

Приглашенный редактор С.Н. Кривошапко,
д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, RSCI, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения, 05.23.02 – Основания и фундаменты, подземные сооружения, 05.23.17 – Строительная механика.

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, соприкосновения материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Рычкова М.И., канд. техн. наук, РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Баженов В.А., акад. НАПН, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

Варум У., д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

Войццкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

Евкин А., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

Зверев Е.М., д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

Иванов С.П., д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Кикоин С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Лисичкин С.Е., д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

Лахович Л.С., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюдпек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

Санжаровский Р.С., д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Якупов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Федоров В.С.</i> Приветственное слово	551
<u>ОТ ПРИГЛАШЕННОГО РЕДАКТОРА ТЕМАТИЧЕСКОГО НОМЕРА ЖУРНАЛА</u>	
<i>Кривошапко С.Н.</i> Оболочечные структуры и оболочки в начале XXI в.	553
<u>ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК</u>	
<i>Иванов В.Н.</i> Геометрия нормальных линейчатых поверхностей	562
<u>ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК</u>	
<i>Якупов Н.М., Якупов С.Н.</i> Диагностика тонкостенных конструкций сложной геометрии и структуры	576
<i>Зверев Е.М., Тушикова Е.М.</i> Итерационные методы построения решения уравнений незамкнутых оболочек	588
<u>ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК</u>	
<i>Косицын С.Б., Акулич В.Ю.</i> Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с неоднородным окружающим основанием	608
<i>Агапов В.П., Маркович А.С.</i> Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС	617
<u>ДИНАМИКА ОБОЛОЧЕК</u>	
<i>Рустамова М.А.</i> Определение собственных частот колебаний армированной цилиндрической оболочки	628
<u>РАСЧЕТ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ</u>	
<i>Мусаев В.К.</i> Математическое моделирование изгибных волн напряжений в надземном нефтепроводе при нестационарном сейсмическом воздействии	639
<u>ОПТИМИЗАЦИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК</u>	
<i>Саргсян А.Е.</i> Оптимизации проектных решений защитных конструкций сооружений атомных станций	651
<u>ДЕРЕВЯННЫЕ ОБОЛОЧЕЧНЫЕ СТРУКТУРЫ</u>	
<i>Пятникрестовский К.П., Соколов Б.С.</i> Экономическая целесообразность учета совместной работы несущих и ограждающих элементов в большепролетных деревянных пространственных конструкциях	664

Редактор Ю.А. Заикина

Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова

Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 21.04.2022. Выход в свет 28.04.2022. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 15,34. Тираж 250 экз. Заказ № 1232. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов, 2021

© Кривошапко В.С., фото на обложке

(Спорткомплекс в Душанбе, Таджикистан), 2021

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2021 VOLUME 17 No. 6

Prospects for the application of shell structures and thin shells in the first half of the 21st century

Guest Editor *Sergey N. Krivoshapko*,
DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Marina I. Rynkovskaya, PhD of Technical Science, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Vladimir I. Andreev, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Viktor A. Bazhenov, member of the NAES of Ukraine, DSc, Professor, KNUCA, Kiev, Ukraine

Sergey P. Ivanov, DSc, Professor, VSUT (Volga Tech), Yoshkar-Ola, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

Vitaliy I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, SWSU, Kursk, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey E. Lisichkin, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

Leonid S. Lyakhovich, member of the RAACS, DSc, Professor, TSUAB, Tomsk, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonca, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Rudolf S. Sanjarovskiy, DSc, Professor, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

Alex Yevkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Evgeniy M. Zveryaev, DSc, Professor, KIAM RAS, Moscow, Russia

CONTENTS

<i>Fedorov V.</i> A message of greetings	551
<u>FROM THE EDITOR-IN-CHIEF</u>	
<u>OF THE THEMATIC NUMBER OF THE JOURNAL</u>	
<i>Krivoshapko S.N.</i> Shell structures and shells at the beginning of the 21st century	553
<u>SHELL FORMING</u>	
<i>Ivanov V.N.</i> Geometry of the normal ruled surfaces	562
<u>THEORY OF THIN SHELLS</u>	
<i>Yakupov N.M., Yakupov S.N.</i> Diagnostics of thin-walled structures of complex geometry and structure	576
<i>Zveryaev E.M., Tupikova E.M.</i> Iterative methods for constructing an equations of non-closed shells solution	588
<u>NUMERICAL METHODS OF SHELL ANALYSIS</u>	
<i>Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu.</i> Numerical analysis of cylindrical shell stability interacting with inhomogeneous soil	608
<i>Agapov V.P., Markovich A.S.</i> Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program	617
<u>SHELL DYNAMICS</u>	
<i>Rustamova M.A.</i> Determination of natural vibration frequencies of reinforced cylindrical shell	628
<u>CALCULATION OF SEISMIC IMPACTS</u>	
<i>Musayev V.K.</i> Mathematical modeling of bending stress waves in an aboveground oil pipeline under unsteady seismic action	639
<u>OPTIMIZATION OF REINFORCED CONCRETE SHELLS</u>	
<i>Sargsyan A.E.</i> Optimization of design solutions of protective structures of erections of nuclear power stations	651
<u>WOODEN SHELL STRUCTURES</u>	
<i>Pyatikrestovskiy K.P., Sokolov B.S.</i> The economic feasibility of taking into account the joint work of load-bearing and enclosing elements in large-span wooden spatial structures	664

Copy Editor Iu.A. Zaikina
Graphic Designer Iu.N. Efremova
Layout Designer Iu.A. Zaikina

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation



Уважаемые коллеги, представители научных и промышленных сообществ, авторский коллектив журнала «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений»!

В России 2021 г. объявлен Годом науки и технологий. В связи с этим редакционная коллегия журнала «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений» приняла решение отметить данное событие выпуском тематического номера, в котором все статьи посвящены решению проблемы обеспечения надежности и безопасности оболочечных конструкций и перспективам применения оболочечных структур и тонких оболочек в первой половине XXI в.

Номер содержит научные работы как современных высокорейтинговых, так и молодых ученых, работающих по различным направлениям теории оболочек и оболочечных структур. Представлены современные исследования по архитектуре оболочек, их геометрическому и физическому моделированию, построению аналитических и численных методов расчета оболочек на прочность и устойчивость при статических и динамических воздействиях. Приведены результаты исследования применения различных конструкционных материалов для изготовления рассматриваемых структур. Следует отметить, что современное развитие теории расчета оболочек базируется на трудах известных российских ученых XX столетия: В.З. Власова, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, К.З. Галимова, В.В. Новожилова, А.Л. Гольденвейзера и других, а также основоположников иностранной школы теории оболочек: L.H. Donnel, W. Flügge, E. Meissner, E. Reissner и др.

Научному и инженерному профессиональному сообществу России и зарубежья известна активная научно-исследовательская работа по развитию теории оболочек, их практическому внедрению, проводимая научной школой Инженерной академии Российского университета дружбы народов. Школа была основана доктором технических наук, профессором В.Г. Рекачом и получила развитие при его ученике, известном специалисте в области геометрии и теории расчета оболочек докторе технических наук, профессоре С.Н. Кривошапко.

В вузе сложились тесные научные отношения со многими известными учеными и организациями России. На базе Инженерной академии РУДН работает единственный в России межвузовский научный семинар «Геометрия и расчет оболочек неканонической формы», соучредителями которого являются департамент строительства Инженерной академии РУДН, кафедра сопротивления материалов и кафедра городского строительства и коммунального хозяйства МГСУ, кафедра технической и строительной механики РГАУ – МСХА имени Тимирязева, лаборатория нелинейной механики оболочек ИММ КазНЦ РАН, кафедра сопротивления материалов и прикладной механики ПГТУ, кафедра теоретической механики РУТ (МИИТ), кафедра машиноведения и деталей машин МГУ МАИ.

В РУДН много лет активно работал диссертационный совет по специальности 05.23.17 Строительная механика, в котором защищено более 60 кандидатских диссертаций по решению научных задач, связанных с развитием методики расчета и конструирования оболочек. С 2021 г. работает диссертационный совет по специальностям 05.23.17 Строительная механика и 05.23.01 Строительные конструкции, здания и сооружения. Высокое качество обучения привлекает российских и иностранных выпускников департамента строительства РУДН, которые поступают в аспирантуру по направлению 08.06.01 «Техника и технология строительства», направленности «Строительная механика».

В недалеком прошлом зарубежными и российскими учеными-механиками и архитекторами отмечалось, что «золотой век оболочек» пришелся на 1920–1960-е гг., а затем интерес к проектированию и строительству оболочечных структур снизился, как и к их применению в различных сферах деятельности человека. Сегодня результаты научных исследований и примеры построенных в начале текущего века оболочечных структур в разных странах, представленные в статьях номера, указывают, что спад интереса к проектированию и строи-

тельству оболочечных структур и тонкостенных оболочек закончился. Можно только приветствовать тематику исследований, поддерживаемую журналом.

Хочется отметить редакционную политику журнала «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений», публикации которого отличаются высоким научным качеством, профессионализмом, методически выверенным изложением и соответствием тематики заявленному профилю издания.

В.С. Федоров,
академик РААСН, доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Строительные конструкции, здания и сооружения»
Российского университета транспорта (МИИТ),
член экспертного совета ВАК РФ по строительству и архитектуре

ENG

Dear colleagues, representatives of scientific and industrial communities,
contributors to *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings* journal!

In Russia 2021 is The Year of Science and Technology. In recognition of that, the editorial board of *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings* journal decided to mark this occasion by publishing a thematic issue. All the articles are devoted to problems of reliability and safety of shell structures and perspectives of application of shells and thin-walled structures in the first half of the 21st century.

This issue comprises publications of top-rated innovative scientists, as well as young researches, working in the field of shell theory. Here you may find state-of-the-art investigations on architecture of shells, their geometric and physical modelling, deriving analytical and numerical methods of calculating shells in terms of strength and buckling, under static and dynamic load. Results of application of various materials for constructing considered thin-walled structures are also presented. It is worth to point out that contemporary development of shell theory is based on the works of notable Russian scientists of 20th century: Vasily Vlasov, Anatoly Lure, Hamid Mushtari, Kurban Galimov, Valentin Novozhilov, Alexey Goldenweiser among others, and also the pioneers of shell theory school abroad: Lloyd Donnel, Wilhelm Flügge, Ernst Meissner, Eric Reissner, etc.

Scientific and engineering professional community in Russia and abroad is aware of research in theory of shells and their practical implementation, which has been conducted by a scientific school at Academy of Engineering in RUDN University. This school was founded by Professor Vladimir Rekach and was subsequently developed by his student – well-known expert in the field of geometry and analysis of shells – Professor Sergey Krivoshapko.

RUDN University has formed scientific ties with numerous well-known researchers and institutions in Russia. One of a kind interacademic workshop “Geometry and Analysis of Non-Canonical Shells” is held by Academy of Engineering of RUDN University. Co-founders of this workshop include RUDN University Department of Civil Engineering, MGSU Department of Strength of Materials and Department of Urban Development and Municipal Services, RSAU – MTAA Department of Theoretical and Structural Mechanics, IME Laboratory of Non-linear Shell Mechanics at KazanSc subdivision of RAS, VSTU Department of Strength of Materials and Applied Mechanics, MIIT Department of Theoretical Mechanics, MAI MSU Department of Mechanical Engineering and Machinery.

RUDN University had a long-lasting and actively working dissertation council on Structural Mechanics major (code 05.23.17), which had conferred over 60 Candidate of Science degrees related to development of shell analysis and construction. This dissertation council reopened in 2021 in addition to the council on Structures, Buildings and Constructions major (code 05.23.01). High quality of education is attracting Russian and international graduates of RUDN University Department of Civil Engineering, who are entering Civil Engineering and Technology PhD program (code 08.06.01) with Structural Mechanics major.

Not long ago architects and researchers in mechanics in Russia and abroad considered “Golden Age of Shells” to be a period between 1920s and 1960s, and since then the interest in designing and constructing shell structures and also applying them in various aspects of human activity has dropped. Now, investigation results of presented papers, examples of constructed shell structures in the beginning of the current century in various countries, which are highlighted in the articles, indicate that the interest decline for shells is over. The research themes supported by the journal are only welcomed.

Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings journal editorial policy is also worth mentioning, since the publications are of high scientific value, professionalism, methodically coordinated in terms of representation and correspond to the publisher’s reported thematic profile.

Victor Fedorov,
RAACS Academician, DSc, Professor,
Head of MIIT Department of Structures, Buildings and Erections,
member of the Expert Board of Higher Attestation Committee
in Civil Engineering and Architecture



ОТ ПРИГЛАШЕННОГО РЕДАКТОРА ТЕМАТИЧЕСКОГО НОМЕРА ЖУРНАЛА FROM THE EDITOR-IN-CHIEF OF THE THEMATIC NUMBER OF THE JOURNAL

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561

UDC 624.074.4:69.001.12/18:72.01:691

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Shell structures and shells at the beginning of the 21st century

Sergey N. Krivoshapko 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

✉ sn_krivoshapko@mail.ru

Article history

Received: August 30, 2021

Revised: October 12, 2021

Accepted: October 21, 2021

For citation

Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):553–561. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>

Abstract. Researchers know that “golden century of shells” falls on 1920–1960 when the finishing of building of a thin-walled shell became an important event in life of country where this shell was erected. Every built shell was analyzed in tens of scientific works with a point of view of used method of analysis, applied constructive materials, cost of erection. Later on, an interest to thin-walled shells fell down. On the base of the fulfilled research in a paper, it is shown that application of shell structures is increasing in the 21st century because it was closely connected with needs of different branches of human activity. It is proved, that practically in all countries of the world, design and building of shell structures and shells was carried out. Only priority in application constructive materials changed. In the main, reinforced concrete was used earlier but now bar curvilinear structures, composite shells, and bar structures with the glass filling are in priority. It is shown that young and prominent architects and engineers take part in construction of considered structures and thin-walled shells. All conclusions are confirmed by references containing 38 used original sources.

Keywords: architectural styles, constructive building materials, thin-walled shell, shell architecture, shell analysis

Оболочечные структуры и оболочки в начале XXI в.

С.Н. Кривошапко 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ sn_krivoshapko@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 30 августа 2021 г.

Доработана: 12 октября 2021 г.

Принята к публикации: 21 октября 2021 г.

Аннотация. Общеизвестно, что «золотой век оболочек приходится на 1920–1960-е гг., когда окончание строительства тонкостенной оболочки считалось важным событием в жизни страны, где оболочка возводилась. Каждая построенная оболочка анализировалась в десятках научных работ

Sergey N. Krivoshapko, DSc, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9385-3699, eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966, Scopus Author ID: 6507572305; sn_krivoshapko@mail.ru

Кривошапко Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0002-9385-3699, eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966, Scopus Author ID: 6507572305; sn_krivoshapko@mail.ru

© Krivoshapko S.N., 2021

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

с точки зрения примененного метода ее расчета, использованного конструктивного материала, стоимости сооружения. Затем интерес к тонкостенным большепролетным оболочкам пошел на спад. В исследовании показывается, что применение оболочечных структур в XXI в. увеличивается в связи с запросами разных отраслей деятельности человека. Доказано, что практически во всех странах мира на разных континентах велось и ведется проектирование и строительство оболочечных структур и оболочек. Изменился только приоритет в применении конструктивных строительных материалов. Если раньше в основном применялся железобетон, то сейчас в приоритете стержневые криволинейные структуры, композитные оболочки и стержневые структуры с заполнением из стеклянных панелей. Продемонстрировано, что как начинающие, так и знаменитые архитекторы и инженеры принимают участие в проектировании рассматриваемых структур и тонкостенных оболочек.

Ключевые слова: архитектурные стили, конструкционные строительные материалы, тонкостенные оболочки, архитектура оболочек, расчет оболочек

Для цитирования

Кривошапко С.Н. Оболочечные структуры и оболочки в начале XXI в. // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 553–561. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>

Introduction

The statements of the most outstanding architects and engineers on perspectives of using of large-span space structures and thin-walled shells at present time and in the near future are gathered in a paper [1]. The most of them back up the opinion that “golden century of shells” was in 1920–1960 years but later on, an interest to thin-walled shells fell down till 2000. Then the sphere of application of shell structures came to increase in connection with requirements for new forms of public and industrial buildings. The well-known and also young architects begin to display a keen interest in design of shell structures [2; 3]. An attempt to exposure the criteria of estimation of outstanding erections was made in a paper [4] where the authors gave their view on ten of the most outstanding shell structures of the beginning of 21st century.

The aim of this investigation is study of public requirements on design and building of large-span shell structures in the world at the beginning of the 21st century.

Architectural styles of shells and shell structures at the beginning of the 21st century

Twenty-five architectural styles, their varieties, and the directions as applied to shells and shell structures were described in detail in a paper [5].



Figure 1. Industrial building, style “Industrial architecture,” Borracha, Portugal, 2017

(Available from: <https://www.pinterest.ru/pin/530298924878808497/> (accessed: 10.08.2021))



Figure 2. The building in the style “Architectural constructivism,” Moscow (photo by Sergey N. Krivoshapko)

In the 21st century, architects used 16 architectural styles that are:

- industrial architecture (Figure 1);
- architectural constructivism (Figure 2);
- deconstructivist architecture (Heydar Aliyev Center in Baku, Azerbaijan, 2012);
- bionic architecture (dwelling-house “Egg,” Moscow, 2002);
- organic architecture (villa “Shell,” Kuruzawa, Japan, 2008);
- expressionism (the Quadracci Pavilion of the Milwaukee Art Museum that received the 2004 Outstanding Structure Award from International Association for Bridge and Structural Engineering, Wisconsin, USA, 2001);
- American modernism (terminal 5 of John Kennedy International Airport, 2008);

- high-tech (geodesic grid shells; SONY Center dome, Berlin, 2000);
- geometrical high-tech (the biome domes of the Eden Project in Cornwall, UK, 2001);
- ecological high-tech (structures of ecovillage in Dietikon, Switzerland, 2009);
- polyhedron architecture (Figure 3) [6];
- brutalism [7];
- noospheric architecture (Figure 4);
- parametrical architecture [8];
- free-form architecture (digital architecture) (Figure 5);
- productivism (Figure 6).

The time of finishing of building of shells and shell structures is indicated in the text in parentheses.



Figure 3. Cultural-and-trade center “5 Planets,” Dmitrovskoe Shosse, Moscow region, 2018 (photo by Sergey N. Krivoshapko)



Figure 4. A dome dwelling-house, Moscow region (photo by Sergey N. Krivoshapko)

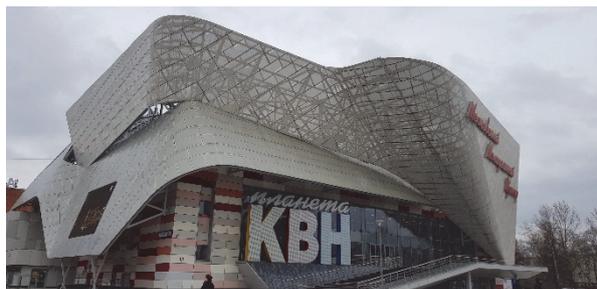


Figure 5. A building “The planet KVN”, Moscow, 2011 (photo by E.A. Grinko)



Figure 6. The arch pavilions, 8×8 m (Available from: <https://prime-tent.ru/arched-design.html> (accessed: 10.08.2021))

Naturally, every presented style was used not only in mentioned cases. For example, such architectural styles as free-form architecture, parametrical architecture, polyhedron architecture, and high-tech were used more often than other styles. It was occasioned by the rapid development of numerical methods of strength analysis, by appearance of computer modelling, new constructive building materials, and of standard computer programs of different purposes [9]. But some architects have another opinion. So, E.V. Ermolenko considers: “postmodernism, deconstructivism, parametrical architecture oversated space of life of man and style crisis came into existence” [10].

The researches on subject of this part showed that architects did not use nine architectural styles, their varieties, and the directions since the second half of the 20th century. That is why, application of all known diverse modern approaches to design of shell structures and shells practices in the 21st century also.

Constructive building materials for shells and large-span shell structures at the beginning of the 21st century

At all times, stone materials, bricks from burned clay, natural wood, glued wood, metals, reinforced concrete, plastics, composite materials, glass-reinforced plastics, glass, tent materials, and so on were used for building of shells. At different historical epochs, architects and builders gave preference to different constructive materials.

In the 21st century, architects and builders use glued wood [11] (Figure 7), rod steel [12], wire ropes, steel membrane (a covered skating-rink 200×120 m in Kolomna, 2009), aluminium (domes of a Wastewater Treat-

ment Plant, Haltom Region Ontario, Canada), titanium panels (National Grand Theater, Pekin, China, 2007), plastics, structural soda-lime glass (Figure 8), glass-reinforced plastic (a dome of Vladimirskiy Temple, poyolok Industriya, Moscow region, 2020), tent materials (the hip roof of SONY Center, Berlin, 2000), guys [13], reinforced concrete (“Shell residence” by Kotaro Ide, “Clever house” system, bionic architecture, Japan, 2008), and fine-mesh wire-fabric reinforced concrete (a cottage “Snail,” bionic architecture, Mexico City, Mexico, 2006) for erection of shells and shell structures.

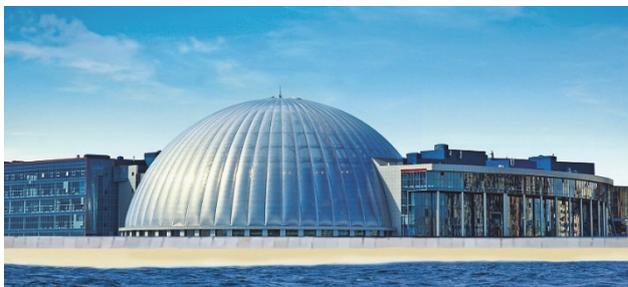


Figure 7. The biggest wooden dome in the world with a 43m height and a 90 m diameter, cultural-and-trade center “Piterland,” St. Petersburg, 2012

(Available from: <https://www.malls.ru/rus/malls/83604.shtml> (accessed: 15.08.2022))

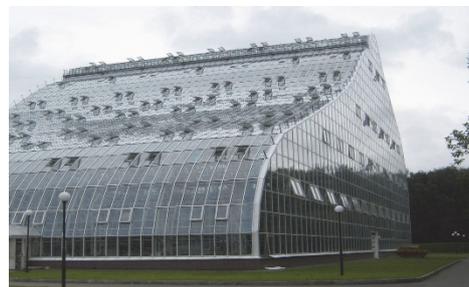


Figure 8. The greenhouse of the State Botanical Garden named after N.V. Tsitsin, Moscow, 2015 (photo by Sergey N. Krivoshapko)

It is obvious that all known constructive building materials found the application in building of considered structures and shells. But their application frequency changed. For example, reinforced concrete yielded to all of the rest of the constructive materials. Reinforced concrete shells are used now more in small-scale building, i.e. for building of dwelling objects, cafes, small offices, sheds, and so on, for erection of coverings of industrial buildings, or in erections where it is necessary for technological processes. Large-span reinforced concrete shells are not built practically. Thick-walled reinforced concrete shells, in general, of spherical and cylindrical shapes find the application in building of objects of civil defense.

Some countries where shell structures and shells were erected at the beginning of the 21st century

Consider some countries located on different continents.

Europe. *Russian Federation* (the biggest in Russia glazed dome in Nagatinskaya water-meadow over the central atrium, Moscow, 2020), *Spain* (Figure 9), *Federal Republic of Germany* (Philological library, Berlin, 2005 [14]), *Switzerland* (the CERN – Globe of Science and Innovation, timber, Geneva, 2007), *Czech Republic* (new building of National Library of the Czech Republic, digital architecture, Prague, 2011), *Portugal* (Figure 10), *Belarus* (the cable-stay two-belt system of a covering of MCSC “Minsk-Arena”, 2010), *England* (Wembley Stadium with sliding roof structures and with the 134-metre-high Wembley Arch of 7 m in diameter, London, 2007), *Belgium* (Liege Guillemin’s TGV Station, Liege, 2009), *Ireland* (the antenna from stainless steel of 121.2 m in height, Dublin, 2003, Figure 11), *Austria* (a roof of Martin Luther Church from bent steel plates of a 8 mm thickness and resting on the legs of the “table”-four steel columns, Hainburg, 2011), *France* (La Cité du Vin, Bordeaux, 2016), *Denmark* (National Aquarium “the Blue Planet” with a façade faced with aluminum plates, Copenhagen, 2013), *Hungary* (the glazed many-functional complex Central European Time (CET), built between two store-houses, Budapest, 2022), *Croatia* (the Mosque in Rijeka, Rijeka, 2013, arch. D. Vlahović, L. Vlahović, D. Đurkan-Horvat, and D. Mauser), *Turkey* (Sakirin Mosque with a 39.6 m diameter dome, Istanbul, 2009).

North and Central America. *USA* (World Trade Center Transportation Hub, New York, arch. S. Calatrava, 2016), *Puerto Rico* (an umbrella shell [15], Figure 12), *Canada* (Canadian Museum for Human Rights, Manitoba, 2014, arch. An. Predock), *Mexico* (a covering of the atrium from prestressed reinforced concrete, Institute of Advanced Technologies and Education, L.G. Land’s arch. group, 2005 [16]), *Jamaica* (the ecovillage from poured-in-place domes, the Source Farm ecovillage, 2005).

South America. Extensive information on modern architecture of Latin America is given in a book of L. Finotti [17] containing 103 illustrations.

Brazil (the theater, Rio de Janeiro, arch. Oscar Niemeyer, 2007), *Chile* (the Baha’ i Temple of South America in the form of nine veils, Santiago, design of Hariri Pontarini Architects (Canada), International Award of the Royal Architectural Institute of Canada, 2016), *Uruguay* (Montevideo Carrasco International Airport, the full length is 350 m, the width is 80 m, Montevideo, 2009).

Asia. China (a complex of the National Grand Theater from glass and titanium, 212×144×46 m, 2007), **Bahrain** (Bahrain Museum of Contemporary Art, Muharraq, arch. Z. Hadid, 2012), **United Arab Emirates** (82 snow-white domes of Sheikh Zayed Mosque, 2007); **India** (Global Pagoda, Mumbai, the biggest stone dome in the world built without support poles, the height of the dome is 29 m, 2009 [4]), **Georgia** (a covering over the “Mir” foot-bridge over the Kura river, Tbilisi, 2010), **Azerbaijan** (Heydar Aliyev Center in Baku, Azerbaijan, 2012), **Singapore** (“SportsHub” stadium contains the world’s largest 312 m diameter dome structure with a sliding roof, Kallang, 2015), **Abu Dhabi** (a steel roof over the thematic park “Ferrari World,” 2010), **Jordan** (Ayla Golf Academy and Clubhouse, waving shape of the covering in the form of sand dunes from air-placed concrete, Aqaba, 2018), **South Korea** (Dior shop in the form of vertical bud of flower, 2015), **Tajikistan** (Figure 13), **Israel** (Ashdod Performing Arts Center, Ashdod, 2012, arch. Naim Dotan), **the Lebanon** (Amir Shakib Arslan Mosque, Moukhtara, 2016), **Qatar** (Education City Mosque was declared the best religious erection at the World Architectural Festival in 2015, Doha, 2015), **Pakistan** (a cool tower of the sixth Nuclear Power Plant, Karachi, designed by China National Nuclear Corporation, 2021).



Figure 9. The Queen Sofia Palace of Arts of complex “City of Arts and Science”, Valencia, Spain, 2005 (photo by S.L. Shambina)



Figure 10. A cruise terminal in the port of Leixoes, Portugal, arch. Luis Pedro Silva, 2015 (Available from: <https://www.pinterest.ru/pin/272608583674986563/> (accessed: 10.08.2019))



Figure 11. The base of the antenna, Dublin, Ireland, arch. Jan Ritchie (photo by Sergey N. Krivoshapko)



Figure 12. A restaurant of “La Concha Hotel”, San Juan, Puerto Rico, arch. Jose R. Marchand, 2009 (Available from: <http://www.architecturaldigest.com/homes/hotels/2009> (accessed: 10.08.2019))

Australia and Oceania. **Australia** (trade center, Melbourne, arch. A.R. McDougal, 2005).

Africa. **Algeria** (a dome of the Great Mosque of Algiers with a 50 m high, it is the third-largest mosque on the planet, Algiers, 2020), **Republic of South Africa** (the chapel “Bosjes” in the form of reinforced umbrella shell, Cape Town, 2016), **Rwanda** (three pavilions on Rwanda Cricket Stadium, it is the first cricket stadium in Africa, Kigali, 2017), **Nigeria** (traditional conic buildings, 2014 [18]), **Ethiopia** (a complex of the high-scraper and the dome of headquarters the African Unite, Addis Ababa, 2012), **the South Sudan** (International Airport in Juba, designed and erected by China Communications Construction Company, 2018), **Cameroon** (Musgum tolek or the co-called Musgum mud huts, Figure 14).

Every large-span structure or shell of unusual form becomes by innovative and unique erection. Many countries are proud of their famous large-span structures and shells built in the 21st century. Above, only some countries were enumerated and only one of several well-known structures in every country was presented. The aim of this part is to show an area of the spread of the structures and shells in question.



Figure 13. A tea-house in the form of melon, Gissar, Tajikistan, 2015

(Available from: comunicom.ru (accessed: 10.08.2021))



Figure 14. A clay dwelling dome, north of Cameroon (Available from: fishki.net (accessed: 10.08.2021))

It is obvious that between 2000 and 2021, erection of shell structures and shells took place in many countries. Availability of analytical and numerical analysis methods for different building structures, the wide spread of progressive typical computer programs, acquaintance of architects and engineers with accumulated progressive methods of erection of rod shell structures and shells promoted their widened application for dwelling, industrial, and public buildings.

Numerical and analytical methods, used for strength and stability analysis of large-span structures

Research works on perfection of strength and stability analysis, on dynamical problems, on geometrical modelling of crooked structures for the search of optimal forms never dropped in spite of delay of pace of the application of shell structures and shells for real erections at the second half of the 20th century [19].

The shells of complex geometry are actively searched in Peoples' Friendship University of Russia since 1964. The first investigations in RUDN University were fulfilled under the leadership of the first head of the chair of strength of materials and structural mechanics of RUDN University V.G. Rekach [20]. He set up a scientific school "Geometry and Strength of Shells of Complex Form" which continues to function now too.

All of the known methods of analysis of structures in question and shells are based on results of investigations carried out at the 20th century [21–23]. At that time, numerical (finite element method [24], finite difference energy method [25], finite difference method, method of global elements [26], boundary element method [27], and their varieties [28]), semi-analytical (asymptotic method of small parameters [29]), and analytical (momentless theory [22; 30], simple edge effect [22]) methods were devised for shell analysis.

At present time, one can solve any problem from the field of structural mechanics of shell with the help of a FEM. But V.V. Novozhilov, who took an active part in the development of analytical methods of thin-walled shell analysis, held that "shell theory that is a fundamental branch of science becomes one of the sections of applied mathematics. This tendency is side-line effect of intensive introduction of universal numerical methods [22]. Probably, analytical and numerical methods of shell analysis have the equal right for existence and must mutually add one another.

Now, analysis methods become more exactly [31; 32], additional factors are added [33], and computer modelling is introduced into practice [34]. Some useful information from the history of development of shell theory is given in a monography [22] and in papers [19; 35; 36]. By the way, all known at that moment methods of analysis of thin shells are presented in a manuscript of the noted American scientist J.G. Simmonds [36].

In the 20th century, engineers and academics studied, in general, physical-and-mechanical properties of new constructive materials [37], but in the 21st century, they began active introduction of new materials into practice. Hence, the demands for accurate methods of analysis of structures made of these new materials arose [38].

Famous architects, created designs of the most known spatial structures in the 21th century

E.V. Podgornov ("Piterland," Russia, 2012, Figure 7).

Helmut Jahn (SONY Center is one of the symbol of Berlin, 2000).

S. Calatrava (the Queen Sofia Palace of Arts and the planetarium of complex "City of Arts and Science," Valencia, Spain, 2005, Figure 9).

N. Foster (a center for music education, concerts, and conferences "Sage Gateshead", UK (Figure 15), made of glass and stainless steel, 2004 [4]).

Paul Andrea (China National Grand Theatre, China, 2007; Osaka Maritime Museum, Japan, 2000).

Zaha Hadid (Heydar Aliyev Center in Baku, Azerbaijan, 2012).

F.O. Gehry (Marques De Riscal Hotel, Elciego, 2006 [14]).

I.M. Pei (German Historical Museum, Berlin, 2001 [14]).

Hiroshi Nakamura (the futuristic wedding ribbon chapel in the form of a double spiral containing two separate stairways with a steel frame, Onomichi, Japan, 2013).

Oscar Niemeyer (Museu Nacional Honestino Guimarães By Oscar Niemeyer, 2006, Figure 16).



Figure 15. Sage Gateshead, UK, 2004
(Available from: hmong.ru (accessed: 10.08.2021))



Figure 16. The National Museum of Brazil, 2006
(Available from: tourweek.ru (accessed: 10.08.2021))

Sou Fujimoto (The House of Hungarian Music within Budapest' City Park with a floating roof with openings for trees, this is a model ecology with using of standards BREEAM, 2021).

Nader Khalili ("Eco-Dome" made of clay and straw, ecological dwelling for Africa).

V. Kramarenko (a glass dome over the Victory Hall, the museum of the Second World War, Minsk, Belarus, 2014).

Sh. Videchnik ("Borisov-Arena," stadium – "snake," 70 km from Minsk, Belarus, 2014).

Simon Vélez (bamboo architecture of shell structures, Columbia).

Conclusion

The conducted analysis of open sources gave an opportunity to draw only one conclusion that at the beginning of the 21st century, recession in interest to shell structures and thin-walled shells finished. It took place due to appearance of new constructive building materials, broadening of enumeration of analytical, point, spline, and frame surfaces suitable for the application as middle surfaces of shells, due to appearance of nice methods of analysis and new computer complexes, and due to raised needs for creation of structures in question. If one wants to make sure in it, he must analyze the pavilions of the World Exhibition "Connecting Minds, Creating the Future" EXPO 2020 in Dubai (United Arab Emirates). Shells and shell structures were chosen by many countries for forming external contours of their pavilions. For example, pavilions of Austria (a complex of cones of different height from clay and sand), Belarus (polyhedron architecture), Italy (digital architecture for the covering), Azerbaijan (a roof with air cushion for decrease of temperature, high-tech style), Iraq (geometrical high-tech style), Russia (a structure from out-of-order weave tubes, free-form architecture), United Arab Emirates (bionic architecture, arch. S. Calatrava), and many others, and also thematic pavilions "Mobility" (trefoil in high-tech style, arch. Foster + Partners), "Sustainability" (ecotech style, Grimshaw Architects), and interactive installation "Space forest" from stylized concrete "trees" of different height printed on 3D-printer (arch. firm MEAN, arch. style "Productivism") show stable interest of clients to design of shell structures at the beginning of the 21st century.

References

1. Krivoschapko S.N. On opportunity of shell structures in modern architecture and building. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013;(1):51–56. (In Russ.)
2. Krivoschapko S.N. A step into the third millennium. Shells in architecture and strength analysis of thin-walled civil-engineering and machine-building constructions of complex forms. *Montazhnye i Spetsial'nye Raboty v Stroitel'stve*. 2001; (8–9):2–5.

3. Mamieva I.A. On training of personnel for architecture, geometry, and analysis of large-span space structures and shells. *Building and Reconstruction*. 2016;(5(67)):114–118. (In Russ.)
4. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. The prominent spatial erections of the last 20 years. *Montazhnye i Spetsial'nye Raboty v Stroitel'stve*. 2012;(12):8–14. (In Russ.)
5. Krivoshapko S.N., Alborova L.A., Mamieva I.A. Shell structures: genesis, materials, and subtypes. Part 1. Subtypes and directions. *Academia. Architecture and Construction*. 2021;3:125–134. <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2021-3-125-134>
6. Krivoshapko S.N. Polyhedra and quasi-polyhedra in architecture of civil and industrial erection. *Building and Reconstruction*. 2020;4(90):48–64. (In Russ.) <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-90-4-48-64>
7. Bykov O., Gubkina I. *Soviet modernism. Brutalism. Post-modernism buildings and structures in Ukraine 1955–1991*. DOM Publ.; 2019.
8. Mamieva I.A. Analytical surfaces for parametrical architecture in contemporary buildings and structures. *Academia. Architecture and Construction*. 2020;1:150–165. (In Russ.)
9. Rynkovskaya M.I., Elberdov T., Sert E., Öchsner A. Study of modern software capabilities for complex shell analysis. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):45–53. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-45-53>
10. Ermolenko E.V. Forms and constructions on the architecture of the Soviet avant-garde and their interpretation in modern foreign practice. *Academia. Architecture and Construction*. 2020;1:39–48. <https://doi.org/10.22337/2077-2020-1-39-48>
11. Krivoshapko S.N., Pyatikrestovskiy K.P. On history of building of wooden shells and their opportunities at present and in the future. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(1):3–18. (In Russ.)
12. Krivoshapko S.N. Rod, lattice structures and all-metal shells of buildings from the 2nd half of the XXth century until the beginning of the XXI century. *Architectura i Stroitel'stvo Rossii*. 2014;12(204):10–17. (In Russ.)
13. Krivoshapko S.N. Cable-stayed structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(1): 9–22. (In Russ.)
14. Krsić S. *Geometrijske površi u arhitekturi*. Niš: Štampa Galaksija; 2012.
15. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. Umbrella surfaces and surfaces of umbrella type in architecture. *Promyshlennoe i Grazhdanskoe Stroitel'stvo*. 2011;7(1):27–31 (In Russ.)
16. Dianova-Klokovala I.V., Metanyev D.A., Khrustalev A.A. Latin America in the XXI century. Innovative development and architecture. *Academia. Architecture and Construction*. 2017;1:47–59.
17. Finotti L. *A collection of Latin American modern architecture*. Lara Müller Publishers; 2016.
18. Oluwagbemiga P.A., Modi S.Z. Development of traditional architecture in Nigeria: a case study of Hausa house form. *International Journal of African Society Cultures and Traditions*. 2014;1(1):61–74.
19. Grinko E.A. Survey works on geometry, durability, stability, dynamic, and application of environments with median surfaces of various classes. *Montazhnye i Spetsial'nye Raboty v Stroitel'stve*. 2012;2:15–21. (In Russ.)
20. Rekach V.G. *The general bibliography on structural mechanics*. Moscow: UDN Publ.; 1968. (In Russ.)
21. Goldenveizer A.L. *Theory of elastic thin shells*. New York: Pergamon Press; 1961.
22. Novozhilov V.B., Chernyh K.F., Mikhailovskiy E.I. *Linear theory of thin shells*. Leningrad: Politehnika Publ.; 1991.
23. Flügge W. *Static und Dynamic der Schalen*. Springer; 1957. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-52728-9>
24. Chappelle D., Bathe K.J. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computers & Structures*. 1998;66(1):19–36. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(97\)00078-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00078-3)
25. Abovskiy N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. *Variational principles of theory of elasticity and shell theory*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. (In Russ.)
26. Ivanov V.N. Variational-and difference method and a method of global elements in analysis of intersection of shell fragments. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2003;12:34–41. (In Russ.)
27. Brebbia C.A. (ed.) *Boundary element methods. Proc. of the 8th Int. Conf. on BEM, Como, 1986*. Berlin: Springer; 1986.
28. Schnobrich W.C. Different methods of numerical analysis of shells. *Lect. Notes Eng.*, 1987;26:1–17.
29. Andrianov I.V., Awrejcewicz J. Asymptotic approaches in the theory of shells: long history and new trends. *Acta Universitatis. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*. 2006;5(1):99–116.

30. Truesdell C. On Sokolovsky's "Momentless Shells." *Transactions of the American Mathematical Society*. 1947; 61(1):128–133. <https://doi.org/10.2307/1990293>
31. Zveryaev E.M. *Constructive theory of thin elastic shells*. RAN Preprint (issue 33). Moscow: IPM imeni M.V. Keldysha; 2016.
32. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Kiselyova T.A. To the question on continuous parameterization of spatial figures having an ellipse in a section. *Russian Mathematics*. 2017;61(9): 27–31.
33. Gruttmann F., Wagner W. An advanced shell model for the analysis of geometrical and material nonlinear shells. *Comput Mech*. 2020;66:1353–1376. <https://doi.org/10.1007/s00466-020-01905-2>
34. Tupikova E.M. Choice of optimal shell covering on square plan in the form of a translational surface. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):367–373. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-367-373>
35. Krivoshapko S.N. Review of a modern state of the theory of complex geometry shells and shells in a form of analytically indeterminate surfaces. *Montazhnye i Spetsial'nye Raboty v Stroitel'stve*. 1998;(5):24–28. (In Russ.)
36. Simmonds J.G. Recent advances in shell theory. *Advances in Engineering Science: 13th Annual Meeting of the Society of Engineering Science*. Washington; 2001. p. 617–626.
37. Bratukhin A.G., Sirotkin O.S., Sabodash P.F., Egorov V.N. *Materials of Future and their unique properties*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1995. (In Russ.)
38. Qatu M., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010. *Open Journal of Composite Materials*. 2012;2(3):61–86. <https://dx.doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>



ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК SHELL FORMING

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-562-575
UDC 514.7

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Geometry of the normal ruled surfaces

Vyacheslav N. Ivanov 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

✉ i.v.ivn@mail.ru

Article history

Received: August 12, 2021
Revised: October 28, 2021
Accepted: October 30, 2021

Abstract. The wide circle of the surfaces formed by the motion of the right line in the normal plain of some base directrix curve is regarded. The generate right line may rotate at some low at the normal plane of the base curve. The vector equation of the surface with any plane or space base curve is received. There are given the formulas of the geometry characteristics of the surfaces, on the base of them there is shown that the coordinate system of the normal ruled surfaces is orthogonal but there is not conjugated in common, that is that the normal ruled surfaces there are not developable surfaces in common way. The condition of the rotation of directrix plane line when the coordinate system of the normal ruled surfaces will be conjugated and the normal ruled surface will be developable is received. The condition that the normal ruled surface with space base curve will be the developable surface there is connected with its curvature of base curve. The developable normal ruled surface with plane base curve is formed by motion of right line at the normal plane of the base curve with the constant angle to the plane of the base curve; the received surface is a surface of constant slope. On the base of the vector equation of the surfaces there are made the figures of the normal ruled surfaces with the help of program complex MathCAD.

Keywords: geometry of the curves, geometry of the surfaces, normal surfaces, line surfaces, geometrical characteristics, surface

For citation

Ivanov V.N. Geometry of the normal ruled surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6): 562–575. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-562-575>

Геометрия нормальных линейчатых поверхностей

В.Н. Иванов 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ i.v.ivn@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 12 августа 2021 г.
Доработана: 24 октября 2021 г.
Принята к публикации: 30 октября 2021 г.

Аннотация. Рассматривается формирование широкого круга поверхностей на основе нормальных линейчатых поверхностей, образуемых движением прямой линии в нормальной плоскости базовой направляющей кривой. Образующая прямая может вращаться по заданному закону в нормальной

Vyacheslav N. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-4023-156X, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, Scopus Author ID: 57193384761; i.v.ivn@mail.ru

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента строительства, Инженерная академии, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0003-4023-156X, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, Scopus Author ID: 57193384761; i.v.ivn@mail.ru

© Ivanov V.N., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

плоскости базовой кривой. Приводится векторное уравнение поверхностей, с произвольной пространственной и плоской направляющей кривой. Получены формулы геометрических характеристик поверхности. На основе полученных формул показано, что координатная система нормальной линейчатой поверхности является ортогональной, но в общем случае не сопряженной. Прямые линии не являются линиями главных кривизн поверхности и нормальные линейчатые поверхности в общем случае не являются торсовыми, развертывающимися поверхностями. Получено условие вращения образующей прямой в нормальной плоскости базовой кривой, при выполнении которого координатная сеть будет сопряженной – нормальная линейчатая поверхность развертывающейся. Для пространственной базовой кривой это условие связано с кривизной базовой кривой, для плоской кривой образующая прямая движется в нормальной плоскости направляющей плоской кривой с постоянным наклоном к плоскости базовой плоской кривой – поверхность одинакового ската. На основе векторного уравнения построены рисунки нормальных линейчатых поверхностей с использованием программного комплекса MathCAD.

Для цитирования

Иванов В.Н. Геометрия нормальных линейчатых поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 562–575. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-562-575>

Ключевые слова: геометрия кривых, геометрия поверхностей, нормальные поверхности, линейчатые поверхности, геометрические характеристики поверхности

Introduction

The thin state constructions in the form of ruled surfaces are used widely in building, machine-building, air and rocket production. It's based on the most simple way to realize the space constructions formed by the straight lines. It's comfortable to made the line straight timbering on the building site or made the timbering forms for concrete blocks. The thin-walled metal ruled forms (developable surfaces) are made by bending of the metal list plate.

The geometry of the ruled surfaces are considered in many monographs and science articles. Usually at all classic monographs [1–7] and at the present monographs and textbooks on differential geometry and at the most monographs and textbooks on the theory and methods of analyses of the thin-walled state structures, one can find a section considered to the ruled surfaces [8–16]. In a monography of S.N. Krivoschapko [17], the most full classification of the ruled surfaces is given and the variety of the subclasses of the ruled surfaces is shown. The normal ruled surfaces form a subclass of the ruled surfaces. The cylindrical and conical surfaces, the constant slope surfaces, and normal helicoids enter at this subclass. Shaping of the torus surfaces are based on the construction of surfaces by the system of the tangents to the given space base directrix curve which is the cuspidal edge of the torus surface, the exception is a forming of torus surfaces with two plane base curves. The coordinate system of these torus surfaces isn't orthogonal [9–11; 13]. The analyses of these shells by the analytical methods aren't possible usually. Numerical methods are used, for example the finite elements method [18; 19]. As it will be shown further the coordinate system of the normal ruled surfaces is orthogonal but not conjugated when the straight line rotates at the normal plane of the base directrix. But at any case it is possible to use analytical methods for some shells or to use a variation difference method [13; 20; 21] which gives more exact results in comparison with finite elements method.

The vector equation and the geometric characteristics of the normal ruled surfaces

The normal ruled surfaces are formed by the moving generating straight at the normal plane of the directrix curve [16; 22]. The generating curve may transform and rotate at the normal plane of the base directrix. The normal ruled surfaces with straight generatrices at the normal planes of the base directrix constitute one of subclasses of the normal surfaces (Figure 1).

The vector equation of a normal ruled surface can be written as

$$\rho(u, v) = r(u) + ve(u), \quad (1)$$

where $r(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ is a radius-vector of the base directrix curve; i, j, k are the orts of the Cartesian coordinate system; $e(u) = \mathbf{v} \cos \theta(u) + \boldsymbol{\beta} \sin \theta(u)$ is a unit vector in the direction of the generating straight

line; τ , \mathbf{v} , β are the unit vectors of tangent, normal and binormal of the base directrix curve; $\theta(u)$ is a function of rotation of the generating right line at the normal plane of the base directrix curve; $\rho(u, v)$ is a radius-vector of the surface.

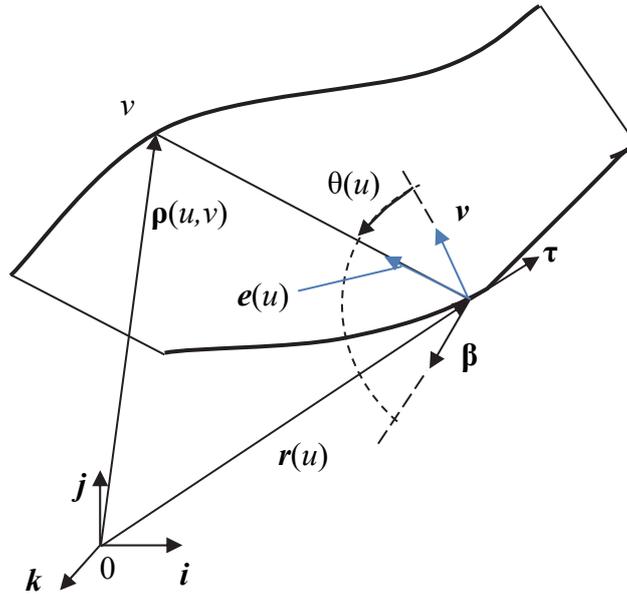


Figure 1. Normal ruled surface

The derivative of the vector $e(u)$ is

$$e'(u) = -k_s \cos \theta(u) \tau + [-\mathbf{v} \sin \theta(u) + \beta \cos \theta(u)](\chi_s + \theta') = -k_s \cos \theta \tau + (\chi_s + \theta') \mathbf{g}(u), \quad (2)$$

$k_s = s'k$, $\chi_s = s'\chi$, $s' = |r'|$, k , χ are curvature and torsion of the base curve, $\mathbf{g}(u) = -\mathbf{v} \sin \theta(u) + \beta \cos \theta(u)$ is the unit vector in the normal plane of the base curve orthogonal to the vector $e(u)$,

$$\mathbf{g}'(u) = -\mathbf{v} \sin \theta(u) + \beta \cos \theta(u) = k_s \sin \theta(u) \tau - (\chi_s + \theta') e(u). \quad (3)$$

The derivatives of the equation of the normal ruled surface give

$$\rho_u = (s' - vk_s \cos \theta) \tau + v(\chi_s + \theta') \mathbf{g}; \quad \rho_v = e(u); \quad \rho_{vv} = 0;$$

$$\rho_{uu} = [(s' - vk_s \cos \theta)' + vk_s(\chi_s + \theta') \sin \theta] \tau + k_s(s' - vk_s \cos \theta) \mathbf{v} - v(\chi_s + \theta')^2 e + v(\chi_s' + \theta'') \mathbf{g};$$

$$\rho_{uv} = -k_s \cos \theta \tau + (\chi_s + \theta') \mathbf{g};$$

$$\mathbf{m} = \frac{(\rho_u \times \rho_v)}{|\rho_u \times \rho_v|} = \frac{1}{A} [-v(\chi_s + \theta') \tau + (s' - vk_s \cos \theta) \mathbf{g}]. \quad (4)$$

The geometrical characteristics of the normal ruled surfaces

$$E = A^2 = (s' - vk_s \cos \theta)^2 + v^2 (\chi_s + \theta')^2; \quad G = 1; \quad F = 0.$$

$$L = (\mathbf{p}_{uv} \mathbf{m}) = \frac{v(\chi_s + \theta')}{A} \left\{ - \left[(s' - vk_s \cos \theta)' + vk_s (\chi_s + \theta') \sin \theta \right] + (s' - vk_s \cos \theta) \right\} + \frac{k_s \sin \theta}{A} (s' - vk_s \cos \theta)^2;$$

$$M = (\mathbf{p}_{uv} \mathbf{m}) = \left[vk_s \cos \theta + (s' - vk_s \cos \theta) \right] \frac{\chi_s + \theta'}{A} = s \frac{\chi_s + \theta'}{A}; \quad N = (\mathbf{p}_{vv} \mathbf{m}) = 0. \quad (5)$$

It's seen from the formulas of the geometrical characteristics of the normal cycle surfaces that the coordinate system of the normal ruled surfaces is orthogonal but it isn't conjugated in common, the generating straight lines are not the lines of principle curvatures and the normal ruled surfaces are not developable surfaces in common.

The normal developable surfaces

The normal ruled surfaces will be developable if geometrical coefficient M will be equal zero

$$M = 0 \rightarrow \theta(u) = - \int \chi_s du + \theta_0. \quad (6)$$

So, for forming torus normal surface the function of rotation of the generating right line at the normal plane of the base directrix must be linked up with the curvature of the base curve.

Consider some examples.

A helix is a base directrix [16]:

$$\mathbf{r}(u) = a\mathbf{h}(u) + bu\mathbf{k}, \quad (7)$$

$\mathbf{h}(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u$ is a vector function of the circle of the unit radius,

$$\chi = \frac{b}{s'^2}, \quad s' = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \chi_s = s'\chi = \frac{b}{s'}, \quad \theta(u) = -\chi_s u + \theta_0. \quad (8)$$

We have for conical spiral [16]

$$\mathbf{r}(u) = e^{pu} [a\mathbf{h}(u) + b\mathbf{k}], \quad (9)$$

$$\chi = \frac{bp}{s'^2} e^{-pu}, \quad s' = s'_0 e^{pu}, \quad s'_0 = \sqrt{a^2(1+p^2) + b^2 p^2}, \quad \chi_s = s'\chi = -\frac{bp}{s'_0}, \quad \theta(u) = -\chi_s u + \theta_0. \quad (10)$$

As it's seen from the received formulas of those base curves, the angle of rotation of the generating straight line at the normal plane of the helix and conical spiral are proportional to coordinate parameter of the rotation u . The initial angle $\theta = \theta_0$ in formulas (8), (10) links an initial coordinate of the base line $u = 0$. If there is considered the section with the initial parameter $u_0 \neq 0$ then it's better to use the formula

$$\theta(u) = -\chi_s (u - u_0) + \theta_0. \quad (11)$$

So the turn of the generating straight line at angle θ_0 will be at the beginning of the section.

The figures of the normal developable surfaces with a base helix and a conical spiral are shown at Figure 2.

The parameters of the base curves:

a) helix: $a = 2,5; b = 1; u = 0 \div 6\pi; v = 0 \div 2;$

b) conical spiral: $a = 2; b = 3; p = 0,15; u = \pi \div 2,5\pi; v = 0 \div 6. \theta_0 = -\pi/2.$

A developable normal surface with a flat base curve ($\chi = 0, \theta = \theta_0$) and the generating straight line that moves at the normal plane of the base directrix with constant angle to the plane of the base curve will be the surface of constant slope. If $\theta_0 = 90^\circ$, then a cylindrical surface will be.

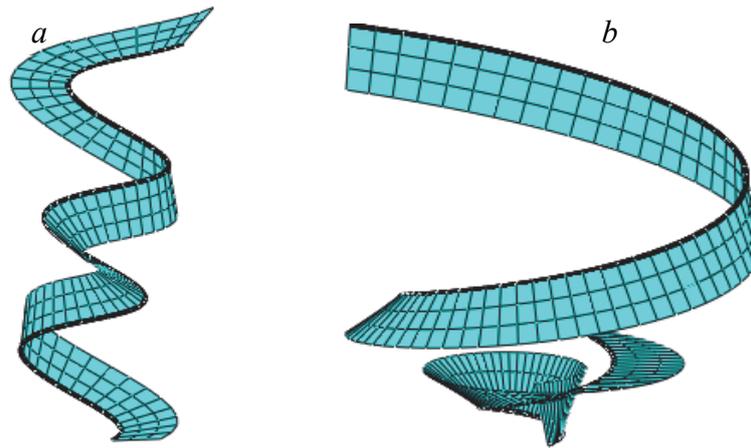


Figure 2. Developable normal ruled surface base curves:
a – helix; *b* – cylindrical spiral

If $\theta_0 = 0$ and the generating straight line moves at the plane of the flat base curve then the surface degenerates into plane. At the plane there is forming the trapezium-curved orthogonal coordinate system, the system of the curves parallel to the base directrix lines and the system of orthogonal to the base curve straight coordinate lines. The method of forming the surfaces on the trapezium-curved plans was regarded in a paper [22; 23].

At Figure 3, the surfaces of constant slope with different base curve and different angle of slope of the generating straight lines are shown. At the top row, the trapezium-curved plans ($\theta_0 = 0$) with base curves analog to the base curve of surfaces at lower row are shown.

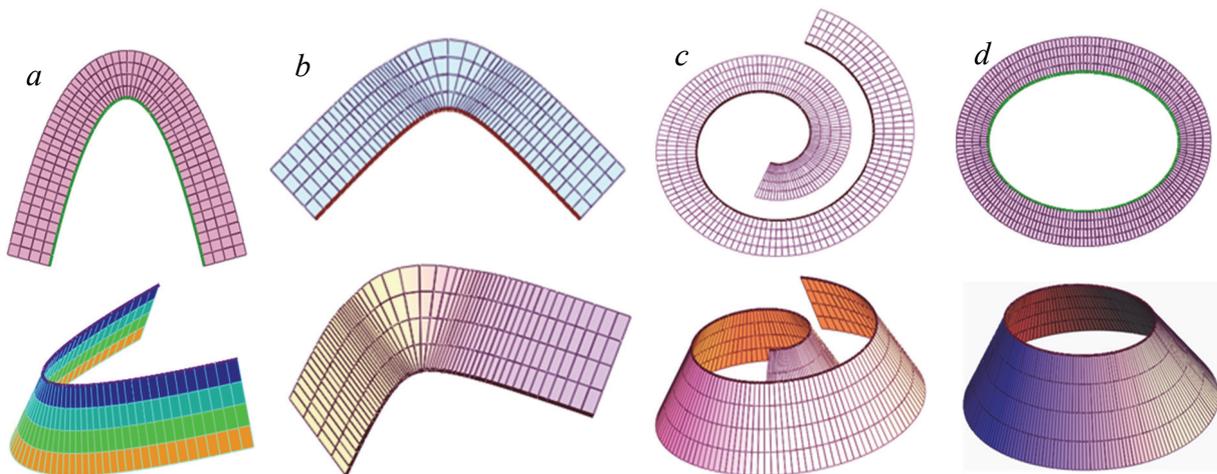


Figure 3. Trapezium-curved plans and surfaces of constant slope base curves:
a – parabola; *b* –hyperbole; *c* – evolvent of the circle; *d* – ellipse

If the directrix is a straight line then the surface of straight conoid formed [24; 25].

The screw normal ruled surfaces and curves

Consider the normal ruled surfaces which are formed by the generating straight line rotating at the normal plane of different base directrix proportional to the coordinate parameter u

$$\theta(u) = 2k\pi \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} + \theta_0, \quad u = u_0 \div u_1, \quad (12)$$

k is a number of the full rotations of the generating straight line when it's moving along the base curve (in may be not hole number).

The coordinate curve of a surface is formed with constant coordinate parameter $v = v_0$.

If the base curve is a straight line, then the usual helical surface is formed.

At Figure 4, the normal screw surfaces with a base parabola $x = u, y = au^2, a = 0.25, u = -8 \div 8$ and with different number of rotation of the generating straight line, $v = 0 \div 3, \theta_0 = 0$ are shown.

At Figure 5, the normal screw surfaces with a base ellipse $x = a \cos u, y = b \sin u, a = 5, b = 3, u = 0 \div 2\pi$ and with different number of rotation of the generating straight line, $v = 0 \div 1.5, \theta_0 = \pi$ are shown.

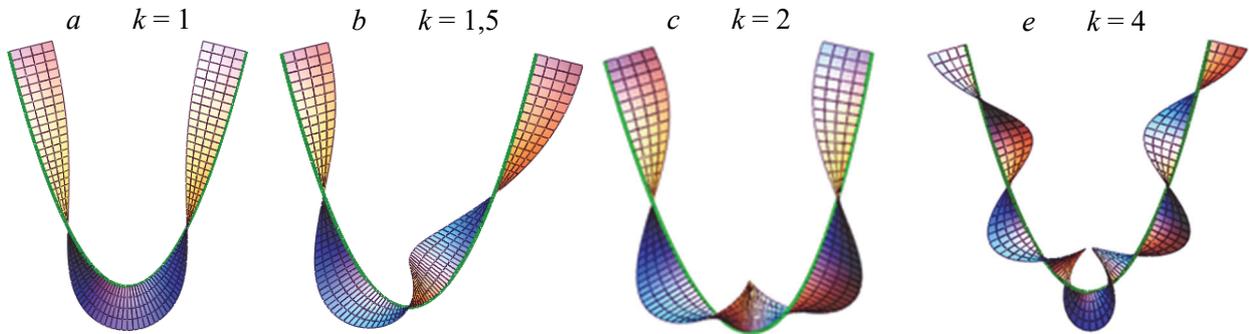


Figure 4. Helical normal ruled surfaces with base parabola

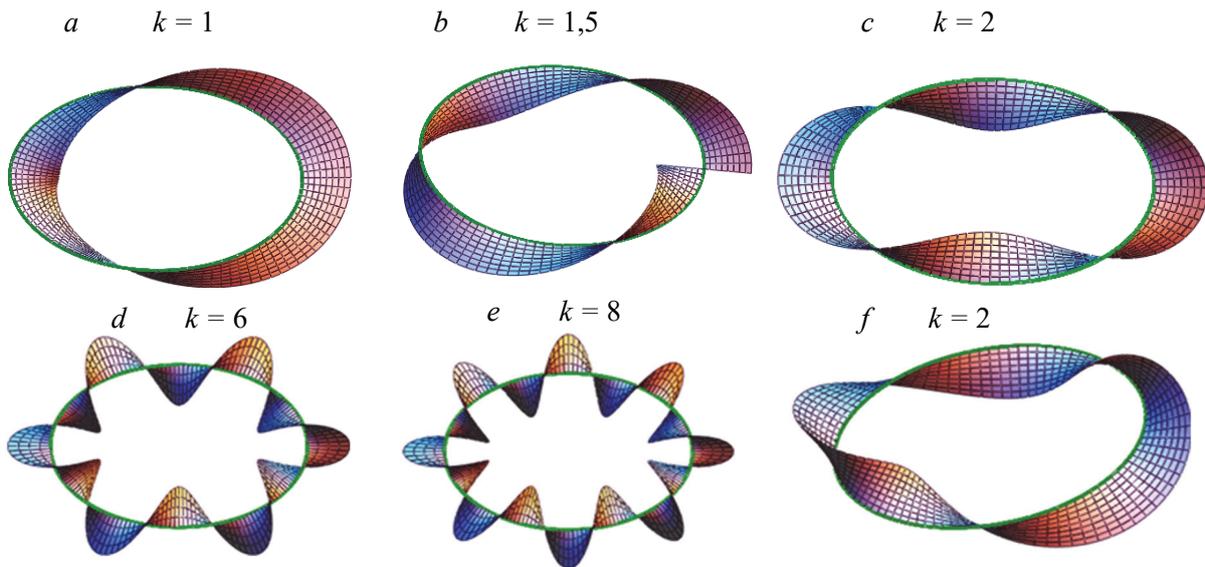


Figure 5. Helical normal ruled surfaces with base ellipse:
 $a-e - \theta_0 = \pi; f - \theta_0 = 2/3\pi;$

At Figure 6, the normal screw surfaces with a base sine $y = a \sin \pi u/b, a = 2, b = 4, u = 0 \div mb$ and with different number of rotation of the generating straight line, $v = 0 \div 1, \theta_0 = 0$ are shown; m is a number of half-waves of the sine. Figure 6, $g: v = 0.5 \div 1.5$; Figure 6, $h: v = 1$ is a screw curve.

At Figure 7, the normal screw surfaces with a base evolute of the circle $x = a(\cos u + u \sin u); y = a(\sin u - u \cos u); a = 0.5; u = 0.5\pi \div 3.5\pi; v = 0 \div 1; \theta_0 = \pi$ are shown.

At Figure 8, the normal screw surfaces with a base space helical curve $x = a \cos u; y = a \sin u; z = bu; a = 2.5; b = 1$ are shown; $u = 0 \div 2\pi; \theta_0 = \pi; a-f: v = 0 \div 2; g: v = 0.5 \div 2; a) k = 0$ is a right helix; $g) v = 2$ is a screw curve.

At Figure 9, the normal screw surfaces with a base conical spiral $x = ae^{pu} \cos u; y = ae^{pu} \sin u; z = be^{pu}$ are shown; $a = 2; b = 3; p = 0.15; u = 2\pi \div 4\pi; \theta_0 = \pi/2; a-f: v = 0 \div 6$.

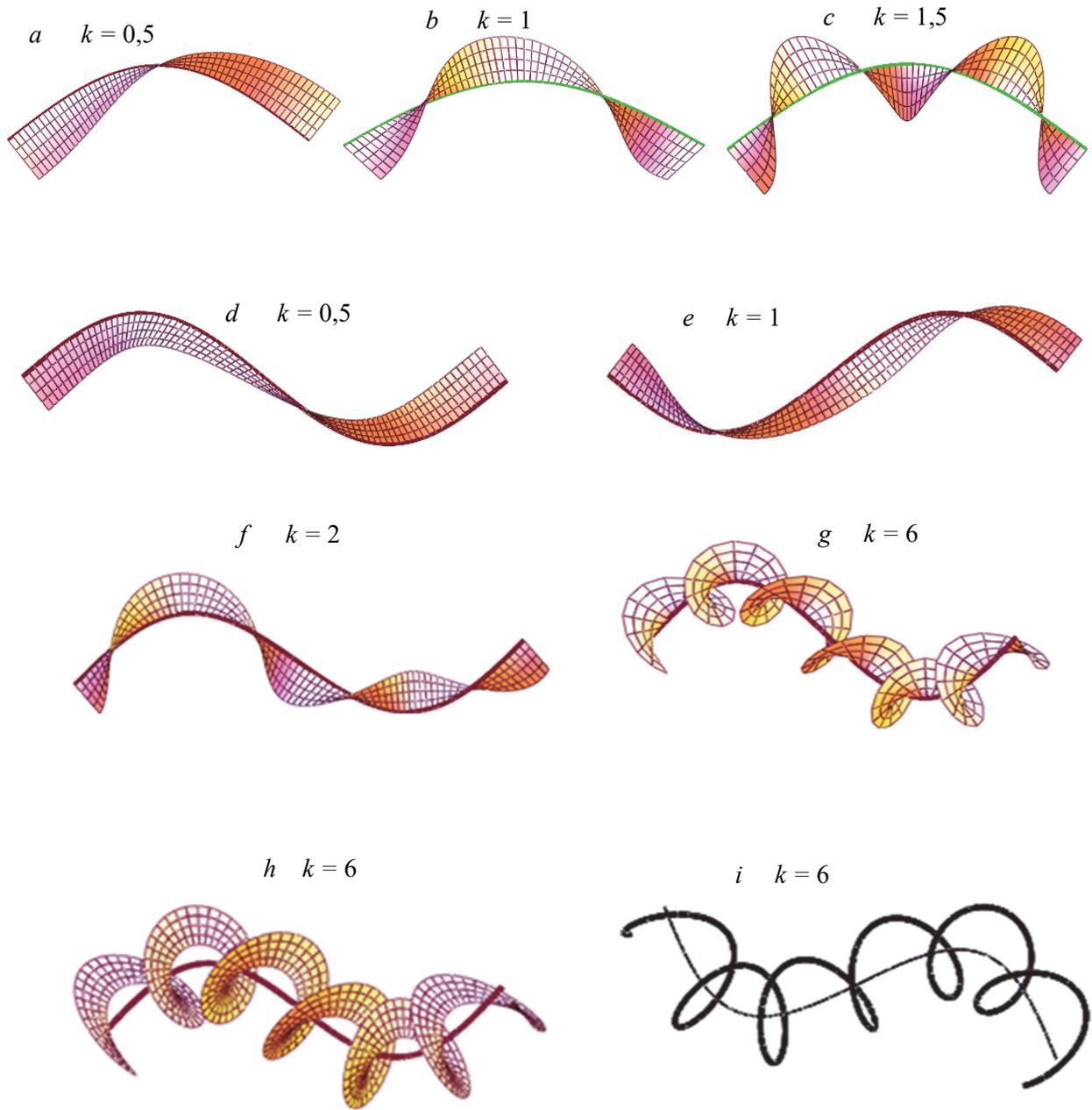


Figure 6. Screw normal ruled surfaces with a base sine
a-c – on one halfwave; *d-i* – on two halfwaves

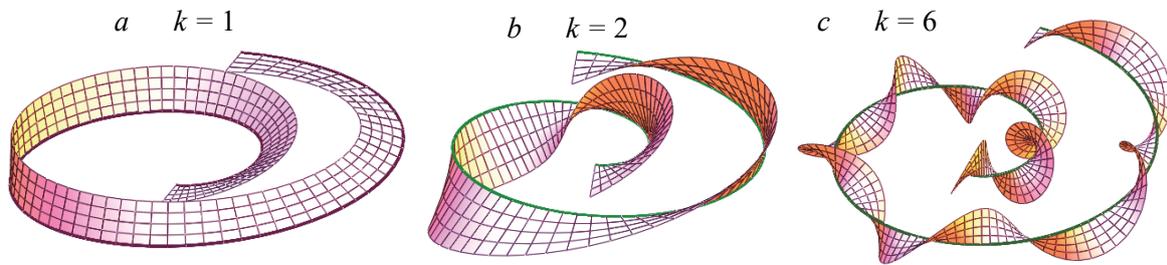


Figure 7. Screw normal ruled surfaces with a base evolvent of the circle
a-b – on one halfwave; *c* – on two halfwaves

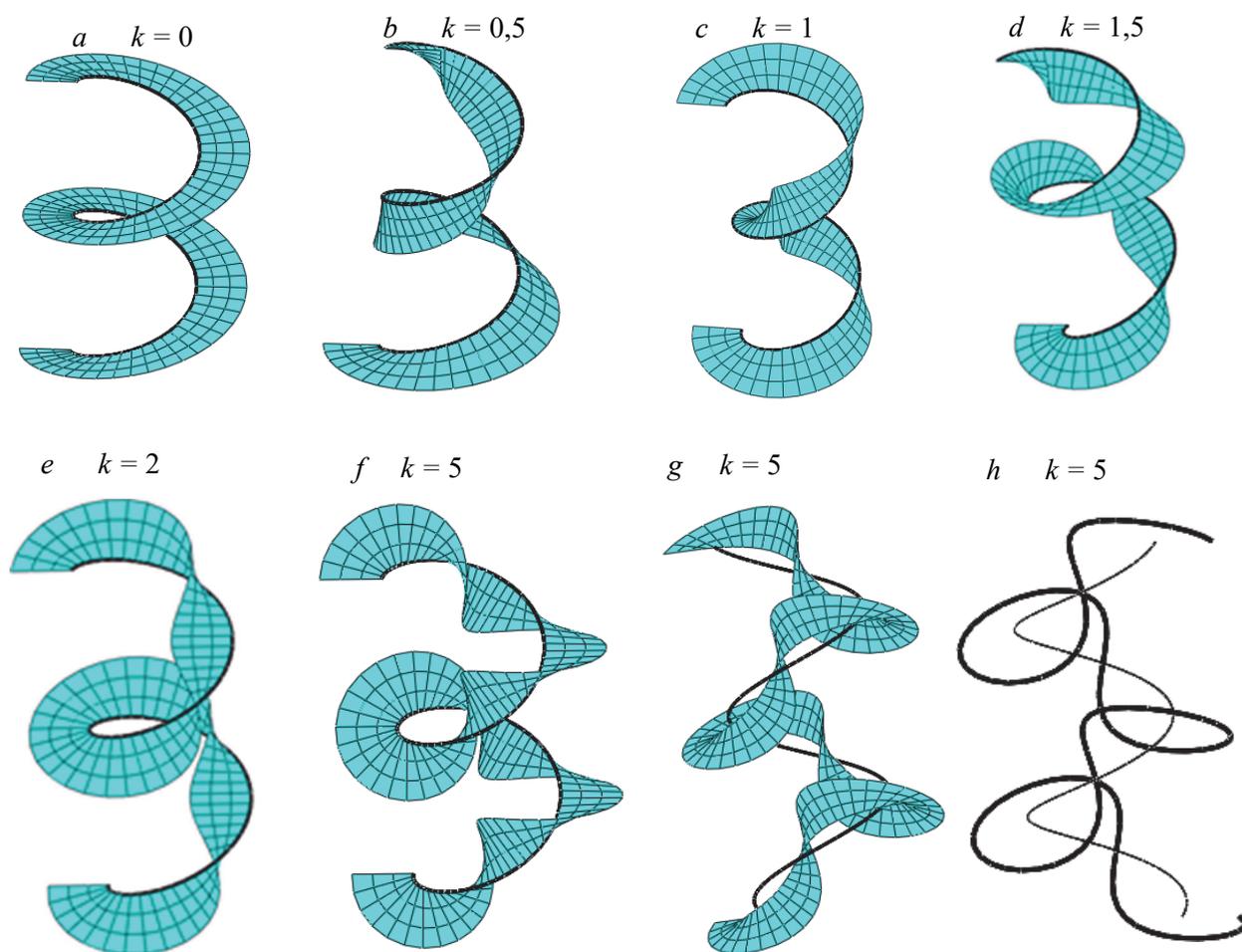


Figure 8. Helical normal ruled surfaces with base helix

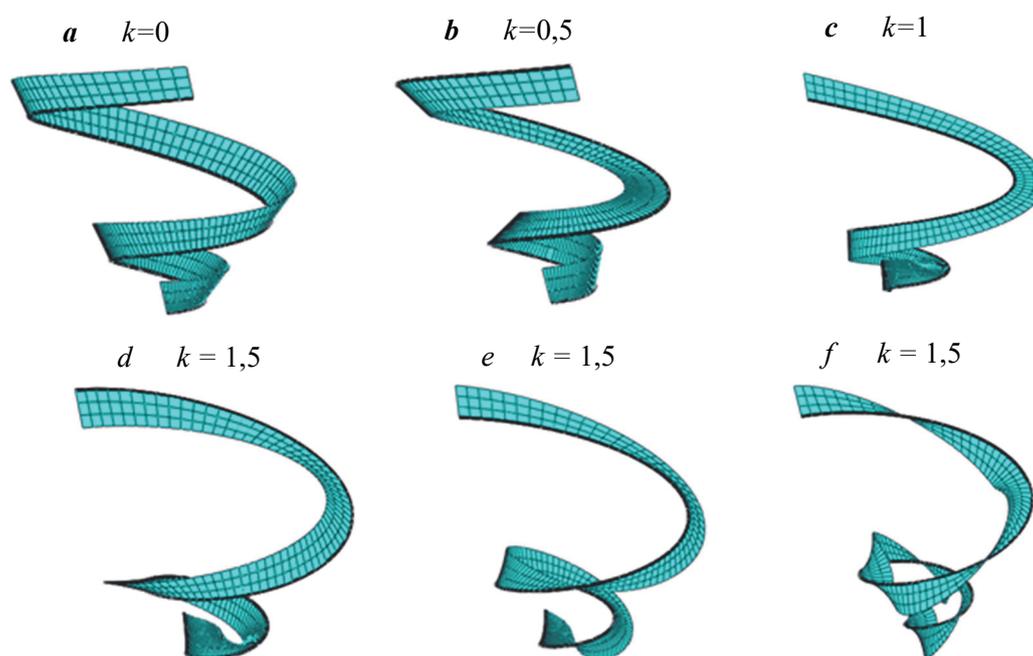


Figure 9. Screw normal ruled surfaces with a base conical spiral

The wave normal ruled surfaces

Consider the subclass of normal ruled wave surfaces with cosine function of the angle of rotation of the generating straight line at the normal plane of the base directrix curve

$$\theta(u) = \theta_0 + c \left[\cos \left(k\pi \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \right) + p \right], \quad (12)$$

c is an amplitude of oscillation of the angle parameter of the generating straight line at the normal plane of the base curve when it's moving along the base directrix $u = u_0 \div u_1$; k is a number of half-wave of the cosine; $p = 0, 1, -1$ is a parameter for three types of the wave normal ruled surfaces.

If parameter $c = 0$ and the base directrix is a plane curve then with the help of the equation (12), the surface of constant slope will form. If $c > 0$ and $p = 1$, then the wave surface will form which will touch the surface of constant slope outside. If $p = -1$, the wave normal ruled surface will touch the surface of constant slope inside. If $p = 0$, the wave normal ruled surface will be symmetrical about the surface of constant slope. The surfaces of constant slope may be called the supporting surfaces of the wave normal ruled surfaces. As it was shown above, if $\theta_0 = 0$ or $\theta_0 = \pi$, then a surface of constant slope degenerates into the trapezium curved plane region. If $\theta_0 = \pi$, a cylindrical surface will be received.

At Figure 10, the wave normal ruled surfaces with a base parabola $x = u, y = au^2, a = 0.25, u = -8 \div 8; v = 0 \div 8; \theta_0 = \pi$, and $c = \pi/4$ are shown with different parameters k, p .

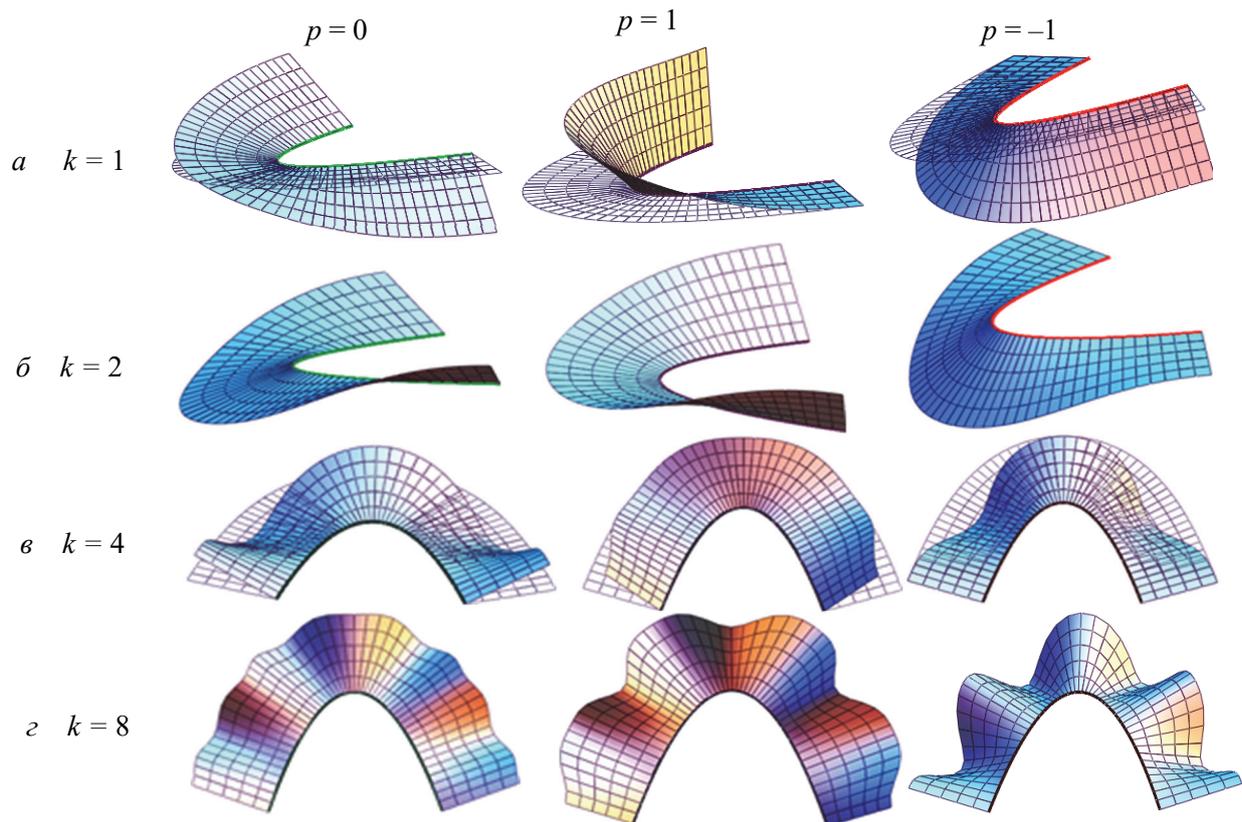


Figure 10. Wave normal ruled surfaces with base parabola

On some figures, the wave normal ruled surfaces are shown together with supporting surfaces of constant slope.

At Figure 11, the wave normal ruled surfaces on the parabolic cylinder with $\theta_0 = \pi/2$ are shown.

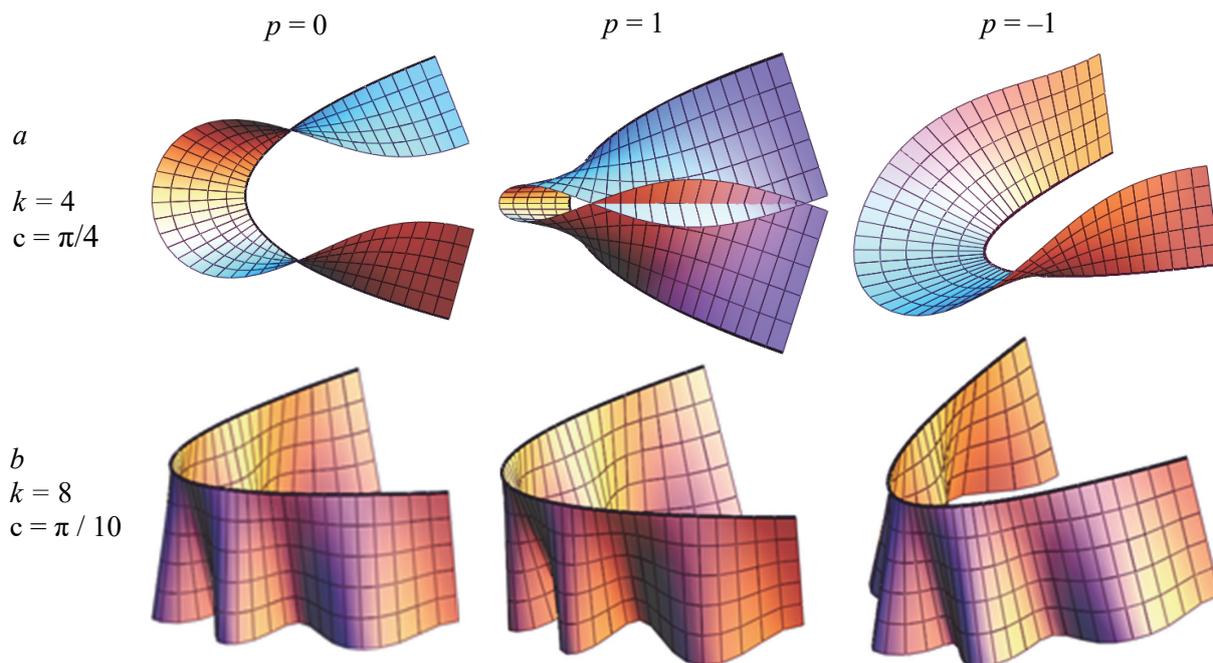


Figure 11. Wave normal ruled surfaces with a base parabolic cylinder, $\theta_0 = \pi\theta_0 = \pi$

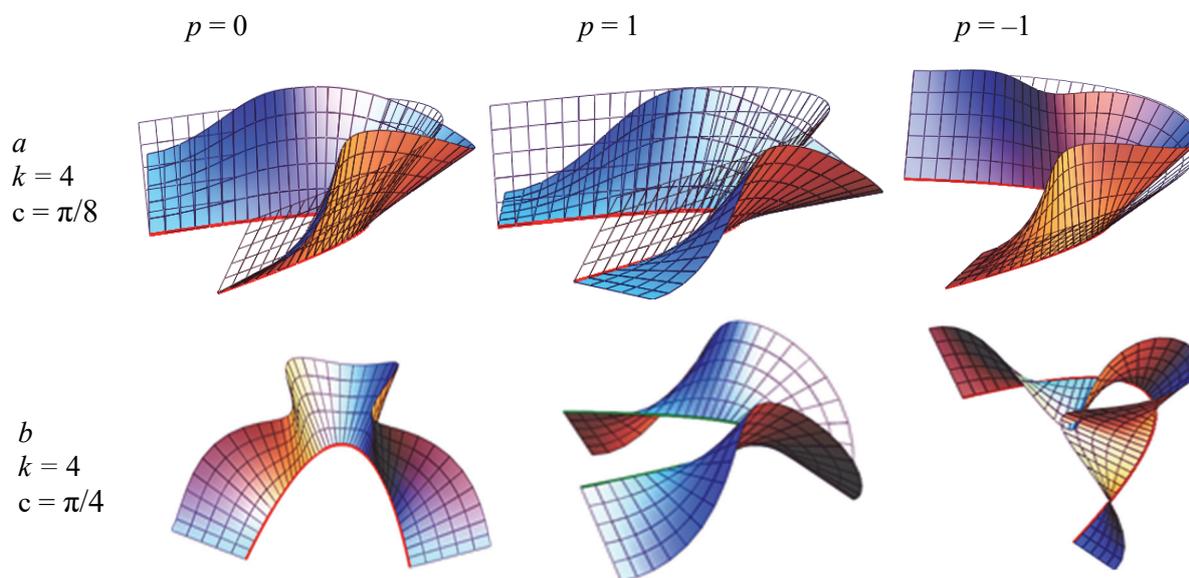


Figure 12. Wave normal ruled surfaces with a base parabola, $\theta_0 = 0.75\pi$

At Figure 12, the wave normal ruled surfaces on a base parabola with $\theta_0 = \pi/2$ are shown.

Consider the wave normal ruled surfaces with a base ellipse.

At Figure 13, the wave normal ruled surfaces with a base ellipse $x = a \cos u$; $y = b \sin u$; $a = 3$; $b = 2$ and parameters $\theta_0 = \pi$, $c = \pi/4$ are shown.

At Figure 14, the wave normal ruled surfaces with base ellipse $x = a \cos u$; $y = b \sin u$; $a = 3$; $b = 2$ and parameters $\theta_0 = \pi$, $c = \pi/8$ are shown. The figures of the wave surfaces are shown together with a supporting ellipsoidal cylinder.

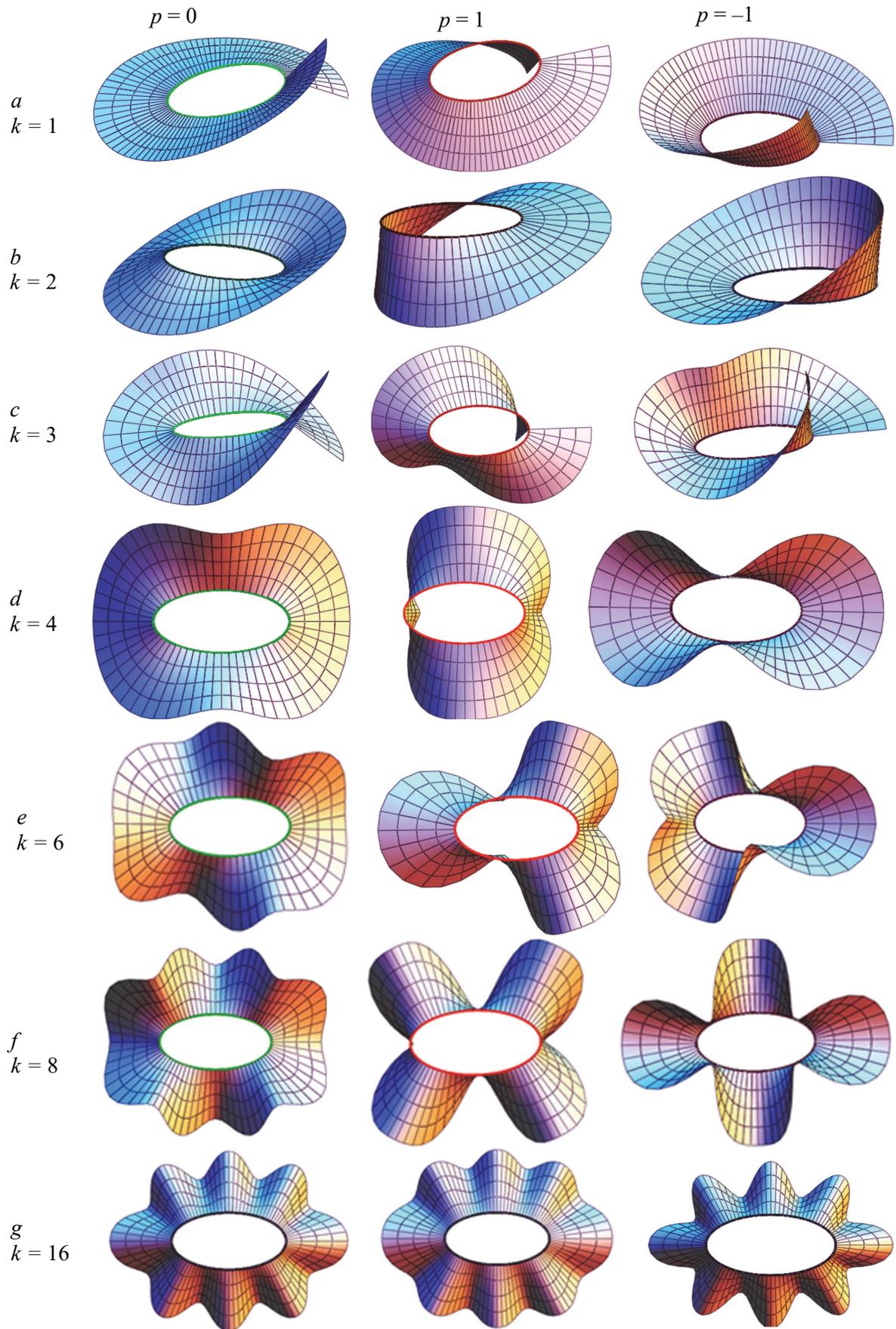


Figure 13. Wave normal ruled surfaces with a base ellipse, $\theta_0 = \pi$, $c = \pi/4$

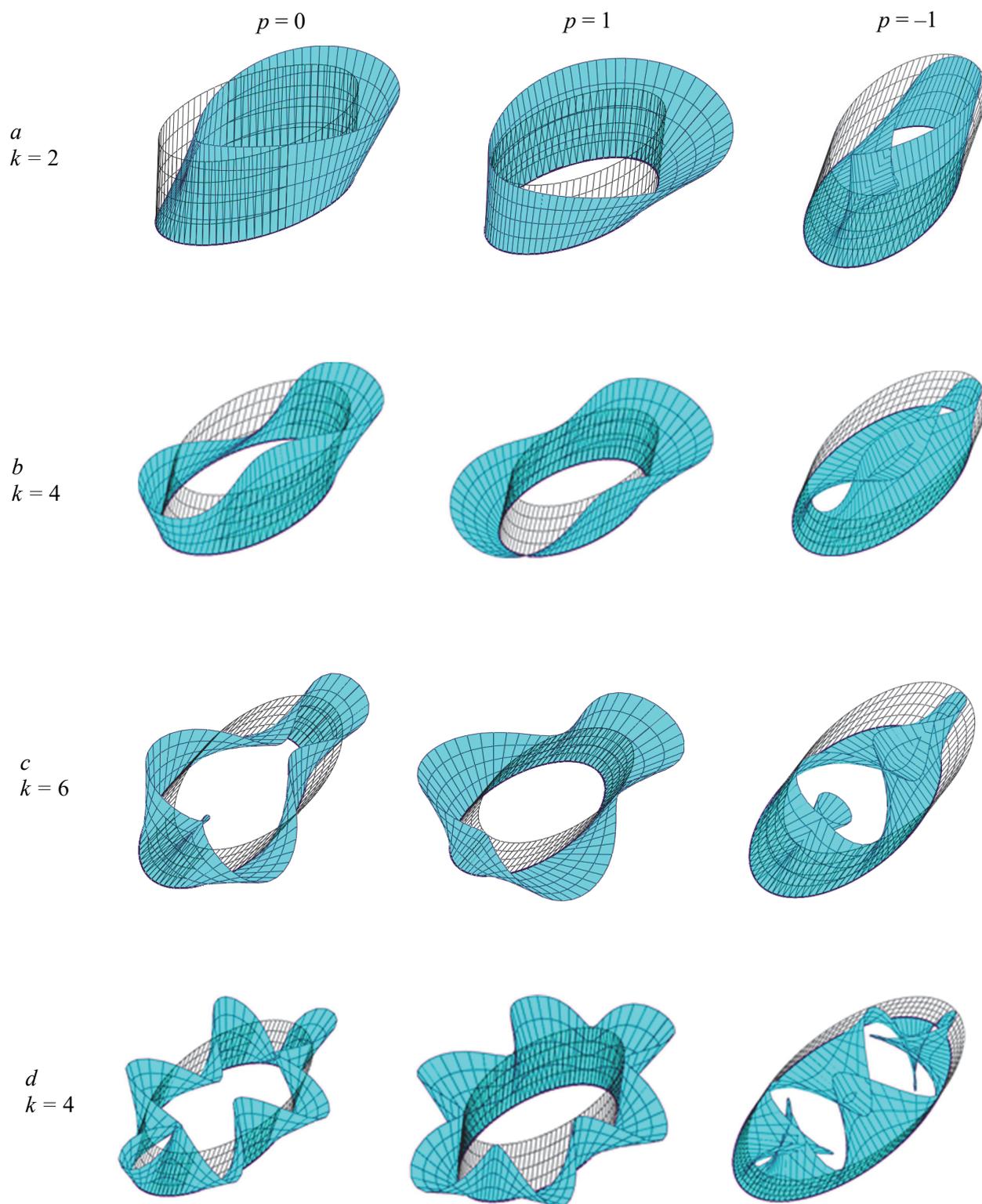


Figure 14. Wave normal ruled surfaces with base ellipse, $\theta_0 = \pi/2$, $c = \pi/8$

At Figure 15, the wave normal ruled surfaces with a base ellipse $x = a \cos u$; $y = b \sin u$; $a = 3$; $b = 2$ and parameters $\theta_0 = 0,75\pi$. $c = \pi/8$ are shown. The figures of the wave surfaces are shown together with a supporting surface of constant slope.

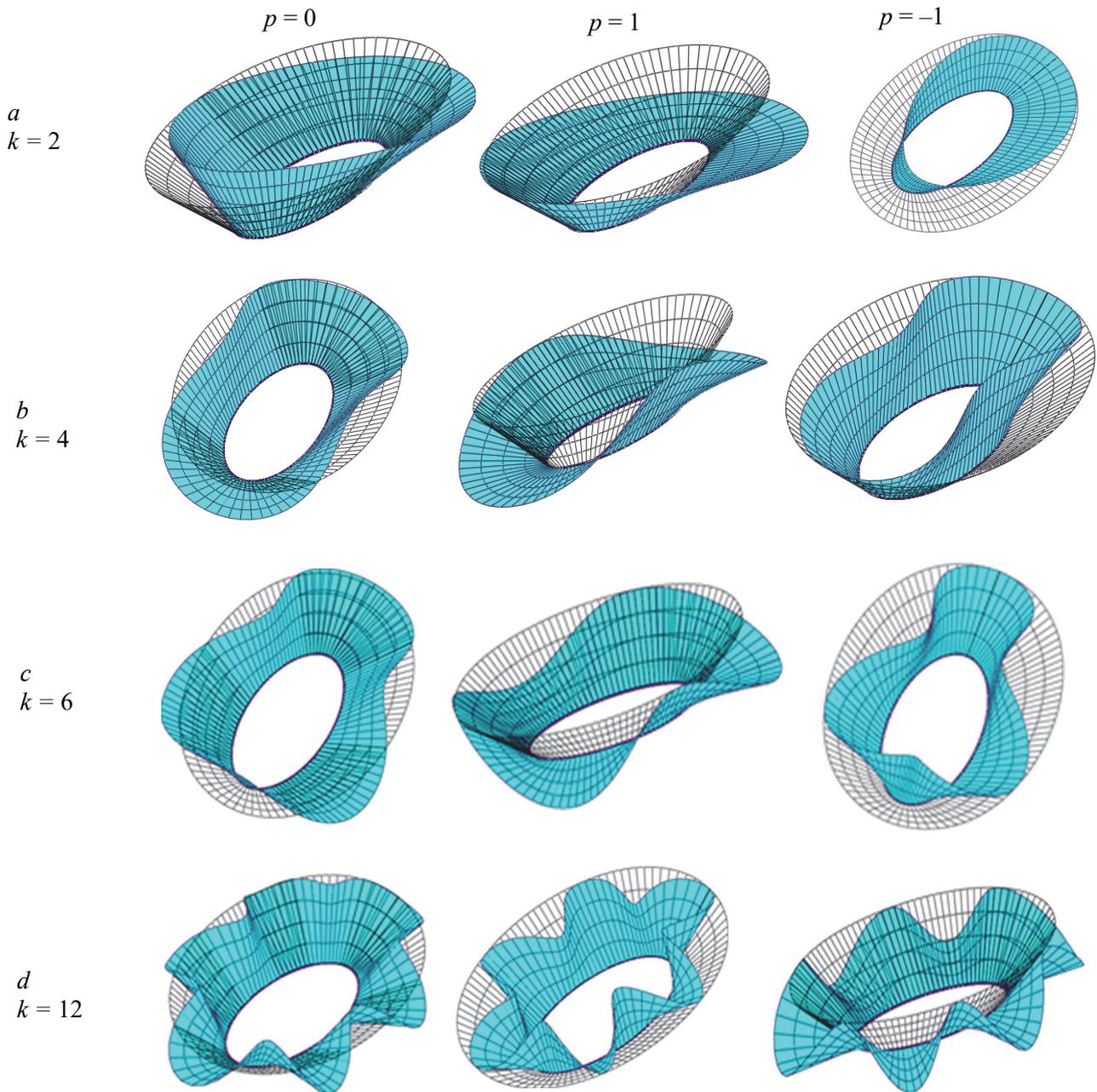


Figure 15. Wave normal ruled surfaces with a base ellipse, $\theta_0 = 0,75\pi$, $c = \pi/8$

It's seen from the shown figures of the wave normal ruled surfaces that the modules of waved normal ruled surfaces with parameters $p = 0$ и $p = -1$ may intersect themselves and it depends of amplitude or cosine and the length of the generating straight lines.

The wave normal ruled surfaces with uneven number of oscillation $\kappa = 1, 3, 5, \dots$ will be unlocked (Figure 13, *a, b*). If $\kappa = 2, 6, 10, \dots$ ($\kappa/2$ is uneven number) then the locked surface with one xOz plane of symmetry will be formed; if $\kappa = 4, 8, 12, \dots$ then the locked surface with two planes of symmetry xOz, yOz will be formed.

Conclusion

The manuscript considers the geometry of normal ruled surfaces that are formed by moving straight generating line at the normal plane of any base directrix curve. The generating straight line rotates at any law given in advance at the normal plane of the base directrix curve. The vector equation of the surfaces and the coeffi-

cients of the fundamental forms of these normal ruled surfaces are presented. It is shown that curvilinear coordinate system of the normal ruled surfaces is orthogonal but non-conjugated in common. So, the generating straight lines of the normal ruled surfaces are not the lines of principle curvatures of the surfaces in general. The condition when the coordinate system will be conjugated and the normal ruled surface will be developable is received. The figures of the normal ruled torus surfaces with plane base directrix curves which are the surfaces of constant slope and figures of torus normal ruled surfaces with space base curves such as helix and conical spiral are shown.

There are considered the subclasses of the normal ruled surfaces:

a) the screw normal ruled surfaces, that are formed by the movement of the generating straight line at the normal plane of the base directrix curve with linear law of rotation of the generating line due to the coordinate parameter of the base curve. If the base curve is a straight line one can receive the classic helix;

b) the wave normal ruled surfaces, that are formed by the oscillation of the generating straight line at the normal plane of the base directrix.

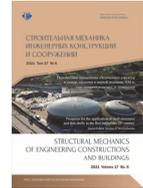
In a paper, the figures of screw and wave normal ruled surfaces with different parameters are presented.

The figures of the surfaces are realized with using of the program complex MathCAD.

It is shown the possibility to construct the different forms of the normal ruled surfaces, which may be used in building, machine building, air production and other technic area.

References

1. Monge G. *Supplement of analyses to geometry*. Moscow: ONTI Publ.; 1936. (In Russ.)
2. Dupin Ch. *Application de geometrie et de mecanique*. Paris: Bachelier; 1822.
3. Shulikovskiy V.I. *Classical differential geometry*. Moscow: GIFML Publ.; 1963. (In Russ.)
4. Rashevskiy P.K. *Course of differential geometry*. Moscow, Leningrad: GITTL Publ.; 2004. (In Russ.)
5. Kagazn V.F. *The base of the theory of the surfaces*. Moscow, Leningrad: OGIZ Publ.; 1948. (In Russ.)
6. Hilbert D.; Cohn-Vossen S. *Geometry and the imagination*. 2nd ed. Chelsea; 1952.
7. Hilbert D., Cohn-Vossen. *Visual geometry*. Moscow: Nauka Publ.; 1981.
8. Sanchez-Arcas M. *Shells*. Moscow: Izd-vo Literatury po Stroitel'stvu Publ.; 1961.
9. Rekach V.G., Krivoschapko S.H. *Analyses of shells of complex geometry*. Moscow: UDN Publ.; 1988. (In Russ.)
10. Krivoschapko S.H. *Torus surfaces and shells*. Moscow: UDN Publ.; 1991. (In Russ.)
11. Krivoschapko S.N. *Geometry of the ruled surfaces with a cuspidal edge and linear theory of analyses of the torus shells*. Moscow: RUDN Publ.; 2009. (In Russ.)
12. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of analytical surfaces*. Switzerland: Springer International Publishing; 2015.
13. Ivanov V.N., Krivoschapko S.N. *Analytical methods of analyses of shells of noncanonic forms*. Moscow: RUDN Publ.; 2010. (In Russ.)
14. Krivoschapko S.N., Alborova L.A. *Formation of the shells in architecture*. Moscow: RUDN Publ.; 2008. (In Russ.)
15. Krivoschapko S.N., Mamieva I.A. *Analytical surfaces in architecture of buildings, constructions and products*. Moscow: Librocom Publ.; 2012. (In Russ.)
16. Ivanov V.N., Romanova V.A. *Constructive forms of space constructions. Visualization of the surfaces at the systems MathCAD, and AutoCAD*. Moscow: ASV Publ.; 2016. (In Russ.)
17. Krivoschapko S.N. Analytical ruled surfaces and their complete classification. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):131–138. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-131-138>
18. Zenkevich O. *Finite element methods*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
19. Agapov V.P. *Finite element methods in static, dynamic and stability*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)
20. Ivanov V.N., Nasr Younis A. A. Analyses of the shells of complex geometry by variational difference methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2000;(9):25–34. (In Russ.)
21. Ivanov V.N. *Variation principles and methods of analyses of of problems of theory o elasticity*. Moscow: RUDN Publ.; 2001. (In Russ.)
22. Ivanov V.N. Geometry and forming of the normal surfaces with system of plane coordinate lines. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2011;(4):6–14. (In Russ.)
23. Ivanov V.N., Imomnazarov T.S., Farhan I.T.F. Orthogonal curved coordinate system and constructions of the surfaces on the trapezium curved planes. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2017;18(4):518–527. (In Russ.)
24. Vtlimirovic L.S., Stancovic M.S., Rradivojevic G. Modeling conoid surfaces. *Facta Universitatis: Architecture and Civil Engineering*. 2002;2(4):261–266.
25. Krivoschapko S.N., Basov U.K., Yakushina A.A. Investigation on design and using of conoidal shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2001;(10):7–14. (In Russ.)



ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК THEORY OF THIN SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-576-587
 УДК 531:539

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Диагностика тонкостенных конструкций сложной геометрии и структуры

Н.М. Якупов  , С.Н. Якупов 

Казанский научный центр РАН, Казань, Российская Федерация

 yzsrr@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 12 сентября 2021 г.

Доработана: 5 ноября 2021 г.

Принята к публикации: 15 ноября 2021 г.

Аннотация. Приведены основные этапы рождения тонкостенных конструкций, изменения их относительной толщины и массы единичной площади; указаны пути создания совершенных тонкостенных конструкций. Отмечены проблемы, возникающие в процессе эксплуатации тонкостенных конструкций сложной геометрии, а также подходы и методы их расчета. Для обеспечения безаварийной работы тонкостенной конструкции с тонкослойным покрытием, находящейся под нагрузкой и испытывающей воздействие физических полей и сред, необходимо грамотно диагностировать состояния элементов конструкций. Отмечается сплайновый вариант метода конечных элементов в двумерной (СВ МКЭ-2) и трехмерной (СВ МКЭ-3) постановках, а также синтез этих вариантов – СВ МКЭ-2 + СВ МКЭ-3. Сочетание идеи параметризации всей области и аппроксимация искомого переменных в пределах элемента эрмитовыми кубическими сплайнами позволяет получать высокоточные согласованные конечные элементы. Разработанные варианты метода конечных элементов дают возможность оценивать напряженно-деформированное состояние конструкций сложной геометрии, в том числе расчет многослойных, тонкостенных конструкций с покрытием и локальными дефектами, а также учитывать специфические поверхностные свойства, отличные от свойств основного массива. Рассматриваются исследования концентрации напряжений около локальных углублений. Отмечаются двумерные экспериментально-теоретические методы оценки жесткостных свойств и адгезии тонкостенных, тонкослойных и композиционных элементов конструкций сложной структуры, которые наряду с распределенной сложной структурой могут иметь распределенные дефекты. Разработки использованы при решении конкретных задач ряда предприятий.

Ключевые слова: тонкостенные конструкции, сложная геометрия, сложная структура, защитное покрытие, адгезия, история рождения, физические поля, среда, диагностика состояния, подходы расчета, сплайновый вариант, метод конечных элементов, экспериментально-теоретический метод, жесткостные характеристики

Для цитирования

Якупов Н.М., Якупов С.Н. Диагностика тонкостенных конструкций сложной геометрии и структуры // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 576–587. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-576-587>

Якупов Нух Махмудович, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики и машиностроения, Казанский научный центр, Российская академия наук, Российская Федерация, 420111, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31; ORCID: 0000-0001-8248-1589, eLIBRARY SPIN-код: 2933-5615, Scopus Author ID: 6508072220; yzsrr@mail.ru

Якупов Самат Нухович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения, Казанский научный центр, Российская академия наук, Российская Федерация, 420111, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31; ORCID: 0000-0003-0047-3679, eLIBRARY SPIN-code: 7382-4759, Scopus Author ID: 26968046600; tamas_86@mail.ru

© Якупов Н.М., Якупов С.Н., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Diagnostics of thin-walled structures of complex geometry and structure

Nukh M. Yakupov^{ID}✉, Samat N. Yakupov^{ID}

Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation

✉ yzsrr@mail.ru

Article history

Received: September 12, 2021

Revised: November 5, 2021

Accepted: November 15, 2021

Abstract. The main stages of the birth of thin-walled structures, changes in their relative thickness and mass of a unit area are given; ways of creating perfect thin-walled structures are indicated. The problems arising during the operation of thin-walled structures of complex geometry, as well as approaches and methods of their calculation are noted. To ensure trouble-free operation of a thin-walled structure with a thin-layer coating, under load and exposed to physical fields and environments, it is necessary to correctly diagnose the condition of structural elements. The spline variant of the finite element method in two-dimensional (SV FEM-2) and three-dimensional (SV FEM-3) productions is noted, as well as the synthesis of these variants – SV FEM-2 + SV FEM-3. The combination of the idea of parametrization of the entire domain and approximation of the desired variables within the element by Hermitian cubic splines makes it possible to obtain high-precision consistent finite elements. The developed variants of the finite element method make it possible to evaluate the stress-strain state of structures of complex geometry, including the calculation of multilayer, thin-walled structures with coating and local defects, as well as to take into account specific surface properties other than those of the main array. Studies of stress concentration near local depressions are considered. Two-dimensional experimental and theoretical methods are noted for evaluating the stiffness properties and adhesion of thin-walled, thin-layer and composite structural elements of complex structure, which, along with a distributed complex structure, may have distributed defects. The developments were used in solving specific tasks of a number of enterprises.

Keywords: thin-walled structures, complex geometry, complex structure, protective coating, adhesion, birth history, physical fields, physical environment, state diagnostics, calculation approaches, spline version, finite element method, experimental-theoretical method, stiffness characteristics

For citation

Yakupov N.M., Yakupov S.N. Diagnostics of thin-walled structures of complex geometry and structure. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):576–587. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-576-587>

Введение

Познавая окружающий мир и решая возникающие проблемы, человечество прошло большой путь развития. К началу эпохи Возрождения практически была завершена закладка фундамента многих наук, в том числе математики и механики. В частности, изобретены колесо и рычаг как основа машиностроения; кирпич, бетон и криволинейные формы как основа строительного дела; сформулирована методология познания и развита техника эксперимента; осуществлен переход на позиционную систему счисления на базе арабских цифр и на систему математических символов основы современной математики и вычислительной техники.

Современная механика бурно развивается, ей еще предстоит решить много проблем, которые ставит перед ней современное общество, прежде всего проблемы предотвращения техногенных катастроф и решение вопросов экологии, создание легких и прочных тонких структур и исследование их свойств в различных средах и физических полях и т. д.

В исследовании отмечаются наиболее важные этапы рождения тонкостенных конструкций в строительном деле: от каменных глыб до изящных тонкостенных конструкций сложной геометрии, являющихся венцом их развития. Тонкостенные конструкции, сочетающие в себе легкость с высокой прочностью, находят широкое применение в строительстве и машиностроении, в авиа- и ракетостроении, кораблестроении, нефтехимии и т. д. Исторические аспекты развития тонкостенных конструкций позволяют выявлять актуальные проблемы и направления дальнейшего их развития.

Nukh M. Yakupov, Dr.Sci. (Eng.), leading researcher, Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, 2/31 Lobachevskogo St, Kazan, 420111, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8248-1589, eLIBRARY SPIN-code: 2933-5615, Scopus Author ID: 6508072220; yzsrr@mail.ru

Samat N. Yakupov, PhD in Technical Sciences, senior researcher, Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, 2/31 Lobachevskogo St, Kazan, 420111, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0047-3679, eLIBRARY SPIN-code: 7382-4759, Scopus Author ID: 26968046600; tamas_86@mail.ru

Современные тонкостенные конструкции воспринимают большие нагрузки, работают в агрессивных средах, испытывают воздействие физических полей. В процессе эксплуатации в элементах конструкций возникают дефекты, в том числе коррозионные. В работе отмечаются некоторые проблемы, возникающие в процессе эксплуатации тонкостенных конструкций.

Широкому распространению тонкостенных конструкций способствовали технологические возможности, а также успешное решение научных проблем, в частности разработка теории оболочек. К 1960–1970-м гг. были разработаны эффективные методы расчета тонкостенных конструкций на базе теории оболочек. Отмечаются подходы расчета тонкостенных конструкций сложной геометрии, акцентируется внимание на сплайновом варианте метода конечных элементов (МКЭ) как эффективного метода расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек сложной геометрии.

В настоящее время наблюдается всевозрастающее применение различных тонкостенных и тонкослойных композиций сложной структуры с уникальными физико-механическими свойствами. Вопросы определения жесткостных свойств тонких композиций сложной структуры и оценки их долговечности является чрезвычайно актуальными. В работе уделяется внимание эффективному экспериментально-теоретическому методу оценки жесткостных характеристик тонкостенных и тонкослойных конструкций сложной структуры и геометрии и адгезионных свойств различных покрытий.

Рождение тонкостенных конструкций в строительном деле

Вся деятельность человека, начиная с глубокой древности и до настоящего времени, тесно связана со строительством [1–3]. Предки из бронзовой эпохи оставили после себя композиции из массивных каменных блоков (менгиры, дольмены и кромлехи). В Древнем Египте сооружены грандиозные каменные пирамиды, строительными элементами которых были трехмерные каменные блоки и высушенные на солнце кирпичи. Древние греки использовали каменные блоки, кирпичные стены и деревянные брусья. Прорыв в строительном деле был сделан в Древнем Риме благодаря изобретению бетона, который дал возможность реализации сложных конструктивных форм. Получили развитие арочные структуры, появились большие каменные полусферические купола – пространственное развитие арок. В Византии и в исламских странах широкое распространение получили купола, опирающиеся на арки. В архитектуре исламских стран появились арки со сложным контуром, в отличие от арок полукруглой формы, используемых в Древнем Риме. Новые формы имели большую выразительность и выгодно отличались в прочностном отношении – наличие угла на вершине арки исключало возникновение зоны растяжения и увеличивало надежность конструкции при землетрясениях.

В XII в. в исламских странах появились двухслойные, гофрированные и составные купола, которые, помимо архитектурной выразительности, существенно упрочняли конструкцию купола в целом (рис. 1).

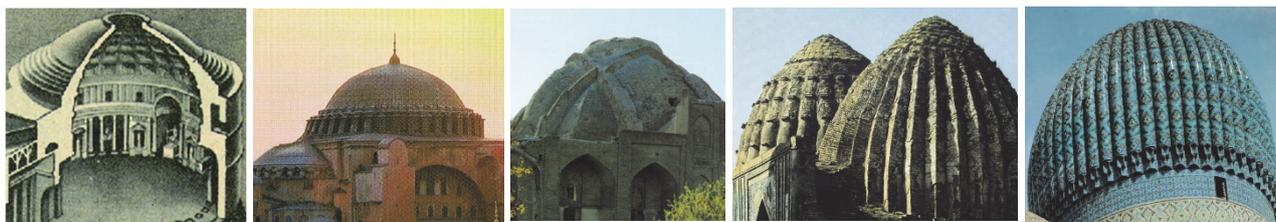


Рис. 1. От гладких каменных куполов до гофрированных
Figure 1. From smooth stone domes to corrugated

Несколько позже в строительных конструкциях романской архитектуры получили распространение своды и купола, усиленные ребрами. В готической архитектуре развили технологию сооружения конструкций из арок, аркбутанов, контрфорсов, что облегчало процесс сборки конструкции и позволяло создавать сложные композиции. В XIV в. в Италии и в XV в. в других странах Западной Европы началась эпоха Возрождения – синтез колоннад, арочных галерей, сводов и куполов, которые придали постройкам величественность.

Первые купола были толстостенными каменными оболочками переменной жесткости. Толщина h купола римского Пантеона менялся от 2,5 м у основания до 1,4 м в вершине при диаметре основания $D = 2R = 43.3$ м; относительная толщина составляла $h/R = 1/8,7–1/15,5$. К XIX в. относительная толщина куполов снизилась до $1/25$. Рождение железобетона способствовало следующему крупному скачку в строи-

тельном деле – толщина покрытия здания с диаметром купола 40 м в городе Йене (Германия, 30-е гг.) составила всего 6 см, то есть относительная толщина $h/R = 1/333!$ С относительной толщиной связана масса единичной площади покрытия m_l . Если масса квадратного метра древнеримского каменного купола составляла около $m_l = 8000 \text{ кг/м}^2$, то у железобетонных покрытий она существенно снизилась: единичная масса купола рынка с пролетом в 76 м в Лейпциге (Германия) составила $m_l = 476 \text{ кг/м}^2$, а квадратный метр покрытия здания в г. Андерсоне (США) составила всего $m_l = 256 \text{ кг/м}^2$. Следующим крупным шагом стало использование металлических покрытий. Появились гладкие (мембранные), подкрепленные ребрами, гофрированные и сетчатые тонкостенные покрытия. В 1896 г. инженер В.Г. Шухов продемонстрировал на Нижегородской выставке сооружение с мембранной крышей. Мембранные покрытия снимали вопрос об устойчивости конструкций, при этом передача усилий растяжением – один из выгодных способов работы конструкций. Примером мембранного покрытия размером $224 \times 183 \text{ м}$ явился стадион «Олимпийский» (Москва), единичная масса покрытия из стальных листов толщиной 5 мм составила всего $m_l = 39 \text{ кг/м}^2$. Большой эффект дают покрытия из алюминиевых сплавов. Так, единичная масса сферического купола из гофрированных панелей толщиной 3,2 мм диаметром 91,5 м и стрелой подъема 25,9 м в Лонгвью (США) снизилась до $m_l = 22,6 \text{ кг/м}^2$ при относительной толщине $h/R = 1/143$.

В строительном деле человечество прошло большой путь: от незатейливых каменных дольменов бронзовой эпохи до изящных тонкостенных покрытий; от примитивных глиняных домов до стоэтажных жилых комплексов; от каменных менгиров до ажурных пятисотметровых телебашен. Сочетание различных конструктивных форм и материалов позволило создать величественные и гармоничные строительные конструкции (рис. 2).

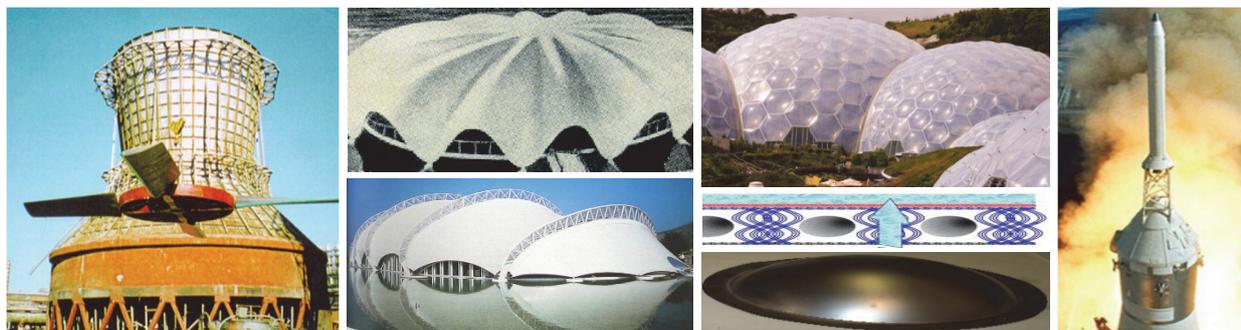


Рис. 2. Тонкостенные и тонкослойные элементы конструкций сложной геометрии и структуры
Figure 2. Thin-walled and thin-layered structural elements of complex geometry and structure

Широкому распространению тонкостенных конструкций способствовали технологические достижения, успешное решение научных задач теории оболочек и развитие методов расчета. Все это позволило создавать относительно совершенные тонкостенные конструкции и сооружения. Хотя по относительным качественным параметрам рукотворные конструкции все еще очень далеки от уникальных природных объектов, в которых форма и материал каждого элемента гармонично сочетается с их функциональностью.

Глубокое изучение природных конструкций, освоение новых технологий производства и совершенствование методов расчета позволит в будущем создавать более изящные и выразительные рукотворные тонкостенные конструкции сложной геометрии и существенно расширить их применение.

Возникающие в процессе эксплуатации проблемы

Конструкции предназначены для выполнения определенных функций в течение заданного срока. К сожалению, многие из них, не отработав заданный срок, разрушаются. С расширением области применения тонкостенных конструкций, в том числе для ответственных изделий нефтехимии и приборостроения, атомной и авиакосмической промышленности, постоянно ужесточаются требования, предъявляемые к их качеству и надежности функционирования. Обеспечение безопасности конструкций является важной проблемой [4–6], которая входит в Перечень критических технологий Российской Федерации (п. 21).

Современные тонкостенные конструкции состоят непосредственно из несущего тонкостенного элемента и защитного покрытия. Для защиты несущих элементов конструкций от коррозии и эрозии, от высоких температур и огня, от вирусов и бактерий, от различных полей и сред, а также для поглоще-

ния волн заданного диапазона активно разрабатываются различные композиционные покрытия, в том числе функциональные и интеллектуальные [7–10].

В процессе эксплуатации тонкостенных конструкций выходят из строя защитные покрытия вследствие изменения свойств покрытия и адгезива. В результате этого на поверхности элемента конструкции возникают различные дефекты (царапины, трещины, вмятины и т. д.), происходит коррозионный износ, появляются локальные углубления и т. д. Все это приводит к существенному перераспределению напряжений в элементах конструкций, к изменению механических свойств поверхностных слоев тонкостенного элемента конструкции, а в области локальных дефектов (рис. 3, 4) возникают концентрации напряжений.



Рис. 3. Коррозионный износ элементов конструкции крупногабаритной градирни ПАО «Нижнекамскнефтехим»
Figure 3. Corrosion wear of structural elements of a large-sized cooling tower of PJSC “Nizhnekamskneftekhim”



Рис. 4. Износ и разрушение элементов конструкции крупногабаритного отстойника ПАО «Нижнекамскнефтехим»
Figure 4. Wear and destruction of structural elements of a large-sized sump of PJSC “Nizhnekamskneftekhim”

Для обеспечения безаварийной работы конструкции с покрытием, находящихся под нагрузкой и испытывающих воздействие физических полей и сред, необходимо грамотно диагностировать состояния элементов конструкций, достоверно оценивать несущую способность составных элементов, включая состояние покрытия и адгезива. Для решения этой комплексной проблемы необходимо уметь определять изменения жесткостных свойств покрытий и адгезии тонкослойного покрытия с тонкостенным элементом, а также оценивать изменение жесткостных свойств под воздействием среды и физических полей. Решение проблемы позволит приостановить разрушение и продлить «жизнь» конструкций, то есть предотвратить техногенную и экологическую катастрофу любого уровня.

Подходы расчета тонкостенных конструкций сложной геометрии

Под оболочками сложной геометрии подразумеваются оболочки, имеющие сложную форму срединной поверхности и сложный контур [5; 11–13]. Различают оболочки канонической формы, описываемые аналитическими формулами, а также оболочки неканонической формы, когда невозможно описать форму аналитически. В начале XX в. были заложены основы линейной теории пластин и оболочек. Далее естественным направлением развития стала нелинейная теория оболочек, в которой учитываются нелинейные компоненты в геометрических [14] и физических соотношениях [15]. Для грамотной диагностики тонкостенных оболочек сложной геометрии необходимо, прежде всего, достоверно оценивать их напряженно-деформированное состояние. Для решения этой задачи по определению НДС тонкостенных конструкций сложной геометрии привлекают известные подходы: метод конечных разностей, метод коллокации, метод граничных элементов, вариационные методы, экспериментальные и др. Получает развитие итерационный подход [16], широко используется метод конечных элементов [17–39].

В теории оболочек применение МКЭ началось с использования плоских конечных элементов [17–26]. Известны элементы, базирующиеся на соотношениях трехмерной теории упругости [17–19; 27]. Для расчета тонкостенных конструкций естественным является оболочечный подход, например [17–19; 28–35]. Многослойные конечные элементы [36–38] получают, как правило, на основе трехмерного конечного элемента сплошной среды с линейной аппроксимацией по толщине с использованием оболочечных гипотез. Имеются работы, в которых рассматриваются большие деформации, в частности [17–19; 39].

Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета НДС оболочек сложной геометрии

Современная технология позволяет в определенной степени изготавливать оболочечные конструкции различной формы. Однако вопросы определения прочности при этом не упрощаются. Для эффективного использования тонкостенных конструкций сложной формы необходимо уметь рассчитывать НДС таких объектов. Возникает необходимость разработки высокоточных методов расчета оболочек сложной геометрии. В традиционном конечно-элементном подходе при рассмотрении объектов сложной геометрии невозможно обеспечить совместность элементов, не обеспечивается даже неразрывность полей перемещений по всей линии соседних элементов, например при рассмотрении изопараметрических элементов.

Эффективным методом оболочечного подхода является сплайновый вариант МКЭ (СВ МКЭ-2) [40–42], оценка точности схемы выполнена в [43]. На первом этапе решается задача параметризации рассматриваемого объекта. Используется аппроксимация искомым неизвестным кубическими сплайнами в пределах каждого элемента. На базе вариационного метода Лагранжа получаются нелинейные уравнения равновесия. На каждом шаге расчета напряженно-деформационного состояния рассматриваемого объекта производится вычисление метрики, тензоров напряжений и деформаций, корректировка геометрических и механических параметров, что позволяет достаточно точно проследить процесс деформирования. Алгоритм программы предусматривает распараллеливание вычисления отдельных блоков с целью ускорения счета.

Оболочечные модели, в том числе СВ МКЭ-2, в силу двумерности постановки, не позволяют определять напряженно-деформированное состояние дефектных областей типа несквозных трещин, локальных углублений и др. Возникает необходимость использования трехмерных моделей. Идея СВ МКЭ-2 развита для расчета НДС элементов конструкций в трехмерной постановке СВ МКЭ-3 [44; 45]. Сочетание идеи параметризации всей области и аппроксимация искомым переменных в пределах каждого элемента эрмитовыми кубическими сплайнами позволяет получать высокоточные согласованные конечные элементы. Разработаны численные модели цилиндрических, тороидальных и циклических оболочек сложной геометрии трехмерными конечными элементами СВ МКЭ-3 и исследованы концентрации напряжений в области локальных углублений (рис. 5) [46–48].

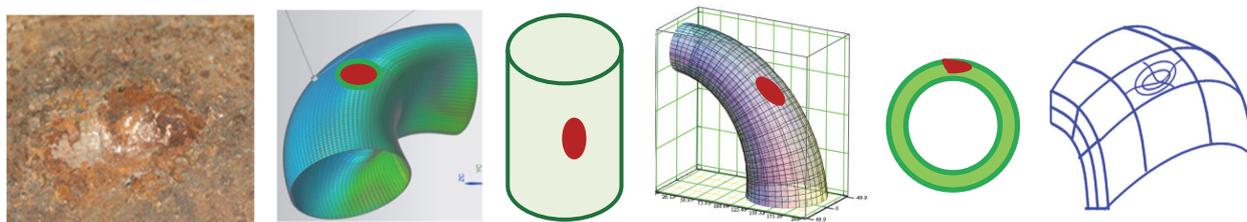


Рис. 5. Локальные углубления в тороидальной, цилиндрической и циклической оболочках: схема модели
Figure 5. Local depressions in toroidal, cylindrical and cyclic shells: model scheme

Дальнейшее развитие сплайнового варианта МКЭ – разработка численной модели синтезированного элемента сложной геометрии на базе трехмерных элементов с кубической аппроксимацией искомым переменных во всех трех направлениях рассматриваемой области и двумерных элементов с кубической аппроксимацией искомым переменных по ее граням. Разработанные модели позволяют определять НДС многослойных [49] и тонкостенных элементов с тонким поверхностным покрытием (рис. 6) [50].

Разработанные варианты метода конечных элементов позволяют проводить оценку НДС конструкций сложной геометрии, в том числе расчет многослойных, тонкостенных конструкций с покрытием и локальными дефектами, а также учитывать специфические поверхностные свойства, отличные от свойств основного массива.

Для задания координат сложных поверхностей и локальных дефектов разработаны способы параметризации: патенты на изобретение № 2374697, № 2517149, № 2665499 (рис. 7, 8).

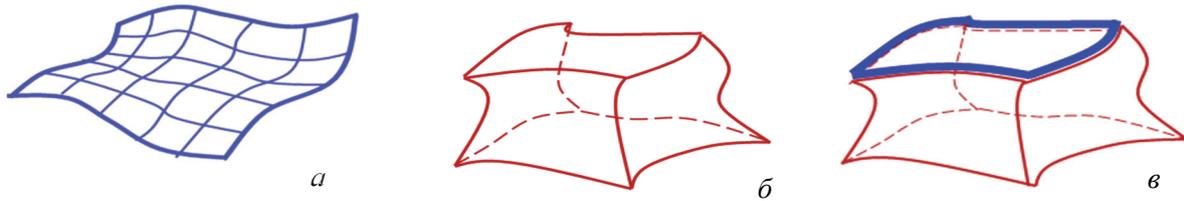


Рис. 6. Объекты исследования по СВ МКЭ-2 (а), СВ МКЭ-3 (б) и СВ МКЭ-2 + СВ МКЭ-3 (в)
Figure 6. Objects of research on spline version: FEM-2 (a), FEM-3 (b) and FEM-3 + SV FE-3 (c)

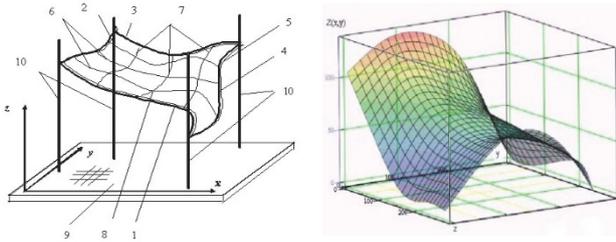


Рис. 7. Поверхности со сложным контуром (патент № 2374697)
Figure 7. Surfaces with a complex contour (Patent No. 2374697)

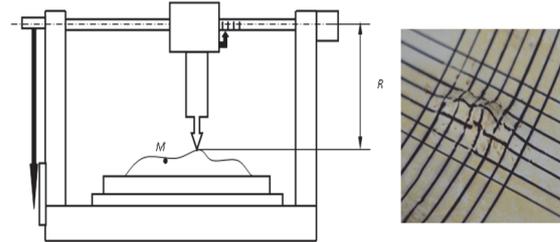


Рис. 8. Локальные углубления, слепок дефекта (патент № 2517149)
Figure 8. Local indentations, defect impression (Patent No. 2517149)

Разработки использованы при расчете корпуса крупногабаритной градирни СК 1200, лопасти вентилятора этой градирни для ПАО «Нижнекамскнефтехим», для оценки концентрации напряжений в области локального углубления в трубопроводе для ООО «Газпром трансгаз Казань». Программа расчета НДС лопаток рабочих колес турбокомпрессора внедрены в НИИ «Турбокомпрессор» и др.

Экспериментально-теоретический метод оценки жесткостных свойств тонкостенных конструкций сложной структуры и геометрии

Исходя из функционального назначения, разрабатываются различные тонкостенные и тонкослойные конструкции, имеющие сложную структуру и геометрию, в частности многослойные композиционные элементы (рис. 9). Сложная структура и геометрия возникает и в процессе эксплуатации конструкций, например вследствие коррозии, царапин и т. д.



Рис. 9. Примеры тонкостенных элементов конструкций сложной структуры и геометрии
Figure 9. Examples of thin-walled structural elements of complex structure and geometry

Возникают трудности при описании геометрии и структуры тонкостенных элементов даже МКЭ. Стандартное одноосное испытание на растяжение полоски неприемлемо для оценки жесткостных свойств тонкостенных, тонкослойных и композиционных элементов сложной структуры и не применимо для исходно неплоских элементов.

Метод «индентора» [51] неэффективен при исследовании образцов, имеющих сложную структуру и при наличии нано- и микродефектов. В зародышевом состоянии находится молекулярный подход на базе мощных компьютеров, возникают трудности при описании сложной структуры с различными свойствами.

ми составных компонент, а также при задании информации о дефектах на нано-, микро- и макроуровнях одновременно (рис. 10).

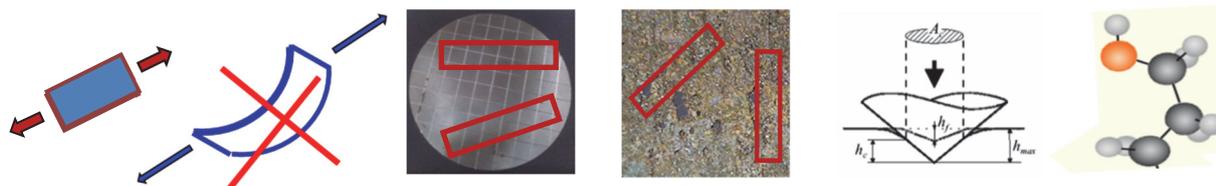


Рис. 10. Невозможность использования известных методов
Figure 10. Impossibility of using known methods

Разработан эффективный двумерный экспериментально-теоретический метод оценки жесткостных свойств тонкостенных, тонкослойных и композиционных элементов конструкций сложной структуры, которые наряду со сложной структурой могут иметь распределенные дефекты (рис. 11) [52–54].

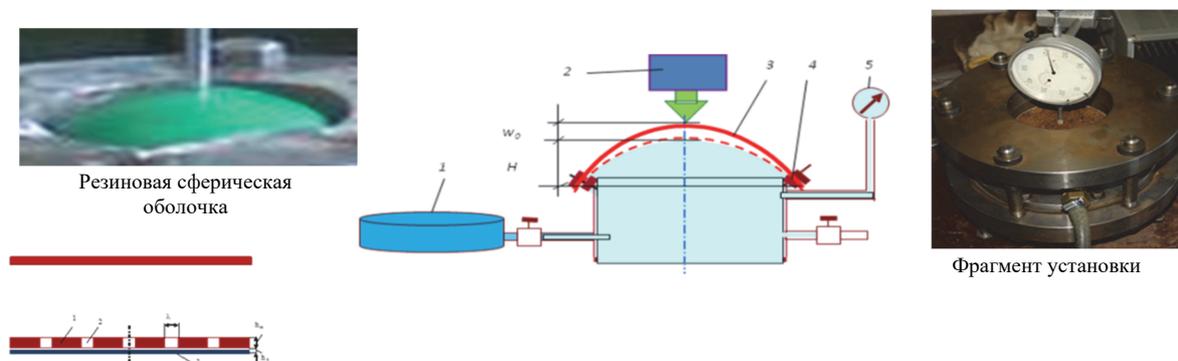


Рис. 11. Схема установки:
1 – источник воздуха; 2 – измерительный комплекс; 3 – образец; 4 – узел крепления; 5 – манометр
Figure 11. Installation diagram:
1 – air source; 2 – measuring complex; 3 – sample; 4 – mounting unit; 5 – pressure gauge

Метод базируется на экспериментальных данных и теоретических соотношениях, полученных из нелинейной теории оболочек. Созданы уникальные экспериментальные установки и разработаны новые способы: патенты № 2184361, 2296976, 2310184, 2387973, 2403556, позволяющие получать стабильные экспериментальные параметры. Исследованы различные образцы, в том числе композиционные структуры [55; 56].

Разработки использованы в ПАО «Нижнекамскнефтехим» при определении модуля упругости тонкостенных элементов конструкций, в ООО «Газпром трансгаз Казань» при анализе способов и моделей определения механических свойств покрытий и адгезива.

Экспериментально-теоретический метод оценки адгезии покрытий

Поверхностные покрытия позволяют решать множество проблем надежности, долговечности и безопасности тонкостенных конструкций. Они обеспечивают защиту и изоляцию поверхности изделий, работающих в различных средах и под воздействием различных физических полей [7–10; 57]. Покрытия формируются на поверхностях конструкций сложной геометрии, например на цилиндрических и тороидальных поверхностях труб. Исходя из условий эксплуатации, разрабатываются покрытия и адгезивы сложной структуры. При выборе покрытия, адгезива и технологии его нанесения появляются вопросы, связанные с определением их необходимых геометрических и физических параметров, с оценкой механических свойств и срока их службы в зависимости от окружающей среды и физических полей и т. д. (рис. 12).

Возникает необходимость оценки свойств покрытий и адгезива и закономерности их изменения под воздействием среды, физических полей, формы поверхности и др. (рис. 13).

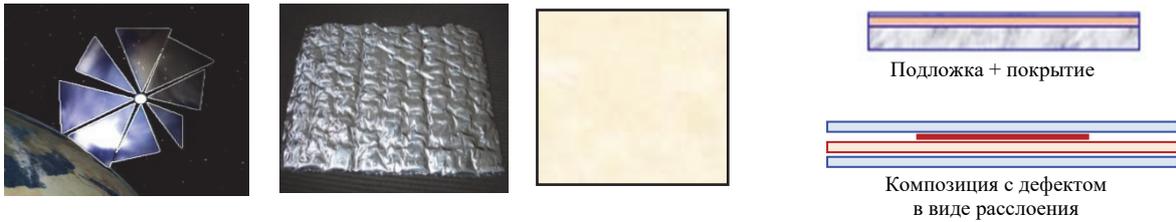


Рис. 12. Солнечные паруса LightSail-1 и теплоотражающие мембраны
Figure 12. LightSail-1 solar sails and heat-reflecting membranes

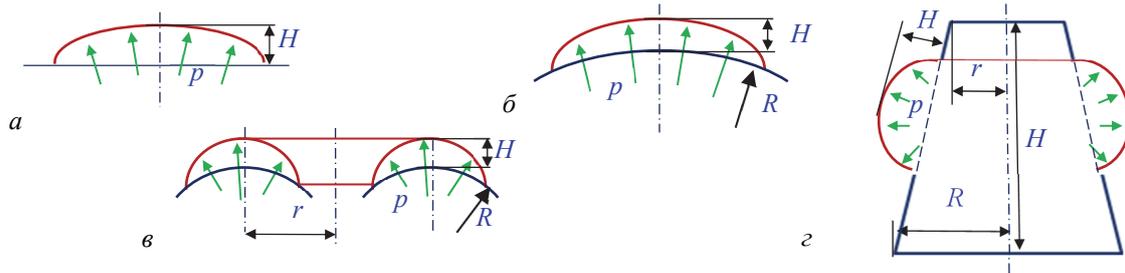


Рис. 13. Схемы нагружений:
 а – плоские; б – сферические; в – тороидальные; г – конические объекты
Figure 13. Loading schemes:
 a – flat; б – spherical; в – toroidal; г – conical objects



Рис. 14. Схемы экспериментальных установок, фото фрагмента установки, расчетное НДС
Figure 14. Schemes of experimental installations, photos of the installation fragment, estimated VAT

Разработан новый экспериментально-теоретический метод оценки адгезии покрытия к плоской и цилиндрической подложке [58; 59]. Впервые исследовано влияние деформации поверхности на адгезию покрытия (рис. 14) [60].

К разработке «Экспериментально-теоретический метод исследования адгезии пленки к подложке» проявила интерес государственная корпорация «Ростех».

Заклучение

Диалектика развития конструкций: от простых массивных элементов к тонкостенным конструкциям сложной геометрии и структуры.

Займствование природных аналогов, разработка новых технологий производства и совершенствование методов расчета позволят создавать выразительные рукотворные тонкостенные конструкции сложной геометрии и расширять их применение.

Для обеспечения безаварийной работы тонкостенной конструкции необходимо грамотно диагностировать состояние его элементов.

Сплайновый вариант МКЭ и экспериментально-теоретические методы – эффективный инструмент диагностики тонкостенных конструкций сложной геометрии и структуры.

Список литературы / References

1. Hart-Davies A. (ed.) *Science: the definitive visual guide*. London: Dorling Kindersley Limited; 2009.
2. Al-Hassani S.T.S. *1001 inventions: the enduring legacy of Muslim civilization*. National Geographic; 2012.
3. Yakupov N.M., Galimov Sh.K., Khismatullin N.I. *From stone blocks to thin-walled structures*. Kazan: SOS Publ.; 2001. (In Russ.)
Якупов Н.М., Галимов Ш.К., Хисматуллин Н.И. От каменных глыб к тонкостенным конструкциям. Казань: SOS, 2001. 96 с.
4. Makhutov N.A. *Strength and safety. Fundamental and applied research*. Novosibirsk: Nauka Publ.; 2008. (In Russ.)
Махутов Н.А. Прочность и безопасность. Фундаментальные и прикладные исследования. Новосибирск: Наука, 2008. 523 с.
5. Yakupov S.N., Tameev I.M., Yakupov N.M. *Diagnostics and treatment of pipelines*. Kazan: Kazanskaya Nedvizhimost' Publ.; 2018. (In Russ.)
Якупов С.Н., Тамеев И.М., Якупов Н.М. Диагностика и лечение трубопроводов. Казань: Казанская недвижимость, 2018. 180 с.
6. Collins J.A. *Failure of materials in mechanical design. Analysis, prediction, prevention*. New York: John Wiley & Sons; 1981. (In Russ.)
7. Montemor M.F. Functional and smart coatings for corrosion protection: a review of recent advances. *Surface & Coatings Technology*. 2014;258:17–37.
8. Dry C.M., Sottos N. Smart structures and materials 1993: smart materials // SPIE Proceedings. 1916;1:438–444.
9. Dry C. Procedures developed for self-repair of polymeric matrix composite materials. *Comp. Struct.* 1996;35(3): 263–269. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(96\)00033-5](https://doi.org/10.1016/0263-8223(96)00033-5)
10. Yakupov S.N., Yakupov N.M. Thin-layer films and coatings. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017;857: 012056. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/857/1/012056>
11. Paimushin V.N. *Boundary value problems of deformation mechanics of shells of complex geometry* (dissertation of Doctor of Physical and Mathematical Sciences). Kazan; 1979. (In Russ.)
Паймушин В.Н. Краевые задачи механики деформирования оболочек сложной геометрии: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1979. 402 с.
12. Rekach V.G., Krivoschapko S.N. *Calculation of shells of complex geometry*. Moscow: Peoples' Friendship University; 1988. (In Russ.)
Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. М.: Университет дружбы народов, 1988. 177 с.
13. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of analytical surfaces*. Switzerland: Springer; 2015.
14. Mushtari Kh.M., Galimov K.Z. *Non-linear theory of thin elastic shells*. Jerusalem; 1962.
15. Pyushin A.A. *Plasticity*. Moscow: Gostekhizdat Publ.; 1948. (In Russ.)
Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
16. Zverayev E.M. Выделение согласованных уравнений классической теории оболочек из трехмерных уравнений теории упругости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 135–148. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148>
Zverayev E.M. Extraction of consistent shell theory equations from 3D theory of elasticity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(2):135–148. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148>
17. Golovanov A.I., Pesoshin A.V., Tyuleneva O.N. *Modern finite element models and methods for studies of thin-walled structures*. Kazan: Kazan State University; 2005. (In Russ.)
Голованов А.И., Песошин А.В., Тюленева О.Н. Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций. Казань: КГУ, 2005. 442 с.
18. Yang H.T.Y., Saigal S., Masud A., Karania R.K. A survey of recent shell finite elements. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. 2000;47:101–127.
19. Members C., Ashwell D.G., Gallagher R. *Finite elements for thin shells and curved members*. London: John Wiley & Sons; 1976.
20. Herrmann I.R. Finite element bending analysis for plates. *Journal of Engineering Mechanics*. 1967;93(5):13–26.
21. Argyris J.H., Fried I., Scharpf D.W. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement methods. *The Aeronautical Journal*. 1968;72(692):701–709.
22. Fraeijs de Veubeke B. Displacement and equilibrium models in the finite element methods. *Stress Analysis*. New York; 1965. p. 145–197.
23. Connor J., Brebbia C.A. A stiffness matrix for shallow rectangular shell element. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1967;93(5):43–65.
24. Elias Z.M. Duality in finite element methods. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1968;94(4):931–948.
25. Lee S.W., Dai C.C., Yeom C.H. A triangular finite element for thin plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1985;21(10):1813–1831.

26. Gallagher R.H. Finite element representation for thin shell instability analysis. *Buckling of Structures*. Cambridge; 1974. p. 40–51.
27. Sakharov A.S., Kislooky V.N., Kirichevsky V.V., Altenbach I., Gabbert U., Dankert Yu., Keppler H., Kochyk Z. *The finite element method in the mechanics of solids* (A.S. Sakharov, I. Altenbach, eds.). Kiev: Vishcha Shkola Publ.; 1982. (In Russ.)
- Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кепплер Х., Кочык З. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища школа, 1982. 479 с.
28. Argyris J.H., Scharpf D.W. The SHEBA family of shell elements for the matrix displacement methods. *The Aeronautical Journal*. 1968;72(694):873–883.
29. Clough R.W., Johnson R.J. A finite element approximation for the analysis of thin shell. *International Journal of Solids and Structures*. 1968;4(1):43–60.
30. Brebbia C.A., Nath J.M.D. A comparison of recent shallow shell finite element analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1970;12(10):849–857.
31. Ahmad S., Irons B., Zienkiewicz O. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1970;2(3):419–451.
32. Dupuis D., Goel J.J. A curved finite element for thin elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*. 1970;6(11):1413–1428.
33. Dawe D.J. Rigid-body motions and strain-displacement equations of curved shell finite elements. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1972;14(9):569–578.
34. Sabir A.B., Lock A.C. A curved, cylindrical shell, finite element. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1972;14(2):125–135.
35. Irons B.M., Razzaque A. A further modification to Ahmad's shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1973;5(4):588–589.
36. Kant T., Menon M.P. Higher-order theories for composite and sandwich cylindrical shells with finite element. *Computers and Structures*. 1985;33(5):1191–1204.
37. Noor A.K., Burton W.S., Bert C.W. Computational models for sandwich panels and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 1996;49:155–199.
38. Nayak A.K., Moy S.S.J., Sheno R.A. Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher order theory. *Composites Part B. Engineering*. 2002;33:505–519.
39. De Sousa R.J.A., Cardoso R.P.R., Valente R.A.F., Yoon J.-W., Grácio J.J., Natal Jorge R.M. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2005;62(7):952–977. <https://doi.org/10.1002/nme.1226>
40. Yakupov N.M. Calculating complex shells. *Proceedings of a Shell Theory Seminar*. 1984;17(II):4–17.
- Якупов Н.М. Об одном методе расчета оболочек сложной геометрии // Исследования по теории оболочек: труды семинара. Вып. 17. Ч. II. Казань, 1984. С. 4–17.
41. Kornishin M.S., Yakupov N.M. *Spline variant of finite element method for the calculation of complex shells*. *Prikladnaya Mekhanika*. 1987;23(3):38–44.
- Корнишин М.С., Якупов Н.М. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикладная механика. 1987. Т. 23. № 3. С. 38–44.
42. Kornishin M.S., Yakupov N.M. To the calculation of shells of complex geometry in cylindrical coordinates based on the spline version of the FEM. *Prikladnaya Mekhanika*. 1989;25(8):53–60.
- Корнишин М.С., Якупов Н.М. К расчету оболочек сложной геометрии в цилиндрических координатах на основе сплайнового варианта МКЭ // Прикладная механика. 1989. Т. 25. № 8. С. 53–60.
43. Dautov R.Z. Estimation of the accuracy of FEM schemes based on rectangular elements with numerical integration for shells of complex geometry. *Proceedings of a Shell Theory Seminar*. 1992;27:22–36.
- Даутов Р.З. Оценка точности схем МКЭ на основе прямоугольных элементов с численным интегрированием для оболочек сложной геометрии // Исследования по теории оболочек: труды семинара. Вып. 27. Казань, 1992. С. 22–36.
44. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Yakupov S.N., Kiyamov I.Kh. Modeling of structural elements of complex geometry by three-dimensional finite elements. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2011;17(1):145–154. (In Russ.)
- Якупов Н.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Киямов И.Х. Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 1. С. 145–154.
45. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Yakupov S.N. Modelling of cyclic shells with complex geometry three-dimensional finite elements. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019;1158:042038. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042038>
46. Kanyukov R.A., Yakupov N.M., Tameev I.M., Kiyamov Kh.G., Yakupov S.N., Kanyukov R.R. Modeling of the stress – strain state of a cylindrical body with a local depression by three – dimensional finite elements. *Nauka i Tekhnika v Gazovay Promyshlennosti*. 2012;(2):53–60. (In Russ.)
- Кантюков Р.А., Якупов Н.М., Тамеев И.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Кантюков Р.Р. Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела с локальным углублением трехмерными конечными элементами // Наука и техника в газовой промышленности. 2012. № 2. С. 53–60.

47. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z. Simulation of toroidal shell with local defect. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41(7):1310–1314.
48. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z. Calculation of the fragments toroidal shell with local internal deepening. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(9):2257–2262.
49. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(9):2263–2271.
50. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Numerical model of the structural element complex geometry with a coating. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1954:012054. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1954/1/012054>
51. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*. 1992;7:1564–1583. <https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
52. Yakupov N.M., Nurullin R.G., Yakupov S.N. Mechanical properties of thin films and nanofilms. *Russian Engineering Research*. 2010;29(6):571–574.
53. Galimov N.K., Yakupov N.M., Yakupov S.N. Experimental-theoretical method for determining the mechanical characteristics of spherical films and membranes with a complex structure. *Mechanics of Solids*. 2011;46(3):380–386. <https://doi.org/10.3103/S0025654411030058>
54. Yakupov N.M., Galimov N.K., Yakupov S.N. Methodology of studying non-planar films and membranes of complex structure. *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*. 2019;85(2):55–59. (In Russ.) <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2019-85-2-55-59>
- Якупов Н.М., Галимов Н.К., Якупов С.Н. Методика исследования неплоских пленок и мембран сложной структуры // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2019. Т. 85. № 2. С. 55–59. <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2019-85-2-55-59>
55. Yakupov N.M., Kharislamova L.U. Stiffness of compositions with delamination's and the influence of ultraviolet on adhesion. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(6):840–845. <https://doi.org/10.1134/S199508021906026X>
56. Yakupov S.N., Kharislamova L.U., Yakupov N.M. Studying the stiffness of thin-layered compositions with delaminations. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019;1281:012092. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1281/1/012092>
57. Yakupov S.N., Yakupov N.M. Research of mechanical characteristics thin coating. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019;1328:012103.
58. Yakupov N.M., Yakupov S.N., Gubaydullin R.I. Research of adhesion of a covering on cylindrical surfaces. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019;1281(1):012091. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1281/1/012091>
59. Yakupov S.N., Gubaidullin R.I., Yakupov N.M. Determination of hardness of thin layer coating and its adhesion to the shell of the cylindrical form. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019;1158:042039. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042039>
60. Yakupov S.N., Gubaidullin R.I., Yakupov N.M. Investigation of the influence of the nature of surface deformation on coating adhesion. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1954:012053. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1954/1/012053>



DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-588-607
 УДК 539.3:534.1

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Итерационные методы построения решения уравнений незамкнутых оболочек

Е.М. Зверьяев^{1,2}  , Е.М. Тупикова¹ 

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

²Московский авиационный институт, Москва, Российская Федерация

✉ zveriaev@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 7 июня 2021 г.

Доработана: 2 августа 2021 г.

Принята к публикации: 21 сентября 2021 г.

Аннотация. Предложен общий метод построения решения уравнений замкнутых и открытых тонких оболочек с сохранением порядка дифференциальных уравнений и выполнением всех граничных условий. Соотношения упругости преобразованы к виду, позволяющему в соответствии с ранее предложенным методом Сен-Венана – Пикара – Банаха произвести итерационное вычисление всех искомым неизвестных задачи. Процедура построения решения сводится к замене восьми дифференциальных уравнений первого порядка исходной системы теории оболочек на восемь соответствующих интегральных уравнения с малым множителем, имеющим смысл отношения ширины оболочки к ее длине или изменямости напряженно-деформированного состояния в поперечном направлении. Вычисленные путем прямого интегрирования пятнадцать неизвестных исходной задачи выражены через пять основных неизвестных. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы приводит к решению восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся и быстро меняющихся компонентов основных неизвестных. Медленно меняющиеся компоненты описывают классическое напряженно-деформированное состояние. Быстро меняющиеся – определяют краевые эффекты в точках разрыва непрерывности медленно меняющегося классического решения и выполнение неудовлетворенных ими граничных условий из-за понижения порядка дифференциальных уравнений классической теории, основанной на гипотезе Кирхгофа. В общем случае решение представляется в виде асимптотических рядов по малому параметру изменямости с коэффициентами в виде степенных рядов по поперечной координате. Изложение проиллюстрировано примером построения итерационного процесса для длинной круговой цилиндрической панели. В силу теоремы о неподвижной точке итерационный процесс является сходящимся.

Ключевые слова: принцип сжатых отображений, итерации, упругость, полоса, полное решение, метод, Сен-Венан, Пикар, Банах, граничные условия, краевой эффект

Для цитирования

Зверьяев Е.М., Тупикова Е.М. Итерационные методы построения решения уравнений незамкнутых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 588–607. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-588-607>

Зверьяев Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры проектирования сложных механических систем, Московский авиационный институт, Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-8097-6684, Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337; zveriaev@mail.ru

Тупикова Евгения Михайловна, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-8742-3521, Scopus Author ID: 57212351834, eLIBRARY SPIN-код: 5501-6984; tupikova-em@rudn.ru

© Зверьяев Е.М., Тупикова Е.М., 2021

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Iterative methods for constructing an equations of non-closed shells solution

Evgeny M. Zveryaev^{1,2}  , Evgeniya M. Tupikova¹ 

¹Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ zveriaev@mail.ru

Article history

Received: June 7, 2021

Revised: August 2, 2021

Accepted: September 21, 2021

Abstract. The elasticity relations are transformed to a form that allows, in accordance with the previously proposed Saint-Venant – Picard – Banach method, to iteratively calculate all the required unknowns of the problem. The procedure for constructing a solution is reduced to replacing eight first-order differential equations of the original system of shell theory with eight corresponding integral equations with a small parameter that has the meaning of the ratio of the shell width to its length or the variability of the stress-strain state in the transverse direction. The fifteen unknowns of the original problem calculated by direct integration are expressed in terms of five main unknowns. The fulfillment of the boundary conditions on the long sides of the strip leads to the solution of eight ordinary differential equations for slowly varying and rapidly varying components of the main unknowns. Slowly varying components describe the classical stress-strain state. The rapidly changing ones determine the edge effects at the points of discontinuity of the slowly changing classical solution and the fulfillment of the boundary conditions unsatisfied by them due to the lowering of the order of the differential equations of the classical theory based on the Kirchhoff hypothesis. In the general case, the solution is represented as asymptotic series in a small variability parameter with coefficients in the form of power series in the transverse coordinate. The presentation is illustrated by an example of constructing an iterative process for a long circular cylindrical panel. By virtue of the fixed-point theorem, the iterative process is convergent.

Keywords: contraction mapping principle, elasticity, strip, complete solution, Saint-Venant, Picard, Banach, method, boundary conditions, boundary effect

For citation

Zveryaev E.M., Tupikova E.M. Iterative methods for constructing an equations of non-closed shells solution. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):588–607. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-588-607>

Введение

На настоящем этапе теория упругости, а именно такие ее разделы, как теория оболочек и пластин, требует эволюции в более изящную и непротиворечивую, а трансформация ее методов, поиск более универсальных подходов и алгоритмов являются актуальными научными задачами, особенно в свете развития сегодня материаловедения, создания композитов, анизотропных материалов, имеющих свойства, которые не учитывались в классических моделях. Авторы привлекают неклассические модели оболочек и пластин [1–4], научными школами ведется поиск подходов, позволяющих получить решения для случаев, когда классическая теория с введением традиционных допущений не дает удовлетворительных ответов на поставленные задачи или возникающие вычислительные трудности представляются непреодолимыми [5–8].

Точное аналитическое решение трехмерной задачи теории упругости связано с рядом вычислительных трудностей, поэтому, как правило, трехмерная задача сводится к двумерной при помощи введения некоторых гипотез. В целом прикладные методы решения задач теории пластин и оболочек можно классифицировать следующим образом [3; 9; 10]: 1) метод гипотез; 2) метод разложений по толщине; 3) асимптотические методы. Асимптотические методы особенно интенсивно развивались во второй половине XX в., после того как стало ясно, что классическая теория Лява не во всех случаях обеспечивает необходимую точность решения. Задачи динамики, слоистых и анизотропных оболочек, термоупругости [11; 12] в рамках классической теории Лява не получают достаточно точного решения, приемлемого для практи-

Evgeny M. Zveryaev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Design of Complex Mechanical Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation; Professor of the Department of Construction, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8097-6684, Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-code: 4893-2337; zveriaev@mail.ru

Evgeniya M. Tupikova, PhD, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8742-3521, Scopus Author ID: 57212351834, eLIBRARY SPIN-code: 5501-6984; tupikova-em@rudn.ru

ческих целей. Поправки Рейсснера и Тимошенко позволяют учесть касательные напряжения и удовлетворить трем граничным условиям на краях. Поперечные напряжения во всех методах отбрасываются как несущественные, что, к примеру, для слоистых оболочек представляется необоснованным.

Метод разложения компонент поля напряжений и деформаций в ряды полиномов по толщине, например в варианте с полиномами Лежандра, имеет то преимущество, что уравнения получаются относительно простыми. На основе этого подхода написано множество работ, посвященных динамическим задачам и термоупругости, слоистым оболочкам [13–15]. Однако совпадение полученных решений с экспериментом зачастую или не проверялось, или недостаточно.

Бурно развивающимся направлением в современной теории упругости также является применение взамен классических положений механики сплошных сред модели континуума Коссера [16], представляющей собой обобщение уравнений механики Эйлера. Популярность этого подхода продиктована назревшей необходимостью учитывать свойства структуры материала на микроуровне. Модели микрополярных оболочек и их свойства посвящена значительная часть новейших публикаций по обозначенной тематике [17–22].

В настоящей работе дано развитие работ о создании непротиворечивой теории оболочек на основе классического подхода механики сплошных сред [23; 24]. В рамках предложенного подхода итерационно решается трехмерная задача теории упругости без введения каких-либо гипотез для сведения к двумерной теории. Итерационный процесс сходится независимо от выбора величин начального приближения. При этом в процессе решения получаются уравнения в напряжениях и перемещениях, которые можно преобразовать к уравнениям в усилиях и моментах. Они совпадут с классическими с точностью до, вообще говоря, некоторых лишних, учтенных в классической теории. Каждому члену в каждом уравнении дается оценка по малому параметру: малые (они же выходящие за рамки точности) члены отбрасываются. Математическая реализация предложенного подхода позволяет избежать значительных вычислительных трудностей. Метод является сходящимся, что представляется принципиально важным. Предложенный подход в перспективе подойдет и для расчета анизотропных и слоистых оболочек, не требуя никаких принципиальных изменений, доработок или введения допущений, увеличится лишь объем выкладок.

Современность характеризуется использованием электронных вычислительных машин в самых разных областях человеческой деятельности. Под их влиянием существенно изменился характер прикладных исследований. Многие методы приближенного определения параметров в различных физических и технических задачах отживают свой век; исследователи, особенно молодые, предпочитают обращаться к вычислительным машинам и пользоваться подходящими численными методами. Большие серии расчетов превратились в своеобразные машинные эксперименты, проведение которых не требует высокой математической культуры. Естественно, возникает вопрос о месте, которое занимают сейчас при решении прикладных задач аналитические методы. Не должны ли они уйти в прошлое и уступить место новым, машинным методам [25; 26]?

Для решения той или иной задачи, прежде всего, необходимо аналитическое построение математической модели. При создании модели обычно принимают во внимание одни особенности модели, пренебрегая другими. Для реализации этих важных положений нужно определить относительные порядки различных элементов системы, сравнивая их друг с другом и с заранее выбранными характерными элементами, приведя переменные и, соответственно, уравнения к безразмерному виду с выделением малых или больших параметров.

Большая часть способов приближенного решения уравнений основана на идее последовательных приближений. Эта идея применяется как при решении уравнений, так и для решения ряда практических задач. Одним из наиболее эффективных методов реализации последовательных приближений являются асимптотические методы теории возмущений.

Асимптотические методы решения уравнений относительно гибки вследствие возможности делать замены зависимых и независимых переменных, после чего задача выглядит совершенно иначе. Считается, что в настоящее время невозможно сформулировать единственную конструктивную процедуру, включающую все возможные применения метода.

Характерная особенность асимптотических задач для дифференциальных уравнений состоит в том, что обычно можно интуитивно догадаться, какая асимптотическая формула или асимптотический ряд должен быть получен. В физических задачах малый параметр берется из безразмерных уравнений путем перехода к безразмерным величинам. Физические задачи удобны с точки зрения применения методов

теории возмущений. Однако даже если общая природа решений известна, доказать, что это действительно асимптотическая формула, довольно трудно.

Считается, что, если при приведении системы уравнений задачи к безразмерному виду появляются представляющие собой коэффициенты малые постоянные величины, решение системы может разыскиваться в виде разложений неизвестных в ряды по степеням малого параметра, например μ . Для задач теории тонких упругих оболочек они выглядят так

$$\begin{aligned} u_1 &= \mu^{a_1} \left(u_{1(0)} + \mu u_{1(1)} + \mu^2 u_{1(2)} + \mu^3 u_{1(3)} + \dots \right), \\ u_2 &= \mu^{a_2} \left(u_{2(0)} + \mu u_{2(1)} + \mu^2 u_{2(2)} + \mu^3 u_{2(3)} + \dots \right), \\ s &= \mu^b \left(s_{(0)} + \mu s_{(1)} + \mu^2 s_{(2)} + \mu^3 s_{(3)} + \dots \right), \\ \varepsilon_1 &= \mu^c \left(\varepsilon_{1(0)} + \mu \varepsilon_{1(1)} + \mu^2 \varepsilon_{1(2)} + \mu^3 \varepsilon_{1(3)} + \dots \right), \\ \varepsilon_2 &= \mu^c \left(\varepsilon_{2(0)} + \mu \varepsilon_{2(1)} + \mu^2 \varepsilon_{2(2)} + \mu^3 \varepsilon_{2(3)} + \dots \right), \\ t_1 &= \mu^{d_1} \left(t_{1(0)} + \mu t_{1(1)} + \mu^2 t_{1(2)} + \mu^3 t_{1(3)} + \dots \right), \\ t_2 &= \mu^{d_2} \left(t_{2(0)} + \mu t_{2(1)} + \mu^2 t_{2(2)} + \mu^3 t_{2(3)} + \dots \right), \\ \kappa_1 &= \mu^{e_1} \left(\kappa_{1(0)} + \mu \kappa_{1(1)} + \mu^2 \kappa_{1(2)} + \mu^3 \kappa_{1(3)} + \dots \right), \\ \kappa_2 &= \mu^{e_2} \left(\kappa_{2(0)} + \mu \kappa_{2(1)} + \mu^2 \kappa_{2(2)} + \mu^3 \kappa_{2(3)} + \dots \right), \\ \tau &= \mu^f \left(\tau_{(0)} + \mu \tau_{(1)} + \mu^2 \tau_{(2)} + \mu^3 \tau_{(3)} + \dots \right), \\ m_1 &= \mu^{g_1} \left(m_{1(0)} + \mu m_{1(1)} + \mu^2 m_{1(2)} + \mu^3 m_{1(3)} + \dots \right), \\ m_2 &= \mu^{g_2} \left(m_{2(0)} + \mu m_{2(1)} + \mu^2 m_{2(2)} + \mu^3 m_{2(3)} + \dots \right), \\ h &= \mu^i \left(h_{(0)} + \mu h_{(1)} + \mu^2 h_{(2)} + \mu^3 h_{(3)} + \dots \right), \\ \tau_{13} &= \mu^{k_1} \left(\tau_{13(0)} + \mu \tau_{13(1)} + \mu^2 \tau_{13(2)} + \mu^3 \tau_{13(3)} + \dots \right), \\ \tau_{23} &= \mu^{k_1} \left(\tau_{23(0)} + \mu \tau_{23(1)} + \mu^2 \tau_{23(2)} + \mu^3 \tau_{23(3)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Здесь перечислены все 15 искоемых неизвестных теории оболочек, записанных в виде разложений в ряд по степеням некоторого малого параметра μ , и использованы следующие обозначения: u_1, u_2 – тангенциальные перемещения срединной поверхности; s – касательное тангенциальное перемещение; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – тангенциальные деформации срединной поверхности; t_1, t_2 – нормальные тангенциальные напряжения; κ_1, κ_2, τ – изменения кривизн поверхности; m_1, m_2 – нетангенциальные напряжения изгиба; h – нетангенциальное напряжение кручения элемента срединной поверхности; τ_{13}, τ_{23} – нетангенциальные касательные напряжения.

Легко видна запись искомых функций по аналогии с записью чисел в некоторой системе счисления μ . Находящаяся в левой части каждого равенства числовая функция представляется в виде суммы отмеченных индексами в скобках числовых функций. Выражение в скобках можно определить как мантиссу числовой функции, а множитель перед скобкой – как ее порядок.¹

Если показатели порядков найдены каким-то образом для всех функций, то разложения можно внести в уравнения и, приравнявая члены с одинаковыми показателями между собой, получить последовательность уравнений итерационного процесса для определения неизвестных в желаемом приближении. При этом в уравнениях должны быть определены асимптотические порядки символов дифференцирования относительно малого параметра для медленно и быстро меняющихся величин. Найденные показатели должны удовлетворять условиям разрешимости задачи, то есть позволять построить решение и выполнить все граничные условия [27].

Конструктивная процедура определения показателей описана, например, в [23; 24]. В кратком изложении она состоит в замене дифференциальных уравнений первого порядка интегральными по схеме Пикара – Линделефа [28–30].

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$, правая часть которого в прямоугольнике $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y . Требуется найти удовлетворяющее при $x = x_0$ начальному условию решение $y(x_0) = y_0$.

Интегрируя обе части уравнения от x_0 до x , получим $\int_{x_0}^x dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение первого порядка заменяется интегральным уравнением, в котором неизвестная функция y находится под знаком интеграла. При этом интегральное уравнение удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию. Заменяя в равенстве $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ функцию y значением y_0 , получим первое приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Заменив затем в уравнении y найденным значением y_1 , получаем второе приближение

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx. \text{ Продолжая процесс далее, последовательно находим}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2) dx.$$

⋮

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{(n-1)}) dx.$$

Таким образом, получаем последовательность уточненных функций

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), \dots, y_n(x).$$

¹ Во многих работах при представлении функций в виде рядов по малому параметру показатели порядков полагают равными нулю (см., например, [26]). Это справедливо только при решении одного линейного дифференциального уравнения с одним неизвестным, так как решение дифференциального уравнения определяется с точностью до произвольного множителя. В тех немногочисленных работах, где порядки учитываются, показатели предполагается определять интуитивно [27].

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ имеется малый параметр и при этом уравнение можно записать в форме $y' = \mu f_\mu(x, y)$, последовательность уточненных функций будет асимптотически убывающей вместе с μ :

$$y_0(x), \mu y_1(x), \mu^2 y_2(x), \mu^3 y_3(x), \mu^4 y_4(x), \dots, \mu^n y_n(x).$$

Метод Пикара – Линделефа дает последовательность приближений к решению уравнения, так что приближение (n) -е получается из $(n-1)$ -го приближения. Итерационный ряд Пикара – Линделефа прост в реализации. Полученные с помощью этого анализа решения обычно являются степенными рядами.

Исходные уравнения теории оболочек

Уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние оболочки [4] запишем в следующем виде:

– тангенциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 t_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 s_{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s_{(0)} \right) &= A_1 A_2 (X_{1+} - X_{1-}), \\ 2\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 t_{2(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 s_{(0)} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} t_{1(0)} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} s_{(0)} \right) &= A_1 A_2 (X_{2+} - X_{2-}), \\ -\varepsilon \frac{4}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{130} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{230} \right) + \varepsilon^2 2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) &= \\ = Z_+ - Z_- + \varepsilon \frac{1}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} + X_{2-}) \right]; & \end{aligned} \quad (1)$$

– нетангенциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 m_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 h_{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h_{(0)} \right) + 2 A_1 A_2 \tau_{130} &= A_1 A_2 (X_{1+} + X_{1-}), \\ \varepsilon^3 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 m_{2(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 h_{(0)} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} m_{1(0)} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} h_{(0)} \right) + 2 A_1 A_2 \tau_{230} &= A_1 A_2 (X_{2+} + X_{2-}); \end{aligned} \quad (2)$$

– формулы, связывающие компоненты тангенциальной деформации с перемещениями:

$$\varepsilon_{1(0)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{10}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_{20} + \frac{1}{R_1} w_0,$$

$$\varepsilon_{2(0)} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{20}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_{10} + \frac{1}{R_2} w_0,$$

$$\omega_{(0)} = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_{10}}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_{20}}{A_2}; \quad (3)$$

– формулы, связывающие компоненты изгибной нетангенциальной деформации (изменения кривизн) с перемещением:

$$\begin{aligned} \kappa_{1(0)} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2}, \\ \kappa_{2(0)} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1}, \\ \tau_{(0)} &= -\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2}; \end{aligned} \quad (4)$$

– формулы, связывающие тангенциальные напряжения с тангенциальными деформациями:

$$t_{1(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{1(0)} + \nu \varepsilon_{2(0)}), \quad t_{2(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_{2(0)} + \nu \varepsilon_{1(0)}), \quad s_{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \omega_{(0)}; \quad (5)$$

– формулы, связывающие нетангенциальные напряжения с нетангенциальными деформациями:

$$m_{1(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} (\kappa_{1(0)} + \nu \kappa_{2(0)}), \quad m_{2(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} (\kappa_{2(0)} + \nu \kappa_{1(0)}), \quad h_{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \tau_{(0)}, \quad (6)$$

где $t_{1(0)}, t_{2(0)}$ – тангенциальные нормальные напряжения; $s_{(0)}$ – тангенциальное касательное напряжение; $m_{1(0)}, m_{2(0)}$ – нетангенциальные нормальные напряжения; $h_{(0)}$ – крутящее напряжение; τ_{130}, τ_{230} – поперечные касательные напряжения; $\varepsilon_{1(0)}, \varepsilon_{2(0)}$ – тангенциальные нормальные компоненты деформации; $\omega_{(0)}$ – тангенциальная деформация сдвига; u_{10}, u_{20} и w_0 – тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности.

Введен малый параметр $\varepsilon = h^*/R$, где h^* – размерная полутолщина оболочки, R – некоторый размерный характерный радиус срединной поверхности оболочки. Индексы ноль в скобках и без скобок указывают на то, что эти уравнения получены из уравнений теории упругости в нулевом приближении с точностью $O(\varepsilon)$. Имея целью построение второго (относительно первого итерационного процесса, с помощью которого выведены уравнения теории оболочек из уравнений теории упругости [4]) итерационного процесса методом SVPB, опустим индексы (0) и 0, считая уравнения (1)–(6) достаточно точными.

Уравнения состояния узкой незамкнутой оболочки

Рассмотрим незамкнутую оболочку, срединная поверхность которой определяется координатами $\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{11}$, $\alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{21}$. Определенную таким образом криволинейную полосу возьмем узкой $|\alpha_{20} - \alpha_{21}| \ll 1$. Введем новое обозначение координаты $\alpha_2 = \mu\theta$. При этом будет $\alpha_{20} = \mu\theta_0$, $\alpha_{21} = \mu\theta_1$.

Выберем малый параметр μ таким образом, чтобы ширина полосы определялась соотношением $|\theta_0 - \theta_1| = 1$. Соответственно, малый параметр μ определяется выражением

$$\mu = \frac{|\alpha_{20} - \alpha_{21}|}{|\theta_0 - \theta_1|}.$$

В уравнениях (1)–(6) введем замену переменной α_2 у искомым неизвестных по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (7)$$

Уравнения состояния приводятся к следующему виду:

– тангенциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} -\mu A_2 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} - \mu \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_1 - A_1 \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_2 - 2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s &= \mu \varepsilon^{-2} A_1 A_2 \frac{1}{2} (X_{1+} - X_{1-}), \\ -A_1 \frac{\partial t_2}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} t_2 - \mu A_2 \frac{\partial s}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} t_1 - 2 \mu \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} s &= \mu \varepsilon^{-2} A_1 A_2 \frac{1}{2} (X_{2+} - X_{2-}), \\ -\frac{4}{3} \varepsilon \left(\mu \tau_{13} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \mu A_2 \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \mu \tau_{23} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \mu 2 A_1 A_2 \left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2} \right) &= \\ = \mu A_1 A_2 (Z_+ - Z_-) + \varepsilon \mu \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} + X_{2-}) \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

– нетангенциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \left(-\mu m_1 \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \mu \frac{1}{A_1} \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_2 - 2 \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h \right) + 2 \mu \tau_{13} &= \\ = \mu (X_{1+} + X_{1-}), \\ \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{A_2} \frac{\partial m_2}{\partial \theta} - \mu m_2 \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \mu \frac{1}{A_1} \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} m_1 - 2 \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} h \right) + 2 \mu \tau_{23} &= \\ = \mu (X_{2+} + X_{2-}); \end{aligned} \quad (9)$$

– формулы, связывающие компоненты тангенциальной деформации с перемещениями:

$$\mu \varepsilon_1 = \mu \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \mu \frac{1}{R_1} w,$$

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \mu \frac{1}{R_2} w, \\ \mu \omega &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - 2\mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 - 2\mu \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2; \end{aligned} \quad (10)$$

– формулы, связывающие компоненты изгибной нетангенциальной деформации (изменения кривизн) с перемещением:

$$\begin{aligned} \mu^2 \kappa_1 &= -\mu^2 \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\ \mu^2 \kappa_2 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \mu^2 \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \\ \mu \tau &= -\frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \mu \frac{3}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{3}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (5), связывающие тангенциальные напряжения с тангенциальными деформациями, и формулы (6), связывающие нетангенциальные напряжения с нетангенциальными деформациями, не меняют своего вида.

При подстановке выражения (7) в уравнения (1)–(4) малый параметр μ оказывается в знаменателе. Чтобы избежать этого и перевести μ в числитель, уравнения (8)–(11) умножены на μ .

Построение итерационного процесса интегрирования уравнений (5), (6), (8)–(11) для оболочки нулевой кривизны

Внесем в уравнения (8)–(11) следующие значения коэффициентов первой и второй квадратичной формы, свойственные оболочкам нулевой кривизны:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{1}{R_1} = 0, \quad A_1 = 1.$$

Уравнения состояния приводятся к следующему виду:

– тангенциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A_2} \frac{\partial s}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} - \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_1 + \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_2 &= \mu \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} (X_{1+} - X_{1-}), \\ -\frac{1}{A_2} \frac{\partial t_2}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial s}{\partial \alpha_1} - 2\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} s &= \mu \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} (X_{2+} - X_{2-}), \\ -\varepsilon \frac{4}{3} \left(\mu \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tau_{130} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 2 \frac{t_2}{R_2} &= \\ = \mu A_2 (Z_+ - Z_-) + \varepsilon \mu \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (X_{2+} + X_{2-}) \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

– нетангенциальные уравнения равновесия:

$$\varepsilon^3 \left(-\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_1 - \mu \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_2 \right) + 2\mu \tau_{13} = \mu (X_{1+} + X_{1-}),$$

$$\varepsilon^3 \left(-\frac{1}{A_2} \frac{\partial m_2}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} - 2\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} h \right) + 2\mu \tau_{23} = \mu (X_{2+} + X_{2-}); \quad (13)$$

– формулы, связывающие компоненты тангенциальной деформации с перемещениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \quad \mu \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \mu \frac{1}{R_2} w,$$

$$\mu \omega = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - 2\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2; \quad (14)$$

– формулы, связывающие компоненты изгибной нетангенциальной деформации (изменения кривизн) с перемещением w :

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_2 = -\mu^{-2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \tau = -\mu^{-1} \frac{2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \mu^{-1} \frac{3}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (15)$$

По сравнению с уравнениями системы (11) во втором и третьем уравнениях этой системы отброшены малые члены относительно главных.

Для построения итерационного процесса решения системы (5), (6), (12)–(15) по методу Сен-Венана – Пикара – Банаха (SVPB) выберем величины в качестве начального приближения

$$u_{2(0)} = u_{20}(\alpha_1), \quad s_{(0)} = s_0(\alpha_1) \quad (16)$$

и запишем уравнения в виде следующей последовательности относительно шести тангенциальных неизвестных $u_{1(0)}$, $u_{2(0)}$, $s_{(0)}$, $\varepsilon_{1(0)}$, $\varepsilon_{2(0)}$, $t_{1(0)}$:

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{1(0)}}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial u_{20}}{\partial \alpha_1} + \mu 2(1+\nu) s_0, \quad \frac{\partial t_{2(0)}}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial s_0}{\partial \alpha_1}, \quad \varepsilon_{1(0)} = \frac{\partial u_{1(0)}}{\partial \alpha_1},$$

$$t_{1(0)} = \varepsilon_{1(0)} + \nu t_{2(0)}, \quad \varepsilon_{2(0)} = (1-\nu^2) t_{2(0)} - \nu \varepsilon_{1(0)}, \quad \frac{\partial s_{(1)}}{\partial \theta} = -\mu A_2 \frac{\partial t_{1(0)}}{\partial \alpha_1}. \quad (17)$$

Нижний индекс в скобках означает номер приближения. Индекс 0 без скобок в правых частях первых двух уравнений указывает на величины начального приближения (16).

Поскольку величины (16) считаются заданными, из первого уравнения находим $u_{1(0)}$, а из второго $t_{2(0)}$. Третье уравнение позволяет определить $\varepsilon_{1(0)}$. Четвертое и пятое уравнения алгебраические определяют $\varepsilon_{2(0)}$ и $t_{1(0)}$ путем умножения на коэффициенты меньше единицы. Шестое уравнение дает величину $s_{(1)}$ в первом приближении.

Третье уравнение системы (12) связывает через формулы (15) и уравнения (13) величины $w_{(0)}$ и $t_{2(0)}$. Выразив $w_{(0)}$ через $t_{2(0)}$ и подставив его во второе уравнение системы (14), записанное следующим образом:

$$\frac{\partial u_{2(1)}}{\partial \theta} = A_2 \left(-\mu \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_{1(0)} - \mu \frac{1}{R_2} w_{(0)} + \mu \varepsilon_{2(0)} \right), \quad (18)$$

находим $u_{2(1)}$ в первом приближении. На этом вычисление первой итерации можно считать законченным и, вернувшись к последовательности уравнений (17), продолжить вычисления искомых величин в следующем приближении. По известной величине $w_{(0)}$ можно вычислить последовательно те из неизвестных $\kappa_{1(0)}$, $\kappa_{2(0)}$, $\tau_{(0)}$, $m_{1(0)}$, $m_{2(0)}$, $h_{(0)}$, $\tau_{13(0)}$, $\tau_{23(0)}$, которые нужны для выполнения граничных условий

$$\begin{aligned} \kappa_{1(0)} &= -\frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_{2(0)} = -\mu^{-2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta}, \\ \tau_{(0)} &= -\mu^{-1} \frac{2}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \mu^{-1} \frac{3}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta}, \\ m_{1(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \mu^{-2} \nu \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta}, \\ m_{2(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \mu^{-2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta}, \\ h_{(0)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left(-\mu^{-1} \frac{2}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \mu^{-1} \frac{3}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} \right), \\ 2\mu \varepsilon^{-3} \tau_{13(0)} &= -\mu^{-1} \nu \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} - \\ &\quad -\mu^{-1} \nu \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} + \\ &\quad + \mu^{-1} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{2}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1} + \frac{3}{A_2^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad + \mu^{-1} \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} + \mu \varepsilon^{-3} (X_{1+} + X_{1-}), \\ 2\tau_{23(0)} &= -\mu^{-3} \varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta} + (X_{2+} + X_{2-}). \end{aligned} \quad (19)$$

Третье уравнение равновесия из (12) на основании вытекающих из (19) оценок $\mu\tau_{13(0)} \sim \mu^{-1}\varepsilon^3 w_0$ и $\mu\tau_{23(0)} \sim \mu^{-2}\varepsilon^3 w_0$ после отбрасывания величин порядка μ^0 по сравнению с величиной μ^{-2} принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}\mu^{-3}\varepsilon^4 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial\theta} = \\ & = -\varepsilon^2 2 \frac{t_{2(0)}}{R_2} + \mu A_2 (Z_+ - Z_-) - \mu\varepsilon^{-2} \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial\theta} (X_{2+} + X_{2-}) + \\ & + \varepsilon\mu \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} (X_{2+} + X_{2-}) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Выразив из этого уравнения $w_{(0)}$ через $t_{2(0)}$ и поверхностные нагрузки $Z_+, Z_-, X_{1+}, X_{1-}, X_{2+}, X_{2-}$, можно подставить $w_{(0)}$ в уравнение (18) и продолжить вычисления в следующем приближении.

После вычислений всех неизвестных в нулевом и неизвестных $s_{(1)}, t_{2(1)}$, с помощью которых будут выполняться граничные условия, в первом приближении, получим

$$\begin{aligned} u_{1(0)} &= -\mu u_{20}' \int A_2 \theta d\theta + \mu 2(1+\nu) s_0 \int A_2 d\theta + u_{10}(\alpha_1), \\ t_{2(0)} &= -\mu s_0' \theta + t_{20}(\alpha_1), \\ \varepsilon_{1(0)} &= -\mu u_{20}'' \int A_2 \theta d\theta + \mu 2(1+\nu) s_0' \int A_2 d\theta + u_{10}', \\ t_{1(0)} &= -\mu u_{20}'' \int A_2 \theta d\theta + \mu 2(1+\nu) s_0' \left(\int A_2 d\theta - \nu\theta \right) + u_{10}' + \nu t_{20}, \\ \varepsilon_{2(0)} &= (1-\nu^2) t_{20} + \nu \mu u_{20}'' \int A_2 \theta d\theta - \mu s_0' \left[2(1+\nu) \nu \int A_2 d\theta + (1-\nu^2) \theta \right] - \nu u_{10}', \\ s_{(1)} &= \mu^2 u_{20}''' \int A_2 \int A_2 \theta d\theta - \mu^2 2(1+\nu) s_0'' \int A_2 \left(\int A_2 d\theta - \nu\theta \right) d\theta - \\ & - \mu u_{10}'' \int A_2 d\theta - \nu \mu t_{20}' \int A_2 d\theta + s_0, \\ w_{(0)} &= \mu^3 \varepsilon^{-2} 3(1-\nu^2) \int A_2 \int A_2 \int A_2 \int \frac{A_2}{R_2} (\mu s_0' \theta - t_{20}) d\theta d\theta d\theta d\theta + \\ & + C_3(\alpha_1) \int A_2 \int A_2 \int A_2 d\theta d\theta d\theta + C_2(\alpha_1) \int A_2 \int A_2 d\theta d\theta + C_1(\alpha_1) \int A_2 d\theta + C_0(\alpha_1) + w_{(0)}^{(p)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $u_{10}(\alpha_1), t_{20}(\alpha_1), s_0(\alpha_1), t_{20}(\alpha_1)$ – произвольные функции интегрирования, зависящие только от координаты α_1 , штрихом обозначено дифференцирование по α_1 , $w_{(0)}^{(p)}$ – частное решение (20) при $t_{2(0)} = 0$.

С помощью выражений (21) можно выполнить заданные граничные условия. Покажем это на более простом в записи примере.

**Пример построение итерационного процесса
для длинной круговой цилиндрической панели**

Зададим в уравнениях (12)–(16) дополнительно следующие значения для круговой цилиндрической оболочки $A_2 = R_2 = 1$ и примем поверхностную нагрузку отсутствующей: $Z_+ = Z_- = X_{1+} = X_{1-} = X_{2+} = X_{2-} = 0$.

Уравнения состояния приводятся к следующему виду:

– тангенциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial t_2}{\partial \theta} = -\mu \frac{\partial s}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{2}{3} \left(\mu \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \theta} \right) = \varepsilon t_2; \quad (22)$$

– нетангенциальные уравнения равновесия:

$$-\mu \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2\mu \tau_{13} = 0, \quad -\frac{\partial m_2}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} + 2\mu \tau_{23} = 0; \quad (23)$$

– формулы, связывающие компоненты тангенциальной деформации с перемещениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, \quad \mu \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \mu w, \quad \mu \omega = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}; \quad (24)$$

– формулы, связывающие компоненты изгибной нетангенциальной деформации (изменения кривизн) с перемещением w :

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_2 = -\mu^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \tau = -2\mu^{-1} \frac{\partial w}{\partial \theta \partial \alpha_1}. \quad (25)$$

Для построения итерационного процесса решения системы (22)–(25) по методу SVPB выберем величины в качестве начального приближения

$$u_{2(0)} = u_{20}(\alpha_1), \quad s_{(0)} = s_0(\alpha_1) \quad (26)$$

и запишем уравнения в виде следующей последовательности относительно шести тангенциальных неизвестных $u_{1(0)}$, $u_{2(0)}$, $s_{(0)}$, $\varepsilon_{1(0)}$, $\varepsilon_{2(0)}$, $t_{1(0)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1(0)}}{\partial \theta} &= -\mu \frac{\partial u_{20}}{\partial \alpha_1} + 2(1+\nu)\mu s_0, & \frac{\partial t_{2(0)}}{\partial \theta} &= -\mu \frac{\partial s_0}{\partial \alpha_1}, & \varepsilon_{1(0)} &= \frac{\partial u_{1(0)}}{\partial \alpha_1}, \\ t_{1(0)} &= \varepsilon_{1(0)} + \nu t_{2(0)}, & \varepsilon_{2(0)} &= (1-\nu^2)t_{2(0)} - \nu \varepsilon_{1(0)}, & \frac{\partial s_{(1)}}{\partial \theta} &= -\mu \frac{\partial t_{1(0)}}{\partial \alpha_1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Третье уравнение системы (22) связывает через формулы (25) и уравнения (23) величины $w_{(0)}$ и $t_{2(0)}$. Выразив $w_{(0)}$ через $t_{2(0)}$ и подставив его во второе уравнение системы (24), записанное следующим образом

$$\frac{\partial u_{2(1)}}{\partial \theta} = -\mu w_{(0)} + \mu \varepsilon_{2(0)}, \quad (28)$$

находим $u_{2(1)}$ в первом приближении. На этом вычисление первой итерации для круговой цилиндрической оболочки можно считать законченным и, вернувшись к последовательности уравнений (27), продолжить вычисления искомых величин в следующем приближении. По известной величине $w_{(0)}$ можно вычислить последовательно те из неизвестных $\kappa_{1(0)}$, $\kappa_{2(0)}$, $\tau_{(0)}$, $m_{1(0)}$, $m_{2(0)}$, $h_{(0)}$, $\tau_{13(0)}$, $\tau_{23(0)}$, которые нужны для выполнения граничных условий

$$\begin{aligned} \kappa_{1(0)} &= -\frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \alpha_1^2}, \quad \kappa_{2(0)} = -\mu^{-2} \frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \theta^2}, \quad \tau_{(0)} = -\mu^{-1} 2 \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1} \\ m_{1(0)} &= -\frac{1}{1-\nu^2} \mu^{-2} \nu \frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \theta^2}, \quad m_{2(0)} = -\mu^{-2} \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w_{(0)}}{\partial \theta^2}, \quad h_{(0)} = -\mu^{-1} \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial w_{(0)}}{\partial \theta \partial \alpha_1}, \\ 2\tau_{13(0)} &= -\mu^{-2} \varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^3 w_{(0)}}{\partial \alpha_1 \partial \theta^2}, \quad 2\tau_{23(0)} = -\mu^{-3} \varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial^3 w_{(0)}}{\partial \theta^3}, \\ &\frac{2}{3} \left(\mu \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \theta} \right) = \varepsilon t_{2(0)}. \end{aligned} \quad (29)$$

После вычислений всех неизвестных в нулевом и неизвестных $s_{(1)}$, $t_{2(1)}$, с помощью которых будут выполняться граничные условия, в первом приближении, получим

$$\begin{aligned} u_{1(0)} &= -\mu u_{20}' \theta + 2(1+\nu) \mu s_0 \theta + u_{10}, \\ t_{2(0)} &= -\mu s_0' \theta + t_{20}, \\ \varepsilon_{1(0)} &= -\mu u_{20}'' \theta + 2(1+\nu) \mu s_0' \theta + u_{10}', \\ t_{1(0)} &= -\mu u_{20}'' \theta + (1+2\nu) \mu s_0' \theta + u_{10}' + t_{20}, \\ \varepsilon_{2(0)} &= -(1+\nu)^2 \mu s_0' \theta + (1-\nu^2) t_{20} + \nu \mu u_{20}'' \theta - \nu u_{10}', \\ s_{(1)} &= \mu^2 u_{20}''' \frac{\theta^2}{2} - (1+2\nu) \mu^2 s_0'' \frac{\theta^2}{2} - \mu u_{10}'' \theta - \mu t_{20}' \theta + s_0, \\ t_{2(1)} &= -\mu^3 u_{20}'''' \frac{\theta^3}{6} + (1+2\nu) \mu^3 s_0''' \frac{\theta^3}{6} + \mu^2 u_{10}''' \frac{\theta^2}{2} + \mu^2 t_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - \mu s_0' \theta + t_{20}, \\ w_{(0)} &= 3(1-\nu^2) \varepsilon \mu^4 s_0' \frac{\theta^5}{120} - 3(1-\nu^2) \mu^3 \varepsilon t_{20} \frac{\theta^4}{24} + C_3 \frac{\theta^3}{6} + C_2 \frac{\theta^2}{2} + C_1 \theta + C_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{2(1)} &= -3(1-\nu^2)\varepsilon\left(\mu^5 s_0' \frac{\theta^6}{720} - \mu^4 t_{20} \frac{\theta^5}{120}\right) - \mu C_3 \frac{\theta^4}{24} - \mu C_2 \frac{\theta^3}{6} - \mu C_1 \frac{\theta^2}{2} - \mu C_0 \theta - \\
 &- (1-\nu^2)\mu^2 s_0' \frac{\theta^2}{2} + (1-\nu^2)\mu t_{20} \theta + \nu \mu^2 u_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - 2\nu(1+\nu)\mu^2 s_0' \frac{\theta^2}{2} - \nu \mu u_{10}' \theta + u_{20}, \\
 u_{2(1)} &= -3(1-\nu^2)\varepsilon \mu^5 s_0' \frac{\theta^6}{720} + 3(1-\nu^2)\mu^4 \varepsilon t_{20} \frac{\theta^5}{120} - \mu C_3 \frac{\theta^4}{24} - \mu C_2 \frac{\theta^3}{6} - \\
 &- \mu C_1 \frac{\theta^2}{2} - \mu C_0 \theta - (1+\nu)^2 \mu^2 s_0' \frac{\theta^2}{2} + (1-\nu^2)\mu t_{20} \theta + \nu \mu^2 u_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - \nu \mu u_{10}' \theta + u_{20}, \\
 u_{2(1)} &= \left[-3(1-\nu^2)\varepsilon \mu^3 \frac{\theta^6}{720} + \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)\varepsilon^{-1} \frac{\theta^4}{24} + \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)\varepsilon^{-1} \frac{\theta^3}{6} - (1+\nu)^2 \frac{\theta^2}{2} \right] \mu^2 s_0' + \\
 &+ \frac{1-\nu^2}{2} \mu^3 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^4}{24} + \frac{1-\nu^2}{2} \mu^3 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^3}{6} + \left[3(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon \frac{\theta^5}{120} + (1-\nu^2)\theta \right] \mu t_{20} + \\
 &+ \nu \mu^2 u_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - \mu C_1 \frac{\theta^2}{2} - \nu \mu u_{10}' \theta - \mu C_0 \theta + u_{20}, \\
 m_{2(0)} &= 3\mu^4 \varepsilon \left(\mu s_0' \frac{\theta^3}{6} - t_{20} \frac{\theta^2}{2} \right) + \frac{1}{1-\nu^2} (C_3 \theta + C_2), \\
 \tau_{23(0)} &= -\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left[3(1-\nu^2)\mu \varepsilon \left(\mu s_0' \frac{\theta^2}{2} - t_{20} \theta \right) + \mu^{-3} C_3 \right]. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Примем, что на длинных сторонах панели $\theta = \pm 1$ заданы следующие напряжения:

$$\begin{aligned}
 t_2 &= T_{2+}(\alpha_1), \quad s = S_+(\alpha_1), \quad m_2 = M_{2+}(\alpha_1), \quad \tau_{13} = N_{1+}(\alpha_1) \quad \text{при } \theta = 1, \\
 t_2 &= T_{2-}(\alpha_1), \quad s = S_-(\alpha_1), \quad m_2 = M_{2-}(\alpha_1), \quad \tau_{13} = N_{1-}(\alpha_1) \quad \text{при } \theta = -1, \tag{31}
 \end{aligned}$$

предполагая их свободными от каких-либо закреплений. Считая выражения неизвестных (30) вычисленными с достаточной точностью, запишем соответствующие граничные обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 -\mu^3 u_{20}'''' \frac{1}{6} + (1+2\nu)\mu^3 s_0'''' \frac{1}{6} + \mu^2 u_{10}'''' \frac{1}{2} + \mu^2 t_{20}'''' \frac{1}{2} - \mu s_0' + t_{20} &= T_{2+} \quad \text{при } \theta = 1, \\
 \mu^4 u_{20}'''' \frac{1}{6} - (1+2\nu)\mu^3 s_0'''' \frac{1}{6} + \mu^2 u_{10}'''' \frac{1}{2} + \mu^2 t_{20}'''' \frac{1}{2} + \mu s_0' + t_{20} &= T_{2-} \quad \text{при } \theta = -1, \tag{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^3 u_{20}''' \frac{1}{2} - (1+2\nu)\mu^2 s_0'' \frac{1}{2} - \mu u_{10}'' - \mu t_{20}' + s_0 &= S_+ \text{ при } \theta = 1, \\ \mu^3 u_{20}''' \frac{1}{2} - (1+2\nu)\mu^2 s_0'' \frac{1}{2} + \mu u_{10}'' + \mu t_{20}' + s_0 &= S_- \text{ при } \theta = -1, \\ 3(1-\nu^2)\varepsilon^{-2}\mu^4 s_0' \frac{1}{6} - 3(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon^{-2} t_{20} \frac{1}{2} + C_3 + C_2 &= -\mu^2(1-\nu^2)M_{2+} \text{ при } \theta = 1, \\ -3(1-\nu^2)\varepsilon^{-2}\mu^4 s_0' \frac{1}{6} - 3(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon^{-2} t_{20} \frac{1}{2} - C_3 + C_2 &= -\mu^2(1-\nu^2)M_{2-} \text{ при } \theta = -1, \\ -\frac{3}{2}\mu \varepsilon s_0' \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon t_{20} - \frac{1}{2(1-\nu^2)}\mu^{-3}\varepsilon^3 C_3 &= N_{1+} \text{ при } \theta = 1, \\ -\frac{3}{2}\mu \varepsilon s_0' \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon t_{20} - \frac{1}{2(1-\nu^2)}\mu^{-3}\varepsilon^3 C_3 &= N_{1-} \text{ при } \theta = -1. \end{aligned} \quad (33)$$

Складывая и вычитая попарно условия (32), получим системы:

– для определения неизвестных u_{10} и t_{20} :

$$\begin{aligned} \mu^2 u_{10}''' + \mu^2 t_{20}'' + 2t_{20} &= T_{2+} + T_{2-}, \\ -\mu u_{10}'' - \mu t_{20}' &= \frac{1}{2}(S_+ - S_-); \end{aligned} \quad (34)$$

– для определения неизвестных u_{20} и s_0 :

$$\begin{aligned} -\mu^4 u_{20}'''' + (1+2\nu)\mu^3 s_0''' - 6\mu s_0' &= 3(T_{2+} - T_{2-}), \\ \mu^2 u_{20}''' - (1+2\nu)\mu^2 s_0'' + 2s_0 &= S_+ + S_-; \end{aligned} \quad (35)$$

и два уравнения для определения неизвестных C_3 и C_2 :

$$\begin{aligned} 2C_3 &= -(1-\nu^2)\mu^2 \varepsilon^{-2} s_0' - (1-\nu^2)(M_{2+} - M_{2-}), \\ \frac{2}{1-\nu^2} C_2 &= 3\mu^3 \varepsilon^{-2} t_{20} - \mu^2 (M_{2+} + M_{2-}), \end{aligned} \quad (36)$$

по вычисленным ранее из (32) s_0 и t_{20} .

Последние два условия (33) для нетангенциальных касательных напряжений в рамках классической теории (1)–(6) без привлечения поправок типа Тимошенко – Рейсснера и возвращения к полным

уравнениям теории упругости [5] выполнить невозможно, так как для этого надо вводить в рассмотрение τ – процесс [3; 5], который здесь из соображений простоты опущен.

Уравнения (32) и (33) разрешимы относительно величин t_{20} , u_{10}'' , $s_0^{s'}$, s_0^q и u_{20}^s [5]. Предполагая нагрузки заданными медленно меняющимися функциями, запишем их:

$$\begin{aligned} t_{20} &= \frac{1}{2}(T_{2+} + T_{2-}) + \frac{1}{4}\mu(S_+ - S_-)', \\ -\mu u_{10}'' &= \frac{1}{2}(S_+ - S_-) + \left(\frac{1}{2}\mu(T_{2+} + T_{2-})' + \frac{1}{4}\mu^2(S_+ - S_-)'' \right), \\ -4\mu s_0^{s'} &= 3(T_{2+} - T_{2-}) + \mu(S_+ + S_-)', \\ u_{20}^{s''''} &= 0, \\ -(1+2\nu)\mu^2 s_0^{q''} + 2s_0^q &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Их решения достаточно подробно разобраны в [5]. Индексами s и q отмечены быстро и медленно меняющиеся величины соответственно.

Для уравнений (36) надо сформулировать граничные условия на коротких сторонах панели при $\alpha_1 = \pm 1$. Примем на них жесткое защемление $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $w = 0$. На основании выражений (30) в развернутом виде эти условия при $\alpha_1 = \pm 1$ примут вид

$$\begin{aligned} &\mu \left[-u_{20}' + 2(1+\nu)s_0 \right] \theta + u_{10} = 0, \\ u_{2(1)} &= \left[-3(1-\nu^2)\varepsilon\mu^3 \frac{\theta^6}{720} + \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)\varepsilon^{-1} \frac{\theta^4}{24} + \frac{1}{2}\mu(1-\nu^2)\varepsilon^{-1} \frac{\theta^3}{6} - (1+\nu)^2 \frac{\theta^2}{2} \right] \mu^2 s_0' + \\ &+ \frac{1-\nu^2}{2}\mu^3 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^4}{24} + \frac{1-\nu^2}{2}\mu^3 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^3}{6} + \left[3(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon \frac{\theta^5}{120} + (1-\nu^2)\theta \right] \mu t_{20} + \\ &+ \nu\mu^2 u_{20}'' \frac{\theta^2}{2} - \mu C_1 \frac{\theta^2}{2} - \nu\mu u_{10}' \theta - \mu C_0 \theta + u_{20}, \\ w_{(0)} &= (1-\nu^2)\mu^2 \varepsilon^{-1} s_0' \left[3\mu^2 \frac{\theta^2}{20} - \frac{1}{2} \right] \frac{\theta^3}{6} + \frac{3}{4}(1-\nu^2)\mu^3 \varepsilon^{-1} t_{20} \left[-\frac{\theta^2}{6} + 1 \right] \theta^2 - \\ &- \frac{1-\nu^2}{2}\mu^2 (M_{2+} - M_{2-}) \frac{\theta^3}{6} - \frac{1-\nu^2}{2}\mu^2 (M_{2+} + M_{2-}) \frac{\theta^2}{2} + C_1 \theta + C_0. \end{aligned} \tag{38}$$

Вторая и третья формулы для $u_{2(1)}$ и $w_{(0)}$ преобразованы с учетом выражений (36).

Коэффициенты в выражениях (38) должны обращаться в ноль при каждом полиноме от θ . Оставив только в этих формулах главные члены, запишем граничные условия

$$u_{10} = 0, u_{20} = 0, C_0 = C_1 = 0.$$

Условия соответствуют классическим условиям жесткого защемления. Последние два условия исключают перемещение оболочки как жесткого целого.

На этом пример построения итерационного процесса для длинной круговой цилиндрической панели считаем законченным. Сама процедура вычислений повторяет процедуру, описанную в [3; 4].

Заключение

Изложенная здесь процедура построения итерационного процесса подходит как для открытых, так и для замкнутых оболочек. В первом случае малый параметр образуется за счет малой ширины оболочки по сравнению с ее длиной. Теория тонкостенных стержней является частным случаем такого подхода. В случае с замкнутой оболочки малый параметр появляется в результате допущения большой изменчивости в поперечном направлении.

Наличие малого параметра позволяет построить итерационный процесс интегрирования уравнений теории оболочек путем замены дифференциальных уравнений первого порядка интегральными уравнениями, решение которых может быть всегда получено асимптотически сходящимся методом последовательных приближений.

Решение уравнений получается без каких-либо исходных гипотез и допущений и в силу выполнения всех граничных условий и теоремы о неподвижной точке не зависит от выбора величин начального приближения.

Список литературы

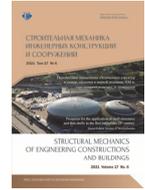
1. Товстик П.Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Вып. 3. С. 72–85. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-3-72-85>
2. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Свободные колебания анизотропной балки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2014. № 4. С. 599–608.
3. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей расчета однослойных и многослойных стержней и пластин: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 2003. 402 с.
4. Iesan D., Ciarletta M. Non-classical elastic solids. Longman scientific and technical. Harlow: Wiley, 1993. 360 p. <https://doi.org/10.1201/9781003062264>
5. Annin B.D., Volchkov Y.M. Nonclassical models of the theory of plates and shells // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57. No. 5. Pp. 769–776.
6. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Серия: Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. 272 с.
7. Аннин Б.Д., Карпов Е.В. Элементы механики композитов. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2016.
8. Annin B.D., Baev L.V., Volchkov Y.M. Equation of a layered packet with transverse shears and compression taken into account // Mechanics of Solids. 2014. Т. 49. № 1. С. 59–66. <https://doi.org/10.3103/S0025654414010075>
9. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван. 2-е изд. Ереван: Изд-во НАН РА «Гитутюн», 2013. 233 с.
10. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1982. 446 с.
11. Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading // Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. 2017. Vol. 50. No. С. 68–73. <https://doi.org/10.3103/S1063454117010058>
12. Ковалев В.А., Коссович Л.Ю., Таранов О.В. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуполосы при действии торцевой нагрузки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 5. С. 89–96.
13. Zhavoronok S.I. On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua Type // Procedia Engineering. 2015. Vol. 111. Pp. 888–895. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.164>
14. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020. Vol. 29. No 6. Pp. 773–795. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1793241>

15. Zozulya V.V. A higher order theory for shells, plates and rods // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. Vol. 103. Pp. 40–54. <https://doi.org/10.1016/j.ijmesci.2015.08.025>
16. Виноградова Ю.В. Нелинейные динамические модели микрополярных сред: электронное методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. 40 с.
17. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography // *Arch. Appl. Mech.* 2010. Vol. 80. Pp. 73–92. <https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3>
18. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions // *Journal of Elasticity*. 2004. Vol. 74. Pp. 67–86. <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000026106.09385.8c>
19. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. Vol. 89. Issue 4. Pp. 242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
20. Marin M., Öchsner A., Craciun E.M. A generalization of the Saint-Venant's principle for an elastic body with dipolar structure // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020. Vol. 32. Pp. 269–278. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00827-6>
21. Marin M., Öchsner A., Othman M.I.A. On the evolution of solutions of mixed problems in thermoelasticity of porous bodies with dipolar structure // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2022. Vol. 34. Pp. 491–506. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01066-4>
22. Marin M., Öchsner A., Craciun E.M. A generalization of the Gurtin's variational principle in thermoelasticity without energy dissipation of dipolar bodies // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020. Vol. 32. Pp. 1685–1694. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00873-5>
23. Зверьяев Е.М. Непротиворечивая теория оболочек // *ПММ*. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 580–596.
24. Зверьяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // *ПММ*. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833.
25. Kevorkian J., Cole J.D. *Perturbation methods in applied mathematics*. New York: Springer, 1981. 560 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4213-8>
26. Найдф А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
27. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
28. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
29. Lindelöf E.L. Sur l'application des méthodes d'approximation successives a l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires // *Journal des mathématiques pures et appliquées 4^e série*. 1894. Vol. 10. Pp. 117–128.
30. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives // *Journal des mathématiques pures et appliquées 4^e série*. 1890. Vol. 6. Pp. 145–210.

References

1. Tovstik P.E. On the non-classic models of beams, plates and shells. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2008;8(3):72–85. (In Russ.) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-3-72-85>
2. Tovstik P.E., Tovstik T.P. Free vibrations of anisotropic beam. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2014;(4):599–608. (In Russ.)
3. Butenko Yu.I. *Variational-asymptotic methods for constructing non-classical models for calculating single-layer and multilayer rods and plates* (Doctor of Physical Sciences dissertation). Kazan; 2003. (In Russ.)
4. Iesan D., Ciarletta M. *Non-classical elastic solids. Longman scientific and technical*. Harlow: Wiley; 1993. <https://doi.org/10.1201/9781003062264>
5. Annin B.D., Volchkov Y.M. Nonclassical models of the theory of plates and shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016;57(5):769–776.
6. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Non-classical theories of vibrations of rods, plates and shells. *Results of Science and Technology. Series: Mechanics of Solid Deformable Bodies* (vol. 5). Moscow: VINITI Publ.; 1973. (In Russ.)
7. Annin B. D., Karpov E.V. *Elements of mechanics of composites*. Novosibirsk: Novosibirsk State University; 2016.
8. Annin B.D., Baev L.V., Volchkov Y.M. Equation of a layered packet with transverse shears and compression taken into account. *Mechanics of Solids*. 2014;49(10):59–66. <https://doi.org/10.3103/S0025654414010075>
9. Ambartsumyan S.A. *Micropolar theory of shells and plates*. 2nd ed. Yerevan: Publishing House of NAS RA “Gitutyun”; 2013. (In Russ.)
10. Ambartsumyan S.A. *General theory of anisotropic shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1982. (In Russ.)
11. Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*. 2017;50(1): 68–73. <https://doi.org/10.3103/S1063454117010058>
12. Kovalev V.A., Kossovich L.Yu., Taranov O.V. The far field of the Rayleigh wave for an elastic half-strip under the action of an end load. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2005;(5):89–96.
13. Zhavoronok S.I. On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua type. *Procedia Engineering*. 2015;111:888–895. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.164>

14. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2020;29(6):773–795. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1793241>
15. Zozulya V.V. A higher order theory for shells, plates and rods. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015;103:40–54. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.08.025>
16. Vinogradova Yu.V. *Nonlinear dynamic models of micropolar media*. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University; 2011.
17. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Arch. Appl. Mech.* 2010;80:73–92. <https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3>
18. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions. *Journal of Elasticity*. 2004;74:67–86. <https://doi.org/10.1023/B:ELAS.0000026106.09385.8c>
19. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009;89(4):242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
20. Marin M., Öchsner A., Craciun E.M. A generalization of the Saint-Venant's principle for an elastic body with dipolar structure. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020;32:269–278. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00827-6>
21. Marin M., Öchsner A., Othman M.I.A. On the evolution of solutions of mixed problems in thermoelasticity of porous bodies with dipolar structure. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2022;34:491–506. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01066-4>
22. Marin M., Öchsner A., Craciun E.M. A generalization of the Gurtin's variational principle in thermoelasticity without energy dissipation of dipolar bodies. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020;32:1685–1694. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00873-5>
23. Zveryaev E.M. The consistent theory of shells. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 2016;80(5):580–596. (In Russ.)
24. Zveryaev E.M. Saint-Venant – Picard – Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 2019;83(5–6):823–833. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0032823519050126>
25. Kevorkian J., Cole J.D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. New York: Springer; 1981. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4213-8>
26. Naife A. *Introduction to perturbation methods*. Moscow: Mir Publ.; 1984. (In Russ.)
27. Goldenweiser A.L. *Theory of elastic thin shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)
28. Kamke E. *Handbook of ordinary differential equations*. Moscow: Nauka Publ.; 1971. (In Russ.)
29. Lindelöf E.L. Sur l'application des méthodes d'approximation successives a l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. *Journal des mathématiques pures et appliquées* 4^e série. 1894;10:117–128.
30. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. *Journal des mathématiques pures et appliquées* 4^e série. 1890;6:145–210.



ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК NUMERICAL METHODS OF SHELL ANALYSIS

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616
 УДК 624.074.433.042.12

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с неоднородным окружающим основанием

С.Б. Косицын  , В.Ю. Акулич 

Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация

 kositsyn-s@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 13 мая 2021 г.
 Доработана: 28 августа 2021 г.
 Принята к публикации: 12 сентября 2021 г.

Аннотация. Цель исследования – определить критическую нагрузку пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки в нелинейной постановке задачи. **Методы.** Задача решена численным методом с использованием программного конечно-элементного комплекса ANSYS. Выполнено два расчетных случая пространственной модели системы «оболочка – основание» с учетом и без учета коэффициента трения между оболочкой и окружающим основанием. Окружающее основание разделено на два равных массива с разными физико-механическими свойствами. Расчет проведен в геометрически, физически и конструктивно нелинейных постановках. Нелинейность обусловлена необходимостью посредством итерационного процесса отыскания зоны контакта элементов (область отлипания оболочки от основания) и определения изменяющегося во времени положения оболочки. Расчетная модель составлена из двумерных плоских четырехузловых элементов оболочки и трехмерных тетраэдральных десятиузловых элементов окружающего основания. Применены односторонние контактные элементы. Критические нагрузки установлены относительно действующей нагрузки от собственного веса. **Результаты.** Получены критические нагрузки от двух расчетных случаев пространственной модели системы «оболочка – основание». Произведен сравнительный анализ результатов. Дана оценка запаса устойчивости оболочки относительно действующей нагрузки.

Ключевые слова: устойчивость оболочки, запас устойчивости, контактное взаимодействие, конечные элементы

Для цитирования

Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с неоднородным окружающим основанием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 608–616. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>

Косицын Сергей Борисович, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики, Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9; ORCID: 0000-0002-3241-0683, Scopus Author ID: 57196414749, eLIBRARY SPIN-код: 9390-7610; kositsyn-s@yandex.ru

Акулич Владимир Юрьевич, аспирант кафедры теоретической механики, Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9; ORCID: 0000-0002-9467-5791, Scopus Author ID: 57210802551; vladimir.akulich@gmail.com

© Косицын С.Б., Акулич В.Ю., 2021

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Numerical analysis of cylindrical shell stability interacting with inhomogeneous soil

Sergey B. Kosytsyn  , Vladimir Yu. Akulich 

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

✉ kosytsyn-s@yandex.ru

Article history

Received: May 13, 2021

Revised: August 28, 2021

Accepted: September 12, 2021

For citation

Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu. Numerical analysis of cylindrical shell stability interacting with inhomogeneous soil. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):608–616. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>

Abstract. The research is aimed at determining the critical buckling load of the spatial model “shell – soil” system in the case of inhomogeneous physical and mechanical soil properties along the longitudinal axis of the cylindrical shell in a nonlinear formulations of the task. *Methods.* The task is solved by a numerical method using a finite element complex ANSYS. Two calculated cases of the spatial model “shell – soil” system are compiled. The soil is divided into two equal parts with different physical and mechanical properties. The problem was solved in geometrically, physically and constructively nonlinear statement. Nonlinearity is due to the need to find the contact zone through an iterative process and determine the time-varying position of the shell. The soil is modeled by volumetric elements, each consisting of twenty nodes. The shell is modeled by flat elements, each consisting of four nodes. Contact elements of one-side action are used. Critical buckling load are determined relative to the actual load of its own weight. *Results.* Critical loads are obtained from two calculated cases of the spatial model “shell – soil” system. There is a comparative analysis of the results. An assessment of the stability margin of the shell relative to the actual load is given.

Keywords: shell stability, stability margin, contact interaction, finite elements

Введение

Определение напряженно-деформированного состояния системы «оболочка – основание» является частой задачей в транспортном и промышленном строительстве. Вопросы устойчивости равновесия таких систем также востребованы на практике [1–3].

Численный анализ пространственной системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки выполнен в программном комплексе ANSYS [4; 5] с целью определения критической нагрузки, при которой данная система теряет устойчивость равновесия, и определения форм потери устойчивости. Расчетная модель составлена из двумерных плоских четырехузловых элементов оболочки и трехмерных тетраэдральных десятиузловых элементов окружающего основания. Взаимодействие между оболочкой и окружающим основанием обеспечено с помощью контактных пар, нанесенных на соответствующие поверхности.

Определение критической нагрузки потери устойчивости стержневой и плоской моделей цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием, а также случай бесконечно длинной цилиндрической оболочки рассмотрены в [6; 7].

Численный анализ пространственной модели системы «оболочка – основание». Случай неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки

Диаметр оболочки составляет $D = 5$ м, толщина оболочки – 0,25 м. Расстояние от края оболочки до боковых торцов окружающего основания принято равным $L = 5D$. Расстояние от края оболочки до верхней и нижней границ окружающего основания принято равным $3D$. Длина цилиндрической оболочки составляет $6D$. К расчетной модели приложена нагрузка от собственного веса основания и оболочки. В каждый

Sergey B. Kosytsyn, adviser of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, D.Sc. in Engineering, Professor of the Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St, bldg 9, Moscow, 127994, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-3241-0683, Scopus Author ID: 57196414749, eLIBRARY SPIN-code: 9390-7610; e-mail: kosytsyn-s@yandex.ru

Vladimir Yu. Akulich, PhD student, Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, 15 Obraztsova St, Moscow, 127994, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-9467-5791, Scopus Author ID: 57210802551; vladimir.akulich@gmail.com

расчетный случай добавлена горизонтальная возмущающая сила, приложенная к верху оболочки. Данная сила вынуждает систему среагировать на кососимметричную форму потери устойчивости. Величина горизонтальной возмущающей силы составляет 500 Н. Боковые и нижняя границы окружающего основания закреплены от перемещений по нормальям к поверхностям. Оболочка по торцам имеет аналогичные опорные закрепления, обеспечивающие геометрическую неизменяемость расчетной модели.

Отличительная особенность пространственной модели системы «оболочка – основание» состоит в неоднородности физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки [8; 9]. Физико-механические свойства оболочки заданы по модели Друкера – Прагера со следующими параметрами: модуль упругости $E_{об} = 3,0 \times 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{об} = 0,18$, плотность $\rho_{об} = 2300$ кг/м³, предел прочности при одноосном растяжении $R_t = 2,5$ МПа, предел прочности при одноосном сжатии $R_c = 42,0$ МПа, предел прочности при двухосном сжатии $R_b = 50,0$ МПа. Основание разделено на два равных массива. Физико-механические свойства окружающего основания [10; 11] заданы по модели Мора – Кулона с параметрами, приведенными в табл. 1. Общий вид расчетной модели представлен на рис. 1, конечно-элементная сетка цилиндрической оболочки показана на рис. 2.

Таблица 1

Физико-механические свойства окружающего основания

№	Плотность ρ , кг/м ³	Коэффициент поперечной деформации μ	Модуль деформации E , МПа	Сцепление C , кПа	Угол внутреннего трения φ , °
1	1600	0,30	14	10	20
2	1800	0,30	16	10	25

Table 1

Physical and mechanical properties of the soil

No	Density ρ , kg/m ³	Poisson's ratio μ	Deformation modulus E , MPa	Cohesion C , GPa	Friction angle φ , °
1	1600	0.30	14	10	20
2	1800	0.30	16	10	25

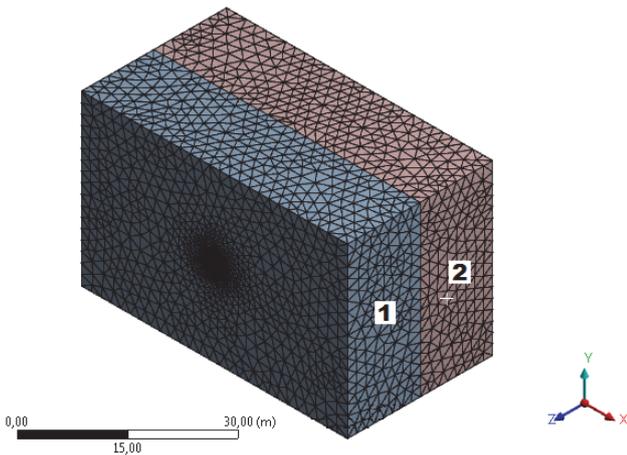


Рис. 1. Общий вид пространственной расчетной модели системы «оболочка – основание»
Figure 1. General view of the spatial calculation model “shell – soil” system

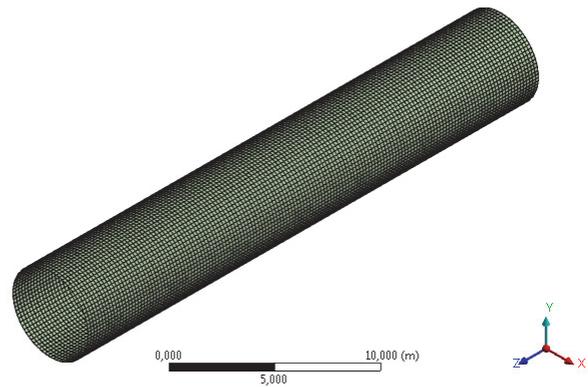


Рис. 2. Конечно-элементная сетка цилиндрической оболочки
Figure 2. The mesh of the cylindrical shell

Расчет проведен в нелинейной постановке с учетом геометрической нелинейности, односторонних связей между оболочкой и окружающим основанием и упругопластических моделей материалов [12; 13]. Составлено два расчетных случая: с учетом и без учета коэффициента трения в контактной паре между оболочкой и окружающим основанием.

Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» без учета коэффициента трения

В данном расчетном случае не учтен коэффициент трения между оболочкой и окружающим основанием. Расчет проведен в геометрически, физически и конструктивно нелинейных постановках. Нелинейность обусловлена необходимостью посредством итерационного процесса отыскания зоны контакта элементов (область отлипания оболочки от основания) и определения изменяющегося во времени положения оболочки.

На рис. 3 представлено поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки. Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Величина критической нагрузки составляет $4,5\gamma z_1$.

На рис. 4 видно, что наибольшие перемещения наблюдаются на участке оболочки, расположенном в пределах первого массива основания с меньшими физико-механическими характеристиками.

На рис. 5 показана кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

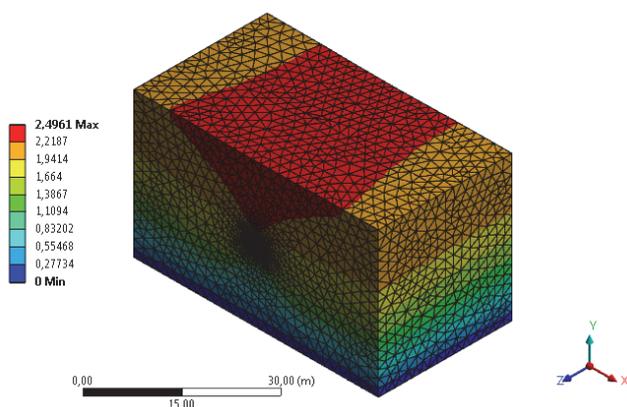


Рис. 3. Поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки

Figure 3. Fields of total displacements of the spatial model “shell – soil” system when the buckling load is achieved

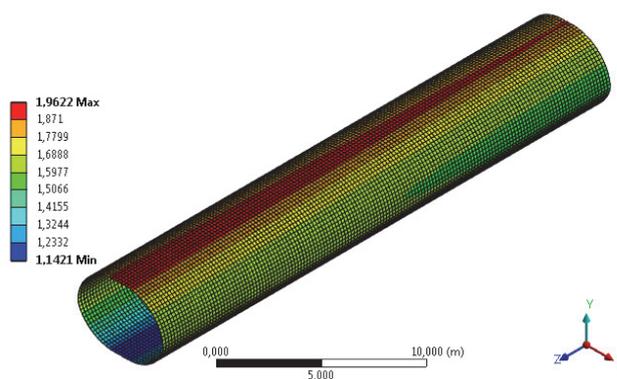


Рис. 4. Поле полных перемещений цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки

Figure 4. Fields of total displacements of the shell when the buckling load is achieved

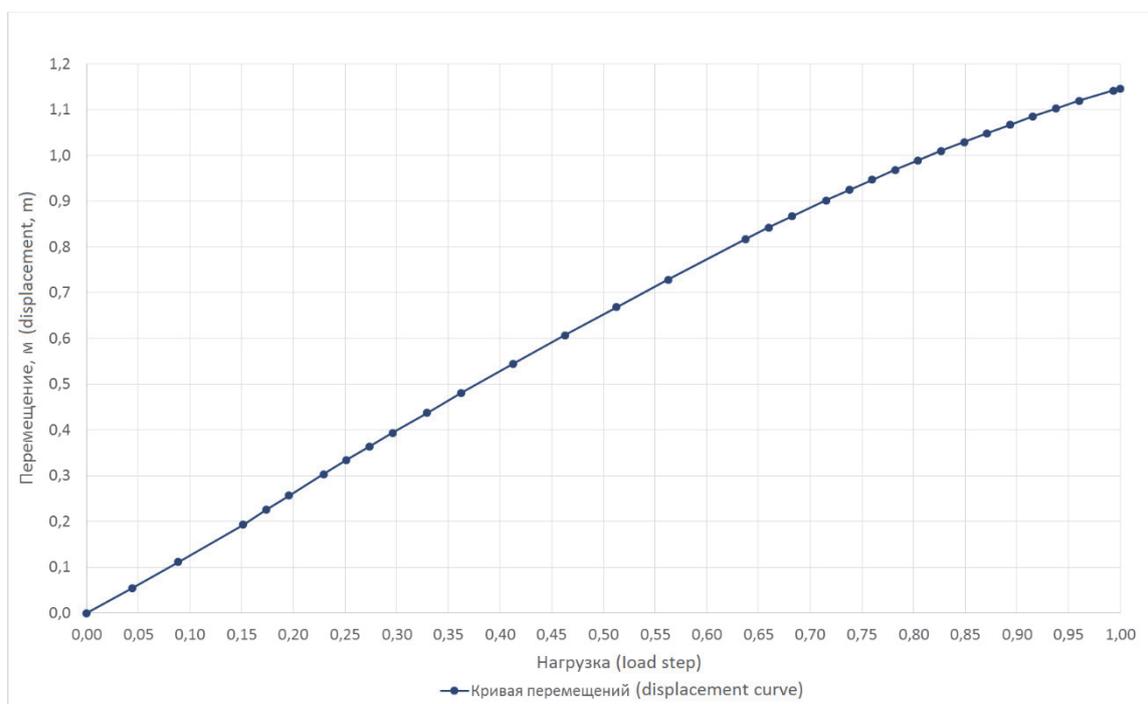


Рис. 5. Кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки пространственной модели системы «оболочка – основание»
 Figure 5. The displacement curve of the bottom point of the shell depending on the loading step

Нелинейный расчет пространственной модели системы «оболочка – основание» с учетом коэффициента трения

В данной модели учтен коэффициент трения между оболочкой и окружающим основанием. Коэффициент трения f принят равным 0,6, так как физико-механические свойства основания приняты как для сухого грунта, а свойства оболочки как для бетона. Расчет проведен в нелинейной постановке.

Для оболочки принят упругопластический материал по модели Друкера – Прагера, для окружающего массива задан упругопластический материал по модели Мора – Кулона. Физико-механические характеристики материалов взяты из предыдущей модели.

На рис. 6 представлено поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки. На рис. 7 показано поле полных перемещений цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки в масштабированном виде (вид сбоку левой половины оболочки). Нелинейный расчет остановлен на шаге приращения нагрузки, на котором не достигнута сходимость решения. Распределение пластических деформаций в теле окружающего основания и оболочки показаны на рис. 8 и 9 соответственно. Величина критической нагрузки составила $4,6\gamma z_1$.

Полученные значения критических нагрузок близки к значениям, полученным в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки [7]. Распределения пластических деформаций в теле основания и оболочки также схожи с полученными в случае бесконечно длинной цилиндрической оболочки.

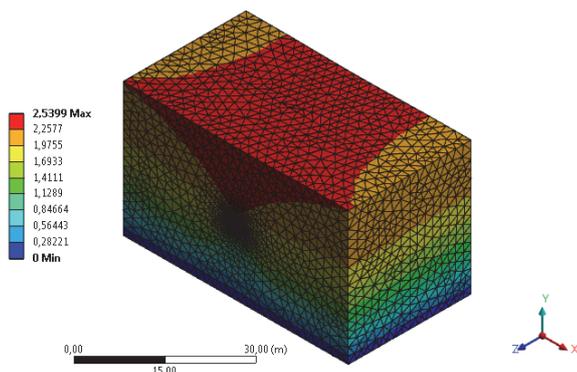


Рис. 6. Поле полных перемещений пространственной модели системы «оболочка – основание» при достижении критической нагрузки
Figure 6. Fields of total displacements of the spatial model “shell – soil” system when the buckling load is achieved

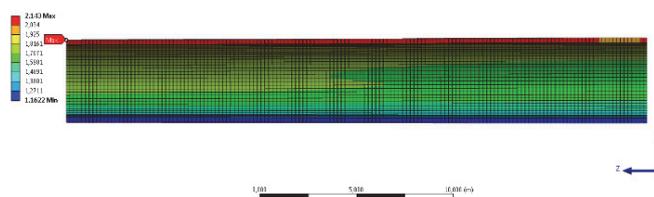


Рис. 7. Поле полных перемещений цилиндрической оболочки при достижении критической нагрузки в масштабированном виде (включено отображение толщины элементов оболочки)
Figure 7. Fields of total displacements of the shell when the buckling load is achieved in scaled form (the thickness of the shell elements is displayed)

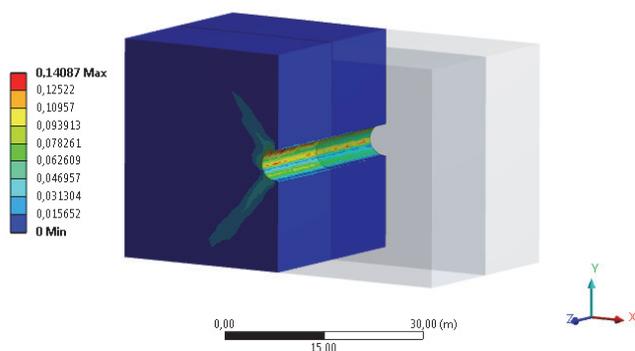


Рис. 8. Распределение пластических деформаций в теле окружающего основания
Figure 8. The plastic deformation in the soil

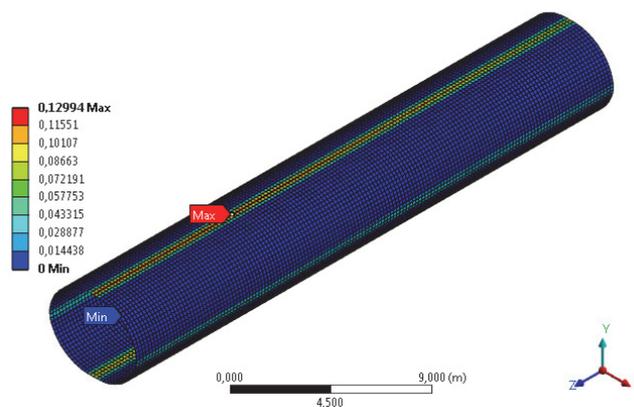


Рис. 9. Распределение пластических деформаций в теле оболочки
Figure 9. The plastic deformation in the shell

По рис. 8 и 9 видно (максимумы величин отмечены красными флажками), что наибольшие перемещения и пластические деформации сосредоточены на участке оболочки, расположенном в пределах первого массива основания с меньшими физико-механическими характеристиками. Следовательно, потеря устойчивости цилиндрической оболочки характерна для этой области.

Следует отметить, что по результатам расчета характер деформаций оболочки схож с деформациями, полученными в работе С. Кириакидеса и Ч.Д. Бэбкока [14; 15] для стальных трубчатых элементов при распространении вмятины с учетом пластических свойств материала (рис. 10).

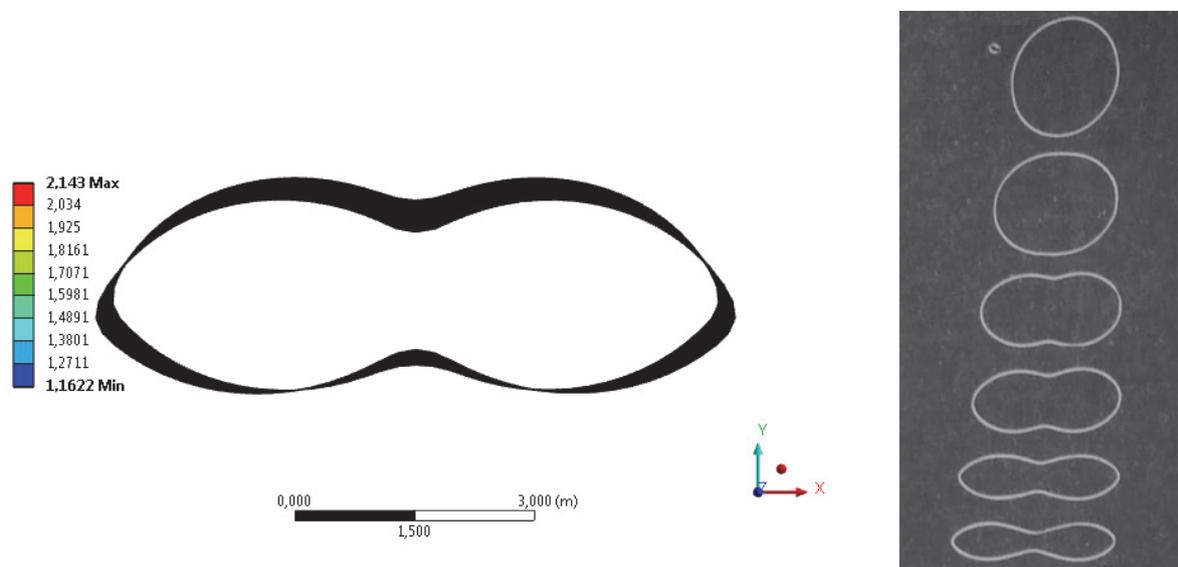


Рис. 10. Масштабированный вид перемещений оболочки по результатам нашего расчета (слева) и профили поперечных сечений трубы из работы С. Кириакидеса и Ч. Д. Бэбкока (справа)
Figure 10. Scaled view of the shell displacements based on the results of our calculation (left) and cross sections of the pipe from the work of S. Kyriakides, C.D. Babcock (right)

Максимальное главное напряжение в теле оболочки составило 2,7 МПа в верхнем своде цилиндрической оболочки. Минимальное главное напряжение составило 55,6 МПа в нижнем своде. Распределение максимальных и минимальных главных напряжений в теле оболочки показаны на рис. 11 и 12 соответственно.

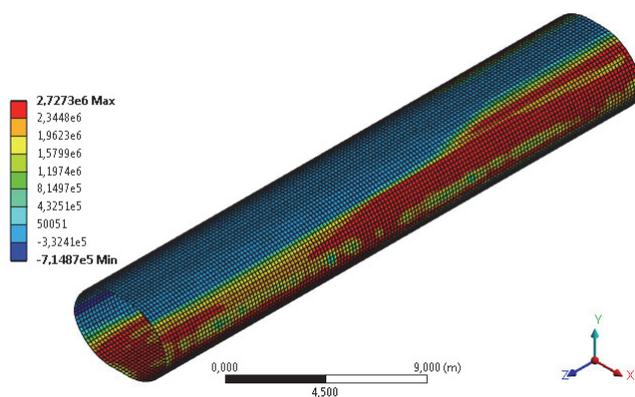


Рис. 11. Распределение максимальных главных напряжений в оболочке
Figure 11. The distribution of the maximum principal stresses in the shell

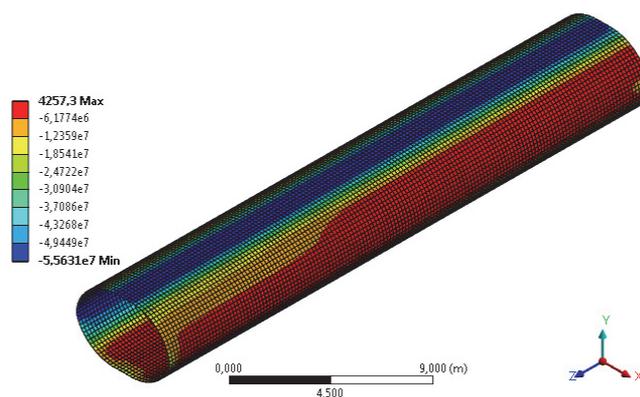


Рис. 12. Распределение минимальных главных напряжений в оболочке
Figure 12. The distribution of the minimum principal stresses in the shell

На рис. 13 показана кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки.

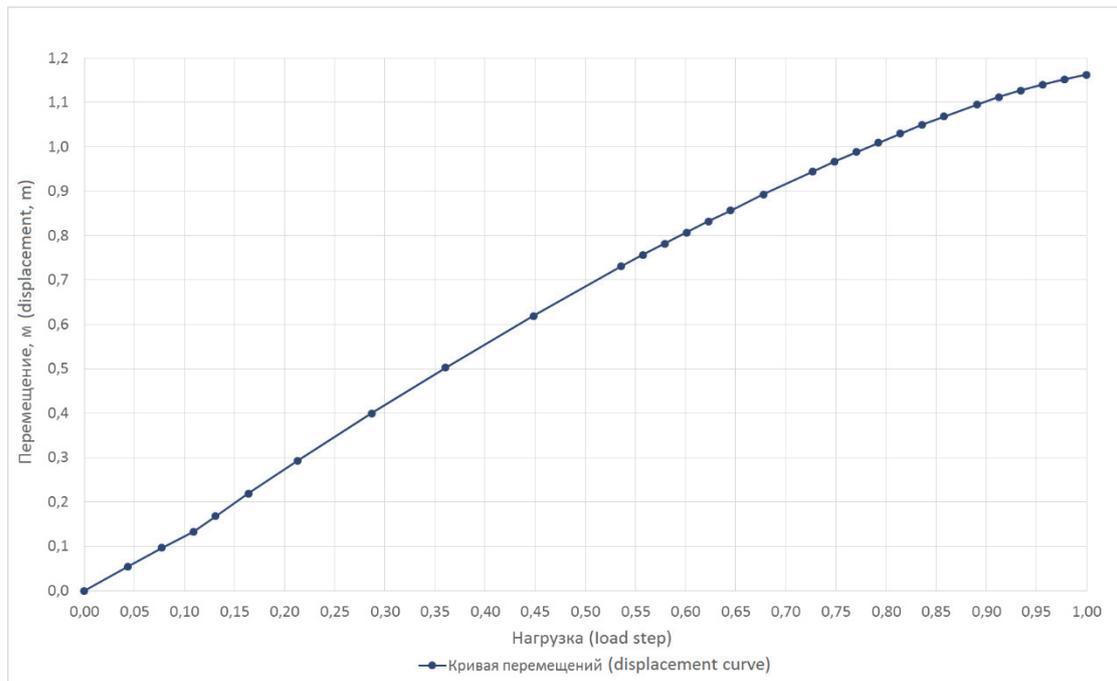


Рис. 13. Кривая зависимости перемещения нижнего узла оболочки от прикладываемой нагрузки пространственной модели системы «оболочка – основание»
Figure 13. The displacement curve of the bottom point of the shell depending on the loading step

В табл. 2 приведены значения критической нагрузки для двух выполненных расчетных случаев пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки.

Таблица 2

Величины критических нагрузок

Вид анализа	Величина критической нагрузки
Нелинейный расчет с односторонними связями без учета коэффициента трения при упругопластических моделях материалов	$4,5\gamma z_1$
Нелинейный расчет с односторонними связями с учетом коэффициента трения при упругопластических моделях материалов	$4,6\gamma z_1$

Table 2

The values of the buckling load

Type of analysis	The value of the buckling load
Nonlinear analysis with one-way connections without taking into account the friction coefficient. Elastic-plastic material	$4,5\gamma z_1$
Nonlinear analysis with one-way connections taking into account the friction coefficient. Elastic-plastic material	$4,6\gamma z_1$

При переходе от случая бесконечно длинной цилиндрической оболочки [7] к случаю неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки значение критической нагрузки получает незначительное изменение – с $4,4\gamma z_1$ до $4,6\gamma z_1$. Это объяснено тем, что обе задачи решены в пространственной постановке с применением упругопластических моделей материалов. Однако стоит заметить, что моделирование основания с неоднородностью физико-механических свойств вдоль продольной оси цилиндрической оболочки показывает, что потеря устойчивости оболочки происходит на участке более слабого основания.

Заключение

Получены значения критической нагрузки от двух выполненных расчетных случаев пространственной модели системы «оболочка – основание» в случае неоднородных физико-механических свойств основания вдоль продольной оси цилиндрической оболочки. При нелинейном расчете с односторонними связями без учета коэффициента трения при упругопластической модели материала критическая нагрузка составляет $4,5\gamma z_1$. При нелинейном расчете с односторонними связями с учетом коэффициента трения при упругопластической модели материала – $4,2\gamma z_1$.

Моделирование основания с неоднородностью физико-механических свойств вдоль продольной оси цилиндрической оболочки показало, что потеря устойчивости оболочки происходит на участке основания с меньшими физико-механическими характеристиками.

Необходимо отметить, что «запас устойчивости» $4,2\gamma z_1$ по отношению к действующей нагрузке не является в полной мере достаточным для вводимых в эксплуатацию сооружений.

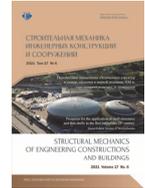
Список литературы

1. Lalin V.V., Dmitriev A.N., Diakov S.F. Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches // *Magazine of Civil Engineering*. 2019. Vol. 5. No. 89. Pp. 39–51. <http://dx.doi.org/10.18720/MCE.89.4>
2. Semenov A.A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol. 106. Pp. 428–436. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
3. Semenov A.A. Methodology research of stability of shallow orthotropic shells of double curvature under dynamic loading // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017. Vol. 13. No. 2. Pp. 145–153. <http://dx.doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-145-153>
4. Theory reference for the mechanical APDL and mechanical applications. ANSYS Inc., 2009. 1226 p.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 92 с.
6. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Определение критической нагрузки потери устойчивости стержневой и плоской моделей круговой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 4. С. 291–298. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-291-298>
7. Kosytsyn S., Akulich V. Buckling load of an infinitely long cylindrical shell interacting with the soil environment // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. Vol. 1425. 012078. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012078>
8. Леонтьев А.Н., Леонтьева И.Г. Расчет бесконечно длинной составной балки, расположенной на упругом основании // *Вестник МГСУ*. 2010. № 4. С. 167–172.
9. Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б., Филатов В.В. Расчет балок на упругом основании с двумя коэффициентами постели // *Вестник МГСУ*. 2012. № 2. С. 25–29.
10. Косицын С.Б., Чан С.Л. Численный анализ напряженно-деформированного состояния ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек без учета и с учетом их одностороннего взаимодействия с окружающим массивом грунта // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. № 1. С. 72–78.
11. Косицын С.Б., Чан С.Л. Сравнительный анализ различных моделей грунтового основания, окружающего цилиндрическую оболочку, с учетом возможности его отлипания от оболочки // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. № 1. С. 65–72.
12. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 567 с.
13. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
14. Томпсон Дж., Хант Дж. Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика. М.: Наука, 1991. 424 с.
15. Kyriakides S., Babcock C.D. Large deflection collapse analysis of an inelastic inextensional ring under external pressure // *Int. J. of Solids and Structures*. 1981. Vol. 17. Pp. 981–993.

References

1. Lalin V.V., Dmitriev A.N., Diakov S.F. Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches. *Magazine of Civil Engineering*. 2019;5(89):39–51. <http://dx.doi.org/10.18720/MCE.89.4>
2. Semenov A.A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures. *Thin-Walled Structures*. 2016;106:428–436. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
3. Semenov A.A. Methodology research of stability of shallow orthotropic shells of double curvature under dynamic loading. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017;13(2):145–153. <http://dx.doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-145-153>
4. Theory reference for the mechanical APDL and mechanical applications. ANSYS, Inc. 2009.

5. Timoshenko S.P. *Theory of elastic stability*. Moscow: Gostekhizdat Publ.; 1955. (In Russ.)
6. Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu. The definition of the critical buckling load beam model and two-dimensional model of the round cylindrical shell that interact with the soil. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(4):291–298. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-291-298>
7. Kosytsyn S., Akulich V. Buckling load of an infinitely long cylindrical shell interacting with the soil environment. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020;1425:012078. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012078>
8. Leontiev A.N., Leontieva I.G. Analysis of an infinite composite beam located on elastic foundation. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2010;(4):167–172. (In Russ.)
9. Gabbasov R.F., Uvarova N.B., Filatov V.V. On calculation of beams resting on two-parameter elastic foundations. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2012;(2):25–29. (In Russ.)
10. Kosytsyn S.B., Chan S.L. Numerical analysis of the stress-strain state of orthogonally intersecting cylindrical shells with and without taking into account their one-sided interaction with the surrounding soil mass. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014;(1):72–78. (In Russ.)
11. Kosytsyn S.B., Chan S.L. Comparative analysis of various models of the soil mass surrounding the cylindrical shell, taking into account the possibility of its detachment from the shell. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013;(1):65–72. (In Russ.)
12. Timoshenko S.P. *A course in the theory of elasticity*. Kiev: Naukova Dumka Publ.; 1972. (In Russ.)
13. Zenkevich O.K. *Finite element method in engineering*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
14. Thompson J.M.T., Hunt G.W. *The buckling of structures in theory and practice*. Moscow: Nauka Publ.; 1991. (In Russ.)
15. Kyriakides S., Babcock C.D. Large deflection collapse analysis of an inelastic inextensional ring under external pressure. *Int. J. of Solids and Structures*. 1981;17:981–993.



DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627

UDC 69.04

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program

Vladimir P. Agapov¹ , Alexey S. Markovich²  

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

²Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

 markovich-as@rudn.ru

Article history

Received: August 1, 2021

Revised: October 18, 2021

Accepted: October 30, 2021

For citation

Agapov V.P., Markovich A.S. Investigation of the accuracy and convergence of the results of thin shells analysis using the PRINS program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6): 617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-617-627>

Abstract. The theoretical foundations of compatible finite elements construction for static and dynamic analysis of single-layer and multilayer shells are discussed. These finite elements are implemented in the PRINS computer program. The paper presents verification tests to investigate the accuracy and convergence of the results of calculating various shells using these finite elements. Shell structures are widely used in various fields of technology – construction, mechanical engineering, aircraft construction, shipbuilding, etc. Specialists on the design and calculation of such structures need a reliable and accessible tool for the practical problems solving. Computer program PRINS can be one of such tools. It can be effectively used by engineers of design and scientific organizations to solve a wide class of engineering problems related to the calculations of shell structures. The paper describes the finite elements of the shells, implemented in the PRINS program. The results of verification calculations are presented, which confirm the high accuracy of this program.

Keywords: finite element method, PRINS program, calculation methods, shells, multilayer plates, multilayer shells, layered structures, mechanics of deformable bodies

Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС

В.П. Агапов¹ , А.С. Маркович²  

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

²Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

 markovich-as@rudn.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 1 августа 2021 г.

Доработана: 18 октября 2021 г.

Принята к публикации: 30 октября 2021 г.

Аннотация. Приводятся теоретические основы построения совместных конечных элементов для статического и динамического расчета как однослойных, так и многослойных оболочек. Данные конечные элементы реализованы в вычислительном комплексе ПРИНС. Представлены верифика-

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-1749-5797, eLIBRARY SPIN: 2422-0104; agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-3967-2114; eLIBRARY SPIN: 9203-1434; markovich-as@rudn.ru

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-1749-5797, eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104; agapovpb@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0003-3967-2114, eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434; markovich-as@rudn.ru

© Agapov V.P., Markovich A.S., 2021

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Для цитирования

Агапов В.П., Маркович А.С. Исследование точности и сходимости результатов расчета тонких оболочек с помощью программы ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 617–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-671-627>

ционные тесты, на основании которых выполнено исследование точности и сходимости результатов расчета различных оболочек с использованием этих конечных элементов. Оболочечные конструкции находят широкое применение в различных областях техники – строительстве, машиностроении, самолетостроении, судостроении и т. д. Специалисты по проектированию и расчету таких конструкций нуждаются в надежном и доступном инструменте для решения практических задач. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть одним из них. Описываются конечные элементы оболочек, реализованные в вычислительном комплексе ПРИНС. Получены результаты верификационных тестов, подтверждающие высокую точность и сходимость этих конечных элементов. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения широкого класса инженерных задач, связанных с расчетами оболочечных конструкций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, методы расчеты оболочек, многослойные пластины, многослойные оболочки, слоистые конструкции, механика деформируемых тел

Introduction

Shell structures are widely used in various fields of technology – construction engineering, machine-building, aircraft construction, shipbuilding and so on. Fundamental questions of the shell analysis theory have been studied in detail in the works of domestic and foreign authors [1–5]. In these works, equations were obtained that completely describe the stress-strain state of thin shells of arbitrary shape under arbitrary loading. However, these equations do not have a common analytical solution. Various authors have obtained particular solutions for shells of a relatively simple form. The search for such solutions is underway at the present time [6–9]. The most famous of them, tested by long-term practice of their use, are given in reference and educational literature [10; 11].

The finite element method, which appeared in 1956, became a universal tool for calculating shells of arbitrary shape [12]. The versatility of the method is provided by the fact that the shell surface is represented as a set of elements of a simple geometric shape, triangles and/or quadrangles, which can be both flat and curved. Attempts were made to construct a curvilinear finite element on the basis of the shell theory [13], but it was impossible to make such element universal. Therefore, at present, for the calculation of shells, either plane finite elements are used, built on the basis of the plate bending theory [14; 15], or curvilinear ones, built on the basis of the general theory of elasticity [16].

The finite element method has been implemented in various computer programs. Those, who have been thoroughly verified, use the confidence of calculators and designers. The subject of research in this article is created by Professor V.P. Agapov computer program PRINS, the development of which is carried out by Professor V.P. Agapov together with his followers. The theory and practical implementation of shell finite elements used in this program is briefly described, and numerous examples of calculation of shells of various shapes are given.

Method

In the PRINS program, plane triangle and quadrilateral finite elements, implemented in single-layer and multilayer versions, are used for the calculation of thin shells. Since PRINS is intended for calculations of both linear and nonlinear deformable structures, the fundamental position in the development of finite elements was to obtain the simplest mathematical formulations. This circumstance is explained by the need to use rather dense finite element (FE) grids in the calculations, on the one hand, and the need for multiple recalculation of the stiffness characteristics of elements in the process of nonlinear problems solving, on the other. Therefore, the simplest triangle (Figure 1, *a*) with linear approximating functions for membrane displacements and a function in the form of an incomplete cubic polynomial for deflections (1) was taken as the basis for the shell elements constructing.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y,$$

$$w = q_1 + q_2 x + q_3 y + q_4 x^2 + q_5 xy + q_6 y^2 + q_7 x^3 + q_8 xy^2 + q_9 y^3. \quad (1)$$

A finite element with such displacement functions has well known to specialists disadvantages [14], the main of which are non-invariance with respect to the local coordinate system and the lack of compatibility of

rotations of the normal with adjacent elements at the boundaries that do not coincide with the local x_m axis. However, an advanced triangular finite element can be built on its basis. Two such elements are used in the PRINS program – multilayered EL34 and single-layered EL36. When developing multilayer element, the technique proposed by Professor Agapov [17] was used, and in the development of single-layer element the method described in the work of Clough and Tocher [14], was realised. The main idea in both cases is to use three so-called subtriangles with approximating displacement functions, taken in the form (1), to obtain the characteristics of a given triangular FE. Methodology of professor Agapov is illustrated in Figure 2, and the Clough and Tocher method is shown in Figure 3.

In both cases, the characteristics of subtriangles are initially formed in their local axes, then converted to axes common for a given triangle, summed and averaged.

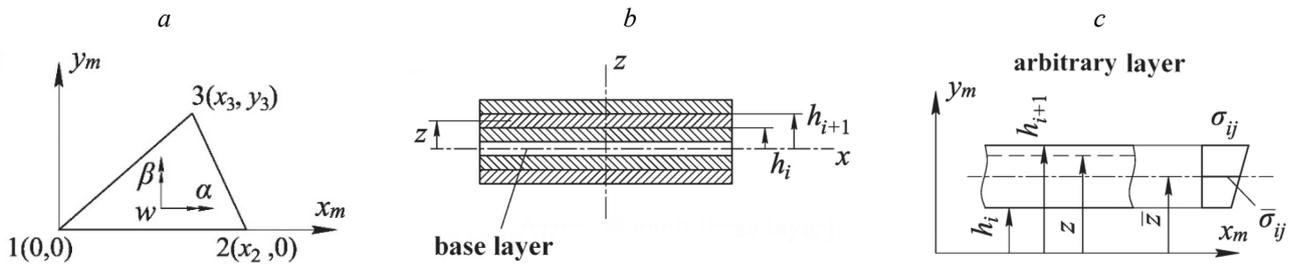


Figure 1. To create laminated shell FE:
 a – triangular FE in local coordinates x_m - y_m ; b, c – cross section

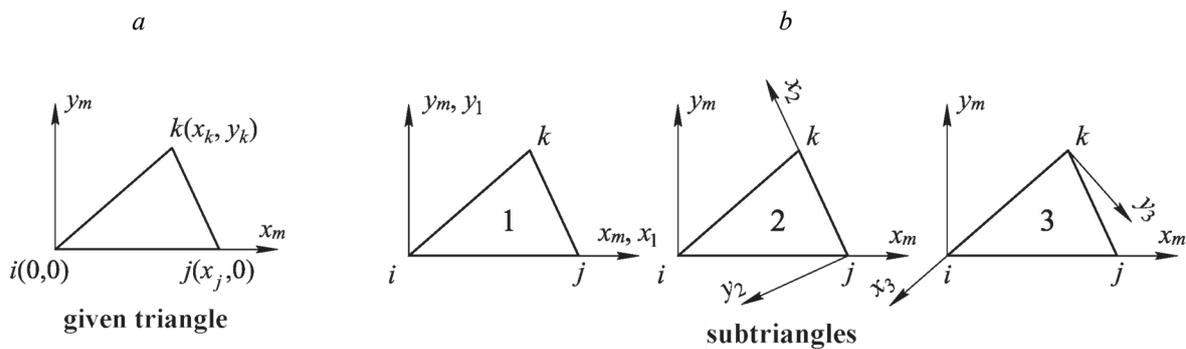


Figure 2. To calculate the bending stiffness matrix:
 a – triangular FE with nodes i, j, k ; b – subtriangles in local axes

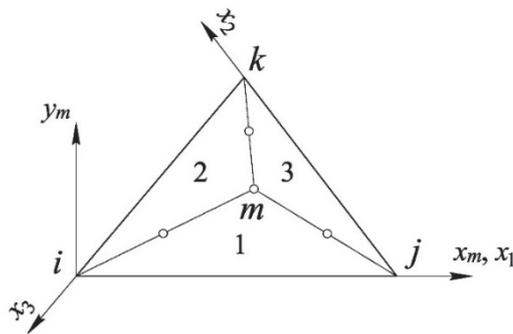


Figure 3. R.W. Clough & J.L. Tocher triangular finite element formation

As shown in [14; 17], the triangular elements thus improved have the property of invariance with respect to the coordinate axes and complete compatibility of displacements and rotations with adjacent elements at all boundaries.

The characteristics of a quadrangular FE are obtained by summing and averaging the characteristics of four triangles according to the scheme shown in Figure 4.

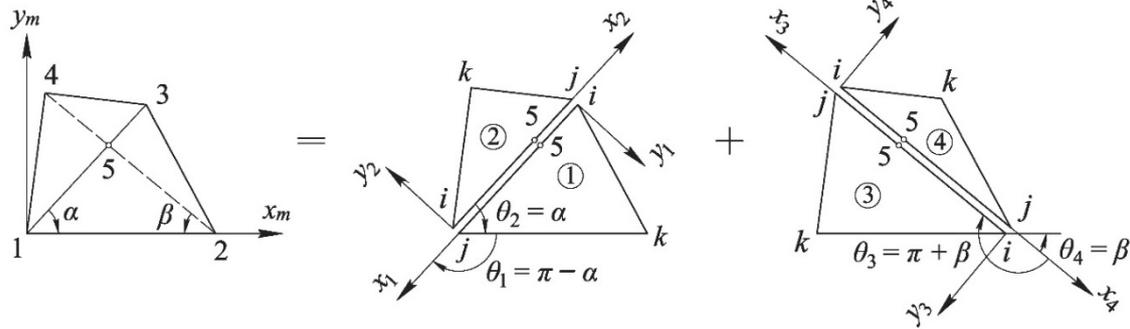


Figure 4. Forming a quadrangular finite element

A detailed description of the methods for obtaining all the characteristics of flat finite elements necessary for the calculation of shells can be found in [14; 15; 17]. The purpose of this work is a comparative analysis of shell FE implemented in PRINS program, as well as analysis of the accuracy and convergence of the results obtained with their help.

Results and discussion

To verify the above-described finite elements, we present a number of numerical calculations performed in PRINS program.

Single-layer shallow shell. We consider a shallow shell, the middle surface of which is an elliptical paraboloid (Figure 5, a) with the following initial data: $a = b = 10$ m, $h = 10$ cm, $f_1 = f_2 = 0.5$ m, $E = 3 \times 10^4$ MPa, $\nu = 0.2$, $q = 1$ kPa. The shell rests on transverse diaphragms that are rigid in its plane and flexible out of plane.

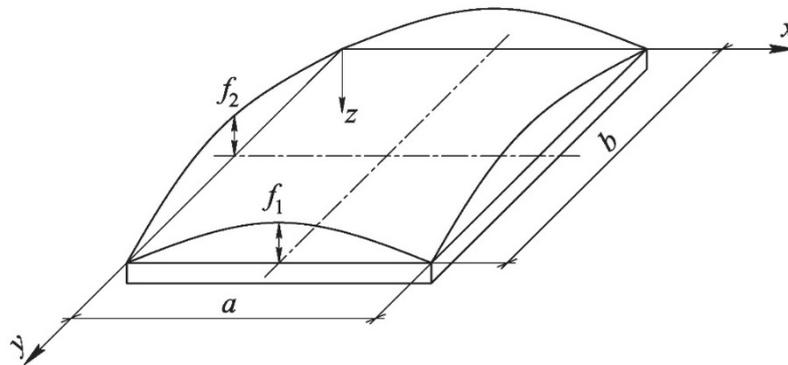


Figure 5. To the calculation of a shallow shell

The middle surface of the shell considered is described by equation:

$$z = f \left[\frac{f_1}{f} \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \frac{f_2}{f} \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right)^2 - 1 \right]. \quad (2)$$

This surface is formed by moving a line $f_1(x)$ along a line $f_2(y)$.

The authors estimated the accuracy and analyzed the convergence of the calculation results obtained with using of triangular and quadrangular elements of a single-layer shell (type EL36). For these purposes, a total of twelve finite element schemes of the considered shell were built (Figure 6) with different mesh densities: 10×10 , 14×14 , 20×20 , 30×30 , 36×36 , 40×40 . An analytical solution to this problem is given in the manual [11].

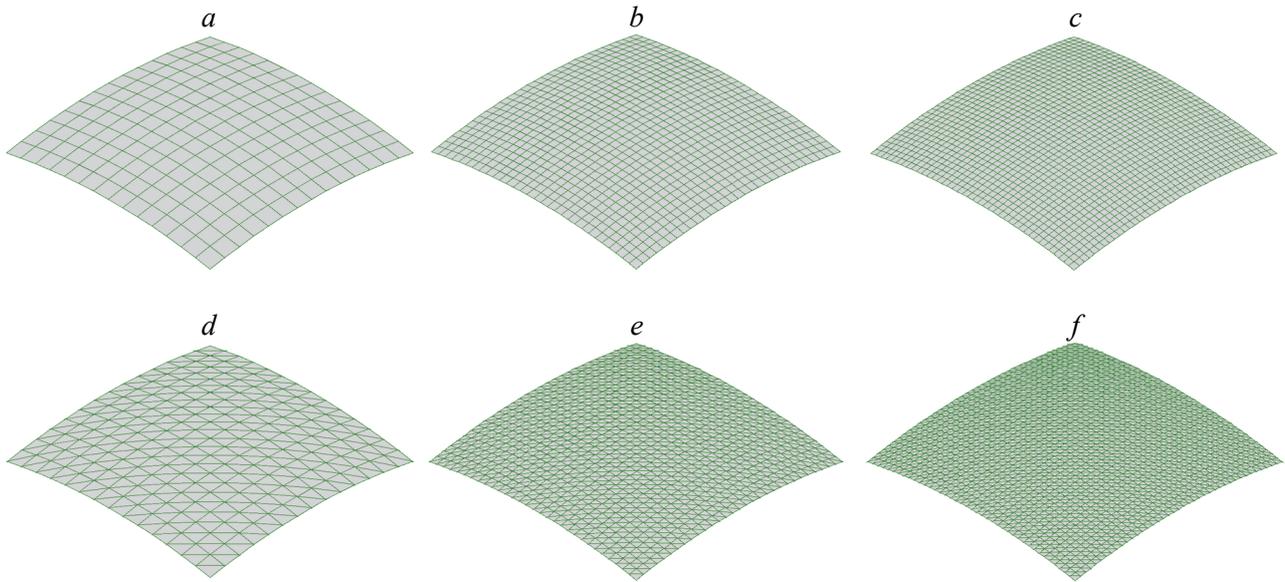


Figure 6. Finite element models of a shallow shell:
a, b, c – for calculating with rectangular FE; *d, e, f* – for calculating with triangular FE

Comparison of the results obtained in the PRINS program with the analytical calculation data was carried for the vertical displacement and for the total stresses at the upper (σ_u) and lower (σ_l) surfaces at the central point of the shell. Stresses were calculated by the formula

$$\sigma = \frac{N}{h} \pm \frac{6M}{h^2}, \quad (3)$$

where N and M are the lineal membrane force and the lineal bending moment in the shell section respectively.

The orientation of the shell surfaces is determined by the direction of the local z_m axis of finite elements, the positive direction of which at the central point coincides with the direction of the global z axis in Figure 5. The results of the numerical calculation of the shallow shell are presented in Table 1.

Table 1

Calculation results of the shell

FE mesh	Vertical displacement at the center point of the shell w , m			Stresses at the upper and lower surfaces at the center point of the shell			
	FEM solution	Analytical solution	Δw , %	FEM solution		Analytical solution	
				$\sigma_{xx,u} = \sigma_{yy,u}$, kPa	$\Delta \sigma$, %	$\sigma_{xx,u} = \sigma_{yy,u}$, kPa	
14×14 (3)	-0.000235	-0.000221	6.33	-146.24	0.58	-145.39/-113.6	
					-122.01		7.9
30×30 (3)	-0.00022		0.45		-145.8		0.28
					-118.2		3.72
14×14 (4)	-0.00023		4.07		-146.12		0.5
					-121.88		7.29
30×30 (4)	-0.000222		0.45		-145.82		0.29
					-116.18		2.27
40×40 (4)	-0.0002215		0.22		-145.6		0.15
					-114.34		0.65

The displacement and stress fields in the shell are shown in Figure 7.

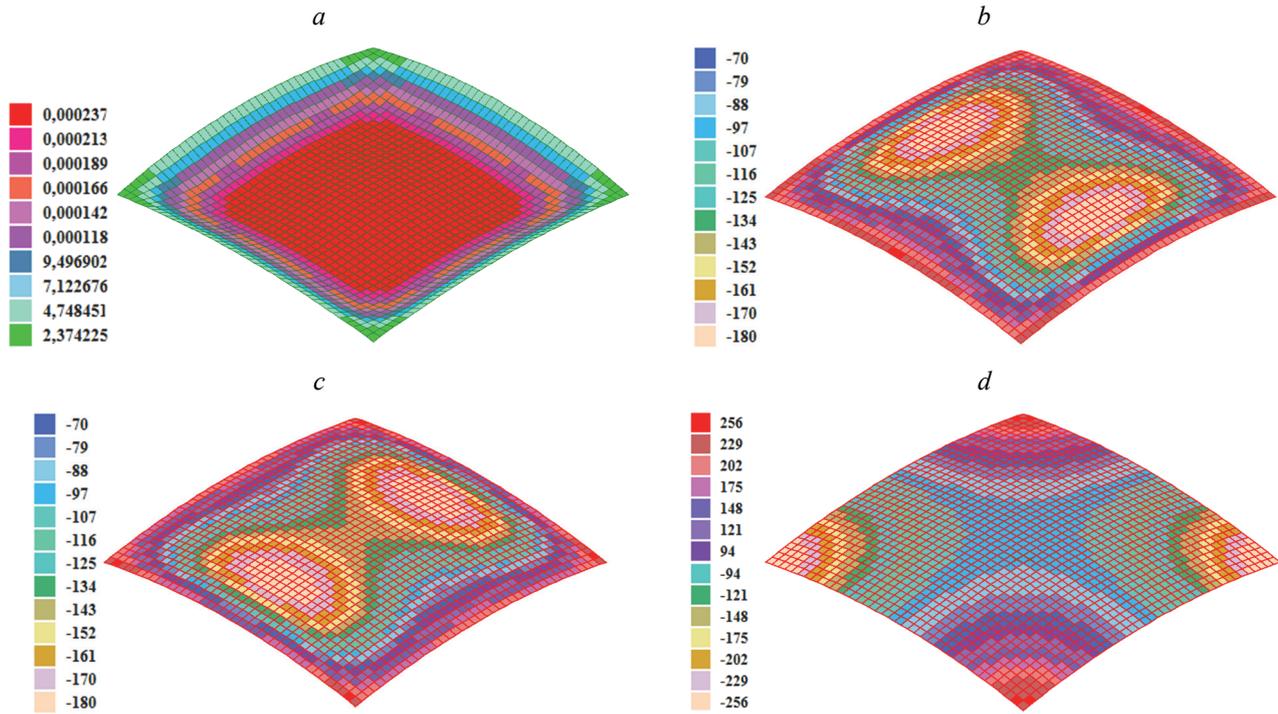


Figure 7. Calculating results of a shallow shell:

a – deformed shell scheme, total displacement fields, m; *b* – normal stress fields σ_{xx} , kPa; *c* – normal stress fields σ_{yy} , kPa ; *d* – shear stress fields τ_{xy} , kPa

As you can see from the Table 1, PRINS program provides an equally stable solution using both triangular and quadrangular FE. With a relatively coarse FE mesh, the calculation error is less than 6%. The displacement convergence graph is shown in Figure 8.

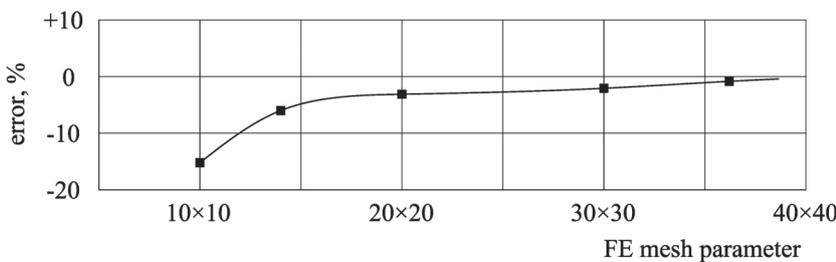


Figure 8. Convergence graph of calculation results for displacements

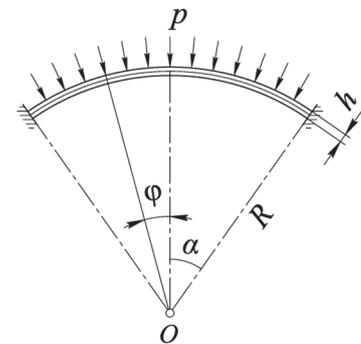


Figure 9. To the calculation of a spherical shell

Spherical shell under uniform pressure. The spherical shell clamped at the edges and loaded with the uniform load (Figure 9) is considered. The initial data are as follows: $R = 2.28$ m, $\alpha = 35^\circ$, $h = 7.6$ cm, $E = 3 \times 10^4$ MPa, $\nu = 0,167$.

An analytical solution of this problem by the Steuermann – Geckeler method is given in [11]. The shell verification calculation was performed by a shell finite element (type EL36) at different FE mesh densities: 8×32 , 12×48 , 16×64 , 32×128 (Figure 10).

The results of the spherical shell analysis, obtained with the aid of PRINS program, are shown in Figure 11.

The graphs of the convergence of the calculation results for meridional bending moments and circumferential normal stresses are shown in Figures 12 and 13 respectively.

The data presented in these figures show the high accuracy of the finite elements used for calculations.

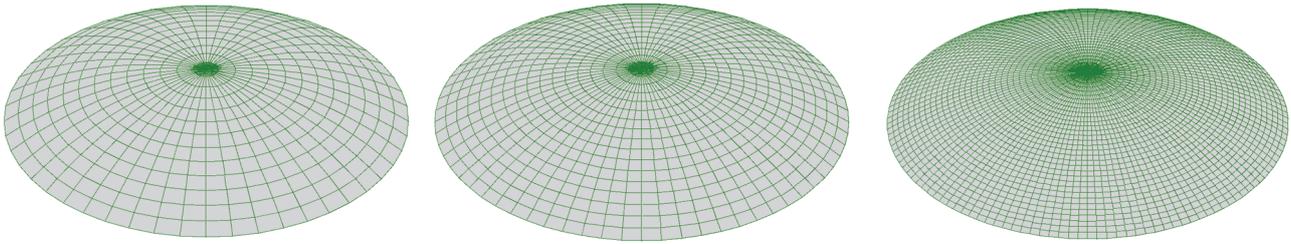


Figure 10. Finite element models of a spherical shell

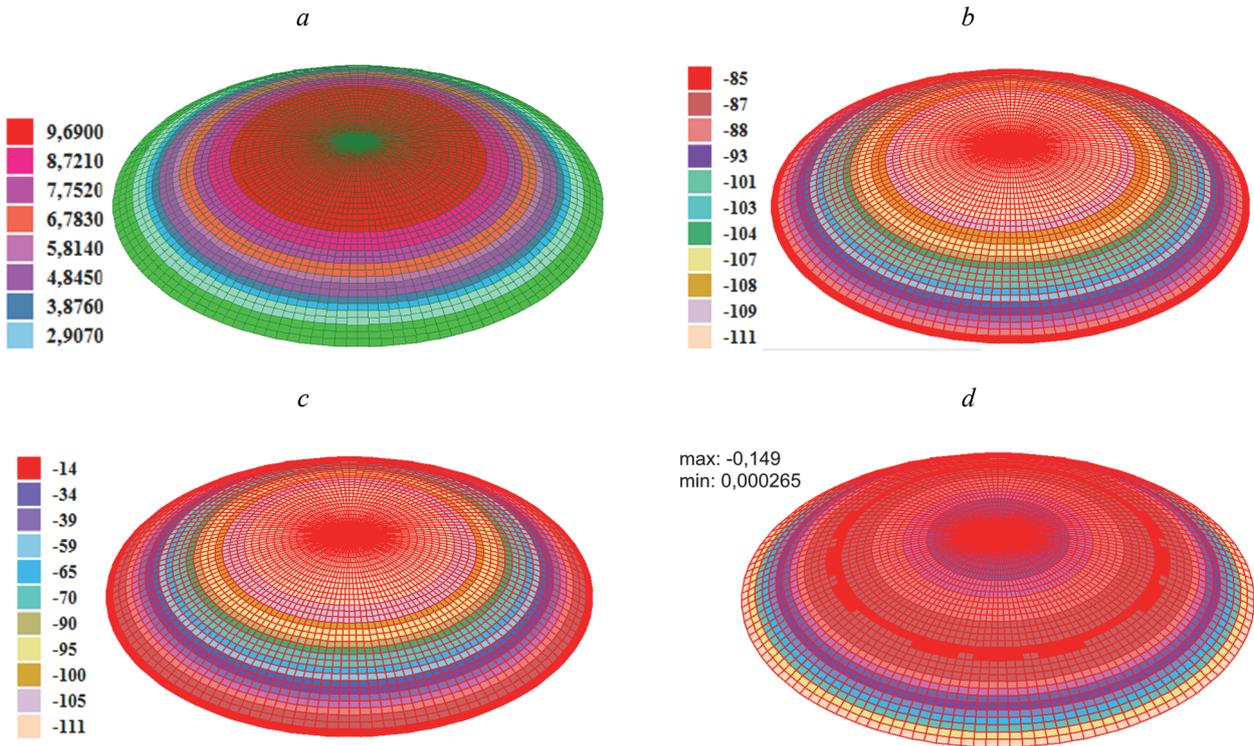


Figure 11. Calculating results of a spherical shell:
a – deformed shell scheme, total displacement fields $\times 10^6$, m; *b* – normal stress fields σ_{xx} , kPa;
c – normal stress fields σ_{yy} , kPa; *d* – bending moments fields M_x , kNm/m

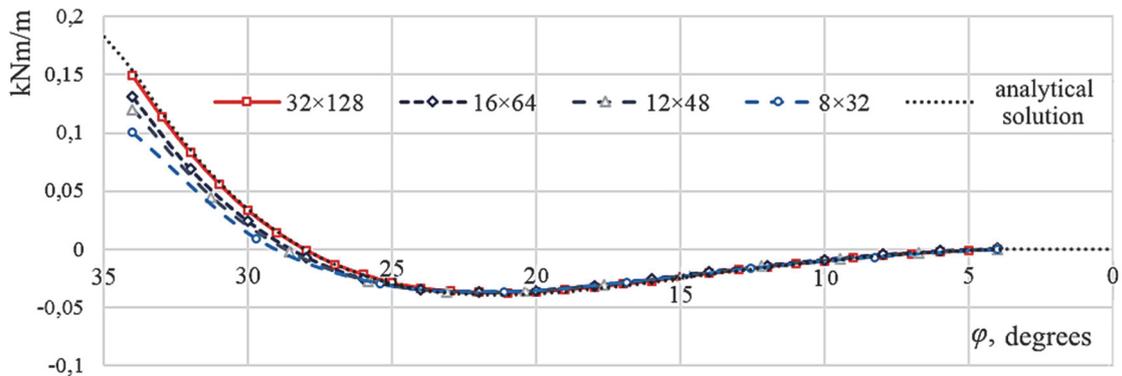


Figure 12. Convergence graph of the calculation results by the meridional bending moments M_x

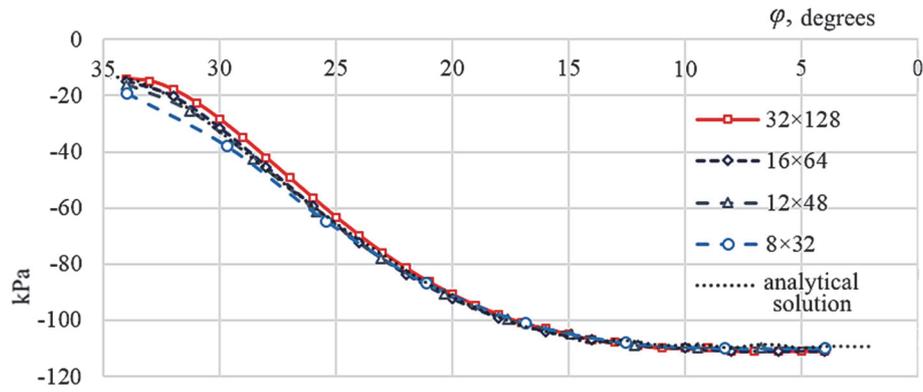


Figure 13. Convergence graph of calculation results for circumferential stresses σ_φ .

Tank consisting of a cylindrical part and a spherical dome. Let us consider a dome-shaped shell, turning into a cylindrical one, under the action of uniform pressure (Figure 14). The initial data are as follows: $R_m = R_t = 20$ m, $h = 50$ cm, $E = 3 \times 10^4$ MPa, $\nu = 0,2$. The tank is rigidly fixed in the base.

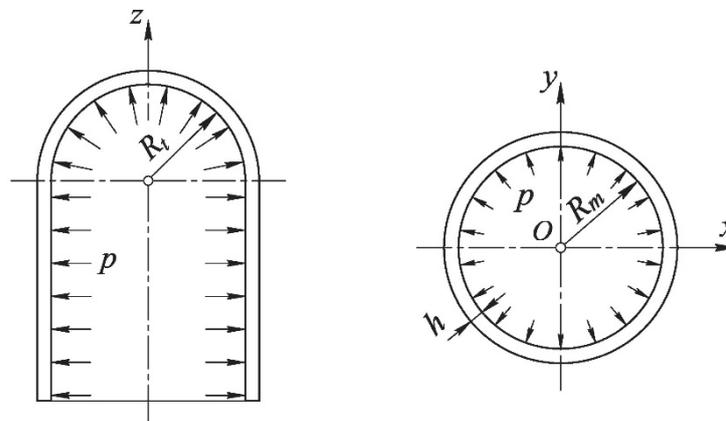


Figure 14. To the calculation of a tank

The finite element schemes of the reservoir were constructed using triangular and quadrangular shell elements (type EL36) and had the following parameters: 12×24, 18×36, 24×48, 30×60 (Figure 15).

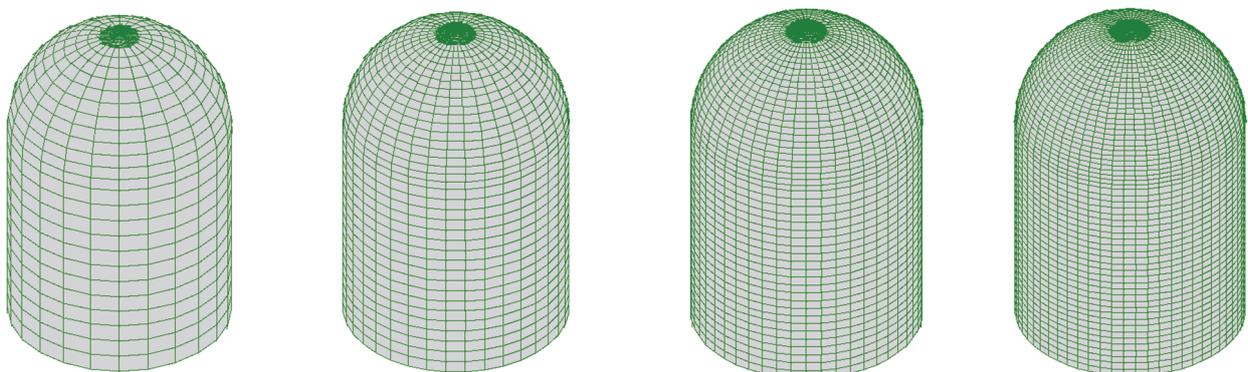


Figure 15. Tank finite element models

The stress state of the reservoir under consideration can be determined using the membrane theory of shells (the edge effect is not considered).

Normal stresses in the cylindrical part are equal:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}, \quad \sigma_t = \frac{pR}{h}. \quad (3)$$

The stresses in a spherical dome are determined by the equation:

$$\sigma_t = \sigma_m = \frac{pR}{2h}. \quad (4)$$

The results of the reservoir analysis with the aid of PRINS program are presented in Table. 2.

Table 2

Tank calculating results

FE mesh	Cylindrical shell				Spherical shell			
	FEM solution		Analytical solution		FEM solution		Analytical solution	
	σ_m , kPa	σ_t , kPa	σ_m , kPa	σ_t , kPa	σ_m , kPa	σ_t , kPa	σ_m , kPa	σ_t , kPa
12×24	9900	19 800	10 000	20 000	9950	9990	10 000	10 000
18×36	9960	19 900			9960	10 000		
24×48	9980	20 000			9980	10 000		
30×60	9990	20 000			9990	10 000		

The displacement and stress fields in the tank are shown in Figure 16.

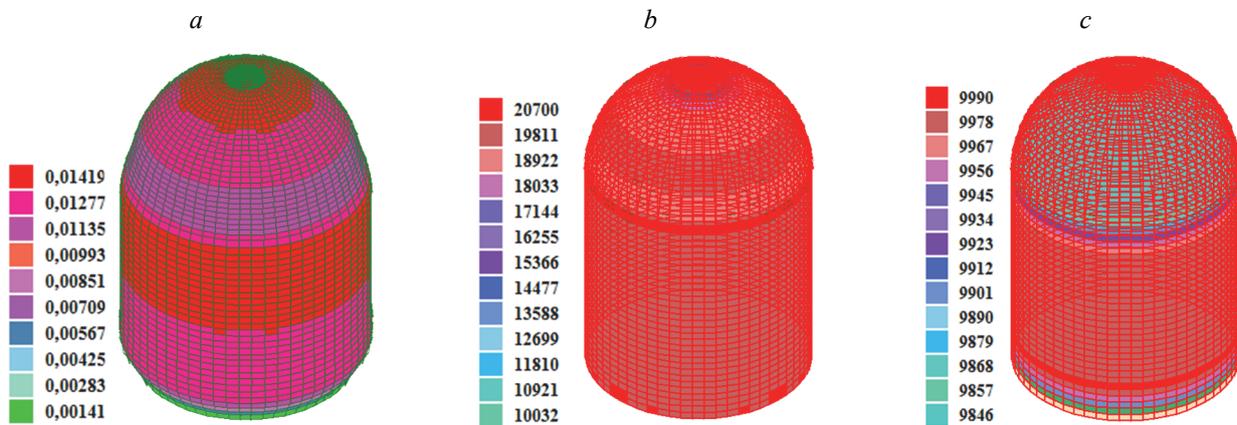


Figure 16. Tank calculating results:

a – deformed tank scheme, total displacement fields, m; *b* – normal stress fields in the meridional direction σ_m , kPa; *c* – normal stress fields in the circumferential direction σ_t , kPa

As you can see from the Table 2, the results obtained using the PRINS practically coincide with the analytical solution according to the membrane theory.

Flat layered cylindrical panel. The calculation of a flat layered cylindrical panel rested on transverse diaphragms that are rigid in its plane and flexible out of plane (Figure 17, *a*) is presented. Panel dimensions: $a_1 = 1$ m, $a_2 = 2$ m, $R_1 = 3$ m. The cross-section of the panel consists of five layers symmetrically located relative to the middle surface (Figure 17, *b*).

The characteristics of the layers are as follows: $h_1 = 0.5$ cm, $h_2 = 1.5$ cm, $h_3 = 1.6$ cm, $E_1 = 7 \times 10^4$ MPa, $E_2 = 2.6 \times 10^4$ MPa, $E_3 = 195$ MPa, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.13$, $\nu_3 = 0.4$, $q = 35$ kPa.

The calculations were carried out using a triangular multilayer FE (EL34). Four different finite element meshes were used: 6×12 , 9×18 , 12×24 , 15×30 (Figure 18).

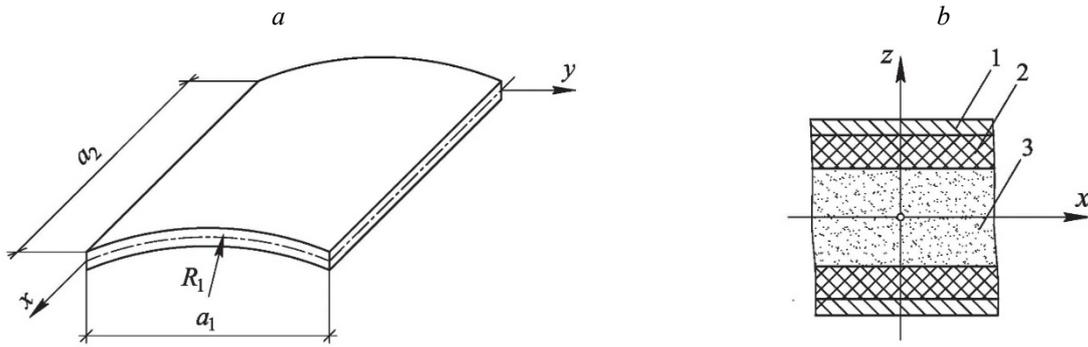


Figure 17. To the calculation of a laminated cylindrical panel:
a – general view; *b* – cross-section of the panel

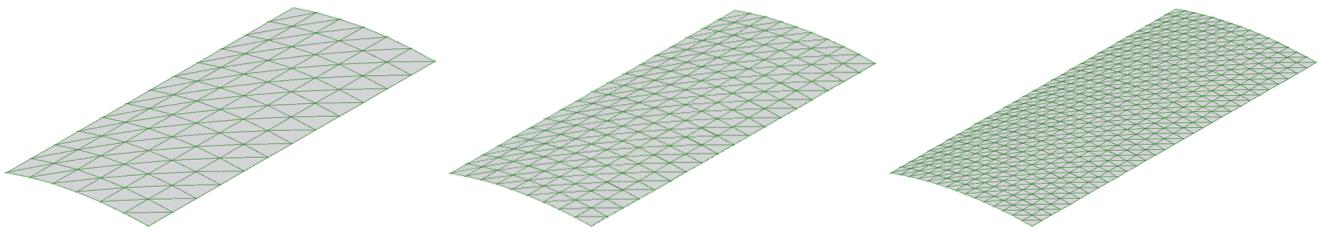


Figure 18. Finite element models for calculating a laminated panel

Table 3

Calculation results of laminated cylindrical panel

FE mesh	Vertical displacement at the center point of the shell w , m		Forces in the middle of the panel				Error, Δ_w , %
			FEM solution		Analytical solution		
	FEM solution	Analytical solution	M_y , kNm/m	N_y , kN/m	M_y , kNm/m	N_y , kN/m	
6×12	0.000459	0.000455	3.086	-15.8	3.05	-15.29	0.88
9×18	0.000458		3.08	-15.5			0.65
12×24	0.000456		3.075	-15.4			0.2

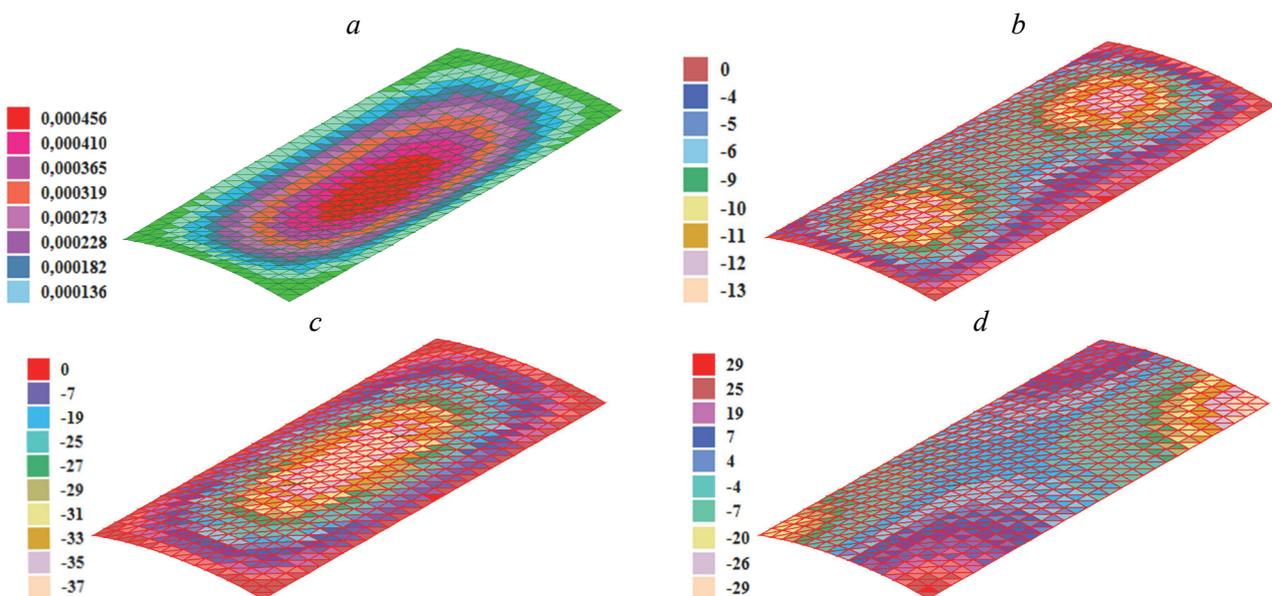


Figure 19. Calculating results of a laminated cylindrical panel:
a – deformed shell scheme, total displacement fields, m; *b* – normal force fields N_x , kN/m;
c – normal force fields N_y , kN/m; *d* – shear force fields N_{xy} , kN/m

An analytical calculation of the problem under consideration is given in the book [18].
 The results of numerical calculations are presented in Table 3.
 The displacement and stress fields in a laminated panel are shown in Figure 19.
 The calculation error ranges from 3.5 to 0.2%, depending on the dimension of the FE mesh.

Conclusion

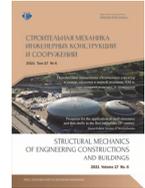
The principles of the shell finite elements constructing described in this article were implemented in PRINS program.

On the basis of numerous verification tests, it has been established that the finite elements (type EL36 and type EL34) used for single-layer and multilayer shell analysis have a fast convergence and have a sufficiently high accuracy. For rectangular planar shallow shells with side length l , the optimal size of the finite element that provides the required solution accuracy with significant savings in computing resources is $\left(\frac{1}{24} \div \frac{1}{36}\right)l$. For the calculation of cylindrical and spherical shells, the size of the finite element is recommended to be taken within $\left(\frac{1}{16} \div \frac{1}{24}\right)d$.

PRINS program can be effectively used by specialists from design and scientific organizations to solve a wide class of engineering problems.

References

1. Lyav A. *Mathematical theory of elasticity*. Moscow, Leningrad: ONTI Publ.; 1935. (In Russ.)
2. Lurye A.I. *The statics of thin-walled elastic shells*. Moscow: OGIZ Publ., Gostekhizdat Publ.; 1947. (In Russ.)
3. Goldenveyzer A.L. *Theory of elastic thin shells*. Moscow: GITTL Publ.; 1953. (In Russ.)
4. Novozhilov V.V. *Thin shell theory*. Moscow: Sudpromgiz Publ.; 1962. (In Russ.)
5. Timoshenko S.P., Woinowski-Krieger S. *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill; 1959.
6. Krivoshapko S.N. *Geometry of ruled surfaces with a return rib and linear theory of torso shell analysis*. Moscow: RUDN Publ.; 2009. (In Russ.)
7. Ivanov V.N. Krivoshapko S.N. *Analytical methods for calculating non-canonical shells*. Moscow: RUDN Publ.; 2010. (In Russ.)
8. Krivoshapko S.N. Two types of design equations for shells in arbitrary curvilinear coordinates. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;(1):15–22. (In Russ.)
9. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):51–62. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>
10. Birger I.A. *Strength, sustainability, fluctuations*. Mashinostroyeniye Publ.; 1968. (In Russ.)
11. Agapov V.P., Kovrigin I.I., Savostianov V.N. *Elements of the theory of shells*. Moscow: MGSU Publ.; 2011. (In Russ.)
12. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.C. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronaut. Sci.* 1956;23:805–823.
13. Garnet H., Crouzet-Pascal J. *Doubly curved triangular finite elements for shell of arbitrary shape*. Cruman Research Department Report RE-453. 1973.
14. Clough R.W., Tocher J.L. Finite element stiffens matrix for analysis of plate bending. *Proc. Conf. Matrix Meth. In Struct. Meth.* Ohio, 1965. p. 515–545.
15. Clough R.W., Felippa C.A. A refined quadrilateral element for analysis of plate bending. *Proc. 2nd Conf. Matrix Meth.* Ohio; 1968. p. 399–440.
16. Irons B.M., Zienkiewicz O.C. The isoparametric finite element system – a new concept in finite element analysis. *Proc. Conf.: Recent Advances in Stress Analysis*. London: Royal Aeronautical Society; 1969.
17. Agapov V.P. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2005. (In Russ.)
18. Piskunov V.G., Verizhenko V.E. *Linear and nonlinear problems of calculating layered structures*. Kiev: Budivelnik Publ.; 1986. (In Russ.)



ДИНАМИКА ОБОЛОЧЕК SHELL DYNAMICS

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-628-638
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Определение собственных частот колебаний армированной цилиндрической оболочки

М.А. Рустамова

Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджанская Республика
✉ mehsetir@gmail.com

История статьи

Поступила в редакцию: 9 июня 2021 г.
Доработана: 29 сентября 2021 г.
Принята к публикации: 14 октября 2021 г.

Для цитирования

Рустамова М.А. Определение собственных частот колебаний армированной цилиндрической оболочки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 628–638. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-628-638>

Аннотация. Исследуются свободные колебания армированной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Рассматривается случай ортотропной оболочки, когда нити корда укладываются симметрично относительно меридиана оболочки. Движение жидкости потенциально, описывается волновым уравнением. Жидкость движется без отрыва от стенок цилиндров. Давление жидкости учитывается в уравнениях движения оболочек, а скорости жидкости и оболочки приравниваются на границах. Представление решения в гармоническом виде сводится к системе трансцендентных уравнений. При сравнении решений задач без жидкости и с жидкостью находится зависимость частоты системы без жидкости с частотой системы с жидкостью. Для решения уравнения предложен обратный метод, который позволил построить более точный частотный спектр свободных колебаний системы. При некоторых значениях параметров системы определены собственные частоты колебаний цилиндра.

Ключевые слова: цилиндр, плотность нитей корда, горизонтальное перемещение, плотность жидкости, объемная доля корда

Determination of natural vibration frequencies of reinforced cylindrical shell

Mexseti Akif Rustamova

Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan Republic
✉ mehsetir@gmail.com

Article history

Received: June 9, 2021
Revised: September 29, 2021
Accepted: October 14, 2021

Abstract. Free vibrations of a reinforced cylindrical shell filled with liquid are investigated. The case of an orthotropic shell is considered when the cord filament is placed symmetrically with respect to the meridian of the shell. The motion of a fluid is potential and is described by a wave equation. The fluid moves

Рустамова Мехсети Акиф кызы, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, доцент отдела волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана, Азербайджанская Республика, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, д. 9; ORCID: 0000-0001-5192-1166, eLIBRARY SPIN-код: 2290-2409, Scopus Author ID: 55489058000, Web of Science Researcher ID: AAE-2689-2019; mehsetir@gmail.com
Mexseti Akif Rustamova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Associate Professor, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 9 B. Vahabzade St, Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic; ORCID: 0000-0001-5192-1166, eLIBRARY SPIN-code: 2290-2409, Scopus Author ID: 55489058000, Web of Science Researcher ID: AAE-2689-2019; mehsetir@gmail.com

© Рустамова М.А., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation

Rustamova M.A. Determination of natural vibration frequencies of reinforced cylindrical shell. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):628–638. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-628-638>

without separation from the walls of the cylinders. The fluid pressure is taken into account in the equations of motion of the shells, and the velocities of the fluid and the shell are equalized at the boundaries. Representing a solution in a harmonic form reduces to a system of transcendental equations. Comparison of the solutions of the problems without a liquid and with a liquid shows the dependence of the frequency of the system without a liquid at the frequency of the system with the liquid. An inverse method is proposed for solving the equation. The inverse method for solving the problem has made it possible to construct a more accurate frequency spectrum of free oscillations of the system. For some values of the system parameters, the natural frequencies of the cylinder are determined.

Keywords: cylinder, density of cord filaments, horizontal movement, fluid density, volume fraction of cord

Введение

Круговые цилиндрические оболочки являются элементами, входящими в конструкции летательных аппаратов и двигателей, подводных и надводных средств передвижения, резервуаров и трубопроводов, сводчатых систем подводных и подземных тоннелей и хранилищ. Цилиндрические оболочки получили широкое распространение в технике. Одной из основных сфер их применения являются гидравлические системы, где такие оболочки применяются в качестве гибких вставок. Математическому описанию колебаний армированных оболочек с жидкостью посвящено множество работ [1–9].

Важным моментом при исследовании колебаний оболочек является определение частот свободных колебаний, что позволяет избежать резонанса от внешних источников колебаний. Следует отметить, что большинство рассматриваемых работ посвящены простейшим частным случаям или приближенным методам.

В [10] исследуются свободные колебания двух концентрически расположенных цилиндрических оболочек с жидкостью между ними. Представленное решение в гармонической форме сводится к системе трансцендентных уравнений. Собственные частоты колебаний определяются при некоторых значениях параметров системы, влияние размера цилиндров на свободные колебания цилиндра тоже изучается.

Исследование [11] посвящено численному анализу собственных колебаний вертикально и горизонтально ориентированных цилиндрических оболочек при разном уровне заполнения жидкостью и различных вариантах граничных условий, задаваемых на торцах упругой конструкции.

Рассматривается проблема движения твердого цилиндра [12], сохраняющего вертикальное положение под действием поверхностных волн в жидкости, которая решается операционным методом. Для нахождения оригинального решения, учитывая, что изображение представляет собой знаменатель табличной функции, используется интегральное уравнение Вольтера первого рода.

Постановка и решение задачи

В работе исследуются свободные колебания армированной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Рассматривается случай ортотропной оболочки, когда нити корда укладываются симметрично относительно меридиана оболочки. Армированная оболочка представляет собой многослойный композит, состоящий из слоев наполнителя и корда. Поскольку нахождение собственных частот системы «цилиндрическая оболочка – жидкость» связано с решением трансцендентных уравнений, частота колебаний оболочки, не содержащей жидкость, выражается через частоту колебаний системы в явном виде, что позволяет, как аналитически, так и графически исследовать спектры частот системы.

Для описания движения оболочки используются классические уравнения в перемещениях [13].

Колебания жидкости, заполняющей оболочку, описываются волновым уравнением в цилиндрических координатах [14]. На границе контакта оболочки с жидкостью задается равенство радиальных скоростей.

Таким образом, колебания рассматриваемой системы описываются уравнениями

$$A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w = \rho_s h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w = \rho_s h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w = - \left(\rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right),$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{C_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \\ A_{12} = A_{21} &= \frac{C_{12} + C_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi}, \\ A_{13} = A_{31} &= \frac{1}{R} \left(C_{12} \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ A_{22} &= \left(C_{66} + \frac{4}{R^2} D_{66} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \left(C_{22} + \frac{1}{R^2} D_{22} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \\ A_{23} = A_{32} &= \frac{1}{R} \left(\frac{C_{22}}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{1}{R} (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{D_{22}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} \right), \\ A_{33} &= \frac{1}{R^2} C_{22} + D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^4}{\partial \phi^4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$C_{ik} = hB_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12} B_{ik},$$

$$B_{11} = B'_{11} \cos^4 \theta + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + B'_{22} \sin^4 \theta,$$

$$B_{22} = B'_{11} \sin^4 \theta + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + B'_{22} \cos^4 \theta,$$

$$B_{12} = B'_{12} + (B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (3)$$

$$B_{66} = B'_{66} + (B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

где $B'_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $B'_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $B'_{66} = G$; $B'_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$, E_1, E_2, ν_1, ν_2 – параметры

композита по главным направлениям упругости, вычисляемые по формулам

$$E_1 = E_b V_b + E_m (1 - V_b),$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_b}{E_b} + \frac{(1 - V_b)}{E_m}, \quad \nu_1 = \nu_b V_b + \nu_m (1 - V_b), \quad \nu_2 = \nu_2 \frac{E_2}{E_1},$$

$$\frac{1}{G} = \frac{V_b}{G_b} + \frac{(1-V_b)}{G_m},$$

где E_b, G_b, ν_b – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона; E_m, G_m, ν_m – соответствующие параметры наполнителя; V_b – объемная доля корда.

Плотность определяется из выражения

$$\rho_s = \rho_b V_b + \rho_m (1 - V_b),$$

где ρ_b и ρ_m – плотность нитей корда и наполнителя соответственно; ρ_s – плотность оболочки; ρ_f – плотность жидкости; h – толщина оболочки; R – радиус срединной плоскости оболочки; B_{ik} – упругие параметры обобщенного закона Гука в цилиндрической системе координат оболочки.

Потенциал Φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\omega^2}{a^2} \Phi = 0. \quad (4)$$

На границе между жидкостью и оболочкой отвечает условию совместимости движения.

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (5)$$

Решение системы (1) представляется в виде

$$u = u_n \cos n\phi \sin \omega t \cos \frac{\pi x}{l},$$

$$g = v_n \sin n\phi \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (6)$$

$$w = w_n \cos n\phi \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\Phi = \Phi_n(r) \cos n\phi \cos \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (7)$$

где $\frac{\pi}{l} = k$.

Подставим (7) в (4), получим

$$\Phi_n'' + \frac{1}{r} \Phi_n' + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n = 0. \quad (8)$$

Внутри цилиндра решение уравнения (8) выглядит следующим образом:

$$\Phi_n(r) = C J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} r \right). \quad (9)$$

Учитывая (9) в (7),

$$\Phi = CJ_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} r \right) \cos n\phi \cos \omega t \sin kx, \quad (10)$$

где C – постоянно; $J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} r \right)$ – функция Бесселя порядка n .

И применяя (6) и (10) в (5), получаем

$$C = - \frac{w_n \omega}{J_n' \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}. \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), получим

$$\Phi = - \frac{w_n \omega J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}{J_n' \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)} \cos n\phi \cos \omega t \sin kx, \quad (12)$$

где a – скорость звука в жидкости; ω – круговая частота; J_n, J_n' – функции Бесселя порядка n .

Подставив (6) и (12) в (1), имеем

$$\begin{aligned} & - \left(k^2 C_{11} + \frac{n^2}{R^2} C_{66} \right) u_n + \frac{kn}{R} (C_{12} + C_{66}) v_n - \frac{k}{R} C_{12} w_n + \rho_s h \omega^2 u_n = 0, \\ & \frac{kn}{R} (C_{12} + C_{66}) u_n - \left(k^2 \left(C_{66} + \frac{4}{R^2} D_{66} \right) - \frac{n^2}{R^2} \left(C_{22} + \frac{1}{R^2} D_{22} \right) + \rho_s h \omega^2 \right) v_n + \\ & + \frac{1}{R^2} \left(-nC_{22} + k^2 n (D_{12} + 4D_{66}) - \frac{n^3}{R} D_{22} \right) w_n = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

$$- \frac{k}{R} C_{12} u_n + \frac{1}{R^2} \left(nC_{22} + k^2 n (D_{12} + 4D_{66}) + \frac{n^3}{R^2} D_{22} \right) v_n +$$

$$+ \left(\frac{1}{R^2} C_{22} + k^4 D_{11} + \frac{2k^2 n^2}{R^2} (D_{12} + 2D_{66}) + \frac{n^4}{R^4} D_{22} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}{J_n' \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)} \right) w_n = 0.$$

Для упрощения вводим в (13) следующие обозначения:

$$(\alpha_{11} + \rho_s h \omega^2) u_n + \alpha_{12} \mathcal{G}_n + \alpha_{13} w_n = 0,$$

$$\alpha_{21} u_n + (\alpha_{22} + \rho_s h \omega^2) v_n + \alpha_{23} w_n = 0, \tag{14}$$

$$\alpha_{31} u_n + \alpha_{32} \mathcal{G}_n + \left(\alpha_{33} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 R} \right)}{J'_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 R} \right)} \right) w_n = 0,$$

где

$$\alpha_{11} = - \left(k^2 C_{11} + \frac{n^2}{R^2} C_{66} \right), \quad \alpha_{23} = \frac{kn}{R} (C_{12} + C_{66}),$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{kn}{R} (C_{12} + C_{66}), \quad \alpha_{22} = - \left(k^2 \left(C_{66} + \frac{4}{R^2} D_{66} \right) + \frac{n^2}{R^2} \left(C_{22} + \frac{1}{R^2} D_{22} \right) \right), \quad \alpha_{13} = \alpha_{31} = - \frac{k}{R} C_{12},$$

$$\alpha_{23} = - \frac{n}{R^2} C_{22} + \frac{k^2 n}{R^2} (D_{12} + 4D_{66}) - \frac{n^3}{R^4} D_{22}, \quad \alpha_{32} = \frac{n}{R^2} C_{22} + \frac{k^2 n}{R^2} (D_{12} + 4D_{66}) + \frac{n^3}{R^4} D_{22},$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{R^2} C_{22} + k^4 D_{11} + \frac{2k^2 n^2}{R^2} (D_{12} + 2D_{66}) + \frac{n^4}{R^4} D_{22}.$$

Выпишем условие нетривиальности решения системы (14) относительно u_n, v_n, w_n :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \rho_s h \omega^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \rho_s h \omega^2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 R} \right)}{J'_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2 R} \right)} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{11} + \rho_s h \omega^2)(\alpha_{22} + \rho_s h \omega^2) \left(\alpha_{33} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}{J'_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)} \right) + \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \\
 & + \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} - (\alpha_{22} + \rho_s h \omega^2) \alpha_{13} \alpha_{31} - \alpha_{12} \alpha_{21} \left(\alpha_{33} - \rho_s h \omega^2 + \omega^2 \rho_f \frac{J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)}{J'_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k^2} R \right)} \right) - \\
 & - \alpha_{32} (\alpha_{11} + \rho_s h \omega^2) \alpha_{23} = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 & -\rho_s^3 h^3 \omega^6 + (-\alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{33}) \rho_s^2 h^2 \omega^4 + (\alpha_{11} \alpha_{33} + \alpha_{22} \alpha_{33} - \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{13} \alpha_{31} - \alpha_{32} \alpha_{23} + \alpha_{12} \alpha_{21}) \rho h \omega^2 + \\
 & + \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} + \rho_s^2 h^2 \omega^6 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \alpha_{22} \rho_s h \omega^4 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \alpha_{11} \rho_s h \omega^4 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \\
 & + \alpha_{11} \alpha_{22} \omega^2 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} - \\
 & - \alpha_{13} \alpha_{31} \alpha_{22} - \alpha_{11} \alpha_{32} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{33} + \alpha_{12} \alpha_{21} \omega^2 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение (16) представляет собой трансцендентное уравнение

$$\Omega_1^3 + A_1 \Omega_1^2 + A_2 \Omega_1 + A_3 = 0, \tag{17}$$

где

$$\Omega_1 = \rho_s h \omega^2, \tag{18}$$

$$A_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{33},$$

$$A_2 = -\alpha_{11} \alpha_{33} - \alpha_{22} \alpha_{33} + \alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{13} \alpha_{31} + \alpha_{32} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{21},$$

$$\begin{aligned}
 A_3 = & -\alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} - \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} - \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} + \alpha_{13} \alpha_{31} \alpha_{22} + \alpha_{11} \alpha_{32} \alpha_{23} + \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{33} - \\
 & - \rho_s^2 h^2 \omega^6 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} - \alpha_{22} \rho_s h \omega^4 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} - \alpha_{11} \rho_s h \omega^4 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} - \\
 & - \alpha_{11} \alpha_{22} \omega^2 \rho_f \frac{J_n}{J'_n} + \alpha_{12} \alpha_{21} \omega^2 \rho_f \frac{J_n}{J'_n}.
 \end{aligned}$$

Определим Ω_1 из (17):

$$\Omega_1 = y - \frac{A_1}{3}, \quad (19)$$

$$y^3 + py + q = 0,$$

$$y_1 = A + B; \quad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad (20)$$

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{3}\right)^2,$$

$$p = -\frac{A_1^2}{3} + A_2, \quad q = 2\left(\frac{A_1}{3}\right)^3 - \frac{A_1 A_2}{3} + A_3.$$

В случае отсутствия жидкости ($\rho = 0$) уравнение (17) примет вид

$$(\Omega_1^0)^3 + A_1^0 (\Omega_1^0)^2 + A_2^0 \Omega_1^0 + A_3^0 = 0. \quad (21)$$

Здесь

$$\Omega_1^0 = \rho_s h (\omega_0)^2, \quad (22)$$

где ω_0 – частота свободных колебаний оболочки без жидкости.

$$A_1^0 = A_1, \quad A_2^0 = A_2 m, \quad A_3^0 = \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} + \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \alpha_{13} \alpha_{21} \alpha_{32} - \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{33} - \alpha_{12} \alpha_{21} \alpha_{32}.$$

Решением уравнения (21) станет

$$\Omega_1^0 = y_1^0 - \frac{A_1^0}{3}; \quad (23)$$

$$y_1^0 = A_0 + B_0, \quad y_{2,3}^0 = -\frac{A_0+B_0}{2} \pm i \frac{A_0-B_0}{2} \sqrt{3}; \quad (24)$$

$$A_0 = \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} + \sqrt{Q_0}}, \quad B_0 = \sqrt[3]{-\frac{q_0}{2} - \sqrt{Q_0}}, \quad Q_0 = \left(\frac{p_0}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_0}{3}\right)^2,$$

$$p_0 = p, \quad q_0 = 2\left(\frac{A_1^0}{3}\right)^3 - \frac{A_1^0 A_2^0}{3} + A_3^0.$$

Учитывая (20) в (19),

$$\Omega_1 = A + B - \frac{A_1}{3}. \quad (25)$$

И учитывая (24) в (23), получаем

$$\Omega_1^0 = A_0 + B_0 - \frac{A_1^0}{3}.$$

Отсюда

$$\frac{\Omega_1^0}{\Omega_1} = \frac{A_0 + B_0 - \frac{A_1^0}{3}}{A + B - \frac{A_1}{3}}.$$

Следовательно,

$$\Omega_1^0 = \frac{A_0 + B_0 - \frac{A_1^0}{3}}{A + B - \frac{A_1}{3}} \Omega_1.$$

С другой стороны, из (19) и (22):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A_0 + B_0 - \frac{A_1^0}{3}}{A + B - \frac{A_1}{3}}} \omega. \quad (26)$$

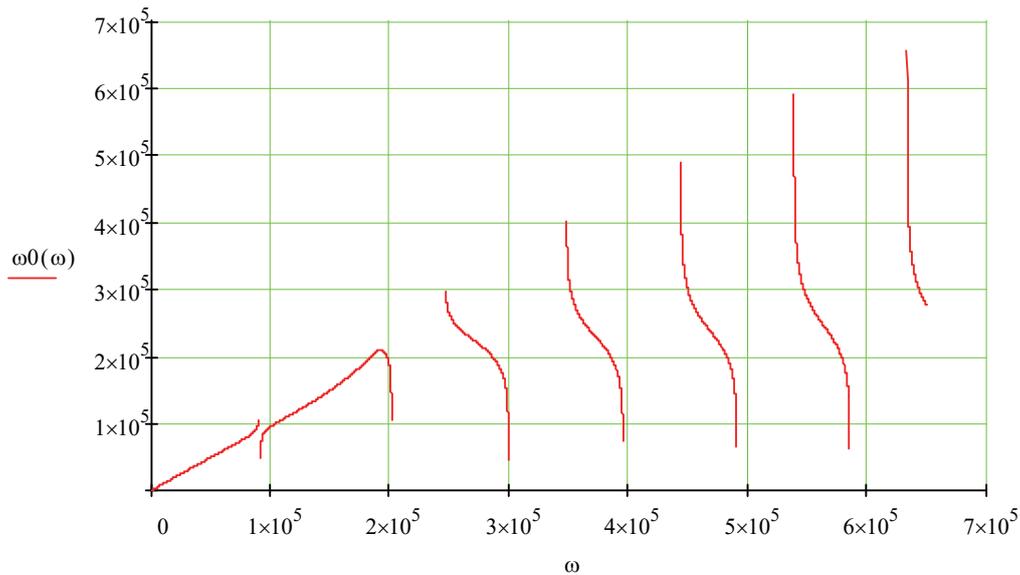


График частот колебаний системы в зависимости от частоты пустой оболочки
 A graph of the system vibration frequencies versus the frequency of the empty shell

Формула (26) выражает зависимость ω_0 от ω . Уравнение (26) связывает свободную частоту системы со свободной частотой оболочки в отсутствие жидкости. Однако решение обратной задачи позволяет строить графики зависимости частот колебаний для различных мод системы от частоты пустой оболочки, что упрощает исследование, в том числе определение частоты свободных колебаний системы (рисунок).

Заключение

Исследованы свободные колебания наполненной жидкостью армированной цилиндрической оболочки. Для нахождения частот свободных колебаний системы получено трансцендентное уравнение. Для решения трансцендентного уравнения многие исследователи используют приближенные методы и асимптотические решения. Однако для решения уравнения в этом случае был предложен обратный метод, позволяющий построить более точный частотный спектр свободных колебаний системы.

Список литературы

1. Филиппов С.Б. Решение уравнений свободных колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки методом Фурье // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 321–333. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.212>
2. Leizerovich G.S., Seregin S.V. Free vibrations of circular cylindrical shells with a small added concentrated mass // J. Appl. Mech. Tech. Phy. 2016. Vol. 57. Pp. 841–846. <https://doi.org/10.1134/S0021894416050102>
3. Abedini Baghbadorani A., Kiani Y. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets // Composite Structures. 2021. Vol. 276. 114546. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114546>
4. Ghasemi A.R., Meskini M. Investigations on dynamic analysis and free vibration of FGMs rotating circular cylindrical shells // SN Appl. Sci. 2019. Vol. 1. 301. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-0299-5>
5. Talebitooti M., Ghasemi M., Hosseini S.M. Vibration analysis of functionally graded cylindrical shells with different boundary conditions subjected to thermal loads // Journal of Computational and Applied Research in Mechanical Engineering. 2017. Vol. 6. No. 2. Pp. 103–114.
6. Агаларов Дж.Г., Сейфуллаев А.И. Свободные колебания сферической оболочки с упругим наполнителем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 74–80.
7. Сейфуллаев А.И., Новрузова К.А. Исследование колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 3. № 7 (75). С. 29–33. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.44393>
8. Latifov F.S., Yusifov M.Z., Alizade N.I. Free vibrations of heterogeneous orthotropic cylindrical shells reinforced by annular ribs and filled by fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. Vol. 61. Pp. 486–493. <https://doi.org/10.1134/S0021894420030219>
9. Prakash V.S., Sonti V.R. Asymptotic expansions for the structural wavenumbers of isotropic and orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells in the intermediate frequency range // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332. Issue 16. Pp. 3696–3705. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.02.025>
10. Seyfullayev A.I., Rustamova M.A., Agasiev S.R. Free oscillations of two concentrically located cylindrical shells with a fluid between them // International Journal of Engineering and Innovative Technology. 2014. Vol. 3. Issue 10. Pp. 33–37.
11. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н. Численное моделирование несоосных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Вестник Самарского Государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24. № 1. С. 95–115. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1746>
12. Агаларов Дж.Г., Рустамова М.А., Сейфуллаев А.И. Движение вертикально расположенного цилиндра в результате волн на поверхности жидкости // Вестник современной науки. 2017. № 2. С. 7–15.
13. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. 734 с.
14. Ho You J., Inaba K. Fluid-structure interaction in water-filled thin pipes of anisotropic composite materials // Journal of Fluids and structures. 2013. Vol. 36. Pp. 162–173. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.08.010>

References

1. Filippov S.B. Using the Fourier series for analysis of free vibrations of a cylindrical shell rotating on rollers. *Vestnik of St Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2018;5(2):321–333. (In Russ.) <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.212>
2. Leizerovich G.S., Seregin S.V. Free vibrations of circular cylindrical shells with a small added concentrated mass. *J. Appl. Mech. Tech. Phy*. 2016;57:841–846. <https://doi.org/10.1134/S0021894416050102>

3. Abedini Baghbadorani A., Kiani Y. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells reinforced with grapheme platelets. *Composite Structures*. 2021;276:114546. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114546>
4. Ghasemi A.R., Meskini M. Investigations on dynamic analysis and free vibration of FGMs rotating circular cylindrical shells. *SN Appl. Sci.* 2019;1:301. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-0299-5>
5. Talebitooti M., Ghasemi M., Hosseini S.M. Vibration analysis of functionally graded cylindrical shells with different boundary conditions subjected to thermal loads. *Journal of Computational and Applied Research in Mechanical Engineering*. 2017;6(2):103–114.
6. Agalarov J.G., Seyfullaev A.I. Free vibrations of a spherical shell with an elastic filler. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015;3:74–80. (In Russ.)
7. Sejfullaev A.I., Novruzova K.A. Oscillations of a longitudinally reinforced orthotropic cylindrical shell filled with a viscous fluid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2015;3(7(75)):29–33. (In Russ.) <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.44393>
8. Latifov F.S., Yusifov M.Z., Alizade N.I. Free vibrations of heterogeneous orthotropic cylindrical shells reinforced by annular ribs and filled by fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020;61:486–493. <https://doi.org/10.1134/S0021894420030219>
9. Prakash V.S., Sonti V.R. Asymptotic expansions for the structural wavenumbers of isotropic and orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells in the intermediate frequency range. *Journal of Sound and Vibration*. 2013;332(16):3696–3705. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.02.025>
10. Seyfullayev A.I., Rustamova M.A., Agasiev S.R. Free oscillations of two concentrically located cylindrical shells with a fluid between them. *International Journal of Engineering and Innovative Technology*. 2014;3(10):33–37.
11. Bochkarev S.A., Lekomcev S.V., Senin A.N. Numerical modeling of eccentric cylindrical shells partially filled with a fluid. *Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 2020; 24(1):95–115. (In Russ.) <https://doi.org/10.14498/vsgtu1746>
12. Agalarov J.G., Rustamova M.A., Seyfullayev A.I. The movement of a vertical cylinder as a result of water waves. *Bulletin of Modern Science*. 2017;2:7–15. (In Russ.)
13. Filippov A.P. *Oscillations of deformable systems*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1970. (In Russ.)
14. Ho You J., Inaba K. Fluid-structure interaction in water-filled thin pipes of anisotropic composite materials. *Journal of Fluids and Structures*. 2013;36:162–173. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.08.010>



РАСЧЕТ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ CALCULATION OF SEISMIC IMPACTS

 DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-639-650
 УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Математическое моделирование изгибных волн напряжений в надземном нефтепроводе при нестационарном сейсмическом воздействии

В.К. Мусаев

Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация
 Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация
 Мингячевирский государственный университет, Мингячевир, Азербайджанская Республика
 ✉ musayev-vk@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 14 июля 2021 г.
 Доработана: 12 октября 2021 г.
 Принята к публикации: 23 октября 2021 г.

Аннотация. Рассматривается задача о численном моделировании изгибных волн в надземном нефтепроводе при нестационарном сейсмическом воздействии. Для решения нестационарной динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями использован метод конечных элементов. С помощью метода конечных элементов в перемещениях линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Предложен квазирегулярный подход к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями и к аппроксимации исследуемой области. Методика основывается на схемах: точка, линия и плоскость. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные и прямоугольные конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Рассмотрена задача о воздействии плоской продольной волны в виде шести треугольников на упругую полуплоскость для оценки физической достоверности и математической точности. Решается система уравнений из 8 016 008 неизвестных. Результаты расчетов получены в характерных точках. Получено количественное сопоставление с результатами аналитического решения. Также рассмотрена задача о воздействии плоской продольной сейсмической волны под углом 90° к горизонту на надземный нефтепровод. Сейсмическое воздействие моделируется в виде функции Хевисайда, которое приложено на расстоянии трех средних диаметров от края трубы. Результаты расчетов получены в характерных точках исследуемого объекта. Решается система уравнений из 32 032 288 неизвестных. В рассматриваемой задаче преобладают изгибные волны.

Ключевые слова: переходной волновой процесс, программный комплекс Мусаева, функция Хевисайда, упругая полуплоскость, контурное напряжение, продольная волна, изгибная волна, волновая теория сейсмостойкости

Для цитирования

Мусаев В.К. Математическое моделирование изгибных волн напряжений в надземном нефтепроводе при нестационарном сейсмическом воздействии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 639–650. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-639-650>

Мусаев Вячеслав Кадир оглы, доктор технических наук, профессор кафедры комплексной безопасности в строительстве, Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, Москва, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; профессор кафедры технической безопасности, Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9; профессор кафедры высшей математики, Мингячевирский государственный университет, Азербайджанская Республика, AZ4500, Мингячевир, ул. Дильяры Алиевой, д. 21; ORCID: 0000-0003-4336-6785, Scopus Author ID: 57222101648, eLIBRARY SPIN-код: 8162-1906; musayev-vk@yandex.ru

© Мусаев В.К., 2021


 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Mathematical modeling of bending stress waves in an aboveground oil pipeline under unsteady seismic action

Vyacheslav K. Musayev 

Moscow state University of civil engineering, Moscow, Russian Federation

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

Mingachevir State University, Mingachevir, Republic of Azerbaijan

✉ musayev-vk@yandex.ru

Article history

Received: July 14, 2021

Revised: October 12, 2021

Accepted: October 23, 2021

Abstract. The problem of numerical modeling of bending waves in an aboveground oil pipeline under nonstationary seismic action is studied. To solve the unsteady dynamic problem of elasticity theory with initial and boundary conditions the finite element method was applied. Using the finite element method in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions was led to a linear Cauchy problem. A quasi-regular approach to solving a system of linear ordinary differential equations of the second order in displacements with initial conditions and to approximation of the studied domain is proposed. The technique is based on the schemes: point, line and plane. The area under study is divided by spatial variables into triangular and rectangular finite elements of the first order. According to the time variable, the area under study is divided into linear finite elements with two nodal points. The algorithmic language Fortran-90 was used in the development of the software package. The problem of the effect of a plane longitudinal wave in the form of six triangles on an elastic half-plane to assess physical reliability and mathematical accuracy is considered. A system of equations consisting of 8 016 008 unknowns is solved. The calculation results are obtained at characteristic points. A quantitative comparison with the results of the analytical solution is taken. Furthermore, the problem of the impact of a plane longitudinal seismic wave at an angle of 90° degrees to the horizon on an aboveground oil pipeline is considered. The seismic impact is modeled as a Heaviside function, which is applied at a distance of three average diameters from the edge of the pipe. The calculation results were obtained at the characteristic points of the object under study. A system of equations consisting of 32 032 288 unknowns is solved. Bending waves prevail in the problem under consideration.

For citation

Musayev V.K. Mathematical modeling of bending stress waves in an aboveground oil pipeline under unsteady seismic action. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):639–650. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-639-650>

Keywords: wave transition process, Musayev software package, Heaviside function, elastic half-plane, contour stress, longitudinal wave, bending wave, wave theory of seismic resistance

Введение

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений. После трех- или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной сейсмической волны под углом 90° к горизонту на надземный нефтепровод с помощью волновой теории сейсмической безопасности.

В списке литературы приводится информация о постановке и методах решения волновых задач. В [1–9] дана информация о численном моделировании волн напряжений в деформируемых телах.

Исследуемые численный метод, алгоритм и комплекс программ в задачах переходного процесса механики деформируемых тел представлены в [10–18], а оценка их достоверности и точности – в [10–16].

В [10] приводится информация о практической реализации метода конечных элементов для решения нестационарных волновых задач. Представлены результаты исследований для некоторых задач для оценки физической достоверности и математической точности. Рассматриваемые задачи представлены в

Vyacheslav K. Musayev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Integrated Safety in Construction, Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Professor of Technosphere Safety Department, Russian University of Transport, 9 Obraztsova St, bldg 9, Moscow, 127994, Russian Federation; Professor of the Department of Higher Mathematics, Mingachevir State University, 21 Dilyara Alieva St, Mingachevir, AZ4500, Republic of Azerbaijan; ORCID: 0000-0003-4336-6785, Scopus Author ID: 57222101648, eLIBRARY SPIN-код: 8162-1906; musayev-vk@yandex.ru

виде исследуемого объекта с упругой плоскостью и полуплоскостью. Применяется фундаментальное воздействие в виде функции Хевисайда, то есть ступенчатой функции. Основное внимание уделено оценке точности и достоверности численного решения нестационарных динамических задач для сложных деформируемых тел различной формы. На основе метода конечных элементов разработаны алгоритм и комплекс программ В.К. Мусаева для решения нестационарных волновых динамической задачи теории упругости при различных начальных и граничных условиях, для областей различной формы и для модели уравнений состояния кусочно-неоднородной изотропной среды, подчиняющейся упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Первая задача – о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие в упругой плоскости. Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Контур круглого отверстия аппроксимирован 28 узловыми точками. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 6 %. *Вторая задача*. Приводится решение первой задачи для сопоставления с результатами эксперимента, то есть динамической фотоупругости. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 2 %. *Третья задача* – о влиянии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие в плоскости. Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Внутренний контур подкрепления аппроксимирован 28 узловыми точками. По толщине круглое подкрепление аппроксимировано двумя узловыми точками. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 12 %. *Четвертая задача* – о воздействии плоской продольной упругой волны на Курпсайскую плотину с основанием в виде полуплоскости. Исследуемая расчетная область имеет 953 узловых точек. Курпсайская плотина аппроксимирована 224 узловыми точками. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 5 %. *Пятая задача* – о действии плоской продольной в виде треугольного импульса (дельта функция) на упругую полуплоскость. Решается система уравнений из 59 048 неизвестных. Заметим, что точное решение задачи соответствует рассматриваемому воздействию для упругих нормальных напряжений и имеется хорошее качественное и количественное совпадение с результатами точного решения. *Шестая задача* – о влиянии плоской продольной в виде ступенчатой функции (функция Хевисайда) на упругую полуплоскость. Решается система уравнений из 59 048 неизвестных. Имеется хорошее качественное и количественное совпадение с результатами точного решения. Перечисленные исследования и анализ численных результатов позволяют заключить, что метод конечных элементов с успехом применяется для решения нестационарных динамических задач механики деформируемого твердого тела. Проведенные исследования сходимости и устойчивости, сравнение с результатами других методов показали хорошее совпадение.

В [12] рассмотрена некоторая информация моделирования нестационарных упругих волн в полуплоскости при импульсном воздействии в виде «восходящая часть – четверть круга, нисходящая – четверть круга». Для решения поставленной задачи применяются нестационарные волновые уравнения математической теории упругости. На основе метода конечных элементов разработаны численный метод, алгоритм и комплекс программ В.К. Мусаева. Решена задача о распространении нестационарных волн в упругой полуплоскости. Проведенные исследования позволяют сделать вывод о физической достоверности и математической точности результатов численного решения.

В [16] изучена задача о воздействии плоской продольной волны в виде импульсного воздействия (первая ветвь: восходящая – линейная, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная; вторая ветвь: восходящая – линейная, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) на упругую полуплоскость. Исследуемая расчетная область имеет 2 004 002 узловых точек. Решается система уравнений из 8 016 008 неизвестных. На фронте плоской волны получено количественное сопоставление с результатами аналитического решения.

Результаты исследований показали хорошую качественную и количественную достоверность численного решения нестационарных упругих волн в деформируемых телах, полученных с помощью комплекса программ В.К. Мусаева.

Постановка задачи

Для решения задачи о моделировании нестационарных упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY (рис. 1), которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие [10; 17–33].

Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях [10; 17–33].

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид [10; 17–33]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \quad \sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (x, y) \in (\Gamma \cup S), \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; S ($S_1 \cup S_2$) – граничный контур тела Γ .

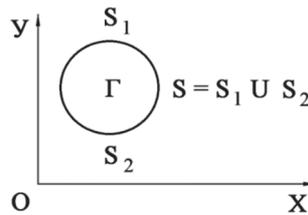


Рис. 1. Некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат
Figure 1. Some body Γ in a rectangular Cartesian coordinate system

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , для корректности результатов следует интегрировать при начальных и граничных условиях, приведенных в учебниках и монографиях по решению нестационарных волновых задач, а также при разработке рассматриваемой методики.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях [10; 17–18].

Методика

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента [10; 17–18].

Принимая во внимание определение матриц и векторов для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости [10; 17–18]

$$\bar{H}\ddot{\bar{\Phi}} = \bar{K}\bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \bar{\Phi}|_{t=0} = \bar{\Phi}_0, \quad \dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\bar{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где \bar{H} – матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\bar{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \bar{R} – вектор узловых упругих внешних сил.

Для интегрирования уравнения (2) конечно-элементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду [10; 17–18]:

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \bar{\Phi} + \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \frac{d}{dt} \bar{\Phi} = \bar{\dot{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечно-элементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечно-элементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек [10; 17–18]

$$\bar{\dot{\Phi}}_{i+1} = \bar{\dot{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \bar{\Phi}_i + \bar{R}_i), \quad \bar{\Phi}_{i+1} = \bar{\Phi}_i + \Delta t \bar{\dot{\Phi}}_{i+1}, \quad (4)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Шаг по временной переменной Δt определяем из соотношения [10; 17–18]

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i=1, 2, 3, \dots, r), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента; r – число конечных элементов.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k=0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечно-элементной линейной схемы [10; 17–18].

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать задачи при нестационарных волновых воздействиях [10; 17–18]. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90 [10; 17–18]. Исследуемая область разбивается по пространственным и временным переменным на конечные элементы первого порядка [10; 17–18].

Результаты

Моделирование продольных волн в полуплоскости

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной волны в виде шести треугольников (рис. 3) на упругую полуплоскость (рис. 2) для оценки физической достоверности и математической точности [10; 17–18]. Исследуемая задача впервые решена В.К. Мусаевым с помощью разработанной методики, алгоритма и комплекса программ [10; 17–18].

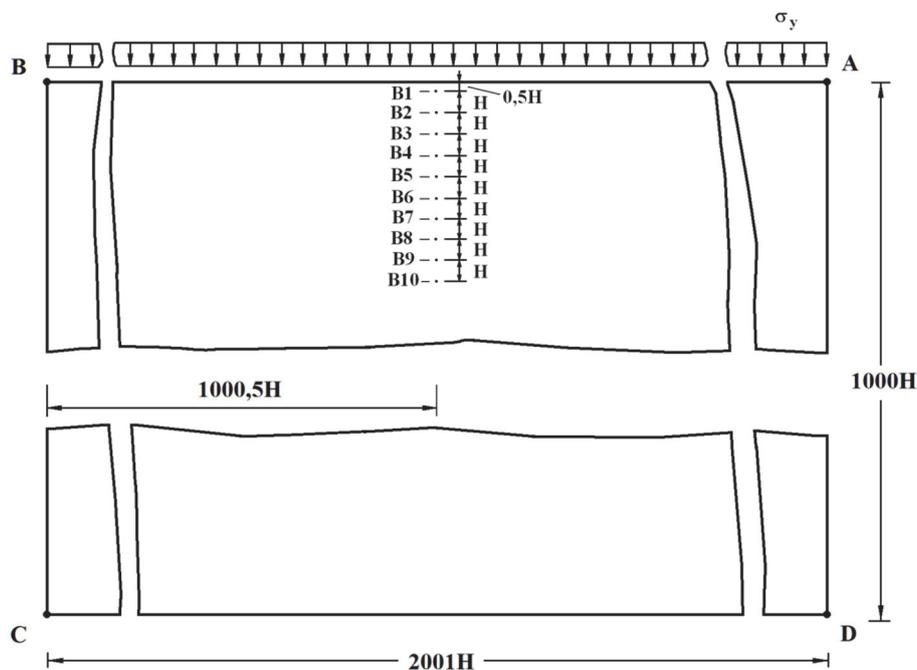


Рис. 2. Постановка задачи о распространении плоских продольных волн в виде шести треугольников в упругой полуплоскости
Figure 2. Statement of the problem of propagation of plane longitudinal waves in the form of six triangles in an elastic half-plane

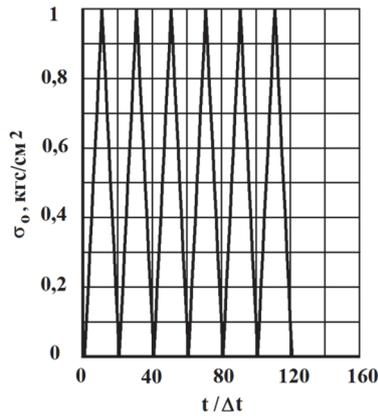


Рис. 3. Воздействие в виде шести треугольников
Figure 3. Impact in the form of six triangles

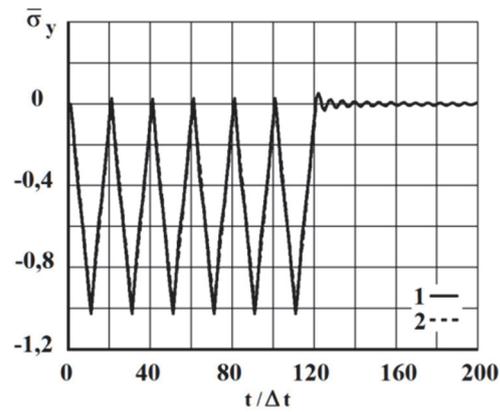


Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ (задача о распространении плоских продольных волн в виде шести треугольников в упругой полуплоскости) во времени $t/\Delta t$ в точке B1:
1 – численное решение; 2 – аналитическое решение
Figure 4. Change in elastic normal stress $\bar{\sigma}_y$ (the problem of propagation of plane longitudinal waves in the form of six triangles in an elastic half-plane) in time $t/\Delta t$ at the point B1:
1 – numerical solution; 2 – analytical solution

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,098 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 0,98 \times 10^9 \text{ кг/м}^3$.

На границе полуплоскости AB (рис. 2) приложено нормальное напряжение σ_y , которое изменяется от $0 \leq n \leq 121$ ($n = t/\Delta t$) и максимальное значение равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1 \text{ МПа}$ (-1 кгс/см^2)). Граничные условия для контура $BCDA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $BCDA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$.

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,862 \times 10^{-6} \text{ с}$; $E = 2,06 \times 10^5 \text{ МПа}$ ($2,1 \times 10^6 \text{ кгс/см}^2$); $\nu = 0,3$; $\rho = 0,784 \times 10^4 \text{ кг/м}^3$ ($0,8 \times 10^{-5} \text{ кгс с}^2/\text{см}^4$); $C_p = 5371 \text{ м/с}$; $C_s = 3177 \text{ м/с}$.

Исследуемая расчетная область имеет 2 004 002 узловые точки. Решается система уравнений из 8 016 008 неизвестных. Результаты расчетов получены в характерных точках B1–B10 (рис. 2).

В качестве примера на рис. 4 приводится изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y/|\sigma_0|$) (рис. 2) во времени n в точке B1 (1 – численное решение; 2 – аналитическое решение). В данном случае можно использовать условия на фронте плоской волны, которые изложены в [26]. На фронте плоской продольной волны имеются следующие аналитические зависимости для плоского напряженного состояния $\sigma_y = -|\sigma_0|$. Видно, что точное решение задачи соответствует воздействию σ_0 (рис. 4).

Моделирование изгибных волн в надземном нефтепроводе

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной сейсмической волны под углом 90° к горизонту на надземный нефтепровод (рис. 5).

Исследуемая задача для моделирования изгибных волн впервые решена В.К. Мусаевым с помощью разработанной методики, алгоритма и комплекса программ [10; 17–18].

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,098 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 0,98 \times 10^9 \text{ кг/м}^3$.

Сейсмическое воздействие, которое приложено на расстоянии трех средних диаметров от края трубы, моделируется в виде функции Хевисайда.

От точки J под углом 90° на расстоянии трех средних диаметров от края трубы приложено нормальное напряжение σ_x , которое при $0 \leq n \leq 26$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $n \geq 26$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = 0,098 \text{ МПа}$ ($\sigma_0 = 1 \text{ кгс/см}^2$)).

Граничные условия для контура $KLMI$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $KLMI$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 3000$.

Для трубы приняты следующие исходные данные: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 9,309 \times 10^{-7}$ с; $E = 2,06 \times 10^5$ МПа ($2,1 \times 10^6$ кгс/см²); $\nu = 0,3$; $\rho = 0,784 \times 10^4$ кг/м³ ($0,8 \times 10^{-5}$ кгс·с²/см⁴); $C_p = 5371$ м/с; $C_s = 3177$ м/с.

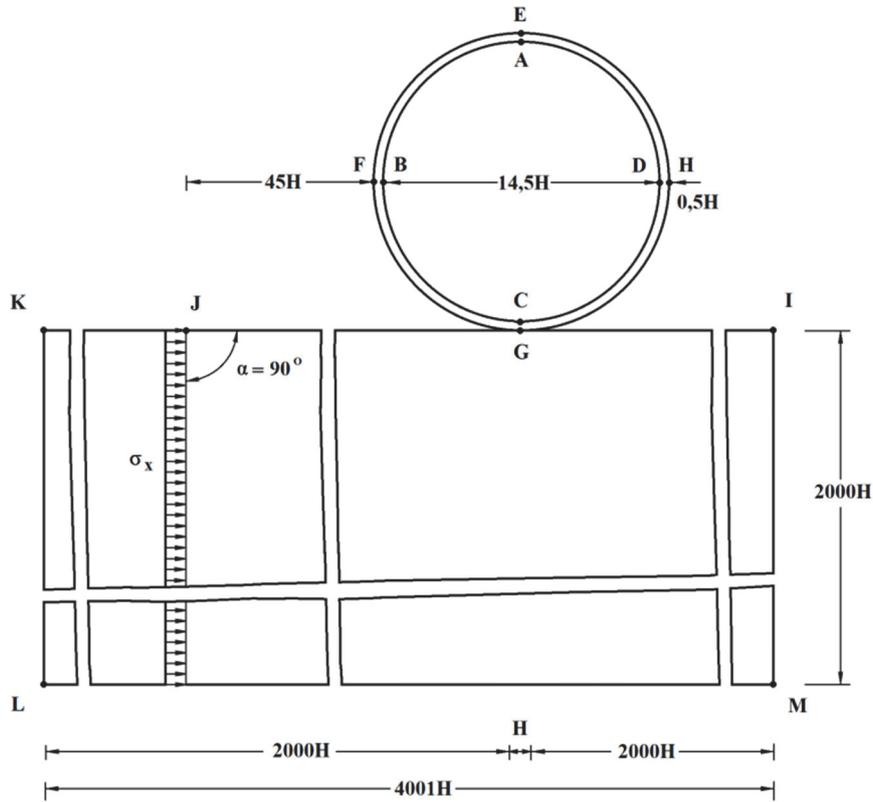


Рис. 5. Постановка задачи о воздействии плоской продольной сейсмической волны под углом 90° к горизонту на надземный нефтепровод
Figure 5. Statement of the problem of the impact of a plane longitudinal seismic wave at an angle of 90° to the horizon on an aboveground oil pipeline

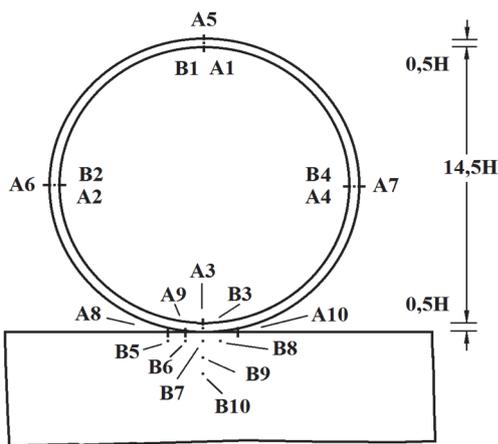


Рис. 6. Точки, в которых получены упругие напряжения во времени
Figure 6. Points at which elastic stresses are obtained in time

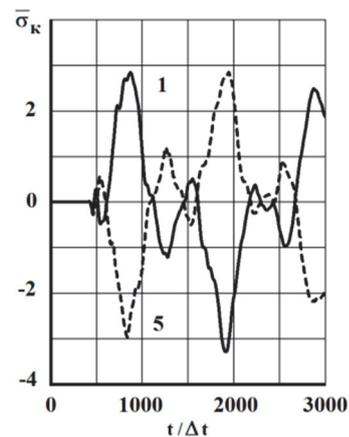


Рис. 7. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точках $A1$ (—) и $A5$ (---) (воздействие приложено под углом 90° к горизонту)
Figure 7. Change in elastic normal stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at points $A1$ (—) и $A5$ (---) (the impact is applied at an angle of 90° to the horizon)

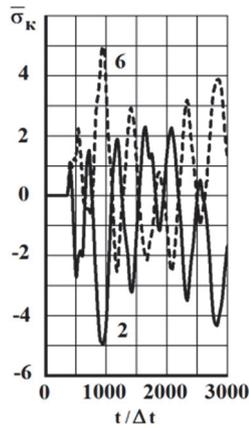


Рис. 8. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точках $A2$ (–) и $A6$ (– –) (воздействие приложено под углом 90° к горизонту)
Figure 8. Change in elastic normal stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at points $A2$ (–) и $A6$ (– –) (the impact is applied at an angle of 90° to the horizon)

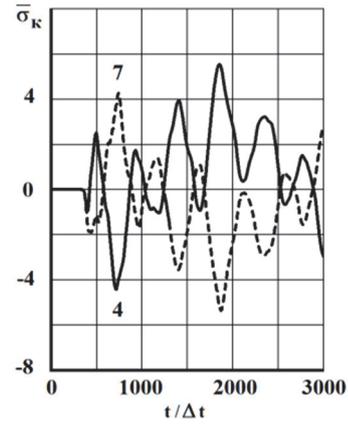


Рис. 9. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t/\Delta t$ в точках $A4$ (–) и $A7$ (– –) (воздействие приложено под углом 90° к горизонту)
Figure 9. Change in elastic normal stress $\bar{\sigma}_k$ in time $t/\Delta t$ at points $A4$ (–) и $A7$ (– –) (the impact is applied at an angle of 90° to the horizon)

Для основания приняты следующие исходные данные: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 2,788 \times 10^{-6}$ с; $E = 3,09 \times 10^4$ МПа ($3,15 \times 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,25 \times 10^4$ кг/м³ ($0,255 \times 10^{-5}$ кгс с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. При расчетах принимается минимальный шаг по времени $\Delta t = 9,309 \times 10^{-7}$ с.

Внутренний диаметр трубы равен $14,5H$. Средний диаметр трубы равен $15H$. Наружный диаметр трубы равен $15,5H$. Толщина трубы равна $0,5H$. Исследуемая расчетная область имеет 8 008 072 узловых точек. Решается система уравнений из 32 032 288 неизвестных.

Результаты расчетов получены в виде компонентов тензора напряжений во времени n в точках $B1$ – $B10$ (рис. 6) и в точках $A1$ – $A10$ (рис. 6), находящихся в надземном трубопроводе с основанием.

Изменение нестационарных изгибных волн для упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ приведены в следующих точках рассматриваемого объекта $A1$ (–) и $A5$ (– –) (рис. 7), $A2$ (–) и $A6$ (– –) (рис. 8), $A4$ (–) и $A7$ (– –) (рис. 9).

Решена задача о математическом моделировании нестационарных изгибных волн напряжений в надземном нефтепроводе при сейсмическом воздействии (воздействие приложено под углом 90° к горизонту). Исследуемая расчетная область имеет 8 008 072 узловых точек. Решается система уравнений из 32 032 288 неизвестных. В рассматриваемой задаче преобладают изгибные волны.

Заключение

На объекты жизнедеятельности человека оказывают влияние сейсмические нагрузки. Они создают серьезные проблемы, неся разрушительные последствия. В истории человечества первой теорией сейсмической безопасности была статическая. Потом появилась спектральная теория, взявшая за основу одно-массовый осциллятор и исследовавшая проблемы резонанса. Названные теории сейсмической безопасности были предложены в начале XX в., тем не менее здания и сооружения продолжали разрушаться при сейсмических воздействиях. Это связано было с несовершенством имеющихся теорий, не отражающих реальный физический процесс волнового воздействия на объекты жизнедеятельности человека. Тогда в распоряжении ученых был ограниченный инструментарий для исследования как в области математического, так и физического мониторинга. Хотя основные уравнения строительной механики (механики деформируемого твердого тела) получены в XIX в., решение их в нестационарной волновой постановке в начале XX в. не представлялось возможным. Поэтому не прекращались попытки решения частных уравнений и приращения некоторых знаний и закономерностей волнового напряженного состояния. Были получены знания в области продольных, поперечных, конических, релеевских и других волн. До появления электронных вычислительных машин были накоплены некоторые знания в области переходного периода. Например, выяснилось, что при отражении волны сжатия от свободной поверхности конструкции

волна сжатия становится растягивающей и тем самым создается ситуация откольных явлений. Появление в конце XX в. электронных вычислительных машин позволило решать многие задачи строительной механики (механики деформируемого твердого тела) на нестационарные волновые воздействия. Однако переход от дифференциальных уравнений с начальными и граничными условиями к системе с конечным числом неизвестных для волновых процессов оказался не простым. Это связано с многими проблемами, среди которых математическая модель физических процессов переходного процесса и вычислительные сложности. В настоящее время можно решать волновые задачи и тем самым создавать базу знаний как в области фундаментальной, так и прикладной наук, а производная от этих знаний обеспечивает развитие производственной науки, то есть нормативно-правовой базы.

Здания и сооружения разрушаются и для их защиты в эксплуатационный период, нужна информация о сейсмических воздействиях. В первую очередь – это знания в области продольных, поперечных и поверхностных волн. Они помогают определить и ранжировать сейсмические воздействия на здания и сооружения. В настоящее время эта информация называется балльностью землетрясений. В зависимости от величины балльности землетрясений применяются разные подходы и методы защиты строительных объектов от сейсмических воздействий. Основным в обеспечении безопасности строительных объектов, является оценка несущей способности. Ее можно осуществить при наличии информации о напряженном состоянии. Не зря в методе предельного состояния оценка несущей способности стоит на первом месте. Хотя определение напряжений всегда сложнее, чем перемещений и ее производных по времени. Волновая теория сейсмической безопасности находится на заключительном этапе своего формирования.

На основе метода конечных элементов разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных волновых воздействиях на уникальные объекты. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных волн, скорость поперечных волн и плотность.

Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных для решения задач при волновых воздействиях с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

Решена задача о воздействии плоской продольной волны в виде шести треугольников на упругую полуплоскость для оценки физической достоверности и математической точности. Решается система уравнений из 8 016 008 неизвестных. Результаты расчетов получены в характерных точках. Выполнено количественное сопоставление с результатами аналитического решения.

Решена задача о воздействии плоской продольной сейсмической волны под углом 90° к горизонту на надземный нефтепровод. Сейсмическое воздействие, которое приложено на расстоянии трех средних диаметров от края трубы, моделируется в виде функции Хевисайда. Результаты расчетов получены в характерных точках исследуемого объекта. Решается система уравнений из 32 032 288 неизвестных. В рассматриваемой задаче преобладают изгибные волны.

Список литературы

1. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // *Acoustical Physics*. 2011. Vol. 57. Pp. 420–426. <https://doi.org/10.1134/S1063771011030109>
2. *Nemchinov V.V.* Diffraction of a plane longitudinal wave by spherical cavity in elastic space // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. Vol. 9. No. 1. Pp. 85–89.
3. *Nemchinov V.V.* Numerical methods for solving flat dynamic elasticity problems // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. Vol. 9. No. 1. Pp. 90–97.
4. *Kuznetsov S.V., Terenteva E.O.* Wave fields and domination regions for the interior Lamb problem // *Mech. Solids*. 2015. Vol. 50. No. 5. Pp. 508–520. <https://doi.org/10.3103/S0025654415050039>
5. *Avershyeva A.V., Kuznetsov S.V.* Numerical simulation of Lamb wave propagation isotropic layer // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. Vol. 15. No. 2. Pp. 14–23. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-2-14-23>
6. *Israilov M.S.* Theory of sound barriers: diffraction of plane, cylindrical and spherical waves on a “hard – soft” half plane // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. No. 3. Pp. 412–419. <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654419020043>

7. *Фаворская А.В., Петров И.Б.* Расчет сейсмостойкости различных сооружений сеточно-характеристическим методом // *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*. 2019. Т. 11. № 3. С. 345–350. <http://dx.doi.org/10.17725/rensit.2019.11.345>
8. *Bratov V.A., Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V., Lin N.K., Morozov N.F.* Homogeneous horizontal and vertical seismic barriers: mathematical foundations and dimensional analysis // *Materials Physics and Mechanics*. 2020. Vol. 44. No. 1. Pp. 61–65. http://dx.doi.org/10.18720/MPM.4412020_7
9. *Israilov M.S.* Diffraction and vibration attenuation by obstacles in elastic media // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2021. Vol. 76. No. 1. Pp. 1–6. <https://doi.org/10.3103/S0027133021010039>
10. *Musayev V.K.* Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2015. Vol. 11. No. 1. Pp. 135–146.
11. *Саликов Л.М., Мусаев А.В., Идельсон Е.В., Самойлов С.Н., Блинников В.В.* Оценка физической достоверности моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений в виде импульсного воздействия (функция Хевисайда) в полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Проблемы управления безопасностью сложных систем: материалы XXIV Международной конференции*. М.: РГГУ, 2016. С. 356–359.
12. *Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В.* Моделирование упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // *Проблемы безопасности российского общества*. 2017. № 1. С. 36–40.
13. *Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В.* Моделирование с помощью численного метода Мусаева В.К. нестационарных упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая часть – линейная) в сплошной деформируемой среде // *Проблемы безопасности российского общества*. 2017. № 1. С. 63–68.
14. *Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Дикова Е.В., Крылов А.И.* Моделирование достоверности и точности импульсного воздействия в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием*. М.: РУДН, 2017. С. 339–341.
15. *Федоров А.Л., Шиянов С.М., Саликов Л.М., Блинников В.В.* Моделирование плоских волн при распространении импульса (восходящая часть – линейная, нисходящая часть – четверть круга) в упругой полуплоскости с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // *Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием*. М.: РУДН, 2017. С. 353–355.
16. *Стародубцев В.В., Крылов А.И., Зимин А.М., Дикова Е.В., Самойлов С.Н.* Верификация (оценка достоверности) комплекса программ Мусаева В.К. при распространении импульсного воздействия в упругой полуплоскости // *Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика: материалы III Международной научно-практической конференции*. М.: Институт системных технологий, 2019. С. 344–348.
17. *Мусаев В.К.* Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений в консоли с основанием (полуплоскость) при фундаментальном сейсмическом воздействии // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 6. С. 477–482. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482>
18. *Мусаев В.К.* Математическое моделирование волн напряжений при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде треугольного импульса: задача Лэмба // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 2. С. 112–120. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-112-120>
19. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. М.: Иностранная литература, 1955. 192 с.
20. *Davies R.M.* Stress waves in solids // *Br. J. Appl. Phys.* 1956. Vol. 7. No. 6. Pp. 203–209. <http://dx.doi.org/10.1088/0508-3443/7/6/302>
21. *Eringen A.C.* *Mechanics of continua*. New York: John Wiley & Sons, 1967. 502 p.
22. *Richtmyer R.D., Morton K.W.* Difference methods for initial-value problems // *Mathematics of Computation*. 1968;22(102):465–466. <http://dx.doi.org/10.2307/2004698>
23. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
24. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с.
25. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
26. *Тимошенко С.П., Гудьер Д.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
27. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 308 с.

28. Segerlind L.J. Applied finite element analysis. New York: John Wiley, 1976. 401 p.
29. Bathe K.-J., Wilson E.L. Numerical methods in finite element analysis. N. J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976. 528 p. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(80\)90053-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(80)90053-1)
30. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 320 с.
31. Hahn H.G. Elastizitätstheorie. Stuttgart: B. G. Teubner, 1985. 109 p.
32. O'Rourke M.J., Liu X. Response of buried pipelines subject to earthquake effects. Buffalo: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER), 1999. 250 p.
33. Prasad B.B. Fundamentals of soil dynamics and earthquake engineering. Delhi: PHI Learning, 2013. 556 p.

References

1. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers. *Acoustical Physics*. 2011;57:420–426. <https://doi.org/10.1134/S1063771011030109>
2. Nemchinov V.V. Diffraction of a plane longitudinal wave by spherical cavity in elastic space. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013;9(1):85–89.
3. Nemchinov V.V. Numerical methods for solving flat dynamic elasticity problems. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013;9(1):90–97.
4. Kuznetsov S.V., Terenteva E.O. Wave fields and domination regions for the interior Lamb problem. *Mech. Solids*. 2015;50(5):508–520. <https://doi.org/10.3103/S0025654415050039>
5. Avershyeva A.V., Kuznetsov S.V. Numerical simulation of Lamb wave propagation isotropic layer. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019;15(2):14–23. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-2-14-23>
6. Israilov M.S. Theory of sound barriers: diffraction of plane, cylindrical and spherical waves on a “hard – soft” half plane. *Mechanics of Solids*. 2019;54(3):412–419. <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654419020043>
7. Favorskaya A.V., Petrov I.B. Calculation the earthquake stability of various structures using the grid-characteristic method. *Radioelectronics. Nanosystems. Information Technologies*. 2019;11(3):345–350. (In Russ.) <https://doi.org/10.17725/rensit.2019.11.345>
8. Bratov V.A., Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V., Lin N.K., Morozov N.F. Homogeneous horizontal and vertical seismic barriers: mathematical foundations and dimensional analysis. *Materials Physics and Mechanics*. 2020;44(1):61–65. http://dx.doi.org/10.18720/MPM.4412020_7
9. Israilov M.S. Diffraction and vibration attenuation by obstacles in elastic media. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2021;76(1):1–6. <https://doi.org/10.3103/S0027133021010039>
10. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2015;11(1):135–146.
11. Salikov L.M., Musaev A.V., Idelson E.V., Samojlov S.N., Blinnikov V.V. Evaluation of the physical reliability of modeling of plane unsteady elastic stress waves in the form of a pulse action (Heaviside function) in a half-plane using a numerical method, algorithm and software package Musayev V.K. *Security Management Problems of Complex Systems: Materials of the 24th International Scientific and Practical Conference*. Moscow: RGGU Publ.; 2016. p. 356–359. (In Russ.)
12. Starodubcev V.V., Akatev S.V., Musaev A.V., Shiyanov S.M., Kurancov O.V. Modeling of elastic waves in the form of a pulsed action (the ascending part is a quarter of a circle, the descending part is a quarter of a circle) in a half-plane using the numerical method of Musayev V.K. *Problemy Bezopasnosti Rossijskogo Obshchestva*. 2017;(1):36–40. (In Russ.)
13. Starodubcev V.V., Akatev S.V., Musaev A.V., Shiyanov S.M., Kurancov O.V. Simulation using the numerical method of Musaev V. K. of non-stationary elastic waves in the form of a pulsed action (the ascending part is a quarter of a circle, the middle part is horizontal, the descending part is linear) in a continuous deformable medium. *Problemy Bezopasnosti Rossijskogo Obshchestva*. 2017;(1):63–68. (In Russ.)
14. Starodubcev V.V., Musaev A.V., Dikova E.V., Krylov A.I. Modeling the reliability and accuracy of pulse effects in the elastic half-plane using a numerical method, algorithm and program complex Musayev V.K. *Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems: Materials of the All-Russian Conference with International Participation*. Moscow: RUDN University; 2017. p. 339–341. (In Russ.)
15. Fedorov A.L., Shiyanov S.M., Salikov L.M., Blinnikov V.V. Modeling of plane waves during the propagation of a pulse (the ascending part is linear, the descending part is a quarter of a circle) in an elastic half-plane using a numerical method, algorithm and software package Musayev V.K. *Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems: Materials of the All-Russian Conference with International Participation*. Moscow: RUDN University; 2017. p. 353–355. (In Russ.)

16. Starodubcev V.V., Krylov A.I., Zimin A.M., Dikova E.V., Samojlov S.N. Verification (assessment of reliability) of complex programs Musayev V.K. in solving the problem of propagation of pulsed exposure in an elastic half-plane. *Modern Trends in the Development of Science and Education: Theory and Practice: Materials of the 3rd International Scientific and Practical Conference, Moscow, June 20, 2019*. Moscow; 2019. p. 344–348. (In Russ.)
17. Musayev V.K. Mathematical modeling of unsteady elastic stress waves in a console with a base (half-plane) under fundamental seismic action. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(6):477–482. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482>
18. Musayev V.K. Mathematical modeling of stress waves under concentrated vertical action in the form of a triangular pulse: Lamb's problem. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(2):112–120. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-112-120>
19. Kolskij G. *Stress waves in solids*. Moscow: Inostrannaya Literatura Publ.; 1955. (In Russ.)
20. Davies R.M. Stress waves in solids. *Br. J. Appl. Phys.* 1956;7(6):203–209. <http://dx.doi.org/10.1088/0508-3443/7/6/302>
21. Eringen A.C. *Mechanics of continua*. New York: John Wiley & Sons; 1967.
22. Richtmyer R.D., Morton K.W. Difference methods for initial-value problems. *Mathematics of Computation*. 1968;22(102):465–466. <http://dx.doi.org/10.2307/2004698>
23. Zenkevich O. *Finite element method in engineering*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
24. Potter D. *Computational methods in physics*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
25. Novackij V. *Theory of elasticity*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
26. Timoshenko S.P., Guder D. *Theory of elasticity*. Moscow: Nauka Publ.; 1975. (In Russ.)
27. Guz A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. *Diffraction of elastic waves*. Kiev: Naukova Dumka Publ.; 1978. (In Russ.)
28. Segerlind L.J. *Applied finite element analysis*. New York: John Wiley; 1976. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(77\)90080-3](https://doi.org/10.1016/0898-1221(77)90080-3)
29. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. N. J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs; 1976. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(80\)90053-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(80)90053-1)
30. Zenkevich O., Morgan K. *Finite elements and approximation*. Moscow: Mir Publ.; 1986. (In Russ.)
31. Hahn H.G. *Elastizitatstheorie*. Stuttgart: B. G. Teubner; 1985.
32. O'Rourke M.J., Liu X. *Response of buried pipelines subject to earthquake effects*. Buffalo: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER); 1999.
33. Prasad B.B. *Fundamentals of soil dynamics and earthquake engineering*. Delhi: PHI Learning; 2013.



ОПТИМИЗАЦИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК OPTIMIZATION OF REINFORCED CONCRETE SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-651-663
УДК 624.04+624.15+621.039.58+699.841

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Оптимизации проектных решений защитных конструкций сооружений атомных станций

А.Е. Саргсян

АО «Атомэнергопроект», Москва, Российская Федерация
✉ akop_sargsyan@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 23 сентября 2021 г.
Доработана: 18 ноября 2021 г.
Принята к публикации: 21 ноября 2021 г.

Для цитирования

Саргсян А.Е. Оптимизации проектных решений защитных конструкций сооружений атомных станций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 651–663. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-651-663>

Аннотация. Изложены концепции для оптимизации конструктивных решений защитных конструкций атомных станций. Задача таких оптимизаций для обеспечения ядерной и радиационной безопасности АС в различных режимах эксплуатации, в том числе и при экстремальных воздействиях, является актуальной в настоящее время. Представлены современные отечественные и международные достижения по рассматриваемой тематике, а также современные требования, методы по расчету и проектированию сооружений атомных станций, позволяющие обеспечить их безопасную эксплуатацию при соударении с летящими предметами. Полученные результаты подтверждают широкие возможности совершенствования конструктивных решений защитных оболочек реакторных отделений атомных станций при реализации инновационных материалов, позволяющих существенно экономить материальные ресурсы при одновременном повышении надежности и безопасности эксплуатации сооружений АС.

Ключевые слова: защитные конструкции, атомные станции, реакторное отделение, экстремальные воздействия, локальные ударные нагрузки, высокопрочный порошокбетон, сталефибробетон, прочность конструктивных элементов, безопасность

Optimization of design solutions of protective structures of erections of nuclear power stations

Akop E. Sargsyan

JSC "Atomenergoproekt," Moscow, Russian Federation
✉ akop_sargsyan@mail.ru

Article history

Received: September 23, 2021
Revised: November 18, 2021
Accepted: November 21, 2021

Abstract. The ideas of optimization of constructive solutions of protective erections of nuclear power stations are presented. A problem of such optimization for the securing of nuclear and radiation safety for different regime of nuclear power stations exploitation, including extreme action, is very topical at present time.

Саргсян Акоп Егишевич, доктор технических наук, профессор, академик МАИ при ООН, главный технический эксперт, АО «Атомэнергопроект», Российская Федерация, 105005, Москва, ул. Бакунинская, д. 7, стр. 1; ORCID: 0000-0002-4158-452X, eLIBRARY AuthorID: 731808; akop_sargsyan@mail.ru
Akop E. Sargsyan, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the International Academy of Informatization of the United Nations, chief technical expert, JSC "Atomenergoproekt", 7 Bakuninskaya St, bldg 1, Moscow, 105005, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-4158-452X, eLIBRARY AuthorID: 731808; akop_sargsyan@mail.ru

© Саргсян А.Е., 2021



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation

Sargsyan A.E. Optimization of design solutions of protective structures of erections of nuclear power stations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):651–663. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-651-663>

Modern home and international achievements on the considered subjects are demonstrated and modern demands, analysis methods, and problems of design of erections of nuclear power stations that give an opportunity to assure their safety exploitation under collision of flying objects are given as well. The results confirm wide opportunities of improvement of the constructive solutions of protective shells of reactor sections of nuclear power stations with the application of innovative materials that give the prospects to economize the material resources considerably and to raise the reliability and safety of exploitation of erections of nuclear power stations simultaneously.

Keywords: protective structures, nuclear power station, reactor section, extreme actions, local impact load, powder concrete of high-strength, steel-fiber concrete, strength of constructive element, safety

Введение

Объекты ядерной энергетики и прежде всего атомные станции (АС) относятся к наиболее сложным и потенциально опасным инженерным сооружениям. Поэтому задача по разработке оптимизированных проектных решений для обеспечения их ядерной и радиационной безопасности, в том числе при экстремальных воздействиях, является чрезвычайно актуальной.

Особое место среди сооружений, подверженных воздействию интенсивных динамических нагрузок: от осколков технологического оборудования, при аварийных режимах; воздействий предметов, образующихся при природных явлениях, таких как ураган, смерч и т. д.; случайного удара падающих предметов, в частности летательных аппаратов и их частей, занимают сооружения энергетического назначения, к которым предъявляются особенно высокие требования в отношении надежности и безопасности при аварийных режимах и стихийных бедствиях.

Системно изложены современные отечественные и международные достижения по рассматриваемой тематике, а также современные требования, методы по расчету и проектированию сооружений атомных станций, позволяющие обеспечить их безопасную эксплуатацию при соударении с летящими предметами.

В общем объеме задач современного строительства важное место отводится разработке методов расчета сооружений при динамических воздействиях.

В соответствии с рекомендациями международного агентства по атомной энергетике (МАГАТЭ)¹ установлены жесткие требования относительно вероятности тяжелого повреждения активной зоны ядерного реактора, которая не должна превышать 1×10^{-5} на реактор в год. Вероятность выхода радиоактивных веществ за пределы герметичной оболочки не должна превышать 1×10^{-7} 1/год. Радиационное воздействие АС на население и окружающую среду не должно превышать 1 % дозы, получаемой от источников естественной радиации.

Воздействия от падения самолета определяются из числа возможных наиболее неблагоприятных событий редкой повторяемости 1×10^{-7} 1/год².

Расчетные параметры экстремальных нагрузок и воздействий природного происхождения, то есть температура, снег, ураган, смерч определяются повторяемостью один раз за 10 000 лет³.

Оценка локальной прочности наружной железобетонной защитной оболочки из бетона различных типов при падении самолета

В настоящее время в реакторных отделениях атомных станций реализуются двойные защитные оболочки. При этом функционально определяющим воздействием для установления технических параметров наружной защитной оболочки современных сооружений атомных станций являются нагрузки от падающего самолета.

¹ Руководство по безопасности № 50-SG-D5 (Rev. 1). Учет внешних событий, вызванных деятельностью человека, при проектировании атомных электростанций. Вена: МАГАТЭ, 1997; Руководство по безопасности № 50-SG-S11B. Учет тропических циклонов в основах проекта атомных электростанций. Вена: МАГАТЭ, 1986; Руководство по безопасности № 50-SG-S11A. Учет экстремальных метеорологических явлений при выборе площадок АЭС (без учета тропических циклонов). Вена: МАГАТЭ, 1983.

² ПИН АЭ-5.6. Нормы строительного проектирования АС с реакторами различного типа. М., 1999.

³ НП-064-05. Учет внешних воздействий природного и техногенного происхождения на объекты использования атомной энергии. М.: Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору, 2006; ПНАЭ Г-10-007-89. Нормы проектирования железобетонных конструкций, локализирующих систем безопасности атомных станций. М., 1991.

По экспериментально обоснованной методике [1] выполняется оценка прочности купола защитной оболочки, изготовленной из бетона марки В30, высокопрочного порошкового бетона и сталефибробетона, при падении военного самолета типа «Фантом», рекомендованного МАГАТЭ⁴.

Площадь приложения нагрузки при наружной поверхности оболочки равна 14 м².

Максимальное значение силы соударения равно $P_{\max} = 11 \times 10^4$ кН.

Расчетные прочностные характеристики высокопрочного порошкового бетона и сталефибробетона, полученные по результатам испытаний [1], обобщены в табл. 1.

Таблица 1

Расчетные характеристики различных типов бетона

Расчетные показатели	Материал		
	Бетон обычный марки В30	Высокопрочный порошковый бетон	Сталефибробетон
Кубиковая прочность, МПа	–	139,0	157,4
Призменная прочность на сжатие, МПа	17,0	130,6	149,7
Прочность на растяжение при изгибе, МПа	1,15	11,97	20,80
Прочность на осевое растяжение, МПа	–	4,97	7,00
Начальный модуль деформации при сжатии, МПа	32 500	44 700	45 700
Среднее значение предельной деформации при сжатии	200×10^{-5}	327×10^{-5}	384×10^{-5}

Table 1

Design characteristics of various types of concrete

Design values	Material		
	Standard concrete of grade В30	High-strength powder concrete	Steel fibre reinforced concrete
Cube strength, MPa	–	139.0	157.4
Prism strength, MPa	17.0	130.6	149.7
Tensile strength in bending, MPa	1.15	11.97	20.80
Axial tension strength, MPa	–	4.97	7.00
Initial modulus of deformation, MPa	32 500	44 700	45 700
Average value of ultimate compression strain	200×10^{-5}	327×10^{-5}	384×10^{-5}

Оценка прочности защитной оболочки из обычного бетона

Исходные данные:

– начальный модуль деформации бетона марки В30 $E_b = 32\,500$ МПа;

– расчетные сопротивления бетона марки В30: $R_b = 17$ МПа; $R_{bt} = 1,15$ МПа;

– модуль упругости арматуры $E_s = 2 \times 10^5$ МПа;

– $n = \frac{E_s}{E_b} = 6,15$;

– расчетные значения сопротивления арматуры класса А500: $R_s = 435$ МПа; $R_{sw} = 300$ МПа; $R_{sc} = 400$ МПа;

– радиус кривизны оболочки $R = 26$ м;

– толщина оболочки: $h = 0,6$ м;

⁴ НП-064-05. Учет внешних воздействий природного и техногенного происхождения на объекты использования атомной энергии. М.: Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору, 2005.

– толщина защитного слоя $a = a' = 0,05$ м;

– коэффициент армирования $\mu_s = \mu_{s'} = \frac{5 \frac{\pi d_s^2}{4}}{A} = 5,6 \times 10^{-3}$;

– площадь поперечного сечения конструкции единичной ширины $A = bh_0 = 1 \text{ м} \times 0,55 \text{ м} = 0,55 \text{ м}^2$;

– номинальный диаметр стержней продольной и поперечной арматуры соответственно: $d_s = 28$ мм;

$d_{sw} = 25$ мм;

– $u_{x1} = 0,4$ м и $u_{x2} = 0,4$ м – шаг хомутов по меридиональным и по кольцевым направлениям;

– $R_{sw} = 300$ МПа – расчетное сопротивление поперечной арматуры; d_x – диаметр сечения поперечной арматуры;

– $A_{sw} = \pi d_{sw}^2 / 4 = 490 \text{ мм}^2$ – площадь сечения поперечной арматуры.

Далее последовательно определим:

$$\sigma^{(1)} = \frac{0,1\sigma_3 + \sigma_3}{2} = -1,1R_b = -18,7 \text{ МПа};$$

$$\tau^{(1)} = \frac{0,1\sigma_3 - \sigma_3}{2} = 0,9R_b = 15,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_b^{(2)} = \tau = \sqrt{R_b R_{bt}} = 4,42 \text{ МПа};$$

$$\sigma_c^{(2)} = R_{bt} = 1,15 \text{ МПа}; \quad \tau_c^{(2)} = 0; \quad \sigma_c^{(2)} = 0,8625 \text{ МПа}; \quad \tau^{(2)} = 3,315 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{s'} = nR_b = 104,55 \text{ МПа};$$

$$A_s = A_{s'} = 5 \frac{\pi d_s^2}{4} = 0,00308 \text{ м}^2;$$

$$M = \frac{1}{2} R_b b h_0 \left(h_0 - \frac{1}{3} \bar{x}_0 \right) + n R_b (h - a') A_s = \frac{1}{2} \times 17\,000 \times 1 \times 0,55 \left(0,55 - \frac{0,149}{3} \right) + 6,15 \times 17\,000 \times 0,55 \times 0,00308 = 2516 \text{ кН} \times \text{м};$$

$$L_1 = \frac{M}{0,8 R_b b h_0^2} - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} = \frac{2516}{0,8 \times 17\,000 \times 1 \times 0,55^2} - \frac{104\,550}{17\,000} \times 0,00513 = 0,58;$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{P_{1\max}}{8h_0} \sqrt{3(1-\nu^2)} = \frac{11 \times 10^4}{8 \times 0,55} \sqrt{3(1-0,3^2)} = 41\,307 \text{ кПа};$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_0}{h_0} = & - \left(n\mu_s - \frac{\sigma_{\phi\phi}}{R_b} \mu_s \right) + \sqrt{\left(n\mu_s - \frac{\sigma_{\phi\phi}}{R_b} \mu_s \right)^2 + 2n\mu_s} = - \left(6,15 \times 0,00513 - \frac{41\,307}{17\,000} \times 0,00513 \right) + \\ & + \sqrt{\left(6,15 \times 0,00513 - \frac{41\,307}{17\,000} \times 0,00513 \right)^2 + 2 \times 6,15 \times 0,00513} = 0,271; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{x_0}{h_0} = \frac{0,5n\mu_s + L_1^2 - \left(\frac{\sigma_{\text{фф}}}{R_b} \mu_s - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} \right)}{0,5n\mu_a + L_1 - \left(\frac{\sigma_{\text{фф}}}{R_b} \mu_s - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} \right)} = \frac{0,01722 + 0,3364 + 0,02083}{0,01722 + 0,58 + 0,02083} = 0,606;$$

$$\frac{x}{h_0} = 2L_1 - \frac{x_0}{h_0} = 1,16 - 0,606 = 0,554; \quad (2)$$

$$\frac{x_1}{h_0} = \frac{0,9\mu_s R_s - n\mu_{s'} R_b - \frac{3}{4} \frac{x}{h_0} (\sqrt{R_b R_{bt}} \operatorname{tg} \alpha_2 - R_{bt})}{1,1R_b - \frac{3}{4} (\sqrt{R_b R_{bt}} \operatorname{tg} \alpha_2 - R_{bt})} = \frac{2192,4 - 585,48 - 2704,2}{18700 - 4881,23} = -0,0794 < 0 = 0.$$

Установим несущую способность защитной оболочки:

$$\Theta_0 = \arcsin \left(\frac{d}{2R + h} \right) = \arcsin \left(\frac{4,223}{2 \times 26 + 0,6} \right) = 2^\circ 50';$$

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \arcsin \left[\sin(\alpha_1 + \Theta_0) \frac{R + \frac{h}{2}}{R + \frac{h}{2} - x_1} \right] = 90^\circ - 45^\circ - 42^\circ 10' = 2^\circ 50';$$

$$\Theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \arcsin \left[\sin(\alpha_2 + \Theta_1) \frac{R + \frac{h}{2} - x_1}{R + \frac{h}{2} - x} \right] = 90^\circ - 60^\circ - 25^\circ 50' = 4^\circ 10';$$

$$AB = \left(R + \frac{h}{2} - x_1 \right) \frac{\sin(\Theta_1 - \Theta_0)}{\sin(\alpha_1 - \Theta_0)} = (26,3 - 0) \frac{\sin(2^\circ 50' - 2^\circ 50')}{\sin(45^\circ - 2^\circ 50')} = 0,0 \text{ м};$$

$$BC = \left(R + \frac{h}{2} - x \right) \frac{\sin(\Theta_2 - \Theta_1)}{\sin(\alpha_2 - \Theta_1)} = (26,3 - 0,554 \times 0,55) \frac{\sin 1^\circ 20'}{\sin 57^\circ 10'} = 0,73 \text{ м};$$

$$S_1 = \pi AB (d + AB \sin \alpha_1) = 0;$$

$$S_2 = \pi BC (d + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + BC \operatorname{tg} \alpha_2) = 3,14 \times 0,73 (4,223 + 0 + 0,73 \times 1,732) = 12,578 \text{ м}^2;$$

$$N_x = \frac{1}{u_{x1} u_{x2}} \left\{ \pi (h_0 - x) \operatorname{tg} \alpha_2 [d + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + (h_0 - x) \operatorname{tg} \alpha_2] + \sum_{i=1}^2 S_i \sin \alpha_i \right\} =$$

$$= \frac{1}{0,4 \times 0,4} \left\{ 3,14 \times 0,2453 \times 1,732 [4,223 + 0 + 0,2453 \times 1,732] + 12,578 \times 0,866 \right\} = \frac{16,8}{0,16} = 105.$$

$$P_x = 0,8 N_x A_{sw} R_{sw} = 0,8 \times 105 \times 490 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^5 = 4116 \text{ кН}.$$

Модуль вектора внешней нагрузки $P_{\text{раз}}$, при которой конструкция по изложенной схеме полностью исчерпывает несущую способность, запишем в виде

$$P_{\text{раз}} = \sum_{i=1}^2 \left(\tau^{(i)} \cos \alpha_i + \sigma^{(i)} \sin \alpha_i \right) S_i + P_x = \left(3,315 \times 10^3 \times 0,5 + 0,8625 \times 10^3 \times 0,866 \right) 12,578 + 4116 = \\ = 30243 + 4116 = 34\,359 \text{ кН} < 110\,000 \text{ кН}.$$

Следовательно, в данном случае при падении самолета на защитную оболочку произойдет пробивание. Максимальное значение внешней силы в 3,2 раза превышает несущую способность защитной оболочки.

Выполним проверку прочности защитной оболочки при $h = 1,2$ м, то есть увеличив толщину в 2 раза. Толщина наружной защитной оболочки $h = 1,2$ м соответствует проекту АС с ВВЭР-1200.

Определим те расчетные параметры, которые претерпевают изменения:

$$M = \frac{1}{2} R_b b h_0 \left(h_0 - \frac{1}{3} \bar{x}_0 \right) + n R_b (h - a') A_s' = \frac{1}{2} \times 17\,000 \times 1 \times 1,15 \left(1,15 - \frac{0,261}{3} \right) + \\ + 6,15 \times 17\,000 \times 1,15 \times 0,00308 = 10\,761 \text{ кН} \times \text{м};$$

$$L_1 = \frac{M}{0,8 R_b b h_0^2} - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} = \frac{10\,761}{0,8 \times 17\,000 \times 1 \times 1,15^2} - \frac{104\,550}{17\,000} \times 0,00513 = 0,567;$$

$$\sigma_{\text{фп}} = \frac{P_{1\text{max}}}{8h_0} \sqrt{3(1-\nu^2)} = \frac{11 \times 10^4}{8 \times 1,15} \sqrt{3(1-0,3^2)} = 19\,756 \text{ кПа};$$

$$\frac{\bar{x}_0}{h_0} = - \left(n \mu_s - \frac{\sigma_{\text{фп}}}{R_b} \mu_s \right) + \sqrt{\left(n \mu_s - \frac{\sigma_{\text{фп}}}{R_b} \mu_s \right)^2 + 2n \mu_s} = - \left(6,15 \times 0,00513 - \frac{19\,756}{17\,000} \times 0,00513 \right) + \\ + \sqrt{\left(6,15 \times 0,00513 - \frac{19\,756}{17\,000} \times 0,00513 \right)^2 + 2 \times 6,15 \times 0,00513} = 0,227;$$

$$\frac{x_0}{h_0} = \frac{0,5n\mu_s + L_1^2 - \left(\frac{\sigma_{\text{фп}}}{R_b} \mu_s - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} \right)}{0,5n\mu_s + L_1 - \left(\frac{\sigma_{\text{фп}}}{R_b} \mu_s - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} \right)} = \frac{0,01722 + 0,32 + 0,02793}{0,01722 + 0,567 + 0,02793} = 0,476;$$

$$\frac{x}{h_0} = 2L_1 - \frac{x_0}{h_0} = 1,134 - 0,476 = 0,658;$$

$$\frac{x_1}{h_0} = \frac{0,9\mu_s R_s - n\mu_{s'} R_b - \frac{3}{4} \frac{x}{h_0} \left(\sqrt{R_b R_{bt}} \operatorname{tg} \alpha_2 - R_{bt} \right)}{1,1R_b - \frac{3}{4} \left(\sqrt{R_b R_{bt}} \operatorname{tg} \alpha_2 - R_{bt} \right)} = \frac{2192,4 - 585,48 - 3212}{18700 - 4881,23} = -0,116 < 0 = 0.$$

Вычислим несущую способность защитной оболочки:

$$\Theta_0 = \arcsin\left(\frac{d}{2R+h}\right) = \arcsin\left(\frac{4,223}{2 \times 26 + 1,2}\right) = 4^\circ 33';$$

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \arccos\left[\sin(\alpha_1 + \Theta_0) \frac{R + \frac{h}{2}}{R + \frac{h}{2} - x_1}\right] = 90^\circ - 45^\circ - 40^\circ 27' = 4^\circ 33';$$

$$\Theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \arccos\left[\sin(\alpha_2 + \Theta_1) \frac{R + \frac{h}{2} - x_1}{R + \frac{h}{2} - x}\right] = 90^\circ - 60^\circ - 21^\circ 28' = 8^\circ 32';$$

$$AB = \left(R + \frac{h}{2} - x_1\right) \frac{\sin(\Theta_1 - \Theta_0)}{\sin(\alpha_1 - \Theta_0)} = (26,3 - 0) \frac{\sin(2^\circ 50' - 2^\circ 50')}{\sin(45^\circ - 2^\circ 50')} = 0,0 \text{ м};$$

$$BC = \left(R + \frac{h}{2} - x\right) \frac{\sin(\Theta_2 - \Theta_1)}{\sin(\alpha_2 - \Theta_1)} = (26,6 - 0,658 \times 1,15) \frac{\sin 3^\circ 59'}{\sin 55^\circ 27'} = 2,19 \text{ м};$$

$$S_1 = \pi AB (d + AB \sin \alpha_1) = 0;$$

$$S_2 = \pi BC (d + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + BC \operatorname{tg} \alpha_2) = 3,14 \times 2,19 (4,223 + 0 + 2,19 \times 1,732) = 55,12 \text{ м}^2;$$

$$N_x = \frac{1}{u_{x1} u_{x2}} \left\{ \pi (h_0 - x) \operatorname{tg} \alpha_2 [d + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + (h_0 - x) \operatorname{tg} \alpha_2] + \sum_{i=1}^2 S_i \sin \alpha_i \right\} =$$

$$= \frac{1}{0,4 \times 0,4} \left\{ 3,14 \times 0,3933 \times 1,732 [4,223 + 0 + 0,3933 \times 1,732] + 55,12 \times 0,866 \right\} = \frac{58,22}{0,16} = 364.$$

$$P_{sw} = 0,8 N_x A_{sw} R_{sw} = 0,8 \times 364 \times 490 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^5 = 42 \ 806 \text{ кН}.$$

Модуль вектора внешней нагрузки $P_{\text{раз}}$, при которой конструкция по изложенной схеме полностью исчерпывает несущую способность:

$$P_{\text{раз}} = \sum_{i=1}^2 \left(\tau^{(i)} \cos \alpha_i + \sigma^{(i)} \sin \alpha_i \right) S_i + P_{sw} = \left(3,315 \times 10^3 \times 0,5 + 0,8625 \times 10^3 \times 0,866 \right) 55,12 + 42 \ 806 =$$

$$= 132 \ 532 + 42 \ 806 = 175 \ 338 \text{ кН} \gg 110 \ 000 \text{ кН}.$$

Следовательно, в данном случае при падении самолета прочность защитной оболочки на пробивание обеспечена. Несущая способность защитной оболочки в 1,59 раза превышает максимальное значение внешней силы соударения.

Оценка прочности защитной оболочки из высокопрочного порошкового бетона

Исходные данные [1]:

– начальный модуль деформации бетона $E_b = 44\,700$ МПа;

– расчетные сопротивления бетона марки В30: $R_b = 130$ МПа; $R_{bt} = 11,97$ МПа;

– модуль упругости арматуры $E_s = 2 \times 10^5$ МПа;

– $n = \frac{E_s}{E_b} = 4,47$;

– расчетные значения сопротивления арматуры класса А500: $R_s = 435$ МПа; $R_{sw} = 300$ МПа; $R_{sc} = 400$ МПа;

– радиус кривизны оболочки $R = 26$ м;

– толщина оболочки: $h = 0,6$ м;

– толщина защитного слоя $a = a' = 0,05$ м;

– коэффициент армирования $\mu_s = \mu_{s'} = \frac{5 \frac{\pi d_s^2}{4}}{A} = 5,6 \times 10^{-3}$;

– площадь поперечного сечения конструкции единичной ширины $A = bh_0 = 1 \text{ м} \times 0,55 \text{ м} = 0,55 \text{ м}^2$;

– номинальный диаметр стержней продольной и поперечной арматуры соответственно: $d_s = 28$ мм;

$d_{sw} = 25$ мм;

– $u_{x1} = 0,4$ м и $u_{x2} = 0,4$ м – шаг хомутов по меридиональным и по кольцевым направлениям;

– $R_{sw} = 300$ МПа – расчетное сопротивление поперечной арматуры; $d_x = 25$ мм – диаметр сечения

поперечной арматуры;

– $A_{sw} = \pi d_{sw}^2 / 4 = 490 \text{ мм}^2$ – площадь сечения поперечной арматуры.

$$\sigma^{(1)} = \frac{0,1\sigma_3 + \sigma_3}{2} = -1,1R_b = -143 \text{ МПа};$$

$$\tau^{(1)} = \frac{0,1\sigma_3 - \sigma_3}{2} = 0,9R_b = 117 \text{ МПа};$$

$$\tau_b^{(2)} = \tau = \sqrt{R_b R_{bt}} = 39,45 \text{ МПа};$$

$$\sigma_c^{(2)} = R_{bt} = 11,97 \text{ МПа}; \quad \tau_c^{(2)} = 0; \quad \sigma^{(2)} = 8,9775 \text{ МПа}; \quad \tau^{(2)} = 29,5875 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{s'} = nR_b = 583,78 \text{ МПа};$$

$$A_s = A_{s'} = 5 \frac{\pi d_s^2}{4} = 0,00308 \text{ м}^2;$$

$$M = \frac{1}{2} R_b b h_0 \left(h_0 - \frac{1}{3} \bar{x}_0 \right) + n R_b (h - a') A_{s'} = \frac{1}{2} \times 130\,600 \times 1 \times 0,55 \left(0,55 - \frac{0,1939 \times 0,55}{3} \right) + 4,47 \times 130\,600 \times 0,55 \times 0,00308 = 19\,465 \text{ кН} \times \text{м};$$

$$L_1 = \frac{M}{0,8 R_b b h_0^2} - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} = \frac{19\,465}{0,8 \times 130\,600 \times 1 \times 0,55^2} - \frac{583\,780}{130\,600} \times 0,00513 = 0,593;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P_{1\max}}{8h_0} \sqrt{3(1-\nu^2)} = \frac{11 \times 10^4}{8 \times 0,55} \sqrt{3(1-0,3^2)} = 41\,307 \text{ кПа};$$

$$\frac{\bar{x}_0}{h_0} = - \left(n\mu_s - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{R_b} \mu_s \right) + \sqrt{\left(n\mu_s - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{R_b} \mu_s \right)^2 + 2n\mu_s} = - \left(4,47 \times 0,00513 - \frac{41307}{130600} \times 0,00513 \right) +$$

$$+ \sqrt{\left(4,47 \times 0,00513 - \frac{41307}{130\,600} \times 0,00513 \right)^2 + 2 \times 4,47 \times 0,00513} = -0,0213 + 0,2152 = 0,1939;$$

$$\frac{x_0}{h_0} = \frac{0,5n\mu_s + L_1^2 - \left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{R_b} \mu_s - \frac{\sigma_{a'}}{R_b} \mu_{s'} \right)}{0,5n\mu_a + L_1 - \left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{R_b} \mu_s - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} \right)} = \frac{0,012516 + 0,3517 + 0,02337}{0,01722 + 0,593 + 0,02337} = 0,612;$$

$$\frac{x}{h_0} = 2L_1 - \frac{x_0}{h_0} = 1,186 - 0,612 = 0,574;$$

$$\frac{x_1}{h_0} = \frac{0,9\mu_s R_s - n\mu_{s'} R_b - \frac{3}{4} \frac{x}{h_0} \left(\sqrt{R_b R_{bt}} \operatorname{tg} \alpha_2 - R_{bt} \right)}{1,1R_b - \frac{3}{4} \left(\sqrt{R_b R_{bt}} \operatorname{tg} \alpha_2 - R_{bt} \right)} = \frac{2192,4 - 3254,16 - 24260}{143000 - 42265} = -0,25137 < 0 = 0.$$

Определим несущую способность защитной оболочки:

$$\Theta_0 = \arcsin \left(\frac{d}{2R+h} \right) = \arcsin \left(\frac{4,223}{2 \times 26 + 0,6} \right) = 2^\circ 50';$$

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \arcsin \left[\sin(\alpha_1 + \Theta_0) \frac{R + \frac{h}{2}}{R + \frac{h}{2} - x_1} \right] = 90^\circ - 45^\circ - 42^\circ 10' = 2^\circ 50';$$

$$\Theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \arcsin \left[\sin(\alpha_2 + \Theta_1) \frac{R + \frac{h}{2} - x_1}{R + \frac{h}{2} - x} \right] = 90^\circ - 60^\circ - 25^\circ 50' = 4^\circ 10';$$

$$AB = \left(R + \frac{h}{2} - x_1 \right) \frac{\sin(\Theta_1 - \Theta_0)}{\sin(\alpha_1 - \Theta_0)} = (26,3 - 0) \frac{\sin(2^\circ 50' - 2^\circ 50')}{\sin(45^\circ - 2^\circ 50')} = 0,0 \text{ м};$$

$$BC = \left(R + \frac{h}{2} - x \right) \frac{\sin(\Theta_2 - \Theta_1)}{\sin(\alpha_2 - \Theta_1)} = (26,3 - 0,574 \times 0,55) \frac{\sin 1^\circ 20'}{\sin 57^\circ 10'} = 0,718 \text{ м};$$

$$S_1 = \pi AB(d + AB \sin \alpha_1) = 0;$$

$$S_2 = \pi BC(d + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + BC \operatorname{tg} \alpha_2) = 3,14 \times 0,73(4,223 + 0 + 0,718 \times 1,732) = 12,5295 \text{ м}^2;$$

$$N_x = \frac{1}{u_{x1} u_{x2}} \left\{ \pi(h_0 - x) \operatorname{tg} \alpha_2 [d + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + (h_0 - x) \operatorname{tg} \alpha_2] + \sum_{i=1}^2 S_i \sin \alpha_i \right\} =$$

$$= \frac{1}{0,4 \times 0,4} \left\{ 3,14 \times 0,2453 \times 1,732 [4,223 + 0 + 0,2453 \times 1,732] + 12,578 \times 0,866 \right\} = \frac{16,8}{0,16} = 105.$$

$$P_x = 0,8 N_x A_{sw} R_{sw} = 0,8 \times 105 \times 490 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^5 = 12\,348 \text{ кН}.$$

Модуль вектора внешней нагрузки $P_{\text{раз}}$, при которой конструкция по изложенной схеме полностью исчерпывает несущую способность, определим по формуле

$$P_{\text{раз}} = \sum_{i=1}^2 (\tau^{(i)} \cos \alpha_i + \sigma^{(i)} \sin \alpha_i) S_i + P_x = (29,59 \times 10^3 \times 0,5 + 8,9775 \times 10^3 \times 0,866) 12,5295 +$$

$$+ 4116 = 282\,785 + 12\,348 = 295\,133 \text{ кН} \gg 110\,000 \text{ кН}.$$

Следовательно, в данном случае при падении самолета на защитную оболочку прочность конструкции на пробивание с большим запасом обеспечена: в 2,68 раза.

Оценка прочности защитной оболочки из сталефибробетона

Исходные данные [1; 2]:

– начальный модуль деформации бетона $E_b = 45\,700 \text{ МПа}$;

– расчетные сопротивления сталефибробетона: $R_b = 149,7 \text{ МПа}$; $R_{bt} = 20,80 \text{ МПа}$;

– модуль упругости арматуры $E_s = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$;

– $n = \frac{E_s}{E_b} = 4,376$;

– расчетные значения арматуры класса А500: $R_s = 435 \text{ МПа}$; $R_{sw} = 300 \text{ МПа}$; $R_{sc} = 400 \text{ МПа}$;

– радиус кривизны оболочки $R = 26 \text{ м}$;

– толщина оболочки: $h = 0,6 \text{ м}$;

– толщина защитного слоя $a = a' = 0,05 \text{ м}$;

– коэффициент армирования $\mu_s = \mu_{s'} = \frac{5 \pi d_s^2}{4A} = 5,6 \times 10^{-3}$;

– площадь поперечного сечения конструкции единичной ширины $A = bh_0 = 1 \text{ м} \times 0,55 \text{ м} = 0,55 \text{ м}^2$;

– номинальный диаметр стержней продольной и поперечной арматуры соответственно: $d_s = 28 \text{ мм}$;

$d_{sw} = 25 \text{ мм}$;

– $u_{x1} = 0,4 \text{ м}$ и $u_{x2} = 0,4 \text{ м}$ – шаг хомутов по меридиональным и по кольцевым направлениям;

– $R_{sw} = 300 \text{ МПа}$ – расчетное сопротивление поперечной арматуры; $d_x = 25 \text{ мм}$ – диаметр сечения поперечной арматуры;

– $A_{sw} = \pi d_{sw}^2 / 4 = 490 \text{ мм}^2$ – площадь сечения поперечной арматуры.

Далее последовательно определяется

$$\sigma^{(1)} = \frac{0,1\sigma_3 + \sigma_3}{2} = -1,1R_b = -164,67 \text{ МПа};$$

$$\tau^{(1)} = \frac{0,1\sigma_3 - \sigma_3}{2} = 0,9R_b = 134,73 \text{ МПа};$$

$$\tau_b^{(2)} = \tau = \sqrt{R_b R_{bt}} = 55,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_c^{(2)} = R_{bt} = 20,8 \text{ МПа}; \quad \tau_c^{(2)} = 0; \quad \sigma^{(2)} = 15,6 \text{ МПа}; \quad \tau^{(2)} = 41,85 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{s'} = nR_b = 655,09 \text{ МПа};$$

$$A_s = A_{s'} = 5 \frac{\pi d_s^2}{4} = 0,00308 \text{ м}^2;$$

$$\sigma_{\text{фф}} = \frac{P_{1\text{max}}}{8h_0} \sqrt{3(1-\nu^2)} = \frac{11 \times 10^4}{8 \times 0,55} \sqrt{3(1-0,3^2)} = 41\,307 \text{ кПа};$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_0}{h_0} = & - \left(n\mu_s - \frac{\sigma_{\text{фф}}}{R_b} \mu_s \right) + \sqrt{\left(n\mu_s - \frac{\sigma_{\text{фф}}}{R_b} \mu_s \right)^2 + 2n\mu_s} = - \left(4,376 \times 0,0056 - \frac{41\,307}{149\,700} \times 0,0056 \right) + \\ & + \sqrt{\left(4,376 \times 0,0056 - \frac{41\,307}{149\,700} \times 0,0056 \right)^2 + 2 \times 4,376 \times 0,0056} = -0,023 + 0,2226 = 0,1996; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{2} R_b b h_0 \left(h_0 - \frac{1}{3} \bar{x}_0 \right) + n R_b (h - a') A_{s'} = \frac{1}{2} \times 149\,700 \times 1 \times 0,55 \left(0,55 - \frac{0,1996 \times 0,55}{3} \right) + \\ & + 4,376 \times 149\,700 \times 0,55 \times 0,00308 = 22\,245 \text{ кН} \times \text{м}; \end{aligned}$$

$$L_1 = \frac{M}{0,8 R_b b h_0^2} - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} = \frac{22\,245}{0,8 \times 149\,700 \times 1 \times 0,55^2} - \frac{655\,090}{149\,700} \times 0,0056 = 0,59;$$

$$\frac{x_0}{h_0} = \frac{0,5n\mu_s + L_1^2 - \left(\frac{\sigma_{\text{фф}}}{R_b} \mu_s - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} \right)}{0,5n\mu_s + L_1 - \left(\frac{\sigma_{\text{фф}}}{R_b} \mu_s - \frac{\sigma_{s'}}{R_b} \mu_{s'} \right)} = \frac{0,0122528 + 0,34756 + 0,02296}{0,0122528 + 0,59 + 0,02296} = 0,612;$$

$$\frac{x}{h_0} = 2L_1 - \frac{x_0}{h_0} = 1,18 - 0,612 = 0,568;$$

$$\frac{x_1}{h_0} = \frac{0,9\mu_s R_s - n\mu_{s'} R_b - \frac{3}{4} \frac{x}{h_0} \left(\sqrt{R_b R_{bt}} \operatorname{tg} \alpha_2 - R_{bt} \right)}{1,1R_b - \frac{3}{4} \left(\sqrt{R_b R_{bt}} \operatorname{tg} \alpha_2 - R_{bt} \right)} = \frac{2192,4 - 3668,5 - 32311}{164\,670 - 43\,082} = -0,27788 < 0 = 0.$$

Установим несущую способность защитной оболочки:

$$\Theta_0 = \arcsin\left(\frac{d}{2R+h}\right) = \arcsin\left(\frac{4,223}{2 \times 26 + 0,6}\right) = 2^\circ 50';$$

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \arccos\left[\sin(\alpha_1 + \Theta_0) \frac{R + \frac{h}{2}}{R + \frac{h}{2} - x_1}\right] = 90^\circ - 45^\circ - 42^\circ 10' = 2^\circ 50';$$

$$\Theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \arccos\left[\sin(\alpha_2 + \Theta_1) \frac{R + \frac{h}{2} - x_1}{R + \frac{h}{2} - x}\right] = 90^\circ - 60^\circ - 25^\circ 50' = 4^\circ 10';$$

$$AB = \left(R + \frac{h}{2} - x_1\right) \frac{\sin(\Theta_1 - \Theta_0)}{\sin(\alpha_1 - \Theta_0)} = (26,3 - 0) \frac{\sin(2^\circ 50' - 2^\circ 50')}{\sin(45^\circ - 2^\circ 50')} = 0,0 \text{ м};$$

$$BC = \left(R + \frac{h}{2} - x\right) \frac{\sin(\Theta_2 - \Theta_1)}{\sin(\alpha_2 - \Theta_1)} = (26,3 - 0,568 \times 0,55) \frac{\sin 1^\circ 20'}{\sin 57^\circ 10'} = 0,7178 \text{ м};$$

$$S_1 = \pi AB(d + AB \sin \alpha_1) = 0;$$

$$S_2 = \pi BC(d + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + BC \operatorname{tg} \alpha_2) = 3,14 \times 0,7178(4,223 + 0 + 0,7178 \times 1,732) = 12,32 \text{ м}^2;$$

$$N_x = \frac{1}{u_{x1} u_{x2}} \left\{ \pi(h_0 - x) \operatorname{tg} \alpha_2 [d + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + (h_0 - x) \operatorname{tg} \alpha_2] + \sum_{i=1}^2 S_i \sin \alpha_i \right\} =$$

$$= \frac{1}{0,4 \times 0,4} \left\{ 3,14 \times 0,2376 \times 1,732 [4,223 + 0 + 0,2376 \times 1,732] + 12,32 \times 0,866 \right\} = \frac{16,658}{0,16} = 104.$$

$$P_x = 0,8 N_x A_{sw} R_{sw} = 0,8 \times 104 \times 490 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^5 = 12\,230 \text{ кН}.$$

Модуль вектора внешней нагрузки $P_{\text{раз}}$, при которой конструкция по изложенной схеме полностью исчерпывает несущую способность:

$$P_{\text{раз}} = \sum_{i=1}^2 (\tau^{(i)} \cos \alpha_i + \sigma^{(i)} \sin \alpha_i) S_i + P_x = (41,85 \times 10^3 \times 0,5 + 15,6 \times 10^3 \times 0,866) 12,32 +$$

$$+ 4116 = 424\,234 + 12\,230 = 436\,464 \text{ кН} \gg 110\,000 \text{ кН}.$$

Следовательно, в данном случае при падении самолета на защитную оболочку прочность конструкции на пробивание с большим запасом обеспечена: в 3,97 раза.

В табл. 2 обобщены результаты расчетов прочности защитной оболочки из различных материалов при падении самолета типа «Фантом».

Таблица 2

Обобщение результатов расчетов локальной прочности купольной части защитной оболочки из различных материалов при падении самолета типа «Фантом»

Толщина стенки оболочки, h , м	Материал	Максимальное значение силы соударения, 10^5 кН	Несущая способность, P_{1max} , 10^5 кН
0,6	Бетон марки В30	1,1	0,34359
1,2	Бетон марки В30	1,1	1,75338
0,6	Высокопрочный порошокбетон	1,1	2,951332
0,6	Сталефибробетон	1,1	4,36464

Table 2

Summary of the results of calculations of the local strength of the dome part of the protective shell made of various materials during the fall of a "Phantom" aircraft

Shell plate thickness, h , м	Material	Maximum value of projectile force, 10^5 KN	Capacity, P_{1max} , 10^5 KN
0.6	Concrete of grade B30	1.1	0.34359
1.2	Concrete of grade B30	1.1	1.75338
0.6	High-strength powder concrete	1.1	2.951332
0.6	Steel fibre reinforced concrete	1.1	4.36464

Представленные в табл. 2 результаты расчетов показывают, что прочность оболочки, изготовленной из бетона марки В30 с толщиной $h = 0,6$ м, является недостаточной. Во всех других рассматриваемых случаях условие прочности оболочки выполняется с большим запасом.

При этом, как показывают результаты расчетов, при идентичных исходных данных в случае замены обычного бетона класса В30 на высокопрочный порошокбетон прочность защитной оболочки возрастает в $\frac{2,951332}{0,34359} = 8,59$ раза.

Представленные в табл. 2 результаты расчетов подтверждают, что при идентичных исходных данных в случае замены обычного бетона класса В30 на сталефибробетон прочность защитной оболочки возрастает в $\frac{4,36464}{0,34359} = 12,7$ раза.

Заключение

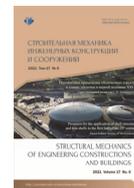
Представленные результаты расчетов подтверждают широкие возможности совершенствования конструктивных решений защитных оболочек путем реализации инновационных материалов, позволяющих существенно экономить материальные ресурсы при одновременном повышении надежности и безопасности сооружений в атомной энергетике.

Список литературы

1. Саргсян А.Е. Динамика и сейсмостойкость сооружений атомных станций. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. 550 с.
2. Саргсян А.Е. Оценка прочности защитных конструкций сооружений атомных станций при соударении с летящим телом. М.: Леопарт, 2021. 130 с.

References

1. Sargsyan A.E. *Dynamics and seismic resistance of nuclear power plant structures*. Sarov: RFNC-VNIIEF Publ.; 2013. (In Russ.)
2. Sargsyan A.E. *Assessment of the strength of protective structures of nuclear power plant structures in a collision with a flying body*. Moscow: Leopard Publ.; 2021. (In Russ.)



ДЕРЕВЯННЫЕ ОБОЛОЧЕЧНЫЕ СТРУКТУРЫ WOODEN SHELL STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-664-678
 УДК 624.04.012

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Экономическая целесообразность учета совместной работы несущих и ограждающих элементов в большепролетных деревянных пространственных конструкциях

К.П. Пятикрестовский¹ , Б.С. Соколов² 

¹Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций имени В.А. Кучеренко, Москва, Российская Федерация

²Научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический институт бетона и железобетона имени А.А. Гвоздева, Москва, Российская Федерация

✉ moo-shell@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 21 августа 2021 г.

Доработана: 14 ноября 2021 г.

Принята к публикации: 30 ноября 2021 г.

Для цитирования

Пятикрестовский К.П., Соколов Б.С. Экономическая целесообразность учета совместной работы несущих и ограждающих элементов в большепролетных деревянных пространственных конструкциях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 664–678. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-664-678>

Аннотация. Большепролетные деревянные пространственные конструкции в виде куполов, разрабатываемые в АО «НИЦ „Строительство“» под руководством А.А. Погорельцева, построены в большом количестве для покрытий различных зданий. Такие конструкции обладают высокими показателями эффективности и продолжают совершенствоваться. В 2020 г. разработано «Пособие по учету совместной работы каркаса и ограждения в деревянных пространственных конструкциях зданий и сооружений» как дополнение к п. 9 СП 64.13330.2017, содержащее примеры расчета прочности и оптимизацию размеров сечения ребер, а также пример определения длительной прочности обшивки оболочки. Указанные конструкции, по сути, уникальные, проектируются пока в запас прочности без учета участия ограждающей части (панелей, настилов и др.) в восприятии нагрузок. Учет работы настила, особенно при воздействии несимметричных нагрузок, может привести к экономии материалов. Помимо приведенной теории нелинейного расчета оболочки авторами разработан расчет составных анизотропных панелей, работающих в условиях сложных напряженных состояний, то есть при двухосном сжатии (растяжении) и сдвиге. Расчет таких конструкций, как при кратковременных, так и при длительных нагрузках представляет известные трудности и требует введения непривычных для специалистов проектных организаций теорий прочности и критериев для их описания.

Ключевые слова: большепролетные конструкции, купола, клееная древесина, пластические деформации, сложное напряженное состояние, численные расчеты, метод интегрального модуля, длительная прочность, сдвигающие усилия

Пятикрестовский Константин Пантелеевич, доктор технических наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник, Центрального научно-исследовательского института строительных конструкций имени В.А. Кучеренко, Акционерное общество «Научно-исследовательский центр „Строительство“», Российская Федерация, 109428, Москва, 2-я Институтская ул., д. 6, корп. 1; ORCID: 0000-0002-4431-3899, eLIBRARY SPIN-код: 7983-5656; stroymex@list.ru

Соколов Борис Сергеевич, кандидат технических наук, заведующий лабораторией тонкостенных и пространственных конструкций, Научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический институт бетона и железобетона имени А.А. Гвоздева, Акционерное общество «Научно-исследовательский центр „Строительство“», Российская Федерация, 109428, Москва, 2-я Институтская ул., д. 6, корп. 5; eLIBRARY SPIN-код: 4173-9045; moo-shell@mail.ru

© Пятикрестовский К.П., Соколов Б.С., 2021

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

The economic feasibility of taking into account the joint work of load-bearing and enclosing elements in large-span wooden spatial structures

Konstantin P. Pyatikrestovsky¹, Boris S. Sokolov²

¹Research Institute of Building Constructions named after V.A. Koucherenko, Moscow, Russian Federation

²Research Institute of Concrete and Reinforced Concrete named A.A. Gvozdev, Moscow, Russian Federation

✉ moo-shell@mail.ru

Article history

Received: August 21, 2021

Revised: November 14, 2021

Accepted: November 30, 2021

For citation

Pyatikrestovsky K.P., Sokolov B.S. The economic feasibility of taking into account the joint work of load-bearing and enclosing elements in large-span wooden spatial structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):664–678. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-664-678>

Abstract. Large-span wooden spatial structures in the form of domes, developed in JSC Research Center of Construction under the leadership of A.A. Pogoreltsev, are built in large numbers for roofing various buildings. Such designs have high performance indicators and continue to improve. In 2020 the “Manual on accounting for the joint work of the frame and fencing in wooden spatial structures of buildings and structures” was developed as an addition to SP 64.13330.2017, containing examples of strength calculation and optimization of rib cross-section dimensions, as well as an example of determining the long-term strength of the shell cladding. These structures, in fact unique, are designed so far in the margin of safety without taking into account the participation of the enclosing part (panels, decking, etc.) in the bearing loads. Taking into account the work of the decking, especially when exposed to asymmetric loads, can lead to material savings. In addition to the above theory of nonlinear shell calculation, the authors have also developed a calculation of composite anisotropic panels operating under complex stress conditions, i.e. under biaxial compression (tension) and shear. The calculation of such structures under both short-term and long-term loads presents certain difficulties and requires the introduction of strength theories and criteria for their description that are unusual for specialists of design organizations.

Keywords: large-span structures, glued wood domes, plastic deformations, complex stress state, numerical calculations, integral module method, long-term strength, shear forces

Введение

В течение трех последних десятилетий сформировалось производство крупных клееных деревянных конструкций, благодаря которому стало возможным проектирование и строительство большепролетных зданий и сооружений, в частности куполов. Количество таких зданий уже исчисляется многими сотнями [1]. Идет отработка всех этапов строительства, изучение возможностей новых типов соединений, защиты элементов конструкций от повреждений и др.

Конструкции куполов диаметром до 100 м, как правило, образуются из каркаса в виде арок, брусев и элементов ограждения – плит или настилов. При этом плиты и настилы закрепляются к каркасу и в дальнейшем вовлекаются в совместную работу с ним. Однако по ряду причин эта совместная работа при проектировании пока не учитывается и часть силового сопротивления системы не используется. В куполах основные ребра каркаса – меридиональные – по устоявшейся традиции принимаются высотой сечения 1/40 пролета и при проектировании с учетом работы плит, заполняющих ячейки между ребрами, остаются недогруженными. В [2] показано, что меридиональные ребра конического купола могут иметь высоту сечения 1/70 пролета, что приводит к экономии материалов ребер до 25 %. При проектировании и строительстве крытого катка в Москве ребра между диафрагмами коротких цилиндрических оболочек выполнены при высоте сечения 1/52,5 пролета, равного 42 м. Объект успешно эксплуатируется в течение 38 лет (это был первый, опытный образец). Эксперименты на моделях и расчет методом интегрального модуля деформаций показали, что при длительных нагрузках можно допускать пластические деформации ползучести наиболее напряженных элементов [3]. В предлагаемой работе выполнены численные ис-

Konstantin P. Pyatikrestovsky, Dr.Sc., senior researcher, executive researcher, Research Institute of Building Constructions named after V.A. Koucherenko, JSC Research Center of Construction; 6 2-ya Institutskaya St, Moscow, 109428, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-4431-3899, eLIBRARY SPIN-code: 7983-5656; stroydex@list.ru

Boris S. Sokolov, Ph.D. in Engineering, Head of the Laboratory for Thin-Walled and Spatial Structures, Research Institute of Concrete and Reinforced Concrete named A.A. Gvozdev, JSC Research Center of Construction, 6 2-ya Institutskaya St, Moscow, 109428, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7983-5656; moo-shell@mail.ru

следования купола диаметром 60 м при высоте сечения ребер 1/60 пролета вместо 1/40 при длительных нагрузках до 50 лет. Учитывалось снижение нагрузок в отсутствие снега в летнее время. Согласно нашим ранним публикациям, нелинейный расчет определяет силовое сопротивление конструкции с учетом линейной ползучести (первая стадия ползучести по А.Р. Ржаницыну) и установившейся (вторая стадия).

Методика нелинейного расчета плоскостного каркаса из клееной древесины совместно с тонкими обшивками подробно опубликована в многочисленных статьях применительно к различным расчетным ситуациям в процессе ее отработки, а также в [3]. В основу методики расчета положен метод интегрального модуля деформаций, разработанный В.М. Бондаренко применительно к железобетонным конструкциям, и приспособлен нами к расчету деревянных конструкций с учетом специфики свойств и работы древесины в конструкции разработанная методика отличается оригинальностью и может рассматриваться как новая теория. Применение этого метода позволяет путем итерационного процесса проследить изменение НДС конструкций при нелинейном и неравновесном длительном деформировании, учесть процесс перераспределения усилий как в отдельных поперечных сечениях, так и по длине меридиональных ребер. Этот метод дает возможность линеаризовать процесс расчета и применять на каждом этапе последовательных приближений теорему Бетти о взаимности работ, теоремы Максвелла о взаимности перемещений, формулы Мора для перемещений. При этом линеаризация сохраняет связь характеристик жесткости с уровнем нагружения. Временная фиксация учитывает влияние режима и длительности нагружения. Диаграмма работы древесины, полученная экспериментально, показана на рис. 1. В качестве аппроксимирующей функции для нелинейного соотношения $\sigma = f(\varepsilon)$ принято уравнение

$$\sigma = E_0 \varepsilon - \frac{E_0^2}{4 \sigma_{\text{III}}} \varepsilon^2. \quad (1)$$

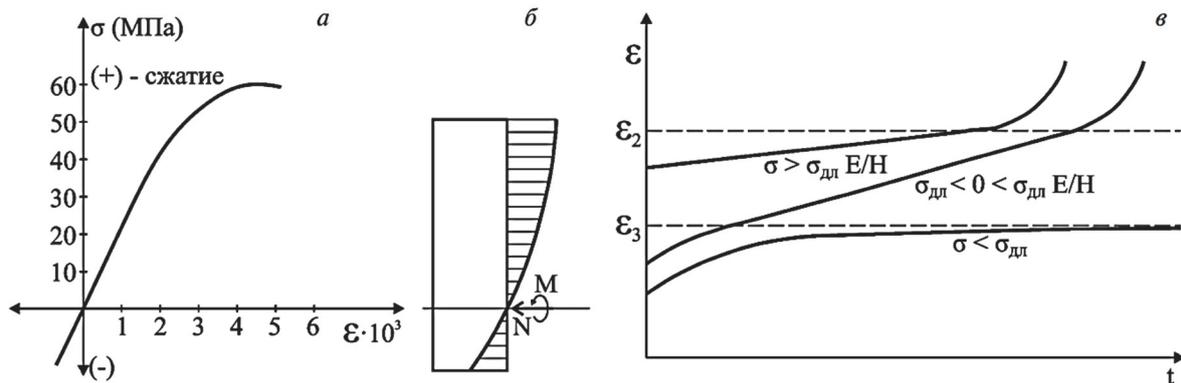


Рис. 1. Диаграмма деформирования древесины:
 а – при сжатии – растяжении; б – при кратковременном изгибе; в – деформирование при длительном действии постоянной нагрузки
Figure 1. A test of deforming wood:
 а – under compression and tension; б – under short-time bending; в – deformation under long period action of constant load

Уравнения механического состояния составляются применительно к трем стадиям ползучести, согласно А.Р. Ржаницыну [4].

Многочисленные расчеты показали, что в диапазоне расчетных напряжений конструкции, как правило, работают в первой стадии – линейной ползучести, хотя допущение не уменьшает общности решения и легко возможен переход во вторую стадию – установившейся ползучести, имеются выражения для определения времени перехода и уравнение механического состояния для этого случая.

В методе интегральных оценок процесс последовательных приближений является способом интегрального уточнения внутренних усилий и напряжений, трансформирующихся во времени вследствие их перераспределения с более нагруженных участков на менее нагруженные.

В статически неопределимых конструкциях, у которых распределение усилий обусловлено характером изменения жесткости, помимо процесса внутренних итераций, требуемого для уточнения жесткостей, необходим сочетающийся с ним процесс внешних итераций, уточняющий по данным жесткостям

закон распределения усилий. Сочетание процессов внутренних и внешних итераций в решении задачи о напряженном и деформированном состоянии заключается в следующем:

1) в обычной упруго-линейной постановке рассчитывается заданная статически неопределимая система и строятся эпюры внутренних усилий (нулевое приближение);

2) назначаются сечения, в которых по данным об усилиях нулевого приближения уточняются расчетные жесткости (снижается модуль деформаций);

3) по новому закону распределения жесткостей повторяется статический расчет системы с учетом переменности расчетных жесткостей вдоль пролетов. Этим уточняются эпюры распределения усилий вдоль осей системы (первое приближение);

4) по усилиям первого приближения вновь уточняются расчетные жесткости, а по ним находятся эпюры усилий во втором приближении и т. д. до стабильной сходимости с заданной степенью точности.

Для учета переменности жесткостей стержней каждый элемент статически неопределимой системы делится на несколько участков, в пределах которых жесткость считается постоянной и равной среднему значению жесткости граничных зон участка. Приведенный модуль деформаций определяется как среднеарифметическое нескольких промежуточных участков.

Изменения внешней нагрузки во времени при расчете приводятся к ступенчатой схеме таким образом, что в пределах каждого из интервалов нагрузка и все характеристики НДС считаются постоянными. Это же относится к изменчивости физико-механических свойств материалов.

Для наиболее распространенного в конструкциях сжато-изгибаемого деревянного элемента можно рассмотреть по аналогии с выводом уравнений для определения длительного модуля деформаций следующий подход. Оценивая реальную деформативность элементов и вместе с тем не оперируя различными модулями деформаций в каждом дискретном слое, можно записать отклонение значений реальных деформаций ε и деформаций $\varepsilon_{\text{ин}}$, определенных с помощью $\varepsilon_{\text{ин}}(x, t)$. Суть интегральной оценки состоит в минимизации отклонения, которая осуществляется для сечения в целом, и после выполнения ряда преобразований выражения для искомого модуля деформаций получается следующее соотношение для первой стадии деформирования (линейная ползучесть):

$$E_{\text{ин}}(x, t) = \Phi(\varepsilon_{\Phi}^A, \vartheta, a) \frac{E_0 - \frac{E_0^2 \varepsilon_{\Phi}^A}{4\sigma_{\text{ин}}}}{1 + \vartheta t^{0,21}} \left[1 + \sum_{i=1}^k \frac{\Delta\sigma_i (1 + \vartheta(t - t_i)^{0,21})}{4\sigma_{\text{ин}} \left(1 - \frac{E_0}{4\sigma_{\text{ин}}} \varepsilon_{i-1}^a\right)^2 (1 + \vartheta t^{0,21})} \right]^{-1}, \quad (2)$$

где

$$\Phi(\varepsilon_{\Phi}^A, \vartheta, a) = \frac{1}{1 - \frac{E_0 \varepsilon_{\Phi}^A}{4\sigma_{\text{ин}}}} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\vartheta}{a}\right)^3 - 100\varepsilon_{\Phi}^A \left(1 - \left(\frac{\vartheta}{a}\right)^4\right)}{1 + \left(\frac{\vartheta}{a}\right)^3 - 50\varepsilon_{\Phi}^A \left(1 - \left(\frac{\vartheta}{a}\right)^4\right)}, \quad (3)$$

ε_{Φ}^A – фибровая (наибольшая) относительная деформация на этапе нагружения; $\Delta\sigma_i$ — приращение напряжений на этапе нагружения; b – коэффициент, учитывающий изменение влажности древесины (в случае необходимости); a и b – расстояния от нейтральной оси внецентренно сжатого элемента до его верхней и нижней граней соответственно; ε_{i-1}^A – суммарное значение мгновенных (кратковременных) приращений относительных деформаций; $\sigma_{\text{ин}}$ – кратковременный предел прочности древесины; $\sigma_{\text{ин}} = 55,0$ МПа.

Для проверки принятых расчетных положений проведены экспериментальные исследования основных типов оболочек покрытий зданий, а также конструкций инженерных сооружений и жилых домов при несимметричных нагрузках, когда наиболее отчетливо проявляются перераспределение усилий и нелинейные деформации, в том числе при запроектных нагрузках.

Краткое описание исследуемых конструкций

Схема ребристо-кольцевого купола показана на рис. 2. Диаметр купола 60 м, высота 20 м. Ребра из клееной древесины меридиональные располагаются с шагом 3,926 м по железобетонному опорному кольцу. В вершине купола ребра крепятся к металлическому фонарному кольцу. Ребра через одно приняты укороченными вследствие уменьшения напряжений из-за сгущения ребер. Высота ребер принята равной $1/60$ диаметра, то есть 1000 мм, ширина 140 мм.

Кольцевые ребра сечением bh 140×200 мм располагаются с шагом 2,464 м ортогонально к меридиональным ребрам.

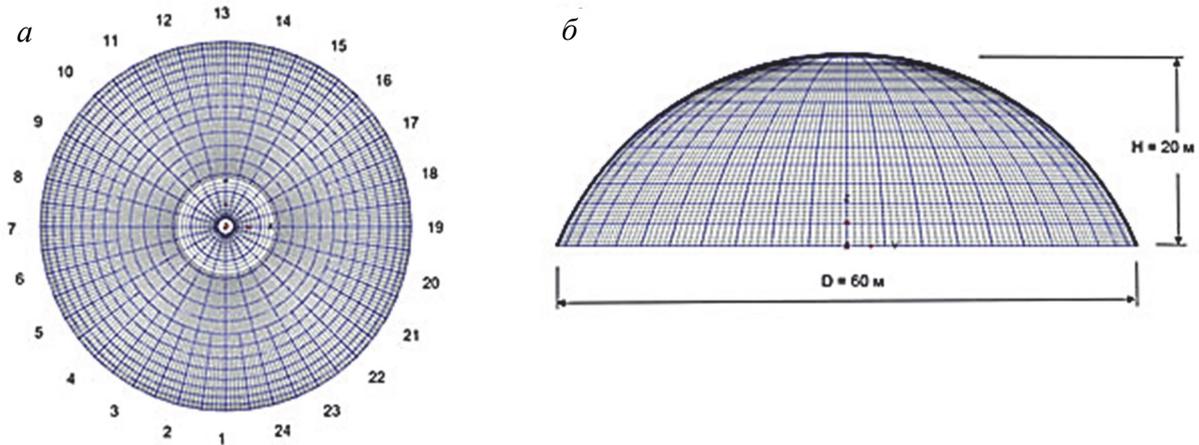


Рис. 2. Схема ребристо-кольцевого купола:

a – план; *б* – фасад

Figure 2. A configuration of rib-and-annular dome:

a – a plan; *б* – a facade

Ячейки между ребрами заполняются дощато-гвоздевыми плитами с опиранием на черепные бруски. В угловых зонах зазоры ячеек между плитами и ребрами заполняются полимерцементным раствором (рис. 3). Плиты заполнения ячеек выполняются из двух слоев досок толщиной 25 мм. При этом оказалось возможным обеспечить приведенную к сплошной толщину плит, равную 40 мм. Расчеты выполняли также и для приведенной толщины плит 20 мм.

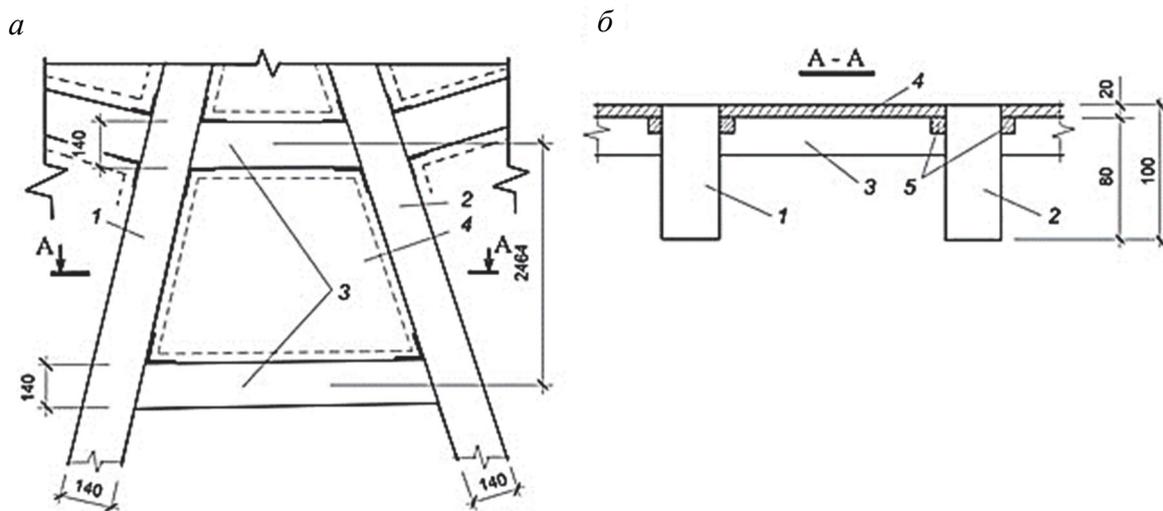


Рис. 3. Схема опирания плит на каркас купола:

a – план; *б* – разрез; 1, 2 – радиальные ребра; 3 – кольцевые ребра

Figure 3. An outline of resting plates on the frame of the dome:

a – a plan; *б* – a cross-section; 1, 2 – the radial ribs; 3 – the annular ribs

Расчеты конструкций в режиме реального времени выполнены методом конечных элементов с использованием программного комплекса MicroFe с контролем НДС обшивок при помощи критериев прочности Г.А. Гениева.

Программа нагружения при численных расчетах показана на рис. 4. Нагрузка принята равномерно распределенной на левой половине купола (рис. 2). Режим приложения нагрузок в основном по возможности отражает сезонные изменения снеговой нагрузки и возможность неравномерного ее распределения по поверхности.

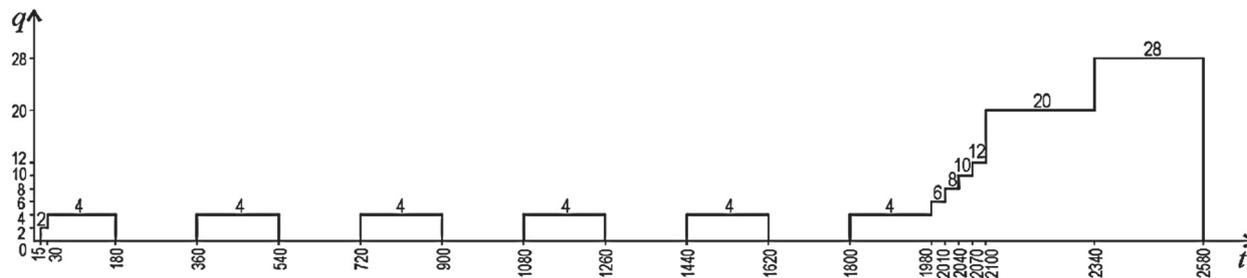


Рис. 4. Режим приложения нагрузок, кПа, сут.
Figure 4. A regime of load action, kPa, days

Таблица 1

Напряженно-деформированное состояние купола с обшивками толщиной 40 мм

Этапы нагружения	q , кПа	Время выдержки t	Напряжения в меридиональных ребрах σ , МПа	Напряжения сдвига τ , МПа	Максимальные прогибы U_z , мм	Интегральный модуль $E_{инт}$, МПа
1	Собственный вес	1 мин	0,0255	0,011	0	14 120
3	2	15 сут.	0,873	0,503	-3,5	14 109
5	4	180	1,45	0,97	-6,35	13 785
9	4	360	1,474	0,972	-6,54	13 715
13	4	720	1,46	0,972	-6,57	13 685
17	4	1080	1,453	0,972	-6,58	13 526
22	4	1620	1,451	0,971	-6,62	13 465
27	6	1980	2,02	1,446	-9,57	13 227
32	10	2070	3,20	2,378	-15,7	13 212
34	12	2100	3,776	2,847	-18,7	13 204
36	20	2340	6,126	4,66	-30,75	13 157
38	28	2580	8,46	6,519	-43,15	13 116
39	36	2580	10,67	8,37	-55,26	12 457

Table 1

A stress-strain state of the dome with sheathing of 40 mm thickness

Stages of loading	q , kPa	Time delay, t	Stresses in meridian ribs, σ , MPa	Shearing stresses, τ , MPa	Maximum deflections, U_z , mm	Integrated circuit module, $E_{инт}$, MPa
1	Собственный вес	1 мин	0,0255	0,011	0	14 120
3	2	15 сут.	0,873	0,503	-3,5	14 109
5	4	180	1,45	0,97	-6,35	13 785
9	4	360	1,474	0,972	-6,54	13 715
13	4	720	1,46	0,972	-6,57	13 685
17	4	1080	1,453	0,972	-6,58	13 526
22	4	1620	1,451	0,971	-6,62	13 465
27	6	1980	2,02	1,446	-9,57	13 227
32	10	2070	3,20	2,378	-15,7	13 212
34	12	2100	3,776	2,847	-18,7	13 204
36	20	2340	6,126	4,66	-30,75	13 157
38	28	2580	8,46	6,519	-43,15	13 116
39	36	2580	10,67	8,37	-55,26	12 457

Обработка результатов численных расчетов проводилась в соответствии с программой выявления влияния нелинейности деформаций, вызванных длительным действием нагрузки, сезонным изменением интенсивности нагрузки, выявлением особенностей совместной работы каркаса и заполнения его ячеек, особенностей перераспределения усилий при неравномерных нагрузках.

Основными характеристиками, принятыми при обработке результатов, являются меридиональные и кольцевые усилия в элементах каркаса, сдвигающие усилия и напряжения в обшивках, прогибы всей конструкции и изменения модулей деформации в зависимости от величины и времени действия нагрузок.

Характеристики НДС определялись последовательно при 39 этапах нагружения (табл. 1). Максимальное время приложения сезонных нагрузок принято равным 1980 сут., или 5,42 года. Далее нагрузка принималась ступенчато возрастающей для оценки возможностей запроектных условий работы конструкции.

Результаты расчетов

Исследовано поведение купола при односторонней нагрузке с интенсивностью, изменяющейся во времени. Имитировали отсутствие снеговой нагрузки в летний период, а в зимний период принимали ее интенсивность несколько завышенной по отношению к средней полосе европейской части России. Расчет методом интегрального модуля деформаций позволяет определять силовое сопротивление конструкций в любой момент ее эксплуатации при произвольно меняющейся нагрузке.

Таблица 2

Напряженно-деформированное состояние купола
при постоянной односторонней нагрузке 3,2 кПа, толщина обшивок 20 мм

Этапы	Время выдержки, сут.	Максимальный изгибающий момент в меридиональных ребрах, M , кНм	Максимальные нормальные напряжения в меридиональных ребрах, σ_{mr} , МПа	Максимальные сдвигающие напряжения, τ , МПа	Прогиб, U_z , мм	Интегральный модуль деформаций $E_{ин}$, МПа
1	0	1380,0	1,527	2,03	13,3	14 399
2	1	1417,0	1,581	2,03	13,66	14 200
3	180	1428,0	1,582	2,04	13,72	14 027
4	730	1443,0	1,585	2,02	13,92	13 884
5	18 250	1462,0	1,590	2,03	14,27	13 186
				1,980	14,9	

Table 2

A stress-strain state of the dome under action of constant one-side load 3.2 KPa, the thickness is 20 mm

Stages	Time delay, t	Maximum bending moment in meridian ribs, M , kNm	Maximum normal stresses in meridian ribs, σ_{mr} , MPa	Maximum shearing stresses, τ , MPa	Deflection, U_z , mm	Integrated circuit module of deformations, $E_{ин}$, MPa
1	0	1380,0	1,527	2,03	13,3	14 399
2	1	1417,0	1,581	2,03	13,66	14 200
3	180	1428,0	1,582	2,04	13,72	14 027
4	730	1443,0	1,585	2,02	13,92	13 884
5	18 250	1462,0	1,590	2,03	14,27	13 186
				1,980	14,9	

Особое внимание уделено эффективности совместной работы каркаса из клееной древесины и обшивок из деревянных панелей.

Основные показатели, по которым осуществляется анализ НДС исследуемой конструкции, следующие: величина прикладываемых нагрузок по этапам и продолжительность выдержки конструкции под этой нагрузкой, напряжения в меридиональных ребрах, касательные напряжения в примыканиях элемен-

тов обшивки к ребрам, максимальные прогибы и величина интегрального модуля деформаций ребер, который изменяется в зависимости от величины напряжения.

Выяснилось, что при приведенной толщине обшивки, равной 40 мм, силовое сопротивление оболочки велико, и даже при максимальной нагрузке – 3,2 кПа, превышающей расчетную в 10 раз, напряжения в сечениях меридиональных ребер не достигли расчетной величины. Максимальное напряжение при нагрузке 36 кПа составило 10,67 МПа, что меньше расчетного значения 13 МПа.

Аналогично прогибы на протяжении всего процесса нагружения 7,07 года измеряются несколькими миллиметрами и при рассматриваемой максимальной нагрузке составили лишь 55,26 мм, то есть 1/1086 диаметра купола. При нагрузке же 4 кПа величина прогиба составила 6,35 мм, причем при выдержке оболочки под этой нагрузкой в течение 1440 сут. (почти 4 года) она возросла до 6,62 мм (или 1/9050 диаметра D), то есть на 0,28 мм. Аналогично и максимальная величина нормальных и касательных напряжений за этот срок практически не изменилась (табл. 1, гр. 4).

Меридиональные ребра каркаса принимали уменьшенной высоты сечения до 1/60 пролета. Максимальное нормальное напряжение в приопорной части меридиональных ребер – 172,5 кН/м² \approx 0,2 МПа.

Невольно приходит мысль, что оболочка толщиной 40 мм почти совсем не требует наличия ребер (устойчивость здесь не рассматривается). В то же время следует отметить, что величина интегрального модуля деформаций при нагрузке 4 кПа уменьшилась с 1,4 10⁴ до 1,35 10⁴ МПа – на 3,3 %.

Для сравнения были взяты данные численного эксперимента этой оболочки с толщиной обшивки 20 мм при нагрузке 3,2 кПа (табл. 2). В результате выдержки оболочки в течение 50 лет прогиб оболочки увеличился с 13,3 до 14,9 мм (до 1/4027 диаметра). Напряжения в меридиональных ребрах увеличились с 1,53 до 1,6 МПа (на 4,1 %). Абсолютная величина напряжений меньше расчетного сопротивления 13 МПа. Сдвигающие напряжения от выдержки под нагрузкой не увеличились.

Падение модуля деформаций за 2 года: 14399/13186 = 1,09 раза, то есть меньше, чем на 10 %.

Расчет каркаса из ребер купола без обшивки показал, что при той же нагрузке 3,2 кПа прогиб в середине загруженной части составил 293 мм, или 1/205 диаметра, а максимальные напряжения оказались равными 10,95 МПа, то есть довольно близко к расчетному сопротивлению 13,0 МПа. Отметим, что эти результаты получены при относительной высоте сечения ребер $h/D = 1/60$, то есть уменьшенной относительно рекомендуемой нормами для плоскостных конструкций, равной 1/40 диаметра.

Выгиб ребра с противоположной стороны составил 1/206 D , то есть практически одинаковый с прогибом, и для плоскостной конструкции (балок чердачных перекрытий и прогонов, стропильных ног) находится в допустимых пределах ($< 1/200 D$). Однако для балок и ферм покрытий нормами прогиб ограничивается 1/300 D .

Проверим уровень напряжений.

Максимальный момент $M = 309,386$ кНм, соответствующая продольная сила в приопорной зоне $N = 333,3$ кН при сечении $bh = 0,2 \times 1$ м

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{33\ 330}{200} + \frac{3\ 093\ 860}{33\ 333} = 10,95 \text{ МПа} < R_u = 13,0 \text{ МПа},$$

то есть довольно близко к расчетному сопротивлению, но следует учитывать, что это для $h/D = 1/60 < 1/40$, что уже свидетельствует о пространственной работе каркаса купола.

В кольцевых ребрах максимальное усилие $N = 109,88$ кН; $M = 16,1$ кНм; $bh = 0,1 \times 0,2$ м.

$$\sigma = \frac{10\ 988}{200} + \frac{16\ 100}{666,6} = 54,9 + 24,15 = 7,91 \text{ МПа} < 13,0 \text{ МПа}.$$

Вопросам прочности древесины при двухосных напряженных состояниях посвящено довольно большое количество теоретических и экспериментальных исследований. Многие авторы критериев прочности, ставших теперь классическими, признают их сложность для практического применения.

Г.А. Гениев [5–7] посвятил многие годы разработке приемлемых с практической точки зрения критериев прочности различных материалов. Хотя основные положения его критериев прочности опубликованы [8; 9], приведем здесь вывод критерия длительной прочности анизотропного материала для использования его при исследованиях плоского напряженного состояния обшивок большепролетного купола.

Механические (физические) модели анизотропного материала для определения его длительной прочности

На рис. 5 представлена механическая модель анизотропного материала, позволяющая дать аналитическое и количественное определение его длительной и динамической прочности с единой физической концепции в широком диапазоне времени действия внешней нагрузки: от многих дней и месяцев до десятых и сотых долей секунды.

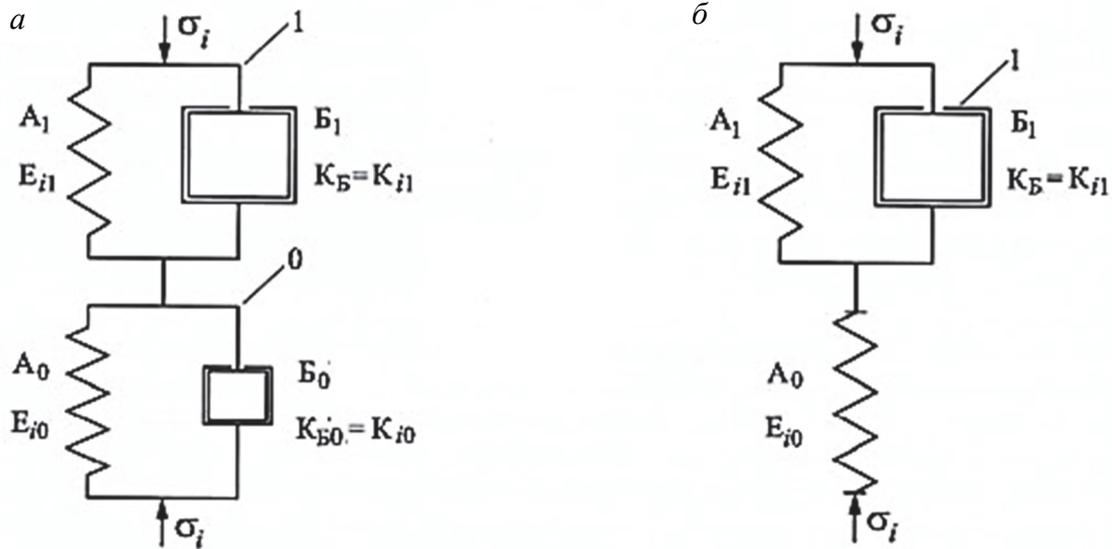


Рис. 5. Механические модели:
a – анизотропный материал; *б* – для определения длительной прочности
Figure 5. Mechanical models:
a – anisotropic material; *б* – for the determination of long-term strength

Модель состоит из двух последовательно соединенных элементов: элемента 0 и элемента 1, каждый из которых представляет, вообще говоря, модель Кельвина – Фойгта – параллельно соединенные элементы A_0 и B_0 , A_1 и B_1 , характеризующиеся различными значениями их прочностных и деформационных параметров.

Целесообразным с практической точки зрения представляется отдельный подход к определению длительной и динамической прочности анизотропного материала, поскольку отрезки времени t_d и t_0 имеют совершенно различный порядок. Действительно, при определении длительной прочности (масштаб времени t_d) работа элемента B_0 практически не оказывает влияния на конечный результат, а при определении динамической прочности (масштаб времени t_0) работа элемента 1 – накопление длительных деформаций ползучести – за этот малый отрезок времени еще не может проявиться.

Полученные критерии длительной прочности анизотропного материала (в частности, древесины) формулируются для элементарного (конечного) объема материала, находящегося в условиях однородного сложного плоского напряженного состояния.

Критерии кратковременной прочности анизотропного материала

Согласно [5; 6], возможны три независимых механизма разрушения анизотропного материала: от отрыва (растяжения), смятия (сжатия) и сдвига, реализация которых зависит от вида напряженного состояния в рассматриваемой точке тела. Эти механизмы могут иметь место как при кратковременном действии внешней нагрузки (соответствующем времени проведения стандартных испытаний), так и при длительном и динамическом действии нагрузки.

В связи с этим полученные в [5; 6] критерии кратковременной прочности анизотропного материала (соответствующие предельным состояниям элемента A_0 – рис. 5 – для случаев отрыва, смятия и сдвига) строились на основании следующих очевидных физических предпосылок:

– для случая отрыва

$$\frac{d}{d\varphi} [\sigma_n(\varphi) - R_p(\varphi)] = 0; \quad (4)$$

– для случая смятия

$$\frac{d}{d\varphi} [\sigma_n(\varphi) + R_c(\varphi)] = 0; \quad (5)$$

– для случая сдвига

$$\frac{d}{d\psi} [\tau_m(\psi) - R_{cd}(\psi)] = 0, \quad (6)$$

где $\sigma_n(\varphi)$ и $\tau_m(\psi)$ – нормальные и касательные напряжения на искомым опасных площадках отрыва, смятия и сдвига (нормали к которым определяются неизвестными заранее углами φ и ψ); $R_p(\varphi)$, $R_c(\varphi)$ и $R_{cd}(\psi)$ – абсолютные значения предельных нормальных и касательных напряжений при отрыве, смятии и сдвиге, полученные из опытов при принудительном действии одноосных напряжений растяжения, сжатия и сдвига как функций углов φ и ψ .

При этом

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n(\varphi) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi; \\ \tau_m(\psi) &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\psi - \tau_{xy} \cos 2\psi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – нормальные и касательные напряжения в главных осях анизотропии материала (для древесины – вдоль и поперек волокон); φ и ψ – углы между осью X и соответствующими нормальями, а также

$$\left. \begin{aligned} R_p(\varphi) &= R_{px} \cos^2 \varphi + R_{py} \sin^2 \varphi; \\ R_c(\varphi) &= R_{cx} \cos^2 \varphi + R_{cy} \sin^2 \varphi; \\ R_{cd}(\psi) &= C_x \cos^2 \psi + C_y \sin^2 \psi, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где R_{px} , R_{py} – пределы кратковременной прочности на отрыв вдоль осей X и Y (вдоль и поперек волокон); R_{cx} , R_{cy} – пределы кратковременной прочности на смятие вдоль осей X и Y ; C_x и C_y – пределы кратковременной прочности на сдвиг вдоль площадок с нормальями, совпадающими с осями X и Y .

На основании указанных утверждений и проведения соответствующих выкладок в [5; 7; 10] были получены следующие аналитические выражения для критериев кратковременной прочности анизотропных материалов:

– для случая отрыва

$$(R_{px} - \sigma_x)(R_{py} - \sigma_y) - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (9)$$

– для случая смятия

$$(R_{cx} + \sigma_x)(R_{cy} + \sigma_y) - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (10)$$

– для случая сдвига

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 4(C_x + \tau_{xy})(C_y - \tau_{xy}) = 0. \quad (11)$$

Критерии длительной прочности анизотропного материала

Как уже указывалось, для определения длительной прочности анизотропного материала целесообразно использовать его механическую модель, представленную на рис. 5.

При приложении к последовательно соединенным элементам 0 (A_0) и 1 (A_1, B_1) обобщенного внешнего долговременного силового воздействия $\sigma_i \rightarrow (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ суммарные обобщенные деформации элементов 0 и 1

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i0} + \varepsilon_{i1};$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + \varepsilon_{x1}, \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + \varepsilon_{y1}, \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy0} + \varepsilon_{xy1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Независимые пределы прочности материала в главных осях анизотропии (при отрыве, смятии и сдвиге) определяются достижением значениями суммарных деформаций ε_i соответствующих предельных значений – $\varepsilon_{i0} \rightarrow (\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \varepsilon_{xy0})$, равных предельным деформациям элемента A_0 при кратковременном действии внешней нагрузки – $\varepsilon_{i0} = \frac{R_i}{E_{i0}}$:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{R_x}{E_{x0}}; \quad \varepsilon_{y0} = \frac{R_y}{E_{y0}}; \quad \varepsilon_{xy0} = \frac{R_{xy}}{E_{xy0}}, \quad (13)$$

где $R_x = R_{px}$ или R_{cx} , $R_y = R_{py}$ или R_{cy} , $R_{xy} = C_x$ или C_y ; E_{x0} , E_{y0} и E_{xy0} – линейные модули упругости элемента A_0 в направлениях X и Y (вдоль и поперек волокон) и его обобщенный модуль сдвига соответственно.

Деформации элемента 1 ε_{i1} определяются из следующих очевидных зависимостей:

$$\sigma_i = \sigma_{iA1} + \sigma_{iB1}; \quad \sigma_{iA1} = E_{i1} \varepsilon_{i1}; \quad \sigma_{iB1} = K_{i1} \frac{d\varepsilon_{i1}}{dt}, \quad (14)$$

где E_{i1} – обобщенные модули упругости элемента A_1 ; K_{i1} – модули вязкого сопротивления элемента B_1 . На основании (14)

$$\frac{d\varepsilon_{i1}}{dt} + \frac{E_{i1}}{K_{i1}} \varepsilon_{i1} = \frac{\sigma_i}{K_{i1}},$$

и при

$$t = 0, \quad \varepsilon_{i1} = 0 \quad - \varepsilon_{i1} = \frac{\sigma_i}{E_{i1}} (1 - e^{-\omega_{i1} t}), \quad \omega_{i1} = \frac{E_{i1}}{K_{i1}}. \quad (15)$$

Таким образом, в соответствии с (12):

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_{i0}} \left[1 + \delta_i (1 - e^{-\omega_i t}) \right] = \frac{\sigma_i}{E_{i0}} \Psi_i(t), \quad (16)$$

где $\delta_i = E_{i0}/E_{i1}$.

На основании (13) и (16), пределы длительной прочности анизотропного материала в направлениях главных осей анизотропии $\bar{R}_i = R_i(\bar{t}_\delta)$

$$\bar{R}_i = \sigma_i = \frac{E_{i0} \varepsilon_i}{\Psi_i(t_d)} = \frac{E_{i0} \varepsilon_{i0}}{\Psi_i(t_d)} = \frac{R_i}{\Psi_i(t_d)}, \quad \bar{R}_x = \frac{R_x}{\Psi_x(t_d)}; \quad \bar{R}_y = \frac{R_y}{\Psi_y(t_d)}; \quad \bar{R}_{xy} = \frac{R_{xy}}{\Psi_{xy}(t_d)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_x(t_d) &= 1 + \delta_x (1 - e^{-\omega_x t_d}) > 1; \\ \Psi_y(t_d) &= 1 + \delta_y (1 - e^{-\omega_y t_d}) > 1; \\ \Psi_{xy}(t_d) &= 1 + \delta_{xy} (1 - e^{-\omega_{xy} t_d}) > 1, \end{aligned} \quad (18)$$

а $t = t_d$ – заданное предельное время действия внешней долговременной нагрузки.

Таким образом, определение длительной прочности анизотропного материала сводится к изменению, а именно уменьшению значений пределов кратковременной прочности в направлениях главных осей анизотропии согласно зависимостям (17) и (18). Внося (17) в критерии (9), (10), (11), запишем окончательные выражения для критериев длительной прочности анизотропного материала в параметрической зависимости от t_d :

– для случая отрыва

$$\left[\frac{R_{px}}{\Psi_{px}(t_d)} - \sigma_x \right] \left[\frac{R_{py}}{\Psi_{py}(t_d)} - \sigma_y \right] - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (19)$$

– для случая смятия

$$\left[\frac{R_{cx}}{\Psi_{cx}(t_d)} + \sigma_x \right] \left[\frac{R_{cy}}{\Psi_{cy}(t_d)} + \sigma_y \right] - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (20)$$

– для случая сдвига

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 4 \left[\frac{C_x}{\Psi_{xy}(t_d)} + \tau_{xy} \right] \left[\frac{C_y}{\Psi_{xy}(t_d)} - \tau_{xy} \right] = 0. \quad (21)$$

В критерии (19), (20), (21) помимо пределов кратковременной прочности ($R_{px}, R_{py}, R_{cx}, R_{cy}, C_x, C_y$) входят три безразмерных параметра – $\delta_x = \frac{E_{x0}}{E_{x1}}$, $\delta_y = \frac{E_{y0}}{E_{y1}}$, $\delta_{xy} = \frac{E_{xy0}}{E_{xy1}}$ и три размерные величины $\omega_{i1} \text{ (сек}^{-1}\text{)} - \omega_{x1} = E_{x1}/K_{x1}$, $\omega_{y1} = E_{y1}/K_{y1}$, $\omega_{xy1} = E_{xy1}/K_{xy1}$.

Численные значения δ_i и ω_{i1} определяются на основании экспериментальных данных. Определение характеристик для расчета длительной прочности древесины выполнено согласно предложениям Г.А. Гениева для анизотропных материалов. Используются результаты экспериментальных исследований длительного сопротивления древесины ели по опытам 1950–1955-х гг. Н.Л. Леонтьева [11; 12].

Для всех трех указанных видов сопротивления древесины ели отношения $\bar{R}_{px}(t_d) / R_{px}$, $\bar{R}_{cx}(t_d) / R_{cx}$ и $\bar{R}_{xy}(t_d) / R_{xy}$ при $t_d \rightarrow \infty$ (при практически неограниченном времени действия нагрузки) оказались с достаточной степенью точности равными 0,5, то есть максимальное снижение длительной прочности составило 50 % от кратковременной. Это позволило на основании экспериментального результата – $\Psi_x(\infty) = \Psi_{xy}(\infty) = 1/0,5 = 2$ оценить значения параметров δ_x и δ_{xy} , а именно $\delta_x = \delta_{xy} = 1$. В дальнейшем значение δ_y (сопротивление поперек волокон) было также принято равным единице.

Аналитическая аппроксимация графиков длительного сопротивления древесины позволила установить следующие значения величин ω_{x1} :

- при растяжении – $\omega_{x1} = 1,65 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$;
- при сжатии – $\omega_{x1} = 2,50 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$;
- при скалывании – $\omega_{xy1} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$.

Значения ω_{y1} (при сопротивлении поперек волокон) с учетом большего влияния ползучести материала в этом главном направлении анизотропии ($K_{y1} < K_{x1}$) были приняты равными:

- при растяжении – $\omega_{y1} = 3,30 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$;
- при сжатии – $\omega_{y1} = 5,00 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$;
- при сдвиге – $\omega_{xy1} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$.

Расчет оболочки в целом [10] с учетом обшивки показал ее большую роль в восприятии нормальных и особенно сдвигающих усилий.

Для анализа нами выбрана простейшая конструкция заполнения ячеек между ребрами в виде дощато-гвоздевых щитов с перекрестным расположением досок.

В конструкции цилиндрической оболочки (рис. 6) использованы панели в виде каркаса из досок толщиной 40 мм с одной нижней обшивкой из досок толщиной 25 мм. Благодаря включению этого способа заполнения ячеек между ребрами удалось успешно осуществить применение ребер с отношением высоты сечения 1/56 пролета [10].

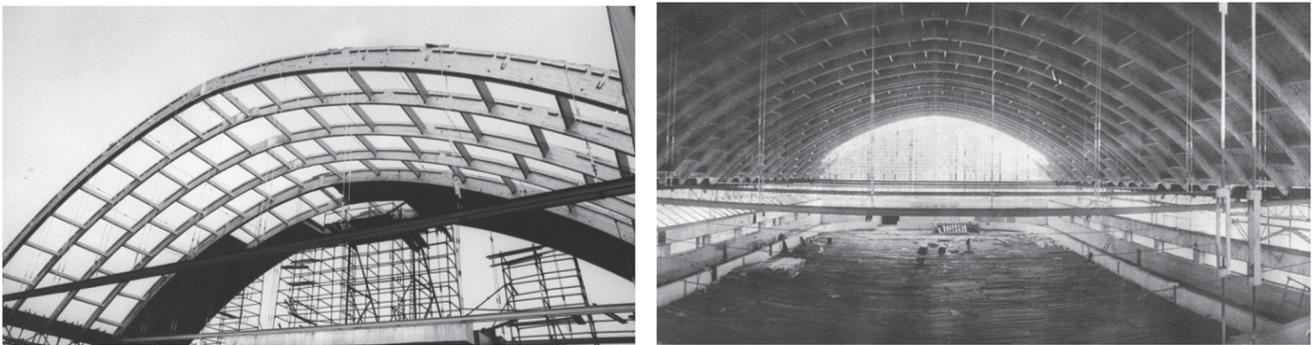


Рис. 6. Монтаж короткой цилиндрической оболочки пролетом 42 м
Figure 6. An erection of the short cylindrical shell with a 42 m span

На основании общего расчета конструкции по данным о сдвигающих усилиях определены основные параметры щитов.

Размеры средней ячейки между ребрами каркаса приняты 2,49×2,49 м, количество досок шириной 13 см для каждого слоя щита равно 19 шт. Количество гвоздей при установке по 2 гвоздя в каждом пересечении досок равно $19^2 \times 2 = 722$. При перекосе щита от сдвига гвозди вызывают смятие древесины под ними. Их несущая способность, согласно нормам, составляет $T = 0,8 a \cdot d \cdot n = 0,8 \times 4 \times 0,3 \times 722 = 693 \text{ кН}$, где d – диаметр гвоздя, см; a – толщина щита; n – количество гвоздей.

Сдвигающие напряжения при максимальном сдвиге по конечно-элементному расчету составляют

$$\tau = \frac{\sum T}{bl} = \frac{693}{0,04 \times 2,49} = 6957,8 \text{ кН/м}^2 = 6,96 \text{ МПа.}$$

Полученное значение τ намного превышает расчетное сопротивление даже скалыванию древесины поперек волокон 0,8 МПа. Согласно расчету, такое сдвигающее напряжение достигается только на 38 этапе при нагружении 28 кПа и суммарной выдержке при возрастающей нагрузке в течение 2580 сут. (7 лет).

Приведем результаты расчета, соответствующие 27 этапу нагружения при 6 кПа и выдержке перед этим в течение 1980 сут. (5,42 лет) при постоянной односторонней нагрузке 4 кПа. Максимальные сдвигающие напряжения при этом составили 1,45 МПа. При нагрузке 2 кПа, соответственно, 0,5 МПа.

Для сравнения выполнили еще расчеты исследуемого купола при других размерах толщины щитов. При толщине 2 см и нагрузке 2 кПа максимальные напряжения равны 2,43 МПа, а при толщине 8 см и этой же нагрузке величина напряжений понизилась до 1,0 МПа.

Отметим, что наряду с дощатыми настилами вполне возможно заполнение ячеек выполнять композитными материалами, как повышенной прочности и уменьшенной толщины, так и пористыми материалами низкой теплопроводности.

Конструкция способна воспринимать нагрузки большой интенсивности в течение длительного времени при меридиональных ребрах уменьшенной высоты сечения до 1/60 диаметра. Это свидетельствует также о том, что купол обеспечивает высокую степень конструктивной безопасности и подходит для возведения сооружений, эксплуатирующихся в жестких условиях, диктуемых природными и техногенными воздействиями.

Заключение

Время требует новых подходов к построению норм проектирования с учетом сложных напряженных состояний и включения в нормы эффективных расчетов с использованием ЭВМ. При этом необходимо упрощать расчетные методики и применять простые критерии прочности.

Совместная работа ребер каркаса куполов с элементами заполнения ячеек между ними оказывает большое влияние на повышение силового сопротивления конструкции в целом.

Нелинейные расчеты с применением метода интегральных оценок позволяют анализировать силовое сопротивление сложных современных деревянных и, возможно, других комплексных конструкций с учетом длительного нагружения любыми неравномерными нагрузками во времени и по величине.

Выполнены расчеты куполов с уменьшенной высотой сечения ребер на 20 % по сравнению с принятыми устоявшимися рекомендациями по проектированию. Проанализировано состояние конструкции и ее силового сопротивления в различных условиях нагружения и с различной жесткостью панелей заполнения ячеек.

Обоснована возможность уменьшения высоты сечения меридиональных ребер. Предлагается в дальнейшем исследовать и другие возможности экономии материалов этих распространенных конструкций.

Проверена возможность восприятия каркасом с уменьшенными сечениями ребер нагрузок в монтажном состоянии и установлена допустимость восприятия этих нагрузок.

В целом применяемая новая эффективная методика расчета и рекомендации по проектированию могут обеспечить экономию материалов на покрытие до 25 %.

Таким образом, несмотря на имеющийся эффективный математический аппарат расчета конструкций с учетом нелинейной работы древесины, в нормах отсутствуют рекомендации по его применению и нет указаний на необходимость конструирования с учетом совместной работы элементов для обеспечения конструктивной безопасности сооружений при одновременном снижении расхода материалов.

Упрощения компьютерного расчета можно достичь путем автоматизации поиска сечений с наибольшими напряжениями на каждом шаге итераций и расчетной корректировки модуля деформации в одном этом сечении, а в остальных сечениях по линейному закону или по параболе, соответствующей эпюре моментов.

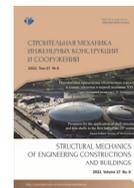
Список литературы

1. Турковский С.Б., Погорельцев А.А., Преображенская И.П. Клееные деревянные конструкции с узлами на клеенных стержнях в современном строительстве (система ЦНИИСК). М.: РИФ «Стройматериаль», 2013. 308 с.

2. Кривошапко С.Н., Пятикрестовский К.П. Из истории строительства деревянных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 1. С. 3–18.
3. Пятикрестовский К.П. Нелинейные методы механики в проектировании современных деревянных конструкций. М.: МГСУ, 2014. 320 с.
4. Ржаницын А.Р. Теоретические предпосылки к построению методов расчета деревянных конструкций во времени // Исследования прочности и деформативности древесины. М.: Госстройиздат, 1956. С. 21–31.
5. Гениев Г.А. О критерии прочности древесины при плоском напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. 1981. № 3. С. 15–20.
6. Гениев Г.А., Курбатов А.С. О предельных прочностных зависимостях для анизотропных материалов при сдвиге // Методы расчета и оптимизации строительных конструкций на ЭВМ. М., 1990. С. 60–67.
7. Гениев Г.А., Курбатов А.С., Самедов Ф.А. Вопросы прочности и пластичности анизотропных материалов. М.: Интербук, 1993. 187 с.
8. Гениев Г.А., Пятикрестовский К.П. Вопросы длительной и динамической прочности анизотропных конструкционных материалов. М., 2000. 38 с.
9. Пятикрестовский К.П. Расчет ребристых пространственных конструкций из древесины и фанеры на длительные нагрузки // Строительная механика и расчет сооружений. 2008. № 5. С. 42–48.
10. Пятикрестовский К.П., Соколов Б.С. Нелинейный расчет статически неопределимых деревянных конструкций и оптимизация размеров сечений ребер куполов // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: сб. тезисов VII Международного симпозиума. Новосибирск, 2018.
11. Леонтьев Н.Л. Упругие деформации древесины. М.: Гослесбумиздат, 1952. 120 с.
12. Леонтьев Н.Л. Длительное сопротивление древесины. М. – Л.: Гослесбумиздат, 1957. 132 с.

References

1. Turkovskiy S.B., Pogoreltzev A.A., Preobrazhenskaya I.P. *Adhesive wooden structures with nots on pasted rods in modern building*. Moscow: RIF “Stroymaterialy” Publ.; 2013. (In Russ.)
2. Krivoshapko S.N., Pyatikrestovskiy K.P. On history of building of wooden shells and their opportunities at present and in the future. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(1):3–18. (In Russ.)
3. Pyatikrestovsky K.P. *Non-linear methods in design of modern wooden structures*. Moscow: MGSU Publ.; 2014. (In Russ.)
4. Rzhantzin A.R. Theoretical approaches to the construction of methods of analysis of wooden structures in time. *Studies of the Strength and Deformability of Wood*. Moscow: Gosstroyizdat Publ.; 1956. p. 21–31. (In Russ.)
5. Geniev G.A. On the criteria of strength of wood for plane stress state. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1981;(3):15–20. (In Russ.)
6. Geniev G.A., Kurbatov A.S. On ultimate strength relations for anisotropic materials under shear. *Methods of Calculation and Optimization of Building Structures on a Computer*. Moscow; 1990. p. 60–67. (In Russ.)
7. Geniev G.A., Kurbatov A.S., Samedov F.A. *Problems of strength and plasticity of anisotropic materials*. Moscow: Interbuk Publ.; 1993. (In Russ.)
8. Geniev G.A., Pyatikrestovsky K.P. *Problems of long-term and dynamic strength of anisotropic constructive materials*. Moscow; 2000. (In Russ.)
9. Pyatikrestovsky K.P. An analysis of rib spatial structures from wood and plywood on sustained loads. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2008;(5):42–48. (In Russ.)
10. Pyatikrestovsky K.P., Sokolov B.S. Non-linear analysis of statically indeterminate wooden structures and optimization of dimensions of cross-sections of the ribs of domes. *Actual Problems of Computer Modeling of Constructions and Structures: Collection of Abstracts of the 7th International Symposium*. Novosibirsk; 2018. (In Russ.)
11. Leontiev N.L. *Elastic deformation of wood*. Moscow: Goslesbumizdat Publ.; 1952. (In Russ.)
12. Leontiev N.L. *Long-term resistance of wood*. Moscow, Leningrad: Goslesbumizdat Publ.; 1957. (In Russ.)



Уважаемые коллеги!

Инженерная академия Российского университета дружбы народов приглашает вас принять участие в научных мероприятиях в 2022 году.

ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
«ИНЖЕНЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ – 2022»

Октябрь 2022 года

Место проведения: Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3,
Департамент строительства, Инженерная академия РУДН.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИЙ

Русский, английский.

ПУБЛИКАЦИЯ МАТЕРИАЛОВ КОНФЕРЕНЦИЙ

Статьи будут опубликованы в сборниках трудов конференций, индексируемых в БД РИНЦ, или в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science.

НАУЧНЫЕ СЕКЦИИ

- Материаловедение, металлургия и нанотехнологии.
- Машиностроение, энергетика и транспорт.
- Авиационные и космические системы.
- Геология, горное и нефтегазовое дело.
- Гражданское, промышленное и гидротехническое строительство.
- Архитектура и промышленный дизайн.
- Инновационный менеджмент в промышленности.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Организатор конференций: Российский университет дружбы народов (РУДН).

Место проведения конференций:

Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, Инженерная академия РУДН.

Заседание секции «Машиностроение, энергетика и транспорт» состоится по адресу:

Москва, Подольское ш., д. 8, корп. 5.

Председатель Оргкомитета:

Малькова Марианна Юрьевна, профессор департамента строительства Инженерной академии РУДН. E-mail: malkova-myuu@rudn.ru

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФОРУМ

**ПО МЕХАНИКЕ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА, КОСМИЧЕСКИМ КОНСТРУКЦИЯМ И МАТЕРИАЛАМ
(IAA/AAS SciTech Forum)**

Июнь 2022 года

Место проведения: Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Инженерная академия РУДН.

Организатор форума: Российский университет дружбы народов (РУДН).

Тел.: +7 (495) 952-08-29, e-mail: kupreev-sa@rudn.ru

ОФИЦИАЛЬНЫЙ ЯЗЫК

Английский.

ПУБЛИКАЦИЯ МАТЕРИАЛОВ ФОРУМА

Статьи будут опубликованы в сборнике трудов, индексируемом в БД Scopus и Web of Science.