

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2020 Том 16 № 6

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал  
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия  
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения, 05.23.02 – Основания и фундаменты, подземные сооружения, 05.23.17 – Строительная механика.

Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода).

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машино-строительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Рынкoвская М.И.*, канд. техн. наук, РУДН, Москва, Россия

### ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*Ерофеев В.Т.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

*Евкин А.*, д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

### ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РЕДАКТОР

*Мамиева И.А.*, РУДН, Москва, Россия

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

*Аганов В.П.*, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

*Андреев В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

*Баженов В.А.*, акад. НАПН, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина

*Ванин В.В.*, д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

*Варум У.*, д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

*Войццкий З.*, проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

*Зверьев Е.М.*, д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

*Иванов С.П.*, д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

*Карпенко Н.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

*Какоеи С.*, д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

*Колчунов В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

*Красич Соня*, канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

*Лисичкин С.Е.*, д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

*Ляхович Л.С.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

*Магуле Ф.*, проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Франция

*Мендонка П.*, д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

*Санжаровский Р.С.*, д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

*Сантос Р.*, исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

*Травуш В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

*Якутов Н.М.*, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

## СОДЕРЖАНИЕ

### РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Лабудин Б.В., Попов Е.В., Ощепкова Е.С., Сопилов В.В., Русланова А.В., Фукалов А.А.* Влияние разрывов (стыков) в обшивке на напряженно-деформированное состояние плитно-ребристых древокомпозитных панелей ..... 439

*Лебедь Е.В.* Влияние высоты ребристо-кольцевого купола на напряженное состояние его каркаса в процессе навесного монтажа ..... 452

*Антонов А.С.* Программная часть, фундаментальная и организационная структура программно-аппаратного комплекса для обеспечения безопасности возводимых гидротехнических и гидроэнергетических сооружений ..... 465

### ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

*Krivoshapko S.N.* An analysis of annular plate in curvilinear non-orthogonal coordinates with the help of equations of a shell theory (Расчет кольцевой пластины в криволинейных неортогональных координатах с помощью уравнений теории оболочек)..... 472

### ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

*Бакушев С.В.* Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоского одномерного деформирования при аппроксимации замыкающих уравнений биквадратичными функциями ..... 481

### ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

*Морозов Ю.А.* Силовые параметры деформирования металла при листовой вытяжке ..... 493

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Зюзина О.В.* Экспериментальные исследования железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных предварительно напряженной поперечной арматурой ..... 504

### СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

*Khatri G., Lamichhane G.P.* Seismic response of stone masonry building with wooden band (Влияние землетрясения на каменную кладку зданий с деревянным поясом) ..... 513

Редактор Ю.А. Заикина  
Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова  
Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

### Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i\_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 23.12.2020. Выход в свет 30.12.2020. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 10,23. Тираж 250 экз. Заказ № 1640. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов, 2020  
© Алборова Л.А., фото на обложке  
(ГУМ, стеклянное покрытие Шухова, Москва, Россия), 2020

# STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2020 VOLUME 16 No. 6

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

## EDITORIAL BOARD

### EDITOR-IN-CHIEF

*Marina I. Rynkovskaya*, PhD of Technical Science, RUDN University, Moscow, Russia

### ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

*Vladimir T. Erofeev*, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

*Alex Yevkin*, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

### MANAGING EDITOR

*Iraida A. Mamieva*, RUDN University, Moscow, Russia

### MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

*Vladimir P. Agapov*, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

*Vladimir I. Andreev*, chairman, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

*Viktor A. Bazhenov*, member of the NAES of Ukraine, DSc, Professor, KNUCA, Kiev, Ukraine

*Sergey P. Ivanov*, DSc, Professor, VSUT (Volga Tech), Yoshkar-Ola, Russia

*Saeid Kakooei*, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

*Nikolay I. Karpenko*, member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

*Vitaliy I. Kolchunov*, member of the RAACS, DSc, Professor, SWSU, Kursk, Russia

*Sonja Krasic*, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

*Sergey E. Lisichkin*, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

*Leonid S. Lyakhovich*, member of the RAACS, DSc, Professor, TSUAB, Tomsk, Russia

*Fredéric Magoulès*, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France

*Paulo Mendonca*, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

*Rudolf S. Sanjarovskiy*, DSc, Professor, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

*Ricardo Santos*, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

*Vladimir I. Travush*, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

*Vladimir V. Vanin*, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

*Humberto Varum*, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

*Zbigniew Wójcicki*, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

*Nukh M. Yakupov*, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

*Evgeniy M. Zveryaev*, DSc, Professor, KIAM RAS, Moscow, Russia

## CONTENTS

### ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

- Labudin B.V., Popov E.V., Oshchepkova E.S., Sopilov V.V., Ruslanova A.V., Fukalov A.A.* Influence of cover splices on the stress-strain state of plate-ribbed wood-composite panels ..... 439
- Lebed E.V.* Influence of the height of the ribbed-ring dome on the stress state of its frame during the overhang mounting process ..... 452
- Antonov A.S.* The software part, the fundamental and organizational structure of the software and hardware complex to ensure the safety of hydraulic and hydropower structures under the construction ..... 465

### THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

- Krivoshapko S.N.* An analysis of annular plate in curvilinear non-orthogonal coordinates with the help of equations of a shell theory ..... 472

### THEORY OF ELASTICITY

- Bakushev S.V.* Differential equations of equilibrium of continuous medium for plane one-dimensional deformation at closing equations approximation by biquadratic functions ..... 481

### DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

- Morozov Yu.A.* Force parameters of metal deformation during sheet drawing ..... 493

### EXPERIMENTAL RESEARCHES

- Zyuzina O.V.* Experimental studies of reinforced concrete structures of hydraulic structures strengthened with prestressed transverse reinforcement ..... 504

### SEISMIC RESISTANCE

- Khatri G., Lamichhane G.P.* Seismic response of stone masonry building with wooden band ..... 513

Copy Editor Iu.A. Zaikina  
Graphic Designer Iu.N. Efremova  
Layout Designer Iu.A. Zaikina

### Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia  
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: [stmj@rudn.ru](mailto:stmj@rudn.ru); [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia  
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University  
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia, 2020  
© Alborova L.A., photo on the cover of the journal  
(GUM, structure of Shukhov's roof, Moscow, Russia), 2020

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-439-451  
УДК 624.011.1

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Публикуется в порядке обсуждения / Published in order of discussion

### Влияние разрывов (стыков) в обшивке на напряженно-деформированное состояние плитно-ребристых деревокомпозитных панелей

Б.В. Лабудин<sup>1</sup>, Е.В. Попов<sup>1\*</sup>, Е.С. Ощепкова<sup>1</sup>, В.В. Сопилов<sup>1</sup>, А.В. Русланова<sup>1</sup>, А.А. Фукалов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 163002, Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Российская Федерация, 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4

\*egpv1989@mail.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 3 сентября 2020 г.

Доработана: 13 ноября 2020 г.

Принята к публикации: 20 ноября 2020 г.

#### Аннотация

Исследованы численно-аналитически деревокомпозитные плитно-ребристые изгибаемые панели с обшивками из фанеры и ориентированно-стружечных плит, укладываемых со стыками (разрывами) в обшивке, соединенной с ребрами посредством механических связей. Представлен обзор исследований, посвященных изучению и повышению эффективности таких панелей. На основе теории расчета составных стержней А.Р. Ржаницына составлена математическая модель, позволяющая выполнить расчет напряженно-деформированного состояния этих конструкций, учитывающая наличие разрывов в обшивке и податливость механических соединений обшивки и ребра. Получено уравнение для определения координаты наиболее опасного сечения в деревянных ребрах при наличии разрывов в обшивке, которые могут не совпадать с серединой пролета. Рассмотрены панели с обшивкой в сжатой зоне с различным расположением стыков, в том числе симметрично относительно середины пролета панели. Для сопоставления результатов напряженно-деформированного состояния рассмотрены панели без стыков в обшивке. Построены графики зависимости максимальных растягивающих напряжений в ребрах в наиболее опасном сечении и максимальных вертикальных перемещений от коэффициента жесткости связей сдвига и расположения стыков в обшивке. Получены значения коэффициентов для инженерного расчета панелей, учитывающих снижение прочностных и деформационных характеристик композитного сечения панелей с разрывами в обшивке по сравнению с панелями без стыков. Сформулированы выводы и рекомендации по результатам проведенных численных исследований, которые могут быть использованы при проектировании деревокомпозитных плитно-ребристых конструкций, а также при подготовке нормативных документов.

**Ключевые слова:** деревокомпозитные ребристые панели, разрывы и стыки в обшивке, механические соединения, жесткость, податливость, сдвиг

#### Для цитирования

Лабудин Б.В., Попов Е.В., Ощепкова Е.С., Сопилов В.В., Русланова А.В., Фукалов А.А. Влияние разрывов (стыков) в обшивке на напряженно-деформированное состояние плитно-ребристых деревокомпозитных панелей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 6. С. 439–451. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-439-451>

Лабудин Борис Васильевич, профессор кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, доктор технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 6705-1677, Scopus Author ID: 57191523557, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2547-3096>

Попов Егор Вячеславович, доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, кандидат технических наук, доцент; eLIBRARY SPIN-код: 5395-2753, Scopus Author ID: 57208305419, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8950-7558>


Ощепкова Екатерина Сергеевна, магистрант кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики; eLIBRARY SPIN-код: 7161-0280, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9707-9741>

Сопилов Валерий Вячеславович, аспирант кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики; eLIBRARY SPIN-код: 5227-6839, Scopus Author ID: 57208300208, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1236-5950>

Русланова Анастасия Владимировна, аспирант кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики; eLIBRARY SPIN-код: 7398-8035, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0298-9129>

Фукалов Александр Андреевич, магистрант кафедры экономики строительства и ЖКХ Института безотрывных форм обучения; eLIBRARY SPIN-код: 2848-3709.

© Лабудин Б.В., Попов Е.В., Ощепкова Е.С., Сопилов В.В., Русланова А.В., Фукалов А.А., 2020

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## Influence of cover splices on the stress-strain state of plate-ribbed wood-composite panels

Boris V. Labudin<sup>1</sup>, Egor V. Popov<sup>1\*</sup>, Ekaterina S. Oshchepkova<sup>1</sup>, Valery V. Sopilov<sup>1</sup>, Anastasia V. Ruslanova<sup>1</sup>, Alexandr A. Fukalov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Northern (Arctic) Federal University, 17 Severnoi Dviny Embkt, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation

<sup>2</sup>Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4 2-ya Krasnoarmeyskaya St, Saint Petersburg, 190005, Russian Federation

\*egpv1989@mail.ru

### Article history

Received: September 3, 2020

Revised: November 13, 2020

Accepted: November 20, 2020

### Abstract

Wooden-composite plate-ribbed bent panels with structural plywood and oriented strand board sheathing with breaks are considered. An overview of studies researching and improving the effectiveness of different types of panels is presented. On the basis of the theory of calculation of composite rods by A.R. Rzhanitsyn, a mathematical model has been compiled, which makes it possible to calculate the stress-strain state of these structures, taking into account the presence of breaks in the sheathing and the flexibility of the mechanical fasteners of the sheathing and ribs. An equation for finding the coordinates of the most dangerous section of wooden ribs in the presence of breaks in the sheathing, which may not match with the middle of the span, is obtained. Panels with sheathing in a compressed zone with different locations of joints, symmetrically relative to the middle of the panel span are considered. Panels without joints in the skin are considered to compare the results. The graphs of the dependence of the maximum tensile stresses in the ribs in the most dangerous section and the maximum vertical displacements from the stiffness coefficient of the shear ties and the location of the breaks in the sheathing are presented. The values of the coefficients for the engineering design of panels, taking into account the decrease in the strength and deformation characteristics of the composite section of panels with breaks in the sheathing, as compared to panels with a solid sheathing, are obtained. The conclusions and recommendations, based on the results of the investigations, which can be used in the design of wooden-composite plate-ribbed structures, are formulated.

**Keywords:** wooden-composite ribbed panels, mechanical joints, cover splices, stiffness, compliance, shear

### For citation

Labudin B.V., Popov E.V., Oshchepkova E.S., Sopilov V.V., Ruslanova A.V., Fukalov A.A. Influence of cover splices on the stress-strain state of plate-ribbed wood-composite panels. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):439–451. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-439-451>

## 1. Введение

Композитные панели на деревянном каркасе с обшивками из плитных материалов – универсальные ограждающие и несущие конструкции. Они могут быть использованы в качестве покрытий, перекрытий, стеновых ограждений, а также в качестве основных несущих элементов в малоэтажном строительстве. Они выполняют функции прогонов, настила, подшивки, обеспечивают защиту здания от тепловых потерь при использовании в конструкции панели утеплителя, одновременно выступая в качестве жестких горизонтальных дисков. В качестве обшивок широкое применение нашли такие материалы, как конструкционная фанера (ФК) и ориентированно-стружечные плиты (ОСП). В качестве ребер – пиломатериалы хвойных пород согласно стандарту Российской Федерации [1].

Повышению эксплуатационных показателей композитных панелей из различных материалов посвящены многочисленные исследования. В работе [2] предложен способ соединения наружных и внут-

**Boris V. Labudin**, Professor of the Department of Engineering Constructions, Doctor of Technical Sciences; eLIBRARY SPIN-code: 6705-1677, Scopus Author ID: 57191523557, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2547-3096>

**Egor V. Popov**, Associate Professor of the Department of Engineering Constructions, Candidate of Technical Sciences; eLIBRARY SPIN-code: 5395-2753, Scopus Author ID: 57208305419, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8950-7558>

**Ekaterina S. Oshchepkova**, master student of the Department of Engineering Constructions; eLIBRARY SPIN-code: 7161-0280, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9707-9741>

**Valery V. Sopilov**, postgraduate student of the Department of Engineering Constructions; eLIBRARY SPIN-code: 5227-6839, Scopus Author ID: 57208300208, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1236-5950>

**Anastasia V. Ruslanova**, postgraduate student of the Department of Engineering Constructions; eLIBRARY SPIN-code: 7398-8035, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0298-9129>

**Alexandr A. Fukalov**, master student of the Department of Construction Economics, Housing and Communal Services of the Institute of Continuous Forms of Education; eLIBRARY SPIN-code: 2848-3709.

ренного слоя трехслойных панелей, позволяющий значительно повысить сопротивление швов продольному и поперечному сдвигам. В статье [3] исследуется прочность на изгиб сборных железобетонных стеновых панелей с утеплителем при использовании различных связей между наружными несущими железобетонными слоями. Работа [4] посвящена определению предельной сжимающей нагрузки и анализу устойчивости панелей из углеродного волокна и стекловолокна с ребрами жесткости Z- и L-профиля. В [5] приведены результаты исследований сдвиговой прочности между слоями модульных сэндвич-панелей с оболочкой из полиэтилена высокой плотности в зависимости от способа штамповки.

Для максимально эффективного включения обшивок в общую работу панели на деревянном каркасе традиционно применяются жесткие клеевые соединения на границе «ребро – обшивка» [6]. Однако ряд проведенных экспериментальных и теоретических исследований [7–9] показал, что учет обшивки возможен и при креплении ее к ребрам с использованием современных податливых механических связей, а применение связей с повышенным сопротивлением продольному сдвигу [10] позволяет использовать их как альтернативу клеевым соединениям [11; 12]. В работе [13] приводятся результаты исследований увеличения прочности панелей на деревянном каркасе, работающем совместно с обшивками из листовых материалов, крепление которых выполняется при помощи шурупов в процессе работы панели на сдвиг в качестве диафрагмы. В ряде теоретических работ широко рассматриваются обобщенные функции, позволяющие учитывать разрывные параметры обшивок [14–16].

## 2. Цель

Приведенная в действующих на территории Российской Федерации нормах [17] и рекомендациях [18] методика расчета панелей на деревянном каркасе (рис. 1) подразумевает их расчет как для элементов с цельным сечением, без учета податливости швов на границе ребер и обшивок. Такой подход может вносить значительную погрешность при оценке напряженно-деформированного состояния (НДС) панелей, в которых обшивка крепится к ребрам с применением механических связей в виде гвоздей, винтов или скоб [19], а также коннекторов различных видов [20]. При наличии стыков в обшивке расчетное сопротивление материала обшивки принимается с понижающим коэффициентом  $m_{\phi}$ , учитывающим снижение расчетного сопротивления в стыке и способ стыковки (склеивание на ус либо приклеивание фанерных накладок). При таком подходе, однако, не учитывается положение стыков по длине панели, а также случай стыка без применения клеевого соединения, который наиболее удобен при изготовлении панелей с механическими связями между обшивкой и ребрами, что делает эту работу актуальной. Вышесказанное позволяет повысить не только конструкционную эффективность панелей, но и энергетическую эффективность производства пилопродукции [21].

Вышеперечисленные факторы позволили для достижения цели сформулировать следующие задачи:

- разработать адекватную работе плитно-ребристой конструкции математическую модель, учитывающую податливость механических связей на границе ребра и обшивки, а также наличие стыков (разрывов), произвольно расположенных по длине пролета панели;
- получить корректирующие коэффициенты, которые позволили бы получать более точное решение в инженерных расчетах по первому и второму предельным состояниям.

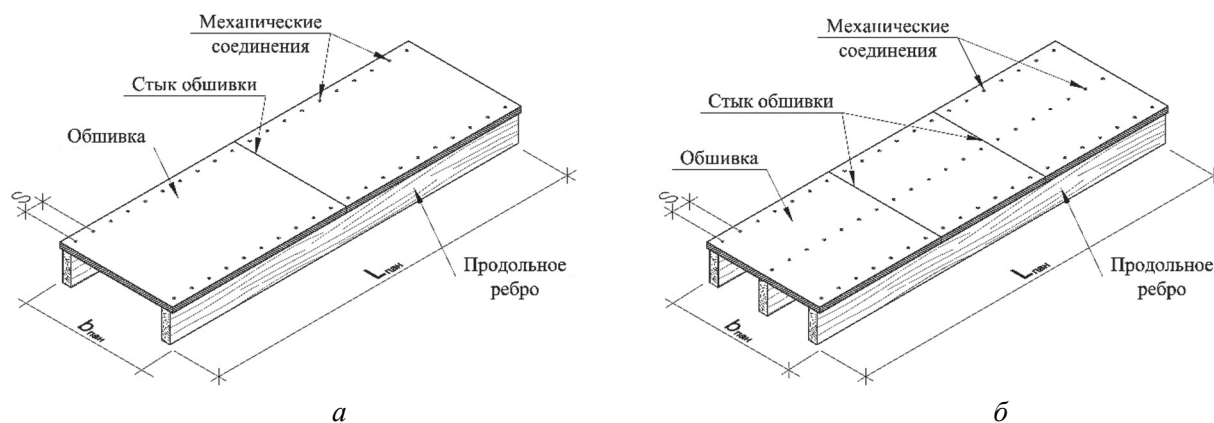
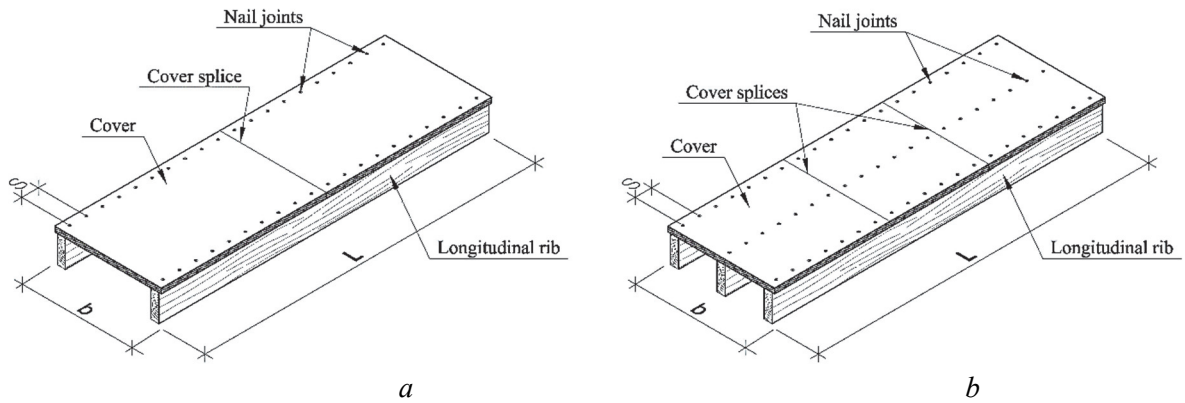


Рис. 1. Конструкция деревокомпозитной ребристой панели на механических связях со стыками в обшивке:  
а – стык в середине пролета; б – стыки в 1/3 пролета



**Figure 1.** Construction of wood-composite ribbed panel on mechanical ties with cover splices: *a* – splice in the middle of the span; *b* – splices in 1/3 span

### 3. Материалы и методы

При расчете ребристых с клеевым соединением и на механических связях панелей согласно действующим на территории Российской Федерации нормам [17] производится замена фактического поперечного сечения приведенным (рис. 2). Расчетная (приведенная) ширина сечения обшивки панели определяется путем умножения фактической ширины  $b_{\text{факт}}$  на коэффициент  $k_{\text{ред}}$ :

$$b_{\text{ред}} = k_{\text{ред}} b_{\text{факт}}, \quad (1)$$

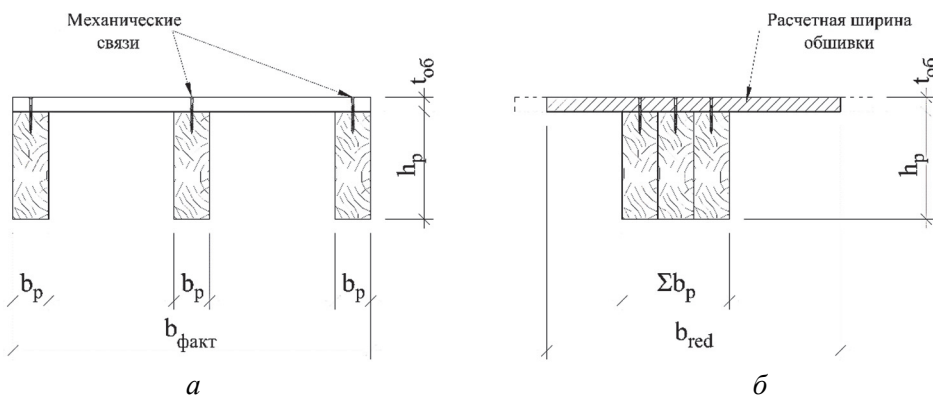
где  $k_{\text{ред}}$  – коэффициент приведения (редукции), учитывающий неравномерность распределения нормальных напряжений в поперечном сечении обшивки;  $b_{\text{факт}}$  – фактическая (габаритная) ширина обшивки.

Длину панели (рис. 3) разбиваем на три участка:  $L_1$  – участок от левой опоры до первого стыка,  $L_2$  – расстояние между стыками. За размер  $\sum L$  принимается полная величина расчетного пролета панели. Возможны два частных случая:  $L_2 = 0$  – соответствует наличию только одного стыка, в середине пролета;  $L_1 = 0 \rightarrow L_2 = \sum L$  – обшивка не имеет стыков по длине. При построении расчетной модели предполагается, что идеальная подгонка листов обшивки по торцам отсутствует и через стыки не передаются как изгибающие моменты, так и продольные сжимающие усилия.

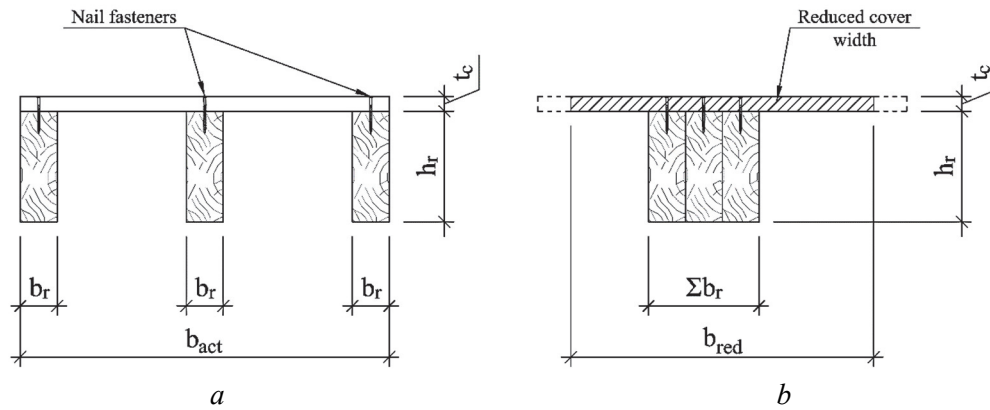
Панель рассматривается как двухслойный составной элемент, состоящий из обшивки и ребер. Наличие стыков (разрывов) в обшивке учитывается введением соответствующих граничных условий. Дифференциальное уравнение, описывающие распределение сдвигающих сил на границе «ребро–обшивка», согласно [22] имеет вид

$$T'' / \xi = \gamma T + \Delta, \quad (2)$$

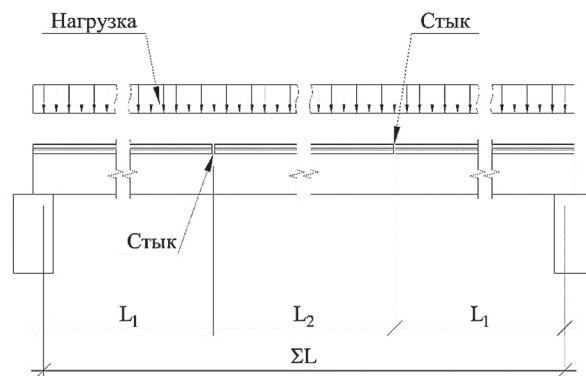
где  $T$  – функция распределения сдвигающих усилий;  $\xi$  – коэффициент жесткости связей сдвига, приведенный к погонному;  $\gamma, \Delta$  – коэффициент и свободный член дифференциального уравнения (2), определяемые по формулам (4) и (5), соответственно.



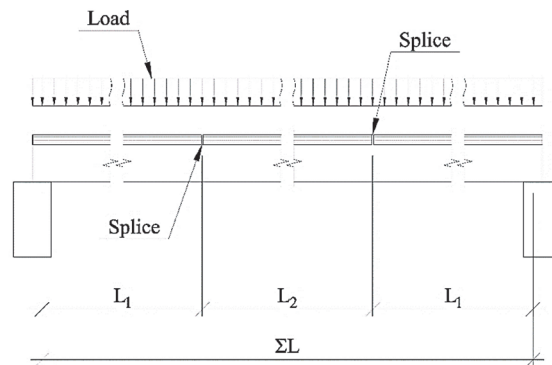
**Рис. 2.** Схема поперечного сечения двухслойной панели: *a* – фактическое сечение; *б* – приведенное тавровое сечение



**Figure 2.** Cross-section of a two-layer plate element:  
*a* – the actual cross-section; *b* – the reduced T-section



**Рис. 3.** Схема панели со стыками в обшивке



**Figure 3.** The scheme of the a panel with breaks of a cover

Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$T(x) = C_1 \operatorname{sh} \lambda x + C_2 \operatorname{ch} \lambda x + \frac{\xi}{\lambda} \cdot \int_0^x \Delta(t) \sin(\lambda(x-t)) dt, \quad (3)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

$$\gamma = 1/E_{o6}A_{o6} + 1/E_pA_p + c^2/\Sigma EI, \quad (4)$$

где  $E_{o6}, E_p, A_{o6}, A_p$  – модули упругости материалов и площади поперечного сечения обшивки и ребра соответственно;  $c$  – расстояние между центрами тяжести сечений обшивки и ребра;  $\Sigma EI$  – сумма изгибных жесткостей обшивки и ребра.

$$\Delta(t) = -M_0(t) \cdot c / \Sigma EI, \quad (5)$$

где  $M_0(t)$  – функция распределения изгибающих моментов только от внешней нагрузки  $q = \text{const}$  в пределах длин участков панели.

Значения изгибающих моментов на участках  $L_1$  и  $L_2$  можно определить по формулам:

– для участка  $L_1$ :

$$M_0(t) = \frac{q \Sigma L \cdot t - q \cdot t^2}{2}; \quad (6)$$

– для участка  $L_2$ :

$$M_0(t) = \frac{q \Sigma L}{2} \cdot (L_1 + t) - q L_1 \left( \frac{L_1}{2} + t \right) - \frac{q t^2}{2}, \quad (7)$$

где  $t$  – координата, отсчитываемая от начала рассматриваемого участка;  $q$  – равномерно распределенная нагрузка на панель, приведенная к погонной:  $q = g \cdot b_{\text{пан}}$ , здесь  $g$  – распределенная нагрузка на  $1 \text{ м}^2$  панели.

Схема распределения усилий и напряжений на выделенном фрагменте панели с механическими податливыми связями представлена на рис. 4.

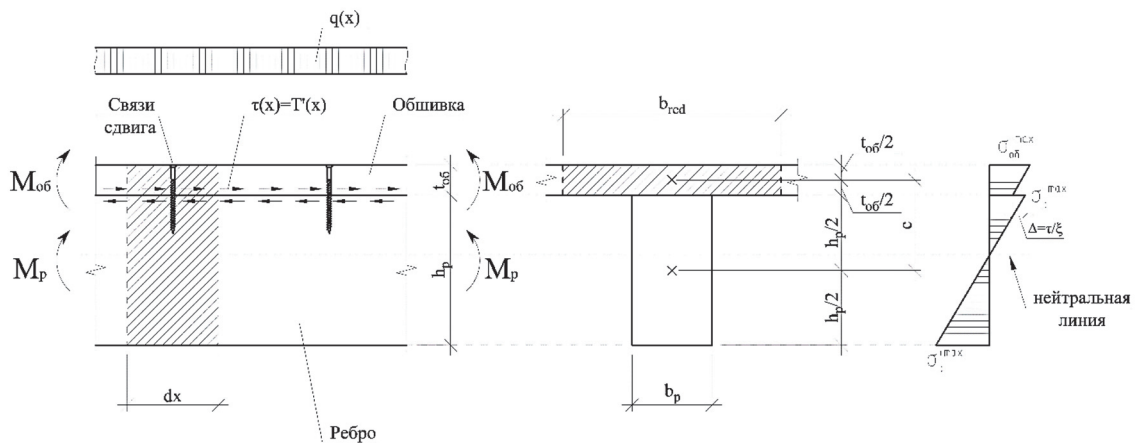


Рис. 4. Схема распределения усилий и напряжений на выделенном участке панели

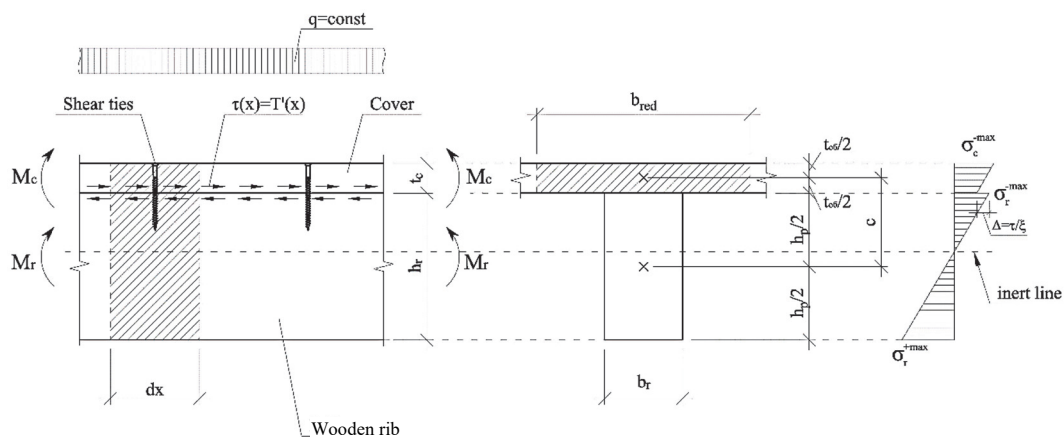


Figure 4. Distribution of forces and stresses scheme on the selected section of the panel

Решения дифференциального уравнения (2) при подстановке в него (5), (6) и (7) будет иметь вид:  
– для участка  $L_1$ :

$$T(x_1) = A_1 \text{sh} \lambda x_1 + B_1 \text{ch} \lambda x_1 + \frac{\xi}{\lambda} \int_0^{x_1} \left( -\frac{(0,5q \Sigma L \cdot t - 0,5qt^2) \cdot c}{\Sigma EI} \right) \sin(\lambda(x_1 - t)) dt; \quad (8)$$



– для участка  $L_2$ :

$$T(x_2) = A_2 sh\lambda x_2 + B_2 ch\lambda x_2 + \frac{\xi}{\lambda} \cdot \int_0^{x_2} \left( \frac{\left( \frac{q\Sigma L(L_1+t)}{2} - qL\left(\frac{L_1+t}{2}\right) - \frac{qt^2}{2} \right) \cdot c}{\Sigma EI} \right) \sin(\lambda(x_2-t)) dt, \quad (9)$$

где  $x_1, x_2$  – координаты, отсчитываемые от начала участков  $L_1$  и  $L_2$  слева направо соответственно;  $A_i, B_i$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Интегрируя правую часть решений (8), (9) получаем выражения

$$T(x_1) = A_1 sh\lambda x_1 + B_1 ch\lambda x_1 - \frac{\xi}{\lambda} \cdot \left( \frac{cq \left[ \lambda^2 x_1^2 + \Sigma L \lambda sh\lambda x_1 - 2ch\lambda x_1 - \Sigma L \lambda^2 x_1 + 2 \right]}{2 \Sigma EI \lambda^3} \right), \quad (10)$$

$$T(x_2) = A_2 sh\lambda x_2 + B_2 ch\lambda x_2 - \frac{\xi}{2 \Sigma EI \lambda^4} \times$$

$$\times \left( cq \left[ 2 - 2ch\lambda x_2 + L_1^2 \lambda^2 + \lambda^2 x_2^2 - L_1^2 \lambda^2 ch\lambda x_2 + \Sigma L \lambda sh\lambda x_2 - 2L_1 \lambda sh\lambda x_2 - \Sigma L L_1 \lambda^2 - L \lambda^2 x_2 + 2L_1 \lambda^2 x_2 + \Sigma L L_1 \lambda^2 ch\lambda x_2 \right] \right). \quad (11)$$

Поскольку на границах участков (в стыках) препятствия сдвигу обшивки относительно ребра отсутствуют, граничные условия будут иметь вид  $T(0) = T(L_1) = T(L_2) = 0 \rightarrow B_1 = B_2 = 0$ . Соответственно:

$$A_1 = \frac{\xi cq (\lambda^2 L_1^2 - 2ch\lambda L_1 + \Sigma L \lambda sh\lambda L_1 - \Sigma L \lambda^2 L_1 + 2)}{2 \Sigma EI \lambda^4 sh(\lambda L_1)}, \quad (12)$$

$$A_2 = \frac{\xi cq}{2 \Sigma EI \lambda^4 sh\lambda L_2} \times$$

$$\times \left( L_1^2 \lambda^2 - 2ch(L_2 \lambda) + L_2^2 \lambda^2 - L_1^2 \lambda^2 chL_2 \lambda + \Sigma L \lambda shL_2 \lambda - 2L_1 \lambda shL_2 \lambda - \Sigma L L_1 \lambda^2 - \Sigma L L_2 \lambda^2 + 2L_1 L_2 \lambda^2 + \Sigma L L_1 \lambda^2 chL_2 \lambda + 2 \right), \quad (13)$$

где  $\lambda$  – характеристическое число, определяемое по формуле

$$\lambda = \sqrt{\xi \cdot \gamma}, \quad (14)$$

где  $\xi$  – погонный коэффициент жесткости соединений на границе «ребро – обшивка»;  $\gamma$  – коэффициент дифференциального уравнения (2), определяемый по формуле (4).

Изгибающие моменты в плите и ребре с учетом работы связей сдвига (рис. 4) определяются по формулам

$$M_{об} = (M_0 - T \cdot c) \frac{E_{об} I_{об}}{\Sigma EI}; \quad M_p = (M_0 - T \cdot c) \frac{E_p I_p}{\Sigma EI}. \quad (15)$$

Нормальные напряжения:

$$\sigma_{об} = \frac{-T}{A_{об}} \pm \frac{M_{об} \cdot 0,5 \cdot t_{об}}{2 I_{об}}; \quad \sigma_p = \frac{T}{A_p} \pm \frac{M_p \cdot h_p}{2 I_p}. \quad (16)$$

Для панели с двумя стыками в ряде случаев положение наиболее опасного сечения может не совпадать с серединой пролета. Для поиска сечения с наибольшими растягивающими напряжениями в нижней зоне ребра следует решить уравнение (17) относительно  $x_2$ :

$$d \left( \frac{T_2(x_2)}{A_p} \pm \frac{(M_0(x_2) - T(x_2) \cdot c) \cdot h_p}{2 I_p} \right) / dx_2 = 0. \quad (17)$$

Для определения прогиба панели запишем уравнение изогнутой оси изгибаемого элемента:

$$y(x) = \int \int \frac{M(x)}{\Sigma EI} dx dx = \frac{1}{\Sigma EI} \int \int M(x) dx dx. \quad (18)$$

Функция  $y(x)$  будет иметь переломы в местах стыков в обшивке, поэтому выражение (18) следует составить для участков  $L_1$  и  $L_2$ , а равенство прогибов на границе участков связать граничными условиями. Получим выражения

$$y_1(x_1) = \frac{1}{\Sigma EI} \int \int M_1(x_1) dx dx = \frac{1}{\Sigma EI} \int \int \left( \frac{q \Sigma L x_1 - q x_1^2}{2} - T_1(x_1) \cdot c \right) dx dx; \quad (19)$$

$$y_2(x_2) = \frac{1}{\Sigma EI} \int \int M_2(x_2) dx dx = \frac{1}{\Sigma EI} \int \int \left( \frac{q \Sigma L (L_1 + x_2) - q x_2^2}{2} - q \Sigma L \left( \frac{L_1 + x_2}{2} \right) - T_2(x_2) \cdot c \right) dx dx, \quad (20)$$

где  $y_1, y_2$  – функции прогибов панели на участках  $L_1$  и  $L_2$  соответственно.

Очевидно, что интегрирование выражений (19), (20) с входящими в них зависимостями распределения сдвигающих усилий (10) и (11) представляет довольно сложную задачу, поэтому для упрощения решения заменим подынтегральные функции квадратичными полиномами вида

$$M_1(x_1) = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + d_1; \quad M_2(x_2) = a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + d_2, \quad (21)$$

где  $a_i, b_i$  и  $d_i$  – коэффициенты и свободные члены аппроксимирующих полиномов, определяемые методом наименьших квадратов, учитывая, что  $M_1(0) = 0$ , свободный член  $d_1 = 0$ .

Подставляя выражения (21) в (18) и интегрируя их, получаем

$$y_1(x_1) = \frac{1}{\Sigma EI} \left( \frac{a_1 x_1^4 + 2b_1 x_1^3}{12} + C_1 x_1 + D_1 \right); \quad (22)$$

$$y_2(x_2) = \frac{1}{\Sigma EI} \left( \frac{a_2 x_2^4 + 2b_2 x_2^3 + 6d_2 x_2^2}{12} + C_2 x_2 + D_2 \right), \quad (23)$$

где  $C_i$  и  $D_i$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Из условия равенства прогиба нулю на опоре, а также равенства прогибов и углов поворота сечений на границах участков  $L_1$  и  $L_2$  получаем  $y_1(0) = 0$ ;  $y_1(L_1) = y_2(0) = y_2(L_2)$ ;  $y_1'(L_1) = y_2'(0) = y_2'(L_2)$ , что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{a_1 x_1^4 + 2b_1 x_1^3}{12} + C_1 x + D_1 = 0; \\ \frac{a_1 L_1^4 + b_1 L_1^3}{12} + C_1 \cdot L_1 + D_1 = D_2; \\ \frac{a_1 L_1^3}{3} + \frac{b_1 L_1^2}{2} + C_1 = C_2; \\ \frac{a_1 L_1^4 + 2b_1 L_1^3}{12} + C_1 L_1 + D_1 = \frac{a_2 L_2^4 + 2b_2 L_2^3 + d_2 L_2^2}{12} + C_2 L_2 + D_2, \end{cases} \quad (24)$$

решая которую получаем выражения для определения произвольных постоянных:

$$C_1 = -\frac{a_1 L_1^3}{3} - \frac{b_1 L_1^2}{2} - \frac{a_2 L_2^3 + 2b_2 L_2^2 + 6d_2 L_2}{12}; \quad C_2 = -\frac{a_2 L_2^3 - 2b_2 L_2^2 - 6d_2 L_2}{12}; \quad (25)$$

$$D_1 = 0; \quad D_2 = -\frac{a_1 L_1^4}{4} - \frac{b_1 L_1^3}{3} - \frac{a_2 L_1 L_2^3 + 2b_2 L_1 L_2^2 + 6d_2 L_1 L_2}{12}. \quad (26)$$

#### 4. Результаты

Рассмотрим НДС плитно-ребристой конструкции на примере одной деревокомпозитной панели пролетом  $\sum L = 6$  м с тремя продольными ребрами и обшивкой из фанеры конструкционной марки ФК/ориентированно-стружечной плиты ОСП толщиной 18 мм. Ребра выполняются из древесины класса прочности С22 согласно стандарту Российской Федерации [1] сечением 50×200 мм. Распределенная нагрузка, приведенная к погонной, составляет  $q = 1$  кН/п.м. Расчетная ширина обшивки принимается согласно работе [17] и составляет  $b_{red} = 1,125$  м.

Обшивки укладываются со стыками на расстоянии 1, 2 и 3 м от опор, результаты сравниваются с панелью, где отсутствуют стыки в обшивке. Жесткость податливых связей сдвига принята согласно исследованиям [23] и рассматривается в интервале  $\xi = 2000 \dots 10000$  кН/м<sup>2</sup> на каждый шов. За критерий прочности принимаются нормальные напряжения  $\sigma_r$  в растянутой зоне ребра, поскольку при выбранной схеме они являются критерием прочности всей конструкции. Графики зависимости напряжений  $\sigma_r$  от коэффициента жесткости связей  $\xi$  представлены на рис. 5, а. Значение  $\xi = \infty$  соответствует жесткому кле-евому соединению обшивки и ребер.

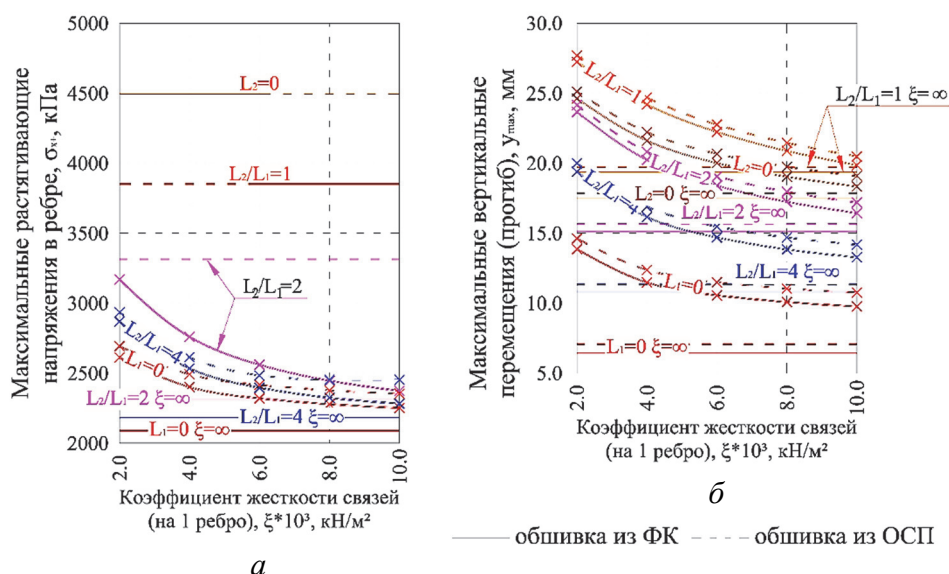


Рис. 5. Графики зависимости максимальных растягивающих напряжений  $\sigma_{x+}$  в растянутой зоне ребер (а); максимальных вертикальных перемещений (б) от коэффициента жесткости связей сдвига  $\xi$  и расположения стыков в обшивке  $L_1/L_2$

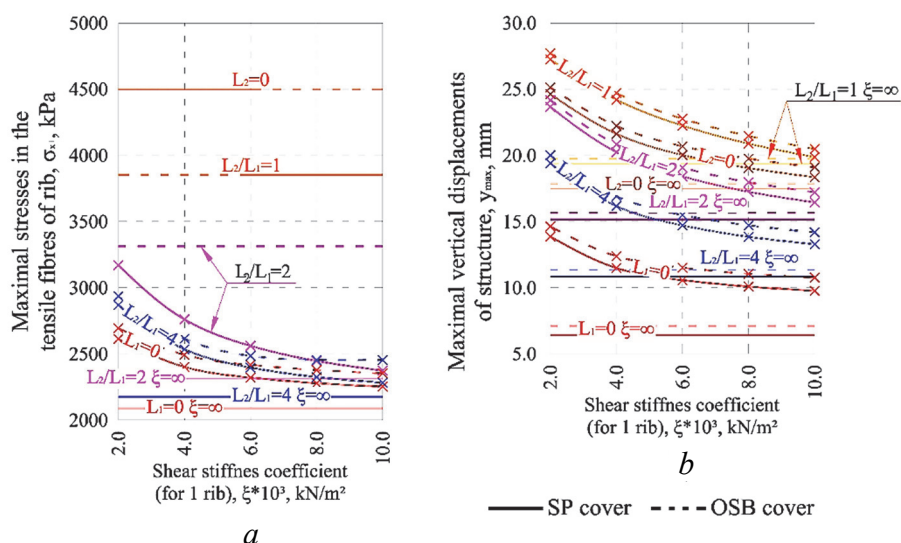


Figure 5. Graphs of the dependence of the maximum tensile stresses  $\sigma_{x+}$  in the tensile fibres of the rib (a) and maximum vertical displacements (b) on the shear stiffness coefficient of ties  $\xi$

## 5. Обсуждение

Наличие стыков в обшивке существенно влияет на работу деревокомпозитной панели. С уменьшением соотношения  $L_2/L_1$  эффективность работы обшивки в составе конструкции снижается. Расчеты показали, что доля снижения прочности панели при изгибе может составлять 9,8...47,5 % (8,9...43,1 %) для панели с обшивкой из ФК (ОСП). При расположении стыков на расстоянии  $1/3$  от опор панели (при  $L_2/L_1 \leq 1$ ) наиболее опасное сечение будет находиться на стыке обшивок. При расположении стыка в середине пролета ( $L_2 = 0$ ) прочность панели при изгибе будет обусловлена только прочностью ребер.

Расчет вертикальных перемещений дает аналогичные результаты: при удалении стыков обшивок от опорных сечений прогибы конструкции увеличиваются на 40...100 % для панелей с обшивкой из ФК и на 37...90 % с обшивкой из ОСП. Однако соотношение  $L_2/L_1 = 1$  является в данном случае наиболее неблагоприятным, чем при  $L_2 = 0$ . Таким образом, при необходимости устройства стыков обшивки на расстоянии более чем  $1/3 \sum L$  от опор нужно учитывать, какой фактор будет являться решающим при выборе сечения в каждом конкретном случае – прочность или вертикальные перемещения.

При инженерном расчете деревокомпозитных изгибаемых панелей предложено вводить в расчет коэффициенты  $k_{ст,в}$  и  $k_{ст,ж}$ , учитывающие негативное влияние стыков в обшивке на прочность и жесткость всей конструкции панели. На данные коэффициенты умножаются полученные значения нормальных напряжений и прогибов, рассчитанные для панели без стыков в обшивке. Методика расчета таких панелей представлена в работе [24].

Значения коэффициентов  $k_{ст,в}$  и  $k_{ст,ж}$  определяются по формуле

$$k_{ст,в} = \frac{(\sigma_p^+)' }{\sigma_p^+}; \quad k_{ст,ж} = \frac{f'}{f}, \quad (27)$$

где  $\sigma_p^+$ ,  $(\sigma_p^+)'$  – значения максимальных растягивающих напряжений в ребре панели без стыков в обшивке и со стыками соответственно;  $f'$ ,  $f$  – значения максимальных вертикальных перемещений в ребре панели без стыков в обшивке и со стыками соответственно.

Таблица

Значения коэффициентов  $k_{ст,в}$  и  $k_{ст,ж}$   
[Table. Values of coefficients  $k_{sp,v}$  and  $k_{sp,j}$ ]

Коэффициент [Coefficient]	Расположение стыков ( $L_2/L_1$ ) [ $L_2/L_1$ ratio]			
	4	2	1	$L_2 = 0$
$k_{ст,в}$ [ $k_{sp,v}$ ]	1,1*	1,21	1,47	–
	1,1	1,23	1,47	–
$k_{ст,ж}$ [ $k_{sp,j}$ ]	1,4	1,7	2,0	1,78
	1,37	1,65	1,9	1,72

*Примечание.* \* В числителе приведены значения для панелей с обшивками из ФК, в знаменателе – из ОСП.

[Note. \* The numerator shows the values for panels with SP covers, and the values with OSB covers – in the denominator.]

Значения предложенных коэффициентов в зависимости от соотношения  $L_2/L_1$  приведены в таблице. Для промежуточных значений  $L_2/L_1$ , не представленных в таблице, значения коэффициентов определяются по линейной интерполяции.

## 6. Заключение

Разработана математическая модель, позволяющая численно-аналитически определить напряженно-деформированное состояние деревокомпозитных плитно-ребристых изгибаемых панелей с учетом податливости связей на границе обшивки и ребер, а также наличия стыков (разрывов) в обшивке.

Стыки в обшивке отрицательно сказываются на НДС деревокомпозитной плитно-ребристой конструкции, увеличивая нормальные растягивающие напряжения в ребре на 10...50 %, а максимальные вертикальные перемещения на 40...100 % по сравнению с панелью без стыков в обшивке.

При необходимости устройства стыков в обшивке и для более эффективной работы конструкции рекомендуется размещать их за пределами средней трети расчетного пролета панели. При невозможности выполнения данного условия следует учитывать какой из критериев – прочность или прогиб – является определяющим при назначении размеров поперечного сечения основных ребер.

Предложены значения коэффициентов  $k_{ст,в}$  и  $k_{ст,ж}$  для инженерного расчета панелей, учитывающих снижение прочностных и деформационных характеристик композитного сечения панели с разрывами в обшивке. Значения этих коэффициентов рекомендуется определять по вышеприведенной таблице с учетом их местоположения в пролете панели.

**Информация о вкладе каждого автора.** *Е.В. Попов, Б.В. Лабудин* – составление математической модели; *Е.С. Ощепкова, В.В. Сопилов* – написание вводной части, проведение численных исследований на основе созданной математической модели; *А.А. Русланова* – оформление работы, перевод на английский язык и транслитерация; *А.А. Фукалов* – построение рисунков и графиков, формулировка выводов и заключения.

**Credit author statement.** *Egor V. Popov, Boris V. Labudin* – a mathematical model design; *Ekaterina S. Oshchepkova, Valery V. Sopilov* – an introductory part, conducting numerical researches, based on the created mathematical model; *Anastasia V. Ruslanova* – design of document, translation into English and transliteration; *Alexandr A. Fukalov* – design of figures and graphs, formulation of conclusions.

### Список литературы

- ГОСТ 33080-2014. Конструкции деревянные. Классы прочности конструкционных пиломатериалов и методы их определения. М.: Стандартинформ, 2019.
- Naika R.K., Panda S.K., Racherla V.* A new method for joining metal and polymer sheets in sandwich panels for highly improved interface strength // *Composite Structures*. 2020, November. Vol. 251. Article 112661. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112661.
- Gombada M.J., Naito C.J., Quiel S.E.* Flexural performance of precast concrete insulated wall panels with various configurations of ductile shear ties // *Journal of Building Engineering*. 2021, January. Vol. 33. Article 101574. <https://doi.org/10.1016/j.job.2020.101574>
- Elumalai E.S., Krishnaveni G., Sarath Kumar R., Dominic Xavier D., Kavitha G., Seralathan S., Hariram V., Micha Premkumar T.* Buckling analysis of stiffened composite curved panels // *Materials Today: Proceedings*. 2020, 20 June. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.05.662.
- Tahmoorian F., Nemati S., Sharafi P., Samali B., Khakpour S.* Punching behaviour of foam filled modular sandwich panels with high-density polyethylene skins // *Journal of Building Engineering*. 2021, January. Vol. 33. Article 101634. DOI: 10.1016/j.job.2020.101634.
- Гребенюк Г.И., Дмитриев П.А., Жаданов В.И., Астащенко Г.Г.* Конструирование, расчет и оптимизация совмещенных ребристых конструкций на основе древесины // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2013. № 11–12 (659–660). С. 48–57.
- Кавелин А.С.* Исследование работы на сдвиг гвоздевого соединения обшивки и ребра деревянной стеновой панели // *Строительство-2014: современные проблемы промышленного и гражданского строительства: материалы международной научно-практической конференции*. Ростов н/Д, 2014. С. 98–100.
- Labudin B., Popov E., Stolypin D., Sopilov V.* The wood composite ribbed panels on mechanical joints // *E3S Web Conf*. 2019. Vol. 91. Topical Problems of Architecture, Civil Engineering and Environmental Economics (TPACEE 2018). DOI: 10.1051/e3sconf/20199102021.
- Labudin B.V., Popov E. V., Sopilov V.V.* Stability of compressed sheathings of wood composite plate-ribbed structures // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 687. Issue 3. Article 033041. DOI: 10.1088/1757-899X/687/3/033041.
- Попов Е.В., Тюрикова Т.В., Лабудин Б.В., Мелехов В.И.* О повышении сдвигоустойчивости податливых связей составных деревянных конструкций на когтевых шайбах Bulldog // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 4. С. 23–28.
- Попов Е.В., Филиппов В.В., Мелехов В.И., Лабудин Б.В., Тюрикова Т.В.* Влияние жесткости связей сдвига при расчете ребристых панелей на деревянном каркасе // *Лесной журнал*. 2016. № 4. С. 123–134.
- Попов Е.В., Филиппов В.В., Журавлева Т.П., Мелехов В.И., Лабудин Б.В.* Экспериментальные исследования жесткости связей в напряженно-деформированном состоянии панелей на открытых каркасе // *Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения*. 2016. № 1. С. 111–117.
- Baszen M.* Semi-rigid behavior of joints in wood light-frame structures // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 172. Pp. 88–95. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.022>
- Михайлов Б.К.* Пластины и оболочки с разрывными параметрами / под ред. В.А. Лебедева Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 196 с.
- Кобелев Е.А.* Расчет нелинейно-упругих оболочек, дискретно соединенных ребрами // *Перспективы науки*. 2018. № 11(110). С. 54–62.

16. Кондратьева Л.Н., Окладникова Е.В. Исследование частот и форм колебаний трехслойных пологих обло- лочек с изломами поверхности // Промышленное и гражданское строительство. 2008. № 7. С. 38–39.
17. СП 64.13330.2017. Свод правил. Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-25-80 (с Изменением № 1). М.: Стандартинформ, 2017.
18. Рекомендации по проектированию панельных конструкций с применением древесины и древесных мате- риалов для производственных зданий / ЦНИИСК имени В.А. Кучеренко. М., 1982. 120 с.
19. Лабудин Б.В. Расчет плитно-ребристых конструкций с упругоподатливыми связями // Лесной журнал. 1992. № 1. С. 67–72.
20. Римшин В.И., Лабудин Б.В., Мелехов В.И., Попов Е.В., Рощина С.И. Соединения элементов деревянных конструкций на шпонках и шайбах // Вестник МГСУ. 2016. № 9. С. 35–50.
21. Агеев С.П. Повышение энергетической эффективности производства пилопродукции: автореф. дис. ... д. т. н. Архангельск, 2011. 37 с.
22. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки: научное издание. М.: Стройиздат, 1986. 314 с.
23. Labudin B.V., Popov E.V., Tyurikova T.V., Nikitina T.A., Ruslanova A.V. Experimental studies of the strength and rigidity of screw connections of covers with wooden ribs // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 753. Chapter 3. Article 042063. DOI:10.1088/1757-899X/753/4/042063.
24. Попов Е.В., Тюрюкова Т.В., Поликарпов Д.А., Тропина П.М., Лабудин Б.В., Мелехов В.И. Инженерный расчет ребристых деревокомпозитных панелей с упруго-деформируемыми связями // Наука сегодня. Теоретические и прак- тические аспекты: материалы Международной научно-практической конференции. Вологда, 2016. С. 53–57.

### References

1. GOST 33080-2014. *Konstrukcii derevyannye. Klassy prochnosti konstrukcionnyh pilomaterialov i metody ih op- redeleniya* [Wooden constructions. Strength classes of structural sawn timber and methods for their determination]. Moscow: Standartinform Publ.; 2019. (In Russ.)
2. Naika R.K., Panda S.K., Racherla V. A new method for joining metal and polymer sheets in sandwich panels for highly improved interface strength. *Composite Structures*. 2020(November);251:112661. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112661.
3. Gombada M.J., Naito C.J., Quiel S.E. Flexural performance of precast concrete insulated wall panels with various configura- tions of ductile shear ties. *Journal of Building Engineering*. 2021(January);33:101574. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2020.101574>
4. Elumalai E.S., Krishnaveni G., Sarath Kumar R., Dominic Xavier D., Kavitha G., Seralathan S., Hariram V., Micha Premkumar T. Buckling analysis of stiffened composite curved panels. *Materials Today: Proceedings*. 2020, 20 June. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.05.662.
5. Tahmoorian F., Nemati S., Sharafi P., Samali B., Khakpour S. Punching behaviour of foam filled modular sandwich panels with high-density polyethylene skins. *Journal of Building Engineering*. 2021(January);33:101634. DOI/10.1016/j.jobe.2020.101634.
6. Grebenyuk G.I., Dmitriev P.A., Zhadanov V.I., Astashenkov G.G. Designing, calculation and optimization of the combined ridge designs on the basis of wood. *News of higher educational institutions. Construction*. 2013;11–12(659–660): 48–57. (In Russ.)
7. Kavelin A.S. Issledovanie raboty na sdvig gvozdevogo soedineniya obshivki i rebra derevyannoj stenovoj paneli [Investigation of the work on the shift of the nail joint of the sheathing and the ribs of the wooden wall panel]. *Construction-2014: modern problems of industrial and civil building: materials of the international scientific and practical conference*. Rostov-on-Don; 2014. p. 98–100. (In Russ.)
8. Labudin B., Popov E., Stolypin D., Sopilov V. The wood composite ribbed panels on mechanical joints. *E3S Web Conf. Topical Problems of Architecture, Civil Engineering and Environmental Economics (TPACEE 2018)*. 2019:91. DOI: 10.1051/e3sconf/20199102021.
9. Labudin B.V., Popov E.V., Sopilov V.V. Stability of compressed sheathings of wood composite plate-ribbed structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019;687(3):033041. DOI: 10.1088/1757-899X/687/3/033041.
10. Попов Е.В., Тюрюкова Т.В., Лабудин Б.В., Мелехов В.И. О povyshenii sdvigoustojchivosti podatlivyh svyazej sostavnyh derevyannykh konstrukcij na kogtevyh shajbah “Bulldog” [On increasing the shear stability of the flexible links of composite wooden structures on the bulldog claw washers]. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2016;(4): 23–28. (In Russ.)
11. Попов Е.В., Филиппов В.В., Мелехов В.И., Лабудин Б.В., Тюрюкова Т.В. Effect of shear connections rigidity in calculating the ribbed panels on a wooden frame. *Lesnoy zhurnal [Russian Forestry Journal]*. 2016;(4):123–134. (In Russ.) DOI: 10.17238/issn0536-1036.2016.4.136.
12. Попов Е.В., Филиппов В.В., Zhuravleva T.P., Мелехов В.И., Лабудин Б.В. Eksperimental'nye issledovaniya zhestkosti svyazej v napryazhenno-deformirovannom sostoyanii panelej na otkrytyh karkase [Experimental studies of the stiffness of ties in the stress-strain state of panels on open frames]. *Bezopasnost' stroitel'nogo fonla Rossii. Problemy i resheniya* [Secu- rity of the building fund in Russia: problems and solutions]. 2016;(1):111–117. (In Russ.)
13. Baszen M. Semi-rigid behavior of joints in wood light-frame structures. *Procedia Engineering*. 2017;172:88–95. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.022>
14. Mihajlov B.K. Plastiny i obolochki s razryvnymi parametrami [Plates and shells with discontinuous parameters]. Leningrad: LGU Publ.; 1980. (In Russ.)

15. Kobelev E.A. Calculation of nonlinear elastic shells discretely connected by edges. *Science Prospects*. 2018;(11): 54–62. (In Russ.)
16. Kondrateva L.N., Okladnikova E.V. Study of frequencies and forms of fluctuations of three-layer flat shells with surface fractures. *Industrial and civil engineering*. 2008;(7):38–39. (In Russ.)
17. SP 64.13330.2017. *Svod pravil. Derevyannye konstrukcii. Aktualizirovannaya redakciya SNIIP II-25-80 (s Izmeneniem № 1)* [Set of rules. Wooden structures. Updated edition of SNIIP II-25-80 (with Amendment No. 1)]. Moscow: Standartinform Publ.; 2017. (In Russ.)
18. CNIISK imeni V.A. Kucherenko. *Rekomendacii po proektirovaniyu panel'nyh konstrukcij s primeneniem drevesiny i drevesnyh materialov dlya proizvodstvennyh zdaniy* [Recommendations for the design of panel structures using wood and wood materials for industrial buildings]. Moscow; 1982. (In Russ.)
19. Labudin B.V. Raschet plitno-rebristyh konstrukcij s uprugo-podatlivymi svyazyami [Calculation of plate-ribbed structures with elastic-yielding bonds]. *Lesnoy zhurnal [Russian Forestry Journal]*. 1992;(1):67–72. (In Russ.)
20. Rimshin V.I., Labudin B.V., Melekhov V.I., Popov E.V., Roshchina S.I. Dowel and washer connections for elements of wooden structures. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2016;(9):35–50. (In Russ.)
21. Ageev S.P. Povyslenie energeticheskoy effektivnosti proizvodstva piloprodukcii [Increasing the energy efficiency of sawn timber production] (Abstract Dissertation of Doctor of Technical Sciences). Arkhangelsk; 2011. (In Russ.)
22. Rzhanicyn A.R. *Sostavnye sterzhni i plastinki [Composite rods and plates]*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1986. (In Russ.)
23. Labudin B.V., Popov E.V., Tyurikova T.V., Nikitina T.A., Ruslanova A.V. Experimental studies of the strength and rigidity of screw connections of covers with wooden ribs. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019;753(Chapter 3):042063. DOI:10.1088/1757-899X/753/4/042063.
24. Popov E.V., Tyurikova T.V., Polikarpov D.A., Tropina P.M., Labudin B.V., Melekhov V.I. Inzhenernyj raschet rebristyh derevokompozitnyh panelej s uprugodeformiruemyimi svyazyami [Engineering calculation of ribbed wood-composite panels with elastic-deformable bonds]. *Nauka segodnya. Teoreticheskie i prakticheskie aspekty [Science today. Theoretical and practical aspects]*: materials of the International scientific and practical conference. Vologda; 2016. p. 53–57. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-452-464  
УДК 624.074.2:624.014:693.8

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Влияние высоты ребристо-кольцевого купола на напряженное состояние его каркаса в процессе навесного монтажа

Е.В. Лебедь

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26  
evglebed@mail.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 27 августа 2020 г.  
Доработана: 14 октября 2020 г.  
Принята к публикации: 11 ноября 2020 г.

### Аннотация

**Цель.** Выполнить анализ напряженного состояния конструкций ребристо-кольцевых куполов разной высоты при навесном монтаже. Купола имеют металлические каркасы сферической формы и опорный контур одинакового диаметра. Из-за разной высоты изменяется крутизна геометрической формы куполов. Исследование посвящено установлению зависимости между напряженным состоянием каркаса и крутизной купола при навесном монтаже. Выяснялось, как высота ребристо-кольцевого купола влияет на напряженное состояние его каркаса при навесном монтаже. **Методы.** Разработаны компьютерные модели проектных каркасов ребристо-кольцевых куполов разной высоты из стальных двутавров. На основе проектных моделей созданы монтажные модели неполного каркаса для разных стадий монтажа. И для проектной, и для всех монтажных моделей каркасов куполов разной высоты выполнены компьютерные расчеты на действие нагрузки от собственного веса. В результате расчетов для всех куполов и на всех стадиях монтажа определены деформации и напряжения в меридиональных ребрах, которые сравнивались с проектными схемами. **Результаты.** Получены сравнительные графики деформаций купольных каркасов, диаграммы изменения степени использования прочности стали в меридиональных ребрах на всех стадиях навесного монтажа. Показаны также сравнительные графики монтажных и проектных напряжений в меридиональных ребрах на разных ярусах для всех стадий навесного монтажа. Дана оценка монтажным напряженным состояниям, отмечена их неизбежность и степень влияния на напряженное состояние купольных каркасов.

**Ключевые слова:** ребристо-кольцевой купол, металлический каркас, меридиональные ребра, навесной монтаж, компьютерная модель, напряжения в элементах

### Для цитирования

Лебедь Е.В. Влияние высоты ребристо-кольцевого купола на напряженное состояние его каркаса в процессе навесного монтажа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 6. С. 452–464. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-452-464>

## Influence of the height of the ribbed-ring dome on the stress state of its frame during the overhang mounting process

Evgeny V. Lebed

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation  
evglebed@mail.ru

### Article history

Received: August 27, 2020  
Revised: October 14, 2020  
Accepted: November 11, 2020

### Abstract

**The aim of the research.** To analyze the stress state of structures of ribbed-ring domes of different heights during overhang erection. The domes have spherical metal frames and a support contour of the same diameter. Due to different heights, the steepness of the geometric shape of the domes changes. The study is

Лебедь Евгений Васильевич, доцент кафедры металлических и деревянных конструкций, кандидат технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 5297-2700, Scopus Author ID: 57197822677.

Evgeny V. Lebed, Associate Professor of the Department of Metal and Wooden Structures, Candidate of Technical Science; eLIBRARY SPIN-code: 5297-2700, Scopus Author ID: 57197822677.

© Лебедь Е.В., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



**For citation**

Lebed E.V. Influence of the height of the ribbed-ring dome on the stress state of its frame during the overhang mounting process. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6): 452–464. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-452-464>

devoted to establishing the relationship between the stress state of the frame and the steepness of the dome when mounted. It was investigated how the height of the ribbed-ring dome affects the stress state of its frame during overhang mounting process. *Methods*. Computer models of design frames of ribbed-ring domes of different heights made of steel I-beams were developed. Based on design models, a sequence of assembly models for incomplete frames was created for different stages of installation. Both for the design and for all installation models of dome frames of different heights, computer calculations were performed for the effect of the load from its own weight. As a result of calculations for all domes and at all stages of installation, deformations and stresses in the meridional ribs were determined, which were compared with the design diagrams. *Results*. Comparative graphs of deformations of dome frames and diagrams of changes in the degree of use of steel strength in meridional ribs at all stages of mounted installation are obtained. Comparative graphs of installation and design stresses in the meridional ribs on different tiers for all stages of mounted installation are also shown. The assessment of the installation stress states is given, their inevitability and the degree of influence on the stress state of the dome frames are noted.

**Keywords:** ribbed-ring dome, metal frame, meridional ribs, mounted installation, computer model, stresses in elements

## 1. Введение

Каркасы металлических куполов представляют собой пространственные конструктивные системы. Поэтому они обладают жесткостью, необходимой для надежной работы куполов в качестве покрытий зданий. Купола экономичны по расходу металла и обладают выразительным внешним обликом. Они занимают ведущее место в мировой строительной практике среди всех пространственных конструкций [1; 2]. Обычно купола применяются в качестве покрытий зданий при больших пролетах [3].

Как и другие большепролетные пространственные конструктивные системы, купола не появляются сразу и целиком. Свою проектную форму они приобретают постепенно в процессе возведения и в течение длительного времени [4; 5]. В начале монтажа появляются лишь отдельные конструкции или фрагменты купольного каркаса. Затем к ним добавляются новые конструкции, в результате чего поэтапно формируется покрытие. Только после монтажа всех элементов каркаса образуются и конструктивная, и расчетная схемы купола, предусмотренные проектом. Монтаж купольного каркаса сопровождается появлением и преобразованием сложных конструктивных систем. На разных стадиях монтажа каркаса возникают разные расчетные схемы промежуточных конструктивных систем, воспринимающих нагрузки от собственного веса [5; 6].

Вид и статический характер монтажных расчетных схем зависят от конструктивного решения купольного каркаса и принятого способа его возведения. Способ возведения или монтажа выбирается исходя из размеров купольного каркаса и его конструктивного решения [7; 8]. При выборе способа монтажа учитываются и размеры конструктивных элементов каркаса, и их способности воспринимать монтажные нагрузки. От способа монтажа зависят сроки строительства, характер технологических операций и выбор подъемно-транспортных машин и механизмов. Большинство металлических куполов построено с применением разных систем временных опор [8; 9], и при относительно невысоких или пологих куполах этот способ был предпочтителен. В высоких куполах применялся навесной монтаж, когда временные опоры вообще не используются.

Монтаж куполов навесным способом осуществляется от опорного контура, когда сначала устанавливают первый ярус купольного каркаса, затем ярус за ярусом остальные его конструктивные элементы. В этом случае должно быть обеспечено жесткое сопряжение элементов купольного каркаса друг с другом, хотя бы по отношению к разным ярусам. При навесном монтаже ребристо-кольцевого купола после завершения установки элементов меридиональных ребер расположенного ниже яруса по всему контуру выполняется установка элементов кольца расположенного выше яруса. Появление замкнутого кольца поверх каждого стержневого кругового яруса приводит к образованию пространственной стержневой системы, включающей все смонтированные ярусы купола и обладающей достаточной жесткостью для восприятия монтажных нагрузок [10]. Причем самое верхнее кольцо частично смонтированного купольного каркаса, так же как и все предыдущие, эффективно сопротивляется деформации замкнутой стержневой системы.

Расчетные схемы частично смонтированных купольных каркасов на всех стадиях монтажа, работающих на нагрузку от собственного веса, отличаются друг от друга и отличаются от проектной схемы. Поэтому и напряженное состояние элементов купольных каркасов в монтажных схемах и проектной схеме

тоже отличаются. Переход от одной стадии монтажа к другой приводит к преобразованию расчетных схем пространственной стержневой системы купольного каркаса. Для отдельных конструктивных элементов каркаса с не меняющимися узловыми креплениями такое преобразование не приведет к существенным изменениям напряженного состояния по отношению к проектной схеме. В ребристо-кольцевых куполах к ним относятся элементы колец. В меридиональных же ребрах при навесном монтаже узловое сопряжение верхнего конца каждого элемента изменяется от свободного (незакрепленного) до жестко закрепленного по отношению к следующему ярусу.

В монтажном состоянии работа элементов ребер похожа на работу консольных наклонных стержней. Консольная установка элементов меридиональных ребер купола приводит к появлению в них значительных изгибающих моментов. В процессе возведения купольного каркаса изгибающие моменты в меридиональных ребрах изменяются. Наибольшие по величине монтажные моменты в меридиональных ребрах наблюдаются в элементах меридиональных ребер монтируемого яруса и в элементах ранее смонтированного яруса [10]. При этом они концентрируются возле узла крепления консольного стержня меридионального ребра к крайнему кольцу и оказывают основное влияние на возникновение монтажных напряжений в элементах купольного каркаса. Максимальные монтажные изгибающие моменты в меридиональных ребрах по мере наращивания каркаса «перемещаются» к вершине купола [11]. Следует отметить, что установка колец купола с образованием замкнутого контура на концах консольных элементов ребер фактически закрепляет деформированное состояние их как консолей и тем самым сохраняет монтажные напряжения.

## 2. Методы

Считается, что применение навесного монтажа именно в крутых куполах не приводит к значительным деформациям каркаса и характеризуется появлением минимальных начальных напряжений в его элементах. С целью выяснения зависимости напряженного состояния каркаса от высоты ребристо-кольцевого купола выполнялись компьютерные исследования для разных куполов. При этом для каждого металлического купола создавались компьютерные модели, соответствующие разным стадиям навесного монтажа. Компьютерные модели купольных каркасов исследовались в программе SCAD как пространственные стержневые системы [12; 13]. Критериями исследований служили деформации узлов купольного каркаса и напряжения в элементах меридиональных ребер, которые определялись по внутренним усилиям  $N$  и  $M$ .

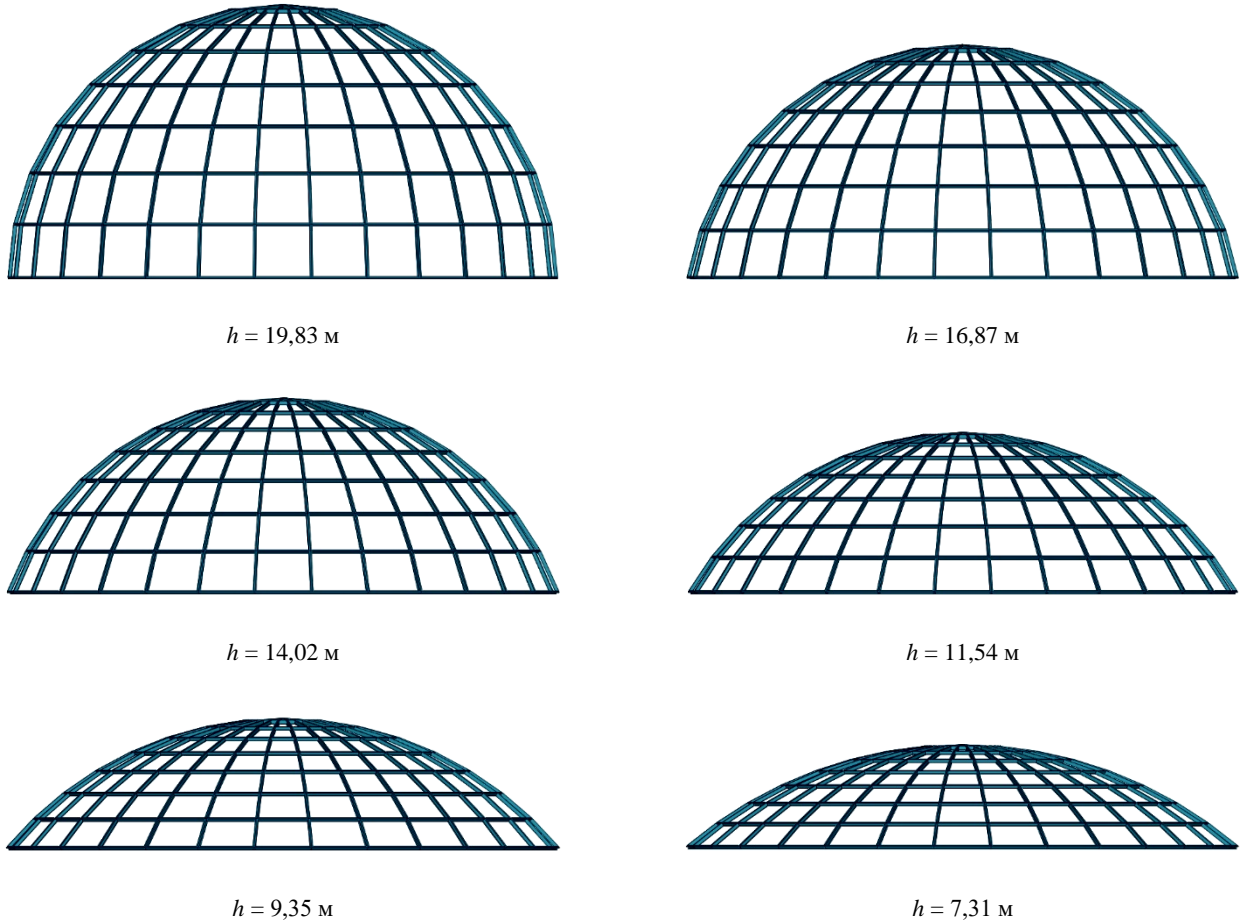
В качестве основных объектов исследования приняты каркасы ребристо-кольцевых куполов сферической формы, состоящие из 30 секторов и насчитывающие 7 ярусов. Все купола имеют одинаковый диаметр опорного контура или пролет 40 м, но разную высоту: 19,83; 16,87; 14,02; 11,54; 9,35; 7,31 м (рис. 1). Все узлы сопряжения элементов каркасов жесткие. На основе приближенного расчета все элементы купольного каркаса приняты в виде прокатных двутавров из стали С245: меридиональные ребра –  $\mathbf{I}$  26Ш1, верхнее кольцо –  $\mathbf{I}$  30Ш1, остальные кольца –  $\mathbf{I}$  23Ш1.

Предыдущие исследования напряженного состояния купольного каркаса в процессе монтажа [10; 11] показали, что установка колец не вызывает существенных изменений внутренних усилий в элементах каркаса, в том числе и в меридиональных ребрах. Поэтому монтажные стержневые системы купольных каркасов были представлены компьютерными моделями с консольными элементами меридиональных ребер по всему контуру. Эти модели были созданы для всех шести видов купольных каркасов и для семи стадий монтажа по числу ярусов каждого купола. С учетом проектных схем расчет на нагрузки от собственного веса купольных каркасов с целью оценки их напряженно-деформированных состояний был выполнен для 48 компьютерных моделей.

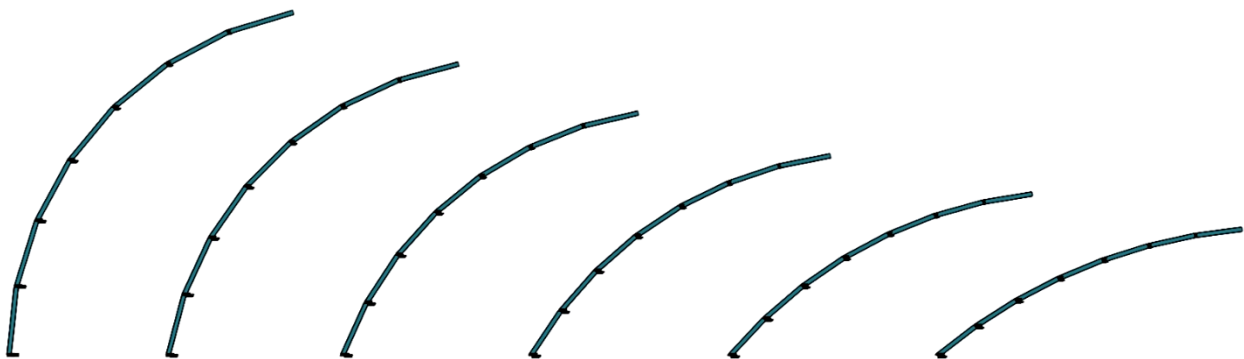
При навесном монтаже всех представленных видов куполов неизбежна установка элементов меридиональных ребер каждого монтируемого яруса как консолей под наклоном по отношению к вертикальной оси купола. Чем меньше высота купола, тем больше наклон меридиональных ребер (рис. 2). Однако следует обратить внимание на следующие особенности: во-первых, наклон элементов ребер в нижних ярусах в куполах разной высоты различен, а в верхних – становится одинаковым; во-вторых, длина отдельных элементов меридиональных ребер с уменьшением высоты куполов становится меньше.

Изменение отношения высоты к диаметру (пролету)  $h/d$  рассматриваемых куполов выглядит плавным, очень близким к пропорциональной зависимости (рис. 3). Исследование деформации каркаса в процессе монтажа показало иной характер ее изменения. Если проследить, как изменяется деформация купольного каркаса по вертикали  $f$  от яруса к ярусу в процессе монтажа, то получим зависимости, изображенные на рис. 4. Здесь учтены только вертикальные монтажные деформации от прогибов консольных

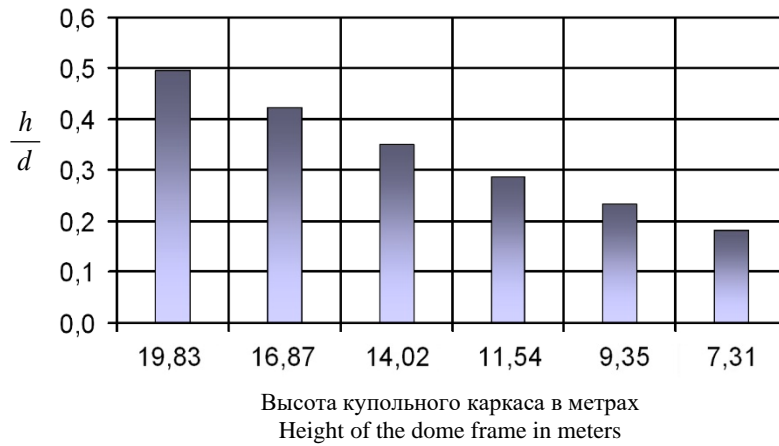
элементов меридиональных ребер с учетом накопления прогибов при навесном монтаже всех предыдущих ярусов. Из графиков видно, что до четвертого яруса монтажные деформации у купольных каркасов меньшей высоты накапливаются быстрее, а с пятого яруса суммарные деформации у высоких куполов становятся больше других. Вместе с тем видно, что у пологих куполов, в отличие от крутых, деформации возрастают по плавной кривой с уменьшением отношения  $h/d$ .



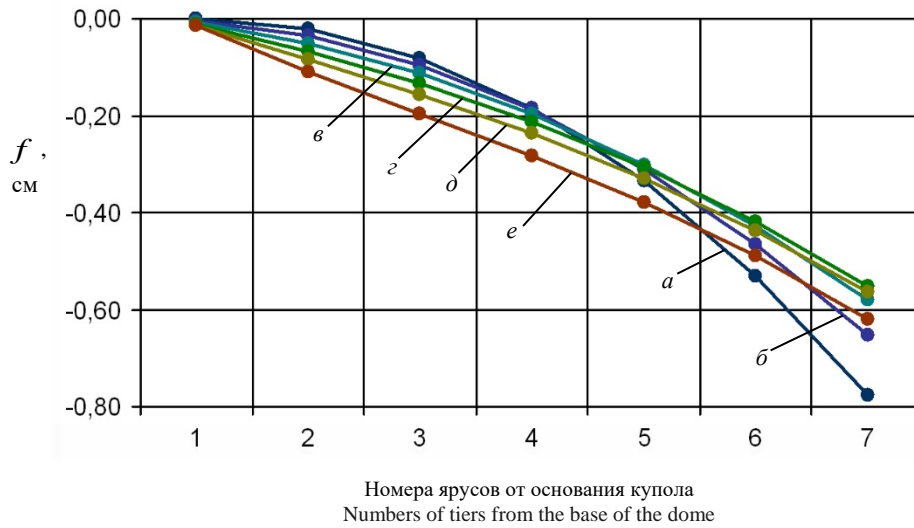
**Рис. 1.** Каркасы ребристо-кольцевых куполов  $d = 40 \text{ м}$   
 [Figure 1. The frames of the ribbed-ring domes  $d = 40 \text{ м}$ ]



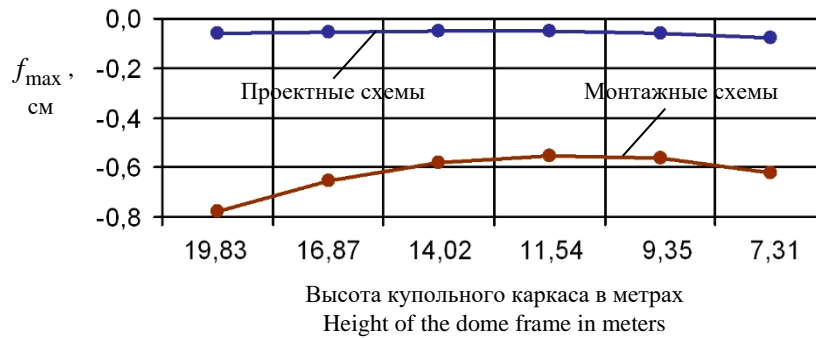
**Рис. 2.** Положение меридиональных ребер куполов разной высоты  
 [Figure 2. Position of meridional ribs of domes of different heights]



**Рис. 3.** Отношения  $h/d$  куполов  $d = 40$  м разной высоты  
 [Figure 3. Ratios  $h/d$  of domes of  $d = 40$  m for different heights]



**Рис. 4.** Вертикальные деформации  $f$  каркасов куполов  $d = 40$  м при навесном монтаже:  
 $a - h = 19,83$  м;  $b - h = 16,87$  м;  $в - h = 14,02$  м;  $г - h = 11,54$  м;  $д - h = 9,35$  м;  $е - h = 7,31$  м  
 [Figure 4. Vertical deformations  $f$  of dome frames  $d = 40$  m at mounted installation:  
 $a - h = 19,83$  m;  $b - h = 16,87$  m;  $в - h = 14,02$  m;  $г - h = 11,54$  m;  $д - h = 9,35$  m;  $е - h = 7,31$  m]



**Рис. 5.** Максимальные деформации  $f$  купольных каркасов разной высоты  
 [Figure 5. Maximum deformations  $f$  of dome frames of different heights]

Максимальные деформации каркасов монтажных схем превосходят деформации проектных схем с увеличением высоты куполов в 8,1–13,0 раз (рис. 5).

Исследование напряженного состояния стержневых систем купольного типа на компьютерных расчетных моделях выполнялось многими учеными. Например, анализировалось напряженное состояние купольных каркасов при изменении его геометрических параметров [14; 15], при выключении из работы нескольких элементов [16], при отличающихся геометрических схемах каркасов [17], при разных отношениях высоты к диаметру купола [18], при изменениях пролетов купольных каркасов [19], при включении в работу каркасов ограждающих элементов [20].

Каркасы исследуемых куполов, независимо от того, частично или полностью они смонтированы, работают на действие собственного веса их элементов. При этом меридиональные ребра испытывают одновременное действие усилий сжатия и изгиба. Напряженные состояния меридиональных ребер всех куполов и на всех стадиях монтажа определялись по нормальным напряжениям в сечениях их элементов, которые вычисляются по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \pm \frac{M_{x,i}}{W_{x,i}} \pm \frac{M_{y,i}}{W_{y,i}}. \quad (1)$$

Учитывая, что наибольшие по абсолютной величине напряжения будут сжимающими, это выражение можно интерпретировать как сумму численных значений напряжений, вызываемых сжатием, и напряжений, вызываемых изгибом, то есть

$$|\sigma_i| = |\sigma_{iN}| + |\sigma_{iM}|. \quad (2)$$

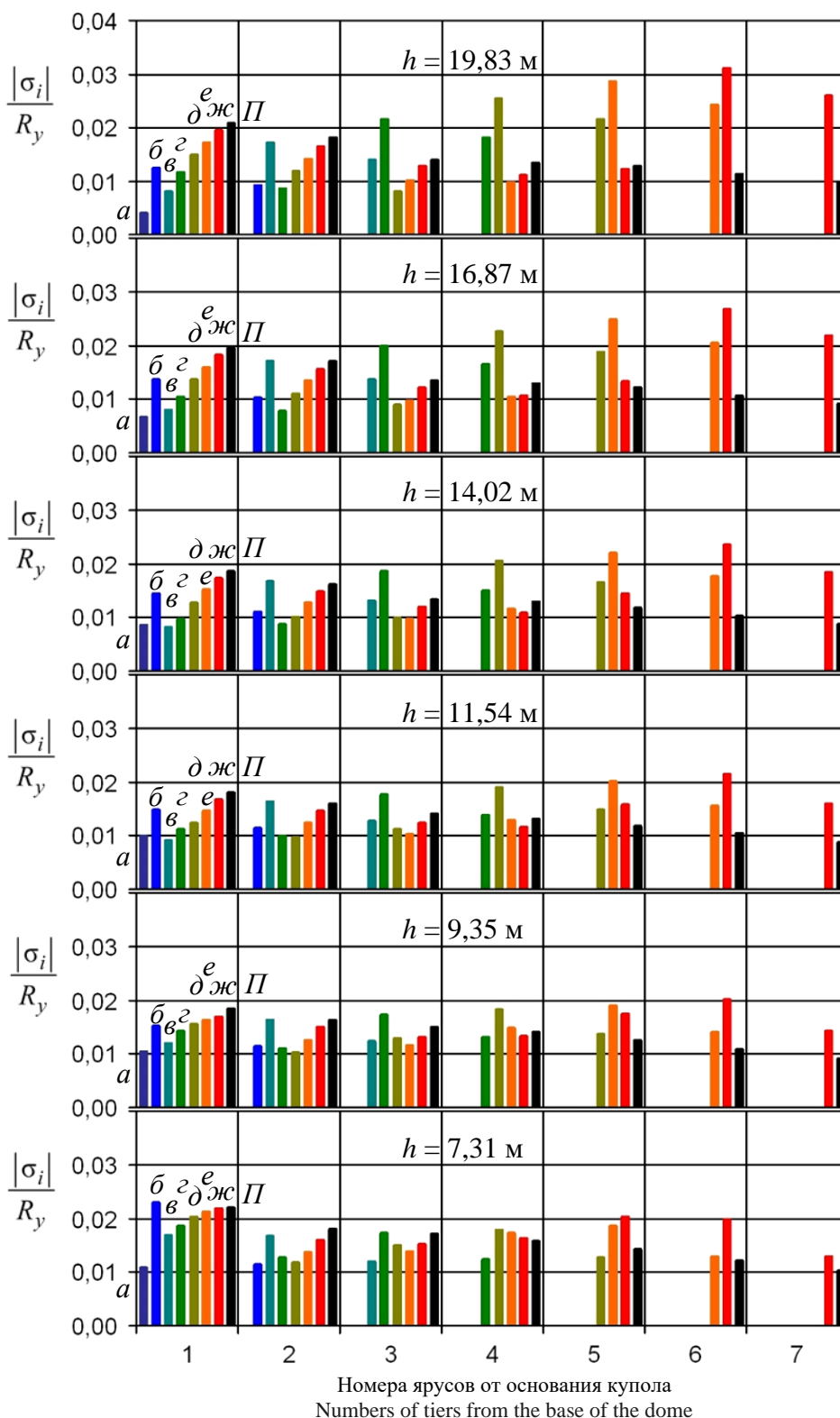
Из-за того, что на каркасы куполов действует только вертикальная нагрузка, а все компьютерные модели имеют симметричное геометрическое строение,  $M_{y,i} = 0$ . Следовательно, на величину изгибной составляющей нормальных напряжений оказывает влияние только работа в вертикальной плоскости.

### 3. Результаты

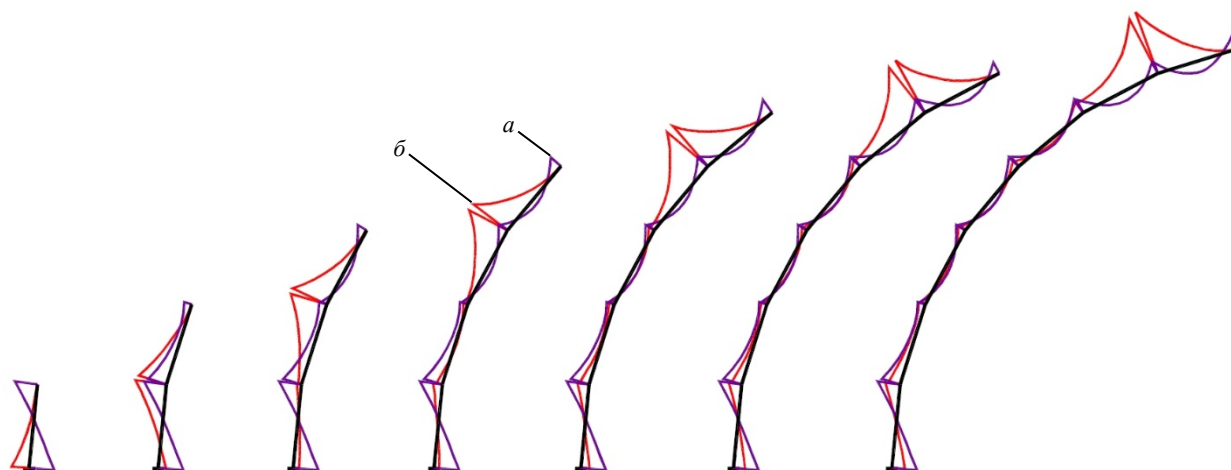
В процессе исследований получены сведения об уровне напряжений в меридиональных ребрах каркасов куполов разной высоты и на всех стадиях навесного монтажа под воздействием собственного веса. На рис. 6 показаны поярусные диаграммы степени использования прочности элементов меридиональных ребер по отношению вычисленных сжимающих напряжений к расчетному сопротивлению стали  $|\sigma_i|/R_y$  для куполов пролетом 40 м и высотой 19,83; 16,87; 14,02; 11,54; 9,35 и 7,31 м.

Графические столбики в каждом ярусе соответствуют напряженным состояниям элементов меридиональных ребер для каждой монтажной схемы или стадии монтажа по порядку (всего 7) плюс столбик проектной схемы. Отсутствие столбика свидетельствует о том, что на данной стадии монтажа элемента меридионального ребра этого яруса еще нет в смонтированной части каркаса купола. Поскольку монтаж начинается с 1-го яруса, то при монтаже 7-го яруса в уровне 1-го яруса будет 7 графических монтажных столбиков и проектный, а в уровне 7-го яруса только 1 монтажный столбик и проектный. Диаграммы рис. 6 показывают, что в процессе навесного монтажа напряжения в поярусных элементах меридиональных ребер с 3-го яруса начинают превосходить проектные значения. Максимальные напряжения  $|\sigma_i|$  в монтажных схемах появляются в 6-м ярусе и их уровень от прочности  $R_y$  в куполах высотой 19,83; 16,87; 14,02; 11,54; 9,35 и 7,31 м достигает значений 3,11; 2,68; 2,35; 2,13; 2,01 и 1,97 % соответственно. Максимальные напряжения проектных схем появляются в 1-м ярусе и их уровень от прочности в куполах той же последовательности достигает значений 2,08; 1,95; 1,86; 1,81; 1,83 и 2,21 % соответственно.

Диаграммы рис. 6 в целом демонстрируют снижение монтажных напряжений в элементах меридиональных ребер в ярусах с 3-го по 7-й, некоторую стабильность их во 2-м ярусе, а также повышение монтажных напряжений в 1-м ярусе при высоте куполов 9,35 и 7,31 м. Однако из-за непрерывных преобразований расчетных схем от первой монтажной стадии ко второй, а от нее к третьей и так далее до седьмой стадии диаграммы рис. 6 не позволяют оценить те напряжения, которые будут сочетаться с напряжениями полностью смонтированного купольного каркаса, то есть проектной схемы.



**Рис. 6.**  $|\sigma_i|/R_y$  в элементах ребер при монтаже куполов разной высоты  $h$  на разных стадиях:  $\Pi$  – проектная схема;  $a$  – монтаж 1-го яруса;  $\bar{b}$  – монтаж 2-го яруса;  $\bar{v}$  – монтаж 3-го яруса;  $\bar{g}$  – монтаж 4-го яруса;  $\bar{d}$  – монтаж 5-го яруса;  $\bar{e}$  – монтаж 6-го яруса;  $\bar{z}$  – монтаж 7-го яруса  
**[Figure 6.**  $|\sigma_i|/R_y$  in the elements of rings at different stages of the assembly of the dome at different  $h$ :  $\Pi$  – design scheme;  $a$  – installation of the 1<sup>st</sup> tier;  $\bar{b}$  – installation of the 2<sup>nd</sup> tier;  $\bar{v}$  – installation of the 3<sup>rd</sup> tier;  $\bar{g}$  – installation of the 4<sup>th</sup> tier;  $\bar{d}$  – installation of the 5<sup>th</sup> tier;  $\bar{e}$  – installation of the 6<sup>th</sup> tier;  $\bar{z}$  – installation of the 7<sup>th</sup> tier]



**Рис. 7.** Эпюры моментов  $M$  в меридиональном ребре купола  $h = 19,83$  м проектной (а) и монтажных (б) схем на разных стадиях  
**[Figure 7.** Moment diagrams  $M$  in the meridional rib of the dome  $h = 19,83$  m for the design (a) and for the assembly (b) schemes at different stages]

Продольные сжимающие силы  $N$  в элементах меридиональных ребер во всех монтажных схемах от 1-й стадии до 7-й возрастают постепенно путем добавления долевых частей, зависящих от веса уже смонтированных ярусов купольных каркасов. На завершающей стадии монтажа величины  $N$  в элементах меридиональных ребер становятся близкими к  $N$  в проектной схеме каркаса. Изгибающие моменты  $M$  в консольно устанавливаемых элементах меридиональных ребер во всех монтажных схемах от 1-й стадии до 7-й отличаются от проектной схемы и по характеру, и по величине [11]. Это относится также и к элементам меридиональных ребер, предшествующих консольным в монтажных схемах. Причем, начиная с 3-го яруса, величина  $M$  в меридиональных ребрах двух крайних ярусов монтажных схем в несколько раз превышает  $M$  в этих же ярусах проектной схемы (рис. 7).

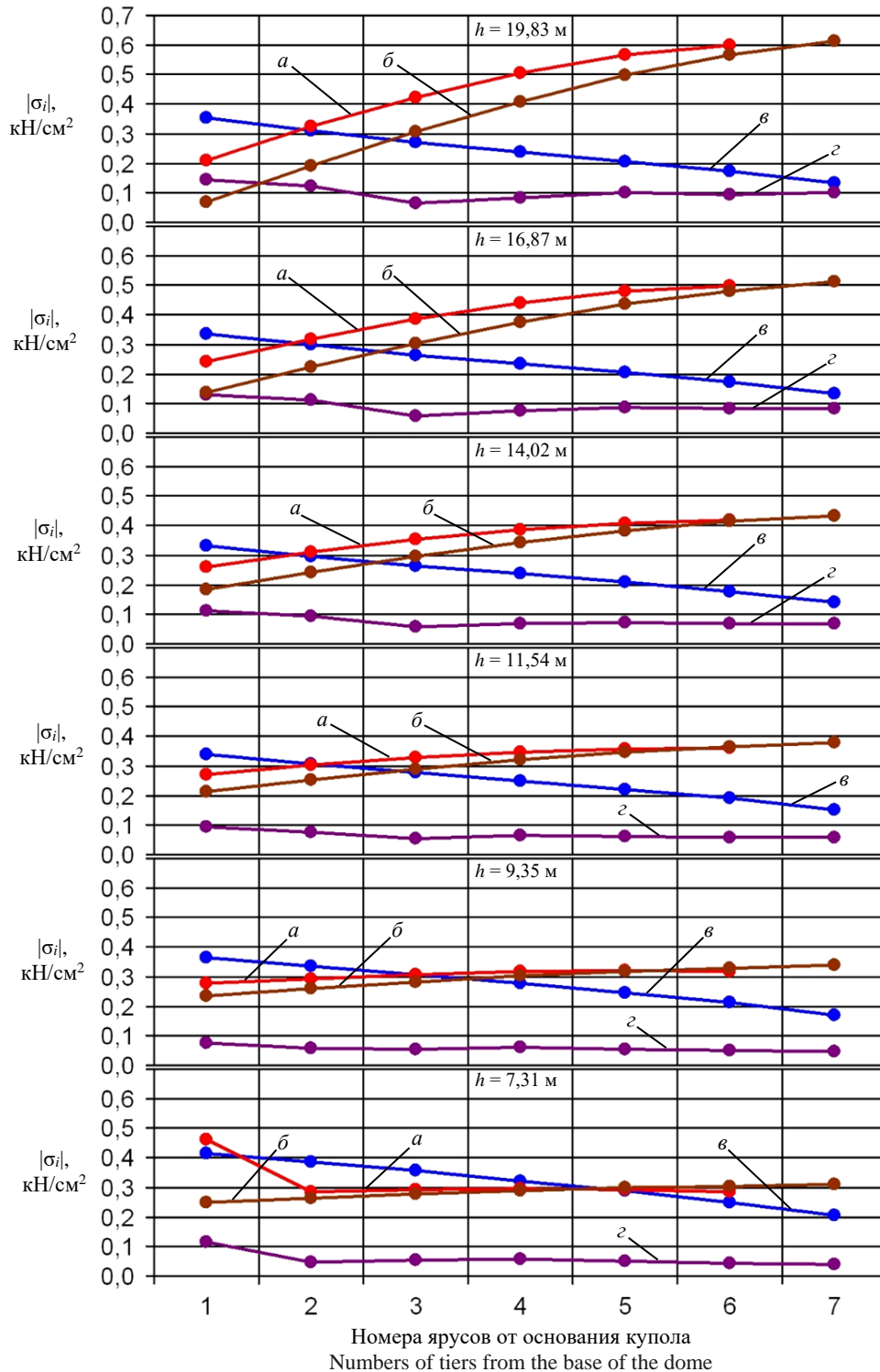
При монтаже кольцевых элементов каждого яруса купольного каркаса их надежно соединяют с меридиональными ребрами. Поэтому смонтированные на концах консольных элементов ребер замкнутые кольца препятствуют свободным возвратным деформациям реберных консолей и, следовательно, сохраняют возникшие монтажные напряжения. Иначе говоря, связанные с монтажным изгибающим моментом  $M_M$  напряжения  $\sigma_{MiM}$  накладываются на напряжения  $\sigma_{PiM}$  от проектных моментов  $M_P$ .

Наибольшие изгибающие моменты в элементах меридиональных ребер проектной схемы купольного каркаса  $M_P$  возникают в узлах сопряжения разных ярусов. Поэтому по отношению  $M_M/M_P$  можно вычислить ту часть напряжений при навесном монтаже, которая сохранится в поярусных элементах меридиональных ребер до полного завершения сборки купольного каркаса. По известной доле напряжений проектной схемы  $|\sigma_{PiM}|$ , вызываемых изгибом, вычисляем долю напряжений монтажных схем  $|\sigma_{MiM}|$ , вызываемых изгибом при навесном монтаже, по формуле

$$|\sigma_{MiM}| = \frac{M_{Mi}}{M_{Pi}} |\sigma_{PiM}|. \quad (3)$$

На рис. 8 показаны графики поярусного изменения сжимающих напряжений в меридиональных ребрах для куполов пролетом 40 м и высотой 19,83; 16,87; 14,02; 11,54; 9,35 и 7,31 м: во время монтажа в элементах перед консолью только от изгиба  $|\sigma_{MiM}|$ , в консольных элементах только от изгиба  $|\sigma_{PiM}|$ , в элементах проектной схемы каркаса только от сжатия  $|\sigma_{PiN}|$ , в элементах ребер проектной схемы только от изгиба  $|\sigma_{PiM}|$ . Из этих графиков видно, что в проектных схемах всех куполов напряжения от сжатия  $|\sigma_{PiN}|$  существенно превосходят напряжения от изгиба  $|\sigma_{PiM}|$ , зачастую в несколько раз. Доля напряжений от изгиба  $|\sigma_{PiM}|$  в суммарных напряжениях проектных схем  $|\sigma_{Pi}| = |\sigma_{PiN}| + |\sigma_{PiM}|$  на разных ярусах, начиная с 3-го, куполов высотой 19,83; 16,87; 14,02; 11,54; 9,35 и 7,31 м находится в интервалах 19,3–43,7; 18,3–38,2; 17,9–32,4; 16,7–27,0; 15,4–22,0; 13,2–16,5 % соответственно. При навесном монтаже изгибающий момент резко возрастает и отношение  $M_M/M_P$  для консольных элементов на разных ярусах с 3-го по 7-й куполов высотой 19,83; 16,87; 14,02; 11,54; 9,35 и 7,31 м изменяется в интервалах 4,7–6,0; 5,1–6,2;

5,2–6,4; 5,2–6,7; 5,1–7,0; 5,1–7,6 соответственно. А в элементах перед консольными отношение  $M_M/M_{II}$  на ярусах, начиная с 3-го по 6-й, куполов высотой в том же порядке изменяется в интервалах 6,6–6,3; 6,5–6,1; 6,2–6,0; 5,9–6,1; 5,5–6,3; 5,4–6,8 соответственно.

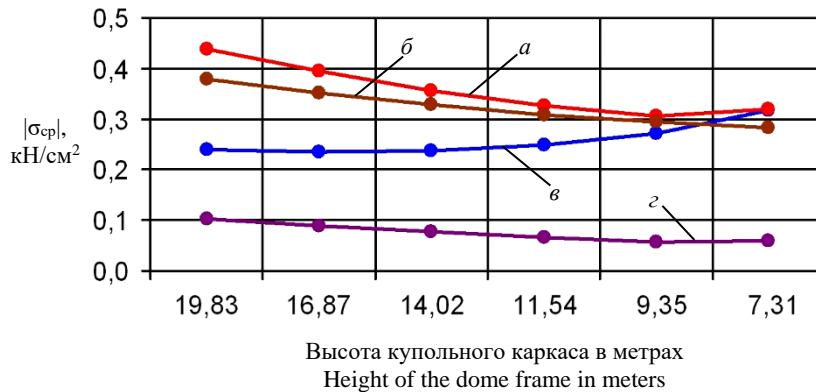


**Рис. 8.** Изменение сжимающих напряжений  $|\sigma_i|$  в элементах меридиональных ребер по ярусам в куполах разной высоты  $h$ :  
 $a - |\sigma_{niM}|$  в элементе перед консолью во время монтажа только от изгиба;  $\bar{b} - |\sigma_{niM}|$  в консольном элементе во время монтажа только от изгиба;  
 $\bar{в} - |\sigma_{niN}|$  в элементе проектной схемы только от сжатия;  $\bar{г} - |\sigma_{niM}|$  в элементе проектной схемы только от изгиба  
**[Figure 8.** Changes in compressive stresses  $|\sigma_i|$  in elements of meridional ribs along tiers in domes of different heights  $h$ :  
 $a - |\sigma_{niM}|$  in the element in front of the cantilever during installation only from bending;  $\bar{b} - |\sigma_{niM}|$  in the cantilever element during installation only from bending;  
 $\bar{в} - |\sigma_{niN}|$  in the element of the design scheme from the compression alone;  $\bar{г} - |\sigma_{niM}|$  in the element of the design scheme from the bending]

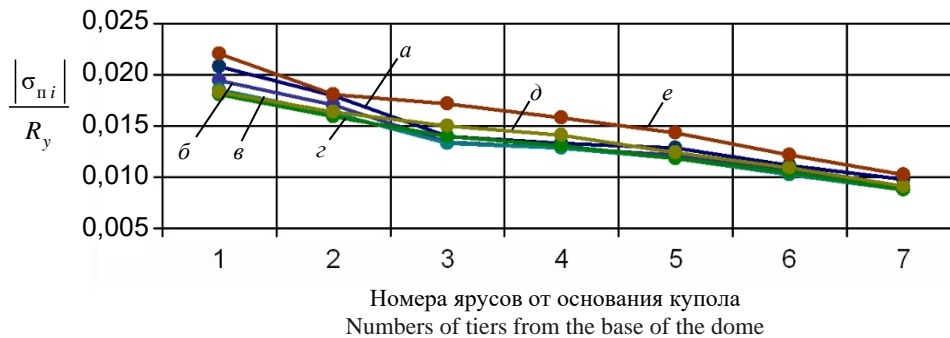


Изгибающие моменты при навесном монтаже вызывают напряжения  $|\sigma_{MiM}|$ , превышающие напряжения проектной схемы  $|\sigma_{Pi}|$ , и величина отношения  $|\sigma_{MiM}|/|\sigma_{Pi}|$  находится на разных ярусах с 3-го по 7-й куполов высотой 19,83; 16,87; 14,02; 11,54; 9,35 и 7,31 м в интервалах 1,3–2,6; 1,2–2,4; 1,1–2,1; 1,0–1,8; 0,9–1,5; 0,7–1,3.

Из графиков рис. 8 видно, что напряжения в элементах меридиональных ребер проектной схемы каркаса только от сжатия  $|\sigma_{PiN}|$  с уменьшением высоты куполов от 19,83 до 7,31 м в целом постепенно увеличиваются, а напряжения только от изгиба  $|\sigma_{PiM}|$  немного уменьшаются. В то же время напряжения во время монтажа в элементах перед консолью только от изгиба  $|\sigma_{MiM}|$  и напряжения в консольных элементах только от изгиба  $|\sigma_{MiM}|$  с уменьшением высоты куполов от 19,83 до 7,31 м постепенно уменьшаются. Эти тенденции подтверждают графики осредненных по ярусам сжимающих напряжений  $|\sigma_{cp}|$  в элементах меридиональных ребер в куполах разной высоты  $h$  (рис. 9).

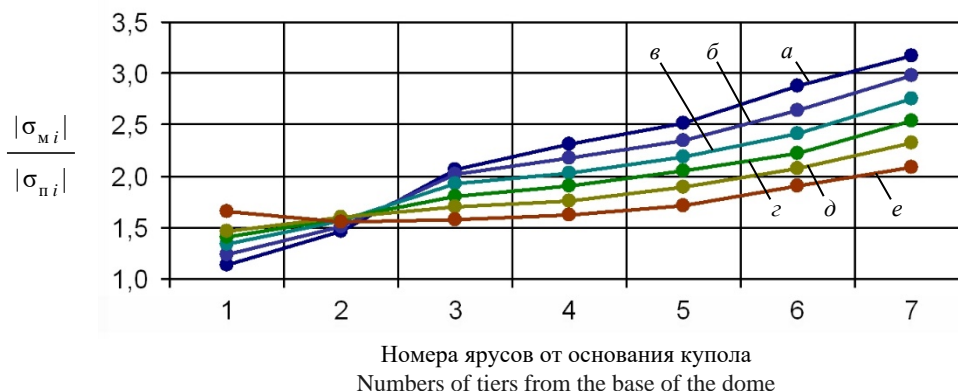


**Рис. 9.** Осредненные по ярусам сжимающие напряжения  $|\sigma_{cp}|$  в элементах меридиональных ребер в куполах разной высоты  $h$ :  
*a* –  $|\sigma_{McpM}|$  в элементе перед консолью во время монтажа только от изгиба; *б* –  $|\sigma_{McpM}|$  в консольном элементе во время монтажа только от изгиба;  
*в* –  $|\sigma_{PcpN}|$  в элементе проектной схемы только от сжатия; *г* –  $|\sigma_{PcpM}|$  в элементе проектной схемы только от изгиба  
**[Figure 9.** Compressive stresses  $|\sigma_{cp}|$  averaged over tiers in elements of meridional ribs in domes of different heights  $h$ :  
*a* –  $|\sigma_{McpM}|$  in the element in front of the cantilever during installation from bending alone; *б* –  $|\sigma_{McpM}|$  in the cantilever element at installation from bending alone;  
*в* –  $|\sigma_{PcpN}|$  in the element of the design scheme from compression alone; *г* –  $|\sigma_{PcpM}|$  in the element of the design scheme from bending alone]



**Рис. 10.** Поярусные величины отношения  $|\sigma_{Pi}|/R_y$  проектной схемы в элементах ребер куполов разной высоты  $h$ :  
*a* –  $h = 19,83$  м; *б* –  $h = 16,87$  м; *в* –  $h = 14,02$  м; *г* –  $h = 11,54$  м; *д* –  $h = 9,35$  м; *e* –  $h = 7,31$  м  
**[Figure 10.** Tiered values of the ratio  $|\sigma_{Pi}|/R_y$  of the design scheme in the elements of ribs of domes of different heights  $h$ :  
*a* –  $h = 19,83$  m; *б* –  $h = 16,87$  m; *в* –  $h = 14,02$  m; *г* –  $h = 11,54$  m; *д* –  $h = 9,35$  m; *e* –  $h = 7,31$  m]

Уровни напряжений в меридиональных ребрах проектной схемы  $|\sigma_{Pi}|$  по отношению к прочности  $R_y$  во всех куполах от 1-го яруса к 7-му уменьшаются (рис. 10). При этом максимальные отношения  $|\sigma_{Pi}|/R_y$  появляются в 1-м ярусе и в куполах высотой 19,83; 16,87; 14,02; 11,54; 9,35 и 7,31 м достигают значений 2,08; 1,95; 1,86; 1,81; 1,83 и 2,21 % соответственно. А минимальные отношения  $|\sigma_{Pi}|/R_y$  появляются в 7-м ярусе и в куполах той же последовательности достигают значений 0,98; 0,91; 0,87; 0,87; 0,91 и 1,03 % соответственно.



**Рис. 11.** Поярусные величины отношений начальных напряжений  $|\sigma_{Mi}|$  к напряжениям проектной схемы  $|\sigma_{Pi}|$  для куполов разной высоты  $h$ :

$a - h = 19,83$  м;  $б - h = 16,87$  м;  $в - h = 14,02$  м;  $г - h = 11,54$  м;  $д - h = 9,35$  м;  $е - h = 7,31$  м

**[Figure 11.** Tiered values of ratios of initial stress  $|\sigma_{Mi}|$  to stress in the design scheme  $|\sigma_{Pi}|$  for domes of different heights  $h$ :

$a - h = 19,83$  m;  $б - h = 16,87$  m;  $в - h = 14,02$  m;  $г - h = 11,54$  m;  $д - h = 9,35$  m;  $е - h = 7,31$  m]

Если долю напряжений от изгиба  $|\sigma_{PiM}|$  в элементах проектной схемы каркаса заменить на монтажные напряжения  $|\sigma_{MiM}|$ , то получим начальные монтажные напряжения  $|\sigma_{Mi}| = |\sigma_{PiM}| + |\sigma_{MiM}|$ , которые будут испытывать меридиональные ребра по завершении навесного монтажа. Отношения начальных монтажных напряжений  $|\sigma_{Mi}|$  к напряжениям проектной схемы  $|\sigma_{Pi}|$  во всех куполах существенно возрастают от 1-го яруса к 7-му (рис. 11). Причем с увеличением высоты купола величина отношения  $|\sigma_{Mi}|/|\sigma_{Pi}|$  от яруса к ярусу возрастает.

#### 4. Выводы

На основании изложенного материала можно сделать следующие выводы.

В процессе навесного монтажа каркасов большепролетных ребристо-кольцевых металлических куполов разной высоты в сечениях меридиональных ребер неизбежно появление монтажных напряжений, существенно превышающих проектные напряжения от собственного веса каркаса.

Причиной монтажных напряжений служит то обстоятельство, что на каждом вновь монтируемом ярусе купольного каркаса элементы меридиональных ребер устанавливаются консольно, что приводит к появлению относительно больших изгибающих моментов.

Изгибное состояние всех элементов меридиональных ребер каждого яруса после установки колец характеризуется иным очертанием эпюр моментов по сравнению с изгибным состоянием этих же элементов при консольной монтажной установке, что свидетельствует о чередующемся изменении расчетных схем каркаса в процессе возведения.

Монтажные напряжения от консольного изгиба монтируемых элементов меридиональных ребер сохраняются в купольном каркасе из-за колец, образованных установкой на свободных концах реберных консолей элементов колец, которые фиксируют их деформированное состояние в пространстве.

Выбирая навесной монтаж для большепролетных ребристо-кольцевых куполов сферического очертания, необходимо при проектировании производить расчет их каркасов с учетом влияния монтажных напряжений на эксплуатационную надежность сооружения.

В первом приближении можно учитывать монтажные напряжения в меридиональных ребрах умножением поярусных напряжений от собственного веса купольного каркаса на повышающие коэффициенты. Для высоких куполов такие коэффициенты изменяются от 1,2 в ярусе у опорного кольца до 3,2 в ярусе у верхнего кольца. Для низких куполов эти коэффициенты изменяются от 1,5 в нижнем ярусе до 2,3 – в верхнем.

Не следует применять навесной монтаж в куполах с отношением высоты к диаметру  $h/d$  менее 0,24 из-за значительного возрастания изгибающего момента в первом ярусе меридионального ребра.

При навесном монтаже деформации каркасов возрастают во много раз по сравнению с проектной схемой, поэтому следует предусматривать такие виды соединения элементов, которые способны компенсировать неточности в расстояниях между узлами.

### Список литературы

1. Тур В.И. Купольные конструкции: формообразование, расчет, конструирование, повышение эффективности. М.: АСВ, 2004. 96 с.
2. Кривошапко С.Н. Металлические ребристо-кольцевые и сетчато-стержневые оболочки XIX – первой половины XX-го веков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 4–15. URL: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/10910> (дата обращения: 21.09.2020).
3. Гохарь-Хармандарян И.Г. Большепролетные купольные здания. М.: Стройиздат, 1978. 150 с.
4. Торкатюк В.И. Монтаж конструкций большепролетных зданий. М.: Стройиздат, 1985. 170 с.
5. Гофштейн Г.Е., Ким В.Г., Ниццев В.Н., Соколова А.Д. Монтаж металлических и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 2004. 528 с.
6. Металлические конструкции: справочник проектировщика: в 3 т. Т. 2. Стальные конструкции зданий и сооружений / под общ. ред. В.В. Кузнецова; ЦНИИпроектстальконструкция имени Н.П. Мельникова. М.: АСВ, 1998. 512 с.
7. Лебедь Е.В., Алукаев А.Ю. Большепролетные металлические купольные покрытия и их возведение // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 1. С. 4–16. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-1-4-16>
8. Лебедь Е.В. Особенности работы каркасов большепролетных металлических куполов в процессе их возведения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 481–494. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-6-481-494>
9. Youichi M., Terumasa F., Yoshihiko K., Takashi U. Erection Methods for Space Structures // Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures: Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia. Spain, 2009. Pp. 1951–1962.
10. Лебедь Е.В. Изменение напряженного состояния каркаса металлического ребристо-кольцевого купола в процессе монтажа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 278–290. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-278-290>
11. Лебедь Е.В., Вершинин В.П. Напряженное состояние меридиональных ребер металлического купола на разных этапах навесного монтажа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 111–121. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-111-121>
12. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маларенко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD: М.: АСВ, 2004. 592 с.
13. Городоцкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. К.: Факт, 2005. 344 с.
14. Chandiwala A. Analysis and design of steel dome using software // International Journal of Research in Engineering and Technology (IJRET). 2014. Vol. 3. Issue 3. Pp. 35–39.
15. Jadhav H.S., Patil Ajit S. Parametric Study of Double Layer Steel Dome with Reference to Span to Height Ratio // International Journal of Science and Research (IJSR). 2013. Vol. 2. Issue 8. Pp. 110–118.
16. Handruleva A., Matuski V., Kazakov K. Combined Mechanisms of Collapse of Discrete Single-Layer Spherical Domes // Study of Civil Engineering and Architecture (SCEA). 2012, December. Vol. 1. Issue 1. Pp. 19–27.
17. Amjatha Makkar, Sumayya Abbas, Muhammed Haslin S.M. Finite Element Analysis of Diamatic, Schwedler and Diamatic-Schwedler Hybrid Domes // International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT). 2016. Vol. 39. No. 1. Pp. 57–62.
18. Chacko P., Dipu V.S., Manju P.M. Finite Element Analysis of Ribbed Dome // International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA). 2014. Pp. 25–32.
19. Merilmol Eldhose, Rajesh A.K., Ramadass S. Finite Element Analysis and Parametric Study of Schwedler Dome Using ABAQUS Software // International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT). 2015. Vol. 28. No. 7. Pp. 333–338.
20. Nabeel Abdulrazzaq Jasim, Ihab Sabri Saleh, Saddam Khalaf Faleh. Structural Analysis of Ribbed Domes Using Finite Element Method // International Journal of Civil Engineering Research. 2017. Vol. 8. No. 2. Pp. 113–130.

### References

1. Tur V.I. *Kupol'nye konstruktsyi: formoobrazovanie, raschet, konstruirovaniye, povysheniye Effektivnosti [Dome Structures: Morphogenesis, Analysis, Design, Increase in Effectiveness]*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)
2. Krivoshapko S.N. Metal ribbed-and-circular and lattice shells from the XIX<sup>th</sup> until the first half of the XX<sup>th</sup> centuries. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(6):4–15. (In Russ.) Available from: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/10910> (accessed: 21.09.2020).
3. Gokhar-Harmadaryan I.G. *Bol'sheproletnye kupol'nye zdaniya [Wide-Span Dome Buildings]*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1978. (In Russ.)
4. Torkatyuk V.I. *Montazh konstruktsiy bol'sheproletnykh zdaniy [Installation of Structures of Large-Span Buildings]*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1985. (In Russ.)

5. Gofshteyn G.E., Kim V.G., Nishchev V.N., Sokolova A.D. *Montazh metallicheskih i zhelezobetonnykh konstruktsiy* [Installation of Metal and Reinforced Concrete Structures]. Moscow: Stroyizdat Publ.; 2004. (In Russ.)
6. Kuznetsov V.V. (ed.) *Metallicheskie konstruktsii* [Metal Structures]. Vol. 2. Stal'nye konstruktsii zdaniy i sooruzheniy [Steel structures of buildings and constructions]. Moscow: ASV Publ.; 1998. (In Russ.)
7. Lebed E.V., Alukaev A.U. Large-span metal dome roofs and their construction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(1):4–16. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-1-4-16>
8. Lebed E.V. Behavior of the Frames of Large-span Metal Domes in the Process of their Installation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(6):481–494. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-6-481-494>
9. Youichi M., Terumasa F., Yoshihiko K., Takashi U. Erection Methods for Space Structures. *Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures: Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia*. Spain; 2009. p. 1951–1962.
10. Lebed E.V. Changes in the stressed state of the framework of the metal ribbed-ring dome during the assembly process. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(4):278–290. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-278-290>
11. Lebed E.V., Vershinin V.P. Stress state of metal dome meridional ribs at different stages of overhang erection process. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(4):278–290. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-111-121>
12. Karpilovskiy V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Perelmutter A.V., Perel'muter M.A. *SCAD Office. Vychislitel'nyy kompleks SCAD* [Computer system SCAD]. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)
13. Gorodetskiy A.S., Evzerov I.D. *Komp'uternyye modeli konstruktsiy* [Computer models of structures]. Kiev: Fakt Publ.; 2005. (In Russ.)
14. Chandiwala Anuj. Analysis and design of steel dome using software. *International Journal of Research in Engineering and Technology (IJRET)*. 2014;3(3):35–39.
15. Jadhav H.S., Patil Ajit S. Parametric Study of Double Layer Steel Dome with Reference to Span to Height Ratio. *International Journal of Science and Research (IJSR)*. 2013;2(8):110–118.
16. Handruleva A., Matuski V., Kazakov K. Combined Mechanisms of Collapse of Discrete Single-Layer Spherical Domes. *Study of Civil Engineering and Architecture (SCEA)*. 2012(December);1(1):19–27.
17. Amjatha Makkar, Sumayya Abbas, Muhammed Haslin S.M. Finite Element Analysis of Diamatic, Schwedler and Diamatic-Schwedler Hybrid Domes. *International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT)*. 2016;39(1):57–62.
18. Chacko P., Dipu V.S., Manju P.M. Finite Element Analysis of Ribbed Dome. *International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)*. 2014:25–32.
19. Merilmol Eldhose, Rajesh A.K., Ramadass S. Finite Element Analysis and Parametric Study of Schwedler Dome Using ABAQUS Software. *International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT)*. 2015;28(7):333–338.
20. Nabeel Abdulrazzaq Jasim, Ihab Sabri Saleh, Saddam Khalaf Faleh. Structural Analysis of Ribbed Domes Using Finite Element Method. *International Journal of Civil Engineering Research*. 2017;8(2):113–130.

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-465-471  
УДК 502/504:627.8

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

## Программная часть, фундаментальная и организационная структура программно-аппаратного комплекса для обеспечения безопасности возводимых гидротехнических и гидроэнергетических сооружений

**А.С. Антонов**

Научно-исследовательский институт энергетических сооружений (филиал АО «Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт «Гидропроект» имени С.Я. Жука»), Российская Федерация, 125080, Москва, Волоколамское шоссе, д. 2  
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26  
Antonov.An.S@yandex.ru

### История статьи

Поступила в редакцию: 2 сентября 2020 г.  
Доработана: 20 ноября 2020 г.  
Принята к публикации: 24 ноября 2020 г.

### Аннотация

**Актуальность.** Для обеспечения безопасности гидротехнических и гидроэнергетических сооружений требуется организовать постоянный контроль за их состоянием, в том числе произвести установку дополнительной контрольно-измерительной аппаратуры. Также необходимо внедрить современные информационно-диагностические системы, позволяющие в режиме реального времени осуществлять оценку состояния как отдельных элементов сооружения, так и взаимовлияющих конструкций и комплексов сооружений. При этом результаты, представленные в статье направлены на описание фундаментальной структуры построения информационно-диагностической системы нового поколения, разрабатываемой в рамках программно-аппаратного комплекса. **Цели.** Основной целью предлагаемого программно-аппаратного комплекса является повышение уровня безопасности гидротехнических и гидроэнергетических сооружений, оказывающих влияние друг на друга в процессе строительства и эксплуатации. Решаются задачи создания единой платформы для оценки безопасного состояния гидротехнических и гидроэнергетических сооружений в процессе их строительства и эксплуатации, закладываются основы единой унифицированной информационно-диагностической системы на модульной основе, позволяющей проводить сравнение показаний контрольно-измерительной аппаратуры, статистических показателей и расчетных значений, полученных в рамках математического моделирования объектов. **Методы.** В работе представлена структура взаимодействия отдельных блоков, входящих в программно-аппаратный комплекс, его взаимодействие с пользователем для организации принятия решений при эксплуатации гидротехнических и гидроэнергетических сооружений. **Результаты.** Реализована модульная оболочка, состоящая из объединенной информационно-диагностической системы, экспертного и расчетного модулей, позволяющая комплексно подходить к вопросу безопасности взаимовлияющих гидротехнических и гидроэнергетических сооружений. Разработаны программные связи для оценки изменения параметров, которые могут привести к отклонениям/нарушениям в работе гидротехнических и гидроэнергетических сооружений.

**Ключевые слова:** гидротехнические сооружения, основания, программно-аппаратный комплекс, мониторинг, прогнозирование безопасности, математические модели, конечно-элементные модели, информационно-диагностическая система

### Для цитирования

Антонов А.С. Программная часть, фундаментальная и организационная структура программно-аппаратного комплекса для обеспечения безопасности возводимых гидротехнических и гидроэнергетических сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 6. С. 465–471. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-465-471>

Антонов Антон Сергеевич, главный инженер по оборудованию и гидротехническим сооружениям, директор аналитического центра безопасности оборудования и ГТС НИИЭС (филиал АО «Институт Гидропроект»), старший преподаватель кафедры гидравлики и гидротехнического строительства НИУ МГСУ, кандидат технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 7374-6867, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8310-9604>

© Антонов А.С., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

# The software part, the fundamental and organizational structure of the software and hardware complex to ensure the safety of hydraulic and hydropower structures under the construction

Anton S. Antonov

Research Institute of Energy Structures (branch of the JSC “Design, survey and research institute “Hydroproject” named after S.Ya. Zhuk”, 2 Volokolamskoye Shosse, Moscow, 125080, Russian Federation

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation  
Antonov.An.S@yandex.ru

## Article history

Received: September 2, 2020

Revised: November 20, 2020

Accepted: November 24, 2020

## Abstract

**Relevance.** To ensure the safety of hydraulic and hydropower facilities, to organize constant monitoring of their condition, including the installation of additional control and measuring equipment is required. It is also necessary to introduce modern information and diagnostic systems that allow in real time to assess the state of both individual elements of the structure, as well as mutually influencing structures and complexes of structures. At the same time, the results presented in the article are aimed for describing the fundamental structure a new generation of information and diagnostic system building, developed within the framework of a software and hardware complex. **The aims of the work.** The main purpose of the proposed system is to increase the level of monitoring to ensure the safety of hydraulic structures, which have a possible impact on each other during operation and construction. The tasks of creating a unified platform for assessing the safe state of hydraulic structures during the construction and operation of hydraulic structures (hydroelectric and pumped-storage power plants) are being solved, the foundations of a unified information-diagnostic system on a modular basis are laid, which allows comparing monitoring and measuring equipment readings, statistical samples and calculated values obtained within the mathematical modeling objects. **Methods.** The paper presents the structure of the interaction of individual blocks included in the information-diagnostic system, the interaction of the information-diagnostic system with the user for decision-making during the operation of the hydraulic structures. **Results.** A modular shell has been implemented, consisting of a combined information-diagnostic system, expert and calculation modules, which allows a comprehensive approach to the issue of safety of mutually affecting hydraulic structures. Software links have been developed to assess the change in parameters that can lead to deviations/irregularities in the operation of the hydraulic structures.

**Keywords:** hydraulic structures, foundations, hardware-software complex, information-diagnostic system, monitoring, safety forecasting, mathematical models, finite element models, information and diagnostic system

## For citation

Antonov A.S. The software part, the fundamental and organizational structure of the software and hardware complex to ensure the safety of hydraulic and hydropower structures under the construction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):465–471. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-465-471>

## 1. Введение

В настоящее время повышенное внимание уделяется обеспечению безопасности гидротехнических сооружений (ГТС), в том числе в рамках требований Федерального закона № 117-ФЗ «О безопасности гидротехнических сооружений». В этих целях осуществляется постоянный контроль за состоянием гидротехнических сооружений, в первую очередь на основе контрольно-измерительной аппаратуры (КИА). Для получения и обработки результатов измерений контролируемых величин с помощью установленной в сооружениях КИА внедряются различные информационно-диагностические системы. Данная работа является продолжением исследований, представленных в [1–4], и описывает построение программной части программно-аппаратного комплекса (ПАК) на примере Загорских ГАЭС [5; 6].

## 2. Методы

Разработка программной части программно-аппаратного комплекса проводится на основе методов программирования. В рамках расчетного модуля, входящего в ПАК, разрабатываются пространственные конечно-элементные модели, на основе которых определяется напряженно-деформированное состояние

*Anton S. Antonov*, chief engineer for equipment and hydraulic structures, director of the Analytical Center of Equipment and Hydraulic Structures Safety of RIES (branch of JSC “Hydroproject”), senior lecturer of the Department of Hydraulics and Hydrotechnical Engineering of NRU MGSU, Candidate of Technical Sciences; eLIBRARY SPIN-code: 7374-6867, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8310-9604>

ГТС (ГЭС/ГАЭС) и их оснований. В указанных конечно-элементных моделях воспроизводятся конструктивные особенности ГТС, включая межблочные строительные швы, присущие гидротехническому железобетону; основание сооружений и грунтовые засыпки за стенами сооружений. Также в конечно-элементных моделях воспроизводится этапность возведения сооружений, укладки грунтов в обратные засыпки за стенами ГТС.

Данные обследований состояния ГТС, передаваемые в информационно-диагностическую систему, получены на основе визуальных и инструментальных методов.

### 3. Результаты

ПАК представляет собой модульную оболочку, состоящую в базовом режиме работы из трех компонентов: объединенной информационно-диагностической системы (ИДС), расчетного (РМ) и экспертного (ЭМ) модулей.

*Объединенная ИДС* осуществляет мониторинг и диагностику состояния ГТС. Для наблюдений действующей законодательной базы на ГТС установлены диагностические информационные системы, функционирующие независимо друг от друга. При этом изменение режима эксплуатации одной из станций оказывает существенное влияние на другую, в связи с этим возникла необходимость разработки единой системы, позволяющей проводить комплексный анализ состояния Загорской ГАЭС и Загорской ГАЭС – 2 с учетом их взаимного влияния.

Разработанная система базируется на web-сервере, интегрирующем информацию по двум станциям. Информация по показаниям КИА представляется в виде WebUI с возможностью скачивания в текстовых и табличных форматах, при этом возможна отправка push-уведомлений о происшествиях.

ИДС выполняет следующие функции: сбор и обработку данных мониторинга, представление данных пользователям, передача контролируемых показателей и факторов экспертному модулю.

*Расчетный модуль* состоит из единых и локальных пространственных математических моделей: геотриационной (ГФМ), геомеханической (ГММ) и НДС. Все модели, совместно с многовариантными калибровочными и прогнозными расчетами, хранятся в РМ в формате данных, который позволяет обращаться к ним в режиме реального времени; описание элементов расчетного модуля подробно разбиралось в [1]. Для работы с математическими моделями широко применяются современные вычислительные комплексы, такие как Modflow, Midas GTS, Ansys, примеры использования которых приведены в [7–12]. При разработке конечно-элементных моделей сооружений Загорских ГАЭС учитывался опыт моделирования ГТС [13–16].

При необходимости доработки моделей или при проведении дополнительных расчетных исследований изменения в расчетных моделях проводятся интерактивно в среде разработки каждой из них. В связи с разной конечно-элементной аппроксимацией, подбираемой исходя из баланса скорости расчетов и необходимой точности, математические модели не связаны между собой единой сеткой конечных элементов, обмен информацией происходит при помощи скриптов управления, передающих полученные решения из ГФМ в ГММ, а из ГММ в модель НДС в виде граничных условий.

Расчетные сценарии моделирования выполнялись поэтапно, после каждого цикла расчетов результаты направлялись в следующий как граничные условия, кроме того, предавались в архив ПАК и экспертный модуль, что позволяет получить набор исходной информации для автоматизированного определения возможных опасностей.

*Экспертный модуль* – блок, осуществляющий оценку состояния ГТС на основании сравнения натуральных данных, поступающих в ИДС, и результатов, полученных по расчетным сценариям на математических моделях. При этом экспертный модуль может быть полностью интегрирован в расчетный модуль для оптимизации исходного кода и ускорения процессов оценки состояния ГТС.

ЭМ при функционировании отдельным блоком ПАК в автоматизированном режиме выполняет следующие задачи: получение данных от объединенной ИДС, ведение баз знаний по сценариям/расчетным случаям и опасностям, оценку отклонений контролируемых показателей от расчетных значений, идентификацию возможных опасностей, заложенных экспертным путем, оповещение пользователей ПАК о выявленных опасностях путем рассылки push-уведомлений;

Кроме базовых блоков используется *модуль «Архив»*, основной целью которого является сбор исходной информации по выполненным исследованиям. Результаты научно исследовательских, изыскательских и ремонтных работ системно оцениваются и интегрируются в общую базу данных системы ПАК. Данный подход позволяет учитывать в разрабатываемых сценариях моделирования фактическое состояние сооружений и сравнивать показания объединенных ИДС с актуальными данными, полученными из проводимых исследований.

*Описание взаимодействия ПАК с другими системами.* Отличительной чертой ПАК является гибкая структура интеграции с ИДС объектов, взаимодействие с которыми происходит по протоколам асинхронной репликации баз данных и файловых хранилищ, по заданному расписанию. Репликация распространяется в направлении от стационарной ИДС к ПАК.

Часть инструментария, обеспечивающего обмен информацией, представлена следующими средствами:

- 1) применение универсального http-протокола;
- 2) использование открытых форматов данных (txt, csv, xls, xlsx, xml) для передачи информации от удаленных систем;
- 3) применение скриптовых механизмов обработки и передачи данных в ПАК и между ПАК и внешней средой.

Модульная архитектура ПАК представлена на рисунке. Она позволяет разделить функционал каждого элемента и организовать эффективное управление системой. Модернизация ПАК осуществляется подключением дополнительных модулей без переработки программы, что позволяет комплектовать систему не только предлагаемыми блоками, но и вносить разрабатываемые элементы, необходимые конкретному объекту.



Рис. Модульная структура ПАК со схемой реализации процессов

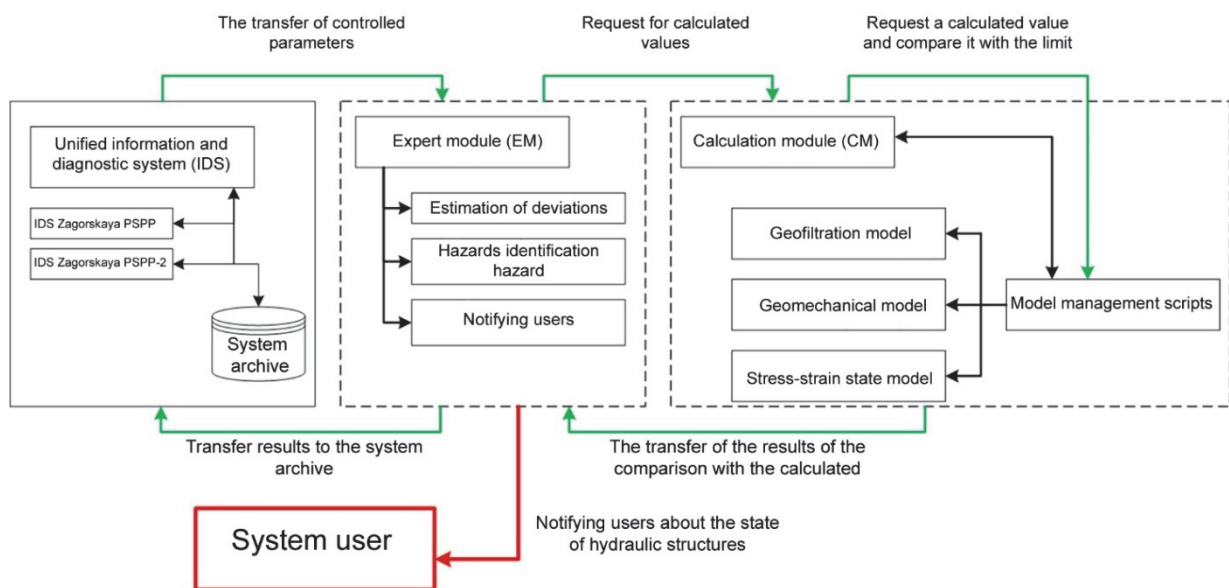


Figure. Modular structure of a hardware and software complex with a process implementation scheme



Обмен информацией между модулями осуществляется с помощью интеграционного программного обеспечения ПАК и скриптов управления. По желанию пользователей реализованы два алгоритма передачи информации:

1) внутренний – взаимосвязь пользователей и модулей осуществляется по внутренним каналам внутри сервера ПАК без выхода в интернет;

2) внешний – взаимосвязь проходит по защищенному соединению через глобальную сеть.

Клиентский запуск ПАК для авторизованных пользователей возможен через web-протокол с любого рабочего ПК. Требования к ПК зависят от глубины визуализации предоставления результатов расчетного модуля.

Укрупненно алгоритм функционирования ПАК можно представить следующим образом:

1) работа с данными ИДС – в автоматизированном режиме или по желанию пользователя происходит репликация данных мониторинга ИДС в архив ПАК;

2) импорт данных из архива ПАК в экспертный модуль – скриптовая передача необходимой и структурированной информации из архива ПАК в экспертный модуль;

3) запрос экспертным модулем расчетных значений РМ и их сравнение с текущими показаниями ИДС;

4) инициация расчетным модулем скриптовых подпрограмм для поиска оптимального совпадения, формирование пула данных по расчетным сценариям;

5) направление пула данных в экспертный модуль для предварительной идентификации факторов, которые могут привести к изменению параметров;

6) определение «коридора» допустимого изменения значений для контролируемых параметров;

7) оценка величин выхода значений из допустимого коридора;

8) выдача оператору аналитической информации в случае нахождения в «коридоре», экстренное оповещение пользователей ПАК в случае выхода контролируемых параметров из допустимых значений (при этом в состав оповещения входит краткое описание опасности и ссылка на соответствующий набор выходных документов);

9) передача данных в архив ПАК для дальнейшего использования при оценке состояния ГТС.

В общем виде информационные связи взаимодействия ПАК можно описать как:

1) получение данных мониторинга от объединенной ИДС – результаты мониторинга накапливаются в архиве ПАК; ЭМ получает их в автоматическом режиме не реже одного раза в сутки через WebUI, используя интегрированное в ПАК программное обеспечение;

2) вывод информации из РМ для формирования базы данных результатов расчетов – осуществляется при проведении расчетных исследований на этапе разработки системы, для обмена информацией используется WebUI, результаты сохраняются в архиве ПАК и передаются в ЭМ;

3) представление информации через WebUI в виде документов и информации – web-сервер ПАК предоставляет пользователю для просмотра и анализа:

– технические документы о сценариях/расчетных случаях;

– отклонения контролируемых показателей от расчетных значений;

– экспертные заключения о выявленных опасностях;

– ретроспективные натурные данные из объединенной ИДС.

4) оповещение пользователей о выявленных опасностях – в случае выявления опасной ситуации всем пользователям направляются уведомления в виде e-mail сообщений, в которых находятся ссылки на описание предполагаемого сценария развития событий и натурные данные из объединенной ИДС;

5) при штатном режиме работы пользователям не менее одного раза в неделю направляется e-mail сообщение, подтверждающее нормальную эксплуатацию объекта.

При возникновении ситуации под названием «инцидент» проводятся следующие операции:

– фиксация ПАК нештатной ситуации – отклонений/нарушений в работе ГТС, превышение по диагностическим показателям критериальных значений;

– формирование в ПАК первичного отчета о состоянии ГТС и его передача в адрес заказчика и экспертных организаций, которыми могут являться аналитический центр, генеральный проектировщик, экспертные центры и др.;

– обработка экспертами полученных данных, разработка рекомендаций по выявлению и устранению обнаруженного инцидента;

– принятие решения владельцем ГТС о необходимости и составе воздействий на основании данных ПАК и экспертного заключения.

#### 4. Заключение

В результате работ над ПАК реализована модульная оболочка, состоящая из объединенной ИДС, экспертного и расчетного модулей, позволяющая комплексно подходить к вопросу безопасности взаимовлияющих ГТС.

Разработана структура внутренних взаимосвязей модулей и алгоритмы принятия решений при различных натуральных показаниях контрольно-измерительной аппаратуры. Заложены программные связи, позволяющие оценить изменение параметров, которые могут привести к отклонениям/нарушениям в работе ГТС.

Описана и разработана схема принятия решений при возникновении инцидентов, которая позволяет при помощи ПАК оперативно планировать и реализовывать воздействия для обеспечения надежности ГТС.

#### Список литературы

1. Рубин О.Д., Антонов А.С., Беллендир Е.Н., Кобочкина Е.М., Котлов О.Н. Разработка расчетного модуля программно-аппаратного комплекса для обеспечения безопасности взаимовлияющих ГТС // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 2. С. 96–105. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-96-105>
2. Луначи М.Э., Шполянский Ю.Б., Соболев В.Ю., Беллендир Е.Н., Белостоцкий А.М., Лисичкин С.Е., Бершов А.В. Концепция построения архитектуры программно-аппаратного комплекса для мониторинга состояния гидротехнических сооружений // *Гидротехническое строительство*. 2016. № 5. С. 2–6.
3. Рубин О.Д., Соболев В.Ю. Техническая реализация программно-аппаратного комплекса для мониторинга состояния и прогнозирования безопасности гидротехнических сооружений и их оснований // *Природообустройство*. 2017. № 1. С. 41–46.
4. Aniskin N., Antonov A. Spatial seepage mathematical model of earth-fill dam in complicated topographic and engineering-geological conditions // *Materials Science and Engineering*. 2018. № 365. Pp. 1–7.
5. Серебрянников Н.И., Родионов В.Г., Кулешов А.П., Магрук В.И., Иванущенко В.С. Гидроаккумулирующие электростанции. Строительство и эксплуатация Загорской ГАЭС. М.: НЦ ЭНАС, 2000. 355 с.
6. Синюгин В.Ю., Магрук В.И., Родионов В.Г. Гидроаккумулирующие электростанции в современной электроэнергетике. М.: НЦ ЭНАС, 2008. 352 с.
7. Rak G., Bombac M. Hydraulic analysis of the construction pit of HPP Brežice (Slovenia) and its effect on the run-off regime // *HYDRO (Bordeaux, France)*. 2015. Corpus ID: 140110869.
8. Wang G., Wang Y., Lu W., Yu M., Wang C. Deterministic 3D seismic damage analysis of Guandi concrete gravity dam: a case study // *Engineering Structures*. 2017. Vol. 148. Pp. 263–276.
9. Rakić D., Živković M., Vulović S., Divac D., Slavković R., Milivojević N. Embankment dam stability analysis using FEM // 3<sup>rd</sup> South-East European Conference on Computational Mechanics: an ECCOMAS and IACM Special Interest Conference. 2013. Pp. 1–12.
10. Hao Gu, Zhongru Wu, Xiaofei Huang, Jintao Song. Zoning Modulus Inversion Method for Concrete Dams Based on Chaos Genetic Optimization Algorithm // *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Pp. 1–9.
11. Buffia G., Manciola P., De Lorenzis L., Cavalagli N., Comodini F. Calibration of finite element models of concrete arch-gravity dams using dynamical measures: the case of Ridracoli // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 199. Pp. 110–115. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.169>
12. Zeinizadeh A., Mirzabozorg H., Noorzad A., Amirpoura A. Hydrodynamic pressures in contraction joints including waterstops on seismic response of high arch dams // *Structures*. 2018. Vol. 14. Pp. 1–14.
13. Рубин О.Д., Ильин Ю.А., Лисичкин С.Е., Нефедов А.В., Розанова Н.В., Черненко В.Н. Оценка напряженно-деформированного состояния и прочности железобетонных конструкций компенсационных секций напорных водоводов Загорской ГАЭС // *Гидротехническое строительство*. 2001. № 9. С. 16–19.
14. Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Нефедов А.В., Серая О.З., Чуприна Я.Н. Разработка «Схема рационального армирования фундаментной плиты водоприемника Загорской ГАЭС – 2» // *Гидротехническое строительство*. 2008. № 4. С. 12–16.
15. Рубин О.Д., Пономарев Д.И., Мельникова Н.И. Расчетные исследования напряженно-деформированного состояния подпорных стен первого яруса водоприемника Загорской ГАЭС // *Природообустройство*. 2011. № 5. С. 51–55.
16. Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Атабиев И.Ж., Мельникова Н.И. Расчетные исследования устойчивости и прочности подпорных стен первого яруса водоприемника Загорской ГАЭС // *Природообустройство*. 2012. № 2. С. 44–48.

#### References

1. Rubin O.D., Antonov A.S., Bellendir E.N., Kobochkina E.M., Kotlov O.N. Development of the design module of the software and hardware complex to ensure the safety of mutually influencing HPS. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(2):96–105. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-96-105>

2. Lunaci M.Eh., Shpolyanskij Yu.B., Sobolev V.Yu., Bellendir E.N., Belostockij A.M., Lisichkin S.E., Bershov A.V. Koncepciya postroeniya arhitektury programmno-apparatnogo kompleksa dlya monitoringa sostoyaniya gidrotekhnicheskikh sooruzhenij [The concept of building the architecture of a software and hardware complex for the state of hydraulic structures monitoring]. *Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo* [Hydrotechnical construction]. 2016;(5):2–6. (In Russ.)
3. Rubin O.D., Sobolev V.Yu. Tekhnicheskaya realizaciya programmno-apparatnogo kompleksa dlya monitoringa sostoyaniya i prognozirovaniya bezopasnosti gidrotekhnicheskikh sooruzhenij i ih osnovanij. *Prirodoobustrojstvo*. 2017;(1): 41–46. (In Russ.)
4. Aniskin N., Antonov A. Spatial seepage mathematical model of earth-fill dam in complicated topographic and engineering-geological conditions. *Materials Science and Engineering*. 2018;(365):1–7.
5. Serebryannikov N.I., Rodionov V.G., Kuleshov A.P., Magruk V.I., Ivanushchenko V.S. *Gidroakkumuliruyushchiye elektrostantsii. Stroitel'stvo i ekspluatatsiya Zagorskoy GAES* [Pumped-storage power plants. Construction and operation of the Zagorskaya PSPP]. Moscow: NTS ENAS Publ.; 2000. (In Russ.)
6. Sinyugin V.Yu., Magruk V.I., Rodionov V.G. *Gidroakkumuliruyushchiye elektrostantsii v sovremennoy elektroenergetike* [Pumped-storage power plants in the modern electric power industry]. Moscow: NTS ENAS Publ.; 2008. (In Russ.)
7. Rak G., Bombac M. Hydraulic analysis of the construction pit of HPP Brežice (Slovenia) and its effect on the run-off regime. *HYDRO (Bordeaux, France)*. 2015. Corpus ID: 140110869.
8. Wang G., Wang Y., Lu W., Yu M., Wang C. Deterministic 3D seismic damage analysis of Guandi concrete gravity dam: a case study. *Engineering Structures*. 2017;148:263–276.
9. Rakić D., Živković M., Vulović S., Divac D., Slavković R., Milivojević N. Embankment dam stability analysis using FEM. *3<sup>rd</sup> South-East European Conference on Computational Mechanics: an ECCOMAS and IACM Special Interest Conference*. 2013:1–12.
10. Hao Gu, Zhongru Wu, Xiaofei Huang, Jintao Song. Zoning Modulus Inversion Method for Concrete Dams Based on Chaos Genetic Optimization Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015:1–9.
11. Buffia G., Manciola P., De Lorenzis L., Cavalagli N., Comodini F. Calibration of finite element models of concrete arch-gravity dams using dynamical measures: the case of Ridracoli. *Procedia Engineering*. 2017;199:110–115. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.169>
12. Zeinizadeh A., Mirzabozorg H., Noorzad A., Amirpoura A. Hydrodynamic pressures in contraction joints including waterstops on seismic response of high arch dams. *Structures*. 2018;14:1–14.
13. Rubin O.D., Ilin Yu.A., Lisichkin S.Ye., Nefedov A.V., Rozanova N.V., Chernenko V.N. Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya i prochnosti zhelezobetonnykh konstruktsiy kompensatsionnykh sektsiy napornykh vodovodov Zagorskoy GAES [Assessment of the stress-strain state and strength of reinforced concrete structures of compensating sections of pressure water conduits of the Zagorskaya PSPP]. *Gidrotekhnicheskoye stroitel'stvo* [Hydrotechnical construction]. 2001;(9):16–19. (In Russ.)
14. Rubin O.D., Lisichkin S.Ye., Nefedov A.V., Seraya O.Z., Chuprina Ya.N. Razrabotka “Skhema ratsional'nogo armirovaniya fundamentnoy plity vodopriyemnika Zagorskoy GAES – 2” [Development of “Scheme of rational reinforcement of the foundation slab of the water intake of the Zagorskaya PSPP – 2”]. *Gidrotekhnicheskoye stroitel'stvo* [Hydrotechnical construction]. 2008;(4):12–16. (In Russ.)
15. Rubin O.D., Ponomarev D.I., Melnikova N.I. Raschetnyye issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya podpornykh sten pervogo yarusa vodopriyemnika Zagorskoy GAES [Computational studies of the stress-strain state of the retaining walls of the first tier of the water intake of the Zagorskaya PSPP]. *Prirodoobustroystvo*. 2011;(5): 51–55. (In Russ.)
16. Rubin O.D., Lisichkin S.Ye., Atabiyev I.Zh., Melnikova N.I. Raschetnyye issledovaniya ustoychivosti i prochnosti podpornykh sten pervogo yarusa vodopriyemnika Zagorskoy GAES [Computational studies of the stability and strength of the retaining walls of the first tier of the water intake of the Zagorskaya PSPP]. *Prirodoobustroystvo*. 2012;(2):44–48. (In Russ.)

## ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-472-480  
UDC 539.3:624.04

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### An analysis of annular plate in curvilinear non-orthogonal coordinates with the help of equations of a shell theory

Sergey N. Krivoshapko

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation  
sn\_krivoshapko@mail.ru

#### Article history

Received: August 7, 2020  
Revised: October 15, 2020  
Accepted: November 16, 2020

#### Acknowledgements

The publication has been prepared with the support of the “RUDN University Program 5–100”.

#### For citation

Krivoshapko S.N. An analysis of annular plate in curvilinear non-orthogonal coordinates with the help of equations of a shell theory. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6): 472–480. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-472-480>

#### Abstract

The complete system of equations of a linear theory of thin shells in curvilinear non-orthogonal coordinates proposed in the paper was taken as the basis of the investigation. Earlier, this system was used for static analysis of a long developable helicoid. In the article, this system is applied for the determination of stress-strain state of annular and circular plates under action of the external axisymmetric uniform load acting both in the plane of the plate and out-of-their plane. Presented results for annular plate given in the non-orthogonal coordinates expand a number of problems that can be solved analytically. They can be used as the first terms of series of expansion of displacements of degrees of the small parameter if a small parameter method is applied for examining a long tangential developable helicoid.

**Keywords:** arbitrary coordinates, shell theory, tangential developable helicoid, annular plate, equilibrium equations, axisymmetric load

### Расчет кольцевой пластины в криволинейных неортогональных координатах с помощью уравнений теории оболочек

С.Н. Кривошапко

Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6  
sn\_krivoshapko@mail.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 7 августа 2020 г.  
Доработана: 15 октября 2020 г.  
Принята к публикации: 16 ноября 2020 г.

#### Аннотация

В основу исследования положена полная система 20 уравнений в криволинейных неортогональных координатах линейной теории тонких оболочек, ранее использованная при статическом расчете длинного разверты-

Sergey N. Krivoshapko, Professor of the Department of Civil Engineering of Academy of Engineering, DSc, Professor; eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966, Scopus Author ID: 6507572305, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9385-3699>

Кривошапко Сергей Николаевич, профессор департамента строительства Инженерной академии, доктор технических наук, профессор; eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966, Scopus Author ID: 6507572305, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9385-3699>

© Krivoshapko S.N., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Благодарности**

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100».

**Для цитирования**

*Krivoshapko S.N.* An analysis of annular plate in curvilinear non-orthogonal coordinates with the help of equations of a shell theory // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 6. С. 472–480. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-472-480>

вающегося геликоида. В статье эта система применена для определения напряженно-деформированного состояния кольцевой и круглой пластин при внешней осесимметричной поверхностной нагрузке, действующей как в плоскости пластин, так и из их плоскости. Полученные результаты для кольцевой пластины в неортогональных координатах расширяют класс задач, которые теперь можно решить аналитически. Они могут быть использованы в качестве первых членов рядов разложения искомых перемещений в случае применения метода малого параметра применительно к длинному развертывающемуся геликоиду.

**Ключевые слова:** неортогональные координаты, теория оболочек, развертывающийся геликоид, кольцевая пластинка, уравнения равновесия, осесимметричная нагрузка

**1. Introduction**

It is known, that the simplest equations of theory of thin shells are turned out for middle shell surfaces given in principle curvatures. But sometimes, it is very difficult to set a surface in principle curvatures and one must use governing equations of a theory of thin shells in curvilinear non-orthogonal coordinates. The complete system of equations in curvilinear non-orthogonal coordinates was proposed by A.L. Goldenveizer [1]. This system contains internal “pseudoforces”, “pseudomoments”, and Christoffel’s symbols. The system of equations, presented by Ya.M. Grigorenko and A.M. Timonin [2], is written in tensor form.

The system, proposed by the author, contains internal forces and moments usual for engineers and is free from Christoffel’s symbols [3]. Hereinafter, the equations presented in a paper [3] will be used.

**2. An aim of investigation**

Having the systems of the governing equations of a theory of thin shells, set by different scientists, it is desirable to use them for solution of problems of bending of plates and for solution of plane problems of their analysis, or to apply the governing equations of a theory of thin shells for solution of test examples of analysis of plane elements. This approach is illustrated by an example of reducing of general equations of a theory of thin shells in curvilinear arbitrary coordinates to the equations for analysis of tangential developable helicoid, and after for analysis of annular plates under action of axisymmetric uniform load of two types.

**3. Methods of investigation****3.1. Governing equations of a theory of thin shells in curvilinear non-orthogonal coordinates**

A system of the governing equations of a theory of thin shells in curvilinear non-orthogonal coordinates, proposed by the author, has the following form [3]:

– six equilibrium equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(AS_v) + \frac{N_u - N_v}{\sin \chi} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \cos \chi \right) + \frac{\partial A}{\partial v} S_u + B \frac{\partial S_u}{\partial u} \cos \chi + B \frac{\partial N_u}{\partial u} \sin \chi - \frac{AB}{R_u} Q_u + ABX \sin \chi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial v}(AN_v) + \frac{S_u + S_v}{\sin \chi} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \cos \chi \right) - \frac{\partial A}{\partial v} N_u + B \frac{\partial S_u}{\partial u} \sin \chi - B \frac{\partial N_u}{\partial u} \cos \chi - \frac{AB}{\sin \chi} \left( \frac{Q_v}{R_v} - \frac{Q_u}{R_u} \cos \chi \right) + ABY \sin \chi &= 0, \\ \frac{N_u}{R_u \sin \chi} + \frac{N_v}{R_v \sin \chi} + \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial u}(BQ_u) + \frac{\partial}{\partial v}(AQ_v) \right] - Z \sin \chi &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial v}(AM_v) + \frac{M_{uv} + M_{vu}}{\sin \chi} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \cos \chi \right) + \frac{\partial A}{\partial v} M_u + B \frac{\partial M_u}{\partial u} \cos \chi + B \frac{\partial M_{uv}}{\partial u} + \sin \chi + ABQ_v \sin \chi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial v}(AM_{vu}) + \frac{M_v - M_u}{\sin \chi} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \cos \chi \right) + \frac{\partial A}{\partial v} M_{uv} - B \frac{\partial M_u}{\partial u} \sin \chi + B \frac{\partial M_{uv}}{\partial u} \cos \chi + AB(Q_u + Q_v \cos \chi) &= 0, \end{aligned}$$

$$(S_u - S_v)\sin\chi + (N_v - N_u)\cos\chi + \frac{M_{uv}}{R_u \sin\chi} - \frac{M_{vu}}{R_v \sin\chi} = 0, \quad (1)$$

where  $X, Y, Z$  – external uniform surface load in the direction of mobile orthogonal axes  $x, y, z$ , and the  $x$ -axis coincides with the tangent to the  $u$ -coordinate line;

– six geometrical equations suggested by A.L. Goldenveizer and presented in a monography [1], the first three of which after submission of Christoffel's symbols in them can be expressed as [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial u_u}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial v} \left( \frac{u_v}{B} \right) + B \cos\chi \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u_v}{B} \right) \right] - \frac{u_z}{R'_u}, \\ \varepsilon_v &= \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} \left( \frac{u_u}{A} \right) + A \cos\chi \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u_u}{A} \right) \right] - \frac{u_z}{R'_v}, \\ \varepsilon_{uv} &= \sin\chi \left[ \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u_v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u_u}{A} \right) \right] - \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial u} u_u - \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial v} u_v + \frac{u_z}{\sin\chi} \left( \frac{2}{R_{12}} + \frac{\cos\chi}{R'_u} + \frac{\cos\chi}{R'_v} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Remaining three equations for the determination of change of curvatures  $\kappa_u$  and  $\kappa_v$  and torsion  $\kappa_{uv}$  have rather complex form, for example, for shallow shells

$$\begin{aligned} \kappa_u &= \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{A \sin\chi} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\cos\chi}{\sin\chi} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right) + \frac{1}{B^2 \sin\chi} \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right], \\ \kappa_v &= \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{B \sin\chi} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\cos\chi}{\sin\chi} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right) + \frac{1}{A^2 \sin\chi} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right], \\ \kappa_{uv} &= \frac{1}{AB \sin\chi} \left[ \frac{B^2}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right) + \frac{A^2}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial u_z}{\partial u} \right) - \cos^2\chi \frac{\partial^2 u_z}{\partial u \partial v} + \frac{\cos\chi}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{\cos\chi}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial u_z}{\partial v} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Eight physical equations connecting internal forces  $N_u, N_v, S_u, S_v, Q_u, Q_v$  and moments  $M_u, M_v, M_{uv}, M_{vu}$  and components of tangential and bending deformations  $\varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_{uv}, \kappa_u, \kappa_v, \kappa_{uv}$  between themselves can be written as [3]

$$\begin{aligned} N_v &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_v - \varepsilon_{uv} \operatorname{ctg}\chi + \nu \varepsilon_u), \quad N_u = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_u - \varepsilon_{uv} \operatorname{ctg}\chi + \nu \varepsilon_v), \\ S_v &= \frac{1-\nu}{2} C [\varepsilon_{uv} + (\varepsilon_v - \varepsilon_u) \operatorname{ctg}\chi], \quad S_u = \frac{1-\nu}{2} C [\varepsilon_{uv} + (\varepsilon_u - \varepsilon_v) \operatorname{ctg}\chi], \\ M_{vu} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} (\kappa_{vu} - \kappa_u \cos\chi), \quad M_{uv} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} (\kappa_{vu} - \kappa_v \cos\chi), \\ M_v &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\kappa_u + \kappa_v}{\sin\chi} - (1-\nu)(\kappa_u \sin\chi + \kappa_{uv} \operatorname{ctg}\chi) \right], \\ M_u &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\kappa_u + \kappa_v}{\sin\chi} - (1-\nu)(\kappa_v \sin\chi + \kappa_{uv} \operatorname{ctg}\chi) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

where  $\chi \neq \pi/2$  is the angle between the coordinate lines  $u$  and  $v$ ;  $\nu$  = Poisson's ratio;  $h$  = thickness of shell.

A vector of displacements can be written as

$$U = u_u \frac{r_u}{A} + u_v \frac{r_v}{B} - u_z \mathbf{n}.$$

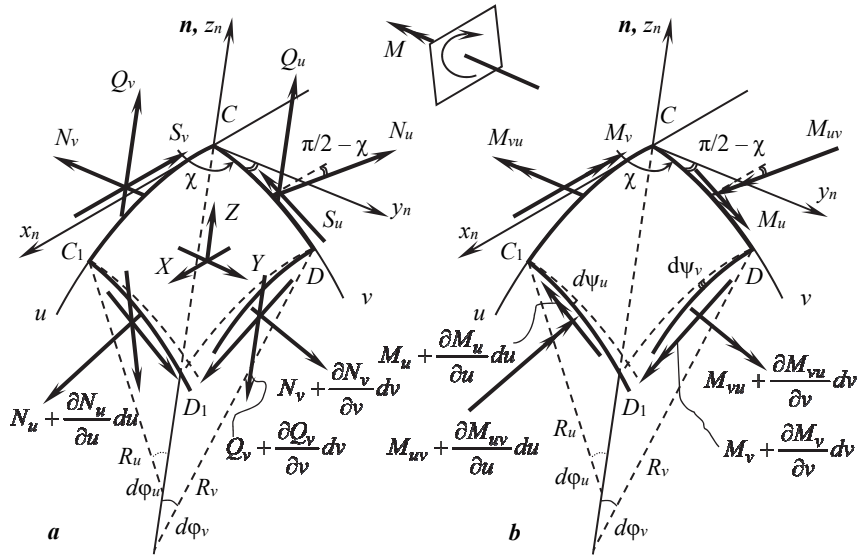


Figure. The forces (a) and moments (b), per unit length, needed for equilibrium

The forces and moments, per unit length, needed for equilibrium are shown in Figure and are positive as shown.

### 3.2. Developable helicoid

Parametric equations of evolvent (developable) helicoid can be written as

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = a \cos v - au \sin v / m, \\ y &= y(u, v) = a \sin v + au \cos v / m, \\ z &= z(u, v) = bv + bu / m, \end{aligned} \tag{5}$$

where  $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $b$  is the lead of a helix  $u = 0$  (cuspidal edge);  $v$  is an angle measured from an axis  $Ox$ ;  $a$  is a radius of a cylinder on which the helical cuspidal edge is lying.

In this case, coefficients of the fundamental forms of the surface (5) and its principal curvatures ( $k_u$ ;  $k_v$ ) can be written as

$$A = 1; F = m; B^2 = m^2 + u^2 a^2 / m^2; N = uab / m^2; L = M = 0; k_u = 0; k_v = N / B^2, \tag{6}$$

and also

$$\cos \chi = \frac{F}{AB} = \frac{m}{B}, \quad \sin \chi = \frac{ua}{mB}, \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{ua^2}{m^2 B}. \tag{7}$$

The  $u$ -coordinate lines coincide with the straight generatrices of the helicoid but the  $v$ -lines are co-axis helices. The formulae (6) show that conjugated ( $M = 0$ ) non-orthogonal ( $F \neq 0$ ) system of curvilinear coordinates is used.

For a developable helicoid (5) with coefficients of the fundamental forms (6), the equations (1)–(3) become simpler. Substituting the geometrical equations (2), (3) into the formulae of Hooke's law (4) but the results into the equilibrium equations (1) one can obtain a system of three differential equations in partial derivatives of the 8<sup>th</sup> order. This was made in a monograph [3]. But this system of equations was not solved analytically.

A system of three differential equations in partial derivatives of the 8<sup>th</sup> order, presented in a work [4], was reduced to a system of three ordinary differential equations of the 8<sup>th</sup> order for a long developable helicoid. It was assumed that all components of stress-strain state of a long developable helicoid depend only on the  $u$ -coordinate, i. e. all derivatives with respect to parameter  $v$  are equal to zero. In this case, a problem of determination of components of stress-strain state yields to analytical solution. With the help of small parameter method, it was solved in works [4; 5]. With the help of asymptotic semianalytical method, it was solved in a work [6]. Analogous approach was used in a paper [7] for analysis of a long right helicoid. Two methods of

analysis of thin elastic open helicoidal shells were used in a manuscript [8] where the equations of A.L. Goldenveizer [1] and the equations (1)–(4) were applied. Now five types of helicoidal shells are known [9]. All these shells can be analyzed with the help of presented equations (1)–(4) [10; 11].

### 3.3. Governing equations for thin annular plates in curvilinear non-orthogonal coordinates

For annular plates, we have  $b = 0$ , therefore, formulae (1)–(7) are simplified and become

$$\begin{aligned} m &= a; \quad A = 1; \quad F = a; \quad B^2 = a^2 + u^2; \\ N &= L = M = 0; \quad k_u = 0; \quad k_v = 0; \\ \cos\chi &= \frac{a}{B}, \quad \sin\chi = \frac{u}{B}, \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{u}{B}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial u} = \frac{a}{B^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Substituting the values (8) into formulae (1)–(7) gives the possibility easily to obtain corresponding governing equations for annular plate or its fragment subjected to arbitrary uniform surface load or to linear load along contour of the plate acting in the plane of the plate.

One can obtain a system of three differential equations in partial derivatives in displacements and reduce them to a system of two differential equations in displacements of the same order. But to solve analytically the obtained systems it is not possible yet. Of course, this problem can be solved with the help of FEM [12].

Assume that an annular plate is subjected to an axisymmetric load. Then, all parameters of stress-strain state of the plate will not depend on the  $v$ -coordinate, i. e.

$$\frac{\partial^i \dots}{\partial v^i} = 0.$$

Hence, the system of equations (1)–(4) becomes:

– *equilibrium equations:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (uN_u + aS_u) - N_v + uX &= 0, \\ \frac{d}{du} (uS_u - aN_u) + S_v + uY &= 0, \\ \frac{d}{du} (BQ_u) - uZ &= 0, \\ a \frac{dM_u}{du} + M_{vu} + uQ_v &= 0, \\ -\frac{d(uM_u)}{du} + M_v + aQ_v + BQ_u &= 0, \\ u(S_u - S_v) + a(N_v - N_u) &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

– *geometrical equations:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{d\theta}{du}, \quad \varepsilon_v = \frac{u}{B^2} u_u, \\ \varepsilon_{uv} &= u \frac{d\psi}{du} - \frac{a}{B^2} u_u, \\ \kappa_u &= \frac{d}{du} \left( \frac{B}{u} \frac{du_z}{du} \right), \quad \kappa_v = \frac{1}{B} \frac{du_z}{du}, \\ \kappa_{uv} &= \frac{a}{B^2} \frac{du_z}{du}; \end{aligned} \quad (10)$$



– physical equations:

$$\begin{aligned}
 N_v &= C \left[ -\frac{a}{u} \frac{d}{du} (u\psi) + \frac{\theta}{u} + \nu \frac{d\theta}{du} \right], \\
 N_u &= C \left[ \frac{du_u}{du} + \frac{1}{u} u_u - \frac{1-\nu}{B^2} u \cdot u_u \right], \\
 S_v &= \frac{1-\nu}{2u} C \left( u^2 \frac{d\psi}{du} - a \frac{d\theta}{du} \right), \\
 S_u &= \frac{1-\nu}{2} C \left( u \frac{d\psi}{du} + \frac{a}{u} \frac{d\theta}{du} - \frac{2a}{B^2} u_u \right), \\
 M_{vu} &= -(1-\nu)aD \frac{d}{du} \left( \frac{1}{u} \frac{du_z}{du} \right), \quad M_{uv} = 0, \\
 M_v &= -\frac{D}{u} \left[ \frac{d}{du} \left( \frac{B^2}{u} \frac{du_z}{du} \right) - (1-\nu)u \frac{d^2 u_z}{du^2} \right], \\
 M_u &= -\frac{D}{u} \left[ \frac{d}{du} \left( \frac{B^2}{u} \frac{du_z}{du} \right) - (1-\nu) \frac{du_z}{du} \right], \\
 D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

New notations were introduced in formulae (10) and (11):

$$\theta = u_u + \frac{a}{B} u_v, \quad \psi = \frac{u_v}{B}. \tag{12}$$

#### 4. Results

##### 4.1. Applied load is perpendicular to the middle surface of the plate

Assume that an annular plate subjected to constant surface load  $Z = \text{const}$ . It means that applied load is perpendicular to the middle surface of the plate. This assumption eliminates the need to consider in-plane membrane forces that are not considered in the classical theory of bending of thin plates. So, integrating the third equation of equilibrium (9), we determine

$$BQ_u = \frac{u^2}{2} Z + \bar{C}_1, \tag{13}$$

where  $\bar{C}_1$  is the unknown constant of the integration.

Substituting the values of the shear force  $Q_v$ , obtained from the fourth equation of equilibrium (9), into the fifth equation of equilibrium, gives

$$BQ_u = \frac{B^2}{u^2} \frac{d(uM_u)}{du} - M_v - \frac{a^2}{u^2} M_u + \frac{a}{u} M_{vu}.$$

Taking into account expressions (11), the obtained equation can be written as

$$BQ_u = -D \frac{B^2}{u} \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{u} \frac{d}{du} \left( \frac{B^2}{u} \frac{du_z}{du} \right) \right],$$

or with the help of an equality (13) we get

$$-D \frac{B^2}{u} \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{u} \frac{d}{du} \left( \frac{B^2}{u} \frac{du_z}{du} \right) \right] = \frac{u^2}{2} Z + \bar{C}_1.$$

Integration of the last expression gives

$$u_z = C_1 B^2 \ln B^2 + C_2 \ln B^2 + C_3 u^2 + C_4 - \frac{Z}{64D} u^4, \quad (14)$$

where  $C_1, C_2, C_3, C_4$  are the unknown constants of the integration, that can be determined after satisfaction of boundary conditions.

Substituting a value of displacement (14) in the expression for the determination of  $BQ_u$  gives

$$BQ_u = -8DC_1 + \frac{u^2}{2}Z,$$

$$\text{i. e. } \bar{C}_1 = -8DC_1.$$

At last, we can find

$$Q_v = -\frac{a}{u} \frac{dM_u}{du} - \frac{1}{u} M_{vu} = \frac{8a}{B^2} DC_1 - \frac{a}{2} Z.$$

#### 4.2. Applied load is in the plane of the plate

Examine loading annular or circular plate ( $a = 0$ ) by axisymmetric load acting in the plane of the plate. In this case, we use the first two equations of equilibrium (9). After substitution the first fourth physical equations in them and after some transformations, equations (9) take the following form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{u} \frac{d}{du} [u(\theta - a\psi)] \right\} &= \frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{u} \frac{d}{du} [u \cdot u_u] \right\} = \frac{u}{CB^2} (aY - uX), \\ \frac{d}{du} \left( u^3 \frac{d\psi}{du} \right) + a \frac{d}{du} \left( u \frac{d\theta}{du} \right) - 2a \frac{d\theta}{du} &= -\frac{2u^3}{(1-\nu)CB^2} (aX + uY). \end{aligned}$$

Integration of two last expressions gives

$$\begin{aligned} \theta - a\psi = u_u &= \frac{1}{u} \int \left[ u \int \frac{u}{CB^2} (aY - uX) du \right] du + \frac{u}{2} D_1 + \frac{1}{u} D_2, \\ \psi + \frac{a}{u^2} \theta &= -\int \frac{1}{u^3} \int \frac{2u^3 (aX + uY)}{CB^2 (1-\nu)} du du + \frac{D_3}{2u^2} + D_4, \end{aligned} \quad (15)$$

where  $D_1, D_2, D_3, D_4$  are the unknown constants of the integration.

The last two equations give the possibility to find parameters of deflections (12). Substituting these parameters into the physical equations (11) one can find the internal forces and moments in an annular or circular plate subjected to an external uniform axisymmetric load acting in the plane of the plate.

Assume that  $X = Y = 0$  then from the last two expressions we determine

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{B^2} \left( \frac{u^3}{2} D_1 + u D_2 + \frac{a}{2} D_3 + a u^2 D_4 \right), \\ \psi &= \frac{u_v}{B} = \frac{1}{B^2} \left( -\frac{a u}{2} D_1 - \frac{a}{u} D_2 + \frac{1}{2} D_3 + u^2 D_4 \right), \\ u_u &= \frac{u}{2} D_1 + \frac{1}{u} D_2. \end{aligned}$$

The last expression can be applied if uniform loads  $X$ ,  $Y$  are absent, but displacements given in advance or external moments or forces given in advance are known on the plate edges.

In a paper [13], the analogous axisymmetric problem was solved by using finite difference method.

## 5. Conclusion

If one assumes that a radius of the inner edge of the annular plate  $a = 0$  then  $B = u$ ,  $\chi = \pi/2$  and the well-known equations for circular plate in the polar coordinates would be obtained [14].

It shows that governing equations of a shell theory (1)–(4) assumed as a basis of presented investigation are correct. The results obtained for annular plate in non-orthogonal coordinates widen a class of problems which now can be solved analytically. Examining a long tangential developable helicoid with the help of a small parameter method [15], it is possible to use the solutions (14) and (15) as the first terms of series of expansion of displacements of degrees of the small parameter. Using equations (8)–(15) it is possibly to obtain analytical solutions for plates with different axisymmetric static load and support conditions presented in a paper [16].

The additional information on the application of annular and circular plates and on numerical and analytical analysis of thin and thick plates is given in manuscripts [17–20].

## References

1. Goldenveizer A.L. *Theory of Elastic Thin Shells*. New York: Pergamon Press; 1961.
2. Grigorenko Ya.M., Timonin A.M. On one approach to the numerical solution of boundary problems on theory of complex geometry shells in the non-orthogonal curvilinear coordinate systems. *Doklady AN Ukrainskoy SSR [Reports of Academy of Science of the Ukrainian SSR]*. 1991;4(9):41–44. (In Russ.)
3. Krivoshapko S.N. Two types of governing equations for shells with the middle surfaces given in arbitrary curvilinear coordinates. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;(1):15–22. (In Russ.) Available from: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/15201> (accessed: 12.08.2020).
4. Krivoshapko S.N. *Geometriya lineychatykh poverkhnostey s rebrom vosvrata i lineynaya teoriya raschota torsovykh obolochek [Geometry of ruled surfaces with cuspidal edge and linear theory of analysis of tangential developable shells]*; monograph. Moscow: RUDN Publ.; 2009. (In Russ.)
5. Krivoshapko S.N. Static analysis of shells with developable middle surfaces. *Applied Mechanics Reviews*. 1998; 51(12)(Part 1):731–746.
6. Bajoriya G.Ch. An analysis of a long developable open helicoid with using of a moment theory in displacements. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1985;3:22–24. (In Russ.)
7. Rynkovskaya M.I. On problem of strength analysis of thin linear helicoidal shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015;(6):13–15. (In Russ.) Available from: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/10871> (accessed: 12.08.2020).
8. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aïssè G. Two methods of analysis of thin elastic open helicoidal shells. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. 2012;2(12)(3):382–390.
9. Krivoshapko S.N., Rynkovskaya M. Five types of ruled helical surfaces for helical conveyers, support anchors and screws. *MATEC Web of Conferences*. 2017;95:06002. <http://dx.doi.org/10.1051/mateconf/20179506002>
10. Rynkovskaya M., Ivanov V. Analytical method to analyze right helicoid stress-strain. *Advanced Structured Materials*. 2019;92:157–171.
11. Tupikova E.M. Semi-analytical analysis of a long shallow oblique helicoidal shell in a non-orthogonal non-conjugate coordinate system. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(3):3–8. (In Russ.) Available from: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/11254> (accessed: 12.08.2020).
12. Hayder Abdulameer Mehdi. Derivation of Annular Plate Sector Element for General Bending Analysis. *Journal of Engineering and Sustainable Development*. 2015;19(1):14–30.
13. Noh S., Abdalla M.M., Waleed W.F. Buckling analysis of isotropic circular plate with attached annular piezoceramic plate. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 2016(February);10(S):443–458. Available from: <http://einspem.upm.edu.my/journal> (accessed: 12.08.2020).
14. Jawad M.H. *Design of Plate & Shell Structures*. New York: ASME Press; 2004.
15. Krivoshapko S.N. The application of asymptotical method of a small parameter for analytic analysis of thin elastic torse-helicoids. *Prostranstvennye konstrukzii sdaniy i sooruzheniy [Space Structures of Buildings and Erections]*. 2004; 9:36–44. (In Russ.)
16. Civalek Ö., Çatal H.H. Linear static and vibration analysis of circular and annular plates by the harmonic differential quadrature (HDQ) method. *Eng. & Arch. Fac. Osmangazi University*. 2003;XVII(1):43–71.
17. Shariyat M., Mohammadjani R. Three-dimensional compatible finite element stress analysis of spinning two-directional FGM annular plates and disks with load and elastic foundation non-uniformities. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013;10(5):859–890. <http://dx.doi.org/10.1590/S1679-78252013000500002>

18. Mattikalli A.C., Kurahatti R.V. Analysis of annular plate by using numerical method. *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*. 2018;5(1):5. Available from: [http://ijiset.com/vol5/v5s1/IJISSET\\_V5\\_I01\\_01.pdf](http://ijiset.com/vol5/v5s1/IJISSET_V5_I01_01.pdf) (accessed: 12.08.2020).

19. Zietlow D.W., Griffin D.C., Moore T.R. The limitations on applying classical thin plate theory to thin annular plates clamped on the inner boundary. *AIP Advances*. 2012;2(4):042103. <https://doi.org/10.1063/1.4757928>

20. Zenkour A.M. Bending of a sector shaped annular plate with continuous thickness variation along the radial direction. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2004(May);57(2):205–223. DOI: 10.1093/qjmam/57.2.205.

### Список литературы

1. Goldenveizer A.L. *Theory of Elastic Thin Shells*. New York: Pergamon Press, 1961.

2. Григоренко Я.М., Тимонин А.М. Об одном подходе к численному решению краевых задач теории оболочек сложной геометрии в неортогональных криволинейных системах координат // Доклады Академии наук Украинской ССР. 1991. № 4. Вып. 9. С. 41–44.

3. Кривошапко С.Н. Два вида расчетных уравнений для оболочек в произвольных криволинейных координатах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 1. С. 15–22. URL: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/15201> (дата обращения: 12.08.2020).

4. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек: монография. М.: РУДН, 2009. 357 с.

5. Krivoshapko S.N. Static analysis of shells with developable middle surfaces // *Applied Mechanics Reviews*. 1998. Vol. 51. Issue 12. Part 1. Pp. 731–746.

6. Баджория Г.Ч. Расчет длинного развевывающегося геликоида по моментной теории в перемещениях // Строительная механика и расчет сооружений. 1985. № 3. С. 22–24.

7. Рынковская М.И. К вопросу о расчете на прочность тонких линейчатых винтовых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 13–15. URL: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/10871> (дата обращения: 12.08.2020).

8. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aïssè G. Two methods of analysis of thin elastic open helicoidal shells // *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. 2012. Vol. 2(12). Issue 3. Pp. 382–390.

9. Krivoshapko S.N., Rynkovskaya M. Five types of ruled helical surfaces for helical conveyers, support anchors and screws // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 95. Article number 06002. <http://dx.doi.org/10.1051/mateconf/20179506002>

10. Rynkovskaya M., Ivanov V. Analytical method to analyze right helicoid stress-strain // *Advanced Structured Materials*. 2019. Vol. 92. Pp. 157–171.

11. Туникова Е.М. Полуаналитический расчет длинного пологого косоугольного геликоида в неортогональной несжатой системе координат // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 3. С. 3–8. URL: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/11254> (дата обращения: 12.08.2020).

12. Hayder Abdulameer Mehdi. Derivation of Annular Plate Sector Element for General Bending Analysis // *Journal of Engineering and Sustainable Development*. 2015. Vol. 19. Issue 1. Pp. 14–30.

13. Noh S., Abdalla M.M., Waleed W.F. Buckling analysis of isotropic circular plate with attached annular piezoceramic plate // *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 2016, February. Vol. 10(S). Pp. 443–458. URL: <http://einspem.upm.edu.my/journal> (accessed: 12.08.2020).

14. Jawad M.H. *Design of Plate & Shell Structures*. New York: ASME Press, 2004.

15. Кривошапко С.Н. Применение асимптотического метода малого параметра для аналитического расчета тонких упругих торсов-геликоидов // Пространственные конструкции зданий и сооружений. 2004. Вып. 9. С. 36–44.

16. Civalek Ö., Çatal H.H. Linear static and vibration analysis of circular and annular plates by the harmonic differential quadrature (HDQ) method // *Eng. & Arch. Fac. Osmangazi University*. 2003. Vol. XVII. No. 1. Pp. 43–71.

17. Shariyat M., Mohammadjani R. Three-dimensional compatible finite element stress analysis of spinning two-directional FGM annular plates and disks with load and elastic foundation non-uniformities // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. No. 5. Pp. 859–890. <http://dx.doi.org/10.1590/S1679-78252013000500002>

18. Mattikalli A.C., Kurahatti R.V. Analysis of annular plate by using numerical method // *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*. 2018. Vol. 5. Issue 1. URL: [http://ijiset.com/vol5/v5s1/IJISSET\\_V5\\_I01\\_01.pdf](http://ijiset.com/vol5/v5s1/IJISSET_V5_I01_01.pdf) (accessed: 12.08.2020).

19. Zietlow D.W., Griffin D.C., Moore T.R. The limitations on applying classical thin plate theory to thin annular plates clamped on the inner boundary // *AIP Advances*. 2012. Vol. 2. Issue 4. <https://doi.org/10.1063/1.4757928>

20. Zenkour A.M. Bending of a sector shaped annular plate with continuous thickness variation along the radial direction // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2004, May. Vol. 57. Issue 2. Pp. 205–223. DOI: 10.1093/qjmam/57.2.205.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ  
THEORY OF ELASTICITYDOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-481-492  
УДК 519.633

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды  
для плоского одномерного деформирования при аппроксимации  
замыкающих уравнений биквадратичными функциями

С.В. Бакушев

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Российская Федерация, 440028, Пенза, ул. Германа Титова, д. 28  
bakuchsv@mail.ru*

## История статьи

Поступила в редакцию: 22 сентября 2020 г.  
Доработана: 25 ноября 2020 г.  
Принята к публикации: 30 ноября 2020 г.

## Аннотация

Рассматриваются вопросы построения дифференциальных уравнений равновесия геометрически и физически нелинейной сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, при аппроксимации диаграмм объемного и сдвигового деформирования квадратичными функциями. Построение физических зависимостей основано на вычислении секущих модулей объемного и сдвигового деформирования. В процессе аппроксимации графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования при помощи двух отрезков парабол секущий модуль сдвига на первом участке является линейной функцией интенсивности деформаций сдвига, секущий модуль объемного расширения – сжатия – линейной функцией первого инварианта тензора деформаций. На втором участке диаграмм и объемного и сдвигового деформирования секущий модуль сдвига является дробной (рациональной) функцией интенсивности деформаций сдвига, секущий модуль объемного расширения – сжатия – дробной (рациональной) функцией первого инварианта тензора деформации. Исходя из предположения об обособленности друг от друга диаграмм объемного и сдвигового деформирования, рассмотрены шесть основных случаев физических зависимостей, обусловленных взаимным расположением точек излома графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования, аппроксимированных двумя параболой каждый. Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряженного и деформированного состояний сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования. Замыкающие уравнения физических соотношений построены на основе экспериментальных данных и аппроксимированы биквадратичными функциями.

**Ключевые слова:** сплошная среда, плоская одномерная деформация, аппроксимация диаграмм деформирования, квадратичные функции, дифференциальные уравнения равновесия, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность

## Для цитирования

Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоского одномерного деформирования при аппроксимации замыкающих уравнений биквадратичными функциями // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 6. С. 481–492. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-481-492>

Бакушев Сергей Васильевич, профессор кафедры механики, доктор технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 1382-2917, Scopus Author ID: 6505699177, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9134-8106>

© Бакушев С.В., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

# Differential equations of equilibrium of continuous medium for plane one-dimensional deformation at closing equations approximation by biquadratic functions

Sergey V. Bakushev

*Penza State University of Architecture and Construction, 28 Germana Titova St, Penza, 440028, Russian Federation*  
bakuchsv@mail.ru

## Article history

Received: September 22, 2020

Revised: November 25, 2020

Accepted: November 30, 2020

## Abstract

Problems of differential equations construction of equilibrium of a geometrically and physically nonlinear continuous medium under conditions of one-dimensional plane deformation are considered, when the diagrams of volumetric and shear deformation are approximated by quadratic functions. The construction of physical dependencies is based on calculating the secant moduli of volumetric and shear deformation. When approximating the graphs of the volumetric and shear deformation diagrams using two segments of parabolas, the secant shear modulus in the first segment is a linear function of the intensity of shear deformations, the secant modulus of volumetric expansion – contraction is a linear function of the first invariant of the strain tensor. In the second section of the diagrams of both volumetric and shear deformation, the secant shear modulus is a fractional (rational) function of the shear strain intensity, the secant modulus of volumetric expansion – compression is a fractional (rational) function of the first invariant of the strain tensor. Based on the assumption of independence, generally speaking, from each other of the volumetric and shear deformation diagrams, six main cases of physical dependences are considered, depending on the relative position of the break points of the graphs of the diagrams volumetric and shear deformation, each approximated by two parabolas. The differential equations of equilibrium in displacements constructed in the article can be applied in determining the stressed and deformed state of a continuous medium under conditions of one-dimensional plane deformation, the closing equations of physical relations for which, constructed on the basis of experimental data, are approximated by biquadratic functions.

**Keywords:** continuous medium, plane one-dimensional deformation, approximation of deformation diagrams, quadratic functions, differential equilibrium equations, geometric linearity, geometric nonlinearity

## For citation

Bakushev S.V. Differential equations of equilibrium of continuous medium for plane one-dimensional deformation at closing equations approximation by biquadratic functions. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):481–492. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-481-492>

## 1. Введение

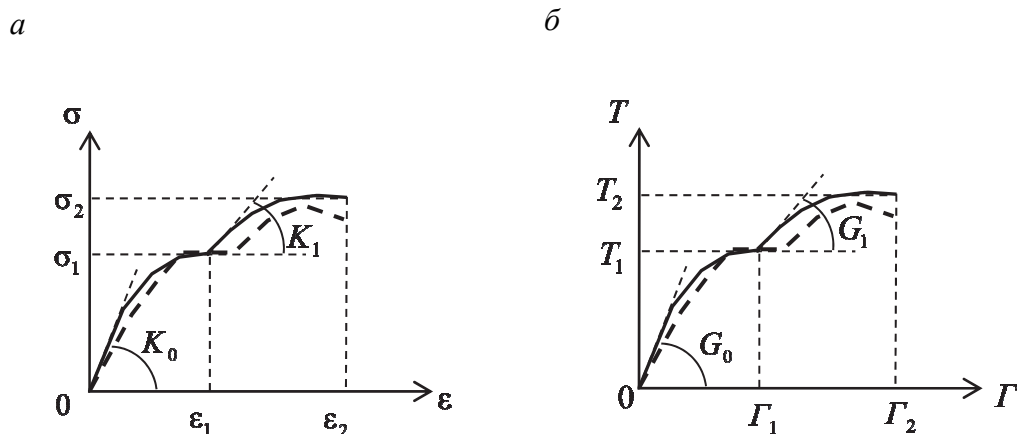
Построение математических моделей, наиболее полно описывающих механическое поведение сплошных деформируемых сред и позволяющих адекватно отражать их напряженное и деформированное состояние, является одной из приоритетных задач механики деформируемого твердого тела. Одним из путей решения этой практически важной задачи является разработка уточненных математических моделей, описывающих реальные диаграммы объемного и сдвигового деформирования. Основная трудность при этом заключается в том, что диаграммы объемного и сдвигового деформирования сугубо индивидуальны для каждого рассматриваемого материала. Ввиду этого возникает задача построения математических моделей этих диаграмм, имея в наличии только значения координат нескольких характерных точек на этих диаграммах и задаваясь видом кривых на интервалах между этими характерными точками. Одной из наиболее простых математических моделей при этом будет модель, построенная на базе трех характерных точек диаграмм объемного и сдвигового деформирования и аппроксимированная на интервалах между этими точками отрезками прямых (билинейная модель) [1]. Более сложной является математическая модель, построенная на базе трех характерных точек диаграмм объемного и сдвигового деформирования и аппроксимированная на интервалах между этими точками отрезками парабол (биквадратичная модель) [2].

Следующим шагом на пути решения практических задач является построение дифференциальных уравнений равновесия для различных частных случаев напряженного и деформированного состояний сплош-

ной среды, соответствующих принятым диаграммам объемного и сдвигового деформирования. В работе [3] представлены дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях при аппроксимации диаграмм объемного и сдвигового деформирования билинейными функциями для характерных случаев напряженно-деформированного состояния сплошной среды: одномерного плоского, осесимметричного, центрально-симметричного деформирования, плоской деформации в декартовых и цилиндрических координатах, как без учета, так и с учетом геометрической нелинейности (в трактовке В.В. Новожилова [4]). Надо отметить, что в настоящее время разработано много математических моделей, описывающих механическое поведение сплошных сред, в частности грунтовых массивов. Работа [5] посвящена разработке рекомендаций по выбору достоверных математических моделей грунтов в численных расчетах грунтовых плотин и их сравнению с наиболее распространенными моделями в современной практике применения [6–9].

Данная работа посвящена разработке дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного вида биквадратичными функциями. В качестве математических моделей сплошной среды используются как модели, не учитывающие геометрическую нелинейность, так и модели, учитывающие геометрическую нелинейность.

Следует отметить, что вопросами расчета физически и геометрически нелинейных деформируемых сплошных сред и конструкций при сложном напряженно-деформированном состоянии занимаются многие отечественные и зарубежные исследователи [10–12]. Общие вопросы учета нелинейности в расчетах строительных конструкций рассматриваются в работе [13]. Отмечается, что физические процессы, в частности в механике деформируемого твердого тела, чаще всего носят нелинейный характер. Строгие линейные зависимости между различными параметрами, определяющими состояние того или иного объекта, встречаются крайне редко. Фактически линейные предположения действительны только в особых обстоятельствах и обычно включают некоторую меру «малости», например, небольшие деформации, небольшие смещения, небольшие вращения и т. д. В работе [14] обсуждаются проблемы получения корректных решений нелинейных задач теории упругости, особенно в связи с развитием численных методов решения, в частности метода конечных элементов. В статье [15] утверждается, что в настоящее время нелинейные расчеты можно рассматривать лишь как некоторый дополнительный инструмент, который используют в тех случаях, когда применение простых стандартных методов расчета является недостаточным. Указывается на декларативность нормативных требований относительно обязательности выполнения нелинейных расчетов объектов строительства. Приводится перечень проблем, отсутствие решения которых мешает полноценному использованию нелинейного анализа в проектировании.



**Рис.** Диаграммы объемного (а)  $\sigma \approx \varepsilon$  и сдвигового (б)  $T \approx \Gamma$  деформирования:  
пунктирные толстые линии – исходные кривые объемного и сдвигового деформирования;  
сплошные толстые линии – аппроксимирующие отрезки парабол

**Figure.** Chart surround (а)  $\sigma \approx \varepsilon$  and shifting (б)  $T \approx \Gamma$  deformation:  
dotted thick lines – original curves of volume and shift deformation; solid thick lines – approximating segments of parabola

Во многих работах рассматривается расчет грунтовых массивов и элементов строительных конструкций методом конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности. В частности, в работах [16–19] методом конечных элементов выполняется расчет грунтовых массивов, в [20–24] –

расчет элементов строительных конструкций методом конечных элементов, в [25] проводится анализ работ по расчету пластин и оболочек за пределом упругости с учетом неоднородности материала, связанной с изменением его свойств в результате термообработки, облучения и воздействия агрессивной среды. Анализ показал необходимость разработки методов и алгоритмов расчета, позволяющих вести исследования неоднородных элементов конструкций с разрывными параметрами с учетом физической и геометрической нелинейности и начальными несовершенствами формы срединной поверхности.

В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования  $u_x = u(x)$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = 0$ , при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного вида квадратичными функциями как для геометрически линейной, так и для геометрически нелинейной модели сплошной среды (см. рисунок).

## 2. Геометрически линейная модель

В соответствии с работой [2] секущие модули объемного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  на первом криволинейном участке диаграмм  $\sigma \approx \varepsilon$  и  $T \approx \Gamma$  (см. рисунок) будут определяться выражениями

$$K'(\varepsilon) = \frac{1}{3}K_0 + K_{01}\varepsilon; \quad G'(\Gamma) = G_0 + G_{01}\Gamma, \quad (1)$$

где

$$K_{01} = \frac{\sigma_1 - K_0\varepsilon_1}{3\varepsilon_1^2}; \quad G_{01} = \frac{T_1 - G_0\Gamma_1}{\Gamma_1^2}. \quad (2)$$

На втором криволинейном участке диаграмм  $\sigma \approx \varepsilon$  и  $T \approx \Gamma$  секущий модуль объемного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и секущий модуль сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  будут вычисляться по формулам

$$K''(\varepsilon) = a_1\varepsilon + b_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}; \quad G''(\Gamma) = a_2\Gamma + b_2 + \frac{c_2}{\Gamma}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}; \quad b_1 = \frac{1}{3} \left[ K_1 - 2 \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1 \right]; \\ c_1 &= \frac{1}{3} \left[ \sigma_1 - K_1\varepsilon_1 - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1^2 \right]; \quad a_2 = \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2}; \\ b_2 &= G_1 - 2 \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1; \quad c_2 = T_1 - G_1\Gamma_1 - \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1^2. \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах (2) и (4) обозначено:  $K_0$  – начальный модуль объемного расширения (сжатия);  $G_0$  – начальный модуль сдвига;  $K_1$  – начальный модуль упрочнения при объемном расширении (сжатии);  $G_1$  – начальный модуль упрочнения при сдвиге;  $\sigma_1$ ,  $\varepsilon_1$  – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме  $\sigma \approx \varepsilon$ ;  $T_1$ ,  $\Gamma_1$  – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме  $T \approx \Gamma$ ;  $\sigma_2$ ,  $\varepsilon_2$  – координаты конечной точки второго участка на диаграмме  $\sigma \approx \varepsilon$ ;  $T_2$ ,  $\Gamma_2$  – координаты конечной точки второго участка на диаграмме  $T \approx \Gamma$ .

Кроме того,  $\sigma$  – первый инвариант тензора напряжений;  $\varepsilon$  – первый инвариант тензора деформаций;  $T$  – интенсивность касательных напряжений;  $\Gamma$  – интенсивность деформаций сдвига.



**Физические уравнения для геометрически линейной модели**

При плоском одномерном деформировании сплошной среды  $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$ ;  $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2}$ , причем  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$

и, следовательно,  $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$ . Тогда  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma} \varepsilon_{xx} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

Поскольку  $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon^2}$ , то графики нелинейных диаграмм  $\sigma \approx \varepsilon$  и  $T \approx \Gamma$  при плоском одномерном деформировании связаны друг с другом. Ввиду этого рассмотрим шесть основных случаев физических зависимостей для плоского одномерного деформирования сплошной среды.

*Случай 1:*  $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$ ,  $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$ . Точки излома графиков на квадратичных диаграммах

объемного и сдвигового деформирования совпадают, то есть  $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$ . При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (5)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть  $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$ . При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_1. \quad (6)$$

Здесь интенсивности  $\Gamma_0$  соответствуют такие компоненты деформации, при которых

$$|\varepsilon| = |\varepsilon_1|. \quad (7)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть  $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$ . При этом

$$0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_1 \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (8)$$

Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0$  соответствуют такие компоненты деформации, при которых

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon)^2} = \Gamma_1. \quad (9)$$

В этом случае физические уравнения с учетом формул (1) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + \frac{4}{3} G^I(\Gamma) \cdot \varepsilon; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon - \frac{2}{3} G^I(\Gamma) \cdot \varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

*Случай 2:*  $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$ ,  $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$ . Точки излома графиков на квадратичных диаграммах

объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть  $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$ . При этом

$$|\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \text{ и } \Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (11)$$

Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0$  и интенсивности  $\Gamma_0$  соответствуют такие компоненты деформации, при которых выполняются соотношения (9) и (7) соответственно.

В этом случае физические уравнения с учетом формул (1) и (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= K''(\varepsilon) \cdot \varepsilon + \frac{4}{3} G'(\Gamma) \cdot \varepsilon; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= K''(\varepsilon) \cdot \varepsilon - \frac{2}{3} G'(\Gamma) \cdot \varepsilon.\end{aligned}\quad (12)$$

Случай 3:  $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$ ,  $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$ . Точки излома графиков на квадратичных диаграммах

объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть  $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$ . При этом

$$|\varepsilon_0| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma_1 \leq \Gamma \leq \Gamma_0. \quad (13)$$

Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0$  и интенсивности  $\Gamma_0$  соответствуют такие компоненты деформации, при которых выполняются соотношения (9) и (7) соответственно.

В этом случае физические уравнения с учетом формул (1) и (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + \frac{4}{3} G''(\Gamma) \cdot \varepsilon; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon - \frac{2}{3} G''(\Gamma) \cdot \varepsilon.\end{aligned}\quad (14)$$

Случай 4:  $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$ ,  $\left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$ . Точки излома графиков на квадратичных диаграммах

объемного и сдвигового деформирования совпадают, то есть  $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$ . При этом

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (15)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть  $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$ . При этом

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_0| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (16)$$

Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0$  соответствуют такие компоненты деформации, при которых выполняется соотношение (9).

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть  $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$ . При этом

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_0. \quad (17)$$

Здесь интенсивности  $\Gamma_0$  соответствуют такие компоненты деформации, при которых выполняется соотношение (7).

В этом случае физические уравнения с учетом формул (3) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= K''(\varepsilon) \cdot \varepsilon + \frac{4}{3} G''(\Gamma) \cdot \varepsilon; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= K''(\varepsilon) \cdot \varepsilon - \frac{2}{3} G''(\Gamma) \cdot \varepsilon.\end{aligned}\quad (18)$$

Случай 5:  $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} = K_1, \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$ . Точка излома графика на квадратичной диаграмме

объемного деформирования отсутствует. При этом, если  $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$ , то физические уравнения будут иметь вид (10), а если  $\Gamma \geq \Gamma_1$  – (14).

Случай 6:  $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} = G_1$ . Точка излома графика на квадратичной диаграмме

сдвигового деформирования отсутствует. При этом, если  $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$ , то физические уравнения будут иметь вид (10), а если  $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$  – (12).

### Дифференциальные уравнения равновесия для геометрически линейной модели

Подставляя физические уравнения (10), (12), (14), (18) в дифференциальное уравнение равновесия одномерного плоского деформирования сплошной среды

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + F_x = 0, \quad (19)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях:

1) для физических уравнений (10) дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях будет иметь вид

$$\left\{ \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0 + 2K_{01} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{8}{3\sqrt{3}}G_{01} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \frac{8\sqrt{3}}{9}G_{01} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0; \quad (20)$$

2) для физических уравнений (12) получим:

$$\left\{ a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} + \frac{4}{3} \left( G_0 + G_{01} \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \right) + \left[ a_1 - c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{8\sqrt{3}}{9} G_{01} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0; \quad (21)$$

3) для физических уравнений (14):

$$\left\{ \frac{1}{3}K_0 + 2K_{01} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \left[ a_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + b_2 + \frac{c_2\sqrt{3}}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right] + \frac{8\sqrt{3}}{9} \left[ a_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{3c_2}{4} \right] \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0; \quad (22)$$

4) для физических уравнений (18):

$$\left\{ a_1 \varepsilon + b_1 + c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} + \frac{4}{3} \left[ a_2 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} + b_2 + \frac{c_2 \sqrt{3}}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ \left. + \left[ a_1 - c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9} \left[ a_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{3c_2}{4} \right] \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0. \quad (23)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений без учета геометрической нелинейности построены.

### 3. Геометрически нелинейная модель

Замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды [4] описываются соотношениями, устанавливающими в самом общем случае перекрестные зависимости между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщенных напряжений и нелинейных деформаций:

$$K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*), \quad G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*), \quad (24)$$

где  $\sigma^*$  – первый инвариант тензора обобщенных напряжений;  $\varepsilon^*$  – первый инвариант тензора нелинейных деформаций;  $T^*$  – интенсивность обобщенных касательных напряжений;  $\Gamma^*$  – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

Аппроксимируя зависимости (24) биквадратичными функциями, нетрудно получить секущие модули объемного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  на первом и втором криволинейных участках диаграмм  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  и  $T^* \approx \Gamma^*$ , аналогичных соотношениям (1)–(4). При этом все величины, входящие в формулы (1)–(4), следует записывать со звездочками.

Таким образом,  $K_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля объемного расширения (сжатия);  $G_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига;  $K_1^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при объемном расширении (сжатии);  $G_1^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при сдвиге;  $\sigma_1^*$ ,  $\varepsilon_1^*$  – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$ ;  $T_1^*$ ,  $\Gamma_1^*$  – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме  $T^* \approx \Gamma^*$ ;  $\sigma_2^*$ ,  $\varepsilon_2^*$  – координаты конечной точки второго участка на диаграмме  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$ ;  $T_2^*$ ,  $\Gamma_2^*$  – координаты конечной точки второго участка на диаграмме  $T^* \approx \Gamma^*$ .

Физические соотношения для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоского одномерного деформирования будут записываться в форме, аналогичной соотношениям (10), (12), (14), (18) (если у всех величин, входящих в эти формулы проставить звездочки).

#### *Дифференциальные уравнения равновесия для геометрически нелинейной модели*

Поскольку дифференциальное уравнение равновесия для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоского одномерного деформирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx}^* \right] + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x = 0, \quad (25)$$

отлично от дифференциального уравнения равновесия для геометрически линейной модели сплошной среды (19) и, кроме того, при плоском одномерном деформировании сплошной среды, описываемой

геометрически нелинейной моделью  $\varepsilon^* = \varepsilon_{xx}^*$ ;  $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^{*2}}$ , причем  $\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$  и, следова-

тельно,  $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^2}$ , то есть  $\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}^*}{\partial x} = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial \Gamma^*}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma^*} \varepsilon_{xx}^* \frac{\partial \varepsilon_{xx}^*}{\partial x} =$   
 $= \frac{4}{3\Gamma^*} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , то запись дифференциального уравнения равновесия в перемеще-

ниях для геометрически нелинейной модели будет отличаться от записи дифференциального уравнения в перемещениях для геометрически линейной модели (формулы (20)–(23)).

Геометрически нелинейный аналог уравнения (20) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} (G_0^* + G_{01}^* \Gamma^*) + K_{01}^* \varepsilon^* \right] \varepsilon^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} K_0^* + \right. \\ & \left. + 2K_{01}^* \varepsilon^* + \frac{4}{3} (G_0^* + G_{01}^* \Gamma^*) + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma^*} G_{01}^* \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Геометрически нелинейный аналог уравнения (21) записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \left[ a_1^* \varepsilon^* + b_1^* + \frac{c_1^*}{\varepsilon^*} + \frac{4}{3} (G_0^* + G_{01}^* \Gamma^*) \right] \varepsilon^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[ a_1^* \varepsilon^* + b_1^* + \frac{c_1^*}{\varepsilon^*} + \right. \\ & \left. + \left( a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* + \frac{4}{3} (G_0^* + G_{01}^* \Gamma^*) + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma^*} G_{01}^* \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Геометрически нелинейный аналог уравнения (22) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{3} K_0^* + K_{01}^* \varepsilon^* + \frac{4}{3} \left( a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} \right) \right] \varepsilon^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} K_0^* + 2K_{01}^* \varepsilon^* + \right. \\ & \left. + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma^*} \left( a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right) + \frac{4}{3} \left( a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[ 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right] F_x = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Геометрически нелинейный аналог уравнения (15) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[ a_1^* \varepsilon^* + b_1^* + \frac{c_1^*}{\varepsilon^*} + \frac{4}{3} \left( a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} \right) \right] \varepsilon^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \times \\ & \times \left[ \left( a_2^* - \frac{c_2^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* + a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} + \frac{16}{9} \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma^*} \left( a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right) + \frac{4}{3} \left( a_2^* \Gamma^* + b_2^* + \frac{c_2^*}{\Gamma^*} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[ 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right] F_x = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие напряженно-деформированное состояние сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений с учетом геометрически нелинейности построены.

#### 4. Результаты и обсуждение

Для описания напряженно-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформированного состояния, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях построены. Для сплошной среды, механическое поведение которой описывается и в части объемных, и в части сдвиговых деформаций произвольными функциями, аппроксимируемыми биквадратичными замыкающими уравнениями без учета геометрической нелинейности, дифференциальные уравнения представлены соотношениями (20), (21), (22), (23). Для сплошной среды, описываемой геометрически нелинейной моделью, графики диаграмм объемного и сдвигового деформирования которой аппроксимированы биквадратичными замыкающими уравнениями, дифференциальные уравнения представлены соотношениями (26), (27), (28), (29).

Дифференциальные уравнения имеют достаточно сложную структуру. Это объясняется тем, что при аппроксимации нелинейных графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования при помощи двух отрезков парабол на первом нелинейном участке секущий модуль объемного расширения – сжатия является линейной функцией первого инварианта тензора деформаций ( $1_1$ ), а секущий модуль сдвига – интенсивности деформаций сдвига ( $1_2$ ). На втором нелинейном участке диаграмм и объемного и сдвигового деформирования секущий модуль объемного расширения – сжатия является дробной (рациональной) функцией первого инварианта тензора деформации ( $3_1$ ), а секущий модуль сдвига – интенсивности деформаций сдвига ( $3_2$ ). Вместе с тем эти дифференциальные уравнения линейны относительно старшей производной от перемещения по пространственной координате и являются квазилинейными. Квазилинейность дифференциальных уравнений второго порядка не может существенно усложнить процедуру их решения, так как методы решения таких уравнений разработаны достаточно подробно.

#### 5. Заключение

Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряженно-деформированного состояния сплошных сред, в частности, грунтовых массивов под монолитной фундаментной плитой под здание или сооружение, оснований под складские сооружения больших объемов и т. д., находящихся в условиях одномерного плоского деформирования, замыкающие уравнения физических соотношений для которых описываются биквадратичными функциями.

#### Список литературы

1. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 2 (283). С. 2–11.
2. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. № 3 (290). С. 2–14.
3. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твердого тела. М.: ЛЕНАНД, 2020. 304 с.
4. Новожилов В.В. Теория упругости. Ленинград: Судпромгиз, 1958. 370 с.
5. Ляпичев Ю.П. Выбор математических моделей грунтов в статических и сейсмических расчетах грунтовых плотин // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 4. С. 261–270. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270>
6. Duncan J.M., Chang Y.Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils // *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1970. Vol. 96. No. 5. Pp. 1629–1653.
7. Mroz Z., Norris V., Zienkiewicz O. Anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading // *Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomechanics*. 1978. No. 2. Pp. 203–221.
8. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behaviour of 'wet clay' // *Engineering Plasticity* / ed. by J. Heyman, F.A. Leckie. Cambridge: Cambridge University Press, 1968. Pp. 535–609.
9. Prevost J.H. Anisotropic undrained stress-strain behavior of clays // *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. 1978. Vol. 104. No. 8. Pp. 1075–1090.
10. Aziz H.Y., Maula B.H. Estimation of negative skin friction in deep pile foundation using the practical and theoretically approaches // *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018. Vol. 13. No. 10. Pp. 3340–3349.
11. Miller T., Lee C. Novel pile design for multi-level car park above twin rail tunnels // *Australian geomechanics*. 2017. Vol. 52. No. 44. Pp. 15–27.
12. Zhang Y. Estimation of Free Penetration of Steel Pile and Numerical Simulation // *Ship Building of China*. 2017. Vol. 58. Pp. 547–556.

13. Егоров В.В., Абу-Хасан М.С., Исаченкова К.Е. Учет нелинейности в расчетах строительных конструкций // БСТ: Бюллетень строительной техники. 2020. № 4 (1028). С. 62–64.
14. Шутов В.А., Миренков В.Е. Деформируемое твердое тело и постулаты механики // Творчество и современность. 2019. № 1 (9). С. 125–128.
15. Перельмутер А.В., Тур В.В. Готовы ли мы перейти к нелинейному анализу при проектировании? // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2017. Т. 13. № 3. С. 86–102.
16. Протосеня А.Г., Иовлев Г.А. Прогноз напряженно-деформируемого состояния в окрестности подземного сооружения в нелинейно-деформируемых грунтовых массивах // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2020. № 2. С. 215–228.
17. Федоровский В.Г., Бобьрь Г.А., Боков И.А., Ильин С.В. Применение метода конечных элементов в геотехнических расчетах по первому предельному состоянию // Вестник НИЦ «Строительство». 2019. № 1 (20). С. 102–112.
18. Христич Д.В., Астапов Ю.В., Артюх Е.В., Соколова М.Ю. Численное моделирование напряжений в массиве глинистого грунта под фундаментом // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2019. № 4. С. 312–319.
19. Bukotas G., Kačianauskas R. Analysis of axisymmetric bore-type foundation in respect of plastic deformation [Ašiai simetrinio gręžinio pamato analizė įvertinant plastines deformacijas] // Journal of Civil Engineering and Management. 1997. Vol. 3. No. 10. Pp. 24–31. DOI: 10.3846/13921525.1997.10531680.
20. Косицын С.Б., Чан С.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния пересекающихся цилиндрических оболочек при упруго-пластических деформациях с учетом геометрической нелинейности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 1. С. 3–9.
21. Аганов В.П., Васильев А.В. Учет геометрической нелинейности при расчете железобетонных колонн прямоугольного сечения методом конечных элементов // Вестник МГСУ. 2014. № 4. С. 37–43.
22. Аганов В.П., Айдемиров К.Р. Применение метода конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности для расчета предварительно напряженных железобетонных ферм // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017. Т. 44. № 1. С. 127–137. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137.
23. Соколов С.А., Качаун А.Н., Скудалов П.О., Чермных С.В. Анализ работы узлов стропильной фермы типа «Молодечно» с учетом физической и геометрической нелинейности // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия: Строительство. Электротехника и химические технологии. 2019. № 2 (2). С. 36–42.
24. Bahaz A., Amara S., Jaspert J.P., Demonceau J.F. Analysis of the Behaviour of Semi Rigid Steel End Plate Connections // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 149. Article 02058. DOI: 10.1051/mateconf/201814902058.
25. Попов О.Н., Малиновский А.П., Моисеенко М.О., Тренутнева Т.А. Состояние вопроса по расчету неоднородных элементов конструкций за пределом упругости // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2013. № 4 (41). С. 127–142.

### References

1. Bakushev S.V. Approximations of warp diagrams using bilinear functions. *Structural Mechanics and Structural Analysis*. 2019;2(283):2–11. (In Russ.)
2. Bakushev S.V. Approximation of deformation diagrams by quadratic functions. *Structural Mechanics and Structural Analysis*. 2020;3(290):2–14. (In Russ.)
3. Bakushev S.V. *Differencial'nye uravneniya i kraevye zadachi mekhaniki deformiruemogo tvordogo tela [Differential equations and boundary problems in the mechanics of a deformable solid]*. Moscow: LENAND Publ.; 2020. (In Russ.)
4. Novozhilov V.V. *Teoriya uprugosti [The theory of elasticity]*. Leningrad: Sudpromgiz Publ.; 1958. (In Russ.)
5. Lyapichev Y.P. Choice of mathematic models of soils in static and seismic analyses of embankment dams. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2020;16(4):261–270. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270> (In Russ.)
6. Duncan J.M., Chang Y.Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1970;96(5):1629–1653.
7. Mroz Z., Norris V., Zienkiewicz O. Anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading. *Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomechanics*. 1978;2:203–221.
8. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behaviour of 'wet clay'. In: Heyman J., Leckie F.A. (eds.) *Engineering Plasticity* (p. 535–609). Cambridge: Cambridge University Press; 1968.
9. Prevost J.H. Anisotropic undrained stress-strain behavior of clays. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. 1978;104(8):1075–1090.
10. Aziz H.Y., Maula B.H. Estimation of negative skin friction in deep pile foundation using the practical and theoretically approaches. *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018;13(10):3340–3349.
11. Miller T., Lee C. Novel pile design for multi-level car park above twin rail tunnels. *Australian Geomechanics*. 2017;52(44):15–27.
12. Zhang Y. Estimation of Free Penetration of Steel Pile and Numerical Simulation. *Ship Building of China*. 2017;(58):547–556.

13. Egorov V.V., Abu-Khasan M.S., Isachenkova K.E. Consideration of nonlinearity in the calculations of building structures. *BST: Byulleten' stroitel'noj tehniki [BEB: Building Equipment Bulletin]*. 2020;4(1028):62–64. (In Russ.)
14. Shutov V.A., Mirenkov V.E. Deformable solid body and postulates mechanics. *Creativity and modernity*. 2019; 1(9):125–128. (In Russ.)
15. Perelmuter A.V., Tur V.V. Whether we are ready to proceed to a nonlinear analysis at designing? *International Journal of Civil and Construction*. 2017;13(3):86–102. (In Russ.)
16. Protosenya A.G., Iovlev G.A. Stress-strain state prediction surrounding underground structure, constructed in nonlinear deformed medium-soft soils. *Izvestiya Tula State University. Earth Sciences*. 2020;(2):215–228. (In Russ.)
17. Fedorovsky V.G., Bobyr G.A., Bokov I.A., Iliyn S.V. Application of finite element method to the geotechnical ULS analysis. *Bulletin of SRC "Stroitelstvo"*. 2019;1(20):102–112. (In Russ.)
18. Khristich D.V., Astapov Y.V., Artyukh E.V., Sokolova M.Y. Numerical modeling of stresses in the massif of a clay soil under the foundation. *Izvestiya Tula State University. Earth Sciences*. 2019;(4):312–319. (In Russ.)
19. Bukotas G., Kačianauskas R. Analysis of axisymmetric bore-type foundation in respect of plastic deformation. *Journal of Civil Engineering and Management*. 1997;3(10):24–31. DOI: 10.3846/13921525.1997.10531680.
20. Kositsyn S.B., Than Huan Linh. The analysis of the stress-strain state of the intersecting cylindrical shells for the elasto-plastic deformations with a view of geometrical nonlinearity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013;(1):3–9. (In Russ.)
21. Agapov V.P., Vasilev A.V. Account for geometrical nonlinearity in the analysis of reinforced concrete columns of rectangular section by finite element method. *Vestnik MGSU (Monthly Journal on Construction and Architecture)*. 2014; (4):7–43. (In Russ.)
22. Agapov V.P., Aidemirov K.R. Application of finite element method taking into account physical and geometric nonlinearity for the calculation of prestressed reinforced concrete beams. *Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2017;44(1):127–137. DOI: 10.21822/2073-6185-2017-44-1-127-137. (In Russ.)
23. Sokolov S.A., Kachaun A.N., Skudalov P.O., Cheremnykh S.V. Analysis of the “Molodechno” type truss beam nodes, taking into account the physical and geometric nonlinearity. *Vestnik of Tver State Technical University. Series: Building. Electrical Engineering and Chemical Technology*. 2019;2(2):36–42. (In Russ.)
24. Bahaz A., Amara S., Jaspert J.P., Demonceau J.F. Analysis of the Behaviour of Semi Rigid Steel End Plate Connections. *MATEC Web of Conferences*. 2018;149:02058. DOI: 10.1051/mateconf/201814902058.
25. Popov O.N., Malinovskii A.P., Moiseenko M.O., Treputneva T.A. Current state of stress-strain analysis of inhomogeneous construction members strained beyond the elastic limit. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture*. 2013;4(41):127–142. (In Russ.)



## ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-493-503  
УДК 672.32

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Силовые параметры деформирования металла при листовой вытяжке

Ю.А. Морозов

МИРЭА – Российский технологический университет, Российская Федерация, 107996, Москва, ул. Стромынка, д. 20  
akafest@mail.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 12 августа 2020 г.  
Доработана: 25 октября 2020 г.  
Принята к публикации: 12 ноября 2020 г.

#### Аннотация

Цель исследования состояла в изучении влияния кривизны скругления торцовых поверхностей при формообразовании цилиндрического изделия (стакана) с учетом пластического утонения деформируемого материала на торцевых кромках матрицы и давящего пуансона. *Методы.* Проанализирована существующая схема определения силовых параметров листовой вытяжки, основанная на допущении реализации в материале некоего абстрактного напряженного состояния, главным образом – условного предела прочности. При этом возможность формообразования изделия без разрушения демонстрирует очевидную завышенность уровня напряжений. Разработана математическая модель объемного напряженного состояния металла, позволяющая оценить деформационное и напряженное состояния при формообразовании холодновытянутого изделия, то есть рассмотрены сворачивание листовой заготовки по торцевому радиусу скругления давящего пуансона и установившийся процесс втягивания заготовки в очаг деформации с последовательным изгибом/спрямлением материала по ребру матрицы. Выявлен уровень радиальных напряжений при сворачивании и растягивании листового материала с учетом его деформационного упрочнения и утонения, определяющих усилие формообразования. Полученные *результаты* найдут применение в моделировании напряженно-деформированного состояния металла при разработке технологии листовой вытяжки для вычисления величины утонения, оценки уровня радиальных напряжений формообразования скруглений торцовых поверхностей по торцевым кромкам матрицы и давящего пуансона, а также расчета силовых параметров формообразования, что позволит предупредить разрушение вытягиваемой детали, гарантируя получение качественной продукции, и точнее подойти к выбору деформирующего оборудования.

**Ключевые слова:** вытяжка, нейтральное сечение, утонение, радиус кривизны, радиальная деформация, тангенциальная деформация, радиальное напряжение

#### Для цитирования

Морозов Ю.А. Силовые параметры деформирования металла при листовой вытяжке // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 6. С. 493–503. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-493-503>

Морозов Юрий Анатольевич, доцент кафедры цифровых и аддитивных технологий, кандидат технических наук; eLIBRARY SPIN-код: 3189-5426, Scopus Author ID: ID: 24475032700, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9229-7398>

© Морозов Ю.А., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

# Force parameters of metal deformation during sheet drawing

Yury A. Morozov

MIREA – Russian Technological University, 20 Stromynka St, Moscow, 107996, Russian Federation  
akafest@mail.ru

## Article history

Received: August 12, 2020

Revised: October 25, 2020

Accepted: November 12, 2020

## Abstract

*The aim of the work.* The effect of the curvature of the rounding of torus surfaces during the formation of a cylindrical product (glass) is investigated, taking into account the plastic thinning of the deformable material at the end edges of the matrix and pressing punch. *Methods.* The existing scheme for determining the power parameters of sheet drawing is analyzed, based on the assumption of the implementation of some abstract stress state in the material; mainly conditional tensile strength. At the same time, the possibility of forming the product without destruction determines the obvious overestimation of the stress level. A mathematical model of the volumetric stress state of the metal is being developed, which makes it possible to assess the deformation and stress state during the formation of a cold-drawn product, i. e. the folding of the sheet blank along the end radius of the rounding of the pressing punch and the steady-state process of drawing the blank into the deformation zone with successive bending/straightening of the material along the edge of the matrix are considered. The level of radial stresses during folding and stretching of sheet material is estimated, taking into account its strain hardening and thinning, which determine the forming force. The obtained results will make it possible to simulate the stress-strain state of the metal during the development of sheet drawing technology: to establish the amount of thinning, to estimate the level of radial stresses in the formation of rounding of torus surfaces along the end edges of the matrix and the pressing punch, as well as to determine the power parameters of the formation, which will prevent the destruction of the pulled part, guaranteeing obtaining high-quality products and more accurately choosing the deforming equipment.

**Keywords:** hood, neutral cross section, thinning, radius of curvature, radial deformation, tangential deformation, radial stress

## For citation

Morozov Yu.A. Force parameters of metal deformation during sheet drawing. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):493–503. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-493-503>

## 1. Введение

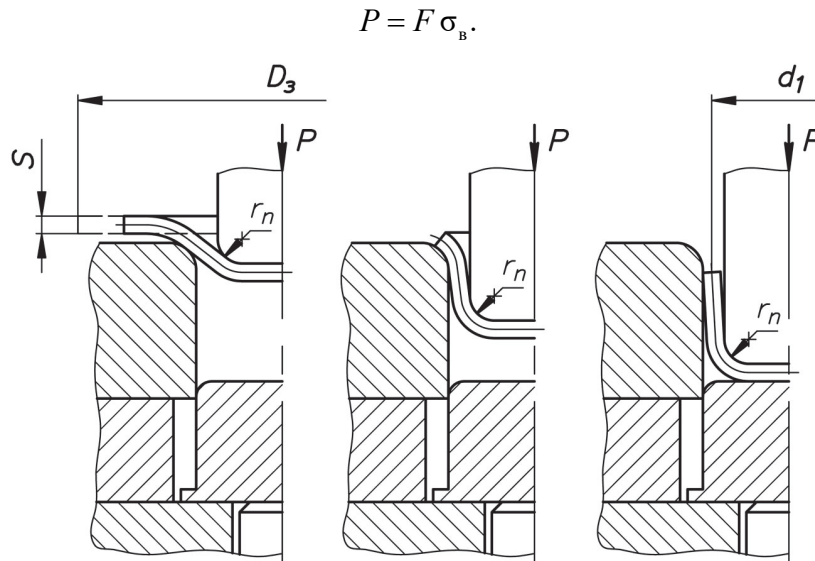
Объектом исследования является процесс листовой вытяжки, обеспечивающий сворачивание пространственного изделия из плоской листовой заготовки.

Подобная технологическая операция применяется при изготовлении широкого спектра продукции, как бытового, так и промышленного назначения – авиа-, автомобилестроение, сельхозмашиностроение и пр. Популярность данного процесса можно объяснить сравнительно простым способом формообразования готовой заготовки в виде листа металла, при этом получаемые изделия имеют высокие прочностные эксплуатационные свойства и малый вес.

Данному процессу посвящено достаточное количество работ, которые можно разделить на две группы. Большая часть работ связана с уточнением и оптимизацией технологии листовой вытяжки, а также моделированием напряженно-деформированного состояния металла при формообразовании детали [1–11]. Значительно меньший объем работ посвящен исследованию предельных напряжений и разрушению металла [12–15].

Однако, несмотря на простую схему формообразования, профильной литературой рекомендуется весьма приближенный метод определения силы вытяжки, сводящийся к единственному известному параметру – площади поперечного сечения пространственного изделия  $F$ , находящейся под действием не-

кого абстрактного механического напряжения, за которое в основном принимается условный предел прочности деформируемого материала  $\sigma_B$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема вытяжки  
[Figure 1. Schematic drawing]

Принимая во внимание, что предел прочности устанавливает наибольшее напряжение, которое способен выдержать материал под нагрузкой без разрушения (разрыва), становятся очевидными завышенные силовые параметры формообразования. Этим объясняется различие практических и теоретических значений усилий вытяжки, т. к. при правильно рассчитанных размерах полуфабриката, фактические напряжения в его стенках *никогда* не превысят предела прочности материала [16; 17].

Следует отметить, что силовые параметры определяют не только технологию изготовления, но и существенно влияют на выбор деформирующего оборудования, что, несомненно, обуславливает актуальность работы.

Коррекция силовых параметров с определенной долей вероятности допускается дополнительным эмпирическим коэффициентом, обратно пропорциональным коэффициенту вытяжки

$$P = F \sigma_B k_{вт} = \pi d_1 S \sigma_B k_{вт},$$

где  $F$  – площадь кольцевого элемента полуфабриката, определяемая периметром и толщиной стенки цилиндрического изделия

$$F = \pi d_1 S; \tag{1}$$

$d_1$  – диаметр вытягиваемой детали (по срединной линии);  $S$  – толщина материала;  $k_{вт}$  – коэффициент, зависящий от коэффициента вытяжки (см. таблицу) [18].

Таблица

**Поправочный коэффициент  $k_{вт}$**   
[Table. Correction factor  $k_{вт}$ ]

Коэффициент вытяжки, $m$ [Drawing ratio, $m$ ]	$k_{вт}$	Коэффициент вытяжки, $m$ [Drawing ratio, $m$ ]	$k_{вт}$	Коэффициент вытяжки, $m$ [Drawing ratio, $m$ ]	$k_{вт}$
До 0,55	1,00	Св. 0,63 до 0,65	0,72	Св. 0,73 до 0,75	0,50
Св. 0,55 до 0,58	0,93	» 0,65 » 0,68	0,66	» 0,75 » 0,78	0,45
» 0,58 » 0,60	0,86	» 0,68 » 0,70	0,60	» 0,78 » 0,80	0,40
» 0,60 » 0,63	0,79	» 0,70 » 0,73	0,55	» 0,80	0,37

При этом не учитываются параллельно протекающие процессы деформационного упрочнения, повышающего механические свойства материала с одновременным утонением, также приводящим к увеличению напряжения в материале и являющимся причиной разрушения детали. Поэтому, несмотря на простую схему вытяжки листовой заготовки, определение силовых параметров следует проводить параллельно с исследованием напряженно-деформированного состояния материала при пластическом формообразовании торцовых поверхностей скругления детали, обусловленных конфигурацией деформирующего инструмента [19–21].

Рассматривая процесс листовой вытяжки, можно отметить два основных фактора, характеризующих последовательность формообразования детали:

- начальный период сворачивания листовой заготовки торцевым радиусом давящего пуансона;
- установившийся процесс втягивания заготовки в очаг деформации, сопровождающийся последовательным изгибом/спрямлением материала по ребру матрицы.

В связи с этим перечень решаемых задач будет включать определение деформированного состояния материала в зависимости от создаваемой кривизны детали и установление радиальных напряжений с учетом упрочнения материала при формообразовании; определение площади поперечного сечения пространственной тонкостенной детали в месте наиболее прогрессирующего утонения и расчет усилия формообразования материала по давящему инструменту.

## 2. Математическая постановка задачи

Радиальные напряжения при сворачивании и растягивании листового материала по торцевой кромке инструмента

$$\sigma_{\rho_{\max}} = \frac{\sigma_T}{2\rho_n} S e^{f \frac{\pi}{2}}, \quad (2)$$

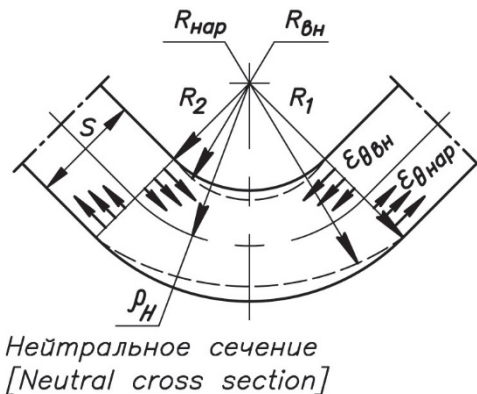
где  $\sigma_T$  – сопротивление пластической деформации;  $\rho_n$  – радиус нейтральной поверхности, разделяющей растянутые и сжатые слои материала при изгибе листовой заготовки;  $f$  – коэффициент контактного трения.

С использованием деформационной модели изменения наружного и внутреннего радиусов

$$\left. \begin{aligned} R_{\text{нар}} &= R_1 + (R_1 - \rho_n) \varepsilon_{r_{\text{нар}}} \\ R_{\text{вн}} &= R_2 + (\rho_n - R_2) \varepsilon_{r_{\text{вн}}} \end{aligned} \right\}$$

устанавливаются радиальные деформации уменьшения наружного радиуса  $R_1 \rightarrow R_{\text{нар}}$  и увеличения внутреннего радиуса  $R_2 \rightarrow R_{\text{вн}}$  (рис. 2):

$$\varepsilon_{r_{\text{нар}}} = \frac{R_{\text{нар}} - R_1}{R_1 - \rho_n} < 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{r_{\text{вн}}} = \frac{R_{\text{вн}} - R_2}{\rho_n - R_2} > 0.$$



**Рис. 2.** Распределение тангенциальных деформаций по сечению полосы  
[Figure 2. Distribution of tangential strain on the cross section of the strip]

Тангенциальная деформация, приводящая к изменению толщины растянутых и сжатых слоев материала, устанавливается согласно условию постоянства объема

$$\varepsilon_{\theta \text{ нар}} = \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_{\text{н}}} - 1 \text{ и } \varepsilon_{\theta \text{ вн}} = \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_{\text{н}}} - 1.$$

В окончательном виде выражения для определения наружного и внутреннего радиусов изогнутого элемента [22; 23] имеют вид

$$\left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_{\text{н}}} \right)^2 \left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_{\text{н}}} - 1 \right) = \frac{R_1}{R_2} Z - 1; \tag{3a}$$

$$\frac{R_{\text{вн}}}{\rho_{\text{н}}} \left( \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_{\text{н}}} + 1 - 2Z \right) \left( 2 - \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_{\text{н}}} \right) = 1 - Z, \tag{36}$$

где  $Z = R_2 / \rho_{\text{н}}$  – коэффициент, определяющий радиус нейтральной поверхности, вычисляемый из условия равновесия изгибающих моментов в растянутых и сжатых слоях заготовки, возникающих под влиянием тангенциальных напряжений относительно нейтральной поверхности (рис. 3)

$$M_{\text{нар}} = \left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_{\text{н}}} - 1 \right)^2 \left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_{\text{н}}} + 1 \right) = \left( 1 - \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_{\text{н}}} \right)^2 \left( 1 + \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_{\text{н}}} \right) = M_{\text{вн}}.$$

Использование регрессионного анализа устанавливает логарифмическую зависимость, обеспечивающую наилучшую сходимость с приведенным графиком с ошибкой менее 1 %:

$$Z = \frac{R_2}{\rho_{\text{н}}} = -0,433 \ln \frac{R_1}{R_2} + 0,995. \tag{4}$$

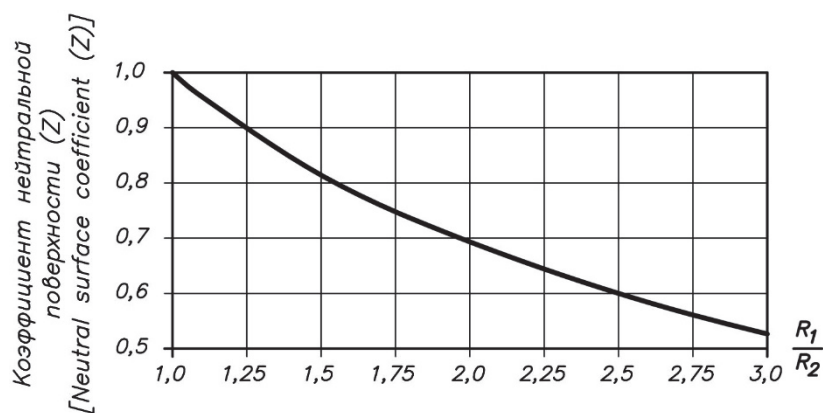


Рис. 3. Коэффициент нейтральной поверхности,  $Z$   
[Figure 3. Neutral surface coefficient,  $Z$ ]

### 3. Анализ результатов исследования

Рассмотрим в качестве примера осесимметричный цилиндрический стакан наружным диаметром  $d_{\text{ст}} = 80$  мм, толщиной стенки  $S = 3,0$  мм, деформируемый пуансоном с торцевым радиусом  $r_{\text{н}} = 20$  мм. Перетягивание металла в очаг деформации происходит по ребру матрицы радиусом  $r_{\text{м}} = 11$  мм.

Сразу следует отметить, что проведенный эксперимент вытяжки трех подобных стаканов из алюминиевого сплава АМг1 показал усилие деформирования 7,3...7,5 т (рис. 4).

Рассмотрим последовательно силовые факторы формообразования данной вытяжки, имеющей диаметр по срединной линии

$$d_1 = d_{\text{ст}} - S = 80 - 3,0 = 77 \text{ мм.}$$



**Рис. 4.** Эксперимент вытяжки цилиндрических стаканов  
[**Figure 4.** The experiment of extracting cylindrical glasses]

### 3.1. Начальный период сворачивания листовой заготовки торцевым радиусом давящего пуансона

Формообразование торового радиуса скругления осуществляется торцевым радиусом давящего пуансона  $r_n = R_2 = 20$  мм, определяющим отношение радиусов кривизны

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_n + S}{r_n} = \frac{20 + 3,0}{20} = 1,15.$$

Коэффициент нейтральной поверхности (4)

$$Z = \frac{r_n}{\rho_n} = -0,433 \ln \frac{R_1}{R_2} + 0,995 = -0,433 \ln 1,15 + 0,995 = 0,934.$$

Соответственно, продеформированные наружный и внутренний радиусы торовой поверхности изогнутого элемента (3)

$$\left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_n} \right)^2 \left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_n} - 1 \right) = \frac{R_1}{R_2} Z - 1 = 1,3 \cdot 0,934 - 1 = 0,0741;$$

$$\frac{R_{\text{вн}}}{\rho_n} \left( \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_n} + 1 - 2Z \right) \left( 2 - \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_n} \right) = 1 - Z = 1 - 0,934 = 0,066.$$

Методом итерации устанавливаются

$$R_{\text{нар}}/\rho_n = 1,0653 \text{ и } R_{\text{вн}}/\rho_n = 0,9343.$$

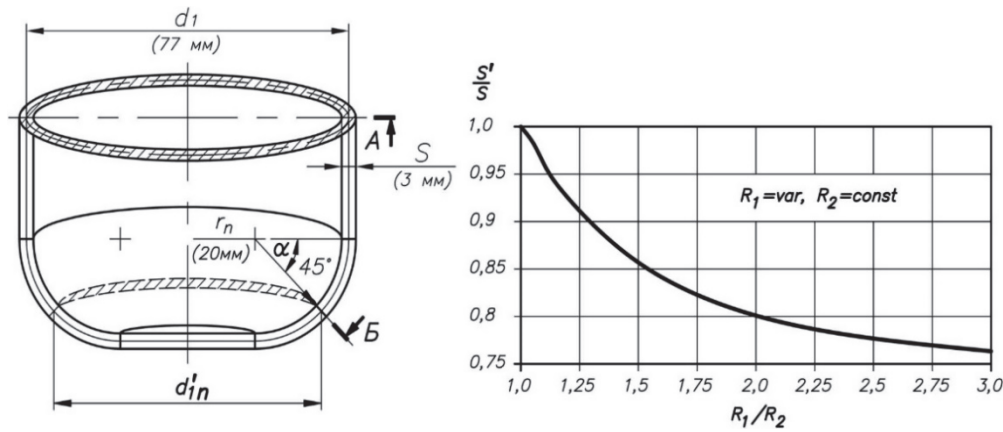
Радиус нейтральной поверхности

$$\rho_n = r_n/Z = 20/0,934 = 21,41 \text{ мм.}$$

При этом не следует пренебрегать возникающим здесь утонением материала, вызванным растягивающими напряжениями. Кроме того, некорректно будет использовать в качестве расчетного сечения диаметр вытягиваемой детали (сечение А), так как разрушение материала начинается в донной части, являющейся локализацией наиболее прогрессирующего утонения (сечение Б), рис. 5.

Принимая во внимание формообразование детали по фиксированному внутреннему радиусу  $R_{\text{вн}}/\rho_n = \text{const}$ , обусловленному торцевым радиусом скругления давящего пуансона  $r_n = R_2 = R_{\text{вн}}$ , устанавливается толщина торовой поверхности после деформирования

$$S' = \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_n} \rho_n - r_n = 1,0653 \cdot 21,41 - 20 = 2,81 \text{ мм.}$$



**Рис. 5.** Формообразование детали и утонение листового металла при вытяжке  
**[Figure 5.** Forming a part and thinning a sheet metal during drawing]

Коэффициент утонения, обусловленный торцевым радиусом скругления кромки давящего пуансона, то есть интенсивностью деформаций сжатых и растянутых слоев материала относительно нейтрального сечения:

$$S'/S = 2,81/3,0 = 0,937.$$

Приближенное значение коэффициента утонения с погрешностью не более 2 % также можно определить, используя аппроксимационную полиномиальную математическую модель (рис. 5) [24]:

$$\frac{S'}{S} = -0,05 \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^3 + 0,38 \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 - 0,985 \frac{R_1}{R_2} + 1,65.$$

При допущении наиболее прогрессирующего утонения, геометрически расположенного под углом  $\alpha = 45^\circ$  относительно образующего радиуса кривизны пуансона, определяется средний диаметр торовой поверхности скругления в опасном сечении Б:

$$d'_{1n} = d_1 - 2(1 - \cos \alpha) r_n \approx d_1 - 0,586 r_n = 77 - 0,586 \cdot 21,41 = 64,45 \text{ мм.}$$

Площадь соответствующего поперечного кольцевого сечения (1)

$$F' = \pi d'_{1n} S \frac{S'}{S} = \pi 64,45 \cdot 3,0 \cdot 0,937 = 569,2 \text{ мм}^2.$$

Деформация формоизменения, характеризующая упрочнение материала и определяемая суммарным значением тангенциальных деформаций на наружной и внутренней поверхностях, сворачиваемой торовой поверхности стакана [25]

$$\varepsilon = \varepsilon_{\theta \text{ нар}} + \varepsilon_{\theta \text{ вн}} = \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_n} - \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_n} = 1,0653 - 0,9343 = 0,131 \text{ (13,1 \%)}.$$

С использованием коэффициента трения «алюминий – сталь» (без смазки)  $f = 0,28$ , устанавливается радиальное напряжение в материале при формообразовании скругления торовой поверхности стакана (4)

$$\sigma_{p \text{ max}} = \frac{\sigma_T}{2 \rho_n} \frac{S}{S'/S} e^{f \frac{\pi}{2}} = \frac{156,3}{2 \cdot 21,41} \frac{3,0}{0,937} e^{0,28 \frac{\pi}{2}} = 18,1 \text{ МПа,}$$

где  $\sigma_T$  – сопротивление пластической деформации алюминиевого сплава АМг1 с условным пределом текучести  $\sigma_{0,2} = 98,1$  МПа, определяемое эмпирической зависимостью

$$\sigma_T = \sigma_{0,2} + 12,75 \varepsilon^{0,59} = 98,1 + 12,75 \cdot 13,1^{0,59} = 156,3 \text{ МПа.}$$

Таким образом, усилие формообразования материала по торцевому радиусу скругления давящего пуансона

$$P_n = F' \sigma_{\rho_{\max}} = 569,2 \cdot 18,1 = 10302,5 \text{ Н (1,05 т)}.$$

### 3.2. Установившийся процесс вытягивания заготовки в очаг деформации, сопровождающийся последовательным изгибом/спрямлением материала по ребру матрицы

Формообразование детали в установившемся процессе вытягивания заготовки в очаг деформации определяется радиусом ребра матрицы  $r_m = R_2 = 11$  мм, устанавливающим отношение радиусов кривизны

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_m + S}{r_m} = \frac{11 + 3,0}{11} = 1,273.$$

Коэффициент нейтральной поверхности (4)

$$Z = \frac{r_m}{\rho_n} = -0,433 \ln \frac{R_1}{R_2} + 0,995 = -0,433 \ln 1,273 + 0,995 = 0,89.$$

Соответственно, продеформированные наружный и внутренний радиусы торовой поверхности изогнутого элемента (3)

$$\left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_n} \right)^2 \left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_n} - 1 \right) = \frac{R_1}{R_2} Z - 1 = 1,3 \cdot 0,89 - 1 = 0,13297;$$

$$\frac{R_{\text{вн}}}{\rho_n} \left( \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_n} + 1 - 2Z \right) \left( 2 - \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_n} \right) = 1 - Z = 1 - 0,89 = 0,11.$$

Методом итерации устанавливаются

$$R_{\text{нар}}/\rho_n = 1,1083 \text{ и } R_{\text{вн}}/\rho_n = 0,8913.$$

Радиус нейтральной поверхности

$$\rho_n = r_m / Z = 11 / 0,89 = 12,36 \text{ мм}.$$

Средний диаметр торовой поверхности сворачивания также принимается под углом  $\alpha = 45^\circ$  относительно начального периода изгиба листовой заготовки по ребру матрицы с последующим спрямлением стенки свернутого стакана в конце очага деформации (рис. 6):

$$d_{1\text{м}} \approx d_1 + 0,586 r_n = 77 + 0,586 \cdot 12,36 = 84,24 \text{ мм}.$$

Площадь соответствующего поперечного кольцевого сечения (1)

$$F = \pi d'_1 S = \pi 84,24 \cdot 3,0 = 793,9 \text{ мм}^2.$$

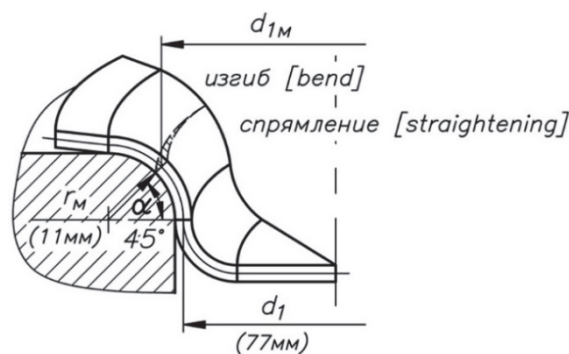
Деформация формоизменения при последовательном изгибе/спрямлении торовой поверхности стакана по ребру матрицы

$$\varepsilon = 2 \left( \varepsilon_{\theta_{\text{нар}}} + \varepsilon_{\theta_{\text{вн}}} \right) = 2 \left( \frac{R_{\text{нар}}}{\rho_n} - \frac{R_{\text{вн}}}{\rho_n} \right) = 2(1,1083 - 0,8913) = 0,434 \text{ (43,4 \%)}.$$

Сопротивление пластической деформации

$$\sigma_T = \sigma_{0,2} + 12,75 \varepsilon^{0,59} = 98,1 + 12,75 \cdot 43,4^{0,59} = 216 \text{ МПа}.$$





**Рис. 6.** Деформирование заготовки по ребру матрицы  
**[Figure 6.** Deformation of the workpiece along the edge of the matrix]

Радиальное напряжение в материале (не принимая в расчет утонение в связи с его компенсацией перераспределяющимся объемом металла с фланца заготовки) (4)

$$\sigma_{\rho_{\max}} = \frac{\sigma_T}{2\rho_H} S e^{f \frac{\pi}{2}} = \frac{216}{2 \cdot 12,36} 3,0 e^{0,28 \frac{\pi}{2}} = 40,7 \text{ МПа.}$$

Таким образом, усилие формообразования материала по ребру матрицы

$$P_M = F \sigma_{\rho_{\max}} = 793,9 \cdot 40,7 = 32311,7 \text{ Н (3,29 т).}$$

При допущении распространения радиального напряжения перетягивания материала по ребру матрицы на процесс втягивания фланцевой части заготовки в матрицу устанавливается соответствующее усилие

$$P_{\text{фл}} = \pi d_1 S \sigma_{\rho_{\max}} = \pi 77 \cdot 3,0 \cdot 40,7 = 29536,3 \text{ Н (3,01 т).}$$

В результате общая сила формообразования рассматриваемого стакана

$$P = P_n + P_M + P_{\text{фл}} = 1,05 + 3,29 + 3,01 = 7,35 \text{ т.}$$

#### 4. Заключение

Найденная сила формообразования с учетом напряженно-деформированного состояния материала  $P = 7,35$  т с достаточной точностью согласуется с результатами эксперимента вытяжки, приведенного выше.

Следует отметить, что, используя классический метод расчета, основанный на использовании предела прочности  $\sigma_b = 210$  МПа, усилие вытяжки

$$P = F \sigma_b = \pi d_1 S \sigma_{0,2} = \pi 77 \cdot 3,0 \cdot 210 = 152398,7 \text{ Н (15,54 т),}$$

что более чем в два раза превосходит экспериментальную величину.

Полученные результаты позволят смоделировать напряженно-деформированное состояние металла при разработке технологии листовой вытяжки: установить величину утонения, оценить уровень радиальных напряжений формообразования скруглений торцовых поверхностей по торцевым кромкам матрицы и давящего пуансона, а также определить силовые параметры формообразования, что позволит предупредить разрушение вытягиваемой детали, гарантируя получение качественной продукции, и точнее подойти к выбору деформирующего оборудования.

#### Список литературы / References

1. Sandeep P. Patil, Rahul Murkute, Nima Shirafkan, Bernd Markert. Deformation of Stacked Metallic Sheets by Shock Wave Loading. *Metals*. 2018;8(9):679. <https://doi.org/10.3390/met8090679>
2. Kailun Zheng, Politis D.J., Liliang Wang, Jianguo Lin. A review on forming techniques for manufacturing lightweight complex-shaped aluminium panel components. *International Journal of Lightweight Materials and Manufacture*. 2018;1(2):55–80. <https://doi.org/10.1016/j.ijlmm.2018.03.006>

3. Wenzheng Dong, Yantao Li, Qiquan Lin, Zhigang Wang, Zhen Huang. Theoretical and experimental investigation on deformation modes in cylindrical cup drawing with central pre-hole. *Procedia Manufacturing*. 2018;15:961–968. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.07.399>
4. Zicheng Zhang, Ning Chen, Tsuyoshi Furushima, Bin Li. Deformation behavior of metal foil in micro pneumatic deep drawing process. *Procedia Manufacturing*. 2018;15:1422–1428. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.07.339>
5. Song Yang, McPhillimy M., Taufik Bin Mohamed Supri, Yi Qin. Influences of process and material parameters on quality of small-sized thin sheet-metal parts drawn with multipoint tooling. *Procedia Manufacturing*. 2018;15:992–999. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.07.395>
6. Amrut Mulay, B. Satish Ben, Syed Ismail, Kocanda A., Jasinski C. Performance evaluation of high-speed incremental sheet forming technology for AA5754 H22 aluminum and DC04 steel sheets. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2018;4:1275–1287. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2018.03.004>
7. Li W.D., Meng B., Wang C., Wan M., Xu L. Effect of pre-forming and pressure path on deformation behavior in multi-pass hydrodynamic deep drawing process. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017;121:171–180. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.010>
8. Sandeep P. Patil, Kaushik G. Prajapati, Vahid Jenkouk, Herbert Olivier, Bernd Markert. Experimental and numerical studies of sheet metal forming with damage using gas detonation process. *Metals*. 2017;7(12):556. <https://doi.org/10.3390/met7120556>
9. Doig M., Isik K., Clausmeyer T., Heibel S., Richter H., Tekkaya A.E. Material Characterization and Validation Studies for Modeling Ductile Damage during Deep Drawing. *Procedia Engineering*. 2017;183:77–82. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.04.014>
10. Barthau M., Liewald M. New approach on controlling strain distribution manufactured in sheet metal components during deep drawing process. *Procedia Engineering*. 2017;207:66–71. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.740>
11. Guo N., Sun C.Y., Fu M.W. Size effect affected deformation characteristics in micro deep drawing of TWIP domed-bottom cups. *Procedia Engineering*. 2017;207:2072–2077. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.1066>
12. Yamashita M., Nikawa M., Kuroda T. Effect of strain-rate on forming limit in biaxial stretching of aluminum sheet. *Procedia Manufacturing*. 2018;15:877–883. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.07.177>
13. Amir Atrian, Hamed Panahi. Experimental and finite element investigation on wrinkling behaviour in deep drawing process of Al3105/Polypropylene/Steel304 sandwich sheets. *Procedia Manufacturing*. 2018;15:984–991. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.07.396>
14. Klos A., Kahrimanidis A., Wortberg D., Merklein M. Experimental and Numerical Studies on the Forming Behavior of High Strain Al-Mg-Si(-Cu) Sheet Alloys. *Procedia Engineering*. 2017;183:95–100. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.04.017>
15. Heibel S., Nester W., Clausmeyer T., Tekkaya A.E. Failure assessment in sheet metal forming using a phenomenological damage model and fracture criterion: experiments, parameter identification and validation. *Procedia Engineering*. 2017;207:2066–2071. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.1065>
16. Bruschi S., Altan T., Banabic D., Bariani P.F., Brosius A., Cao J., Ghiotti A., Khraisheh M., Merklein M., Tekkaya A.E. Testing and modelling of material behaviour and formability in sheet metal forming. *CIRP Annals – Manufacturing Technology*. 2014;63(2):727–749. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2014.05.005>
17. Wiebenga J.H., Atzema E.H., An Y.G., Vegter H., van den Boogaard A.H. Effect of material scatter on the plastic behavior and stretchability in sheet metal forming. *Journal of Materials Processing Technology*. 2014;214(2):238–252. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2013.08.008>
18. Marchenko V.L., Rudman L.I., Zaychuk A.I. *Spravochnik konstruktora shtampov: listovaya shtampovka [Stamp Designer Reference: Sheet Stamping]*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1988. (In Russ.)  
*Марченко В.Л., Рудман Л.И., Зайчук А.И. и др.* Справочник конструктора штампов: листовая штамповка. М.: Машиностроение, 1988. 496 с.
19. Devendar G.A., Chennakesava R. Study on Deep Drawing Process Parameters – A Review. *International Journal of Scientific & Engineering Research*. 2016;7(6):149–155.
20. Reddy A.C.S., Rajesham S., Reddy P.R., Kumar T.P., Goverdhan J. An experimental study on effect of process parameters in deep drawing using Taguchi technique. *International Journal of Engineering, Science and Technology*. 2015; 7(1):21–32. <http://dx.doi.org/10.4314/ijest.v7i1.3>
21. Ishimaru E., Takahashi A., Ono N. Effect of material properties and forming conditions on formability of high-purity ferritic stainless steel. *Nippon Steel Technical Report*. 2010;99:26–32. Available from: <https://www.nipponsteel.com/en/tech/report/nsc/pdf/n9905.pdf> (accessed: 30.05.2020).
22. Kokhan L.S., Lebedev N.N., Morozov Yu.A., Mochalov N.A. *Proektirovanie kalibrov sortovykh stanov i operatsiy listovoy shtampovki [Designing gauges section mills and stamping operations]*. Moscow: MGVM Publ.; 2007. (In Russ.)  
*Кохан Л.С., Лебедев Н.Н., Морозов Ю.А., Мочалов Н.А.* Проектирование калибров сортовых станов и операций листовой штамповки. М.: МГВМИ, 2007. 340 с.

23. Kokhan L.S., Morozov Yu.A., Shulgin A.V. Change of thickness of walls of cylindrical glasses at an extract without clip. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(5):9–13. (In Russ.) Available from: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/11216> (accessed: 30.05.2020).

*Кохан Л.С., Морозов Ю.А., Шулгин А.В.* Изменение толщины стенок цилиндрических стаканов при вытяжке без прижима // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 5. С. 9–13.

24. Morozov Yu.A. The study of marginal deformations of the leaf extracts with regard to plastic thinning and destruction of the material. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):353–359. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-353-359>

*Морозов Ю.А.* Исследование предельных деформаций листовой вытяжки с учетом пластического утонения и разрушения материала // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 5. С. 353–359. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-353-359>

25. Verhov E.Yu., Morozov Yu.A. Analysis and development of manufacturing technology of bent plate parts. *Bulletin of the Moscow State Open University. Series: Technique and Technology*. 2011;4(6):14–19. (In Russ.)

*Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А.* Анализ и разработка технологии изготовления гнутых толстолистовых деталей // *Вестник московского государственного открытого университета. Серия: Техника и технология*. 2011. № 4 (6). С. 14–19.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ EXPERIMENTAL RESEARCHES

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-504-512  
УДК 626.01

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Экспериментальные исследования железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных предварительно напряженной поперечной арматурой

О.В. Зюзина

Всероссийский научно-исследовательский институт гидротехники имени Б.Е. Веденеева, Российская Федерация, 195220,  
Санкт-Петербург, ул. Гжатская, д. 21  
ZyuzinaOV@vniig.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 2 сентября 2020 г.  
Доработана: 20 ноября 2020 г.  
Принята к публикации: 24 ноября 2020 г.

#### Аннотация

**Актуальность.** При ремонте гидротехнических сооружений (ГТС) часто приходится сталкиваться с задачей их усиления. Среди методов усиления подпорных сооружений наибольший интерес представляют те, что позволяют сразу включать элементы усиления в совместную работу с сооружением и не удалять грунт засыпки со стороны тыловой грани. При выборе ремонтных материалов следует обратить внимание на коррозионностойкие композитные материалы, использование которых в гидротехническом строительстве еще не нормируется, однако область их применения с каждым годом все больше расширяется. Основной целью экспериментальных исследований является усиление железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, в том числе имеющих межблочные строительные швы и наклонные трещины, с помощью предварительно напряженной поперечной арматуры. **Методы.** Исследования проведены на железобетонной модели балочного типа, усиленной предварительно напряженной поперечной арматурой в зоне образования наклонных трещин. Модель изготовлена с учетом характерных задач, встречающихся при ремонте длительно эксплуатируемых подпорных гидротехнических сооружений, имеющих раскрывшиеся швы и трещины, недостаточное поперечное армирование, низкий коэффициент армирования, начальный прогиб. **Результаты.** Реализована задача усиления специальной железобетонной модели с помощью предварительно напряженной поперечной арматуры. Получены экспериментальные данные о характере деформирования и разрушения, раскрытии межблочных строительных швов и трещин, напряжениях в арматуре. Даны рекомендации по усилению предварительно напряженной арматурой эксплуатируемых малоармированных железобетонных конструкций ГТС с межблочными строительными швами.

**Ключевые слова:** гидротехнические сооружения, межблочные швы и трещины, поперечная арматура, предварительное напряжение, усиление конструкций, экспериментальные исследования

#### Для цитирования

Зюзина О.В. Экспериментальные исследования железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных предварительно напряженной поперечной арматурой // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 6. С. 504–512. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-504-512>

Зюзина Оксана Валерьевна, инженер 1-й категории, аспирант Всероссийского научно-исследовательского института гидротехники имени Б.Е. Веденеева; eLIBRARY SPIN-код: 6769-5035, Scopus Author ID: 2-s2.0-85086440563.

© Зюзина О.В., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## Experimental studies of reinforced concrete structures of hydraulic structures strengthened with prestressed transverse reinforcement

Oksana V. Zyuzina

B.E. Vedenev All-Russia Research Institute of Hydraulic Engineering, 21 Gzhatskaya St, Saint Petersburg, 195220, Russian Federation  
ZyuzinaOV@vniig.ru

### Article history

Received: September 2, 2020

Revised: November 20, 2020

Accepted: November 24, 2020

### Abstract

**Relevance.** When repairing hydraulic structures, it is often necessary to face the task of strengthening them. Among the methods of strengthening retaining structures, the most interesting are those that allow to immediately include reinforcement elements in joint work with the structure and carry out work without removing the backfill soil from the rear edge. When choosing repair materials, attention should be paid to corrosion-resistant composite materials, the use of which in hydraulic engineering is not yet standardized, but the scope of their application is expanding every year. The main *aim* of experimental research is to strengthen the reinforced concrete structures of hydraulic structures, including those with interblock construction joints and transverse cracks, using prestressed transverse reinforcement. **Methods.** The investigations were carried out on a reinforced concrete model of a beam type reinforced with prestressed transverse reinforcement in the zone of inclined cracks formation. The model was made taking into account the typical tasks encountered during the repair of long-term operating retaining hydraulic structures with open seams and cracks, insufficient transverse reinforcement, low reinforcement coefficient, and initial deflection. **Results.** The task of strengthening a special reinforced concrete model using prestressed transverse reinforcement was realized. Experimental data were obtained on the nature of deformation and destruction, the opening of interblock construction joints and cracks, and the stresses in the reinforcement. Recommendations are given for strengthening the operated low-reinforced concrete structures of hydraulic structures with interblock construction joints with prestressed reinforcement.

**Keywords:** hydraulic structures, interblock joints and cracks, cross-section reinforcement, pre-tension, structural reinforcement, experimental studies

### For citation

Zyuzina O.V. Experimental studies of reinforced concrete structures of hydraulic structures strengthened with prestressed transverse reinforcement. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020; 16(6):504–512. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-504-512>

## 1. Введение

Железобетонные конструкции гидротехнических сооружений (ГТС) в течение длительного периода их работы подвержены воздействию комплекса нагрузок при наличии особого характера трещинообразования в зоне действия изгибающих моментов и поперечных сил [1; 2]. В связи с длительным периодом эксплуатации все чаще возникает потребность в их ремонте и усилении [3–8].

Применяются различные методы усиления длительно эксплуатируемых железобетонных конструкций ГТС (подпорных стен, устоев, стен шлюзов и др.) и в первую очередь со стороны лицевой грани, поскольку со стороны тыловой грани присутствует грунтовая засыпка практически на всю высоту этих сооружений. При этом представляется целесообразным обратить внимание на набирающую обороты тенденцию применения композитных материалов, обладающих среди прочих такими особенностями, как коррозионная стойкость при эксплуатации в агрессивной среде и гораздо меньший вес в сравнении со сталью. В гидротехническом строительстве использование композитных материалов еще не нормируется, однако в этом направлении активно ведутся работы [9–24].

При анализе «непроектного состояния» стен шлюзов отмечается необходимость в ряде случаев установки дополнительной поперечной арматуры при наличии наклонных трещин в конструкции, выходящих на лицевую грань [2].

В практике промышленного и гражданского строительства известен способ усиления изгибаемых конструкций на восприятие поперечных сил с помощью преднапряженных поперечных стержней [18]. Стержни устанавливаются по внешним граням усиливаемой конструкции на участках действия избыточной поперечной силы и стягиваются, усиливая балочный элемент в необходимой степени. Исследования

в данном направлении проводились в Ленинградском инженерно-строительном институте в 1963 г. [18] на опытных балках двутаврового сечения высотой 30 см при пролете 3 м и высоким коэффициентом продольного армирования  $\mu = 0,024$ , характерным для указанной области строительства.

Также следует отметить исследования балок с  $\mu = 0,02$ , проведенные в Полоцком государственном университете, в результате которых «экспериментально подтверждена эффективность усиления в зоне среза изгибаемых железобетонных элементов установкой дополнительной предварительно напряженной поперечной арматуры, в том числе под нагрузкой» [19].

Однако в практике ремонта и усиления малоармированных конструкций ГТС, для которых характерно наличие межблочных строительных швов как в продольном, так и в поперечном направлениях, использование предварительно напряженной поперечной арматуры пока не нашло применения ввиду отсутствия необходимого экспериментально-расчетного обоснования.

Для разработки технических решений по усилению длительно эксплуатируемых железобетонных конструкций ГТС представляется необходимым проведение экспериментальных исследований с целью обоснования эффективного применения предварительно напряженной поперечной арматуры, устанавливаемой в тело бетона конструкции со стороны лицевой грани ГТС (подпорного сооружения) и пересекающей наклонные трещины, образовавшиеся из межблочных строительных швов.

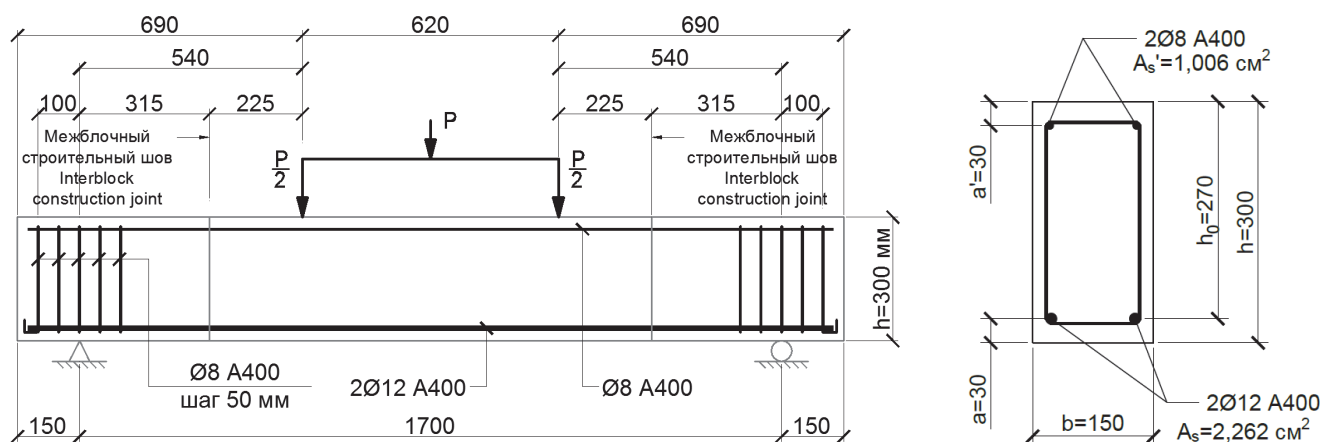
Для реализации вышеуказанной цели проведены экспериментальные исследования, учитывающие характерные особенности железобетонных конструкций ГТС: невысокий класс бетона и арматуры; коэффициент продольного армирования  $\mu < 0,01$ ; наличие межблочных строительных швов; нарушение сцепления рабочей стальной арматуры с бетоном в зоне размещения межблочных строительных швов как результат проявления усадочных деформаций бетона при твердении (в период строительства), а также длительной эксплуатации железобетонных конструкций ГТС при температурных и знакопеременных нагрузках; наличие наклонных трещин, образовавшихся из межблочных строительных швов.

## 2. Методы

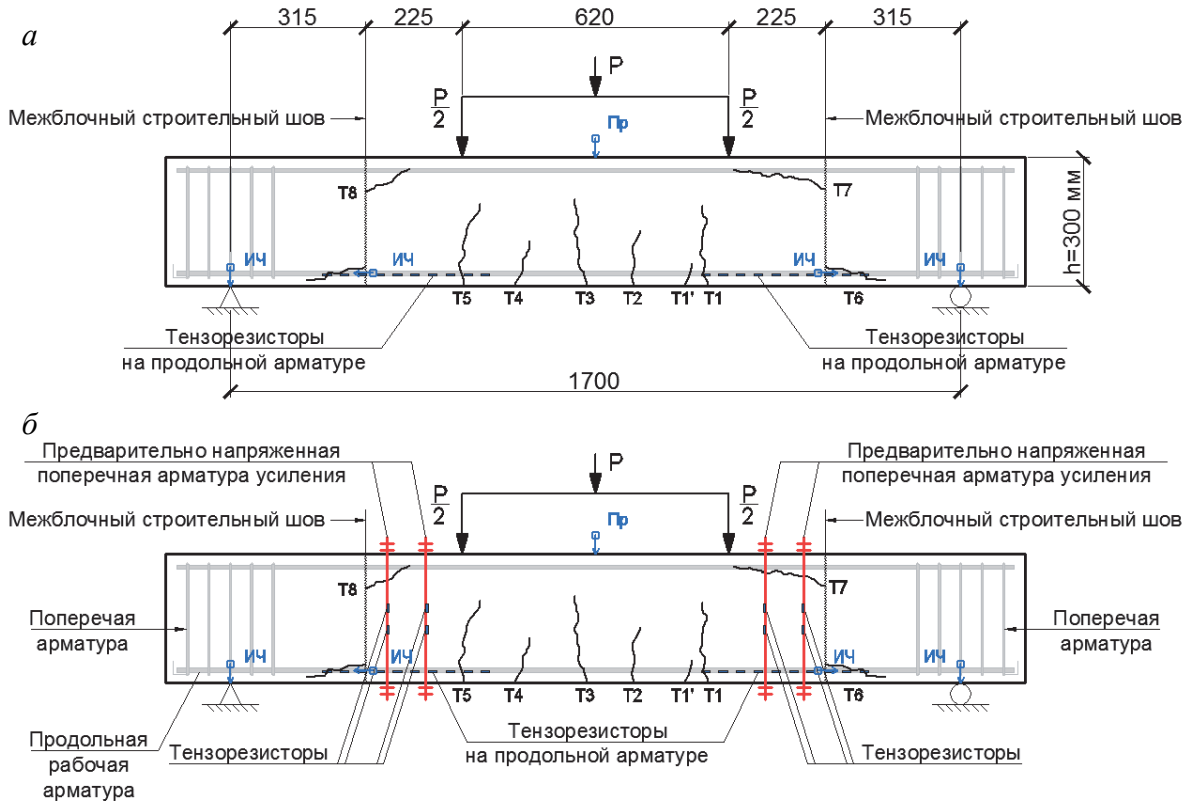
Исследования проведены на основе модели балочного типа с двумя вертикальными межблочными строительными швами. Выбор типа модели, схемы ее опирания и нагружения, мест расположения швов, схемы армирования, типа арматуры обусловлен часто встречающимися в практике гидротехнического строительства расчетными случаями и позволяет изучить в лабораторных условиях работу изгибаемой конструкции со швами и трещинами как в зоне совместного действия изгибающего момента и поперечной силы (зона среза), так и в зоне чистого изгиба.

Поперечное сечение балки: прямоугольное  $b \times h = 150 \times 300$  мм, длина – 2000 мм; класс бетона В30=В35. Для устройства межблочных строительных швов, расположенных на расстоянии 465 мм от торцов балки, бетонирование проводилось в два приема.

Опытная модель изготовлена со стальной рабочей продольной арматурой  $2\text{Ø}12$  класса А400 (коэффициент армирования  $\mu = 0,0056$ ), что является малоармированной конструкцией, присущей ГТС. Конструкция опытной балки представлена на рис. 1.

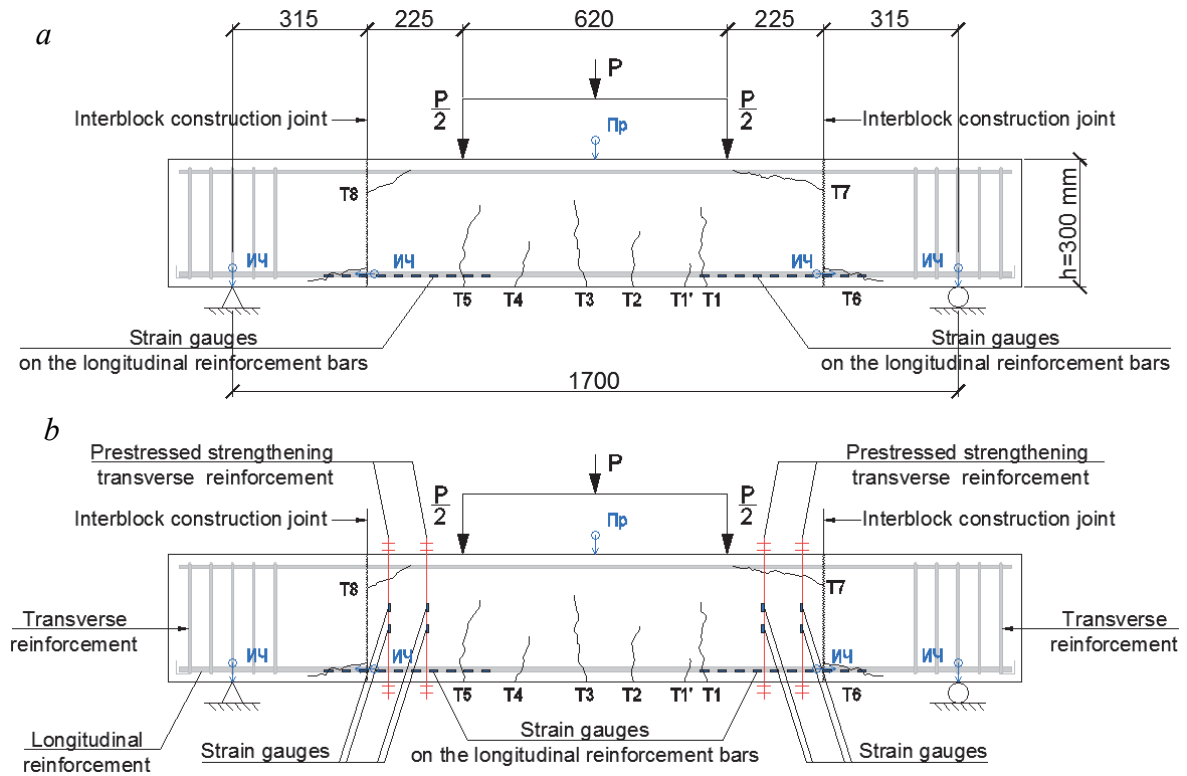


**Рис. 1.** Конструкция и схема нагружения балки, мм  
**[Figure 1.** Design and loading diagram of a beam, mm]



**Рис. 2.** Схема установки КИА, характер трещинообразования в балке и схема усиления:

*a* – схема установки КИА на бетоне и стальной арматуре и характер трещинообразования; *б* – схема усиления и характер трещинообразования



**Figure 2.** Diagram of the installation of instrumentation, the nature of cracking in the beam and the reinforcement diagram:

*a* – diagram of the installation of instrumentation on concrete and steel reinforcement and the nature of cracking; *b* – the scheme of strengthening and the nature of cracking

Опирали опытной балки производилось на шарнирно-неподвижную и шарнирно-подвижную (катковую) опоры.

Нагрузка  $P$  от гидравлического домкрата прикладывалась вертикально ступенями и передавалась через горизонтальную траверсу в двух точках на расстоянии 310 мм от центра балки, при этом расстояние между силами (зона чистого изгиба) составило 620 мм, а расстояние между силами и опорами (пролет среза) – 540 мм (рис. 1).

Опытная балка оснащалась контрольно-измерительной аппаратурой (КИА), как это показано на рис. 2:

- индикаторами часового типа для измерения ширины раскрытия межблочных швов и трещин;
- прогибомерами для измерения прогибов в пролете балки и индикаторами часового типа – для перемещения опор;
- тензорезисторами с базой 20 мм для измерения деформаций арматуры (продольной рабочей и предварительно напряженной поперечной).

Испытания опытной модели проводились в два этапа. После каждого этапа производилось разгрузка модели и подготовка к следующему этапу.

### 3. Результаты и обсуждение

#### 3.1. Первый этап – испытание неусиленной конструкции

На первом этапе исследований опытная балка испытывалась без усиления и доводилась до разрушения по бетону, которое наступало от действия изгибающих моментов и поперечных сил по характерным наклонным трещинам, образовавшимся из межблочных строительных швов по направлению к местам приложения нагрузки  $P/2$ . Разрушение балки произошло хрупко при нагрузке  $P = 57,2$  кН.

Рассмотрим основные результаты первоначальных экспериментальных исследований.

В опытной балке зафиксирован следующий характер трещинообразования (рис. 2, а): после раскрытия вертикальных межблочных швов на расстоянии  $X_{ш} = 0,24 \cdot h_{ш}$  от сжатой грани в балке произошло выклинивание наклонных трещин по направлению к приложенным силам, при этом при нагрузке, близкой к разрушающей, образовались трещины вдоль продольной стальной арматуры по направлению от межблочного шва к опорам. На участке между силами в зоне чистого изгиба образовалась система вертикальных нормальных трещин.

Опытное значение силы  $P$ , соответствующее образованию наклонных трещин из межблочных швов и разрушению балки по схеме «вертикальная трещина по шву – наклонная трещина из шва по направлению к силе – горизонтальная трещина вдоль рабочей стальной арматуры по направлению к опоре»:

- а) сила  $P$ , соответствующая образованию наклонных трещин из межблочных строительных швов – 46,8 кН (82 % от разрушающей нагрузки);
- б) сила  $P$ , соответствующая хрупкому разрушению балки – 57,2 кН.

#### 3.2. Второй этап – испытание конструкции, усиленной предварительно напряженной поперечной арматурой

Второй этап экспериментальных исследований заключался в установке в пролете среза поперечной арматуры ( $\varnothing 12$  мм) по длине наклонных трещин, образовавшихся из межблочных строительных швов.

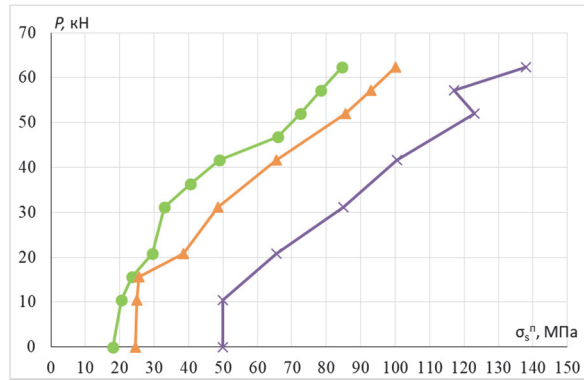
Предварительное натяжение поперечной арматуры производилось на величину 27,2–49,2 МПа (для стальной поперечной арматуры деформации натяжения  $\varepsilon_s^n = (13,6 \div 24,6) \cdot 10^{-5}$ ; для базальтокомпозитной арматуры деформации натяжения  $\varepsilon_f^n = (54,4 \div 98,4) \cdot 10^{-5}$ ). По мере возрастания нагрузки (силы  $P$ ) на балку (рис. 3) деформации в поперечной арматуре возросли на максимальную величину – до  $\varepsilon_s^n = 69 \cdot 10^{-5}$  (138 МПа), при этом хрупкого разрушения балки при  $P = 62,4$  кН не произошло, что выше на 9,1 % силы  $P = 57,2$  кН, соответствующей хрупкому разрушению балки без предварительно напряженной поперечной арматуры.

Графики напряжений в продольной арматуре в сечении по межблочным строительным швам и под силой  $P/2$  представлены на рис. 4. Из них следует, что  $\sigma_s$  под силой  $P/2$  превышает  $\sigma_s^{\text{III}}$  по швам в 1,2 раза при  $P = 62,4$  кН.

Необходимо отметить, что максимальные напряжения в рабочей арматуре в сечении приложения силы  $P/2$  соизмеримы с опытной величиной предела текучести арматуры класса А400.

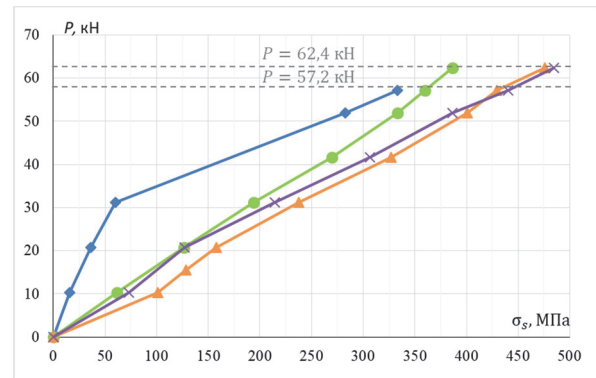
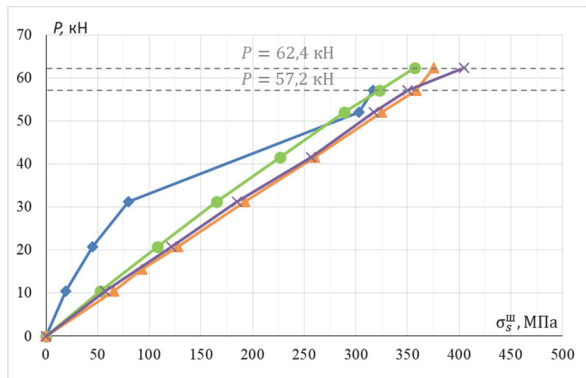
Графики ширины раскрытия межблочных строительных швов и нормальных трещин в зоне чистого изгиба представлены на рис. 5. Из них следует, что  $a_{cr}^{\text{III}}$  превышает величину  $a_{cr}$ , при этом  $a_{cr}^{\text{III}}$  не превышает допускаемую величину по СП 41.13330.2012 (п. 9.8), равную 0,5 мм [25].





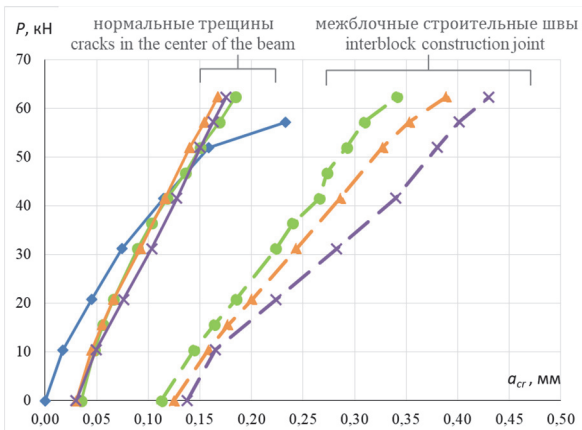
**Рис. 3.** Графики напряжений в поперечной предварительно напряженной арматуре усиления, расположенной по длине наклонной трещины:

—●—, —▲—, —×— – балка, усиленная предварительно напряженной поперечной арматурой (в результате трех испытаний)  
 [Figure 3. Graphs of stresses in transverse prestressed reinforcement located along the length of an inclined crack:  
 —●—, —▲—, —×— – beam reinforced with prestressed transverse reinforcement (as a result of three tests)]



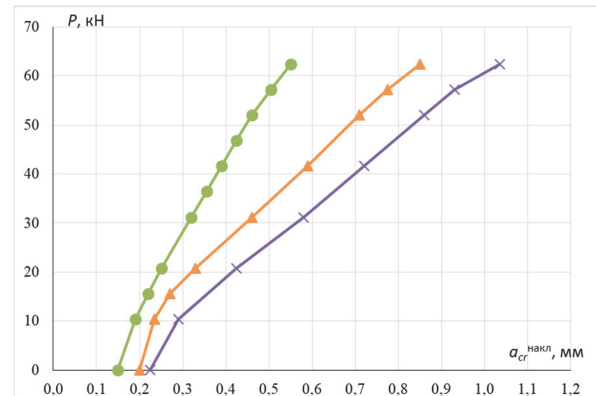
**Рис. 4.** Графики напряжений в продольной арматуре:

*a* – в сечении по межблочным строительным швам; *б* – в сечении приложения силы  $P/2$ ; —●— – балка без предварительно напряженной арматуры;  
 —●—, —▲—, —×— – балка, усиленная предварительно напряженной поперечной арматурой (в результате трех испытаний)  
 [Figure 4. Graphs of stresses in longitudinal reinforcement:  
*a* – in cross-section along interblock construction joints; *б* – in the section of the application of the force  $P/2$ ; —●— – beam without prestressed reinforcement;  
 —●—, —▲—, —×— – beam reinforced with prestressed transverse reinforcement (as a result of three tests)]



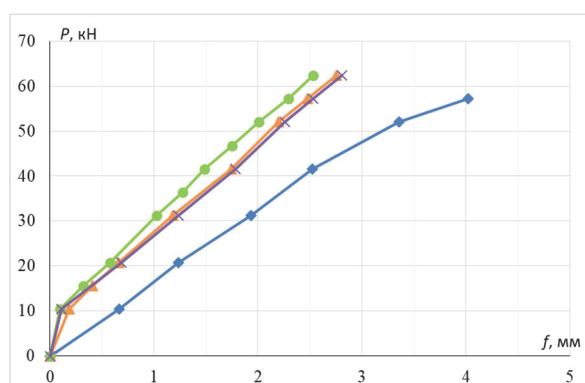
**Рис. 5.** Графики ширины раскрытия межблочных строительных швов и нормальных трещин в зоне чистого изгиба:

—●— – балка без предварительно напряженной арматуры;  
 —●—, —▲—, —×— – балка, усиленная предварительно напряженной поперечной арматурой (в результате трех испытаний)  
 [Figure 5. Graphs of the width of the opening of interblock construction joints and normal cracks in the clean bend zone:  
 —●— – beam without prestressed reinforcement; —●—, —▲—, —×— – beam reinforced with prestressed transverse reinforcement (as a result of three tests)]



**Рис. 6.** Графики ширины раскрытия наклонной трещины:

—●—, —▲—, —×— – балка, усиленная предварительно напряженной поперечной арматурой (в результате трех испытаний)  
 [Figure 6. Graphs of inclined crack opening width (as a result of three tests):  
 —●—, —▲—, —×— – beam reinforced with prestressed transverse reinforcement (as a result of three tests)]



**Рис. 7.** Графики прогиба балки:

— балка без предварительно напряженной арматуры;

—, —, — балка, усиленная предварительно напряженной поперечной арматурой (в результате трех испытаний)

[Figure 7. Graphs of beam deflection:

— beam without prestressed reinforcement; —, —, — beam reinforced with prestressed transverse reinforcement (as a result of three tests)]

Графики ширины раскрытия наклонной трещины, образовавшейся из межблочных строительных швов, представлены на рис. 6.

Графики прогиба балки представлены на рис. 7. Из них следует уменьшение прогиба усиленной предварительно напряженной поперечной арматурой балки при  $P = 57,2$  кН в 1,6 раза.

#### 4. Заключение

Применение предварительно напряженной поперечной арматуры в зоне образования наклонных трещин из межблочных строительных швов представляется достаточно позитивным при усилении малоармированных железобетонных конструкций ГТС (подпорных стен, устоев, стен шлюзов и др.) и в первую очередь со стороны лицевой грани, поскольку со стороны тыловой грани присутствует грунтовая засыпка практически на всю высоту этих сооружений. В качестве предварительно напряженной поперечной арматуры наиболее эффективно использовать базальтокомпозитную арматуру, прежде всего с точки зрения технологии производства работ и сопротивляемости воздействию агрессивных сред, с дальнейшим ее омоноличиванием в теле бетона конструкции.

Анализ результатов экспериментальных исследований указывает:

а) на восстановление несущей способности малоармированной железобетонной конструкции с межблочными строительными швами;

б) совместную работу системы усиления предварительно напряженной поперечной арматурой со всей конструкцией в целом с момента начала нагружения балки;

в) определенное накопление величины ширины раскрытия наклонной трещины в процессе трех испытаний в зоне действия поперечных сил (действие поперечных сил превалирует над изгибающим моментом в результате увеличения жесткости балок в зоне наклонных трещин);

г) снижение прогиба балки, усиленной предварительно напряженной поперечной арматурой.

Необходим комплексный подход к усилению эксплуатируемых малоармированных железобетонных конструкций ГТС с межблочными строительными швами предварительно напряженной поперечной и продольной арматурой.

В части обеспечения прочностных и технологических параметров усиления ГТС наиболее предпочтительной является базальтокомпозитная арматура, применение которой в гидротехнических сооружениях в настоящее время не нормируется. Вместе с тем в Российской Федерации действует ряд отдельных нормативных документов, регламентирующих применение композитной арматуры [20–22].

#### Список литературы

1. Беллендир Е.Н., Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Зюзина О.В. Экспериментальные исследования потерь предварительно напряжения базальтокомпозитной арматуры в составе бетонного элемента // Гидротехническое строительство. 2020. № 7. С. 2–6.
2. Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Николаев В.Б., Башкиров Д.С. Особенности напряженно-деформированного состояния стен камер шлюзов // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. Вып. 4. С. 473–483. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.4.473-483.

3. Regan P.J. An examination of dam failures vs. age of dams // *Hydro review*. Vol. 29. No. 4. 2010, June. Pp. 62–68.
4. Моргунов К.П., Рябов Г.Г. Анализ возможных причин образования трещины в левом устое нижней головы шлюза № 2 Белоусовского гидроузла // Проектирование, строительство и эксплуатация гидротехнических сооружений водных путей: сборник материалов конференции. СПб.: Изд-во ГУМРФ имени адм. С.О. Макарова, 2017. Т. 1. С. 115–131.
5. Давиденко В.М., Штильман В.Б., Фотиев П.И. Обоснование критериев безопасности и надежности бетонных и железобетонных строительных конструкций гидротехнических сооружений при использовании современных материалов и технологий их защиты и ремонта // *Гидротехника*. 2011. № 2 (23). С. 40–45.
6. Рубин О.Д., Умнова Р.В., Ни В.Е. Усиление эксплуатируемых подпорных сооружений // *Гидротехническое строительство*. 1989. № 12. С. 42–45.
7. Mason P.J. Dam engineering: the last 50 years, and the 50 years ahead // *Hydropower & Dams*. 2016. Vol. 23. Issue 6. Pp. 83–89.
8. Kreuzer H. Dam safety and monitoring. Practical discussions tackle global issues in Montreux. *Hydro 2016 report* // *Hydropower & Dams*. 2016. Vol. 23. Issue 6. Pp. 119–120.
9. Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Фролов К.Е., Пащенко Ф.А., Зюзина О.В. Экспериментальные исследования железобетонных подпорных стен // *Природообустройство*. 2020. № 1. С. 72–79. DOI: 10.26897/1997-6011/2020-1-72-79.
10. Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Балагуров В.Б., Александров А.В. Новая технология ремонта ГТС посредством армирования композитными материалами // *Известия ВНИИГ имени Б.Е. Веденеева*. 2016. № 280. С. 3–9.
11. Hamed E., Bradford M.A. Flexural time-dependent cracking and post-cracking behaviour of FRP strengthened concrete beams // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. Pp. 1595–1607.
12. Zhou Y., Gou M., Zhang F., Zhang Sh., Wang D. Reinforced concrete beams strengthened with carbon fiber reinforced polymer by friction hybrid bond technique: experimental investigation // *Materials and Design*. 2013. Vol. 50. Pp. 130–139.
13. Selvachandran P., Anandakumar S., Muthuramu K.L. Deflection Behavior of Prestressed Concrete Beam using Fiber Reinforced Polymer (FRP) Tendon // *The Open Civil Engineering Journal*. 2016. No. 10. Pp. 40–60.
14. Zhu H., Yang Y. External Prestressing Bridge Reinforcement Technology Review // *MATEC Web of Conferences*. 2015. Vol. 22. Article 04028.
15. Pavlović A., Donchev T., Petkova D., Limbachiya M., Almuhaissen R. Pretensioned BFRP reinforced concrete beams: flexural behaviour and estimation of initial prestress losses // *MATEC Web of Conferences*. 2019. Vol. 289. Article 09001.
16. Завгороднев А.В., Уманский А.М., Беккер А.Т., Борисов Е.К. Перспективы применения композитной арматуры в морском гидротехническом строительстве // *Архитектура и строительство Дальнего Востока: горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал)*. Отдельные статьи (специальный выпуск). 2014. № 12. С. 137–149.
17. Беккер А.Т., Уманский А.М. Применение базальтопластиковой арматуры в конструкциях морских гидротехнических сооружений // *Известия ВНИИГ имени Б.Е. Веденеева*. 2016. № 282. С. 61–75.
18. Онуфриев Н.М. Усиление железобетонных конструкций промышленных зданий и сооружений. Ленинград – М.: Стройиздат, 1965.
19. Лазовский Е.Д. Экспериментально-теоретические исследования прочности изгибаемых железобетонных элементов, усиленных в зоне среза установкой дополнительной предварительно напряженной поперечной арматуры // *Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия Ф: Строительство. Прикладные науки*. 2013. № 16. С. 51–60.
20. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М., 2013.
21. СП 295.1325800.2017. Конструкции бетонные, армированные полимерной композитной арматурой. Правила проектирования. М.: Стандартинформ, 2017.
22. ГОСТ 31938-2012. Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Общие технические условия. М.: Стандартинформ, 2014.
23. Okhapkin G.V., Zyuzina O.V. Approach to the restoration of the metal water conduits of hydrolic structures // *Power technology and engineering*. 2020. Vol. 53. No. 5. Pp. 542–544. <https://doi.org/10.1007/s10749-020-01112-2>
24. Dong Yang, Jiwen Zhang, Shoutan Song, Fei Zhou, Chao Wang. Experimental investigation on the creep property of carbon fiber reinforced polymer tendons under high stress levels. *Materials*. 2018. Vol. 11. Issue 11. 2273. <https://doi.org/10.3390/ma11112273>
25. СП 41.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции гидротехнических сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.06.08-87 (с Изменением № 1). М., 2013.

## References

1. Bellendir E.N., Rubin O.D., Lisichkin S.E., Zyuzina O.V. Experimental studies of prestress losses of basalt composite reinforcement as part of a concrete element. *Power technology and engineering*. 2020;(7):2–6. (In Russ.)
2. Rubin O.D., Lisichkin S.E., Nikolaev V.B., Bashkirov D.S. The features of stress-deformation state of the lock of lock chambers walls. *Vestnik MGSU (Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering)*. 2019;14(4):473–483. (In Russ.) DOI: 10.22227/1997-0935.2019.4.473-483.
3. Regan P.J. An examination of dam failures vs. age of dams. *Hydro review*. 2010(June);29(4):62–68.

4. Morgunov K.P., Ryabov G.G. Analiz vozmozhnykh prichin obrazovaniya treshchiny v levom ustoe nizhnej golovy shlyuza No. 2 Belousovskogo gidrouzla [Analysis of possible causes of establishment of a crack in the left stone of the lower head of the gateway of the blockout No. 2 of Belousovsky hydroelectric power station]. *Proektirovanie, stroitel'stvo i ekspluatatsiya gidrotekhnicheskikh sooruzhenij vodnykh putej* [Design, construction and operation of hydraulic structures of waterways]: collection of conference materials. 2017;1:115–131. (In Russ.)
5. Davidenko V.M., Shtilman V.B., Fotiev P.I. Substantiation of safety and reliability criteria for concrete and reinforced concrete building structures of hydraulic structures using modern materials and technologies for their protection and repair. *Hydrotehnika*. 2011;2(23):40–45. (In Russ.)
6. Rubin O.D., Umnova R.V., Ni V.Ye. Usilenie ekspluatiruemykh podpornykh sooruzhenij [Strengthening maintained retaining structures]. *Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo* [Power technology and engineering]. 1989;(12):42–45. (In Russ.)
7. Mason P.J. Dam engineering: the last 50 years, and the 50 years ahead. *Hydropower & Dams*. 2016;23(6):83–89.
8. Kreuzer H. Dam safety and monitoring. Practical discussions tackle global issues in Montreux. Hydro 2016 report. *Hydropower & Dams*. 2016;23(6):119–120.
9. Rubin O.D., Lisichkin S.E., Frolov K.E., Pashchenko F.A., Zyuzina O.V. The experimental research of the reinforced concrete retaining walls. *Prirodoobustrojstvo*. 2020;(1):72–79. (In Russ.)
10. Rubin O.D., Lisichkin S.E., Balagurov V.B., Alexandrov A.V. New technology of HES repair using reinforcement with composite materials. *Proceeding of the VNIIG*. 2016;(280):3–9. (In Russ.)
11. Hamed E., Bradford M.A. Flexural time-dependent cracking and post-cracking behaviour of FRP strengthened concrete beams. *International Journal of Solids and Structures*. 2012;49:1595–1607.
12. Zhou Y., Gou M., Zhang F., Zhang Sh., Wang D. Reinforced concrete beams strengthened with carbon fiber reinforced polymer by friction hybrid bond technique: experimental investigation. *Materials and Design*. 2013;50:130–139.
13. Selvachandran P., Anandakumar S., Muthuramu K.L. Deflection Behavior of Prestressed Concrete Beam using Fiber Reinforced Polymer (FRP) Tendon. *The Open Civil Engineering Journal*. 2016;(10):40–60.
14. Zhu H., Yang Y. External Prestressing Bridge Reinforcement Technology Review. *MATEC Web of Conferences*. 2015;22:04028.
15. Pavlović A., Donchev T., Petkova D., Limbachiya M., Almuhausen R. Pretensioned BFRP reinforced concrete beams: flexural behaviour and estimation of initial prestress losses. *MATEC Web of Conferences*. 2019;289:09001.
16. Zavgorodnev A.V., Umansky A.M., Bekker A.T., Borisov E.K. Prospects for the use of composite reinforcement in marine hydraulic engineering. *Architecture and construction of the Far East: mining information and analytical bulletin (scientific and technical journal). Selected articles (special issue)*. 2014;(12):137–149.
17. Becker A.T., Umansky A.M. Application of basalt-plastic reinforcement in the structures of offshore hydroengineering constructions. *Proceeding of the VNIIG*. 2016;(282):61–75. (In Russ.)
18. Onufriev N.M. *Usilenie zhelezobetonnykh konstruksii promyshlennykh zdaniy i sooruzhenii* [Strengthening of reinforced concrete structures of industrial buildings and structures]. Leningrad, Moscow: Stroyizdat Publ.; 1965. (In Russ.)
19. Lazouski Y.D. Experimental and theoretical study of strength of steel reinforced concrete elements reinforced the slicer area installing additional preliminary tense transverse reinforcement. *Bulletin of Polotsk State University. Series F: Building. Applied Sciences*. 2013;(16):51–60. (In Russ.)
20. SP 63.13330.2012. *Betonnye i zhelezobetonnye konstruksii. Osnovnye polozheniya. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 52-01-2003* [Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions. Updated edition SNIp 52-01-2003]. Moscow; 2013. (In Russ.)
21. SP 295.1325800.2017. *Konstruksii betonnye, armirovannye polimernoj kompozitnoi armaturoi. Pravila proektirovaniya* [Concrete structures, reinforced with polymer composite reinforcement. Design rules]. Moscow: Standartinform Publ.; 2017. (In Russ.)
22. GOST 31938-2012. *Armaturoj kompozitnaya polimernaya dlya armirovaniya betonnykh konstruksii. Obshchie tekhnicheskie usloviya* [Composite polymer reinforcement for reinforcing concrete structures. General specifications]. Moscow: Standartinform Publ.; 2014. (In Russ.)
23. Okhapkin G.V., Zyuzina O.V. An Approach to the Restoration of Metal Water Conduits of Hydraulic Structures. *Power technology and engineering*. 2020;53(5):542–544. <https://doi.org/10.1007/s10749-020-01112-2>
24. Dong Yang, Jiwen Zhang, Shoutan Song, Fei Zhou, Chao Wang. Experimental investigation on the creep property of carbon fiber reinforced polymer tendons under high stress levels. *Materials*. 2018;11(11):2273. <https://doi.org/10.3390/ma11112273>
25. SP 63.13330.2012. *Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii gidrotekhnicheskikh sooruzhenij. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 2.06.08-87 (s Izmeneniyem № 1)* [Concrete and reinforced concrete structures of hydraulic structures. Updated version of SNIp 2.06.08-87 (with Amendment No. 1)]. Moscow; 2013. (In Russ.)

## СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ SEISMIC RESISTANCE

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-6-513-522  
UDC 69.022

RESEARCH ARTICLE / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Seismic response of stone masonry building with wooden band

Govinda Khatri<sup>1</sup>, Govind Prasad Lamichhane<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Mid-Western University, Post Box 21700, Birendranagar-9, Surkhet, Federal Democratic Republic of Nepal

<sup>2</sup>Pokhara University, Pokhara Metropolitan City-30, Lekhnath, Kaski, Federal Democratic Republic of Nepal

\*govindkhec@gmail.com

#### Article history

Received: September 8, 2020

Revised: November 12, 2020

Accepted: November 21, 2020

#### Abstract

Most stone-masonry structures were built at a time when seismic risk was not considered in their design. Recent moderate to strong earthquakes have confirmed the vulnerability of heritage buildings, especially those constructed with unreinforced-masonry materials in various developing countries, worldwide. Proper assessment of the seismic performance and of the potential deficiency of existing heritage structures forms the basis for determining the degree of intervention needed to preserve their heritage values. Analysis of masonry wall confined by wooden band has been carried out using various structural analysis programs. In analysis appropriately considered and introduced link element such as hook, gap and spring at connecting nodes of vertical and horizontal timber elements. The result shows that the traditional floors and spandrels of the existing structure are the vulnerable parts which need strengthening of them to assure the structural members are able to resist seismic vulnerability. The required improvement and strengthening technique in existing building are proposed and better results are marked. The analysis of the modified structure shows considerably improvement in the dynamic characteristics of the buildings and overall structural response of those.

**Keywords:** stone masonry, band, band connector, spandrels

#### For citation

Khatri G., Lamichhane G.P. Seismic response of stone masonry building with wooden band. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(6):513–522. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-513-522>

### Влияние землетрясения на каменную кладку зданий с деревянным поясом

Г. Хатри<sup>1</sup>, Г.П. Ламичхане<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Средне-Западный университет, Федеративная Демократическая Республика Непал, Суркхет, Birendranagar-9, н/я 21700

<sup>2</sup>Университет Покхары, Федеративная Демократическая Республика Непал, Каски, Лекхнат, Pokhara Metropolitan City-30

\*govindkhec@gmail.com

#### История статьи

Поступила в редакцию: 8 сентября 2020 г.

Доработана: 12 ноября 2020 г.

Принята к публикации: 21 ноября 2020 г.

#### Аннотация

Большинство каменно-кладочных сооружений строилось во времена, когда при их проектировании сейсмический риск не учитывался. Недавние средние и сильные землетрясения показали уязвимость ветхих зданий, особенно построенных из неармированных каменных материалов в развивающихся странах по всему миру. Цель настоящего исследования – оценить сейсмические

Govinda Khatri, lecturer of the Faculty of Engineering.

Govind Prasad Lamichhane, Dean in Mid-Western University, Associate Professor of the Faculty of Science and Technology, PhD in Technical Sciences.

Хатри Говинда, преподаватель Инженерного факультета.

Ламичхане Говинд Прасад, декан Средне-Западного университета, доцент факультета науки и техники, кандидат технических наук.

© Khatri G., Lamichhane G.P., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Для цитирования**

*Khatri G., Lamichhane G.P.* Seismic response of stone masonry building with wooden band // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 6. С. 513–522. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-6-513-522>

характеристики и потенциальные возможности существующих каменных, кирпичных строений. Для этого определялась степень укрепления строений, необходимого для сохранения их как бесценного наследия прошлого. Изучение кладки стены, ограниченной деревянной лентой, проводилось с использованием различных программ структурного анализа. Соответствующим образом рассмотрены и введены звенья таких элементов, как крюк, зазор и пружина, в узлах соединения вертикальных и горизонтальных деревянных элементов. В результате выявлено, что традиционные полы и своды существующих конструкций являются уязвимыми и нуждаются в укреплении, чтобы гарантированно противостоять землетрясениям. Предложены необходимые методы улучшения и укрепления существующих зданий. Анализ модифицированной конструкции показывает значительное улучшение динамических характеристик зданий и их общей конструктивной характеристики.

**Ключевые слова:** каменная кладка, пояс, врубка, свод

## 1. Introduction

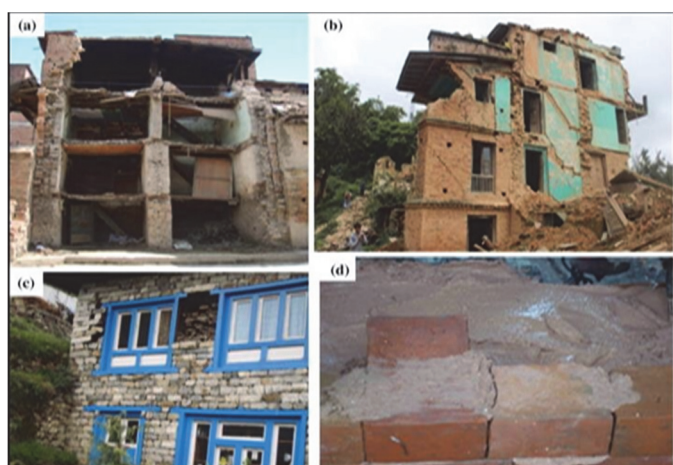
The historical and traditional structures of Karnali Zone of Sinja Valley (Nepal) are constructed with excessive use of stone masonry and timber elements. Even today, use of masonry walls cannot be avoided in developing countries, worldwide like our country. The timber elements are used in these houses in the form of beams, columns, joists, doors, windows, band and band connectors and other decorative elements [1]. Timber door, windows and other decorative elements not only provide pleasant aesthetic view but also impart structural stability and in controlling localized stresses. However, the structural strength of these houses against the possible earthquakes is limited. The situation calls for the need of seismic analysis of the buildings so that appropriate strengthening techniques can be applied. Stone masonry house are highly vulnerable in shear, bending, and torsions. Due to these stress on masonry, out of failure and in plane failure is common vulnerable phenomenon. The appropriate modeling of the building like those of stone masonry is important to assess in analysis for performance and response of the structure [2].

As per field observation, most of houses of Karnali Zone (Nepal) made of stone masonry with compacted mud thatched roof. Buildings are not designed properly in terms of seismic performance and vulnerability. Besides that Karnali Zone (Nepal) by the virtue of active faults in the vicinity, several places worldwide are located in highly seismic prone zone, constructed highly steep terrain and the soil strata is found composed of very weak soil. The structures constructed over such terrain and with soft strata are not very much favorable for resisting seismic forces, which may subject to high amplification of ground shaking effect [3].

The most area of Sinja Valley (Nepal) still contains traditional building constructed with masonry and timber. Neither significant researches nor have detailed studies of the loads or bearing capacities of traditional houses of Sinja Valley been carried out. Usually, most of the construction or repair works are done in a very simple way without considering seismic effects [1–6].

A lot of research works have been conducted on new construction materials and technologies but the research works regarding retrofitting, rehabilitation, repair, strengthening of traditional house are limited. Besides that this tradition also affects the cultural heritage housing construction practices and lose our traditional architectural value day by day.

In view of structural performance masonry structures have limited resisting capacity against earthquake (Figures 1 and 2) [7]. So, it is vital to have a study to address the present status of the structural capacity of the traditional house whether they are capable of withstanding the possible future seismic impact. The responsibility of a structural engineer is not only limited to construction of modern structures, but also to preserve the traditional structures which reflect the state of civilization, tradition and culture [8; 9]. In this regard, the present study becomes an essential step in the strengthening of traditional house for our future generations and the study of the Sinja Valley (Nepal) housing trend [10; 11]. Likewise the analysis is done enhancing seismic impact worldwide.



**Figure 1.** Failure mode of masonry houses:

*a* – out of plane collapses of load bearing masonry wall in Bhaktapur;  
*b* – heavily damaged masonry structure in Chautara due to out of plane collapse of majority of walls; *c* – delaminating of the masonry observed in stone masonry wall in Solukhumbu (Everest base camp area); *d* – common practice of mortar placement for masonry construction [12]



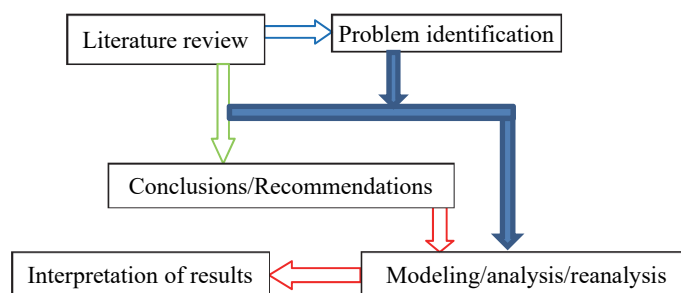
**Figure 2.** Failure mode of masonry houses:

*a* – pounding and progressive failure on the building situated on edge;  
*b* – complete collapse of row houses in Baluwa (near epicenter);  
*c* – progressive failure on row houses and good performance of timber frames;  
*d* – stone masonry failure

## 2. Methods

The research plan is shown in Figure 3.

The traditional building as shown in Figures 4 and 5 is usually rectangular in plan and stretched over two storeys height. The length of the plan is 7.7 m with facades of various widths but most 6.92 m, the house is raised vertically over two storeys with a partition wall running up the height, creating front and back rooms. Timber frames are provided at certain interval 1.7 m, parallel to the facade. Sometimes timber frames are replaced by stone walls in order to create rooms. The typical inter storey height is between 1.75 m for ground floor and 2.75 m for first floor. The ground floor is used for animals and first floor is used for human beings. Generally small size of opening are provided where size of doors are 0.90 m width and 1.5 m height whereas window size are 1.2 m width and 1 m height. During the construction, the modern construction materials like concrete, bricks, steel were not available in the proposed site frequently [1].



**Figure 3.** Flow chart of methodology

Using structural analysis program it's not easy to create model as in RCC or steel building. However using various links emends the model of masonry building shall be created whose applications are as followings [13]:

- 1) the links as hooks, springs, plastic wanes are created so as to meet criteria of nodal points among joist and beams, beams and posts stone masonry walls and stiffening beams and connectors;
- 2) those links need for optimizations of modal so as give approximate final output results by nearest partial fixity among all nodes of structures;
- 3) those links are placed in separate model and the results are verified with manual results;
- 4) the main applications of such links are to create partial fixity and pinned joints among nodes and stone masonry with connectors and stiffened beams.

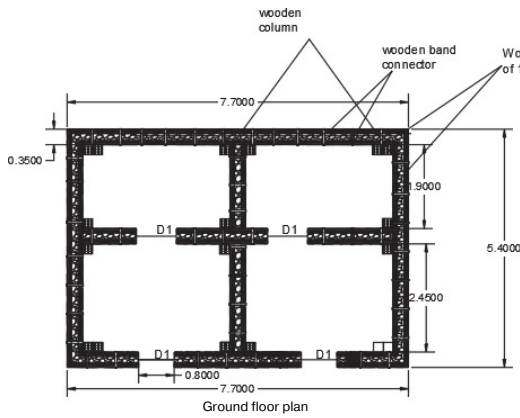


Figure 4. Ground floor plan of model house

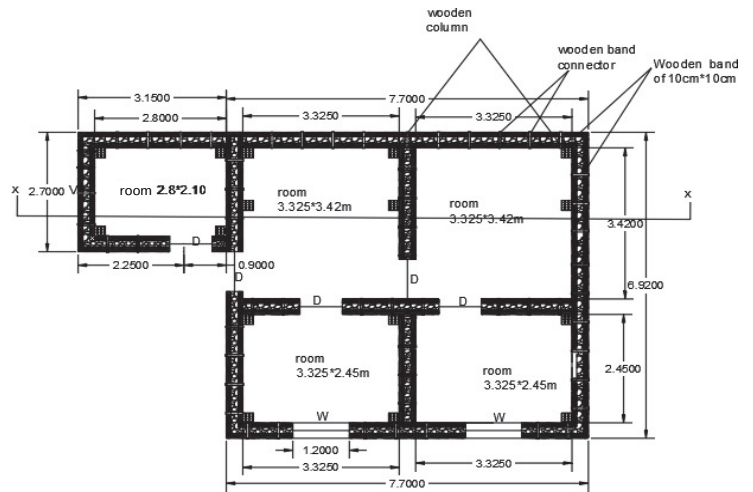


Figure 5. First floor plan of model house

### 3. Results and discussion

The link element is used to connect two joints together. Each link element may exhibit up to three different types of behaviour: linear, non-linear, and frequency-dependent, according to the types of properties as signed to that element and the type of analysis being perform [14].



Fundamental time period of different models

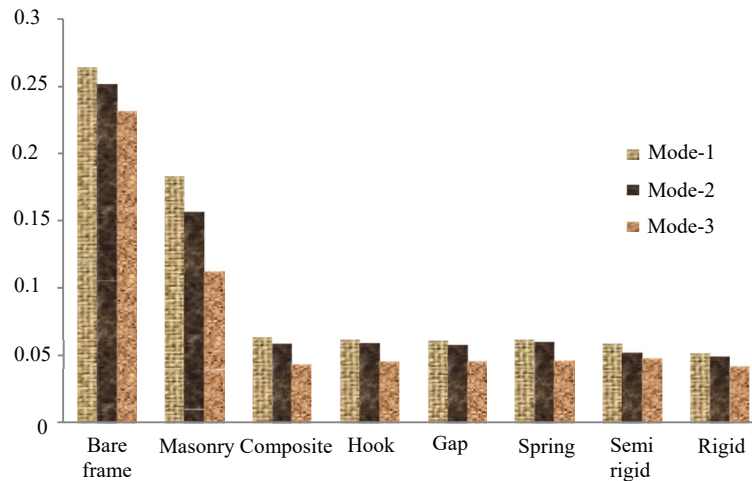


Figure 6. Comparison of period

Fundamental time period of hook, masonry, bare frame, composite, gap, spring and rigid models obtained as 0.0613, 0.183, 0.264, 0.063, 0.0603, 0.061 and 0.051second respectively (Figure 6). Maximum fundamental time period obtained is in care of bare frame and minimum in care of rigid. There is no significance difference in time period among hook, composite, gap and spring. It can be seen that influence of timber band is significant to increase global lateral stiffness of the building that caused de-



crease in fundamental time period in hook, composite, gap and spring. Band is not modeled inn care of bare frame and masonry care. Similarly rigid diaphragm also play significant role for enhance the stiffness of the building [15]. Base shear data presented at Tables 1–4 and Figures 7–9.

Table 1

Base shear calculation, manually					
Description of items	<i>L</i> , m	<i>B</i> , m	<i>t</i> , m	Unit weight, kN/m <sup>3</sup>	Weight, kN
Storey height, m, ground floor			1.5		
Thickness of mud, m			0.2		
Plank thickness			0.05		
Thickness of wall			0.35		
Size of joist		0.18	0.2		
Size of beam		0.2	0.225		
Size of post		0.225	0.225		
Total longitudinal length	7.7				
Total transverse length	6.92				
Unit weight of mud				15	
Unit weight of wood				8.5	
Unit weight of stone masonry				22	
Load calculation					
Mud load calculation					159.85
Self weight of plank					22.646
Weight of joist					21.175
Weight of beam					11.781
Weight of post					23.237
Weight of wall longitudinal					592.9
Weight of transverse wall					399.63
Seismic load due to live load					26.642
Total lumped mass at roof					1231.2
Total lumped mass					1257.9
Total weight, <i>w</i>					2789.1
Time period					0.15
Importance factor					1
Response reduction factor					1.5
<i>Sa/g</i>					2.5
<i>A<sub>h</sub></i>					0.0970
<i>V<sub>b</sub></i>					156.73

Table 2

Comparison of base shear		
Model designation	Base shear along X-direction, <i>V<sub>x</sub></i> , KN	Base shear along Y-direction, <i>V<sub>y</sub></i> , KN
Gap	158.81	171.12
Hook	153.38	159.90
Bare frame	31.28	25.10
Masonry	144.85	110.67
Composite	153.38	159.90
Spring	138.58	146.39
Semi rigid	155.22	162.39
Rigid	156.10	170.10

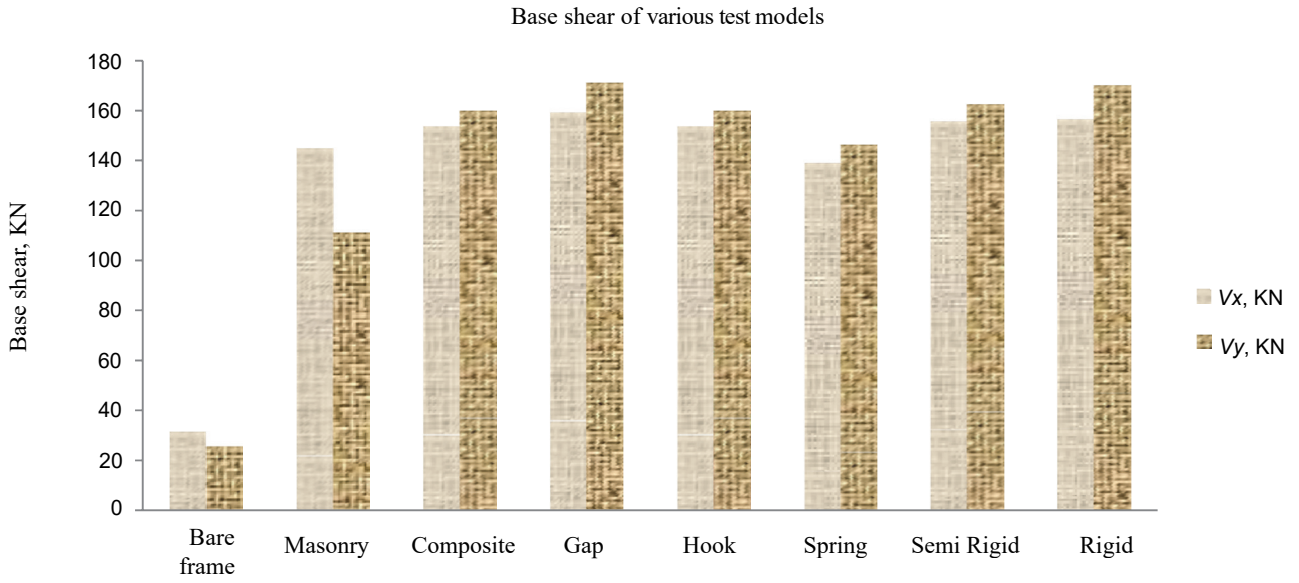


Figure 7. Base shear of various test models

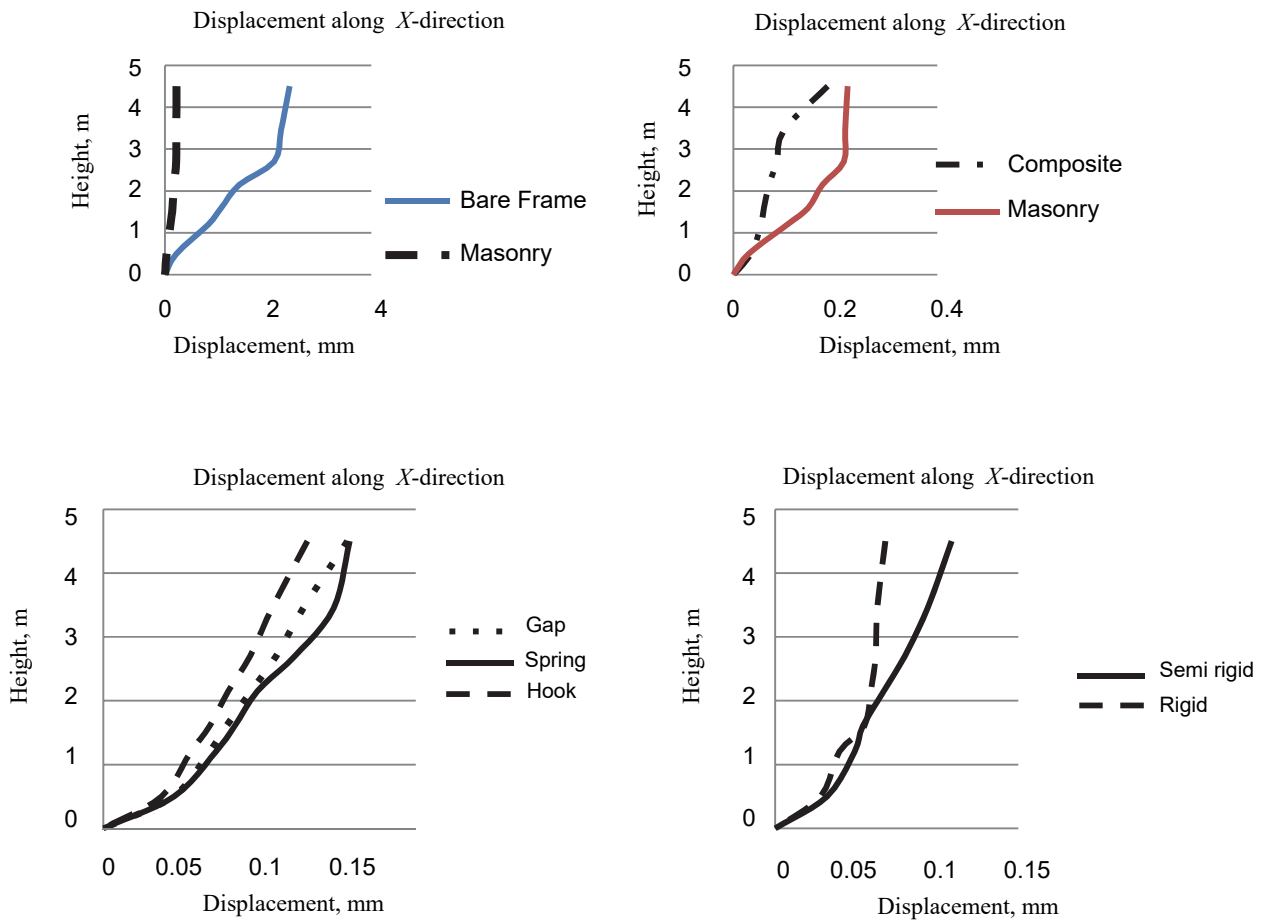


Figure 8. Displacement about X-axis of various modeled cases

Displacement about X-axis, mm

Joint	Height, m	Bare frame	Masonry	Composite	Hook	Gap	Spring	Semi rigid	Rigid
720	4.5	2.416	0.224	0.185	0.098	0.1172	0.1183	0.1089	0.068
754	3.45	2.251	0.219	0.099	0.081	0.096	0.1106	0.094	0.063
11	2.7	2.1166	0.2165	0.085	0.0705	0.083	0.092	0.08	0.062
13	2.15	1.4436	0.1748	0.070	0.06	0.071	0.074	0.067	0.059
146	1.6	1.092	0.1467	0.060	0.051	0.059	0.063	0.054	0.055
15	1.2	0.84	0.106	0.054	0.042	0.051	0.054	0.049	0.0395
145	0.5	0.22	0.0298	0.035	0.028	0.0336	0.034	0.032	0.028
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0

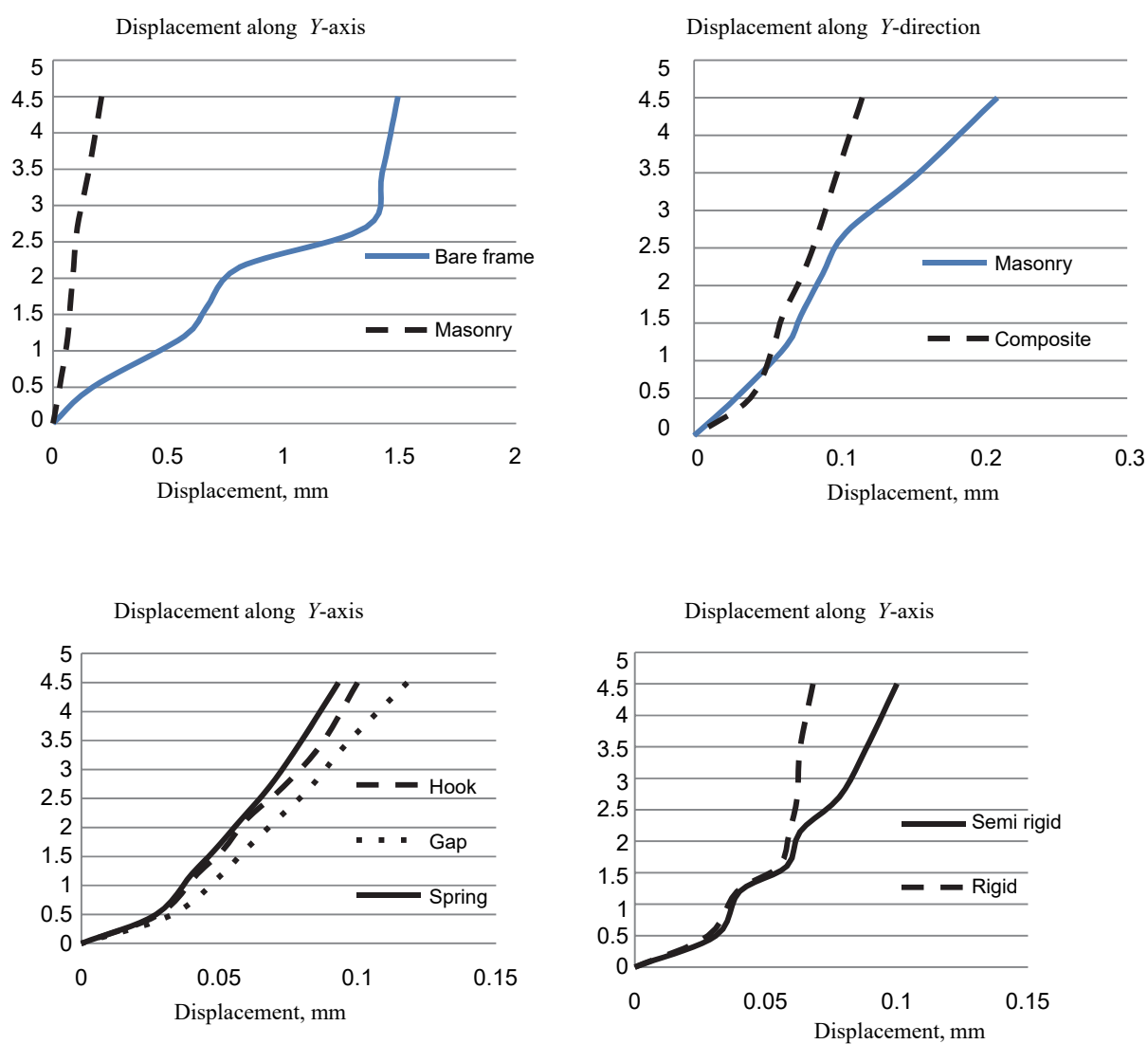


Figure 9. Displacement about Y-axis of various modeled cases

Table 4

Displacement about Y-axis, mm

Joint	Height, m	Bare frame	Masonry	Composite	Hook	Gap	Spring	Semi rigid	Rigid
720	4.5	1.49	0.21	0.116	0.1	0.117	0.096	0.1	0.059
754	3.45	1.422	0.153	0.098	0.08	0.096	0.079	0.088	0.063
11	2.7	1.352	0.105	0.086	0.07	0.083	0.068	0.078	0.062
13	2.15	0.805	0.089	0.075	0.06	0.071	0.058	0.063	0.059
146	1.6	0.664	0.074	0.061	0.05	0.059	0.048	0.058	0.055
15	1.2	0.567	0.064	0.055	0.04	0.051	0.04	0.04	0.039
145	0.5	0.171	0.029	0.039	0.03	0.033	0.027	0.031	0.028
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0

*Output of shell element internal stresses.* The basic shell element stresses are identified as S11, S22, S12, S13, and S23. You might expect that there would also be an S21, but S21 is always equal to S12, so it is not actually necessary to report S21.  $S_{ij}$  stresses (where  $i$  can be equal to 1 or 2 and  $j$  can be equal to 1, 2 or 3) are stresses that occur on face  $i$  of an element in direction  $j$ . Direction  $j$  refers to the local axis direction of the shell element. Thus S11 stresses occur on face 1 of the element (perpendicular to the local 1 axis) and are acting in the direction parallel to the local 1 axis (that is, the stresses act normal to face 1). As another example, S12 stresses occur on face 1 of the element (perpendicular to the local 1 axis) and are acting in the direction parallel to the local 2 axis (that is, the stresses act parallel to face 1, like shearing stresses). The Figure 10 shows examples of each of these basic types of shell stresses. Structural analysis program reports internal stresses for shell elements at the four corner points of the appropriate face of the element [15].

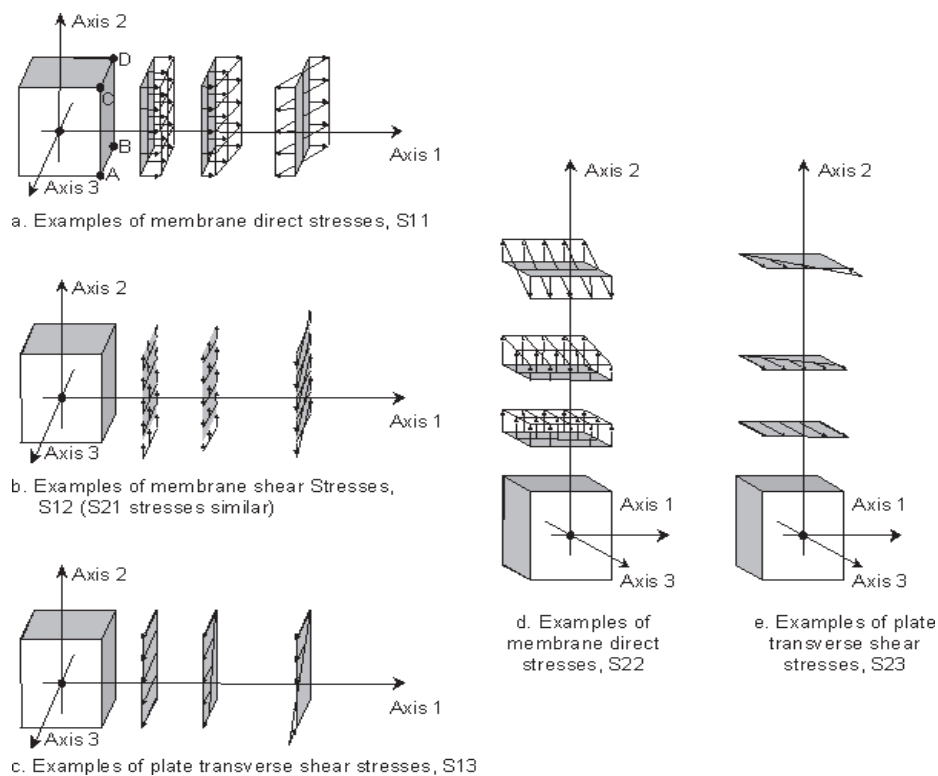


Figure 10. Stresses on thick shell elements

Table 5

## Stress at various members and links of building

S.N.	Stress	Bare	Masonry	Composite	Gap	Hook	Spring	Rigid, N/mm <sup>2</sup>	Frame
1	S11	T	24.19	20.347	6.531	6.594	6.581	6.58	6.134
		C	-22.81	-19.391	-4.866	-4.84	-4.36	-4.867	-5.82
2	S22	T	34.83	20.027	8.923	6.422	6.536	6.54	6.061
		C	-33.02	-19.531	-4.953	-3.81	-3.89	-3.896	-5.806
3	S12	T	0.78	5.275	0.855	0.754	0.762	0.762	0.584
		C	-0.623	-4.849	-0.922	-0.93	-0.93	-0.932	-0.579
4	S13	T	0.561	0.273	0.713	0.459	0.46	0.46	0.904
		C	-0.515	-0.512	-3.27	-2.01	-2.04	-2.047	-4.056
5	S23	T	0.683	0.285	1.206	0.86	0.876	0.876	1.406
		C	-0.507	-0.286	-0.806	-0.42	-0.42	-0.428	-1.042

Table 6

## Response of test model (natural time period, sec., and displacement, mm)

Description	Time period from model			Time period from IS 1893:2002	$\Delta x$	$-\Delta x$	$\Delta y$	$-\Delta y$
	Mode-1	Mode-2	Mode-3					
Bare frame	0.26	0.251	0.231	0.15	3.082	-3.082	1.815	-1.815
Masonry	0.18	0.15	0.11	0.15	0.392	-0.392	0.205	-0.205
Composite	0.063	0.058	0.043	0.15	0.142	-0.142	0.147	-0.147
Hook	0.061	0.058	0.045	0.15	0.151	-0.151	0.164	-0.164
Gap	0.0603	0.057	0.0449	0.15	0.155	0.155	0.182	-0.182
Spring	0.065	0.058	0.045	0.15	0.178	-0.178	0.193	-0.193
Semi rigid	0.055	0.052	0.043	0.15	0.10	-0.10	0.095	-0.095
Rigid	0.051	0.048	0.041	0.15	0.068	-0.068	0.0738	-0.0738

Table 7

Stress on first floor roof, N/mm<sup>2</sup>

Descriptions	Point 1 corner	Point 2 corner	Point 3 corner	Point 4 corner	Point 5 middle
Bare frame (S11)	0.85	1.12	0.80	1.02	-0.24
Bare frame (S22)	0.091	0.10	-0.13	-0.46	-0.58
Masonry (S11)	0.094	0.121	0.76	0.58	0.309
Masonry (S22)	-0.348	-0.1966	-0.275	-0.368	-0.51
Composite (S11)	-0.33	-0.061	0.105	0.172	0.3772
Composite (S22)	0.884	0.410	0.438	0.660	-0.678
Rigid (S11)	0.192	0.185	0.113	0.097	-0.39
Gap (S11)	0.364	0.757	0.132	0.227	0.098
Gap (S22)	0.382	0.309	-0.104	0.45	-0.350
Hook (S11)	0.362	0.626	0.136	0.220	0.331
Hook (S22)	0.055	-0.0094	-0.152	-0.182	-0.458
Spring (S11)	0.254	0.621	0.173	0.273	-0.028

Table 8

Stress on wall, N/mm<sup>2</sup>

Descriptions	Point 1 corner	Point 2 corner	Point 3 corner	Point 4 corner	Point 5 middle
Masonry (S11)	0.0281	0.034	0.031	0.030	-0.013
Masonry (S22)	-0.064	0.0203	0.155	-0.1269	0.10
Rigid (S11)	0.010	0.0115	-0.051	-0.0237	0.0055
Composite (S11)	0.0020	-0.0079	-0.0072	0.0017	0.0024
Composite (S22)	0.0051	0.0011	0.0050	0.0093	0.00288

Higher stress found in the connection of timbers, connector inters face and plank area this scenario show that timber members are must responsible for withstand all types of stress of house and increase the seismic performance of the buildings. Among all the model analysis the axial stress along X-axis S11 and S22 is found in masonry and bare frame model and in case of gap, hook, composite, rigid and spring model have less (Tables 5–8). It be clearly seen that model with wooden band and band connector having less amount of stress, i.e. wooden member responsible for to counteract out of plane failure and in plane failure.

#### 4. Conclusion

The modified structure having joint connecting elements such as gap, and spring perform better than the existing one but still lacks fulfilling the required purpose hence another modification is made reducing the size of opening and its placement is at center of wall and finally linked elements and connectors are introduced between timber elements in the model also enhanced the better response of the seismic performance and under seismic performance of the structure.

##### *Specific conclusions:*

- introduction of timber joist, beam and column in stone masonry house increase the base shear and reduces the time period and increase the stiffness of the structure. Finally, the response of structure against seismic force is improved by using connectors;

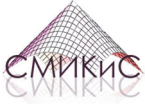
- although timber frames and bands enhance the structural performance under seismic excitation in plane and out of plane stresses, where as the major contributing element to withstand external load is stone masonry as load path shown;

- doors, windows, bands and band connector contribute in controlling the localized stress and create the box effect of the house globally and perform the good behaviors under the seismic forces.

From the result it can be conclude that there is different contribution in lateral stiffness of the building model of different connecting element.

#### References

1. Bothara J., Brzev S. *A Tutorial: Improving the Seismic Performance of Stone Masonry Buildings* (1<sup>st</sup> ed.). 2011, July. Publication Number WHE-2011-01.
2. Nepal National Building Code (NBC 205, 1994). *Mandatory rules of thumb reinforced concrete buildings without masonry infill*. HMG/Ministry of Housing and Physical Planning, Department of Building, Kathmandu, Nepal.
3. Varum H., Dumaru R., Furtado A.F. Seismic Performance of Buildings in Nepal after the Gorkha Earthquake. *Impacts and Insights of Gorkha Earthquake*. 2017;1(3). <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812808-4.00003-1>
4. Asteris P.G. On the Structural Analysis and Seismic Protection of Historical Masonry Structures. *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2008;(2):124–136.
5. Tena-Colunga A., Abrams D.P. *Response of an instrumented masonry shear wall building with flexible diaphragms during the Loma Prieta Earthquake*. Urbana, Ill: Dept. of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign; 1992.
6. Asteris P.G., Repapis C., Cavaleri L., Sarhosis V. On the fundamental period of infilled RC frame buildings. *Struct. Eng. Mech*. 2015;54:1175–1200. <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2015.54.6.1175>
7. Nepal National Building Code (NBC 204, 1997). *Un-reinforcement masonry structure*. HMG/Ministry of Housing and Physical Planning, Department of Building, Kathmandu, Nepal.
8. Ministry of Housing and Physical Planning. *A Management Plan for the Introduction of a National Building Code*. UNDP Project No. Nep.88.054-21.03. Kathmandu, Nepal; 1994.
9. National Planning Commission. *Nepal Earthquake 2015: Post-Disaster Needs Assessment. Volume A. Key Findings*. Kathmandu, Nepal; 2015.
10. Indian Standard Code IS 1597-1. *Construction of stone masonry*. New Delhi: Bureau of Indian Standards; 1992.
11. Nepal National Building Code (NBC 203, 2015). *Masonry building design*. HMG/Ministry of Housing and Physical Planning, Department of Building, Kathmandu, Nepal.
12. Gautam D., Rodrigues H. et al. Common structural and construction deficiencies of Nepalese buildings. *Innov. Infrastruct. Solut*. 2016;1:1. DOI 10.1007/s41062-016-0001-3.
13. Ahmad N., Crowley H., Pinho R., Ali, Q. Displacement-based earthquake loss assessment of masonry buildings in Mansehra City, Pakistan. *Journal of Earthquake Engineering*. 2010;14(1):1–14. DOI: 10.1080 / 13632461003651794.
14. Doudoumis I.N., Deligiannidou J., Kelesi A. Analytical modeling of masonry in filled timber truss work. *5<sup>th</sup> GRACM International Congress on Computational Mechanics*. 2005. Pp. 1–8.
15. Langenbach R. *Stone Masonry in Clay Mortar with Gabion Bands: A report submitted to the Nepal DUDBC*. Oakland: Conservantiontech Consulting; 2015. Available from: <http://www.traditional-is-modern.net/NEPAL/DUDBC/Conservantiontech-GabionBands.pdf> (accessed: 12.09.2020).



### **Уважаемые коллеги!**

Инженерная академия Российского университета дружбы народов приглашает вас принять участие в научных мероприятиях в 2021 году.

## **ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ «ИНЖЕНЕРНЫЕ СИСТЕМЫ – 2021»**

**Апрель 2021 года**

**Место проведения:** Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3,  
Департамент строительства, Инженерная академия РУДН.

## **ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ «ИНЖЕНЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ – 2021»**

**Октябрь 2021 года**

**Место проведения:** Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3,  
Департамент строительства, Инженерная академия РУДН.

### **ОФИЦИАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИЙ**

Русский, английский.

### **ПУБЛИКАЦИЯ МАТЕРИАЛОВ КОНФЕРЕНЦИЙ**

Статьи будут опубликованы в сборниках трудов конференций, индексируемых в БД РИНЦ, или в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science.

### **НАУЧНЫЕ СЕКЦИИ**

- Материаловедение, металлургия и нанотехнологии.
- Машиностроение, энергетика и транспорт.
- Авиационные и космические системы.
- Геология, горное и нефтегазовое дело.
- Гражданское, промышленное и гидротехническое строительство.
- Архитектура и промышленный дизайн.
- Инновационный менеджмент в промышленности.

## **КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ**

**Организатор конференций:** Российский университет дружбы народов (РУДН).

**Адрес страницы конференций на портале РУДН:** <http://engr.rudn.ru/?p=14247>

**Место проведения конференций:**

Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, Инженерная академия РУДН.

Заседание секции «Машиностроение, энергетика и транспорт» состоится по адресу:

Москва, Подольское ш., д. 8, корп. 5.

**Председатель Оргкомитета:**

Малькова Марианна Юрьевна, профессор департамента строительства Инженерной академии РУДН.

E-mail: [malkova-myu@rudn.ru](mailto:malkova-myu@rudn.ru)

## **МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФОРУМ ПО МЕХАНИКЕ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА, КОСМИЧЕСКИМ КОНСТРУКЦИЯМ И МАТЕРИАЛАМ (IAA/AAS SciTech Forum)**

**2–4 июня 2021 года**

**Место проведения:** Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6,

Инженерная академия РУДН.

**Организатор форума:** Российский университет дружбы народов (РУДН).

Тел.: +7 (495) 952-08-29, e-mail: [kupreev-sa@rudn.ru](mailto:kupreev-sa@rudn.ru)

## **ОФИЦИАЛЬНЫЙ ЯЗЫК**

Английский.

## **ПУБЛИКАЦИЯ МАТЕРИАЛОВ ФОРУМА**

Статьи будут опубликованы в сборнике трудов, индексируемом в БД Scopus и Web of Science.