$$\begin{aligned} f_1^1 &= (v_{,x}^1 + m_{11}v^1 + m_{21}v^2 + m_{31}v^3); \quad f_3^3 = (v_{,\zeta}^3 + l_{13}v^1 + l_{23}v^2 + l_{33}v^3); \\ \alpha_1^1 &= (w_{,x}^1 + m_{11}w^1 + m_{21}w^2 + m_{31}w^3); \quad \alpha_3^3 = (w_{,\zeta}^3 + l_{13}w^1 + l_{23}w^2 + l_{33}w^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Определяя положение точки  $M^\zeta$  радиус-вектором

$$\vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}, \quad (8)$$

его дифференцированием можно найти векторы локального базиса точки  $M^\zeta$ :

$$\begin{aligned} \bar{g}_1 &= (\vec{R}^\zeta)_{,x} = \bar{g}_1^0 (1 + f_1^1) + \bar{g}_2^0 f_1^2 + \bar{g}_3^0 f_1^3; \\ \bar{g}_2 &= (\vec{R}^\zeta)_{,0} = \bar{g}_1^0 f_2^1 + \bar{g}_2^0 (1 + f_2^2) + \bar{g}_3^0 f_2^3; \\ \bar{g}_3 &= (\vec{R}^\zeta)_{,\zeta} = \bar{g}_1^0 f_3^1 + \bar{g}_2^0 f_3^2 + \bar{g}_3^0 (1 + f_3^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты тензора деформаций после  $j$  шагов нагружения определяются разностью компонент метрических тензоров в точках  $M^{0\zeta}$  и  $M^\zeta$  [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{ij}^0) = \frac{1}{2} (\bar{g}_i^0 \vec{V}_{,j} + \bar{g}_j^0 \vec{V}_{,i} + \vec{V}_{,i} \vec{V}_{,j}). \quad (10)$$

При учете (6) и (9) деформации запишутся выражениями

$$\varepsilon_{11} = f_1^1 g_{11}^0 + f_1^2 g_{12}^0 + f_1^3 g_{13}^0 + \left( f_1^1 f_1^1 g_{11}^0 + f_1^2 f_1^2 g_{22}^0 + f_1^3 f_1^3 g_{33}^0 + 2f_1^1 f_1^2 g_{12}^0 + 2f_1^1 f_1^3 g_{13}^0 + 2f_1^2 f_1^3 g_{23}^0 \right) \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{23} = & f_3^1 g_{12}^0 + f_3^2 g_{22}^0 + f_3^3 g_{23}^0 + f_2^1 g_{13}^0 + f_2^2 g_{23}^0 + f_2^3 g_{33}^0 + f_2^1 f_3^1 g_{11}^0 + f_2^1 f_3^2 g_{12}^0 + \\ & + f_2^1 f_3^3 g_{13}^0 + f_2^2 f_3^1 g_{12}^0 + f_2^2 f_3^2 g_{22}^0 + f_2^2 f_3^3 g_{23}^0 + f_2^3 f_3^1 g_{13}^0 + f_2^3 f_3^2 g_{23}^0 + f_2^3 f_3^3 g_{33}^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Компоненты тензора приращений деформаций на  $(j+1)$ -м шаге нагружения определяются разностью ковариантных компонент метрических тензоров точек  $M^{\zeta^*}$  и  $M^{\zeta}$ :

$$\Delta\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} (g_{mn}^* - g_{mn}) = \frac{1}{2} (\bar{g}_m \bar{w}_{,n} + \bar{g}_n \bar{w}_{,m} + \bar{w}_{,m} \bar{w}_{,n}) = \Delta\varepsilon_{mn}^l + \Delta\varepsilon_{mn}^h, \quad (12)$$

где  $\Delta\varepsilon_{mn}^l$ ;  $\Delta\varepsilon_{mn}^h$  – компоненты линейного тензора приращений деформаций и нелинейного тензора приращений деформаций.

При учете (6) и (7) линейные части тензора приращений деформаций можно представить выражениями

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{11}^l = & w^1_{,x} c_1 + w^2_{,x} c_2 + w^3_{,x} c_3 + w^1 (c_1 m_{11} + c_2 m_{12} + c_3 m_{13}) + \\ & + w^2 (c_1 m_{21} + c_2 m_{22} + c_3 m_{23}) + w^3 (c_1 m_{31} + c_2 m_{32} + c_3 m_{33}); \\ 2\Delta\varepsilon_{23}^l = & w^1_{,\zeta} c_4 + w^2_{,\zeta} c_5 + w^3_{,\zeta} c_6 + w^1_{,0} c_7 + w^2_{,0} c_8 + w^3_{,0} c_9 + \\ & + w^1 (c_4 l_{11} + c_5 l_{12} + c_6 l_{13} + c_7 n_{11} + c_8 n_{12} + c_9 n_{13}) + \\ & + w^2 (c_4 l_{21} + c_5 l_{22} + c_6 l_{23} + c_7 n_{21} + c_8 n_{22} + c_9 n_{23}) + \\ & + w^3 (c_4 l_{31} + c_5 l_{32} + c_6 l_{33} + c_7 n_{31} + c_8 n_{32} + c_9 n_{33}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где } c_1 = g_{11}^0 (1 + f_1^1) + f_1^2 g_{12}^0 + f_1^3 g_{13}^0;$$

$$c_9 = g_{13}^0 f_1^3 + f_3^2 g_{23}^0 + g_{33}^0 (1 + f_3^3).$$

Компоненты линейного тензора приращений деформаций можно определить матричной зависимостью

$$\left\{ \Delta\varepsilon_{mn}^l \right\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \left\{ w \right\}_{3 \times 1}, \quad (14)$$

где  $\left\{ \Delta\varepsilon_{mn}^l \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \Delta\varepsilon_{11}^l \quad \Delta\varepsilon_{22}^l \quad \Delta\varepsilon_{33}^l \quad 2\Delta\varepsilon_{12}^l \quad 2\Delta\varepsilon_{13}^l \quad 2\Delta\varepsilon_{23}^l \right\}$ ;  $\left\{ w \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ w^1 \quad w^2 \quad w^3 \right\}$ ;  $[L]$  – матрица операторов соотношений (13).

### Зависимости напряжений от деформации

Полные напряжения и их приращения в актуальном базисе точки  $M^s$  определяются соотношениями [3; 12]

$$\sigma^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu g^{im} g^{in} \varepsilon_{mn}; \quad \Delta\sigma^{ij} = \lambda I_1(\Delta\varepsilon) g^{ij} + 2\mu g^{im} g^{in} \Delta\varepsilon_{mn}^n, \quad (15)$$

где  $\sigma^{ij}$ ;  $\Delta\sigma^{ij}$  – контравариантные компоненты тензоров напряжений и их приращений;  $\varepsilon_{mn}$ ,  $\Delta\varepsilon_{mn}^n$  – ковариантные компоненты тензоров деформаций и их линейных приращений;  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе;  $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{mn} \bar{g}^{mn}$ ,  $I_1(\Delta\varepsilon) = \Delta\varepsilon_{mn}^n \bar{g}^{mn}$  – первые инварианты тензоров деформаций и их линейных приращений.

Соотношения (15) представляются в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}; \quad \{\Delta\sigma\} = [C]\{\Delta\varepsilon^n\}, \quad (16)$$

$$\text{где } \{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23}\}; \quad \{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{13} 2\varepsilon_{23}\}; \quad \{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma^{11} \Delta\sigma^{22} \Delta\sigma^{33} \Delta\sigma^{12} \Delta\sigma^{13} \Delta\sigma^{23}\}.$$

### Матрица жесткости конечного элемента в форме шестигранника

Узловые координаты шестигранного конечного элемента принимаются в виде матриц-строк:

$$\left\{ \lambda_y \right\}_{1 \times 8}^T = \left\{ \lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l \lambda^m \lambda^n \lambda^p \lambda^h \right\}, \quad (17)$$

где  $\lambda - x, \theta, \zeta$  – координаты узлов конечного элемента в глобальной системе координат;  $i, j, \dots, h$  – узловые точки шестигранника.

Для выполнения численного интегрирования по объему шестигранного конечного элемента он отображается на куб, с локальными координатами, изменяющимися в пределах  $-1 \leq a, b, c \leq 1$  [12]. Координаты внутренней точки шестигранного дискретного элемента определяются через узловые значения на основе трилинейных функций в системе координат куба:

$$\lambda = \left\{ \varphi(a, b, c) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \lambda_y \right\}_{8 \times 1}. \quad (18)$$

Прямые  $(x_{,a}, x_{,b}, x_{,c}, \theta_{,a}, \theta_{,b}, \theta_{,c}, \zeta_{,a}, \zeta_{,b}, \zeta_{,c})$  и обратные  $(a_{,x}, a_{,\theta}, a_{,\zeta}, b_{,x}, b_{,\theta}, b_{,\zeta}, c_{,x}, c_{,\theta}, c_{,\zeta})$  производные координат определяются дифференцированием (18).

Скалярная аппроксимация перемещений. Принятые узловые неизвестные шестигранника в локальной и глобальной системах координат записываются матрицами-строками:

$$\left\{ w_y^{tn} \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ w^{ti} \dots w^{th}; w_{,a}^{ti} \dots w_{,b}^{ti} \dots w_{,c}^{ti} \dots w_{,c}^{th} \right\}; \quad \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ w^{ti} \dots w^{th}; w_{,x}^{ti} \dots w_{,\theta}^{ti} \dots w_{,\zeta}^{ti} \dots w_{,\zeta}^{th} \right\}; \quad t = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Матрицы-столбцы (19) связаны между собой матричной зависимостью

$$\left\{ w_y^{tn} \right\}_{32 \times 1} = [T] \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1}, \quad (20)$$

где матрица  $[T]$  содержит производные глобальных координат  $x^\omega, \theta^\omega, \zeta^\omega$  узловых точек в локальной системе  $a, b, c$  ( $\omega = i, j, k, l, m, n, p, h$ ).

Обычно в МКЭ компоненты вектора  $\bar{w}$  аппроксимируются выражениями

$$w^t = \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ w_y^{tn} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 32}^T [T]_{32 \times 32} \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1}; \quad t = 1, 2, 3, \quad (21)$$

где  $\left\{ \Psi \right\}^T$  – аппроксимирующая матрица с элементами в виде полиномов Эрмита третьей степени;

$$\gamma_\mu = \Psi_\mu;$$

$$\gamma_{8+\mu} = \Psi_{8+\mu} x_{,a}^\omega + \Psi_{16+\mu} x_{,b}^\omega + \Psi_{24+\mu} x_{,c}^\omega;$$

$$\gamma_{16+\mu} = \Psi_{8+\mu} \theta_{,a}^\omega + \Psi_{16+\mu} \theta_{,b}^\omega + \Psi_{24+\mu} \theta_{,c}^\omega;$$

$$\gamma_{24+\mu} = \Psi_{8+\mu} \zeta_{,a}^\omega + \Psi_{16+\mu} \zeta_{,b}^\omega + \Psi_{24+\mu} \zeta_{,c}^\omega;$$

$$\omega = i, j, k, l, m, n, p, h;$$

$$\mu = 1, 2, \dots, 8. \quad (22)$$

После дифференцирования (21) находятся производные компонент вектора перемещения по глобальным координатам  $x, \theta, \zeta$

$$w_{,m}^t = \left\{ \Psi_{,m} \right\}_{1 \times 32}^T [T]_{32 \times 32} \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \gamma_{,m} \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ w_y^{t\Gamma} \right\}_{32 \times 1}. \quad (23)$$

В аппроксимирующих выражениях (21) и (23) отсутствуют параметры используемой для расчета криволинейной системы координат, поэтому каждая определяется через узловые значения только этой же компоненты.

Указанные недостатки аппроксимирующих выражений (21) и (23) приводят в МКЭ к отсутствию возможности учета элемента как твердого тела.

С учетом (21) и (23) соотношения (14) для приращений деформаций представляются в матричном виде

$$\left\{ \Delta \varepsilon^n \right\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \left\{ w \right\}_{3 \times 6} = [L]_{6 \times 3} [A]_{3 \times 96} \left\{ w_y^\Gamma \right\}_{96 \times 1} = [B_1]_{6 \times 96} \left\{ w_y^\Gamma \right\}_{96 \times 1}, \quad (24)$$

где  $\left\{ w_y^\Gamma \right\}^T = \left\{ \left\{ w_y^1 \right\}^T \left\{ w_y^2 \right\}^T \left\{ w_y^3 \right\}^T \right\}$  – строка узловых неизвестных объемного конечного элемента;

$$[A]_{3 \times 96} = \begin{bmatrix} \left\{ \gamma \right\}^T & \left\{ 0 \right\}^T & \left\{ 0 \right\}^T \\ \left\{ 0 \right\}^T & \left\{ \gamma \right\}^T & \left\{ 0 \right\}^T \\ \left\{ 0 \right\}^T & \left\{ 0 \right\}^T & \left\{ \gamma \right\}^T \end{bmatrix}_{1 \times 32}.$$

*Векторная аппроксимация перемещений.* При выполнении расчетов в криволинейных системах координат для получения аппроксимирующих выражений искомых величин вводят в рассмотрение векторные узловые неизвестные конечного элемента в локальной и глобальной системах координат выражениями

$$\left\{ \vec{w}_y^{\Pi} \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ \vec{w}^j \dots \vec{w}^h : \vec{w}_{,a}^i \dots \vec{w}_{,b}^j \dots \vec{w}_{,c}^k \dots \vec{w}_{,c}^h \right\}; \quad \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ \vec{w}^j \dots \vec{w}^h : \vec{w}_{,x}^i \dots \vec{w}_{,\theta}^j \dots \vec{w}_{,\zeta}^k \dots \vec{w}_{,\zeta}^h \right\}. \quad (25)$$

Между матрицами-столбцами (25) выполняется соотношение

$$\left\{ \vec{w}_y^{\Pi} \right\}_{32 \times 1} = [T] \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1}. \quad (26)$$

Традиционная теория аппроксимаций позволяет определить вектор перемещения внутренней точки конечного элемента через узловые векторы (25) выражением

$$\vec{w} = \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ \vec{w}_y^{\Pi} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \Psi \right\}_{1 \times 32}^T [T] \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1} = \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1}. \quad (27)$$

Дифференцированием (27) по криволинейным координатам  $x, \theta, \zeta$  определяются производные векторов перемещений:

$$\vec{w}_{,m} = \left\{ \gamma_{,m} \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1}; \quad m = x, \theta, \zeta. \quad (28)$$

На основании (5), (6) столбец узловых неизвестных  $\left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}$  можно представить матричным выражением

$$\left\{ \vec{w}_y^{\Gamma} \right\}_{32 \times 1} = [\vec{G}] \left\{ \alpha_y \right\}_{96 \times 1} = [\vec{G}] [N] \left\{ w_y^{\Gamma} \right\}_{96 \times 1}, \quad (29)$$

где  $\left\{ \alpha_y \right\}_{96 \times 1}^T = \left\{ w^{1i} w^{2i} w^{3i} \dots w^{1h} w^{2h} w^{3h} : \alpha_1^{1i} \alpha_1^{2i} \alpha_1^{3i} \dots \alpha_2^{1i} \alpha_2^{2i} \alpha_2^{3i} \dots \alpha_3^{1i} \alpha_3^{2i} \alpha_3^{3i} \dots \alpha_3^{1h} \alpha_3^{2h} \alpha_3^{3h} \right\}; \quad (30)$

$[\vec{G}]_{32 \times 96}$  – векторы базисных  $\left\{ \vec{g}_1^{0\omega} \vec{g}_2^{0\omega} \vec{g}_3^{0\omega} \right\}$  узловых точек ( $\omega = 1, 2, \dots, 8$ ).

При координатном преобразовании выражения (29) базисные векторы узловых точек конечного элемента в матрице  $[\vec{G}]$  должны быть выражены через базисные векторы внутренней точки конечного элемента соотношением

$$\left\{ \vec{g}_0^{\omega} \right\} = [s^{\omega}] \left\{ \vec{i} \right\} = [s^{\omega}] [S]^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\} = [z^{\omega}] \left\{ \vec{g}^0 \right\}; \quad \omega = i, j, k, l, m, n, p, h. \quad (31)$$

Используя (31) для замены элементов матрицы  $[\vec{G}]$  в (29) и подставляя (29) в (27) и (28), можно сформировать матричные выражения

$$\bar{w} = \{\bar{g}^0\}^T \left[ \gamma_1 \begin{bmatrix} z^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \dots \gamma_8 \begin{bmatrix} z^h \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \dots \gamma_9 \begin{bmatrix} z^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \dots \gamma_{17} \begin{bmatrix} z^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \dots \gamma_{25} \begin{bmatrix} z^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \dots \gamma_{32} \begin{bmatrix} z^h \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \right] \begin{bmatrix} N \\ 96 \times 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}^0 \\ 1 \times 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H \\ 3 \times 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{w}_{,m} = \begin{bmatrix} \bar{g}^0 \\ 1 \times 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_{,m} \\ 3 \times 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Приравнявая правые части (5), (6) и (32), можно получить аппроксимирующие выражения

$$w^i = \begin{bmatrix} h^i \\ 1 \times 96 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}; \quad \alpha_n^i = \begin{bmatrix} b_n^i \\ 1 \times 96 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}; \quad (i = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3), \quad (33)$$

где матрицы  $\{h^i\}^T$  и  $\{b_n^i\}^T$  являются строками матриц  $[H]$  и  $[H_{,m}]$  соответственно.

Компонентами матрицы  $[z^\omega]^T$  в аппроксимациях (33) учитываются параметры используемой в расчете криволинейной системы координат. Отдельная компонента вектора перемещения зависит от всех компонент векторов перемещений узловых точек их производных, что более адекватно соответствует геометрическому смыслу в криволинейной системе координат.

С учетом (33) компоненты линейного тензора приращений деформаций запишутся матричным выражением

$$\{\Delta \varepsilon^n\} = [L] \{w\} = [L] [H] \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix} = [B_2] \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

*Матрица жесткости конечного элемента на шаге нагружения.* Используется функционал, основанный на равенстве работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения.

$$\Pi = \int_V \{\Delta \sigma\}^T \{\Delta \varepsilon^i\} \partial V + \int_V \{\sigma\} \{\Delta \varepsilon^n\} \partial V - \int_s \{w\}^T \{\Delta q\} ds - \int_s \{w\}^T \{q\} ds + \int_V \{\sigma\}^T \{\Delta \varepsilon^n\} \partial V, \quad (35)$$

где  $q$  и  $\Delta q$  – суммарная и шаговая нагрузка на поверхности  $s$  элемента;  $V$  – объем элемента.

После подстановки аппроксимирующих выражений и минимизации функционала по узловым неизвестным  $\{w_y^\Gamma\}^T$  получается выражение

$$\left\{ \begin{bmatrix} [K] + [K^n] \\ 96 \times 96 \quad 96 \times 96 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w_y^\Gamma \\ 96 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_y \\ 96 \times 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 96 \times 1 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости элемента;  $[K^n]$  – матрица за счет нелинейной части приращений деформаций;  $\{F_y\}$  – вектор узловых нагрузок на шаге нагружения;  $\{R\}$  – невязка на шаге нагружения.

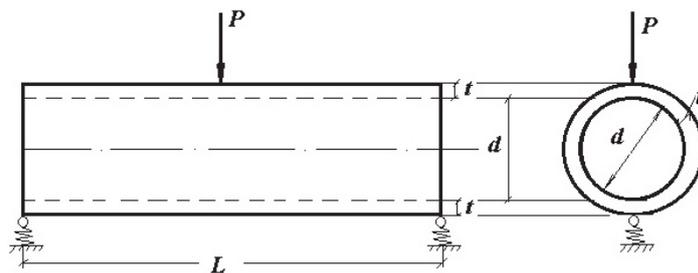
### Результаты и обсуждение

Соотношениями (36) представляются два варианта матрицы жесткости шестигранного конечного элемента в криволинейной системе координат. Первый вариант основан на аппроксимации перемещений, корректной только в декартовой системе координат, когда каждая искомая величина аппроксимируется через узловые значения этой же величины.

Второй вариант основан на математической модели аппроксимации векторных величин, в которой после координатного преобразования получаются аппроксимирующие выражения искомых величин, включающие параметры используемой криволинейной системы координат.

*Пример расчета 1.* Определено напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки диаметром  $d$  и длиной  $L$ , находящейся под действием сосредоточенной силы  $P$  (рис. 1).

Геометрические параметры оболочки приняты следующими:  $L = 0,8$  м;  $d = 0,504$  м;  $t = 0,0254$  м;  $E = 6,9 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu = 0,28$ ;  $P = 6,9$  Н.



**Рис. 1.** Цилиндрическая оболочка на пружинных опорах  
**Figure 1.** Cylindrical shell on spring supports

В качестве опорных устройств в расчете приняты пружины переменной жесткости. В первом варианте расчета считалось, что пружины абсолютно жесткие. Во втором варианте предполагалось, что пружины позволяют смещение всей конструкции на величину  $\Delta$ .

Расчеты выполнялись с использованием разработанного шестигранного конечного элемента на основе двух вариантов аппроксимации искомых величин. В первом варианте использовалась традиционная аппроксимация компонент вектора перемещения (21) и их производных (23).

Во втором варианте расчета применялась разработанная авторами аппроксимация перемещений и их производных (33).

Результаты вариативных расчетов при абсолютной жесткости пружинных опор представлены в таблице в зависимости от густоты сетки дискретизации четвертой части оболочки.

**Результаты вариативных расчетов при абсолютной жесткости пружинных опор**

Густота сетки	Прогиб $w$ , м	
	Вариант расчета 1	Вариант расчета 2
3×3×1	$2,15 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$
4×4×1	$2,18 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$
5×5×1	$2,19 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$
6×6×1	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$

**Results of variable calculations with absolute stiffness of spring supports**

Mesh density	Deflection $w$ , m	
	Calculation option I	Calculation option II
3×3×1	$2.15 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$
4×4×1	$2.18 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
5×5×1	$2.19 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
6×6×1	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$

Табличные результаты свидетельствуют, что значения перемещения точки приложения силы  $P$  совпадают в случае использования каждого из вариантов аппроксимации искомых величин шестигранника. На рис. 2 представлен график изменения окружных нормальных напряжений внутренних волокон точки  $P$  в зависимости от жесткости пружинных опор, позволяющих смещение конструкции на величину  $\Delta$ .

Как видно из графика, смещение цилиндрической оболочки на 0,1 м как твердого тела не приводит к изменению окружных нормальных напряжений (линия II).

Использование аппроксимации искомых величин МКЭ в варианте I приводит к значительным изменениям окружного нормального напряжения (линия I).

Значения нормальных напряжений по варианту II остались неизменными и при  $\Delta = 1$  м, что свидетельствует о решении проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела на основе разработанного варианта II аппроксимации компонент вектора перемещения через узловые значения компонент.

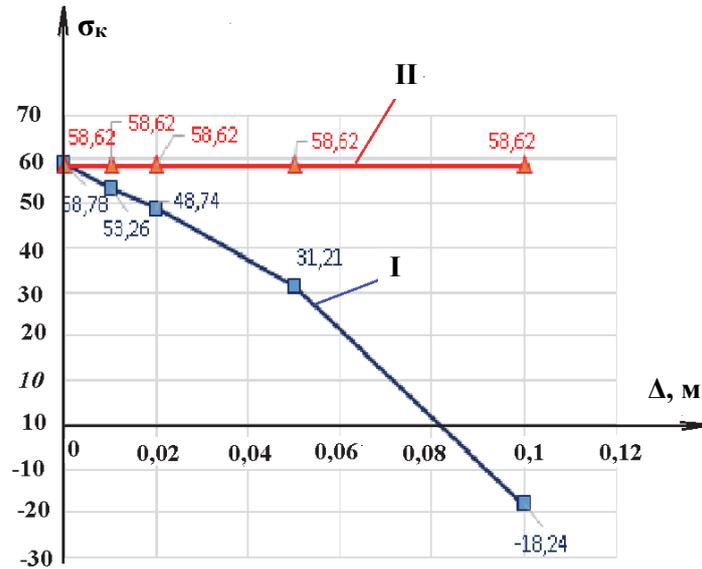


Рис. 2. График изменения окружного нормального напряжения  
Figure 2. Graph of changes in the circumferential normal stress

*Пример расчета 2.* Рассматривалось деформированное состояние цилиндрической панели, защемленной по концам [22] (рис. 3).

В качестве исходных данных приняты следующие величины: толщина поперечного сечения арки –  $t = 0,00476$  м; ширина поперечного сечения арки –  $b = 0,00254$  м; внутренний радиус  $R = 3,381$  м; сектор круговой арки  $\alpha = 0,256$  рад.; модуль упругости материала арки  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,2$ . Нагружение цилиндрической панели осуществлялась сосредоточенной силой  $P$ , прикладываемой в ее вершине.

На графике (рис. 4) приведены значения перемещений точки приложения груза в зависимости от величины силы, где использованы обозначения:  $P$ , кН – значение сосредоточенной силы;  $w_1$ , м – перемещения точки, найденные при использовании скалярной аппроксимации перемещений в дискретном элементе;  $w_2$ , м – численные значения перемещений, найденные на основе аппроксимации перемещений в векторной формулировке;  $w_3$ , м – перемещения, приведенные в [22] на основе итерационной процедуры.

Анализ приведенных на графике численных результатов показывает, что значения перемещений  $w_1$ , полученные на основе использования скалярной аппроксимации, оказались отличающимися от двух других в пределах 8 % при нагрузках меньших 0,1 кН. При большем значении нагрузки в случае скалярного варианта аппроксимации перемещений происходит сбой вычислительного процесса.

Результаты перемещений, полученные на основе аппроксимации искомых величин в векторной формулировке, находятся в хорошем соответствии с результатами [22], что свидетельствует о корректности разработанного алгоритма векторной аппроксимации перемещений.

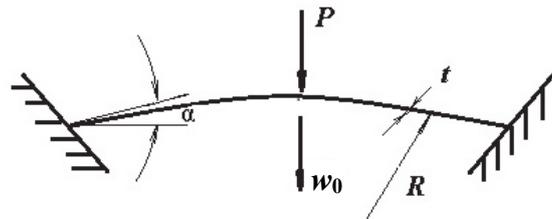


Рис. 3. Расчетная схема цилиндрической панели, защемленной на концах  
Figure 3. Design diagram of a cylindrical panel pinched at the ends

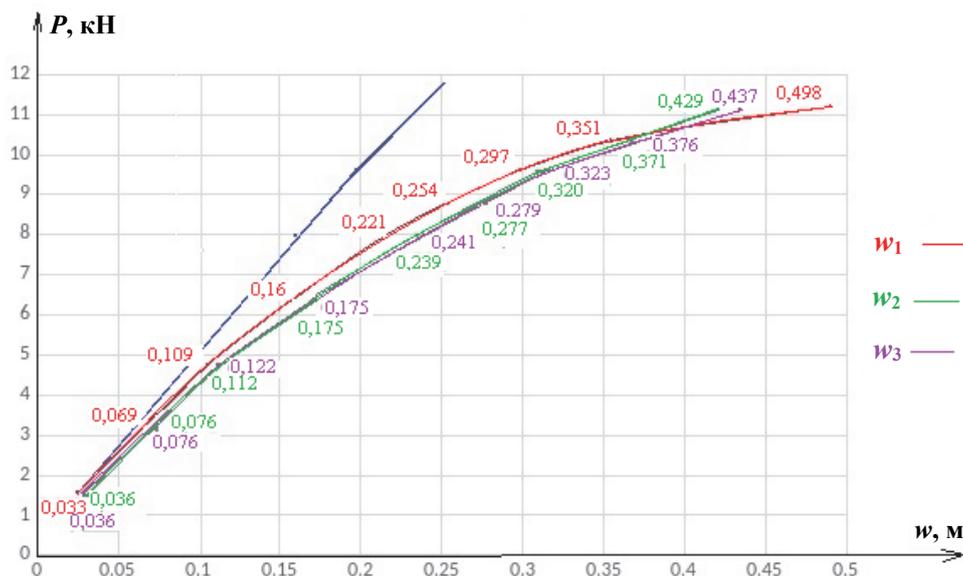


Рис. 4. График значений перемещений  $w$  в точки приложения сосредоточенной силы  $P$   
 Figure 4. Graph of displacement values  $w$  of the point of application of concentrated force  $P$

### Заключение

Векторная аппроксимация искомых величин МКЭ при расчетах в криволинейных системах координат является более корректной, так как позволяет учитывать в аппроксимирующих выражениях параметры используемой криволинейной системы координат. При использовании скалярного варианта аппроксимации искомых величин МКЭ тип криволинейной системы координат во внимание не принимается, что приводит к некорректности аппроксимирующих соотношений.

### Список литературы

1. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. М.: Инфра-Инженерия, 2014. 480 с.
2. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с неоднородным окружающим основанием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 608–616. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. 574 с.
4. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells // The Open Construction and Building Technology Journal. 2016. Vol. 10. Pp. 3–28.
5. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Sugiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 10. No. 5. Article 051012. <https://doi.org/10.1115/1.4028657>
6. Ким А.Ю., Полников С.В. Сравнение экспериментального и численного исследования большепролетного пневматического линзообразного сооружения // Научное обозрение. 2016. № 15. С. 36–41.
7. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 1. С. 36–42.
8. Козлов В.А. Напряженно-деформированное состояние многосвязных призматических конструкций, закрепленных по скошенному сечению // Научный журнал строительства и архитектуры. 2015. № 4 (40). С. 11–17.
9. Киселев А.П., Киселева Р.З., Николаев А.П. Учет смещения как жесткого целого осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 59–64
10. Гуреева Н.А., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Сравнительный анализ конечно-элементных формулировок при плоском нагружении упругого тела // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 139–145. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145>
11. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р., Андреев А.С., Клочков М.Ю. Учет геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчетах тонкостенных конструкций типа оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 31–37. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37>

12. Gureeva N., Kiselev A., Kiseleva R., Nikolaev A. Vector approximation in the roller shells nonlinear calculations on the fem basis // *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 974. Pp. 718–722.
13. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ицанов Т.Р., Андреев А.С. Векторная аппроксимация в МКЭ для оболочки вращения при учете сдвиговых деформаций // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2020. № 4. С. 35–43. <https://doi.org/10.31857/S0235711920040070>
14. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams // *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vol. 578–579. Pp. 858–863. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>
15. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
16. Кантин Л. Смещение криволинейных конечных элементов как жесткого целого // *Ракетная техника и космонавтика*. 1970. Т. 8. С. 84–88.
17. Nguyen N., Waas A.M. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. No. 9 (67). Pp. 351–352. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5>
18. Lei Z., Gillot F., Jezequel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015. Vol. 54. Pp. 105–119.
19. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // *Computational Mechanics*. 2015. Vol. 56. No. 1. Pp. 87–95.
20. Ren H. Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 10. No. 5. Article 051018. <https://doi.org/10.1115/1.4030212>
21. Sartorato M., Medeiros R., Tita V. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation // *Composite Structures*. 2015. Vol. 127. Pp. 185–198. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.03.009>
22. Papenhausen J. Eine energiegrechte, incrementelle Formulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finite Elemente // *Techn.-Wiss. Mitt. Inst. Konstr. Ingenieurlehre Ruhr*. 1975. Vol. 13. Issue III. Pp. 1–133.
23. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шугабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.

## References

1. Petrov V.V. *Nonlinear incremental structural mechanics*. Moscow: Infra-Engineering Publ.; 2014. (In Russ.)
2. Kositsyn S.B., Akulich V.Yu. Numerical analysis of cylindrical shell stability interacting with inhomogeneous soil. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):608–616. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>
3. Sedov L.I. *Continuum mechanics*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)
4. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. Geometry, static, vibration and buckling analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells. *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2016;10:3–28.
5. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Sugiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015;10(5):051012. <https://doi.org/10.1115/1.4028657>
6. Kim A.Yu., Polnikov S.V. Comparing the experimental and computational investigations of longspan air lentiform structure. *Scientific Review*. 2016;(15):36–41. (In Russ.)
7. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. A method of determination of stress-strain state of 3D structures of complex form. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(1):36–42. (In Russ.)
8. Kozlov V.A. Stress and strain of multiply connected prismatic structures, mounted on a skewed cross-section. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2015;(4):11–17. (In Russ.)
9. Kiselev A.P., Kiseleva R.Z., Nikolaev A.P. Accounting for displacement as a rigid whole of an axisymmetrically loaded shell of rotation based on FEM. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(6):59–64. (In Russ.)
10. Gureeva N.A., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Comparative analysis of finite element formulations under plane loading of an elastic body. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):139–145. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-139-145>
11. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ishchanov T.R., Andreev A.S., Klochkov M.Yu. Consideration of geometric nonlinearity in finite element strength calculations of thin-walled shell-type structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):31–37. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37>
12. Gureeva N., Kiselev A., Kiseleva R., Nikolaev A. Vector approximation in the roller shells nonlinear calculations on the fem basis. *Materials Science Forum*. 2019;974:718–722.

13. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ishchanov T.R., Andreev A.S. Vector approximation in the FEM for the shell of rotation taking into account shear deformations. *Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability*. 2020;(4):35–43. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S0235711920040070>
14. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;578–579:858–863. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>
15. Gallager R. *Method of finite elements. Basics*. Moscow: Mir Publ.; 1984. (In Russ.)
16. Kantin L. Displacement of curvilinear finite elements as a rigid whole. *Rocket Technology and Cosmonautics*. 1970;8:84–88. (In Russ.)
17. Nguyen N., Waas A. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016;(9):351–352. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5>
18. Lei Z., Gillot F., Jezequel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015;54:105–119.
19. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Computational Mechanics*. 2015;56(1):87–95.
20. Ren H. Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015;10(5):051018. <https://doi.org/10.1115/1.4030212>
21. Sartorato M., Medeiros R., Tita V. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Composite Structures*. 2015;127:185–198. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.03.009>
22. Papenhausen J. Eine energiegrechte, inkrementelle Formulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finite Elemente. *Techn.-Wiss. Mitt. Inst. Konstr. Ingenieurlehre Ruhr*. 1975;13(III):1–133.
23. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)



DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-242-254  
 УДК 624.012.4

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Сравнительное исследование конечно-элементных методик расчета ребристых железобетонных перекрытий

К.Е. Никитин  , О.А. Кирсанов 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация  
 niksbox@yandex.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 21 марта 2022 г.

Доработана: 14 мая 2022 г.

Принята к публикации: 17 мая 2022 г.

### Для цитирования

Никитин К.Е., Кирсанов О.А. Сравнительное исследование конечно-элементных методик расчета ребристых железобетонных перекрытий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 242–254. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-242-254>

**Аннотация.** Приведены результаты сравнительного исследования нескольких конечно-элементных моделей ребристых монолитных железобетонных перекрытий. На примере монолитного перекрытия с редко проходящими ребрами, расположенными по сетке колонн, анализируются три часто используемые в расчетной практике модели, включающие в себя стержни и тонкостенные элементы. В первой модели плита и ребра рассматриваются по-отдельности, в рамках поэтажной схемы конструкции. Вторая модель содержит связанные друг с другом конечные элементы плиты и стержневые элементы ребер. Третья модель состоит целиком из тонкостенных конечных элементов, моделирующих как плиту, так и ребра перекрытия. Также рассматривается модель перекрытия в постановке задачи в рамках теории упругости. Перекрытие представляется в виде жестко связанных друг с другом массивных тел ребер и плиты. Стержни арматуры внутри бетонного массива включаются в состав модели в виде отдельных объемных тел. Данная модель служит своеобразным эталоном для оценки точности получаемых результатов. Ее расчет выполняется в конечно-элементном комплексе Ansys. Осуществляется сравнение результатов расчетов, выполненных по различным расчетным моделям. Делается заключение о точности получаемых результатов. Существенным отличием предлагаемой работы от аналогичных исследований, посвященных выбору расчетных схем ребристых перекрытий, является учет влияния армирования на работу конструкции.

**Ключевые слова:** железобетонные конструкции, ребристое перекрытие, метод конечных элементов, расчетные схемы

**Никитин Константин Евгеньевич**, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-8003-4299, Scopus ID: 56188773200, ResearcherId: U-2182-2017, eLIBRARY SPIN-код: 1953-1697; niksbox@yandex.ru

**Кирсанов Олег Андреевич**, студент магистратуры, департамент строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-9595-4426; kirsanov.o.a@yandex.ru

© Никитин К.Е., Кирсанов О.А., 2022



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Comparative study of finite element methods of calculation of ribbed reinforced concrete floors

Konstantin E. Nikitin  , Oleg A. Kirsanov 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

 niksbox@yandex.ru

### Article history

Received: March 21, 2022

Revised: May 14, 2022

Accepted: May 17, 2022

**Abstract.** The paper presents the results of a comparative study of several finite element models of ribbed reinforced concrete solid floors. Using the example of a solid slab with infrequent ribs arranged along a grid of columns, three models frequently used in computational practice are analyzed. Those models include both rods and thin-walled elements. In the first model, the plate and its ribs are considered separately, within the framework of the decomposition scheme of the structure. The second model contains plate finite elements and the rod finite elements of the ribs connected to each other. The third model consists entirely of thin-walled finite elements that model both the plate and the floor ribs. The ribbed floor is also considered in the formulation of the problem within the framework of the theory of elasticity. The floor is represented in the form of rigidly connected solid bodies of ribs and plates. Reinforcement rods inside the concrete massive are included in the model as separate solid bodies. This model serves as a benchmark for assessing the accuracy of the obtained results. Its calculation is performed in the FEM application Ansys. The paper compares the results of calculations performed using various models. A conclusion is made about the accuracy of the obtained results. A significant difference between the proposed work and similar studies devoted to the selection of the best design schemes of ribbed slab of floor is the consideration of the influence of reinforcement on the behavior of the structure.

**Keywords:** reinforced concrete structures, ribbed floor, ribbed slab, finite element method, design models

### For citation

Nikitin K.E., Kirsanov O.A. Comparative study of finite element methods of calculation of ribbed reinforced concrete floors. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):242–254. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-242-254>

### Введение

Ребристые монолитные железобетонные перекрытия достаточно широко применяются в строительстве. Однако актуальным вопросом остается выбор подходящей расчетной схемы для определения напряженно-деформированного состояния таких конструкций [1–6]. До сих пор не предложена оптимальная расчетная схема, с одной стороны, обладающая достаточной простотой для проведения инженерного анализа, а с другой стороны, позволяющая с большой точностью отражать особенности работы элементов перекрытия.

Наиболее точно отражающей работу реальной конструкции монолитного ребристого перекрытия, на наш взгляд, является расчетная схема, в которой отдельные элементы ребристого перекрытия – ребра и плита, рассматриваются как объемные тела, жестко сопряженные друг с другом [7–9]. То есть это задача, сформулированная с позиций теории упругости. Решить ее можно численно, например с использованием метода конечных элементов. Однако такая постановка оказывается слишком сложной и неудобной для инженеров-проектировщиков. Результаты, полученные в результате такого расчета, оказываются сложными для анализа. В современных нормах по проектированию железобетонных конструкций отсутствуют указания по проектированию конструкций в такой постановке, что также сдерживает ее применение. Кроме того, существует масса технических вопросов, связанных с построением корректной трехмерной сетки конечных

**Konstantin E. Nikitin**, Candidate of Technical Sciences, Docent of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-8003-4299, Scopus ID: 56188773200, ResearcherId: U-2182-2017, eLIBRARY SPIN-code: 1953-1697; niksbox@yandex.ru

**Oleg A. Kirsanov**, master's degree student, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9595-4426; kirsanov.o.a@yandex.ru

элементов. Использование объемных конечных элементов требует на порядок более мощной компьютерной техники, чем при использовании конечных элементов стержней, пластин и оболочек.

Ввиду этого сегодня при проектировании железобетонных ребристых перекрытий широко используются упрощенные модели, более простые для анализа и имеющие нормативное подкрепление. Однако решение задачи в такой упрощенной постановке дает результаты, имеющие определенную погрешность в сравнении с постановкой в рамках теории упругости. Целью исследования стала попытка оценить эту погрешность.

Рассмотрены три достаточно распространенные упрощенные расчетные схемы (модели) монолитного железобетонного перекрытия, включающие в себя элементы стержней и оболочек (пластин).

Наиболее простая расчетная модель монолитных ребристых перекрытий предполагает разделение элементов перекрытия по «этажам» расчетной схемы. В результате плита перекрытия рассматривается в качестве «верхнего этажа» и рассчитывается как отдельная конструкция. Ребра рассматриваются как «нижний этаж», представляющий собой набор стержневых элементов. При рассмотрении «нижнего этажа» частично учитывается его совместная работа с плитой. Для этого в поперечное сечение ребра включается часть плиты перекрытия. В результате поперечное сечение ребра приобретает форму тавра<sup>1</sup> [9]. Такой расчет вполне может быть выполнен даже без привлечения компьютерной техники.

Другой подход основывается на рассмотрении конструкции ребристого перекрытия как единой системы – в виде набора связанных друг с другом стержневых элементов и элементов плиты [9; 10–12]. Чаще всего расчет по такой расчетной схеме выполняется методом конечных элементов. При этом ребра перекрытия моделируются стержневыми конечными элементами, а плита перекрытия – набором плоских конечных элементов пластин или оболочек [4; 13–15]. При такой постановке задачи неминуемо приходится сталкиваться с проблемой смещения осевых линий ребер относительно срединной плоскости плиты [1–5]. Часто в этой ситуации смещают осевые линии стержневых элементов от срединной плоскости плиты с помощью жестких вставок на концах стержневых элементов либо используют специальные конечные элементы-соединители, моделирующие абсолютно жесткие тела. В некоторых работах [4] предлагают вообще не учитывать данное смещение, ссылаясь на то, что в этом случае такая модель дает более точные результаты.

Для перекрытий с ребрами небольшой ширины иногда применяется конечно-элементная модель, в которой ребра перекрытия вместо стержневых элементов представляются в виде набора плоских конечных элементов оболочек или элементов балок-стенок [16–20]. При этом плита перекрытия также моделируется плоскими конечными элементами пластин или оболочек [21; 22]. Достоинством такой расчетной схемы является возможность избежать необходимости сопряжения ребер с плитой перекрытия с помощью жестких вставок. Кроме того, в такой модели появляется возможность включения в ее состав стержневых элементов, моделирующих продольную арматуру ребер, что позволяет более точно рассматривать работу ребра как железобетонной конструкции.

В описанных выше моделях, при небольшом проценте армирования ребер и плит перекрытия, определение усилий, деформаций в элементах осуществляется в предположении сплошного бетонного сечения, без учета арматуры, что обычно незначительно влияет на получаемые результаты. Для повышения точности расчетов влияние армирования учитывается использованием приведенных жесткостных характеристик элементов перекрытия.

Рассмотрены все вышеописанные модели на примере одной из конструкций монолитного железобетонного ребристого перекрытия. Определено напряженно-деформируемое состояние наиболее напряженных элементов перекрытия – ребер. Сделана оценка результатов расчета путем их сравнения с результатами, полученными для модели с объемными конечными элементами, которые рассматривались в качестве своеобразного эталона.

## Методы

Рассматривалась конструкция ребристого железобетонного перекрытия, имеющая габаритные размеры 6×12 м, плиту толщиной 200 мм и ребра прямоугольного поперечного сечения размерами 300×600 мм (рис. 1). Поскольку исследовалась преимущественно работа элементов перекрытия, для чи-

<sup>1</sup> СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. М.: Стандартинформ, 2018. 118 с.; Монолитное ребро плиты – вариант моделирования стержнем таврового сечения // База данных «Лира-Сервис». URL: [https://rflira.ru/kb/108/990/?sphrase\\_id=3891458](https://rflira.ru/kb/108/990/?sphrase_id=3891458) (дата обращения: 03.02.2022).

стоты численного эксперимента все примыкающие к перекрытию элементы сооружения (включая колонны) были исключены из расчетной схемы. Перекрытие считалось шарнирно опертым в местах пересечения осей (рис. 1). Для обеспечения геометрической неизменяемости в горизонтальном направлении были добавлены четыре связи в горизонтальной плоскости.

Железобетонная плита предполагалась выполненной из бетона класса В20, с армированием (рис. 2) арматурными стержнями  $\varnothing 12$  класса А500С с шагом 200 мм в верхней и нижней зонах, одинаково в двух направлениях. Армирование плиты перекрытия принято равномерным, без дополнительных стержней вблизи ребер. Ребра перекрытия из бетона В20 также принимались равномерно армированными по всей длине. В продольном направлении армирование выполнено четырьмя стержнями  $\varnothing 20$  А500С в верхней и четырьмя стержнями  $\varnothing 20$  А500С в нижней зонах.

Нагрузка на перекрытие считалась равномерно распределенной по верхней поверхности плиты перекрытия и равной  $654 \text{ кг/м}^2$ . К этой нагрузке прибавлялся собственный вес элементов перекрытия, который для всех моделей, кроме первой, вычислялся и распределялся по конечным элементам конечно-элементной программой автоматически.

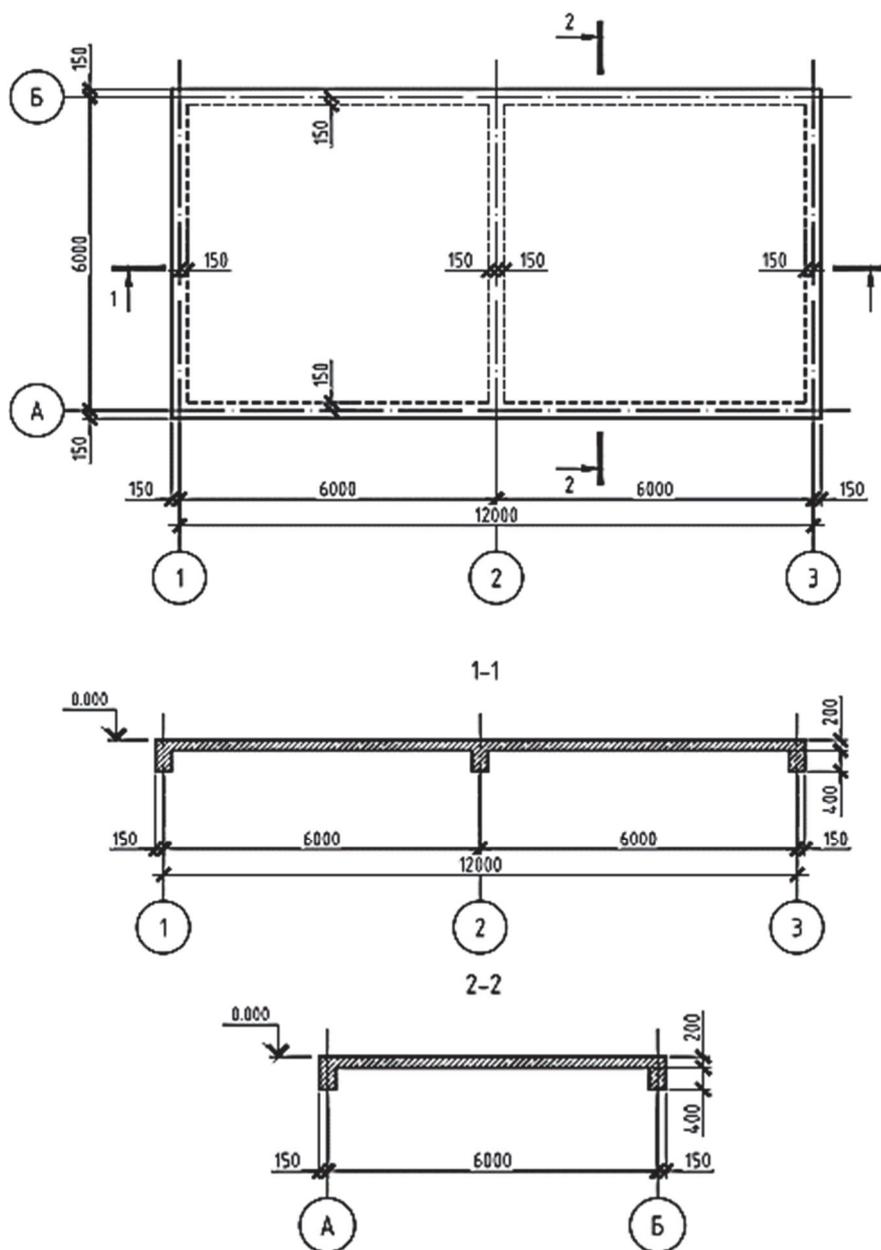
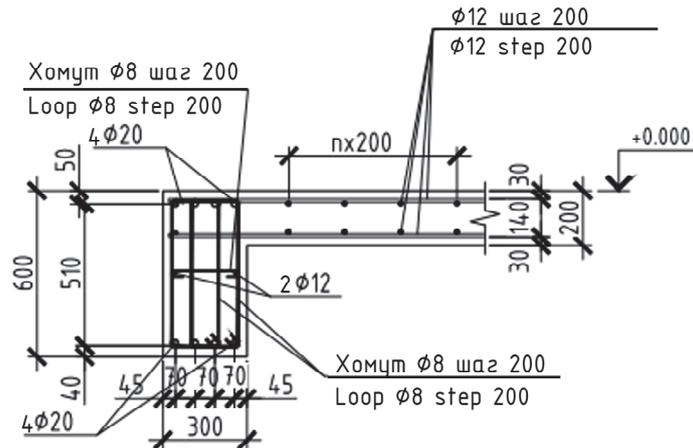


Рис. 1. Геометрические параметры исследуемой конструкции  
 Figure. 1. Geometric parameters of the structure under consideration

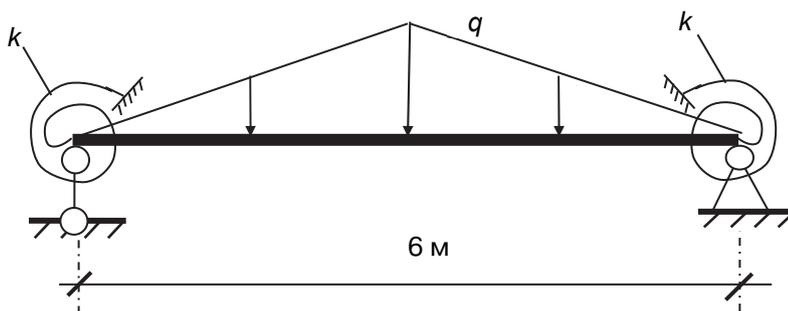
Для данной конструкции перекрытия был выполнен расчет с использованием следующих четырех моделей.



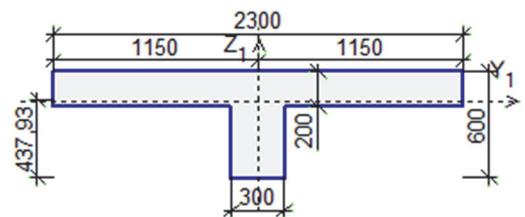
**Рис. 2.** Схема армирования ребра перекрытия  
**Figure 2.** The rib reinforcement schematic diagram of the floor

Первая рассмотренная модель (рис. 3) – это наиболее простая модель перекрытия, с разделением элементов перекрытия по «этажам» расчетной схемы. Рассматривался только «нижний этаж», в состав которого входят только ребра. При этом учитывалась совместная работа плиты с ребром. Поперечное сечение стержня принималось в форме тавра (рис. 4). Размеры полки тавра определялись согласно требованиям норм<sup>2</sup>. Равномерно распределенная нагрузка, действующая по площади плиты, приводилась к распределенной по длине стержня нагрузкой, собранной согласно грузовой площади ребра. График изменения интенсивности нагрузки по длине ребра имеет трапециевидную форму или треугольную форму с максимумом в середине пролета. По краям стержень ребра считался закрепленным упругоподатливо в отношении поворота.

Введение упругоподатливого закрепления в отношении поворота позволило учесть влияние жесткости примыкающих в перпендикулярном направлении ребер на работу рассматриваемого ребра. Жесткость упругоподатливого закрепления  $k$  в отношении поворота для первой модели определялась как удвоенная жесткость на кручение примыкающих в перпендикулярном направлении ребер.



**Рис 3.** Модель среднего ребра перекрытия  
**Figure 3.** The model of the middle rib of the floor

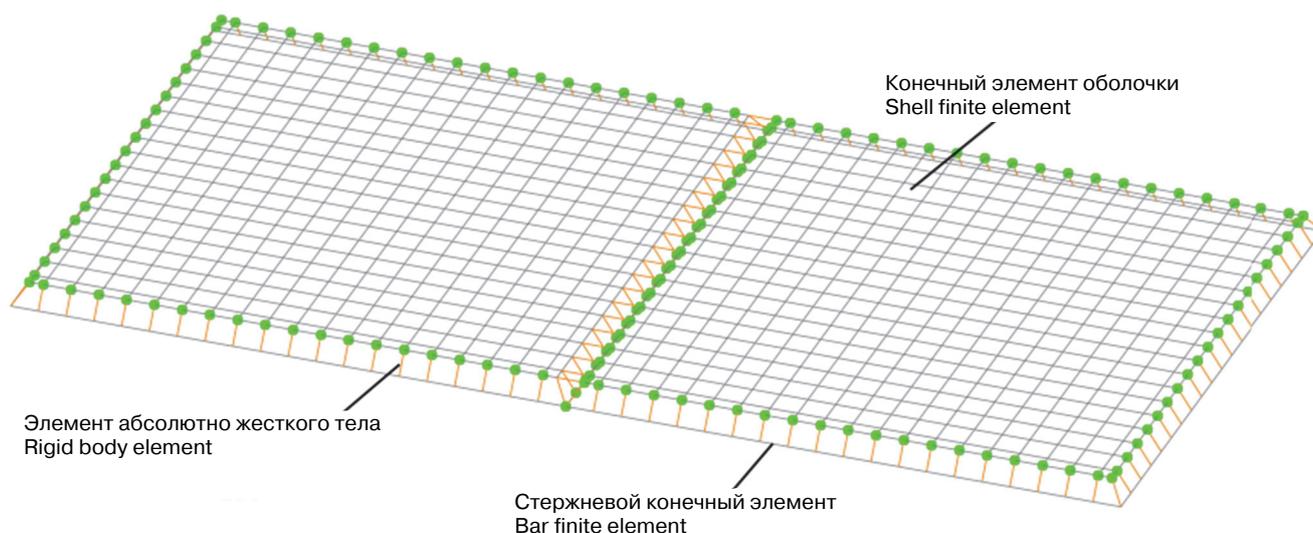


**Рис 4.** Поперечное сечение ребра в первой модели  
**Figure 4.** The cross section of the rib in the first model

Вторая рассмотренная модель перекрытия (рис. 5) – это модель, в которой ребра являются стержневыми элементами, а плита представляет собой набор плоских тонкостенных конечных элементов. Элементы связаны друг с другом жестко, посредством специальных элементов абсолютно жестких тел. При этом граница элементов плиты перекрытия в местах их сопряжения с ребрами была ограничена бо-

<sup>2</sup> СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. М.: Стандартинформ, 2018. 118 с.

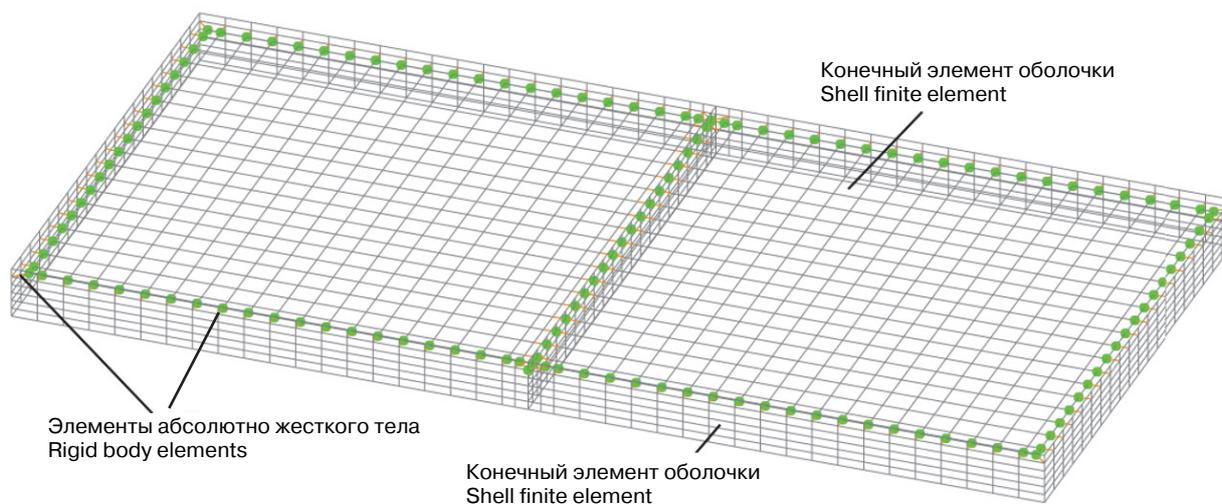
ковой поверхностью ребер, что исключало пересечения их объемов при расчете собственного веса этих элементов программой.



**Рис 5.** Конечно-элементная модель перекрытия № 2  
**Figure 5.** The second finite element model of the floor

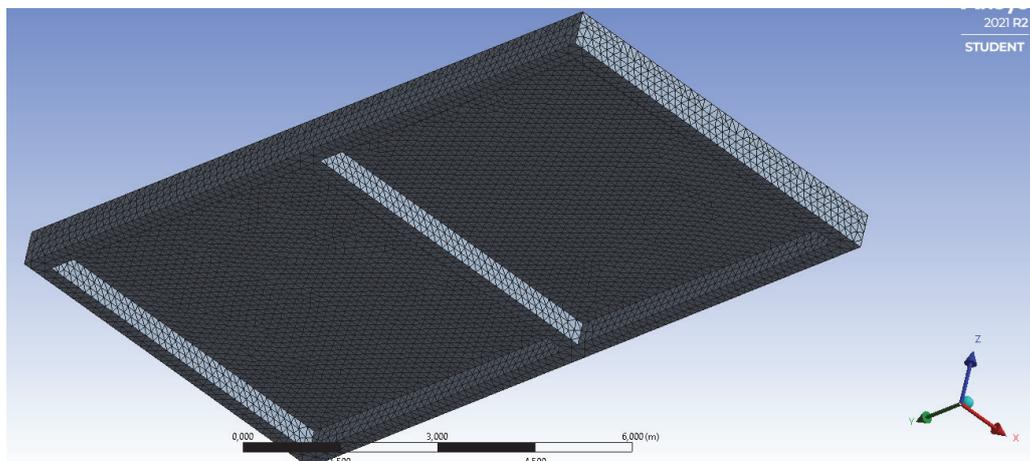
Жесткостные характеристики поперечных сечений для стержневых элементов вычислялись приведенными, с учетом жесткости продольных арматурных стержней, попадающих в сечение. Для тонкостенных элементов плиты перекрытия вычислялась ее приведенная толщина. В обоих случаях приведение осуществлялось к эквивалентному бетонному сечению.

Третья модель перекрытия (рис. 6) – модель, в которой как ребра, так и плита представлены набором плоских тонкостенных элементов, жестко соединенных друг с другом. Для моделирования плиты и ребер использовались плоские элементы оболочки. Сопряжение элементов ребер с элементами плиты осуществлялось посредством элементов абсолютно жестких тел для исключения пересечения их объемов при расчете собственного веса программой. Работа арматуры в ребрах учитывалась введением стержневых конечных элементов, идущих вдоль ребер в тех уровнях по высоте, в которых проходит верхняя и нижняя продольная арматура. Сопряжение этих элементов с тонкостенными элементами ребер осуществлялась в общих узлах по всей длине стержней. Площадь поперечного сечения стержней принималась равной суммарной площади арматурных стержней верхней или нижней арматуры.



**Рис 6.** Третья конечно-элементная модель перекрытия  
**Figure 6.** The third finite element model of the floor

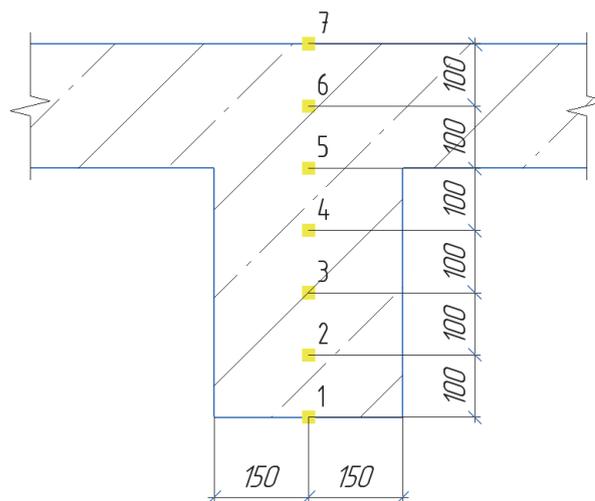
Последняя модель (рис. 7, 8) – модель перекрытия в виде массивного тела, представленного в виде набора объемных конечных элементов. Здесь арматурные стержни, так же как и бетон, моделировались объемными конечными элементами. Нагрузка прикладывалась к верхней наружной поверхности объемных конечных элементов плиты перекрытия.



**Рис. 7.** Четвертая конечно-элементная модель перекрытия: общий вид  
**Figure 7.** The fourth finite element model of the floor: general view



**Рис. 8.** Сетка конечных элементов в поперечном сечении армированного ребра перекрытия  
**Figure 8.** Mesh of finite elements in the cross section of the reinforced rib



**Рис. 9.** Исследуемые точки ребра перекрытия  
**Figure 9.** The studied points of the rib of the floor

Первые три модели перекрытия были реализованы в конечно-элементном комплексе SCAD, последняя – в ANSYS. Расчет во всех случаях производился в линейной постановке.

Для возможности сравнения результатов расчетов, выполненных для различных моделей, определялись значения продольных относительных деформаций в нескольких точках по высоте поперечного сечения, расположенного ровно посередине пролета среднего ребра перекрытия (рис. 9).

Определение продольных деформаций для моделей № 1 и 2 производилось в следующей последовательности. Сначала по значениям внутренних усилий в стержне, моделирующем ребро, по известным из курса сопротивления материалов формулам вычислялись значения напряжений в вышеуказанных точках. Затем с помощью закона Гука в них определялись значения продольных деформаций.

В моделях № 3 и 4 продольные напряжения и деформации рассчитывались непосредственно конечно-элементным комплексом. Влиянием напряжений, действующих в других направлениях, пренебрегали ввиду их малости.

## Результаты и обсуждение

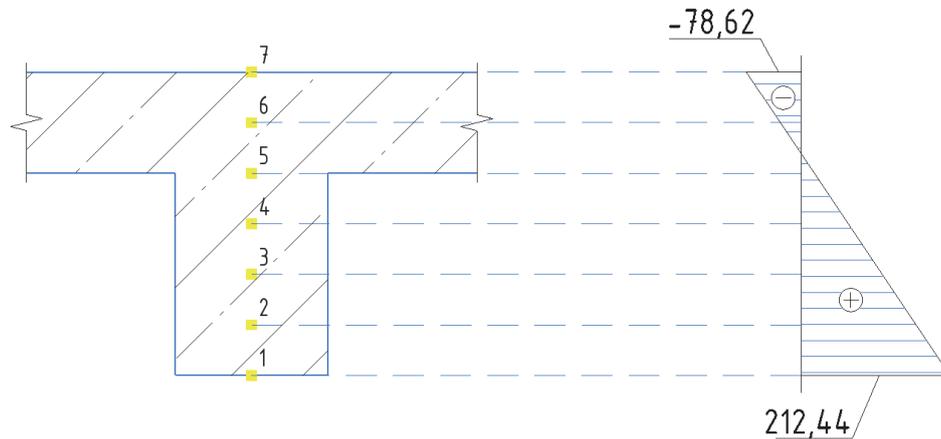
Результаты вычислений продольных относительных деформаций для модели № 1 показаны на рис. 10. Результаты получены для расчетной схемы с упругоподатливым закреплением опор в отношении поворота. Их жесткость была принята равной жесткости на кручение ребер, примыкающих к рассматриваемому ребру в перпендикулярном к нему направлении.

Также был рассмотрен вариант расчетной схемы, в которой жесткость упругоподатливых опор принималась несколько большей за счет того, что при расчете крутильной жесткости ребер, примыкающих к рассматриваемому ребру, в состав их поперечного сечения включалась часть плиты – наподобие того, как это было сделано для рассматриваемого ребра (рис. 4). Форма поперечного сечения данных ребер принималась Г-образной, поскольку эти ребра проходили по краю перекрытия. Различие в значениях деформаций для этого случая практически не отличалось от показанных на рис. 10. Разница составила не более 3 %.

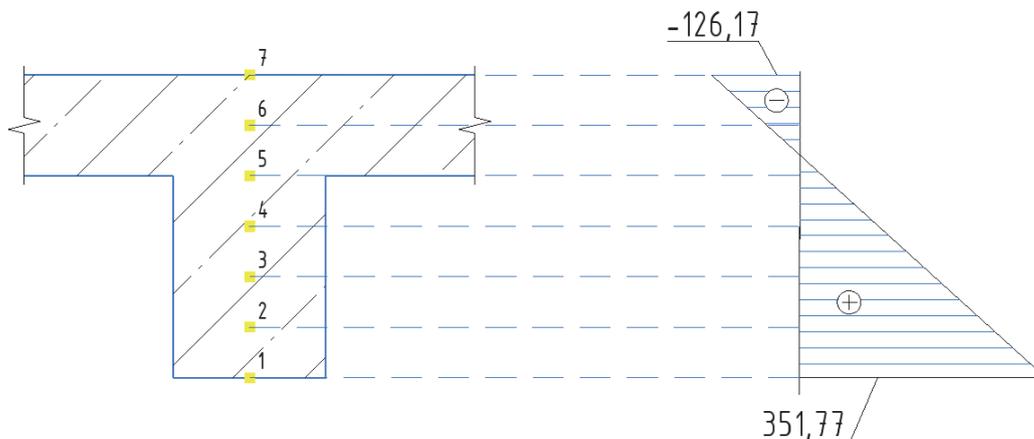
Еще один рассмотренный вариант модели № 1 – с нулевой жесткостью упругоподатливых закреплений, что соответствует обычному шарнирному закреплению. В этом случае разница в значениях деформаций в сравнении с результатами на рис. 10 также оказалась небольшой – не более 2 %.

Это позволяет сделать вывод о том, что в случае рассматриваемой конструкции перекрытия можно пренебречь влиянием крутильной жесткости примыкающих в перпендикулярном направлении ребер и с достаточной точностью определять напряженно-деформированное состояние ребер по расчетной схеме простой балки на шарнирных опорах.

Результаты определения значений продольных относительных деформаций по высоте поперечного сечения ребра для модели № 2 показаны на рис. 11.



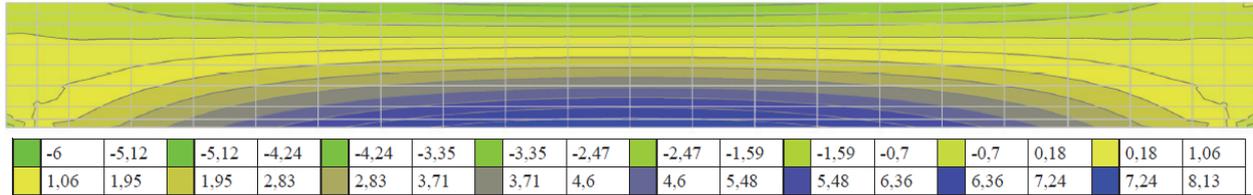
**Рис. 10.** Распределение продольных деформаций  $\epsilon$ ,  $10^{-6}$  по высоте поперечного сечения ребра для модели № 1  
**Figure 10.** Longitudinal strain  $\epsilon$ ,  $10^{-6}$  distribution along the height of the rib cross section for the first model



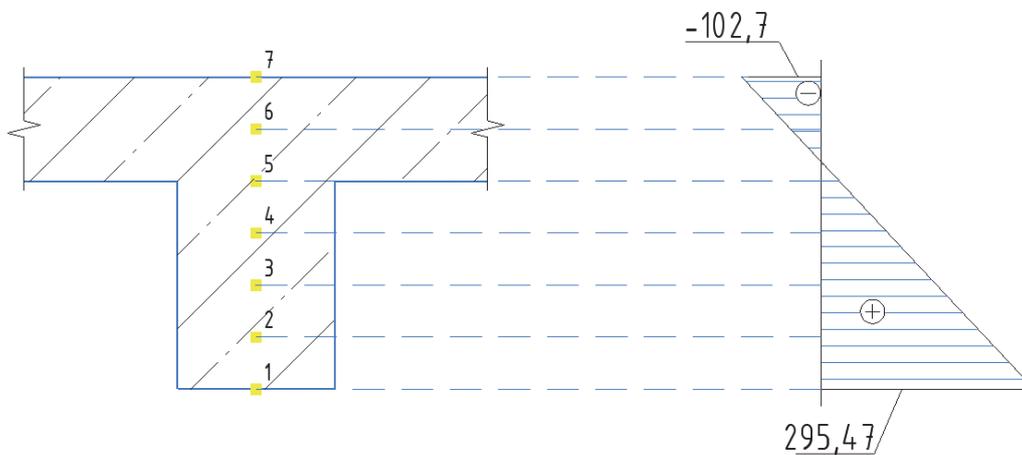
**Рис. 11.** Распределение продольных деформаций  $\epsilon$ ,  $10^{-6}$  по высоте поперечного сечения ребра для модели № 2  
**Figure 11.** Longitudinal strain  $\epsilon$ ,  $10^{-6}$  distribution along the height of the cross-section for the second model

Результаты определения напряжений по длине рассматриваемого ребра по модели № 3 показаны в виде изополей на рис. 12. Распределение продольных относительных деформаций по высоте сечения в середине пролета представлены на рис. 13.

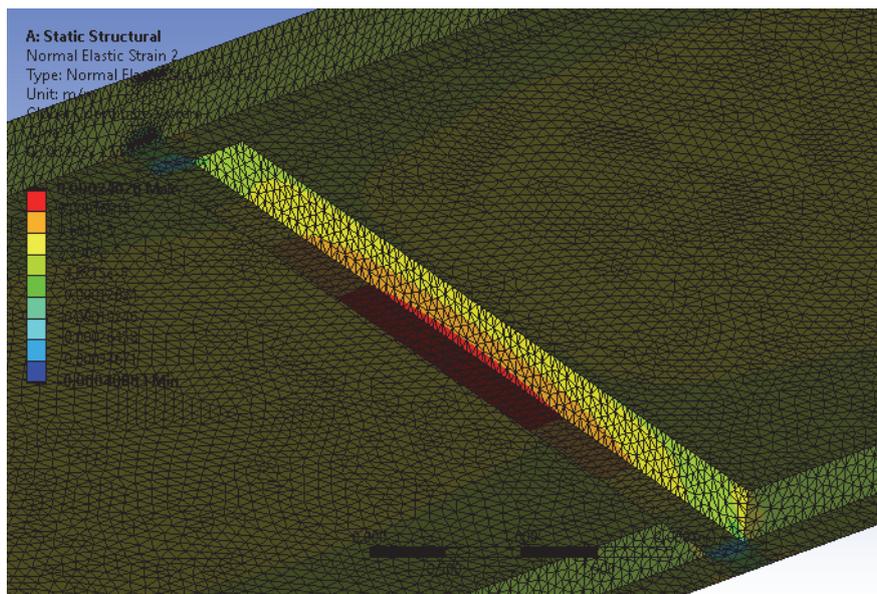
Распределение деформаций для модели из объемных конечных элементов (модель № 4) показано на рис. 14 и 15. Как видно по графику распределения значений по высоте поперечного сечения ребра (рис. 15), деформации по высоте меняются по закону очень близкому к линейному.



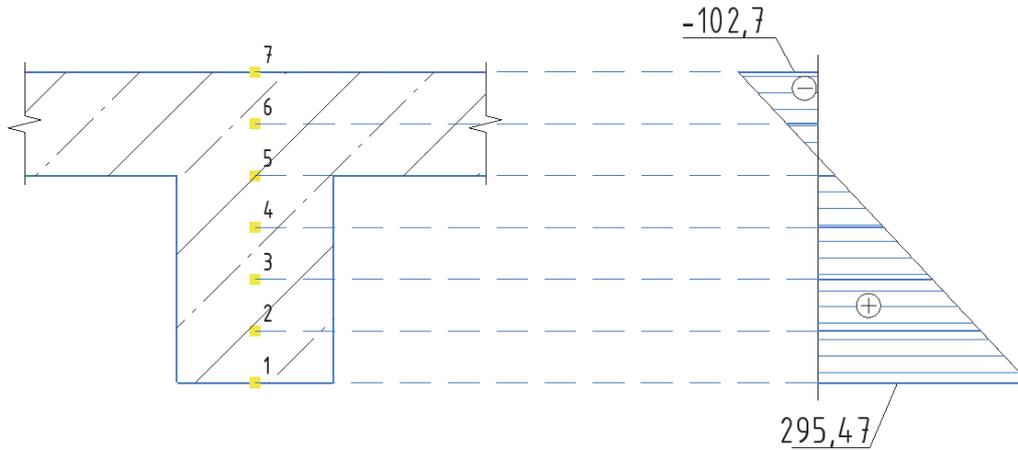
**Рис. 12.** Значения нормальных напряжений в центральной балке  $\sigma$ , МПа (вид сбоку)  
**Figure 12.** Values of normal stresses in the central beam  $\sigma$ , MPa (side view)



**Рис. 13.** Распределение продольных деформаций  $\epsilon$ ,  $10^{-6}$  по высоте поперечного сечения ребра для модели № 3  
**Figure 13.** Longitudinal strain  $\epsilon$ ,  $10^{-6}$  distribution along the height of the cross-section for the third model



**Рис. 14.** Относительная продольная деформация  $\epsilon$  по результатам расчета модели № 4  
**Figure 14.** Relative longitudinal strain  $\epsilon$  according to the results of the calculation of the fourth model



**Рис. 15.** Распределение продольных деформаций  $\varepsilon$ ,  $10^{-6}$  по высоте поперечного сечения ребра для модели № 4  
**Figure 15.** Longitudinal strain  $\varepsilon$ ,  $10^{-6}$  distribution along the height of the cross-section for the fourth model

Для удобства сравнения результатов расчета деформаций, полученных по различным моделям перекрытия, все они сведены в таблицу.

**Значения деформаций, полученных по различным моделям перекрытия**

Номер точки	Относительная продольная деформация $\varepsilon$ , $10^{-6}$			
	Модель № 1	Модель № 2	Модель № 3	Модель № 4
1	212,44	351,77	295,47	204,45
2	163,93	272,11	227,61	156,27
3	115,43	192,45	159,38	111,10
4	66,91	112,80	94,01	66,20
5	18,40	33,14	29,06	20,86
6	-30,11	-46,52	-33,32	-24,81
7	-78,62	-126,17	-102,70	-71,97

**Values of strains obtained for different floor models**

Point number	Relative longitudinal strain $\varepsilon$ , $10^{-6}$			
	First model	Second model	Third model	Fourth model
1	212.44	351.77	295.47	204.45
2	163.93	272.11	227.61	156.27
3	115.43	192.45	159.38	111.10
4	66.91	112.80	94.01	66.20
5	18.40	33.14	29.06	20.86
6	-30.11	-46.52	-33.32	-24.81
7	-78.62	-126.17	-102.70	-71.97

Из таблицы следует, что наименьшие значения деформаций наблюдаются при использовании модели № 4, созданной в конечно-элементной программе ANSYS. Значение деформаций в этом случае в растянутой зоне составляет  $204,45 \cdot 10^{-6}$ , а наибольшие значения деформаций – в модели № 2, где деформации в этой же точке составляют  $351,77 \cdot 10^{-6}$ . Разница в значениях достигает 42 %. Аналогичная ситуация наблюдается в сжатой зоне ребра.

Значения деформаций, полученные по другим упрощенным расчетным моделям (№ 1 и 3), также показывают отличия от результатов эталонной модели № 4. Но здесь разница в значениях меньше. Так, в модели № 3 разница составляет 31 %. В модели № 1 – всего 4 %.

Следует отметить, что во всех упрощенных схемах (модели № 1–3) полученные значения деформаций больше значений, полученных для эталонной модели. Учитывая, что в рассматриваемых моделях напряжения связаны с деформациями линейным законом, можно утверждать, что во всех этих моделях отклонение результатов расчета идет в запас прочности. Следовательно, все модели в итоге дают возможность спроектировать конструкции перекрытия, обладающие достаточной прочностью. Но наиболее экономичный результат дает модель № 1, поскольку для нее наблюдается наименьший запас при отклонении значений от эталонных.

### Заключение

Результаты, полученные для различных моделей ребристого железобетонного перекрытия, показывают хорошее качественное совпадение в распределении деформаций и напряжений. Однако количественное различие в результатах может составлять более 40 %.

Если предположить, что наиболее точные значения деформаций дает модель, основанная на представлении перекрытия в виде массивного тела (эталонная модель), все остальные, более простые модели дают большие значения деформаций (а значит, и напряжений), что идет в запас прочности. Это подтверждает надежность данных моделей, хотя их применение на практике и дает менее экономичные проектные решения, чем более точная модель.

Наиболее близкие к эталонным результаты дает модель, в которой ребра перекрытия представлены в виде отделенных от перекрытия стержней таврового поперечного сечения. Данная модель, несмотря на свою простоту, вызывает некоторые сложности с реализацией современной концепции расчетов в конечно-элементных комплексах, подразумевающей создание единой модели, включающей в себя все основные несущие элементы сооружения. Дело в том, что эта модель перекрытия подразумевает разделение его на «этажи» расчетной схемы, отделение ребер от плиты перекрытия и рассмотрение их по-отдельности. Другие же модели, включающие в себя все элементы перекрытия, показывают заметное отклонение результатов расчета от эталонной.

На основании сказанного можно сделать вывод, что вопрос построения простых, удобных и одновременно более точных моделей ребристых железобетонных перекрытий, ориентированных на использование конечно-элементных комплексов, по-прежнему остается открытым и требует проведения дальнейших исследований.

### Список литературы

1. *Городецкий А.С., Евзеров И.Д.* Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт, 2005. 344 с.
2. *Городецкий А.С., Батрак Л.Г., Городецкий Д.А., Лазнюк М.В., Юсипенков С.В.* Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона (проблемы, опыт, возможные решения и рекомендации, компьютерные модели, информационные технологии). Киев: Факт, 2004. 106 с.
3. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. 600 с.
4. *Маркович А.С.* Практическая реализация математической (компьютерной) модели многоребристого перекрытия // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2016. № 2. С. 39–44.
5. *Скорук Л.* Поиск эффективных расчетных моделей ребристых железобетонных плит и перекрытий // *CADmaster*. 2004. № 3 (23). С. 78–83.
6. *Мастаченко В.Н.* Об оценке адекватности расчетных и реальных моделей строительных конструкций // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1971. № 4. С. 3–7.
7. *Wang Y., Liu H., Dou G., Xi C., Qian L.* Finite element simulation of concrete ribbed slabs: a comparative analysis between steel fiber reinforced and ordinary concrete // *International Journal of Simulation Systems, Science & Technology*. 2016. Vol. 17. Issue 45. Pp. 1–22. <https://doi.org/10.5013/IJSSST.a.17.45.22>
8. *Соколов М.М., Волкова И.В., Мных С.В., Егармин К.А.* Исследование работы железобетонной балки с применением программной системы ABAQUS // *Universum: технические науки*. 2017. № 2 (35). С. 27–36.
9. *Czumaj P., Dudziak S., Kacprzyk Z.* Computational models of reinforced concrete ribbed floor // *MATEC Web of Conferences*. EDP Sciences. 2018. Vol. 196. Article 01051. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201819601051>
10. *Zheng R.* Technical economic analysis of application of multi-ribbed floor structure in basement engineering // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 744–746. Pp. 1601–1607. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.744-746.1601>

11. Hamid M. Optimization of reinforced concrete floor systems // 1st International Conference on Recent Advances in Civil and Earthquake Engineering (ICCEE-2021). Babylon, 2021. Pp. 358–360.
12. Goutham D.R., Manjunath K. Reliability analysis of grid floor slabs // International Research Journal of Engineering and Technology. 2016. Vol. 3. Issue 6. Pp. 1876–1880.
13. Bhaduria S.S., Chhugani N. Comparative analysis and design of flat and grid slab system with conventional slab system // International Research Journal of Engineering and Technology. 2017. Vol. 4. Pp. 2314–2329.
14. Halpern A.B., Billington D.P., Adriaenssens S. The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi // Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium 2013, 23–27 September, Wrocław University of Technology, Poland. Wrocław, 2013. Pp. 1–7.
15. Stupishin L.Yu., Moshkevich M.L. Limit states design theory based on critical energy levels criterion in force method form // Magazine of Civil Engineering. 2022. Vol. 111. Issue 3. Article 11101. <https://doi.org/10.34910/MCE.111.1>
16. Sacramento P.V.P., Picanço M.S., Oliveira D.R.C. Reinforced concrete ribbed slabs with wide-beam // Revista IBRACON de Estruturas e Materiais. 2018. Vol. 11. Pp. 966–996.
17. Pinto V., Cunha M., Martins K., Rocha L., Dos Santos E., Isoldi L. Bending of stiffened plates considering different stiffeners orientations // Magazine of Civil Engineering. 2021. Issue 3 (103). Article 10310. <https://doi.org/10.34910/MCE.103.10>
18. Мозголов М.В., Козлова Е.В. К вопросу создания верификационной модели для расчета кессонного железобетонного перекрытия в вычислительном комплексе SCAD // Вестник НИЦ «Строительство». 2022. № 32 (1). С. 128–140.
19. Мозголов М.В., Туранова А.В. Об эффективности косых кессонных железобетонных перекрытий // Градостроительство и архитектура. 2021. Т. 11. № 3. С. 20–25.
20. Nikitin K.E., Zhukov D.I., Moskovtseva V.S. Study of bonding zone composite reinforced structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 962. No. 2. Article 022065.
21. Никитин К.Е., Савин С.Ю., Жуков Д.И. Исследование напряженно-деформированного состояния зоны контакта составных бетонных и железобетонных конструкций // Строительство и реконструкция. 2019. № 6. С. 29–36.
22. Шейн А.И., Снежкина О.В., Ладин Р.А., Киселев А.А. Численные исследования работы железобетонных балок // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 4. С. 146–152.

## References

1. Gorodetsky A.S., Evzerov I.D. *Computer models of structures*. Kiev: Fakt Publ.; 2005. (In Russ.)
2. Gorodetsky A.S., Batrak L.G., Gorodetsky D.A., Laznyuk M.V., Yusipenkov S.V. *Calculation and design of structures of high-rise buildings made of monolithic reinforced concrete (problems, experience, possible solutions and recommendations, computer models, information technologies)*. Kiev: Fakt Publ.; 2004. (In Russ.)
3. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Design models of structures and the possibility of their analysis*. Kiev: Stal Publ.; 2002. (In Russ.)
4. Markovich A.S. The practical realization of a mathematical (computerized) model of a concrete ribbed slab. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(2):39–44. (In Russ.)
5. Skoruk L. Search for effective calculation models of ribbed reinforced concrete slabs and flats. *CADmaster*. 2004;(3):78–83.
6. Mastachenko V.N. On the assessment of the validity of calculated and real models of building structures. *Structural Mechanics and Calculation of Structures*. 1971;(4):3–7. (In Russ.)
7. Wang Y., Liu H., Dou G., Xi C., Qian L. Finite element simulation of concrete ribbed slabs: a comparative analysis between steel fiber reinforced and ordinary concrete. *International Journal of Simulation Systems, Science & Technology*. 2016;17(45):1–22. <https://doi.org/10.5013/IJSSST.a.17.45.22>
8. Sokolov M.M., Volkova I.V., Mnyh S.V., Egarmin K.A. Investigation of the operation of a reinforced concrete beam using the ABAQUS software system. *Universum: Technical Sciences*. 2017;(2):27–36. (In Russ.)
9. Czumaj P., Dudziak S., Kacprzyk Z. Computational models of reinforced concrete ribbed floor. *MATEC Web of Conferences. EDP Sciences*. 2018;196:01051. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201819601051>
10. Zheng R. Technical Economic analysis of application of multi-ribbed floor structure in basement engineering. *Applied Mechanics and Materials*. 2015;744–746:1601–1607. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.744-746.1601>
11. Hamid M. Optimization of reinforced concrete floor systems. *1st International Conference on Recent Advances in Civil and Earthquake Engineering (ICCEE-2021)*. Babylon; 2021. p. 358–360.
12. Goutham D.R., Manjunath K. Reliability analysis of grid floor slabs. *International Research Journal of Engineering and Technology*. 2016;3(6):1876–1880.

13. Bhaduria S.S., Chhugani N. Comparative analysis and design of flat and grid slab system with conventional slab system. *International Research Journal of Engineering and Technology*. 2017;4:2314–2329.
14. Halpern A.B., Billington D.P., Adriaenssens S. The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium 2013, 23–27 September, Wrocław University of Technology, Poland*. Wrocław; 2013. p. 1–7.
15. Stupishin L.Yu., Moshkevich, M.L. Limit states design theory based on critical energy levels criterion in force method form. *Magazine of Civil Engineering*. 2022;111(3):11101. <https://doi.org/10.34910/MCE.111.1>
16. Sacramento P.V.P., Picanço M.S., Oliveira D.R.C. Reinforced concrete ribbed slabs with wide-beam. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*. 2018;11:966–996.
17. Pinto V., Cunha M., Martins K., Rocha L., Dos Santos E., Isoldi L. Bending of stiffened plates considering different stiffeners orientations. *Magazine of Civil Engineering*. 2021;(3):10310. <https://doi.org/10.34910/MCE.103.10>
18. Mozgolov M.V., Kozlova E.V. On the issue of creating a verification model for the calculation of a caisson reinforced concrete floor in a computational complex SCAD. *Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2022;32(1):128–140. (In Russ.)
19. Mozgolov M.V., Turanova A.V. On the effectiveness of oblique caisson reinforced concrete floors. *Urban Construction and Architecture*. 2021;11(3):20–25. (In Russ.)
20. Nikitin K.E., Zhukov D.I., Moskovtseva V.S. Study of bonding zone composite reinforced structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020; 962(2):022065.
21. Nikitin K.E., Savin S.Yu., Zhukov D.I. Numerical stress-strain state investigation of the contact zone of composite elements made of reinforced concrete. *Building and Reconstruction*. 2019;(6):29–36. (In Russ.)
22. Shein A.I., Snezhkina O.V., Ladin R.A., Kiselev A.A. Numerical studies of the work of reinforced concrete beams. *Modern Problems of Science and Education*. 2014;(4):146–152. (In Russ.)



## ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-255-268  
 УДК 624:72:725:725.4

НАУЧНЫЙ ОБЗОР / REVIEW

### К вопросу об основных архитектурных стилях, направлениях и стилевых течениях для оболочек и оболочечных структур

С.Н. Кривошапко

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ sn\_krivoshapko@mail.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 14 марта 2022 г.

Доработана: 22 мая 2022 г.

Принята к публикации: 2 июня 2022 г.

**Аннотация.** В настоящее время отсутствуют исследования по классификации архитектурных стилей для оболочек и оболочечных структур. Имеется только одна работа, где перечисляются архитектурные стили с указанием дат их возникновения и затухания использования, а также имен основателей. Сейчас увеличивается интерес к проектированию, расчету и строительству тонкостенных оболочек и оболочечных структур. В мире нет стран, где в XXI в. не было построено ни одной оболочечной структуры. В связи с этим требуется уточнить классификацию этих сооружений и распределение их по группам. Цель работы – сбор информации обо всех известных архитектурных стилях применительно к оболочкам и оболочечным структурам и группировка их по характерным чертам и признакам. Все архитектурные стили распределены по пяти группам: авангард, ар-деко, модернизм, эоархитектура и новейшие стили. Приведена схема, показывающая распределение архитектурных стилей по этим группам применительно к рассматриваемым сооружениям. Выявлено взаимовлияние стилей и показано наличие у некоторых из них архитектурных направлений и стилевых течений. Представленные выводы могут потребовать дальнейших уточнений и развития, так как среди специалистов нет единого взгляда на перечень архитектурных стилей и их классификации.

**Ключевые слова:** архитектурный стиль, оболочка, ар-деко, модернизм, эоархитектура

#### Для цитирования

Кривошапко С.Н. К вопросу об основных архитектурных стилях, направлениях и стилевых течениях для оболочек и оболочечных структур // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 255–268. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-255-268>

## On the basic architectural styles, directions, and style flows for shells and shell structures

Sergey N. Krivoshapko

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

✉ sn\_krivoshapko@mail.ru

#### Article history

Received: March 14, 2022

Revised: May 22, 2022

Accepted: June 2, 2022

**Abstract.** It was ascertained that investigations on classification of architectural styles for shells and shell structures are absent. Only one published paper is available where architectural styles with indication of dates of appearance of the styles and dates of attenuation of their application are presented and the names

Кривошапко Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; Scopus Author ID: 6507572305, ORCID: 0000-0002-9385-3699, eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966; sn\_krivoshapko@mail.ru

Sergey N. Krivoshapko, DSc, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Scopus Author ID: 6507572305, ORCID: 0000-0002-9385-3699, eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966; sn\_krivoshapko@mail.ru

© Кривошапко С.Н., 2022

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>



**For citation**

Krivoshapko S.N. On the basic architectural styles, directions, and style flows for shells and shell structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):255–268. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-255-268>

of their founders are given. Now, the interest for the design, analysis, and building of thin-walled shells and shell structures is rising. There are no countries without erected shell structures. Hence, it is necessary to make more exact the classification of these erections and the distribution of them into groups. An aim of this work is collection of information about all known architectural styles as applied to shells and shell structures, and grouping of them due to characteristic traits and indications. All architectural styles were divided into five groups, i.e. avant-gardism, art deco style, modernism, ecotech style, and the newest styles. A special scheme, where distribution of architectural styles on these groups is applied to the examined structures, is given. Mutual influence of styles was revealed and presence of architectural directions and style flows in several styles was shown. The conclusions presented in this paper can demand the future accurate definitions and developments because specialists do not have common views to the list of architectural styles and to their classifications.

**Keywords:** architectural style, shell, art deco, modernism, ecotech style, shell architecture

**Введение**

Разнообразие архитектурных стилей столь велико, что часто специалистам сложно четко их классифицировать, тем более что в среде искусствоведов Запада и России нет единого взгляда на многие вещи. Свою лепту в путаницу архитектурных стилей вносит перевод терминов. Это же можно сказать и об определении понятия «архитектурный стиль». В «Википедии» дается следующее определение: «*Архитектурный стиль* – целостная совокупность характерных черт и признаков произведения архитектуры определенного времени и места. Стиль контаминирует характерные черты, проявляющиеся в особенностях творческого метода архитектора, способах формообразования, приемах композиции, функциональной, конструктивной и художественной сторон. <...> В истории искусства архитектурные стили зарождались и развивались не только последовательно, один за другим, но и почти параллельно, взаимодействуя между собой. Известно одновременное сосуществование стилей в качестве альтернативы друг другу»<sup>1</sup>. Известно и другое определение: «*Архитектурный стиль* – это совокупность деталей и особенностей сооружения, которые указывают на время его постройки, назначение, историческую ценность, регион, а иногда даже и на автора»<sup>2</sup>.

Каждый исследователь архитектурных стилей составляет собственный перечень стилей: кто-то перечисляет стили по алфавиту, кто-то распределяет их по странам, по хронологической последовательности, другие группируют их по признакам и т. д. У многих исследователей архитектуры оболочек не совпадают даты формирования архитектурных стилей. Иногда разница составляет десятки лет. Часто допускается путаница в причислении сооружения к тому или иному стилю. Например, параметрическую архитектуру путают с органической, а эволюционную смешивают с генеративной. Нет исследований по классификации архитектурных стилей для оболочек и оболочечных структур. Имеется только работа [1], где перечисляются основные архитектурные стили для оболочек с указанием дат возникновения и затухания их использования и имен основателей.

**Цель работы**

И. Печенкин и В. Давыдов предлагают разделить архитектурные стили на 19 групп<sup>3</sup>. Воспользовавшись предложенной методикой и несколько изменив перечень групп и их содержание, оставим в перечне только пять групп: «Авангард», «Ар-деко», «Модернизм», «Экоархитектура» и «Новейшие стили». Эти группы содержат почти все известные архитектурные стили и направления, использовавшиеся при проектировании тонких оболочек и оболочечных структур. Все стили, распределенные по группам, схематически показаны на рис. 1. Цели работы – сбор информации обо всех известных архитектурных стилях применительно к оболочкам и оболочечным структурам и группировка их по характерным чертам и признакам.

<sup>1</sup> Архитектурный стиль // Википедия. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Архитектурный\\_стиль](https://ru.wikipedia.org/wiki/Архитектурный_стиль) (дата обращения: 22.09.2022).

<sup>2</sup> Фастовская Д. От античности до модернизма: 8 основных стилей в архитектуре // РБК. 2021, 31 июля. URL: <https://realty.rbc.ru/news/60faf77e9a7947e3aa2fdc39> (дата обращения: 17.02.2022).

<sup>3</sup> Печенкин И., Давыдов В. Определитель архитектурных стилей // Arzamas. 2017, 14 августа. URL: <https://arzamas.academy/mag/446-arch> (дата обращения: 13.03.2022).

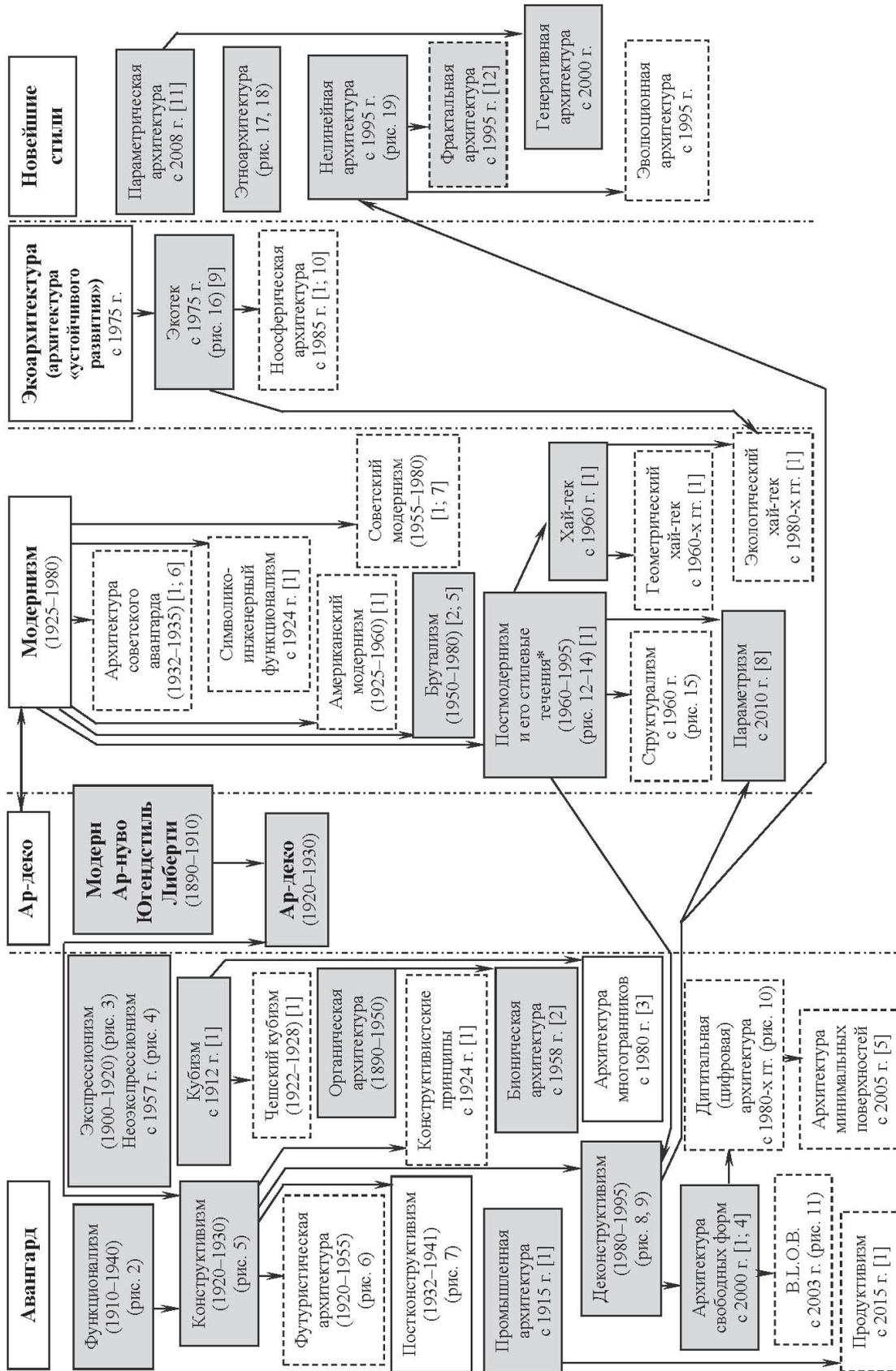
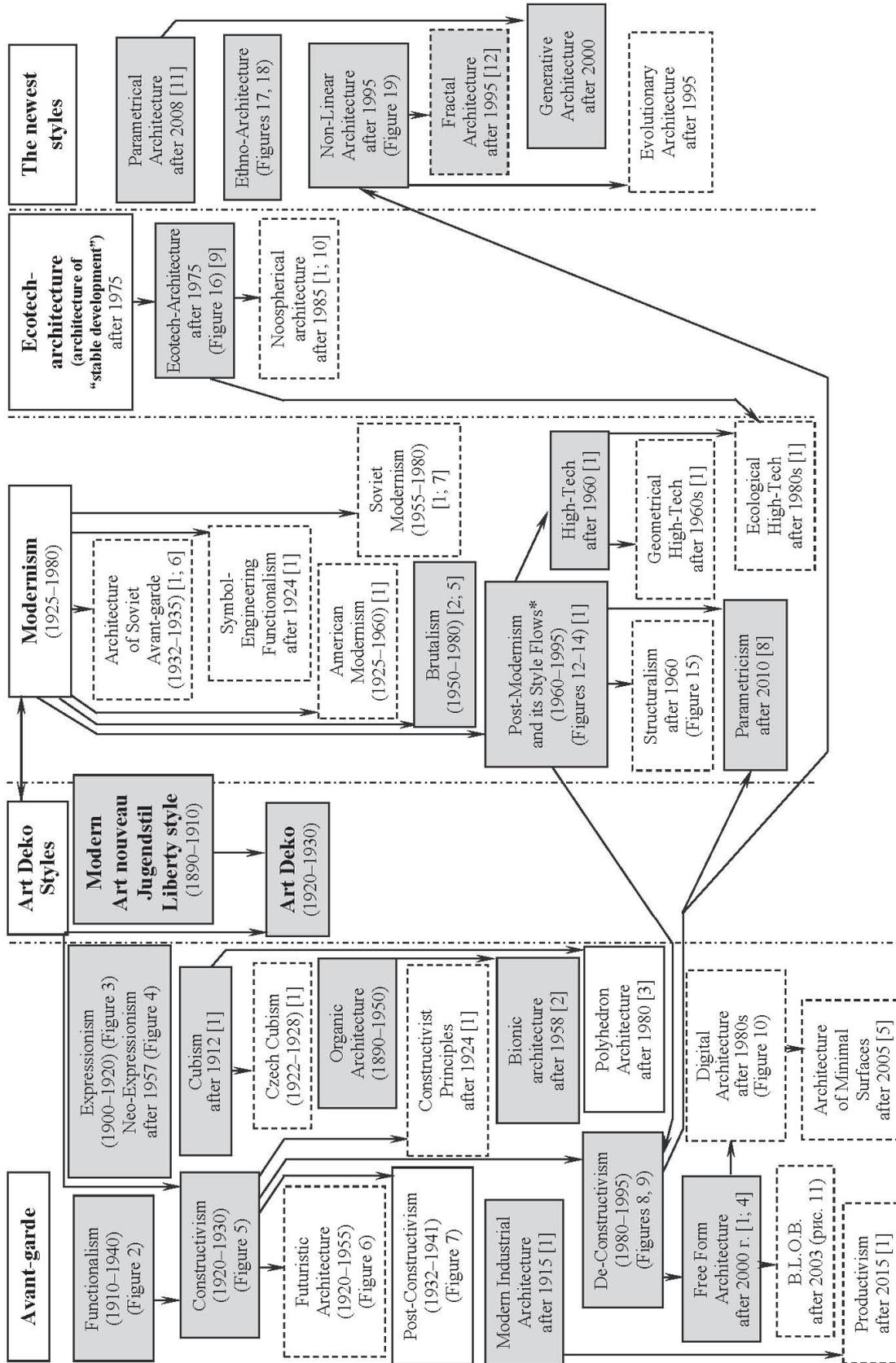


Рис. 1. Архитектурные стили (затемнено) и направления (пунктирная рамка) для оболочек и оболочечных структур

\* См.: Воличенко О.В. Концептуально-прототипное моделирование архитектурных объектов: учебно-методическое пособие. Бишкек: КРСУ, 2017. 142 с.



**Figure 1.** Architectural styles (darkening) and directions (dotted lines) for shells and shell structures  
 \* See: Volichenko, O.V. (2017). *Concept-and-prototype modelling of architectural objects*. Bishkek: KRSU Publ. (In Russ.)

## Архитектурная группа «Авангард»

Основой идеологии *функционализма* в архитектуре стало создание самыми современными способами и конструкциями таких форм, которые обеспечивали бы наилучшее функционирование объекта, все излишнее отбрасывалось (рис. 2). Архитектура приравнивалась к промышленному дизайну. Стиль получил наибольшее распространение во Франции, Германии, Северной и Восточной Европе.

Главное отличие *экспрессионизма* от других авангардных учений – отказ от традиций и условностей с целью достичь максимальной эмоциональности, силы воздействия на человека. Формообразование заключалась в намеренном искажении традиционных форм с целью вызвать сильный эмоциональный отклик. Особенности: силуэты, вызывающие в воображении очертания утесов, сталактитов, гротов, заостренность, скульптурность, гротескность, деформация привычных геометрических форм (рис. 3). Ареал распространения стиля – Германия и соседние с ней страны.

*Неоэкспрессионизм* представляет собой направление в современной архитектуре, которое возникло в начале 1950-х гг. в противовес главенствующим архитектурным стилям – функционализму и органической архитектуре. Замыслы Ле Корбюзье изменили экспрессионизм и придали ему новое дыхание (рис. 4). Стиль распространен по всему миру.



**Рис. 2.** Здание Центросоюза, 1928–1936, Москва, Россия, арх. Ле Корбюзье (*функционализм*)  
(URL: [http://corbusier.totalarch.com/files/lc20/084\\_02.jpg](http://corbusier.totalarch.com/files/lc20/084_02.jpg)  
(дата обращения: 30.01.2021))

**Figure 2.** Tzentrosoyuz Building, 1928–1936, Moscow, Russia, arch. Le Corbusier (*functionalism*)  
(Available from: [http://corbusier.totalarch.com/files/lc20/084\\_02.jpg](http://corbusier.totalarch.com/files/lc20/084_02.jpg)  
(accessed: 30.01.2021))



**Рис. 3.** Стекланный павильон, 1914, Кельн, Германия, арх. Bruno Taut (*экспрессионизм*) (URL: <https://aperturesinthewall.org/destruction-of-windows/>  
(дата обращения: 30.02.2022))

**Figure 3.** The Glass Pavilion, 1914, Cologne, Germany, arch. Bruno Taut (*expressionism*)  
(Available from: <https://aperturesinthewall.org/destruction-of-windows/>  
(accessed: 30.02.2022))



**Рис. 4.** Нотр-Дам дю О, 1953, Роншан, Франция, арх. Ле Корбюзье (*неоэкспрессионизм*)  
(URL: <https://i.pinimg.com/originals/c6/e1/97/c6e197529ce39b1d13f5edbffe23d132.jpg>  
(дата обращения: 30.01.2022))

**Figure 5.** Notre Dame du Haut, 1953, Ronchamp, France, arch. Le Corbusier (*neo-expressionism*) (Available from: <https://i.pinimg.com/originals/c6/e1/97/c6e197529ce39b1d13f5edbffe23d132.jpg>  
(accessed: 30.01.2022))



**Рис. 5.** Жилой дом К.С. Мельникова, 1927–1929, Москва, Россия (*конструктивизм*)  
(фото И.А. Мамиевой)

**Figure 5.** Melnikov's Dwelling House, 1927–1929, Moscow, Russia (*constructivism*)  
(photo by Iraida A. Mamieva)

*Конструктивистская архитектура (конструктивизм)* – это авангардный стиль современной архитектуры, процветавший в Советском Союзе в 1920-х – начале 1930-х гг. Конструктивизм – это направление исключительно советской архитектуры (рис. 5). Абстрактное и строгое движение стремилось отразить современное индустриальное общество, отказываясь при этом от декоративной стилизации в пользу промышленной сборки материалов. Конструктивизм в СССР представлял собой функционализм с акцентом на выражение новых качеств новых конструкций, при этом содержание такой архитектуры выражало новаторские, подчас революционно-фантастические идеи нового быта. Сооружения похожи на индустриальные здания.

*Органическая архитектура* в 1920–1950 гг. была наиболее распространена в США и Финляндии [1].

*Футуристическая архитектура* появилась в Италии в 1920-х гг. как авангардистский вариант архитектуры. Интерес в мире к этому направлению стал угасать в 1950-е гг., но в СССР он был популярен до 1990-х гг. (рис. 6) [13]. К особенностям этого направления относят длинные или ломаные линии, необычные формы и техногенные мотивы. Использовались новейшие на тот момент конструкционные материалы. Сейчас интерес к направлению постепенно возвращается в виде *неофутуризма*.

Первые постройки в архитектурном стиле *неоконструктивизм* появились в конце 1960-х гг.; в основном это были индивидуальные жилые дома<sup>4</sup>. Крупные оболочечные структуры и большепролетные оболочки в этом стиле не обнаружены.

*Постконструктивизм* был переходным архитектурным стилем, существовавшим в Советском Союзе в 1930-х гг. Термин был введен историком архитектуры С. Хан-Магомедовым, который определил постконструктивизм как «неоклассические формы без неоклассической детализации» (рис. 7).

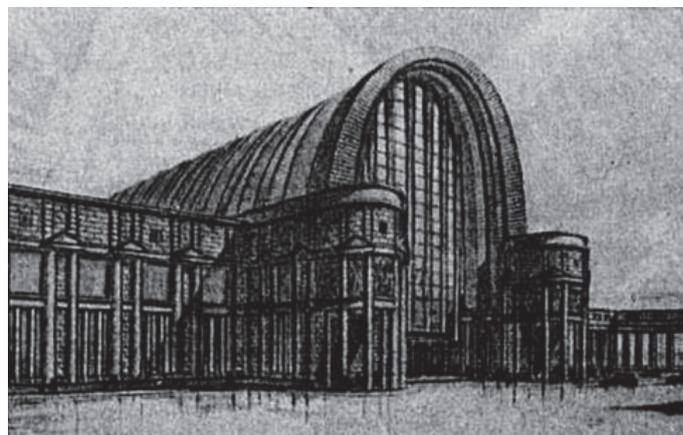
*Деконструктивизм* – самый агрессивный стиль с ломаными формами и конструкциями, сложными для визуального восприятия. У деконструктивистов есть точка опоры – конструктивизм и постмодернизм (рис. 8). Активным поборником идеологии архитектурного деконструктивизма является Ф. Гери (рис. 9)<sup>5</sup>. Стиль распространился по всему миру. Архитектура деконструктивизма предусматривает использование любых стройматериалов [1].



**Рис. 6.** Кинотеатр «Россия», 1974, Ереван, Армения, арх. А. Тарханиян, С. Хачикян, Г. Погосян (*футуристическая архитектура*)

(URL: <http://fototelegraf.ru/wp-content/uploads/2018/10/1331-990x819.jpg> (дата обращения: 30.01.2022))

**Figure 6.** The film theatre “Russia,” 1974, Yerevan, Armenia, arch. A. Tarkhanyan, S. Khachikyan, G. Pogosyan (*futuristic architecture*) (Available from: <http://fototelegraf.ru/wp-content/uploads/2018/10/1331-990x819.jpg> (accessed: 30.01.2022))



**Рис. 7.** Нереализованный проект Курского вокзала, 1933, Москва, Россия, арх. И. Фомин и Г. Волошинов (*постконструктивизм*) (URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yaweyn\\_kursky\\_fomin.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yaweyn_kursky_fomin.jpg) (дата обращения: 30.01.2022))

**Figure 7.** Nonrealized project of Kursk Railway Station, 1933, Moscow, Russia, arch. I. Fomin and G. Voloshinov (*post-constructivism*) (Available from: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yaweyn\\_kursky\\_fomin.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yaweyn_kursky_fomin.jpg) (accessed: 30.01.2022))

<sup>4</sup> Волков А.М. Неоконструктивизм // Корпус. Вып. 2. URL: <https://cih.ru/k2/neocon2.html> (дата обращения: 16.02.2022).

<sup>5</sup> Стиль деконструктивизм в архитектуре центра искусств Луи Вьетон от Фрэнка Гери // Дизайн Эстет. 2018, 19 февраля. URL: <http://design-estet.com/stil-dekonstruktivizm-v-arhitecture-frenka-geri/> (дата обращения: 17.02.2022).



**Рис. 8.** Концертный зал Уолта Диснея, 2003, Лос-Анджелес, США, арх. Ф. Гери (*деконструктивизм*) (URL: <https://ka-ap.ru/wp-content/uploads/4/d/e/4deefaafaf7fe65a26f58d70db1d5783.jpeg> (дата обращения: 30.01.2022))

**Figure 8.** Walt Disney Concert Hall, 2003, Los Angeles, USA, arch. F. Gehry (*de-constructivism*) (Available from: <https://ka-ap.ru/wp-content/uploads/4/d/e/4deefaafaf7fe65a26f58d70db1d5783.jpeg> (accessed: 30.01.2022))



**Рис. 9.** Центр искусства Луи Виттон, 2018, Париж, Франция, арх. Ф. Гери (*деконструктивизм*) (URL: <https://ru.pinterest.com/pin/296393219232110298/> (дата обращения: 30.01.2022))

**Figure 9.** Louis Vuitton's Centre of Arts, 2018, Paris, France, arch. F. Gehry (*de-constructivism*) (Available from: <https://ru.pinterest.com/pin/296393219232110298/> (accessed: 30.01.2022))



**Рис. 10.** Скульптура над олимпийским павильоном, 1992, Барселона, Испания, арх. Ф. Гери (*дигитальная архитектура*) (URL: <https://losko.ru/wp-content/uploads/2017/07/FullSizeRender-5-5.jpg> (дата обращения: 30.01.2022))

**Figure 10.** The sculpture over Olympic Pavilion, 1992, Barcelona, Spain, arch. Fr. Gehry (*digital architecture*) (Available from: <https://losko.ru/wp-content/uploads/2017/07/FullSizeRender-5-5.jpg> (accessed: 30.01.2022))



**Рис. 11.** Библиотека филологии свободного Берлинского университета, 2005, Германия, арх. Н. Фостер (*BLOB архитектура*) (URL: [novate.ru](http://novate.ru) (дата обращения: 30.02.2022))

**Figure 11.** Philological library of Free Berlin University, 2005, Germany, arch. N. Foster (*BLOB architecture*) (Available from: [novate.ru](http://novate.ru) (accessed: 30.02.2022))

Основные исторические сведения о возникновении *дигитальной архитектуры* приведены в работе С. Mollie<sup>6</sup>, где, в частности, говорится, что американский архитектор П. Эйзенман<sup>7</sup> был важной фигурой на ранних этапах появления цифровых технологий в архитектурном проектировании. Он с 1987 г. начал использовать компьютер в проектировании. В 1993 г. Г. Линн применил компьютер для формообразования объектов. Американский архитектор Ф. Гери оказал огромное влияние на развитие цифровой архитектуры, которую он активно внедрял (рис. 10).

Термин «*архитектура blob*» был известен уже в середине 1990-х гг., слово *blobitecture* впервые появилось в печати в 2002 г. [14]. Термин «архитектура blob» был придуман архитектором Г. Линном в

<sup>6</sup> Mollie C. The digital in architecture: then, now and in future // Space10. URL: <https://space10.com/project/digital-in-architecture/> (accessed: 21.02.2022).

<sup>7</sup> The foundations of digital architecture: Peter Eisenman // CCAchannel. YouTube. 2013, 21 May. URL: [s10.io/eisenmanfndtns](https://s10.io/eisenmanfndtns) (accessed: 03.03.2022).

1995 г. в его экспериментах по цифровому дизайну. Название стиля, с одной стороны, переводится как *binary large object*, а с другой – в переводе обозначает каплю или кляксу. Конструкции зданий в стиле *блоб* имеют особые текучие, плавущие формы (рис. 11).

### Архитектурная группа «Ар-деко»

На рубеже XIX–XX вв. стиль *модерн* буквально захватил весь европейский континент, в Германии и Австрии он известен как югендстиль, в Бельгии и Франции – ар-нуво, в Италии – стиль либерти или *stile floreale* (цветочный стиль). Природа становится основным источником вдохновения для движения, которое стремилось к полному единству структуры и декора. Модерн характеризуется извилистыми линиями и органическими объемами, часто встречаются флоральные и анималистические мотивы. Однако в период расцвета модерна железобетон еще не получил широкого распространения [15], поэтому тогда время для строительства большепролетных оболочек еще не пришло. Встречаются только цилиндрические оболочки с вертикальной осью.

Архитектурный стиль *ар-деко* (декоративное искусство) возник на пересечении неоклассицизма и модерна с его любовью к орнаменту и заинтересованностью в технике и ее возможностях. По сути, ар-деко – это вариант модернизма, чуждый идеям экономии и отказа от декоративности. Ар-деко как направление не был абсолютно новым, он перенял многое от популярного ранее стиля ар-нуво (модерн), став его продолжением и развитием. Также заметно влияние на ар-деко кубизма и конструктивизма. Оболочек и оболочечных структур, выполненных в этом стиле, не обнаружено. Только отдельные элементы зданий можно отнести к данному стилю, например пирамидальную крышу *Marine Building* (Ванкувер) 1929–1930 гг. Некоторые архитекторы называют ар-деко стилевым течением, другие – полноценным архитектурным стилем.

### Архитектурная группа «Модернизм»

Эта группа включает в себя много архитектурных направлений, стилевых течений и несколько архитектурных стилей (рис. 1).

*Модернизм* – архитектурные стили, основанные на инновационных технологиях строительства, в частности использовании стекла, стали и железобетона. Основными критериями в архитектуре стали функциональность, минимализм, отказ от орнамента. Стиль возник в первой половине XX в. и стал доминирующим после Великой Отечественной войны, вплоть до конца 1980-х гг. Эта архитектурная группа включает в себя большое число архитектурных стилей, направлений и стилевых течений [16].

«Разгул творческой фантазии в *постмодернизме* превзошел все предыдущие этапы зодчества вместе взятые, порою доходило до того, что каждый архитектор представлял как минимум одну, а иногда даже несколько концепций. Все это с научной точки зрения затрудняет классификацию архитектурных концепций по каким-либо критериям»<sup>8</sup>. Применительно к оболочечным структурам выдвигались следующие стилевые течения: *советский деконструктивизм*, *поп-архитектура* (рис. 12), *новый модернизм*, *новый авангардизм* (пирамида Лувра, Париж, арх. Ио М. Пей, 1989 г.), *техноэкспрессионизм*, *авторская архитектура* («Дворец пузырей», Канны, арх. А. Ловзг, 1989 г.), *тотальный дизайн* (музей вулканологии, Оуре-нес-Рохес, Франция, арх. Х. Холляйн, 1999 г.), *нарочитый символизм* (рис. 13), *зеркальная архитектура* (рис. 14). Почти все указанные стилевые течения не имели широкого распространения, скорее они были единичными, и почти ни одно из этих течений не получило в дальнейшем полноценного выражения<sup>8</sup>.

*Структурализм*, или *структурный экспрессионизм*, возник сразу после начала эпохи постмодернизма. Это одно из направлений в модернистской архитектуре. Его основные характеристики: возврат к романтизму, экспрессии и национальной специфике, чистота линий, отсылка к формам, свойственным живой природе, высокая функциональность (рис. 15). Структурализм стремился к эстетике конструктивной формы, к гармонии внешнего облика с его функциональной структурой. Материалы – бетонные панели, металлические секции, стальные тросы. Его положение было подорвано растущей популярностью постмодернистской архитектуры

*Параметризм*, или *алгоритмическая архитектура*, является новым архитектурным стилем постиндустриального общества, стилем цифровой эпохи. Особенности этого архитектурного направления –

<sup>8</sup> *Воличенко О.В.* Концептуально-прототипное моделирование архитектурных объектов: учебно-методическое пособие. Бишкек: КРСУ, 2017. 142 с.

необычные формы, противостоящие геометрическим фигурам, плавные, перетекающие друг в друга поверхности и отказ от деления на функциональные зоны. В [8] анализируются основные закономерности, характеризующие это авангардное направление. Основатель стиля П. Шумахер представил его как новый глобальный стиль архитектуры [17]. Здесь архитектурная форма моделируется на основе ее математического представления с привлечением ЭВМ. Изменение постоянных параметров в математических выражениях влияет на геометрию формы.



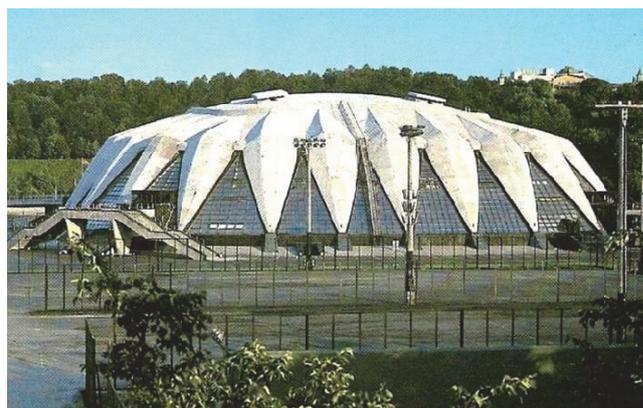
**Рис. 12.** Бар Asahi, 1989, Токио, Япония, арх. Ф. Старк (постмодернизм, стилевое течение «поп-архитектура») (URL: [inside-lighting.ru](http://inside-lighting.ru) (дата обращения: 30.01.2022))  
**Figure 12.** Asahi Beer Hall, 1989, Tokyo, Japan, arch. F. Stark (post-modernism, style flow “pop-architecture”) (Available from: [inside-lighting.ru](http://inside-lighting.ru) (accessed: 30.01.2022))



**Рис. 13.** Дом-ракушка, пос. Таватуй, Свердловская область, Россия (нарочитый символизм, или архитектурная метафора) (фото из пособия О.В. Воличенко<sup>9</sup>)  
**Figure 13.** A Shell Dwelling House in Tavatu, Sverdlovskaya Oblast, Russia (architectural metaphor) (photo from O.V. Volichenko’s manual<sup>10</sup>)



**Рис. 14.** Хаас-Хаус, 1991, Вена, Австрия, арх. Х. Холляйн (постмодернизм, зеркальная архитектура) (фото И.А. Мамиевой)  
**Figure 14.** Haas House, 1991, Vienna, Austria, arch. H. Hollein (post-modernism) (photo by Iraida A. Mamieva)



**Рис. 15.** Универсальный спортивный зал «Дружба» в Лужниках, 1980, Москва, Россия, арх. Ю. Большаков, Д. Тарасевич, В. Понтрягин, Д. Солопов, В. Максименко, И. Рожин (структурализм) (URL: <https://pastvu.com/p/37390> (дата обращения: 30.01.2022))  
**Figure 15.** Universal Sport Hall “Druzhba,” Luzhniki, 1980, Moscow, Russia, arch. Y. Bolshakov, D. Tarasevich, V. Pontryagin, D. Solopov, V. Maksimenko, I. Rozhin (structuralism) (Available from: <https://pastvu.com/p/37390> (accessed: 30.01.2022))

### Архитектурная группа «Экоархитектура»

Архитекторы Н. Фостер, Т. Ито, Р. Пьяно, Ж. Нувель, К. Еанг и другие создали архитектурные сооружения, в основу которых были положены принципы «нулевого энергопотребления», переработки отходов, сбора дождевой воды, использования солнечной, ветровой и других видов энергии, наиболее ра-

<sup>9</sup> Воличенко О.В. Концептуально-прототипное моделирование архитектурных объектов: учебно-методическое пособие. Бишкек: КРСУ, 2017. 142 с.

<sup>10</sup> Volichenko O.V. *Concept-and-prototype modelling of architectural objects*. Bishkek: KRSU Publ.; 2017. (In Russ.)

ционального использования материалов и пространства, а также применения естественной инсоляции и вентиляции внутреннего пространства. Эти сооружения вошли в архитектурную группу «*Экоархитектура*», или «*Архитектура устойчивого развития*». Экоархитектура создает территории с безопасной и сбалансированной средой. Она направлена на минимизацию негативного экологического воздействия зданий. Являясь на сегодняшний день самой модной тенденцией в архитектуре, экостроительство особенно популярно в развитых странах. В Великобритании и США возводятся целые города с внедрением новейших разработок (рис. 16).



Рис. 16. Швейцарские домики (экоархитектура)<sup>11</sup>  
Figure 16. Swiss small dwelling house (ecotech architecture)<sup>12</sup>

Архитектурный стиль *экотек* (ecotech) имеет огромное количество подвидов и подстилей [9]. Основополагающим принципом экотека является использование только натуральных материалов. Эксперты называют *зеленую архитектуру* одним из самых модных течений современного градостроения. Она является подвидом экотека. Однако атрибуты зеленой архитектуры практически всегда являются декоративным оформлением сооружения и не влияют на его конструкцию, поэтому она не отображена на рис. 1.

### Архитектурная группа «Новейшие стили»

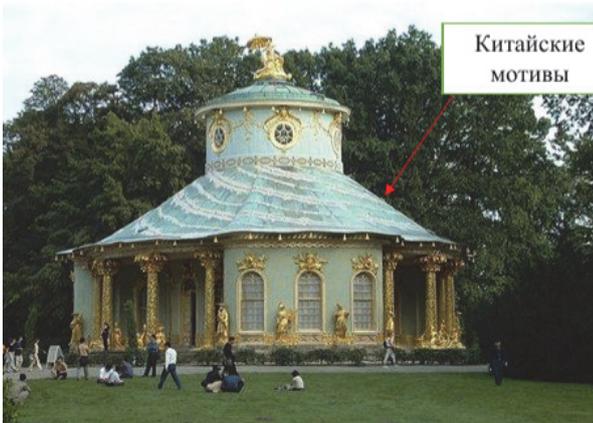
Параметризм П. Шумахера [17] основан на описании способа работы архитектора, а *параметрическая архитектура* больше внимания уделяет оформлению проектной деятельности архитектора и инженеров при активном использовании компьютерных технологий. Многие считают, что параметризм и параметрическая архитектура – это один архитектурный стиль. Много примеров сооружений, выполненных в стиле параметрической архитектуры, приведено в [11].

*Этноархитектура* – стиль с ярко выраженным национальным мотивом. Сколько культур существует на планете, столько вариаций и имеет стиль этно (рис. 17, 18). В научно-познавательной литературе, применительно к оболочечным сооружениям, описаны японский, восточный, вьетнамский, китай-

<sup>11</sup> Савицкая Я. Экологическая архитектура: 5 поразительных экопроектов, которые подружились с самой природой // *Happy Modern*. 2018, 18 июня. URL: <https://happymodern.ru/ekologichesayaj-arxitektura-foto/> (дата обращения: 17.02.2022).

<sup>12</sup> Savitskaya Ya. Ecological architecture: 5 amazing eco-projects that have made friends with nature itself. *Happy Modern*. 18 June 2018. Available from: <https://happymodern.ru/ekologichesayaj-arxitektura-foto/> (accessed: 17.02.2022).

ский, африканский, казахстанский и многие другие этноархитектурные стили. Сооружения, выполненные в этом стиле, различаются как по форме, так и по материалам. В связи с этим появилось множество стилевых течений, например *глинобитная архитектура*, *бамбуковая архитектура*, *этнический экостиль* – *экстерьер* и др.



**Рис. 17.** Китайский павильон, Потсдам, Германия, арх. И.Г. Бюринг (*этно*) [18]  
**Figure 17.** Chinese pavilion, Potsdam, Germany, arch. J.G. Büring (*ethno-architecture*) [18]



**Рис. 18.** Этностиль в Замбии (*этно*)  
(URL: [idel.club](http://idel.club) (дата обращения: 12.03.2022))  
**Figure 18.** Ethno-style in Zambia (*ethno-architecture*)  
(Available from: [idel.club](http://idel.club) (accessed: 12.03.2022))



**Рис. 19.** Вокзал, 1998, Лиссабон, Португалия, арх. С. Калатрава (*фрактальная архитектура*) (фото Н.С. Кривошапко)  
**Figure 19.** The railway station, 1998, Lisbon, Portugal, arch. S. Calatrava (*fractal architecture*) (photo by Nataliya S. Krivoshapko)



**Рис. 20.** Музей С. Дали, 2010, Флорида, США, бюро НОК (*нелинейная архитектура*)  
(URL: <http://www.arhinovosti.ru/2010/07/24/treti-jj-domsalvadora-dali-gotovitsya-k-otkryti-yu-sankt-peterburg-florida-amerika/414-2-2/> (дата обращения: 30.01.2022))  
**Figure 20.** The Salvador Dali Museum, 2010, Florida, USA, НОК bureau (*non-linear architecture*)  
(Available from: <http://www.arhinovosti.ru/2010/07/24/treti-jj-domsalvadora-dali-gotovitsya-k-otkryti-yu-sankt-peterburg-florida-amerika/414-2-2/> (accessed: 30.01.2022))

Авангард новейшей архитектуры не един, он включает в себя три мейнстрима: нелинейную, дигитальную и фрактальную архитектуру (рис. 19). *Нелинейная архитектура* состоит из трех относительно самостоятельных творческих концепций (течений): гиперсупрематизм, неосупрематизм, сюрреалистическая архитектура-скульптура (рис. 20) [19]. К настоящему времени заметных успехов в нелинейной архитектуре – сюрреалистической архитектуре-скульптуре добились такие архитекторы, как Ф. Гери, Дж. Майер, Х. Рашид, Х. Сеносьяйн, Р. Брунос и др. Особенно популярен этот стиль у молодых архитекторов [20].

*Генеративная архитектура* – это результат определенных алгоритмов, основанных на ранее полученных данных, и системы принятия решений, созданной архитектором. В этой системе существует три категории данных: исходные данные (идея); алгоритм проектирования (привила, алгоритмы и исходный

код); результирующие данные [21]. Примеры оболочек в стиле генеративной архитектуры приведены в [22]. Подходы к проектированию в параметрической и генеративной архитектуре близки, но вторая ближе к искусственному интеллекту.

*Эволюционная архитектура* является стилевым течением нелинейной архитектуры [23]. В качестве инструментов создания архитектурного дизайна используются законы эволюции и морфогенеза.

### Результаты

Согласимся с О.В. Воличенко [19], которая отмечает, что «сегодня мы не можем четко обозначить новизну всех архитектурных направлений авангарда, слишком динамична и разнообразна архитектура „поверхности“, которая стала ведущим формообразующим компонентом новой архитектуры, но говорить о том, что она стала классическим принципом, еще рано».

Представленная статья дополняет ранее опубликованную работу [1], но не является ее повторением с добавлением новых сведений по классификации архитектурных стилей и направлений для оболочечных сооружений. В ней содержатся только новые результаты. При необходимости даются ссылки на данные, содержащиеся в [1], и на работы других авторов.

Изучив все доступные материалы, заключаем, что в XXI в. возрос значительный интерес к строительству и проектированию тонких большепролетных оболочек и оболочечных структур. В мире нет страны, где бы не было возведено хотя бы несколько оболочек после 2000 г., которые стали символами города или страны [24].

Установлено, что нет исследований по классификации архитектурных стилей, направлений и стилевых течений для оболочек и оболочечных структур. Ранее под руководством автора было проведено исследование, результаты которого опубликованы в журнале РААСН, где перечисляются архитектурные стили с указанием дат их возникновения и затухания использования, а также имен основателей [1].

### Заключение

Проведенные исследования показали, что интерес к проектированию, расчету и строительству тонкостенных оболочек и оболочечных структур увеличивается. В мире нет стран, где бы в XXI в. не было построено ни одной оболочечной структуры. Но архитекторам и инженерам-строителям часто мешала путаница в причислении сооружения к тому или иному стилю, в определении понятий архитектурных стилей, направлений и стилевых течений для оболочек и оболочечных структур. Учитывая потребности науки, архитектуры и народного хозяйства, необходимы дальнейшие исследования в области теории и практики архитектуры, формообразования и расчета на прочность оболочек и оболочечных структур. Решению части этих задач способствуют приведенные материалы. Основные результаты отображены на рис. 1, который представлен впервые. Работа вносит позитивный вклад в решение указанных задач по классификации стилей и может быть полезна в учебных целях. Разъяснению некоторых положений статьи помогут труды из списка литературы и постраничных сносок.

### Список литературы

1. *Кривошапко С.Н., Алборова Л.А., Мамиева И.А.* Оболочечные структуры: генезис, материалы и подвиды. Ч. 1. Подвиды и направления // *Academia. Архитектура и строительство*. 2021. № 3. С. 125–134. <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2021-3-125-134>
2. *Кривошапко С.Н., Галишиникова В.В.* Архитектурно-строительные конструкции. М.: Юрайт, 2019. 476 с.
3. *Кривошапко С.Н.* Многогранники и квазимногогранники в архитектуре гражданских и промышленных сооружений // *Строительство и реконструкция*. 2020. № 4 (90). С. 48–64. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-90-4-48-64>
4. *Кривошапко С.Н.* Оболочки и стержневые структуры в форме аналитически задаваемых поверхностей в современной архитектуре // *Строительство и реконструкция*. 2020. № 3. С. 20–30. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-89-3-20-30>
5. *Алборова Л.А.* Минимальные поверхности в строительстве и архитектуре // *Биосферная совместимость: человек, регион, технологии*. 2021. № 1. С. 3–11. <https://doi.org/10.21869/2311-1518-2021-33-1-3-11>

6. Ермоленко Е.В. Формы и построения в архитектуре советского авангарда и их интерпретация в современной зарубежной практике // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 39–48. <https://doi.org/10.22337/2077-2020-1-39-48>
7. Вуков О., Губкина И. Soviet Modernism. Brutalism. Post-modernism buildings and structures in Ukraine 1955–1991. Berlin: DOM Publishers, 2019. 250 p.
8. Барчугова Е.В. Параметризм как направление современной проектной деятельности // АМІТ. 2013. № 4 (25). Pp. 1–19.
9. Mozhdemani A.S., Afhami I.R. Using Ecotech architecture as an effective tool for sustainability in construction industry // Engineering, Technology & Applied Science Research. 2017. Vol. 7. No. 5. Pp. 1914–1917.
10. Лыткин К.А. Элементы ноосферной архитектуры // Архитектура и строительство России. 2013. № 1. С. 30–39.
11. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 150–165.
12. Заславская А.Ю. Особенности формирования архитектурного объекта на основе фрактальных структур // Градостроительство и архитектура. 2011. Т. 1. № 2. С. 15–17. <https://doi.org/10.17673/vestnik.2011.02.4>
13. Chaubin Fr. Cosmic communist constructions photographed. Taschen, 2017. 448 p.
14. Waters J.K. Blobitecture: waveform architecture and digital design. Rockport Publishers, 2003. 192 p.
15. Krivoshapko S.N., Bock Hyeng C.A., Mamieva I.A. Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2014. Vol. 18. Issue 2. Pp. 95–108.
16. Малинина Т. Модернизм и «модернизмы»: о содержании понятия и расширении его границ к XXI веку в архитектурной критике. Методологические заметки // Архитектура. Теория и практика. 2014. № 3–4. С. 106–125.
17. Schumacher P. Parametricism – a new global style for architecture and urban design // AD Architectural Design – Digital Cities. 2009. Vol. 79. No. 4. Pp. 14–23. <https://doi.org/1002/AD.912>
18. Аткина Л.И., Жукова М.В., Морозов А.М. Основные стили архитектуры. Характерные особенности. Екатеринбург: УГЛТУ, 2015. 37 с.
19. Воличенко О.В. Концепции нелинейной архитектуры // Архитектон: известия вузов. 2013. № 44. С. 21–39.
20. Непорада В.И. Велароидальные оболочки в контексте нелинейной архитектуры // Математические методы в архитектуре и дизайне: материалы межвузовской научной конференции (15 мая 2012 года) / отв. ред. В.Г. Мосин. Самара: СГАСУ, 2013. С. 23–31.
21. Федчун Д.О., Глухой П.Е. Система генеративного проектирования в архитектуре // Архитектура и дизайн: история, теория, инновации. 2016. № 1. С. 285–289.
22. Pakowska M. Parametric, generative, evolutionary, organic and bionic architecture – a new look at an old problem. *Architecture et Artibus*. 2014. No. 1. Pp. 42–45.
23. Волынский В.Э. Эволюция как стратегия проектирования и дизайна в нелинейной архитектуре // Жилищное строительство. 2011. № 10. С. 1–6.
24. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 553–561. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>

## References

1. Krivoshapko S.N., Alborova L.A., Mamieva I.A. Shell structures: genesis, materials, and subtypes. Part 1. Subtypes and directions. *Academia. Architecture and Construction*. 2021;(3):125–134. (In Russ.) <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2021-3-125-134>
2. Krivoshapko S.N., Galishnikova V.V. *Architectural-and-building structures*. Moscow: YuRAIT Publ.; 2019. (In Russ.)
3. Krivoshapko S.N. Polyhedra and quasi-polyhedra in architecture of civil and industrial erection. *Building and Reconstruction*. 2020;(4):48–64. (In Russ.)
4. Krivoshapko S.N. Shells and rod structures in the form of analytically non-given surfaces in modern architecture. *Building and Reconstruction*. 2020;(3):20–30. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-89-3-20-30>

5. Alborova L.A. Minimal surfaces in building and architecture. *Biosphere Compatibility: Human, Region, Technologies*. 2021;(1):3–11. (In Russ.) <https://doi.org/10.21869/2311-1518-2021-33-1-3-11>
6. Ermolenko E.V. Forms and constructions on the architecture of the soviet avant-garde and their interpretation in modern foreign practice. *Academia. Architecture and Construction*. 2020;(1):39–48. <https://doi.org/10.22337/2077-2020-1-39-48>
7. Bykov O., Gubkina I. *Soviet Modernism. Brutalism. Post-modernism buildings and structures in Ukraine 1955–1991*. Berlin: DOM Publishers; 2019.
8. Barchugova E.V. Parametrism as a direction of the modern project activities. *AMIT*. 2013;(4):1–19.
9. Mozhdegani A.S., Afhami I.R. Using Ecotech architecture as an effective tool for sustainability in construction industry. *Engineering, Technology & Applied Science Research*. 2017;7(5):1914–1917.
10. Lytkin K.A. Architectural elements noospheric. *Architecture and Construction of Russia*. 2013;(1):30–39. (In Russ.)
11. Mamieva I.A. Analytical surfaces for parametrical architecture in contemporary buildings and structures. *Academia. Architecture and Construction*. 2020;(1):150–165. (In Russ.)
12. Zaslavskaya A.Y. Features, forming an architectural object, basing on fractal structures. *Urban Construction and Architecture*. 2011;1(2):15–17. <https://doi.org/10.17673/vestnik.2011.02.4>
13. Chaubin Fr. *Cosmic communist constructions photographed*. Taschen; 2017.
14. Waters J.K. *Blobitecture: waveform architecture and digital design*. Rockport Publishers; 2003.
15. Krivoshapko S.N., Bock Hyeng C.A., Mamieva I.A. Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. 2014;18(2):95–108.
16. Malinina T. Modernism and “modernisms:” on contents of an idea and expansion of its border to 21st century in architectural criticism. Methodological notes. *Architecture. Theory and Practice*. 2014;(3–4):106–125.
17. Schumacher P. Parametricism – a new global style for architecture and urban design. *AD Architectural Design – Digital Cities*. 2009;79(4):14–23. <https://doi.org/1002/AD.912>
18. Atkina L.I., Zhukova M.V., Morozov A.M. *The basic architectural styles. The characteristic features*. Ekaterinburg: UGLTU Publ.; 2015.
19. Volichenko O.V. Conceptions of non-linear architecture. *Architecton: Izvestiya Vuzov*. 2013;(44):21–39.
20. Neporada V.I. Velaroidal shells in non-linear architecture. In: Mosin V.G. (ed.) *Mathematical Methods in Architecture and Design: Conference Papers (15 May 2012)*. Samara: SGASU Publ.; 2013. p. 23–31.
21. Fedchun D.O., Tlustiy R.E. System of generative design in architecture. *Architecture and Design: History, Theory, Innovation*. 2016;(1):285–289.
22. Pakowska M. Parametric, generative, evolutionary, organic and bionic architecture – a new look at an old problem. *Architecture et Artibus*. 2014;(1):42–45.
23. Volynskov V.E. Evolution as a strategy of projecting and designing in non-linear architecture. *Housing Construction*. 2011;(10):1–6.
24. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):553–561. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>



## ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-269-279  
 УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Исследование волн в подкрепленной сети

Д.Г. Агаларов , Г.А. Мамедова  , М.А. Рустамова 

Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджанская Республика  
 ✉ gular-gulshan@rambler.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 20 апрель 2022 г.  
 Доработана: 10 июня 2022 г.  
 Принята к публикации: 12 июня 2022 г.

#### Для цитирования

Агаларов Д.Г., Мамедова Г.А., Рустамова М.А. Исследование волн в подкрепленной сети // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 3. С. 269–279. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-269-279>

**Аннотация.** Рассматриваются движения подкрепленной сети. Сетчатые системы используются в различных областях современной техники, авиации, рыболовстве, строительстве. За последние годы большое внимание привлекали полные уравнения, которые описывают движение деформируемой нити. В соответствии с поставленной задачей подкрепление сети осуществляется добавлением членов в уравнения движения. В плоском случае изучается статическое поведение конструкции и выводятся уравнения, позволяющие исследование движения. Задача распространения волн в деформируемых нитевых системах с учетом значительного отклонения формы нитей от первоначального прямолинейного в математическом отношении весьма сложна, так как уравнения движения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для ее решения используется метод характеристик. Им же решается задача о распространении волн разгрузки (в случае нагрузки возникают ударные волны). В зависимости от распределения скорости на границе определяется распределение деформации постоянной на характеристиках. Результаты строятся численным интегрированием интегралов, найденных методом характеристик. Решение с помощью уравнений характеристик показывает возникновение бегущих волн.

**Ключевые слова:** сеть, скорость волны, метод характеристик, деформация, напряжение

**Агаларов Джафар Гасанага**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, отдел волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана, Азербайджанская Республика, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабадзе, д. 9; ORCID: 0000-0002-4875-8246.

**Мамедова Гюльдаста Акиф**, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, отдел волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана, Азербайджанская Республика, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабадзе, д. 9; ORCID: 0000-0002-7753-1593, Scopus ID: 57226500009, eLIBRARY SPIN-код: 2937-6621; gular-gulshan@rambler.ru

**Рустамова Мехсети Акиф кызы**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, доцент отдела волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана, Азербайджанская Республика, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабадзе, д. 9; ORCID: 0000-0001-5192-1166, Scopus ID: 55489058000, eLIBRARY SPIN-код: 2290-2409; mehsetir@gmail.com

© Агаларов Д.Г., Мамедова Г.А., Рустамова М.А., 2022

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Investigation of waves in the strengthened net

Jafar H. Agalarov , Guldasta Akif Mammadova ✉, Mexseti Akif Rustamova 

*Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan Republic*

✉ gular-gulshan@rambler.ru

### Article history

Received: April 20, 2022

Revised: June 10, 2022

Accepted: June 12, 2022

### For citation

Agalarov J.H., Mammadova G.A., Rustamova M.A. Investigation of waves in the strengthened net. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(3):269–279. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-3-269-279>

**Abstract.** The movements of a reinforced net are considered. Mesh systems are used in various areas of modern technology, aviation, fishing, and construction. In recent years, much attention has been drawn to the complete equations that describe the motion of a deformable thread. In accordance with the studied task, the reinforcement of the net is carried out by adding terms in the equations of motion. In the planar case, the static behavior of the structure is investigated, and equations of motion are derived that allow the study of motion. The problem of wave propagation in deformable filament systems, taking into account a significant deviation of the filament shape from the original rectilinear one, is mathematically very difficult, since the equations of motion are a system of nonlinear differential equations in partial derivatives. To solve the problem, the method of characteristics is used. As well the method of characteristics solves the problem of the propagation of unloading waves (in the case of a load, shock waves arise). Depending on the velocity distribution at the boundary, the distribution of the strain constant on the characteristics is determined. The results are constructed by numerical integration of the integrals of the characteristics found by the method. The solution using the characteristic equations shows the occurrence of traveling waves.

**Keywords:** net, wave velocity, characteristics method, deformation, stress

### Введение

В [1] на основе уравнений движения сети в общем случае строятся уравнения движения цилиндрической сети. Определяются варианты распространения волн в случае основы сети из упругих волокон. Методом характеристик решена и проиллюстрирована расчетами задача о распространении волн разгрузки в предварительно натянутой сети.

На основе механики сетей [2–10] рассматриваются уравнения движения сети с дополнительными членами, которые соответствуют сопротивлению относительной поворота ветвей сети. Задача о распространении волн в случае плоской сети также решена методом характеристик и проиллюстрирована расчетами.

В последние годы большое внимание привлекали полные уравнения, которые описывают движение деформируемой нити при больших прогибах. Частично этот интерес обусловлен техническими приложениями физических явлений, описываемых этими уравнениями. Например, в [11] рассмотрена задача о поперечном ударе, имеющая точные решения типа простых волн, и показано, что данные уравнения обеспечивают фундаментальную теоретическую основу для проведения экспериментальных исследований поведения материалов при больших динамических деформациях и высоких скоростях деформирования.

В [12] рассмотрена задача о поперечном ударе по гибкой нити столь тупым клином, что его щеки оказывают влияние на характер движения нити. Особенность предложенной схемы решения поставлен-

**Jafar Hasanaga Agalarov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, chief researcher, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 9 B. Vahabzade St, Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic; ORCID: 0000-0002-4875-8246.

**Guldasta Akif Mammadova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, leading researcher, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 9 B. Vahabzade St, Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic; ORCID: 0000-0002-7753-1593, Scopus ID: 57226500009, eLIBRARY SPIN-code: 2937-6621; gular-gulshan@rambler.ru

**Mexseti Akif Rustamova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Associate Professor of the Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 9 B. Vahabzade St, Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic; ORCID: 0000-0001-5192-1166, Scopus ID: 55489058000, Web of Science Researcher ID: AAE-2689-2019, eLIBRARY SPIN-code: 2290-2409; mehsetir@gmail.com

ной задачи заключается в том, что вводятся сосредоточенные силы в точках излома; предполагается, что в области поперечных движений нить прилегает к щеке клина.

В [13; 14] исследовалась динамика пространственных форм гибких связей. Первыми были рассмотрены задачи об ударе гладким конусом по нити [14] и решены автомодельные задачи. В [13] найден класс частных решений уравнений движения нити на поверхности абсолютно гладкого конуса.

Теория сети построена на основе нити Х.А. Рахматулина [15]. На основе предложенной теории сети рассмотрен ряд задач, в том числе для плоских и пространственных конструкций. Также рассмотрены задачи для цилиндрических конструкций. Гибкие бурильные трубы могут рассматриваться как подкрепленная сеть.

В [16] рассматривается некоторая континуальная система (напряжения, деформации, перемещения описываются функциями непрерывно меняющихся аргументов). Такой подход к исследованию сетчатых систем позволил эффективно использовать методы механики деформируемого твердого тела и аппарат уравнений математической физики [17–19].

В настоящее время известны сетевые и вантовые структуры. В частности, в качестве примера можно привести рыболовные сети [20]. В рассматриваемых задачах сеть рассматривается как изотропная среда. В случае больших деформаций или течения воды будут иметь место значительные отклонения расчетов от реальных состояний.

Для статических задач это применимо. В случае движения результаты могут значительно отличаться от реальных, особенно при волновом движении.

Можно сказать то же самое про вантовые сооружения с поддерживаемыми элементами из сетей или тканей, подвергающихся ветровым нагрузкам.

Построенная на основе теории нити Х.А. Рахматулина [1] теория сети [2] расширяется в случае среды, сопротивляющейся сдвигу, путем присоединения к предыдущим уравнениям дополнительных членов. Данная теория может быть применена к тканям различной конструкции.

К сетевым системам можно также отнести вантовые системы. Ветровые нагрузки дадут отклонения при расчетах для тканой сети.

Цель работы состоит в исследовании волн в подкрепленной плоской сети.

### Постановка и решение задачи

Уравнения сети впервые были приведены в [1]. Уравнение движения сети, построенной на основе теории Х.А. Рахматулина, с учетом сопротивления относительно поворота элементов сети будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1 \bar{\tau}_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2 \bar{\tau}_2) + \alpha \frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_2 \bar{\tau}_2) + \alpha \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_1 \bar{\tau}_1) = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\rho_1$  – плотность сети;  $\rho_2$  – плотность подкрепления;  $\alpha$  – коэффициент усилия сопротивления относительно поворота элементов в различных направлениях.

Получим замкнутую систему уравнений движения, дополняя кинематические соотношения

$$(1 + e_1) \bar{\tau}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1}, \quad (2)$$

$$(1 + e_2) \bar{\tau}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2}, \quad (3)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – напряжения волокон в направлениях  $\bar{\tau}_1$  и  $\bar{\tau}_2$ ;  $\bar{\tau}_1$ ,  $\bar{\tau}_2$  – единичные векторы касательные к нитям;  $e_1$  и  $e_2$  – относительные удлинения соответствующих нитей;  $\bar{r}$  – радиус-вектор частицы сети;  $\gamma_1, \gamma_2$  – углы нитей, образованные осью сети;  $s_1$  и  $s_2$  – лагранжевы координаты частиц нитей.

Уравнения плоской сети будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1 \cos \gamma_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2 \sin \gamma_2) + \alpha \frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_2 \sin \gamma_2) + \alpha \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_1 \cos \gamma_1) = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1 \sin \gamma_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2 \cos \gamma_2) + \alpha \frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_2 \cos \gamma_2) + \alpha \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_1 \sin \gamma_1) = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$(1 + e_1) \cos \gamma_1 = 1 + \frac{\partial u}{\partial s_1}, \quad (6)$$

$$(1 + e_2) \sin \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial s_2}, \quad (7)$$

$$(1 + e_1) \sin \gamma_1 = \frac{\partial y}{\partial s_1}, \quad (8)$$

$$(1 + e_2) \cos \gamma_2 = \frac{\partial y}{\partial s_2} + 1. \quad (9)$$

Для выявления роли подкрепления на деформирование сети рассмотрим случай статического растяжения полосы (рис. 1). Сеть равного наклона ветвей к координатам под действием цели  $P$ .

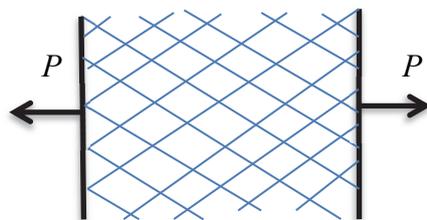


Рис. 1. Подкрепленные сети  
Figure 1. Fortified net

Далее рассматривается симметричное расположение правых и левых волокон. Тогда уравнения (4)–(9), учитывая

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad s_1 = s_2 = s,$$

примут вид

$$\sigma(\cos \gamma + \sin \gamma) = \frac{P}{1 + \alpha}, \quad (10)$$

$$(1 + e)(\cos \gamma - \sin \gamma) = 1. \quad (11)$$

Из (10) видно, что часть нагрузки берет на себя подкрепление  $\frac{P}{1 + \alpha}$ .

Если возвести в квадрат выражения (10) и (11) и сложить их рядом, получим

$$\frac{P^2}{(1 + \alpha)^2 \sigma^2} + \frac{1}{(1 + e)^2} = 2. \quad (12)$$

Откуда можно определить деформацию и из (11) угол поворота.

Уравнение движение

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\rho + \rho_1}{1 + \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Рассмотрим плоское движение сети. Ось  $u$  располагается в диагональном направлении. Уравнение (4) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial s} (\sigma(\cos \gamma + \sin \gamma)) = \frac{\rho + \rho_1}{1 + \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Уравнения (6) и (7) будут иметь вид

$$\cos \gamma = \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial s}}{1 + e}, \quad (14)$$

$$\sin \gamma = \frac{\frac{\partial u}{\partial s}}{1 + e}. \quad (15)$$

Подставив в (13), получим

$$\frac{\sigma}{1 + e} \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\rho + \rho_1}{1 + \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

или

$$\left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial s}\right) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\sigma}{1 + e} + \frac{2\sigma}{1 + e} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\rho + \rho_1}{1 + \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (16)$$

Из (14) и (15)

$$e = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2} - 1, \quad (17)$$

откуда

$$\frac{\partial e}{\partial s} = \frac{\left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial s}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}}. \quad (18)$$

Предполагая, что материал сети линейно упругий, то есть  $\sigma = Ee$ , имеем:

$$E \frac{\partial}{\partial s} \frac{e}{1 + e} = \frac{E}{(1 + e)^2} \cdot \frac{\partial e}{\partial s}, \quad (19)$$

а также

$$\frac{Ee}{1+e} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}} E. \quad (20)$$

Подставив (17) и (18) в (19), получим

$$E \frac{\partial}{\partial s} \frac{e}{1+e} = \frac{E \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial s}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}{\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (21)$$

Подставив (21) и (20) в (16), получим

$$\frac{\left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 E}{\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + 2E \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 + \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}} \left[ \frac{\left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2} - 2 \right] + 2 \right\} \frac{1 + \alpha}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} E = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Рассмотрим величину

$$a^2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}} \left[ \frac{\left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2} - 2 \right] + 2 \right\} \frac{1 + \alpha}{\rho_1 + \rho_2} E.$$

С увеличением  $\frac{\partial u}{\partial s}$   $a$  увеличивается.

Уравнения движения сети представим в виде

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (22)$$

Поскольку с ростом  $\frac{\partial u}{\partial s}$   $a$  растет, скорость волн увеличивается, и в задаче о движении полубесконечной сети при нагружении неподвижной сети с одного края будет возникать ударная волна.

При разгрузке предварительно растянутой сети будут возникать непрерывные волны.

Исследуем этот случай. Введем метод характеристик. Пусть сеть находится в растянутом состоянии  $e_0$ .

На границе сеть разгружается со скоростью  $\xi(t)$ . Характеристики уравнения (22) имеют вид

$$ds = a dt, \tag{23}$$

$$ds = -a dt. \tag{24}$$

Условия на характеристиках

$$du_t = a du_s \tag{25}$$

и

$$du_t = -a du_s, \tag{26}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial s} = u_s, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t \right),$$

$$u_t - \xi_0 = \int_{u_s^0}^{u_s} a du_s, \tag{27}$$

$$u_t - 0 = - \int_e^{u_s} a du_s. \tag{28}$$

Фронт волны разгрузки движется со скоростью  $a(e_0)$ . В части  $DOA$  (рис. 2.) состояние покоя.

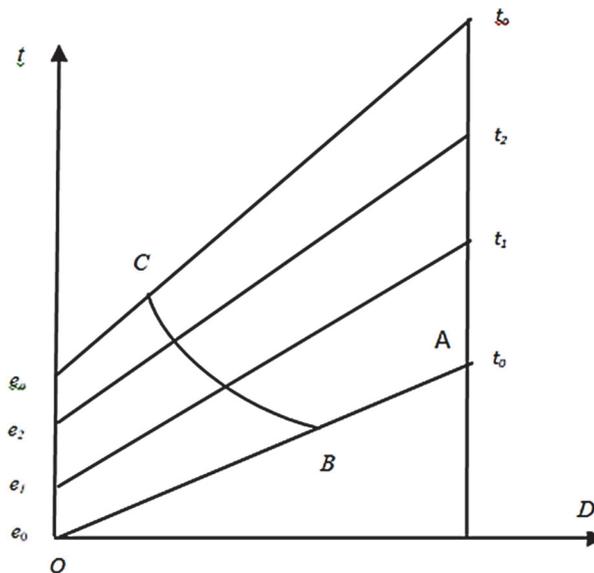


Рис. 2. Описание скорости волны  
Figure 2. Description of wave speed

Из условия на отрицательной характеристике ВС следует  $u_t = -\int_{u_s^0}^{u_s} a du_s$ ; дифференцируя в направлении положительной характеристики, имеем  $du_t = -a du_s$ .

Сравнивая с (25), получим  $u_t = \text{const}$ ,  $u_s = \text{const}$ , то есть на положительных характеристиках  $u_t$  и  $u_s$  постоянны.

Из (23) имеем

$$u_t = \xi(t - \frac{s}{a}) \quad \text{и} \quad u_s = \eta(t - \frac{s}{a}) + e \tag{29}$$

при  $t = \frac{u}{a_0}$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = e$ .

На  $u = 0$  выбираем  $t_0$  и определяем  $\varepsilon$ .

Из (26)

$$du_t = \xi'(dt - \frac{ds}{a} + \frac{s}{a^2} a' du_s), \tag{30}$$

$$du_s = \eta'(dt - \frac{ds}{a} + \frac{s}{a^2} a' du_s). \tag{31}$$

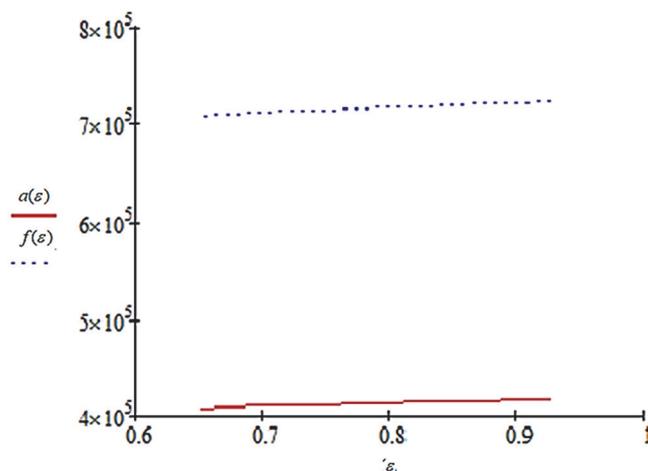
Из (30) и (31)

$$1 + \frac{\eta'}{\xi'} a = 0, \tag{32}$$

$$dt - \frac{ds}{a} + \frac{s}{a^2} a' du_s = 0, \tag{33}$$

Рассмотрим примеры:  $\gamma_0 = \frac{\pi}{4}$  и  $\gamma_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $e_0 = 0,1$ ,  $a_0 = 5000$  м/с.

График  $a(u_s) = a(\varepsilon)$  ( $u_s = \varepsilon$ ),  $f(\varepsilon)$  показан на рис. 3.



**Рис. 3.** На границе распределение деформации постоянной на характеристиках  
**Figure 3.** At the boundary, the distribution of deformation constant on the characteristics

Пусть на границе  $s = 0$  сеть разгружается со скоростью  $\xi(t)$ .  
Из (26)

$$\xi(t) = - \int_{u_0}^u a(u_s) du_s, \tag{34}$$

где  $\xi(t)$  – функция верхнего предела интеграла.

Приближенно представим интеграл (34) в виде суммы

$$\xi(\eta) = \int_0^\eta a(\eta) d\eta, \tag{35}$$

$$\xi_0 = a(\varepsilon_0) \Delta\varepsilon,$$

$$\xi_1 = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1)) \Delta\varepsilon,$$

$$\xi_2 = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1) + a(\varepsilon_2)) \Delta\varepsilon,$$

.....

$$\xi_n = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1) + \dots + a(\varepsilon_n)) \Delta\varepsilon,$$

или

$$\xi = f(\varepsilon),$$

то есть обратную зависимость  $\varepsilon \rightarrow \xi$  на границе. Поскольку положительные характеристики прямолинейны, можно определить  $\varepsilon$  во всей области движения. Функциональная зависимость «скорость движения – скорость волны» для рассмотренного примера представлена в табл. 1 и 2.

Таблица 1 / Table 1

**Функциональная зависимость «скорость движения – скорость волны»,  
расчетные значения других используемых параметров,  $\rho_1 = 1000$ ,  $\rho_2 = 5000$   
Functional dependence of the speed of movement – the speed of the wave,  
the calculated values of other parameters used  $\rho_1 = 1000$ ,  $\rho_2 = 5000$**

$\varepsilon_0$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$\varepsilon_8$	$\varepsilon_9$	$\varepsilon_{10}$
0,925	0,900	0,875	0,85	0,825	0,800	0,775	0,750	0,725	0,700	0,675
$e(\varepsilon_0)$	$e(\varepsilon_1)$	$e(\varepsilon_2)$	$e(\varepsilon_3)$	$e(\varepsilon_4)$	$e(\varepsilon_5)$	$e(\varepsilon_6)$	$e(\varepsilon_7)$	$e(\varepsilon_8)$	$e(\varepsilon_9)$	$e(\varepsilon_{10})$
1,136	1,102	1,069	1,036	1,003	0,97	0,937	0,904	0,871	0,838	0,806
$a(\varepsilon_0)$	$a(\varepsilon_1)$	$a(\varepsilon_2)$	$a(\varepsilon_3)$	$a(\varepsilon_4)$	$a(\varepsilon_5)$	$a(\varepsilon_6)$	$a(\varepsilon_7)$	$a(\varepsilon_8)$	$a(\varepsilon_9)$	$a(\varepsilon_{10})$
$4,17 \cdot 10^5$	$4,165 \cdot 10^5$	$4,159 \cdot 10^5$	$4,153 \cdot 10^5$	$4,146 \cdot 10^5$	$4,139 \cdot 10^5$	$4,132 \cdot 10^5$	$4,124 \cdot 10^5$	$4,115 \cdot 10^5$	$4,106 \cdot 10^5$	$4,096 \cdot 10^5$
$\xi_0$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$	$\xi_{10}$
$4,17 \cdot 10^3$	$8,335 \cdot 10^3$	$12,49 \cdot 10^3$	$16,64 \cdot 10^3$	$20,79 \cdot 10^3$	$24,93 \cdot 10^3$	$29,06 \cdot 10^3$	$33,18 \cdot 10^3$	$37,29 \cdot 10^3$	$41,40 \cdot 10^3$	$45,50 \cdot 10^3$

Таблица 2 / Table 2

**Функциональная зависимость «скорость движения – скорость волны»,  
расчетные значения других используемых параметров,  $\rho_1 = \rho_2 = 1000$   
Functional dependence of the speed of movement – the speed of the wave,  
the calculated values of other parameters used,  $\rho_1 = \rho_2 = 1000$**

$\varepsilon_0$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$\varepsilon_8$	$\varepsilon_9$	$\varepsilon_{10}$
0,925	0,900	0,875	0,85	0,825	0,800	0,775	0,750	0,725	0,700	0,675
$e(\varepsilon_0)$	$e(\varepsilon_1)$	$e(\varepsilon_2)$	$e(\varepsilon_3)$	$e(\varepsilon_4)$	$e(\varepsilon_5)$	$e(\varepsilon_6)$	$e(\varepsilon_7)$	$e(\varepsilon_8)$	$e(\varepsilon_9)$	$e(\varepsilon_{10})$
1,136	1,102	1,069	1,036	1,003	0,97	0,937	0,904	0,871	0,838	0,806
$f(\varepsilon_0)$	$f(\varepsilon_1)$	$f(\varepsilon_2)$	$f(\varepsilon_3)$	$f(\varepsilon_4)$	$f(\varepsilon_5)$	$f(\varepsilon_6)$	$f(\varepsilon_7)$	$f(\varepsilon_8)$	$f(\varepsilon_9)$	$f(\varepsilon_{10})$
$7,223 \cdot 10^5$	$7,214 \cdot 10^5$	$7,204 \cdot 10^5$	$7,193 \cdot 10^5$	$7,182 \cdot 10^5$	$7,17 \cdot 10^5$	$7,156 \cdot 10^5$	$7,143 \cdot 10^5$	$7,128 \cdot 10^5$	$7,112 \cdot 10^5$	$7,094 \cdot 10^5$
$\xi_0$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$	$\xi_{10}$
$7,223 \cdot 10^3$	$14,44 \cdot 10^3$	$21,64 \cdot 10^3$	$28,83 \cdot 10^3$	$36,01 \cdot 10^3$	$43,18 \cdot 10^3$	$50,34 \cdot 10^3$	$57,48 \cdot 10^3$	$64,62 \cdot 10^3$	$71,75 \cdot 10^3$	$78,86 \cdot 10^3$

Задавая на границе скорость движения конца сети как функцию времени, можно определить деформацию как функцию времени на конце сети и вышеуказанным образом всюду в области  $DOt$ . Для примера возьмем  $\xi = kt$ , тогда  $t = f(\varepsilon)/k$ .

В зависимости от распределения скорости на границе определяется распределение деформации постоянной на характеристиках (рис. 3).

### Заключение

Решение с помощью уравнений характеристик показывает возникновение бегущих волн. Методом характеристик построено решение практических задач распространения волн в новой среде, моделирующей армированные материалы и материи определенной конструкции. Полученные результаты могут быть использованы в различных областях авиации, рыболовства и строительства.

### Список литературы

1. Agalarov J.H., Mamedova G.A., Gasanova T.J. Unloading wave in a cylindrical net // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. No. 8. Pp. 1138–1143. <https://doi.org/10.3103/S0025654419080028>
2. Rustamova M.A. Unloading wave in the cylindrical network from nonlinear elastic fibers // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019. Vol. 15. No. 2. Pp. 149–157. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-149-157>
3. Agalarov J.H., Gulieva M.A. Movement equation of a net in the plane // *Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Серия физико-математических и технических наук. Математика и механика*. 1998. Т. XVIII. № 2. С. 103–105.
4. Seyfullayev A.I., Gulieva M.A. To the solution of the equilibrium problem of the net // *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan*. Baku, 2000. Vol. XIII. Pp. 144–147.
5. Агаларов Д.Г., Сейфуллаев А.И., Гулиева М.А. Численное решение одной плоской задачи равновесия сети // *Механика, машиностроение*. 2001. № 1. С. 3–4.
6. Gulieva M.A. Tension of a rectangular net fastened from two adjacent sides // *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan*. 2002. Vol. XVI (XXIV). Pp. 156–160.
7. Agalarov J.H., Gulieva M.A. Waves of strong breaks in nets // *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan*. 2002. Vol. XVII (XXV). Pp. 135–137.
8. Агаларов Д.Г. Исследование движения сетей при ударе // *Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Серия физико-математических и технических наук*. 1982. № 6. С. 38–41.
9. Agalarov J.H., Efendiev A.N. The propagation of nonlinear waves in a structure consisting of net system // *Journal of Structural Mechanics*. 1988. Vol. 21. No. 2. Pp. 3–10.
10. Баренблат Г.И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций // *Прикладная математика и механика*. 1953. Т. 17. № 4. С. 455–460.
11. Керимов К.А. Методика определения ударной диаграммы растяжений // *Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Серия физико-математических и технических наук*. 1960. № 3. С. 27–30.
12. Зверев И.Н. Некоторые задачи о распространении волн при ударе: дис. ... канд. ф.-м. наук. Самарканд, 1949. 93 с.
13. Нуриев Б.Р. Косой удар конусом по упругой и упруго-пластической нити // *Деп. ВИНТИ от I4.If.1975*. № 2968-75.
14. Агаларов Д.Г., Рахматулин Х.А., Нуриев Б.Р. Удар конусом по нити с большими скоростями // *Распространение упругих и упруго-пластических волн: сборник материалов VI Всесоюзного симпозиума*. Фрунзе, 1978.
15. Рахматулин Х.А. Об ударе по гибкой нити // *Прикладная математика и механика*. 1947. Т. 10. № 3. С. 379–382.
16. Касумов О.К. Поперечный удар по сетчатой полосе // *Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Серия физико-математических и технических наук*. 1986. № 2. С. 62–66.
17. Агаларов Д.Г. Исследование движения сетей при ударе // *Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Серия физико-математических и технических наук*. 1982. № 6. С. 38–41.
18. Касумов О.К. Плоское движение сетей при ударе // *Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Серия физико-математических и технических наук*. 1983. № 3. С. 30–36.
19. Касумов О.К. Удар по полубесконечной сети // *Деп. в ВИНТИ*. 1982. № 3782-82.
20. Зонов А.И. Геометрия рыболовной сети и ее равновесное состояние // *Известия ГНИ-ИОиРРХ*. 1971. Т. 73. С. 96–167.

## References

1. Agalarov J.H., Mamedova G.A., Gasanova T.J. Unloading wave in a cylindrical net. *Mechanics of Solids*. 2019;54(8):1138–1143. <https://doi.org/10.3103/S0025654419080028>
2. Rustamova M.A. Unloading wave in the cylindrical network from nonlinear elastic fibers. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(2):149–157. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-149-157>
3. Agalarov J.H., Gulieva M.A. Movement equation of a net in the plane. *Proceedings of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR. Series of Physical, Mathematical and Technical Sciences*. 1998;XVIII(2):103–105.
4. Seyfullayev A.I., Gulieva M.A. To the solution of the equilibrium problem of the net. *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan*. 2000;XIII:144–147.
5. Agalarov D.G., Seyfullaev A.I., Gulieva M.A. The numerical decision of one flat problem of balance of a network. *The Mechanic Engineering*. 2001;(1):3–4. (In Russ.)
6. Gulieva M.A. Tension of a rectangular net fastened from two adjacent sides. *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan*. 2002;XVI(XXIV):156–160.
7. Agalarov J.H., Gulieva M.A. Waves of strong breaks in nets. *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan*. 2002;XVII(XXV):135–137.
8. Agalarov J.H. Research of movement of networks at blow. *News of Academy of Sciences of the Azerbaijan Soviet Socialist Republic. Series of Physicotechnical and Mathematical Sciences*. 1982;(6):38–41. (In Russ.)
9. Agalarov J.H., Efendiev A.N. The propagation of nonlinear waves in a structure consisting of net system. *Journal of Structural Mechanics*. 1988;21(2):3–10.
10. Barenblat G.I. About distribution of instant indignations to the environment with nonlinear dependence of pressure on deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1953;17(4):455–460. (In Russ.)
11. Kerimov K.A. Method of determining the shock diagram of stretching. *Proceedings of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR. Series of Physical, Mathematical and Technical Sciences*. 1960;(3):27–30. (In Russ.)
12. Zverev I.N. *Some problems of wave propagation at impact* (Ph.D. dissertation). Samarkand; 1949. (In Russ.)
13. Nuriev B.R. Oblique blow with a cone on an elastic and elastic-plastic thread. *Dep. VINITI from I4.If.I975*. No. 2968-75. (In Russ.)
14. Agalarov D.G., Rakhmatulin H.A., Nuriev B.R. Impact of a cone on a thread with high speeds. *Propagation of Elastic and Elastoplastic Waves: Collection of Materials of the VI All-Union Symposium*. Frunze; 1978. (In Russ.)
15. Rakhmatulin Kh.A. On hitting a flexible thread. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1947;XII:379–382. (In Russ.)
16. Kasumov O.K. Transverse impact on the mesh strip. *Proceedings of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR. Series of Physical, Mathematical and Technical Sciences*. 1986;(2):62–66. (In Russ.)
17. Agalarov J.H. Research of movement of networks at blow. *Proceedings of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR. Series of Physical, Mathematical and Technical Sciences*. 1982;(6):38–41. (In Russ.)
18. Kasumov O.K. Flat motion of nets on impact. *Proceedings of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR. Series of Physical, Mathematical and Technical Sciences*. 1983;(3):30–36. (In Russ.)
19. Kasumov O.K. A blow to a semi-infinite network. *Dep. in VINITI*. 1982. No. 3782–82. (In Russ.)
20. Zonov A.I. Geometry of a fishing net and its equilibrium state. *Izvestiia GNI-IOiRRKH*. 1971;73:96–167. (In Russ.)

