

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2020 Том 16 № 5

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения, 05.23.02 – Основания и фундаменты, подземные сооружения, 05.23.17 – Строительная механика.

Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода).

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машино-строительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Акимов П.А., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Галишикова В.В., д-р техн. наук, доц., РУДН, Москва, Россия

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Азапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Баженов В.А., акад., Национальная академия педагогических наук, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина

Буй Суан Нам, доцент, Ханойский университет горного дела и геологии, Ханой, Вьетнам

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., Киевский политехнический университет, Киев, Украина

Заксенхофер Райханд Ф., профессор, Горный университет в Леобене, Австрия

Зверев Е.М., д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

Иванов С.П., д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

Красич Соня, кандидат технических наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Лисичкин С.Е., д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

Ляхович Л.С., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

Магуле Фредерик, профессор, Высшая инженерная школа «Централь Сюделек», Университет Париж-Сакли, Франция

Мандроне Джузеппе, доцент, Университет Турина, Италия

Обозов В.И., д-р техн. наук, проф., ЦНИИСК, Москва, Россия

Санжаровский Р.С., д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Якутов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П. Множества вилкок Фойгта – Рейсса и трезубцев Фойгта – Кристенсена – Рейсса 323

Марутян А.С. Двухавровые гнутозамкнутые профили с трубчатыми полками и расчет оптимальной компоновки их составных сечений 334

Курсанов М.Н. Аналитическая оценка частоты собственных колебаний фермы с произвольным числом панелей 351

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

Гуреева Н.А., Ключков Ю.В., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов 361

Азапов В.П., Маркович А.С. Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС 380

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Зверев Е.М. Современная трактовка принципа и полуобратного метода Сен-Венана 390

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Кузьмин Д.А., Кузьмичевский А.Ю., Верташенов М.В. Остаточная дефектность и вероятность существования дефектов с размером, превышающим допустимое значение 414

Chidighikaobi P.C. Improving the compressive strength of lightweight cylindrical concrete column with basalt fiber reinforced polymer acting under imposed load (Повышение прочности на сжатие цилиндрических колонн из легкого бетона под нагрузкой с помощью базальтопластика) 424

Редактор Ю.А. Заикина
Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова
Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 23.10.2020. Выход в свет 30.10.2020. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 13,48. Тираж 250 экз. Заказ № 1331. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов, 2020

© Бестаев С.Р., фото на обложке

(Рынок Фира-де-Белькайре, или «Старые прелести», Барселона, Испания), 2020

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2020 VOLUME 16 No. 5

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illuminates the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

P.A. Akimov, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

V.V. Galishnikova, DSc, RUDN University, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

I.A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

V.P. Agapov, DSc, Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

V.I. Andreev, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

V.A. Bazhenov, Member of the National Academy of Educational Science of Ukraine, DSc, Professor, Kiev National University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine

Xuan Nam Bui, PhD, Assoc. Professor, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi, Vietnam

S.P. Ivanov, DSc, Professor, Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia

N.I. Karpenko, Member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

V.I. Kolchunov, Member of the RAACS, DSc, Professor, South-West State University, Kursk, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

S.E. Lisichkin, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

L.S. Lyakhovich, Member of the RAACS, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France

Giuseppe Mandrone, PhD, Ass. Prof. in Engineering Geology, University of Torino, Italy

V.I. Obozov, DSc, Professor, Central Research Institute of Building Structures (TzNIISK im. V.V. Kucherenko), Moscow, Russia

Reinhard F. Sachsenhofer, PhD, Professor, Montanuniversität Leoben, Austria

R.S. Sanjarovskiy, DSc, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

V.I. Travush, Member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

V.V. Vanin, DSc, Professor, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine

N.M. Yakupov, Corresponding Member of Russian Engineering Academy, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

E.M. Zveryaev, DSc, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia

CONTENTS

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P. Multitudes of Voigt – Reuss forks and Voigt – Christensen – Reuss tridents 323

Marutyan A.S. I-shaped bent closed profiles with tubular shelves and calculation of the optimal layout of their composite sections 334

Kirsanov M.N. Analytical assessment of the frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels 351

NUMERICAL METHODS OF STRUCTURES' ANALYSIS

Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Stress-strain state of shell of revolution analysis by using various formulations of three-dimensional finite elements 361

Agapov V.P., Markovich A.S. Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program 380

THEORY OF ELASTICITY

Zveryaev E.M. Modern interpretation of Saint-Venant's principle and semi-inverse method 390

EXPERIMENTAL RESEARCHES

Kuzmin D.A., Kuzmichevsky A.Yu., Vertashenok M.V. Investigation of the probability of existence of defects with a size exceeding the allowed value 414

Chiadighikaobi P.C. Improving the compressive strength of light-weight cylindrical concrete column with basalt fiber reinforced polymer acting under imposed load 424

Copy Editor Iu.A. Zaikina

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer Iu.A. Zaikina

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia, 2020
© Bestaev S.R., photo on the cover of the journal
(Mercat Fira de Bellesguard, or Encants Vells, Barcelona, Spain), 2020

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURESDOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-323-333
УДК 691.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

Множества вилок Фойгта – Рейсса и трехзубцев Фойгта – Кристенсена – Рейсса

В.Т. Ерофеев*, А.С. Тюряхин, Т.П. Тюряхина

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, Российская Федерация, 430005, Саранск, ул. Большевикская, 68

*tingaev.sl@gmail.com

История статьи

Поступила в редакцию: 3 августа 2020 г.

Доработана: 29 сентября 2020 г.

Принята к публикации: 2 октября 2020 г.

Аннотация

В литературе приводится множество исследований представительного объема композитного материала, в частности рассчитываемых по формулам Кристенсена, Фойгта и Рейсса. Цель работы состоит в исследовании особенностей оценки множества вилок эффективных модулей. Методы. На базе решения задачи Ламе (для толстостенной сферы) компоновалась сферическая модель представительного объема (ячейки) композиционного материала с зернистым (сферическим) наполнителем и определялась величина эффективного модуля упругости двухфазного композита. Исследование полученной формулы эффективного модуля, выраженной в безразмерных величинах, для материала ячейки выявило ее идентичность с формулой Р.М. Кристенсена, выраженной в размерных величинах, для объемного модуля композитов со сферическим включением. При этом решение Кристенсена ранее было получено иным методом при рассмотрении им полидисперсной модели композита. Безразмерная форма функции (эффективного модуля) трех безразмерных параметров позволила в плоских пространствах (двух координатных плоскостей) построить графические образы функции названных модулей по Кристенсену, которые сопоставляются и совмещаются в одном рисунке с аналогичными образами функций оценок значений модулей (реальных композитов) по Фойгту и Рейссу. Графические исследования (применительно к сферической модели представительного объема) показывают, что в плоском пространстве множества вилок Фойгта – Рейсса имеет место не сужение этих вилок, а их частичное заполнение плоским пространством множества вилок Кристенсена – Рейсса. При этом графики функций модулей одновременно с множествами двухзубцев вилок образуют множества трехзубцев вилок (трехзубцев) Фойгта – Кристенсена – Рейсса, которые в зависимости от величины интервалов чисел исследуемых параметров имеют вилки разной величины. Результаты. Получены графические иллюстрации численных примеров, демонстрирующие, что при заданных величинах модулей матрицы и наполнителя и объемной доли последнего можно определять эффективные объемные модули и модули сдвига двухфазных композитов, проводить сопоставление с выводами прикладного плана. Безразмерная форма полученных выражений позволяет решать обратные задачи механики полидисперсных композитов, например определять объемные модули компонентов композита по эффективным модулям, полученным механическими испытаниями стандартных образцов.

Ключевые слова: сферическая модель представительного объема материала, задача Ламе для толстостенной сферы, эффективные модули двухфазных композитов, вилка Фойгта – Рейсса, вилка Кристенсена – Рейсса

Благодарности

Публикуется при поддержке гранта РФФИ РМ № 18-48-130013 «Комплексное исследование физико-химических процессов в композиционных материалах на основе эпоксидных смол и других синтетических полимеров, перспективных для применения в строительстве».

Для цитирования

Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П. Множества вилок Фойгта – Рейсса и трехзубцев Фойгта – Кристенсена – Рейсса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 323–333. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-323-333>

Ерофеев Владимир Трофимович, доктор технических наук, профессор, декан архитектурно-строительного факультета, заведующий кафедрой строительных материалов и технологий, академик РААСН; Scopus Author ID: 57080123300, eLIBRARY SPIN-код: 4425-5045.

Тюряхин Алексей Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики архитектурно-строительного факультета; eLIBRARY AuthorID: 6072.

Тюряхина Татьяна Павловна, аспирант кафедры строительных материалов и технологии архитектурно-строительного факультета.

© Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., 2020

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Multitudes of Voigt – Reuss forks and Voigt – Christensen – Reuss tridents

Vladimir T. Erofeev*, Aleksey S. Tyuryakhin, Tatyana P. Tyuryakhina

National Research Ogarev Mordovia State University (National Research University), 68 Bolshevistskaya St, Saransk, 430005, Russian Federation
*tingaev.s1@gmail.com

Article history

Received: August 3, 2020

Revised: September 29, 2020

Accepted: October 2, 2020

Acknowledgements

Published with the support of the RFBR RM grant No. 18-48-130013 “Comprehensive study of physical and chemical processes in composite materials based on epoxy resins and other synthetic polymers promising for use in construction.”

For citation

Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P. Multitudes of Voigt – Reuss forks and Voigt – Christensen – Reuss tridents. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5): 323–333. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-323-333>

Abstract

In the literature, there are many studies of the representative volume of a composite material, in particular, those calculated using the formulas of Christensen, Voigt and Reiss. *The aim of this work* is to study the features of evaluating the set of forks of effective modules. *Methods*. On the basis of solving the Lamé problem (for a thick-walled sphere), a spherical model of a representative volume (cell) of a composite material with a granular (spherical) filler is compiled and the value of the effective modulus of elasticity of a two-phase composite is determined. The study of the obtained formula for the effective modulus, expressed in dimensionless quantities, for the cell material revealed its identity with the R.M. Christensen’s formula, expressed in dimensional values, for the bulk modulus of composites with a spherical filler. In this case, Christensen’s solution was previously obtained by a different method when he considered the polydisperse model of the composite. The dimensionless form of the function (effective module) of three dimensionless parameters made it possible in flat spaces (two coordinate planes) to construct graphical images of the function of the named modules according to Christensen, which are compared and combined in one figure with similar images of the functions of estimating the values of the modules (real composites) according to Voigt and Reiss. Graphical studies in relation to the spherical representative volume model show that in the flat space of the set of Voigt – Reuss forks, these forks are not “narrowed”, but they are partially filled by the flat space of the set of Christensen – Reiss forks. The graphs of the functions of the modules, at the same time, form, simultaneously with the sets of two-toothed forks, a set of Voigt – Christensen – Reiss trident forks (tridents), which, depending on the size of the intervals of the numbers of the studied parameters, have “forks” of different sizes. *Results*. Graphic illustrations of numerical examples have been obtained showing that for given values of the module of the matrix and filler and the volume fraction of the latter, it is possible to determine the effective volumetric module and shear module of two-phase composites, and to perform a comparison with the conclusions of the applied plan. The dimensionless form of the obtained expressions makes it possible to solve the inverse problems of the mechanics of polydisperse composites, for example, to determine the volume module of the composite components by the effective modulus obtained by mechanical testing of standard samples.

Keywords: spherical model of a representative volume of material, Lamé’s problem for a thick-walled sphere, effective module of two-phase composites, Voigt – Reiss fork, Christensen – Reiss fork

1. Введение

Полимерные композиционные материалы вытесняют многие традиционно металлические, керамические и другие материалы в различных областях техники [1–4]. В этой связи теоретические исследования, направленные на установление и предсказание физико-механических свойств композитов через свойства их компонентов и их геометрических характеристик, являются актуальными, так как позволяют значительно снизить проведение дорогостоящих экспериментальных работ.

Теоретическая модель структуры бетонов и других композиционных материалов с заполнителями сферической формы наиболее проста для построения математического алгоритма проектных расчетов. Поэтому в практических исследованиях композиционных материалов широко используется решение задачи Ламе для толстостенной сферы. Кроме того, многими специалистами задачи по исследованию толстостенных сфер решались с помощью других моделей: аналитических, численных и конечно-элементных. При этом использовались решения моделей композиционных материалов, охватывающие различные стадии работы материала: упруго-пластическую [5], вязко-пластическую [6], ползучести [7; 8]. Рассматри-

Vladimir T. Erofeev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Architecture and Civil Engineering, Head of the Department of Building Materials and Technologies, Academician of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Scopus Author ID: 57080123300, eLIBRARY SPIN-code: 4425-5045.

Aleksey S. Tyuryakhin, Doctor of Engineering, Associate Professor of the Department of Applied Mechanics of the Faculty of Architecture and Civil Engineering; eLIBRARY Author ID: 6072.

Tatyana P. Tyuryakhina, graduate student of the Department of Building Materials and Technologies of the Faculty of Architecture and Civil Engineering.

вались также задачи с применением материалов с различными прочностными и упруго-пластическими свойствами, в том числе упругопластических [5; 9–11], вязкопластических [6], функционально-градиентных [12] и подверженные воздействию силовых и не силовых нагрузок: осесимметричных [13], объемных сил [13], внешнего и внутреннего давления [10], гидростатического давления [14], коррозионно-активных сред [5], циклически действующих температур [9], электромагнитных и термомеханических нагрузок [15]. Тем не менее существует обширная область задач, в которых для их решения достаточно методов линейной теории деформирования. Для исследования таких задач мы будем использовать упомянутое решение задачи Ламе для толстостенной сферы.

В публикациях также встречается много исследований моделей представительного объема композиционного материала с применением общетеоретических и вариационных принципов оценки эффективных модулей и, в частности, рассчитываемых по формулам Кристенсена, Фойгта и Рейса. Сложилось даже определенные стереотипы оценки множеств вилок Фойгта – Рейса, Хашина – Штрикмана, Кристенсена – Рейса [3; 16–18]. Изучению особенностей некоторых из них будет уделено особое внимание, так как в известных работах подобные исследования не приводились.

2. Методы

Рассмотрению подлежит двухфазная модель представительного объема композита, имеющая вид сферической оболочки радиусом R , в которую включен шарообразный наполнитель радиусом a (рис. 1).

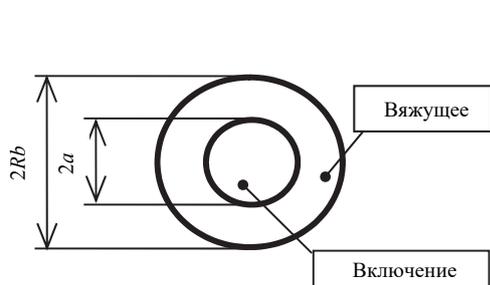


Рис. 1. Диаметральное сечение сферической ячейки композита
[Figure 1. Diametrical section of the spherical cell of the composite]

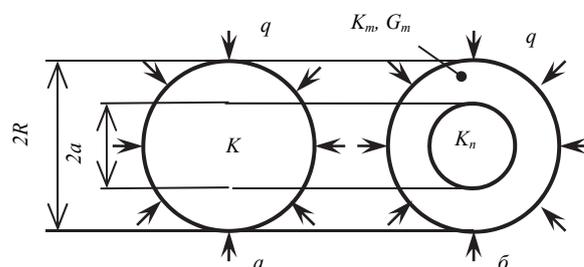


Рис. 2. Расчетные схемы ячейки:
 a – эффективная; b – структурная
[Figure 2. Design schemes of the cell:
 a – effective; b – structural]

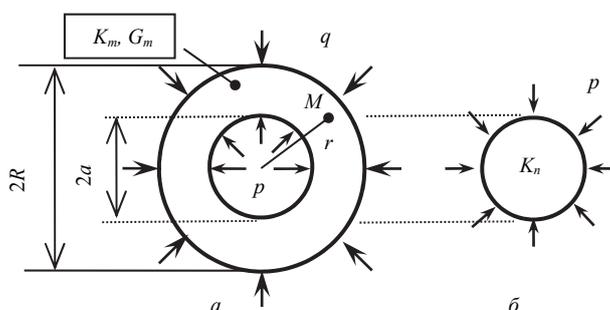


Рис. 3. Расчетные схемы компонентов ячейки:
 a – матрицы; b – включения
[Figure 3. Design diagrams of cell components:
 a – matrices; b – inclusions]

Под действием всестороннего давления q модель сферической ячейки испытывает деформацию центрального сжатия, которая вызывает (в точках раздела фаз) контактное давление p (взаимодействия двух фаз модели). Для постановки первоочередных задач рассмотрим возможные расчетные схемы модели ячейки при действии на нее давления q (рис. 2 и 3). Сначала выделим две расчетные схемы: эффективную и структурную (рис. 2).

Расчетная схема *эффективной* модели – это внешний взгляд на модель ячейки, представленной сплошным однородным изотропным упругим телом, имеющим форму шара (рис. 2, a). Шар, сжимаемый давлением q , является статически определимой системой. Из условия равновесия шара следует, что во всех его точках возникают равные напряжения σ и деформации ϵ :

$$\sigma = -q = \text{const}, \quad \varepsilon = -\frac{q}{3K} = -\frac{q}{e} = \text{const}, \quad (1)$$

где K – эффективный объемный модуль упругости композита; e – шаровой модуль объемного сжатия материала шара ($e = 3K$).

Расчетная схема *структурной* модели – это взгляд на модель изнутри (рис. 2, б). Здесь модель представлена твердым телом неоднородной структуры. Такая модель является системой статически неопределимой. Чтобы раскрыть ее неопределимость, расчленим структурную модель и представим ее совокупностью двух статически определимых расчетных схем (рис. 3).

Расчетная схема включения, аналогичная схеме эффективной модели (рис. 2, а), представлена однородным шаром (рис. 3, б). Шар находится в условиях гидростатического сжатия давлением p . Напряжения σ_n и деформации ε_n во всех точках шарового включения (наполнителя) вычисляются по формулам

$$\sigma_n = -p = \text{const}, \quad \varepsilon_n = -\frac{p}{3K_n} = -\frac{p}{e_n} = \text{const}, \quad (2)$$

где K_n, e_n – модули объемной и шаровой упругости материала шара.

Расчетная схема *матрицы* представлена *толстостенной сферой* (ТС), подверженной действию давлений q и p на ее поверхностях (рис. 3, а). Напряжения и деформации ТС, согласно решению задачи Ламе [19–21], выразим формулами, приведенными в таблице.

Таблица

Формулы решения задачи Ламе для ТС
[Table. Formulas for solving the Lamé problem for TC]

Параметры [Parameters]	Радиальные [Radial]	Тангенциальные [Tangential]
Напряжений [Stresses]	$\sigma_r = -\frac{q-pw}{V} - \frac{p-q}{V} \cdot \frac{w}{\rho^3}$	$\sigma_t = -\frac{q-pw}{V} + \frac{p-q}{2V} \cdot \frac{w}{\rho^3}$
Деформаций [Deformations]	$\varepsilon_r = -\frac{q-pw}{e \cdot V} - \frac{p-q}{g \cdot V} \cdot \frac{w}{\rho^3}$	$\varepsilon_t = -\frac{q-pw}{e \cdot V} + \frac{p-q}{2g \cdot V} \cdot \frac{w}{\rho^3}$

Примечание: r – радиальная координата точки M ; ρ – безразмерная координата точки ($\rho = r/R$); w – объемная доля наполнителя ($w = a^3/R^3$); V – объемная доля матрицы ($V = 1 - w$).

[Note: r – radial point coordinate M ; ρ – dimensionless point coordinate ($\rho = r/R$); w – volume fraction of filler ($w = a^3/R^3$); V – volume fraction of the matrix ($V = 1 - w$).]

В формулах деформаций (см. таблицу) упругие параметры e_m и g_m материала матрицы вычисляются по формулам

$$e_m = \frac{E_m}{1-2\nu_m} = 3K_m, \quad g_m = \frac{E_m}{1+\nu_m} = 2G_m, \quad (3)$$

где E_m – модуль Юнга; G_m – модуль сдвига; ν_m – коэффициент Пуассона материала; K_m – объемный модуль упругости; e_m и g_m – модули шаровой и девиаторной деформаций соответственно.

Первоочередные задачи исследования заключаются в том, чтобы, во-первых, раскрыть статическую неопределимость структурной модели (рис. 2, б) и определить величину контактного давления p , во-вторых, записать условие эквивалентности расчетных схем эффективной и структурной моделей (рис. 2) и, удовлетворяя это условие, определить величину эффективного объемного модуля K композита.

3. Результаты и их обсуждение

3.1. Контактное давление структурной модели

Запишем условие сплошности структурной модели (рис. 2, б) в виде равенства радиальных перемещений матрицы u_m (рис. 3, а) и наполнителя u_n (рис. 3, б) в точках ($r = a$) их смежной границы:

$$u_m|_{r=a} = u_n|_{r=a}. \quad (4)$$

А так как $u_m|_{r=a} = a\varepsilon_{im}|_{r=a}$ и $u_n|_{r=a} = a\varepsilon_n$, то условие (4) будет идентично условию равенства тангенциальных деформаций в тех же точках:

$$\varepsilon_{im}|_{r=a} = \varepsilon_n. \quad (5)$$

Формула деформаций ε_{im} матрицы в точках M имеет вид (см. таблицу)

$$\varepsilon_{im} = -\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V} \cdot \frac{w}{\rho^3}. \quad (6)$$

Отсюда найдем деформации в точках с координатой $r = a$:

$$\varepsilon_{im}|_{r=a} = -\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V}. \quad (7)$$

И, выполнив подстановки деформаций, согласно формулам (7) и (2), в условие (5), получим равенство

$$-\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V} = -\frac{p}{e_n}. \quad (8)$$

Введем в рассмотрение три безразмерных (относительных) параметра:

$$\psi = \frac{p}{q}, \quad \eta = \frac{g_m}{e_m} = \frac{2G_m}{3K_m}, \quad \zeta = \frac{e_n}{e_m} = \frac{K_n}{K_m}. \quad (9)$$

Затем с учетом (9) выполним преобразования равенства (8), в результате чего найдем выражение для величины контактного давления:

$$p = q \cdot \psi, \quad \text{где } \psi = \frac{\zeta \cdot (1 + 2\eta)}{\zeta \cdot (1 + 2\eta w) + 2\eta V}. \quad (10)$$

В этой формуле величина давления p определяется величиной внешнего давления q и значением функции $\psi(\eta, \zeta, w)$ трех параметров, значения которых, в свою очередь, характеризуются интервалами чисел:

$$0 < \eta < 1, \quad 0 < \zeta < \infty \quad \text{и} \quad 0 < w < 1.$$

Тем самым, задавая величины давления q и трех параметров, сначала по формуле (10) вычисляется давление p . Напряжения и деформации в точках матрицы (рис. 3, а) рассчитываются по формулам таблицы, а в материале включения (рис. 3, б) – по формулам (2).

3.2. Эффективный объемный модуль композита

Для выявления величины эффективного модуля K двухфазной модели (рис. 1) сопоставим деформации этой модели в двух ее состояниях, соответствующих расчетным схемам эффективной и структурной моделей (рис. 2). Условие эквивалентности двух состояний запишем в виде равенства радиальных перемещений точек наружных поверхностей ($r = R$) эффективной и структурной схем модели:

$$u|_{r=R} = u_m|_{r=R}. \quad (11)$$

Перемещения левой части равенства (11) определяются согласно (1):

$$u|_{r=R} = R\varepsilon = -R \frac{q}{3K} = -R \frac{q}{e}. \quad (12)$$

Для правой части равенства (11) сначала по формуле (6) найдем деформации матрицы (рис. 3, а) в точках с координатами $r = R$ (то есть $\rho = 1$):

$$\varepsilon_{im}|_{r=R} = -\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V} \cdot w. \quad (13)$$

С учетом (12) и (13), удовлетворяя условию (11), получаем выражение

$$-\frac{q}{e} = -\frac{q-pw}{e_m \cdot V} + \frac{p-q}{2g_m \cdot V} \cdot w. \quad (14)$$

С учетом (9) преобразуем (14) и после упрощений получим уравнение

$$\frac{1}{k} = \frac{\zeta + 2\eta - w(\zeta - 1)}{\zeta \cdot (1 + 2\eta w) + 2\eta V},$$

из которого следует окончательный вид формулы для вычисления величины эффективного объемного модуля K , выраженного в долях от величины модуля K_m материала матрицы:

$$k(\eta, \zeta, w) = \frac{K}{K_m} = \frac{\zeta \cdot (1 + 2\eta w) + 2\eta V}{\zeta V + (2\eta + w)}. \quad (15)$$

Вместо параметра ζ можно использовать обратный параметр $\theta = 1/\zeta$. В таком случае формула (15) примет вид

$$k(\eta, \theta, w) = \frac{(1 + 2\eta w) + 2\eta \theta V}{V + \theta(2\eta + w)}. \quad (16)$$

В работах [22–24] показано, что формула (16) идентична формуле Кристенсена [3. С. 54], которая в наших обозначениях имеет вид

$$K = K_m + \frac{w(K_n - K_m)}{1 + \frac{V(K_n - K_m)}{K_m + \frac{4}{3}G_m}}. \quad (17)$$

По формуле (17) вычисляются объемные модули K полидисперсных композитов со сферическими включениями.

В работах [22; 23] исследованы частные случаи применения формулы (16) и систематизированы семейства подмножеств возможных эффективных модулей $k = K/K_m$. В работе [24] выявлена взаимосвязь решения Кристенсена с оценками вилки Фойгта – Рейсса [17; 18]. Однако этими работами [3; 22–24] исследования формул (15) – (17) не исчерпываются, и требуется их развитие. В таком случае формулы (15) и (16) можно считать двумя модификациями формулы (17).

3.3. Оценки эффективных модулей по Кристенсену, Фойгту и Рейссу

Из формулы (9) выделим два частных случая, которые дают наибольшие и наименьшие значения величины модуля $k(\eta, \zeta, w)$, обратив внимание при этом на параметр

$$\eta = \frac{2G_m}{3K_m} = \frac{1 - 2\nu_m}{1 + \nu_m}.$$

Значения η однозначно связаны с величиной коэффициента Пуассона материала матрицы. Величине $\nu_m = 0$, например, соответствует значение $\eta = 1$, а величине $\nu_m = 0,5$ – значение $\eta = 0$. Этим двум случаям соответствуют, согласно формуле (15), две оценки (по Кристенсену):

1) максимальных значений эффективного модуля (при $\eta = 1$):

$$k^* = k(\zeta, w)_{\max} = \frac{\zeta \cdot (1 + 2w) + 2V}{\zeta V + (2 + w)}; \quad (18)$$

2) минимальных значений модуля (при $\eta = 0$):

$$k^{**} = k(\zeta, w)_{\min} = \frac{\zeta}{\zeta V + w}. \quad (19)$$

В таком случае, по Кристенсену, эффективные модули реальных композитов, соответствующих интервалу параметра η , ограничены величинами их предельных значений, определяемых выражениями (18) и (19).

Теперь обратимся к оценкам по Фойгту [17] и Рейссу [18] для эффективных модулей двухфазных материалов. Формулы этих оценок (в наших обозначениях) примут вид:

– на верхней границе значений – по Фойгту

$$K_F = (1-w)K_m + wK_n; \quad (20)$$

– на нижней границе – по Рейссу

$$K_R = \frac{1}{\frac{1-w}{K_m} + \frac{w}{K_n}}. \quad (21)$$

Смысл термина «вилка Фойгта – Рейсса» (кратко «вилка Ф–Р») заключается в том, что при всех значениях параметров K_m , K_n и w эффективные модули K реальных композитов определяются интервалом значений $K_R < K < K_F$. Все просто и понятно до очевидности. Тем не менее имеющиеся публикации, например [25], о так называемом *сужении* вилки Ф–Р свидетельствуют, что в этой вилке не все так однозначно и очевидно, как это кажется на первый взгляд. Чтобы выявить причину неоднозначности, преобразуем и представим оценки (20) и (21) в форме, более удобной для их графического исследования. С этой целью поделим левые и правые части формул (20) и (21) на величину модуля K_m . В результате получим безразмерную форму оценок:

– значений реальных модулей по Фойгту:

$$k_F = V + \zeta w; \quad (22)$$

– оценок по Рейссу:

$$k_R = \frac{\zeta}{\zeta V + w}. \quad (23)$$

Правые части выражений (19) и (23) тождественны друг другу. Это значит, что нижняя оценка k^{**} по Кристенсену точно совпала с оценкой k_R по Рейссу. Различие их в том, что оценка k_R (23) служит нижней границей значений эффективных модулей для всех возможных двухфазных композитов, а оценка k^{**} (19) – только для полидисперсных композитов со сферической моделью представительной ячейки (рис. 1).

Но верхняя оценка по Кристенсену (18) не совпала с оценкой по Фойгту (22) и удовлетворяет условию $k_R < k^* < k_F$. Таким образом, применительно к сферической модели ячейки, можно сказать, что двузубая вилка Ф–Р становится трезубой вилкой Фойгта – Кристенсена – Рейсса, или трезубцем Ф–К–Р. Следовательно, речь идет не о *сужении* вилки Ф–Р – это, вероятно, неудачный термин, так как «вилка – есть вилка». Она, в зависимости от значений ζ и w , имеет разные размеры, которые сохраняются неизменными, согласно их определениям (22) и (23).

3.4. Плоские фигуры множеств вилок Ф–Р и трезубцев Ф–К–Р

Формируя графический образ вышеназванных вилок и трезубцев, введем декартову прямоугольную систему координат $Ow\zeta k$ и в ее пространстве выделим область, ограниченную координатными плоскостями $Ow\zeta$, Owk , $O\zeta k$ и плоскостью $w = 1$, параллельной плоскости $O\zeta k$ (рис. 4).

Образы функций (15), (22) и (23) будем строить в плоскостях исследуемой области пространства $Ow\zeta k$, параллельных координатным плоскостям Owk и $O\zeta k$. Таких плоских «пространств» в исследуемой области бесчисленное множество. Рассмотрим четыре характерных примера численного исследования названных функций с построением их графиков.

Пример 1. В плоском пространстве $O\zeta k$ (с абсциссой $w = 0,25$) построим графики функций $k^*(\zeta)$, $k_F(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ в заданном множестве чисел интервала $0 < \zeta \leq 1$.

Результаты вычисления функций по формулам (18), (22) и (23) представим фигурой трех графиков (рис. 5).

На рис. 5 три графика имеют общую точку ($\zeta = 1, k = 1$). Верхний и нижний графики дают образ фигуры множества вилок Ф–Р. Фигура имеет вид множества двузубых вилок с общим основанием в названной

точке. Например, в случае $\zeta = 0$ вилка Ф–Р характеризуется длиной – величиной проекции графиков на ось ζ ($L_0 = 1$). Ее раскрытие (при $\zeta = 0$) характеризуется разностью аппликат $\Delta k_{\zeta=0} = 0,75 - 0 = 0,75$ (рис. 5). В другом случае ($\zeta = 1/4$, например) длина вилки и ее раскрытие будут иными: $L_{\zeta=1/4} = 1 - 0,25 = 0,75$ и $\Delta k_{\zeta=1/4} = 0,813 - 0,571 = 0,242$ и т. д. Следовательно, верхним и нижним графиками представлено бесконечное множество вилок Ф–Р, наложенных в одном створе одна на другую (в координатной плоскости $O\zeta k$).

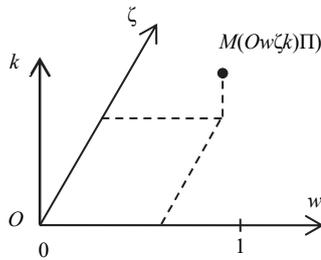


Рис. 4. Область пространства эффективных модулей

в декартовой системе координатных осей с началом в точке O : координаты точек M исследуемой области определяются абсциссами оси w в интервале $0 < w < 1$, ординатами оси ζ на интервале $0 < \zeta < \infty$, аппликатами осей k для функций $k^*(w, \zeta)$, $k^{**}(w, \zeta)$, $k_F(w, \zeta)$ и $k_R(w, \zeta)$ в интервале аппликат $0 < k < \infty$.

[Figure 4. The area of space of effective modules in the Cartesian system of coordinate axes with the origin at point O : the coordinates of points M of the investigated area are determined by abscissas of the w axis in the interval $0 < w < 1$, the ordinates of the ζ axis in the interval $0 < \zeta < \infty$, applicates of the k -axes for the functions $k^*(w, \zeta)$, $k^{**}(w, \zeta)$, $k_F(w, \zeta)$ and $k_R(w, \zeta)$ in the interval $0 < k < \infty$]

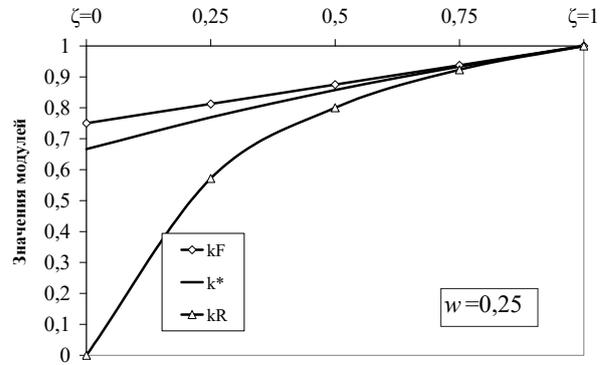


Рис. 5. Фигуры множества трезубцев Ф–К–Р, представленные плоскими графиками функций $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ в интервале чисел $0 < \zeta \leq 1$ при значениях $w = 0,25$
[Figure 5. Figures of the set of F–K–R tridents represented by flat graphs of the functions $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ and $k_R(\zeta)$ in the range of numbers $0 < \zeta \leq 1$ at values of $w = 0.25$]

Средний и нижний графики (функций k^* и k_R) образуют другую фигуру – графический образ множества вилок Кристенсена – Рейсса (вилка К–Р).

График функции $k^*(\zeta)$ делит пространство множества вилок Ф–Р на две части. Нижняя часть, определяемая интервалом значений $k^{**} < k(\eta, \zeta, w) < k^*$, образует пространство множества вилок К–Р. Верхняя часть множества вилок Ф–Р остается неопределенной, так как выходит за рамки решения, даваемого формулами (9) – (11). Совмещение фигур двух множеств, вилок Ф–Р и вилок К–Р, в одном рисунке демонстрирует наглядный образ множества трезубцев Ф–К–Р.

Пример 2. В другом плоском пространстве $O\zeta k$ (с абсциссой $w = 0,5$) сохраним условия примера 1.

Решение также представим графиками трех функций в пространстве $k - \zeta$ (рис. 6).

Здесь, в отличие от рис. 5, имеем иные размеры множества трезубцев Ф–К–Р, включающих в себя пространства вилок Ф–Р и вилок К–Р. Если снова изменим величину w и примем ее равной 0,75, например, то получим третий вариант фигуры для множества трезубцев Ф–К–Р.

Следовательно, обобщая примеры 1 и 2, можно сказать, что в интервале чисел $0 < w < 1$ получается бесконечное множество фигур (множеств трезубцев Ф–К–Р). При этом в таком огромном количестве множеств фигур трезубцев Ф–К–Р никакого сужения вилок Ф–Р в традиционном смысле, как, к примеру, в [25], не выявляется.

Пример 3. В плоском пространстве $O\zeta k$ (с абсциссой $w = 0,75$) требуется построить графики функции $k_F(\zeta)$ и трех функций $k(\zeta)$ при значениях η , равных 1,0, 0,4 и 0,0 в интервале чисел $0,25 < \zeta \leq 3$.

Результаты вычисления значений четырех функций по формулам (22) и (15) соответственно представим фигурой трех графиков, выделенных сплошными линиями, и одним пунктирным графиком (рис. 7).

На рис. 7 в интервале $0,25 < \zeta \leq 3$ изображено два множества трезубцев Ф–К–Р, зубья которых из общего основания в точке (1, 1) расходятся в противоположные стороны. Множество левых трезубцев отражает величину эффективных модулей материала при значениях малых чисел параметра ζ , а правые – больших.

График, выделенный пунктирной линией, отражает, согласно (15), значения функции $k(\zeta)$ композитов, имеющих равную величину параметра $\eta = 0,4$. Это значит, что по формулам (15) – (17) определяются значения не только эффективных объемных модулей K , но и эффективных модулей сдвига (G). Другими сло-

вами, поскольку, согласно (9), модуль сдвига $G = 3\eta K/2$, то при заданном значении $\eta = 0,4$ (пунктирная линия) модуль K становится известной величиной, тем самым вычисляемой будет величина модуля сдвига.

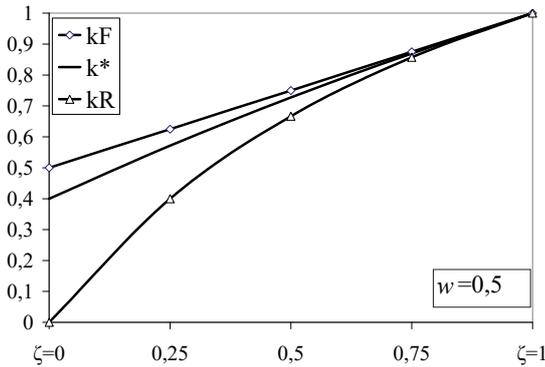


Рис. 6. Фигуры множества трезубцев Ф–К–Р, представленные графиками функций $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ в интервале чисел $0 < \zeta \leq 1$ при значениях $w = 0,5$
 [Figure 6. Figures of the set of F–K–R tridents represented by the graphs of the functions $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ and $k_R(\zeta)$ in the range of numbers $0 < \zeta \leq 1$ at values of $w = 0,5$]

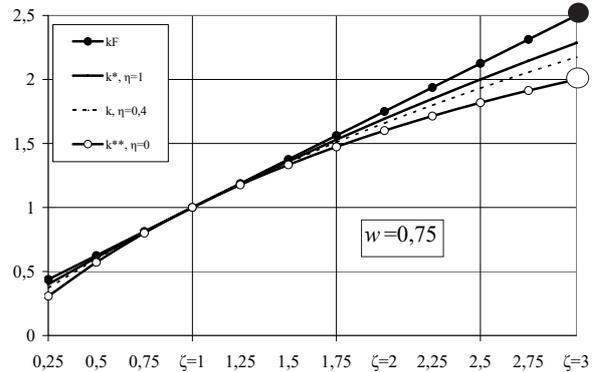


Рис. 7. Фигуры двух множеств трезубцев Ф–К–Р, представленных графиками функций $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ и $k^{**}(\zeta)$ в интервале чисел $0,25 < \zeta \leq 3$; объемная доля наполнителя $w = 0,75$; пунктирная кривая определяет функцию $k(\zeta, \eta, w)$, в которой коэффициент $\nu_m = 0,25$ ($\eta = 0,4$)
 [Figure 7. Figures of two sets of F–K–R tridents represented by graphs of functions $k_F(\zeta)$, $k^*(\zeta)$ and $k^{**}(\zeta)$ in the range of numbers $0,25 < \zeta \leq 3$; volume fraction of filler $w = 0,75$; the dashed line defines the function $k(\zeta, \eta, w)$, in which the coefficient $\nu_m = 0,25$ ($\eta = 0,4$)]

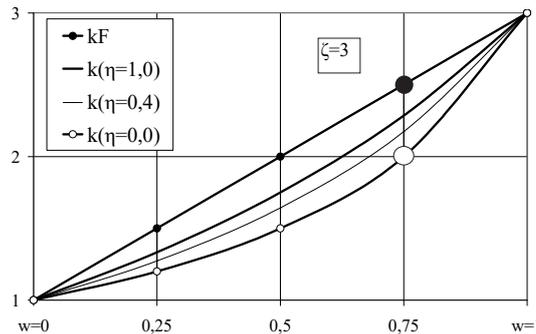


Рис. 8. Фигуры двух множеств трезубцев Ф–К–Р с основаниями: в точке (0, 1) – левое множество, в точке (1, 3) – правое; в плоском пространстве Owk с абсциссой $w = 0,75$ два смежных трезубца направлены навстречу друг другу и имеют общие аппликаты, например двух смежных вилок Ф–Р (см. выделенные точки)
 [Figure 8. Figures of two sets of F–K–R tridents with bases: at point (0, 1) – the left set, at point (1, 3) – right; in the flat space Owk with abscissa $w = 0,75$ two adjacent tridents are directed towards each other and have common applicators, for example, two adjacent F–R forks (see highlighted points)]

Пример 4. Для случая, когда ордината $\zeta = 3$ на сегменте оси абсцисс $0 \leq w \leq 1$ плоского пространства Owk , требуется построить графический образ эффективных модулей: функции $k_F(w)$ по Фойгту и трех функций $k(w)$ по Кристенсену (при значениях параметра $\eta = 1,0, 0,4$ и $0,0$).

Результаты вычислений по формулам (22) и (15) представим графиками четырех названных функций в плоском пространстве Owk (рис. 8).

На рис. 8 сплошными линиями трех графиков изображено множество смежных пар трезубцев Ф–К–Р. Трезубцы каждой пары имеют собственное основание: левые трезубцы в точке (0, 1), правые – в точке (1, 3). Из этих точек зубья смежных трезубцев направлены навстречу друг другу, встречаясь в точках с общей абсциссой w . Например, для случая, когда абсцисса $w = 0,75$, значения аппликаты k_F и k_R смежной пары выделены крупными точками (рис. 8). При этом слева от выделенных точек имеем трезубец с основанием в точке (0, 1), а справа – трезубец с основанием в точке (1, 3). Выделенные точки в плоском пространстве Owk со значениями функций $k_F(w)$ и $k_R(w)$ имеют точно такие же значения, как и функции $k_F(\zeta)$ и $k_R(\zeta)$ в точках с ординатой $\zeta = 3$ пространства $O\zeta k$ (рис. 7).

График, выделенный пунктирной линией (рис. 8), так же как на рис. 7, отражает, согласно (15), значения функции $k(w)$ композитов, имеющих равную величину коэффициента Пуассона: $\nu = \nu_m = 0,25$ (или $\eta = 0,4$, что то же самое). Следовательно, пространство множества вилок К–Р на рис. 8 заполнено подобными графиками с другими значениями коэффициента $\nu = \nu_m = \text{const}$.

4. Заключение

Применительно к сферической модели представительного объема композита (рис. 1–3) дан вывод формулы (15) для объемного модуля k композитов с зернистым наполнителем. Формула (15), отличаясь по форме, идентична по содержанию формуле (17), полученной Р. Кристенсенем для объемного модуля K полидисперсных композитов со сферическими включениями [3. С. 54, 55]). Причина идентичности формул (15) и (17) кроется в том, что оба решения выполнены в рамках линейно-упругого тела и одной и той же парадигмы Хашина [16].

Полученные формулы функций $k(\eta, \zeta, w)$ – по Кристенсену, $k_F(\zeta, w)$ – по Фойгту и $k_R(\zeta, w)$ – по Рейссу позволили построить наглядный образ бесконечного множества значений этих функций в двух множествах плоских пространств $O\zeta k$ и Owk (рис. 4). Совмещения графиков трех функций в одном рисунке дают графические образы бесконечного множества плоских фигур трезубцев Ф–К–Р, включающих в себя образы множеств вилок Ф–Р и вилок К–Р. Графическое исследование небольшого числа фрагментов (рис. 5–8) из бесконечного множества возможных плоских фигур трезубцев и вилок позволяет утверждать, что:

- во-первых, при заданных величинах модулей K_m , G_m , K_n и объемной доли w наполнителя по формулам (15) – (17) в рамках полидисперсной модели (рис. 1) можно определять не только эффективные объемные модули K , но и эффективные модули сдвига G двухфазных композитов;
- во-вторых, результаты совместного анализа формул (15), (22), (23) и их графических образов не подтверждают гипотезы о сужении вилки Фойгта – Рейсса в традиционном смысле;
- в-третьих, безразмерная форма выражений (15), (16) позволяет решать обратные задачи механики полидисперсных композитов; например, определять объемные модули K_m , G_m и K_n (материала компонентов) по значениям эффективных модулей (K и G), полученным в результате механических испытаний на сжатие небольшой серии стандартных образцов композита, изготовленных на одном замесе связующего материала с различным содержанием объемной доли наполнителя;
- в-четвертых, данной работой исследование формул (15) – (17) не завершается, так как бесконечное множество возможных результатов их исследования не исключает наличия других, еще не известных, но практически необходимых закономерностей.

Список литературы / References

1. Бобрышев А.Н., Ерофеев В.Т., Козомазов В.М. Физика и синергетика дисперсно-неупорядоченных конденсированных композитных систем. СПб.: Наука, 2012. 176 с.
Bobryshev A.N., Erofeev V.T., Kozomazov V.M. *Fizika i sinergetika dispersno-neuporyadochennykh kondensirovannykh kompozitnykh sistem* [Physics and synergetics of dispersively disordered condensed composite systems]. Saint Petersburg: Nauka Publ.; 2012. (In Russ.)
2. Гусев Б.В., Кондращенко В.И., Маслов Б.П., Файбусович А.С. Формирование структуры композиционных материалов и их свойства. М.: Научный мир, 2006. 566 с.
Gusev B.V., Kondrashenko V.I., Maslov B.P., Faysovich A.S. *Formirovanie struktury kompozitsionnykh materialov i ih svoystva* [Formation of the structure of composite materials and their properties]. Moscow: Nauchnyj mir Publ.; 2006. (In Russ.)
3. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to the mechanics of composites]. Moscow: Mir Publ.; 1982. 336 p. (In Russ.)
4. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. Композиционные материалы: справочник. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
Vasiliev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. *Kompozitsionnye materialy* [Composite material]: handbook. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1990. (In Russ.)
5. Pronina Y.G. Analytical solution for decelerated mechanochemical corrosion of pressurized elastic-perfectly plastic thick-walled spheres. *Corrosion Science*. 2015;90:161–167. DOI: 10.1016/j.corsci.2014.10.007.
6. Arya V.K. Analytical and finite element solutions of some problems using a viscoplastic model. *Computers and Structures*. 1989;33(4):957–967. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90430-6.

7. Loghman A., Shokouhi N. Creep damage evaluation of thick-walled spheres using a long-term creep constitutive model. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2009;23(10). Article number: 2577. DOI: 10.1007/s12206-009-0631-x.
8. Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Aleayoub S.M.A. Time-dependent creep stress redistribution analysis of thick-walled functionally graded spheres. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2011;15(4):353–365. DOI: 10.1007/s11043-011-9147-8.
9. Cowper G.R. The elastoplastic thick-walled sphere subjected to a radial temperature gradient. *Journal of Applied Mechanics*. 1960;27(3):496–500. DOI: 10.1115/1.3644030.
10. Durban D., Baruch M. Analysis of an elasto-plastic thick walled sphere loaded by internal and external pressure. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1977;12(1):9–22. DOI: 10.1115/1.3644030.
11. Parvizi A., Alikarami S., Asgari M. Exact solution for thermoelastoplastic behavior of thick-walled functionally graded sphere under combined pressure and temperature gradient loading. *Journal of Thermal Stresses*. 2016; 39(9):1152–1170. DOI: 10.1080/01495739.2016.1188614.
12. Chen Y.Z., Lin X.Y. An alternative numerical solution of thick-walled cylinders and spheres made of functional-ly graded materials. *Computational Materials Science*. 2010;48(3):640–647. DOI: 10.1016/j.commatsci.2010.02.033.
13. Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015;56(6):984–994. DOI: 10.1134/S0021894415060085.
14. Sedova O.S., Pronina Y.G. Taking account of hydrostatic pressure in the modeling of corrosion of thick spherical shells. *2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading*. 2015;7106771. DOI: 10.1109/POLYAKHOV.2015.7106771.
15. Loghman A., Moradi M. The analysis of time-dependent creep in FGPM thick walled sphere under electro-magneto-thermo-mechanical loadings. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2013;17(3):315–329. DOI: 10.1007/s11043-012-9185-x.
16. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.* 1962;29:143–150.
17. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Berlin: Teubner; 1928.
18. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung. *Z. Angew. Math. Und Mech.* 1929;9(1):49–58.
19. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. 512 с.
20. Bezukhov N.I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]*. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1968. (In Russ.)
21. Черкасов В.Д., Тюряхин А.С. Теория двухсвязных моделей микромеханики композитов: монография. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2009. 108 с.
22. Cherkasov V.D., Tyuryakhin A.S. *Teoriya dvukhsyaznykh modelei mikromekhaniki kompozitov [Theory of two-connected models of micromechanics of composites]*: monograph. Saransk: Publishing House of the Mordovian University; 2009. (In Russ.)
23. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Ерофеева И.В. О связях параметров несущей фазы с эффективными параметрами в моделях зернистых композитов // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 3. С. 7–17.
24. Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Erofeeva I.V. Relationships between carrier phase parameters and effective parameters in granular composite models. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2018;(1):7–17. (In Russ.)
25. Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P. Flat Space of Values of Volume Module of Grain Composite with Spherical Fill-Lem. *International Journal of Civil Engineering and Technology*. 2019;10(8):333–342.
26. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П. Система упорядоченных подмножеств значений объемного модуля полидисперсных композитов со сферическими включениями // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2019. № 6 (726). С. 5–17. DOI: 10.32683/0536-1052-2019-726-6-5-17.
27. Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P. System of ordered subsets of the volume modulus values of polydisperse composites with spherical inclusions. *News of higher educational institutions. Construction*. 2019; 6(726):5–7. DOI: 10.32683/0536-1052-2019-726-6-5-17. (In Russ.)
28. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., Тиньгаев А.В. Эффективные модули двухфазных строительных композитов с зернистым наполнителем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 407–414. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414>
29. Erofeev V.T., Tyuryakhin A.S., Tyuryakhina T.P., Tingaev A.V. Effective modules of two-phase construction composites with grain filler. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(6):407–414. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414> (In Russ.)
30. Тарасюк И.А., Кравчук А.С. Сужение «вилки» Фойгта – Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов // Apriori. Серия: Естественные и технические науки. 2014. № 3. С. 1–18. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29744041> (дата обращения: 23.06.2020).
31. Tarasyuk I.A., Kravchuk A.S. Calculation of Voigt – Reuss “Range” in the theory of elasticity of structural heterogeneous, average isotropic, composite bodies without application of variational principles. *Apriori. Series: Natural and technical Sciences*. 2014;3:1–18. Available from: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29744041> (accessed: 23.06.2020). (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-334-350
УДК 624.072.2.014

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

Двухтавровые гнутозамкнутые профили с трубчатыми полками и расчет оптимальной компоновки их составных сечений

А.С. Марутян

Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал Северо-Кавказского федерального университета) в г. Пятигорске, Российская Федерация, 357500, Пятигорск, пр-кт 40 лет Октября, 56
al_marut@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 24 апреля 2020 г.
Доработана: 10 августа 2020 г.
Принята к публикации: 15 сентября 2020 г.

Аннотация

Двухтавровые гнутозамкнутые профили с трубчатыми полками выделяются составным сечением и относятся к легким стальным тонкостенным конструкциям, отличающимся высокими технико-экономическими показателями и массовым спросом в промышленно-гражданском строительстве, что обуславливает *актуальность* разработки их нового технического решения. *Цель исследования* – показать, что характеристики стальных тонкостенных конструкций можно дополнительно улучшить при помощи формообразования профилей, сочетающего в составном сечении прямые и круглые очертания замкнутых и открытых контуров. *Методы*. Новое техническое решение, оригинальность которого подтверждена патентной экспертизой, разрабатывалось посредством опытно-конструкторских проработок и оптимизационно-проектных расчетов двухтавровых профилей. Произведен расчет оптимальной на изгиб компоновки составных сечений двухтавровых гнутозамкнутых профилей из листовых заготовок, одинаковых и неодинаковых по толщине, включая бистальные модификации. *Результаты*. Двухтавровый гнутозамкнутый профиль состоит из двух трубчатых полок и одной стенки двойной толщины. Для его изготовления без сварных, болтовых или заклепочных соединений наружные парные и внутренние парные заготовки выполняются по всей длине с зубчатыми продольными кромками, зубцы которых расположены относительно друг друга в шахматном порядке и взаимно загнуты в пазах между собой после замыкания гнутого профиля по его полкам. Загибы зубчатых креплений увеличивают толщину смятия, обеспечивают рост местной устойчивости и прочности соединений тонкостенных элементов на сдвиг, а также позволяют не редуцировать расчетные сечения. Расчет оптимальной компоновки двухтаврового гнутозамкнутого профиля на изгиб показал, что его прочность максимальна при отношении размеров ширины и высоты 1/5,2 и равных толщинах полок и стенки.

Ключевые слова: стержневые конструкции, тонкостенные конструкции, гнутозамкнутые профили, зубчатые крепления, оптимизация сечений, расчет оптимальных параметров

Для цитирования

Марутян А.С. Двухтавровые гнутозамкнутые профили с трубчатыми полками и расчет оптимальной компоновки их составных сечений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 334–350. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-334-350>

Марутян Александр Суренович, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник отдела организации проектно-грантовой деятельности; Scopus Author ID: 57194604628, eLIBRARY SPIN-код: 8528-9956.

© Марутян А.С., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

I-shaped bent closed profiles with tubular shelves and calculation of the optimal layout of their composite sections

Alexander S. Marutyan

Institute of Service, Tourism and Design (branch of North-Caucasian Federal University) in Pyatigorsk, 56 40 let Oktyabrya Ave, Pyatigorsk, 357500, Russian Federation
al_marut@mail.ru

Article history

Received: April 4, 2020

Revised: August 10, 2020

Accepted: September 15, 2020

Abstract

I-shaped bent closed profiles with tubular shelves are distinguished by a composite section and related to light steel thin-walled structures (LSTWS), which are characterized by high technical and economic indicators and mass demand in industrial and civil construction, which determines the *relevance* of the development of their new technical solutions. *The aim of the work* – to show that the characteristics of LSTWS can be further improved by forming profiles, combining straight and round outlines of closed and open circuits in a composite section. *Methods.* New technical solution, the originality of which is confirmed by patent examination, has been developed through experimental design and optimization and design calculations of I-shaped profiles. The calculation of the optimal bending layout of the composite sections of I-shaped profiles of horizontal billets from sheet blanks, identical and unequal in thickness, including basteel modifications, is made. *Results.* The I-shaped bent closed profiles consists of two tubular shelves and one wall of double thickness. For its manufacture without welded, bolted or riveted joints, the outer pair and inner pair blanks are made along the entire length with serrated longitudinal edges, the teeth of which are staggered relative to each other and mutually bent in grooves after closing a bent profile along its shelves. The bends of the gear mounts increase the collapse thickness, provide an increase in the local stability and shear strength of the thin-walled elements, and also allow not to reduce the design sections. The calculation of the optimal layout of I-shaped profiles horizontal bend for bending showed that its strength is maximum when the ratio of the width and height of 1/5.2 and equal thicknesses of shelves and walls.

Keywords: bar structures, thin-walled structures, bent-closed profiles, gear fasteners, optimization of sections, calculation of optimal parameters

For citation

Marutyan A.S. I-shaped bent closed profiles with tubular shelves and calculation of the optimal layout of their composite sections. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):334–350. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-334-350>

1. Введение

Двутавр представляет собой один из профилей, наиболее востребованных в практике строительства и проектирования для металлических, железобетонных, сталежелезобетонных, деревянных и других несущих конструкций. Из теории сортамента и оптимального проектирования известно до десятка критериев эффективности двутавровых профилей, работающих на изгиб [1. С. 77; 2; 3]. Поэтому в стальном строительстве его принято считать конструктивной формой номер один и непрерывно совершенствовать в режиме реального времени [4]. Конструктивно-компоновочная форма двутавра распространяется как на стандартные (рис. 1, а) [5; 6] и сварные (рис. 1, б) [7] профили, так и на более специфические, например, прокатный с лотками (рис. 1, в) [8] и прокатно-клепанный (рис. 1, г) [9] или гнутосварные составного сечения на точках (рис. 1, д) [10] и швах (рис. 1, е, ж) [11].

К числу первых двутавровых профилей с трубчатыми частями составных сечений из листовых заготовок можно отнести клепаную трубчато-двутавровую балку, использованную для ремонта Зимнего дворца в Санкт-Петербурге (рис. 2, а) [4; 12. С. 23]. Однако эта новация оказалась не самой успешной и не имела повторного применения, поскольку более рационально компоновать двутавровые профили не с трубчатыми стенками, а с трубчатыми полками (рис. 2, б–е) [13–17].

Alexander S. Marutyan, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, senior researcher of the Department of Organization of Project and Grant Activities; Scopus Author ID: 57194604628, eLIBRARY SPIN-code: 8528-9956.

К двутавровым профилям с трубчатыми полками можно отнести и предлагаемое (новое) техническое решение гнutoзамкнутых профилей (ГЗП) составного сечения двутавровой формы, которому предшествовала проработка таких же ГЗП швеллерного очертания (рис. 3) [18–20].

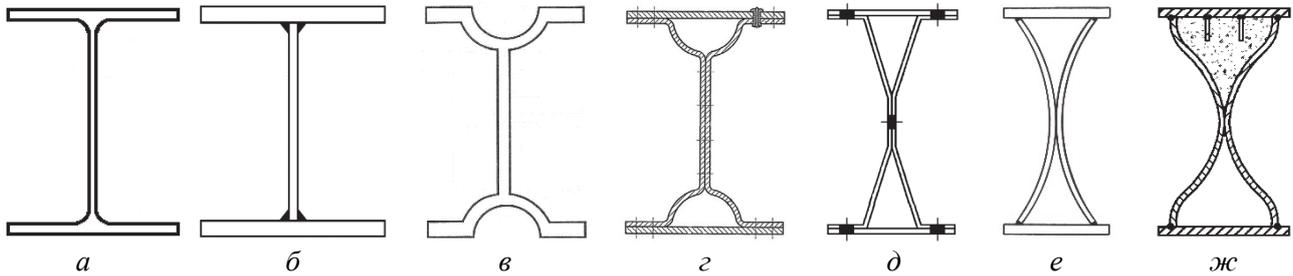


Рис. 1. Схемы двутавровых профилей:

a – прокатного; *б* – сварного; *в* – прокатного с лотками; *z* – прокатно-клепаного;
д – гнutoсварного на точках; *e* – гнutoсварного на швах; *ж* – гнutoсварного в сталежелезобетонной балке

[Figure 1. Schemes of I-shaped profiles:

a – rolling; *б* – welded; *в* – rolling with trays; *z* – rolling riveted; *д* – bent welded at points;
e – bent welded at the seams; *ж* – bent in steel-reinforced concrete beam]

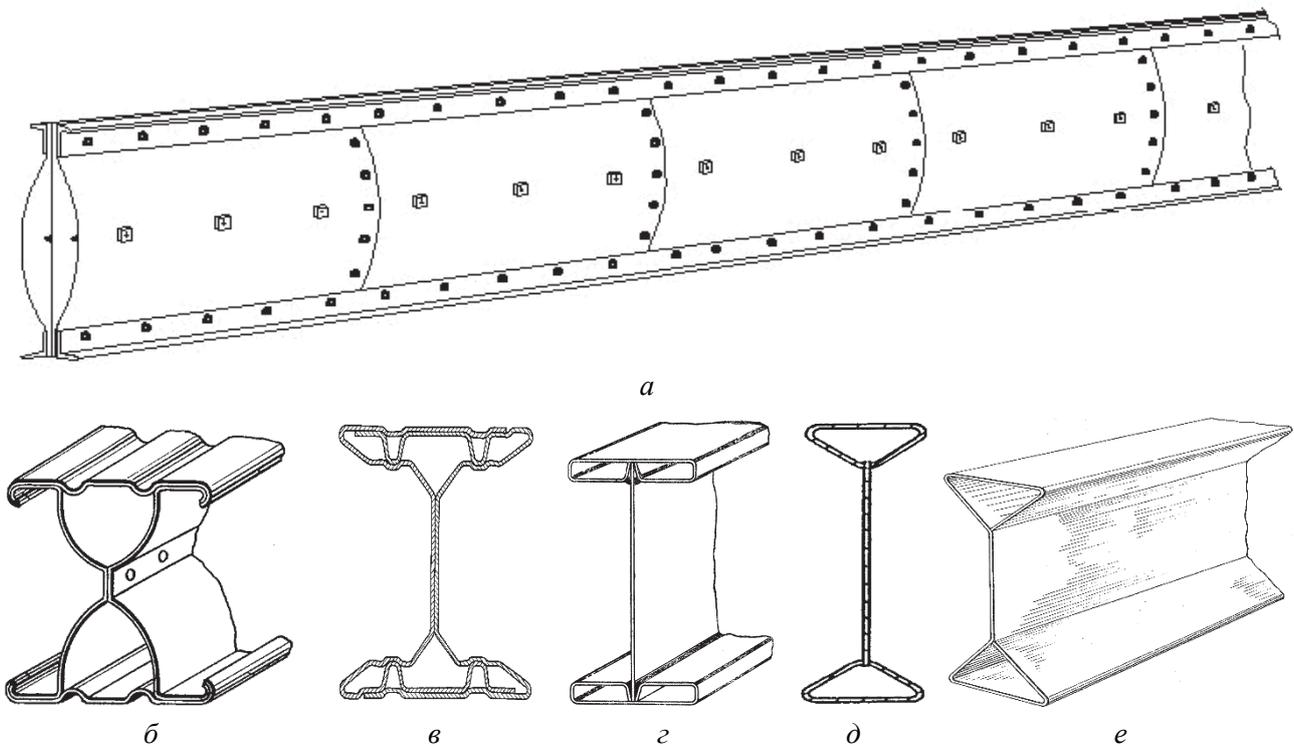


Рис. 2. Схемы двутавровых профилей с трубчатыми частями составных сечений из листовых заготовок:

a – трубчато-двутавровой балки; *б* – с продольным гофрированием полок;
в – сборно-разборной балки; *z* – с полками прямоугольного очертания; *д* – с полками
 треугольного очертания; *e* – из единой развертки

[Figure 2. Schemes of I-shaped profiles with tubular parts composite sections from sheet blanks:

a – tubular I-beam; *б* – with longitudinal corrugation of shelves; *в* – collapsible beams;
z – with shelves of rectangular shape; *д* – with shelves of triangular shape; *e* – from a single sweep]

Если для составных сечений гнutoзамкнутых швеллеров вполне рациональны листовые заготовки одинаковых толщин, то эффективность гнutoзамкнутых двутавров можно увеличить, дополнив листовые заготовки одинаковых толщин такими же заготовками разных толщин. Поэтому на две основные модификации швеллерных ГЗП (рис. 3, *a*, *б*) в случае двутавровых ГЗП приходится две основные модификации из листовых заготовок одинаковых толщин (рис. 3, *в*, *z*) и еще две основные модификации из листовых заготовок разных толщин (рис. 3, *д*, *e*).

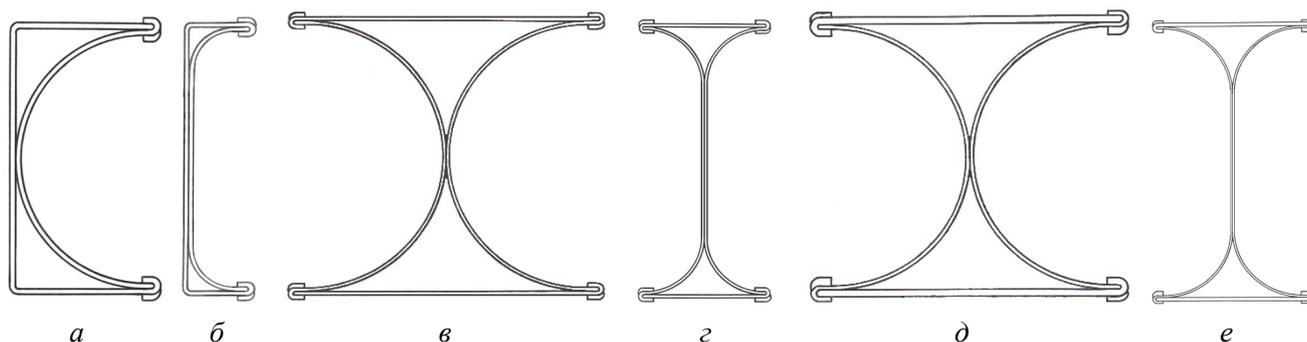


Рис. 3. Схемы швеллерных (*a, б*) и двутавровых (*в, з, д, е*) ГЗП с трубчатыми полками
[Figure 3. Schemes of channel (*a, б*) and I-shaped (*в, з, д, е*) bent closed profiles with tubular shelves

Такая универсальность нового технического решения может обеспечить дальнейшее расширение области перспективного использования ГЗП с зубчатыми креплениями без сварки, включая легкие стальные тонкостенные конструкции (ЛСТК), для которых основным конструкционным материалом служит тонколистовая оцинкованная сталь [21–23]. Специфика ГЗП и их применения в ЛСТК в прошлых публикациях [19; 24] раскрыта достаточно подробно. Поэтому в качестве продолжения здесь можно представить ряд наиболее употребительных, характерных решений двутавровых профилей, принятых для ЛСТК (рис. 4) [25–31], а также рассмотреть некоторые предпосылки к расчету оптимальной компоновки применительно к составным сечениям двутавровых ГЗП с трубчатыми полками.

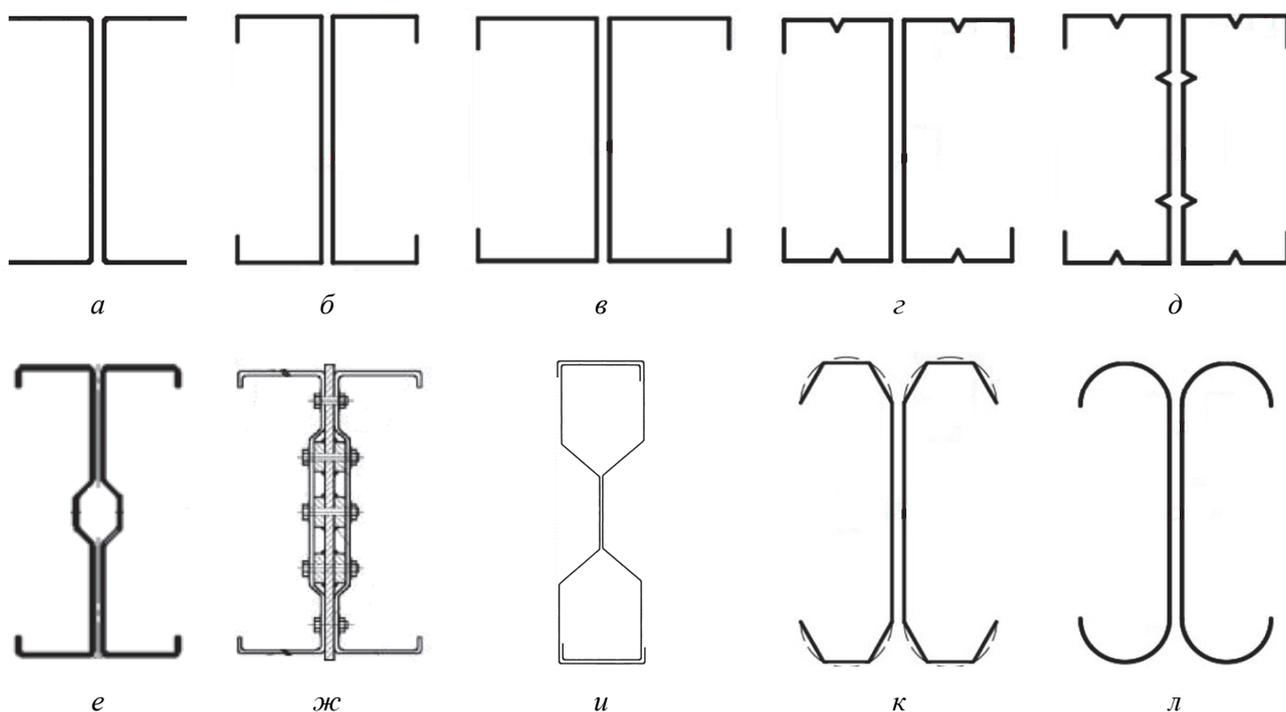


Рис. 4. Схемы наиболее характерных решений двутавровых профилей для ЛСТК
[Figure 4. Schemes of the most characteristic solutions of I-shaped profiles for LSTWS]

Таким образом, завершая и обобщая вышесказанное, можно сделать основной вывод о перспективности гнутозамкнутых швеллерных и двутавровых профилей с трубчатыми полками, опытно-конструкторская проработка и вариантное проектирование которых позитивно отражается на эффективности их модификаций, а расчет оптимальной компоновки составных сечений делает такой эффект более ощутимым.

2. Методы

В терминах теории оптимального проектирования целевая функция (минимум площади расчетного сечения) для сварных двутавров имеет вид

$$A_{\Sigma} = A_{f1} + A_{f2} + A_w \rightarrow \min,$$

где A_{Σ} – суммарная площадь сечения; A_{f1} – площадь сжатой полки; A_{f2} – площадь растянутой полки; A_w – площадь стенки [12. С. 104].

При расчете тонкостенных сечений балок решена оптимизационная задача изготовить (согнуть) швеллер, имеющий максимальный момент сопротивления W_{\max} , из полосы шириной S , толщиной t и площадью поперечного сечения A (рис. 5):

$$h = 3S/4 \text{ и } b = h/6,$$

где h – высота расчетного сечения, а b – ширина его полок [32. С. 60–61].

К такому же итогу привел сравнительный расчет оптимальных параметров гнутых и гнутозамкнутых швеллеров, где для вывода целевой функции и решения уравнения после определения ее производной учтены две постоянные величины: $A = \text{const}$ и $t = \text{const}$ (площадь сечения и толщина листовой заготовки) [19].

Оперирование этими константами позволяет оптимизировать расчетные сечения разных конфигураций, а их отношение обеспечивает контроль над протяженностями средних (срединных) линий оптимизируемых сечений, ограничивая предельно допустимое развитие остаточных (неупругих) деформаций при перепрофилировании [33]. Последнее обстоятельство особенно значимо для ЛСТК, так как их толщины, как правило, ограничены четырехмиллиметровым размером [34–36. С. 5].

Специфика оптимизации двутавровых ГЗП заключается в необходимости учитывать возможность компоновки в одном и том же составном сечении листовых заготовок разных толщин, включая их унификацию с точно такими же заготовками для швеллерных ГЗП. Кроме того, плоские периферийные грани у трубчатых полок гнутозамкнутых двутавров могут быть изготовлены из более прочного материала, а это открывает определенные перспективы для бистальных балок и подобных ЛСТК с замыканиями зубчатых креплений без сварных швов. Такие

модификации могут улучшить технико-экономические показатели ЛСТК и расширить область их рационального применения, поскольку прокат бистальных профилей на рельсобалочных станах невозможен, а метод высокочастотной сварки позволяет создавать бистальные двутавры с поясами из высокопрочной стали [1. С. 82].

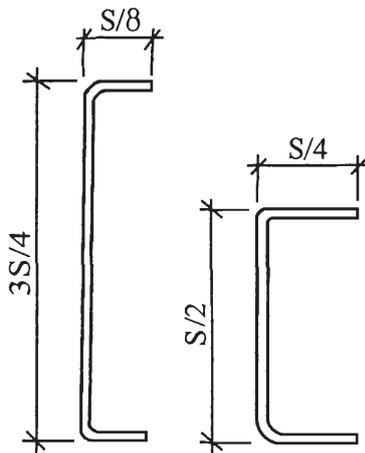


Рис. 5. Расчетные схемы гнутых швеллеров
[Figure 5. Design schemes of bent channels]

2.1. Расчет двутавровых ГЗП с одинаковыми параметрами по ширине и высоте

Двутавровые ГЗП с трубчатыми полками имеют довольно универсальное техническое решение, применение которого в деле обеспечивает их производство как с зубчатыми замыканиями, так и со сварными, болтовыми или заклепочными соединениями. Если использовать в качестве конструкционного материала тонколистовую оцинкованную сталь, то параметры зубцов продольных кромок их листовых заготовок необходимо подобрать таким образом, чтобы одним зигзагообразным резом формировать кромки сразу двух заготовок (рис. 6, а). Тогда издержки производства из дорогостоящего материала и дополнительные затраты будут минимальными.

Для количественной оценки ресурсов несущей способности двутаврового ГЗП необходимо рассчитать площадь A , а также моменты инерции его сечения I_x и I_y относительно главных центральных осей. Сечение такого профиля можно считать составной фигурой, включающей пару круглых полуколец тол-

щиной t и радиусом $0,5U$ с парой прямоугольников размерами $t \times U$, где U – размер ГЗП по ширине; V – размер того же профиля по высоте, $V = U$ (рис. 6, б). Расчетные выкладки при этом допустимо выполнять по средней (срединной) линии тонкостенного сечения без учета его угловых закруглений и численных величин, содержащих значения толщины, возведенной во вторую и третью степень (t^2, t^3) [37].

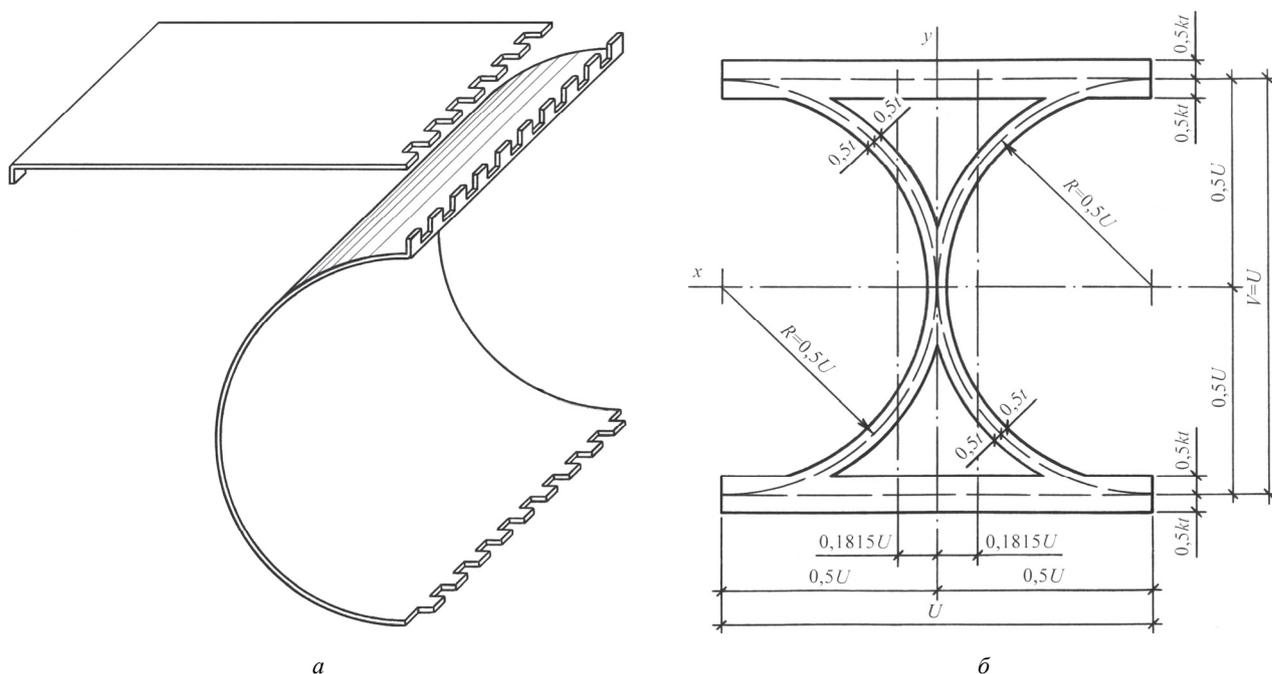


Рис. 6. Аксионометрия листовых заготовок двутаврового ГЗП (а) и расчетная схема его поперечного сечения нетто (б)
[Figure 6. Axonometry of the sheet billets of I-shaped BCP (a) and design diagram of its net cross section (b)]

Поперечное сечение внутренней грани двутаврового ГЗП представляет собой круглое полукольцо, к которому вполне применимы расчетные формулы, протестированные при оптимизации параметров полуплоскоовальных труб для ферменных и балочных конструкций [38]:

$$x_{0,пк} = 0,36304R = 0,1815U; \quad I_{x,пк} = 1,57tR^3 = 0,196250tU^3;$$

$$I_{y,пк} = 0,2961146tR^3 = 0,0370143tU^3; \quad A_{пк} = 3,14tR = 1,57tU,$$

где $x_{0,пк}$, $I_{x,пк}$, $I_{y,пк}$, $A_{пк}$ – абсцисса центра тяжести, моменты инерции относительно осей $x-x$ и $y-y$, площадь сечения полукольца соответственно; R – радиус полукольца по средней линии его сечения, $R = 0,5U$; t – толщина полукольца, равная толщине грани.

Расчетная площадь сечения нетто двутаврового ГЗП складывается из расчетных площадей сечений нетто двух полуколец и двух прямоугольных участков полок:

$$A = tU(2 \times 1,57 + 2 \times 1) = 5,14tU.$$

Моменты инерции расчетного сечения нетто двутаврового ГЗП относительно центральных осей:

$$I_x = tU^3(2 \times 0,196250 + 2 \times 1,0 \times 0,5^2) = 0,89250tU^3;$$

$$I_y = tU^3(2(0,0370143 + 1,57 \times 0,1815^2) + 2 \times 1^3 / 12) = 0,344134tU^3.$$

Момент сопротивления расчетного сечения нетто двутаврового ГЗП в плоскости конструкции:

$$W_x = 2I_x / V = 2 \times 0,89250tU^3 / U = 1,7850tU^2.$$

Возможна контрольная проверка полученных значений, если условно принять, что гнутозамкнутый двутавр с отношением размеров по ширине и высоте $n = U / V = 1 / 1$ скомпонован из двух таких же швеллеров с отношением размеров по ширине и высоте $n = U / V = 1 / 2$, из которых изъяты вертикальные грани (стенки):

$$A = 2A_1 = 2 \times 7,14tU_1 - 2 \times 2tU_1 = 10,28tU_1 = 10,28t \times 0,5U = 5,14tU;$$

$$I_x = 2I_{x1} - 2tV_1^3 / 12 = 2 \times 4,2366666tU_1^3 - 2t(2U_1)^3 / 12 = 7,1399999tU_1^3 =$$

$$= 7,1399999t(0,5U)^3 = 0,8924999tU^3 \approx 0,89250tU^3;$$

$$I_y = 2(I_{y1} + A_1x_{01}^2) = 2(0,7352826tU_1^3 + 7,14tU_1(0,29974U_1)^2) = 2,7535374tU_1^3 =$$

$$= 2,7535374t(0,5U)^3 = 0,344192tU^3,$$

где A_1 , U_1 , V_1 , I_{x1} , I_{y1} , x_{01} – площадь сечения, ширина ($U_1 = 0,5U$), высота, момент инерции сечения относительно оси $x-x$, момент инерции сечения относительно оси $y-y$, абсцисса центра тяжести сечения швеллерного ГЗП соответственно.

Как видно, вычисленные величины практически не разнятся между собой и их можно использовать в дальнейших расчетах.

Если принять, что площадь сечения и толщина исходной заготовки являются постоянными величинами ($A = \text{const}$, $t = \text{const}$), а отношение размеров по ширине и высоте в общем случае не является постоянным ($n = U / V \neq \text{const}$), то расчетные параметры двутаврового ГЗП при $n = U / V = 1 = 1 / 1$ можно переписать следующим образом:

$$A = 5,14tU; \quad U = V = A / (5,14t) = 0,1945525A / t;$$

$$I_x = 0,89250t(0,1945525A / t)^3 = 0,0065722A^3 / t^2;$$

$$I_y = 0,344134t(0,1945525A / t)^3 = 0,0025341A^3 / t^2;$$

$$W_x = 2(0,0065722A^3 / t^2) / (0,1945525A / t) = 0,0675622A^2 / t,$$

где исходная заготовка подлежит зигзагообразному резу на четыре части (две полукольцевые и две плоские).

Практическое значение имеет дальнейшее уточнение расчетных параметров с добавлением зубчатых креплений. Для этого в рассмотренном профиле необходимо подобрать размеры элементов зубчатого крепления (зубцов), которые должны быть не меньше $1/10$ габаритного размера сечения согласно Своду правил РФ по проектированию стальных тонкостенных конструкций из холодногнутох оцинкованных профилей и гофрированных листов [36. С. 16]. В данном случае этот размер составляет $0,1U$, где U – размер гнутозамкнутого профиля по ширине.

В расчетных выкладках параметр зубчатых креплений (размер зубцов) отразится восьмикратным образом, так как двутавровый ГЗП имеет составное сечение из четырех листовых заготовок с продольными кромками зубчатой формы:

$$A_{gr} = A + \Delta A = 5,14tU + 4 \times 2 \times 0,1tU = 5,94tU;$$

$$A / A_{gr} = 5,14 / 5,94 = 0,8653198 \approx 0,87,$$

что меньше ослаблений редуцированных сечений стержневых и балочных элементов ЛСТК, но больше, чем у гнутозамкнутого швеллера, поскольку количество этих креплений в таком же двутавре удвоилось.

В завершение расчета гнутозамкнутых двутавров из листовых заготовок одинаковых толщин остается добавить, что компоновка их составных сечений вполне допускает изготовление наиболее напряженных элементов, коими при изгибе чаще являются одна или обе плоские грани трубчатых полок, из высокопрочных материалов. Причем росту эффективности такой компоновки способствует ограниченность протяженности элементов из высокопрочных, но дорогостоящих материалов, не превышающей $1 / 5,14 \dots 2 / 5,14$ периметра поперечного сечения.

2.2. Расчет двутавровых ГЗП с разными параметрами по ширине и высоте

Все приведенные выше расчетные выкладки относятся к двутавровым ГЗП со строго фиксированными параметрами, начиная с отношения размеров ширины и высоты, равного 1/1 (рис. 7, а).

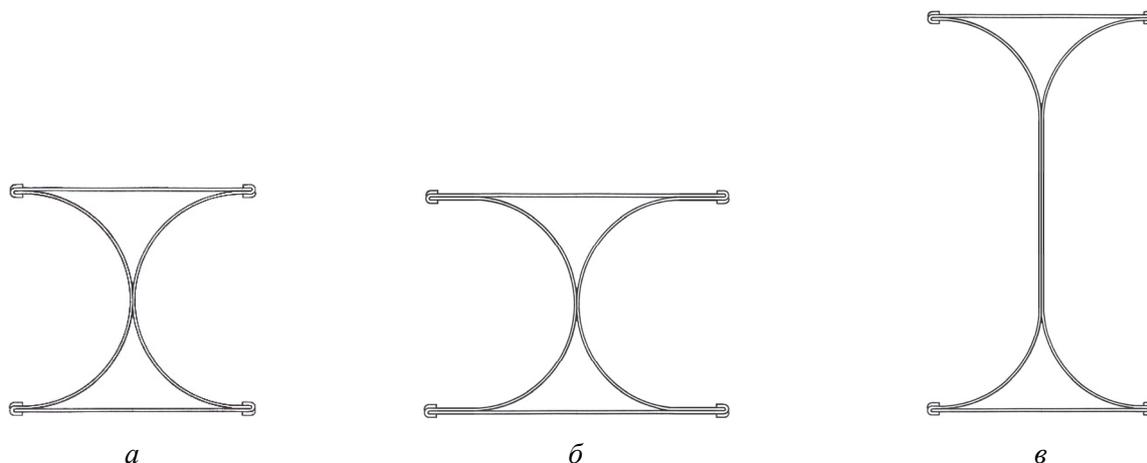


Рис. 7. Схемы двутавровых ГЗП:
 а – при $n = U/V = 1/1$; б – при $n = U/V > 1/1$; в – при $n = U/V < 1/1$
[Figure 7. Schemes of I-shaped BCP:
 а – with $n = U/V = 1/1$; б – with $n = U/V > 1/1$; в – with $n = U/V < 1/1$]

При увеличении значений этого отношения можно заметить определенные изменения в контуре профилей, которые последовательно трансформируют их двутавровое очертание в Н-образное (рис. 7, б). Поэтому для продолжения оптимизационного расчета двутавровых ГЗП более предпочтительны те из них, у которых отношения габаритных размеров по ширине и высоте не превышают 1/1 (рис. 7, в). Тогда внешнее сходство двутавровых ГЗП со сварными и прокатными двутаврами более заметно, особенно с прокатной подкрановой балкой, имеющей повышенный технический ресурс за счет увеличения в 3,5 раза радиуса каждой из четырех выкружек (рис. 8, а) [39]. По определению, приведенному в Справочнике-словаре архитектурно-строительной энциклопедии, выкружка – это вогнутый профиль декора, а по очертанию и протяженности – это четверть окружности (рис. 8, б, в) [40]. Такое же сходство с гнутыми и прокатными швеллерами характерно для швеллерных ГЗП. Поэтому для оптимизации гнutoзамкнутых двутавров допустимо использовать уже апробированную методику приближенного расчета тонкостенного сечения по его средней линии без корректировки.

Сечение двутаврового ГЗП при $n = U/V < 1/1$ можно считать составной фигурой (рис. 8, з) из пары трубчатых (замкнутых или полых) полок треугольного очертания, расположенных симметрично относительно вертикали (оси $y - y$) и пары вертикальных прямоугольников стенки между ними. В свою очередь каждая из трубчатых полок в отдельности также представима составной фигурой из пары выкружек ($R = 0,5U$) и горизонтального прямоугольника ($t \times U$). Трубчатые полки соединены по вертикали парой равновысоких прямоугольников стенки (рис. 8, д):

$$2t \times (V - U) = 2tU((1/n) - 1).$$

За составную часть в виде половины полукольца (выкружки) можно принять фрагмент тонкостенного кольца с угловым параметром $\alpha = 45^\circ = \pi/4 = 0,785$ из Справочника по сопротивлению материалов (рис. 8, б, в) [41]:

$$A_{\text{шк}} = 2\alpha tR = 2 \times 0,785tR = 1,57tR; \quad y_{0,\text{шк}} = R \sin \alpha / \alpha = R \times 0,7071 / 0,785 = 0,9008R;$$

$$I_{x,\text{шк}} = (2\alpha + \sin \alpha - 4 \sin^2 2\alpha / \alpha)tR^3 / 2 = (2 \times 0,785 + 1 - 4 \times 0,7071^2 / 0,785)tR^3 / 2 = 0,011115tR^3;$$

$$I_{y,\text{шк}} = (2\alpha - \sin 2\alpha)tR^3 / 2 = (2 \times 0,785 - 1)tR^3 / 2 = 0,2850tR^3,$$

где $y_{0, \text{ПНК}}$, $I_{x, \text{ПНК}}$, $I_{y, \text{ПНК}}$, $A_{\text{ПНК}}$, R – ордината центра тяжести сечения, момент инерции сечения относительно оси $x-x$, момент инерции сечения относительно оси $y-y$, площадь сечения половины полукольца и радиус половины полукольца по ее средней линии, $R = 0,5U$, соответственно.

Тогда расчетное сечение нетто двутаврового ГЗП будет иметь следующие характеристики:

$$A = tU(2/n + 3,14);$$

$$I_x = tU^3(0,1666666/n^3 + 0,785/n^2 - 0,0699728/n + 0,0108234);$$

$$I_y = 0,344134tU^3;$$

$$W_x = tU^2(0,3333332/n^2 + 1,57/n - 0,1399456 + 0,0216468n).$$

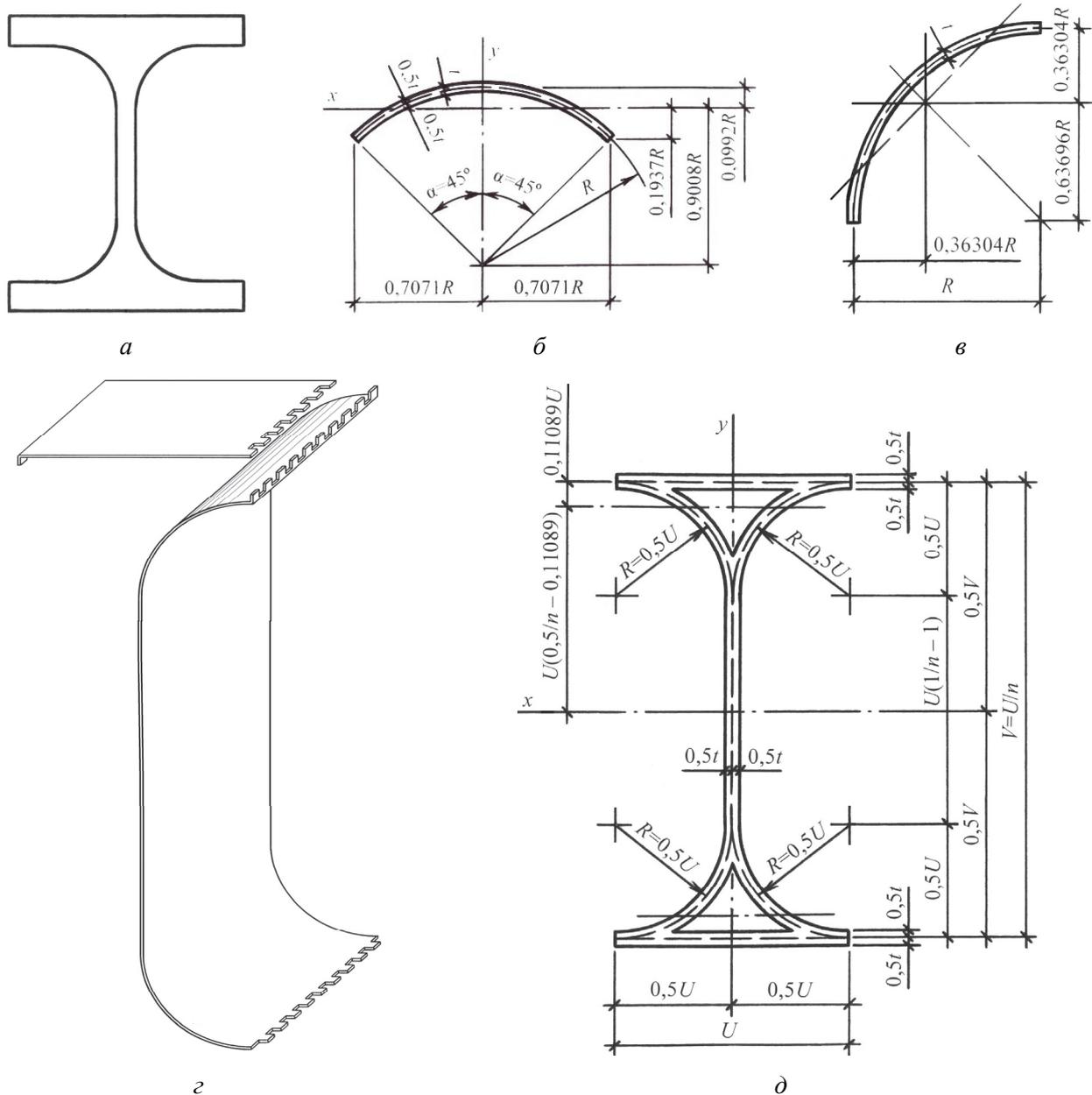


Рис. 8. Схемы для расчета двутаврового ГЗП:

a – сечение прокатного двутавра; $b, в$ – элементы составного сечения; $г$ – аксонометрия листовых заготовок; $д$ – расчетная схема сечения нетто

[Figure 8. Schemes for calculating the I-shaped BCP:

a – section of a rolling I-shaped profile; $b, в$ – elements of a composite section; $г$ – axonometry of sheet blanks; $д$ – design net cross section]

Если в полученные формулы подставить $n = U / V = 1 / 1 = 1$, то итоги численных выкладок практически совпадают с уже найденными значениями, что можно считать контрольной проверкой.

2.3. Оптимизационный расчет двутавровых ГЗП

В качестве критерия оптимизации для продолжения расчета двутаврового ГЗП целесообразно использовать максимум момента сопротивления его сечения в силовой плоскости несущей конструкции, который обеспечивает наибольший запас прочности при изгибе:

$$W_x = (A^2 / t)(0,3333332 / n^2 + 1,57 / n - 0,1399456 + 0,0216468n) / (2 / n + 3,14)^2,$$

где $U^2 = (A^2 / t^2) / (2 / n + 3,14)^2$; $A = \text{const}$, $t = \text{const}$.

Чтобы найти экстремальное значение момента сопротивления W_x , его выражение необходимо продифференцировать по переменной n и, приравняв к нулю производную ($dW_x / dn = 0$), получить уравнение четвертой степени

$$0,2134287n^4 + 0,5437676n^3 - 16,977527n^2 - 7,692628n + 2,093335 = 0$$

с корнями

$$n_1 = -10,077070; \quad n_2 = -0,6369426; \quad n_3 = 0,1916202; \quad n_4 = 7,9746209.$$

Из найденных корней практический интерес представляет третий, значение которого можно округлить до

$$n = 0,1916202 = 1 / 5,2186564 \approx 1 / 5,2.$$

Тогда расчетные параметры оптимизированного профиля составят:

$$A = tU(2 / n + 3,14) = tU(2 / 0,1916202 + 3,14) = 13,577312tU;$$

$$U = 0,0736522A / t; \quad V = 0,3843655A / t;$$

$$\begin{aligned} I_x &= tU^3(0,1666666 / n^3 + 0,785 / n^2 - 0,0699728 / n + 0,0108234) = \\ &= tU^3(0,1666666 / 0,1916202^3 + 0,758 / 0,1916202^2 - 0,0699728 / 0,1916202 + 0,0108234) = \\ &= 44,712624tU^3 = 44,712624t(0,0736522A / t)^3 = 0,0178643A^3 / t^2; \end{aligned}$$

$$I_y = 0,344134tU^3 = 0,344134t(0,0736522A / t)^3 = 0,0001372A^3 / t^2;$$

$$W_x = W_{x,\text{max}} = 2I_x / V = 2 \times 44,712624tU^3 / (5,2186564U) =$$

$$= 17,135684tU^2 = 17,197163t(0,0736522A / t)^2 = 0,092955A^2 / t.$$

Сравнивая расчетные параметры двутаврового ГЗП, полученные до и после оптимизации, можно убедиться в ее эффективности, поскольку с увеличением габарита по высоте в $0,3843655 / 0,1945525 = 2$ раза момент инерции сечения в плоскости конструкции возрос в $0,0178643 / 0,0065722 = 2,7$ раза, а момент сопротивления – в $0,0932885 / 0,0675622 = 1,4$ раза.

К выявленной эффективности оптимизации двутаврового ГЗП на изгиб следует добавить уменьшение ослабления расчетного сечения нетто, что является следствием сужения оптимизированного профиля по ширине:

$$A_{gr} = A + \Delta A = 13,577312tU + 4 \times 2 \times 0,1tU = 14,377312tU;$$

$$A / A_{gr} = 13,577312 / 14,377312 = 0,9443567 \approx 0,94.$$

3. Результаты и обсуждение

3.1. Реализация двутаврового ГЗП с одинаковыми параметрами по ширине и высоте

Пример реализации предлагаемого технического решения можно привести, если представить его гнуто-замкнутым двутавром с одинаковыми параметрами по ширине и высоте, а в качестве базового объекта для сравнения принять профиль составного сечения двутавровой формы, скомпонованный из парных элементов швеллерного очертания (рис. 9, а). Парные элементы представляют собой профили повышенной жесткости марок ПГС100Ш (профили гнутые стальные, номинальная высота – 100 мм, швеллерного типа) с отношением габаритных размеров по ширине и высоте $b/h = 49/102 = 0,4803921 = 1/2,0816326 \approx 1/2$ (рис. 9, б) [42], что обеспечивает профилю базового объекта отношение размеров ширины и высоты, практически совпадающее с аналогичным отношением двутаврового ГЗП:

$$n = U/V = 2 \times 49/102 = 0,9607843 = 1/1,0408163 \approx 1/1.$$

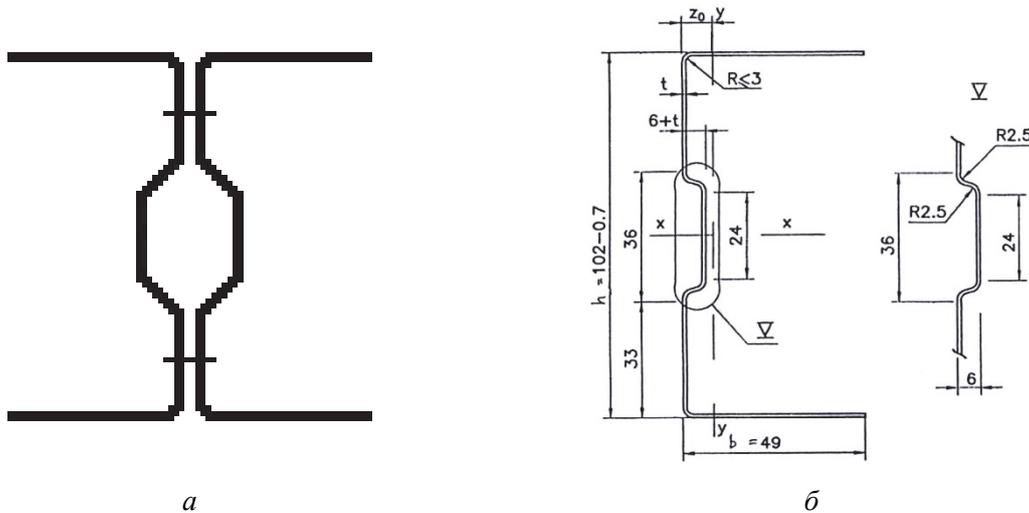


Рис. 9. Схемы гнутых профилей:
а – составного сечения двутавровой формы; б – швеллерного типа
[Figure 9. Schemes of bent profiles:
а – composite section of I-shaped; б – channel type]

Для начала примера реализации необходимо рассчитать профиль базового объекта, скомпонованного из пары самых тонкостенных гнутых элементов с сечением $102 \times 49 \times 0,8$ мм:

$$A_{gr} = 2A_{grl} = 2 \times 1,60 = 3,20 \text{ см}^2 (100 \%); \quad A = 2A_l = 2 \times 1,33 = 2,66 \text{ см}^2 (100 \%);$$

$$I_x = 2I_{xl} = 2 \times 20,0 = 40,0 \text{ см}^4 (100 \%); \quad W_x = 2I_x / h = 2 \times 40 / 10,0 = 8,0 \text{ см}^3 (100 \%),$$

где эталонные (стоцентные) значения приняты для сопоставления с аналогичными величинами по предлагаемому техническому решению; A_l , I_{xl} , x_{0l} – соответственно площадь сечения, момент инерции сечения относительно оси $x-x$, а также абсцисса центра тяжести того же сечения, обозначенная на схеме как z_0 , но пропущенная в расчетной таблице сортамента и найденная расчетным путем

$$x_{0l} = z_0 = (2 \times 3,3 \times 0,08 \times 0,04 + 2 \times 0,6 \times 0,08 \times 0,34 + 3,6 \times 0,08 \times 0,64 + 2 \times 4,9 \times 0,08 \times 2,45) / 1,60 = 1,35 \text{ см}.$$

Расчетные параметры двутаврового ГЗП с одинаковыми параметрами по ширине и высоте, альтернативного профилю базового объекта, составляют:

$$t = A_{gr} / (5,94U) = 3,20 / (5,94 \times 10,0) = 0,053872 \approx 0,05 \text{ см};$$

$$A_{gr} = 5,94 \times 0,05 \times 10,0 = 2,970 \text{ см}^2 (92,81 \ %);$$

$$A = 0,87 A_{gr} = 0,87 \times 2,97 = 2,584 \text{ см}^2 (97,14 \ %);$$

$$I_x = 0,0065722 A^3 / t^2 = 0,0065722 \times 2,584^3 / 0,05^2 = 45,36 \text{ см}^4 (113,4 \ %);$$

$$W_x = 2I_x / V = 2 \times 45,39 / 10,0 = 9,08 \text{ см}^3 (113,5 \ %).$$

Таблица 1

Расчетные параметры гнутых и гнутозамкнутых профилей
 [Table 1. Design parameters of bent and bent closed profiles]

Профили [Profiles]	Характеристики сечений [Cross section characteristics]				
	$A, \text{ см}^2 [\text{см}^2], \ %$	$A_{gr}, \text{ см}^2 [\text{см}^2], \ %$	A / A_{gr}	$I_x, \text{ см}^4 [\text{см}^4], \ %$	$W_x, \text{ см}^3 [\text{см}^3], \ %$
2ПГС100Ш $t = 0,8 \text{ мм} [\text{mm}]$	2,66 100	3,20 100	0,831	40,0 100	8,0 100
ГЗП [ВСР] 100×100 $t = 0,5 \text{ мм} [\text{mm}]$	2,584 97,14	2,970 92,81	0,870	45,36 113,4	9,08 113,5

Из основных результатов сравнительного расчета, приведенных в табл. 1, следует, что замена профиля базового объекта на двутавровый ГЗП при прочих равных условиях сопровождается уменьшением расхода конструкционного материала и увеличением геометрических (статических) характеристик расчетного сечения нетто.

3.2. Реализация двутаврового ГЗП оптимальной компоновки

Еще один пример реализации предлагаемого технического решения можно привести, если представить его гнутозамкнутым двутавром оптимальной компоновки с отношением параметров по ширине и высоте 1 / 5, 2. За базовый объект для сравнения вполне допустим профиль составного сечения двутаврового очертания из парных элементов (рис. 10, а). Эти элементы представляют собой сигма-профили размера-ми 300×80×2 мм (рис. 10, б) [43].

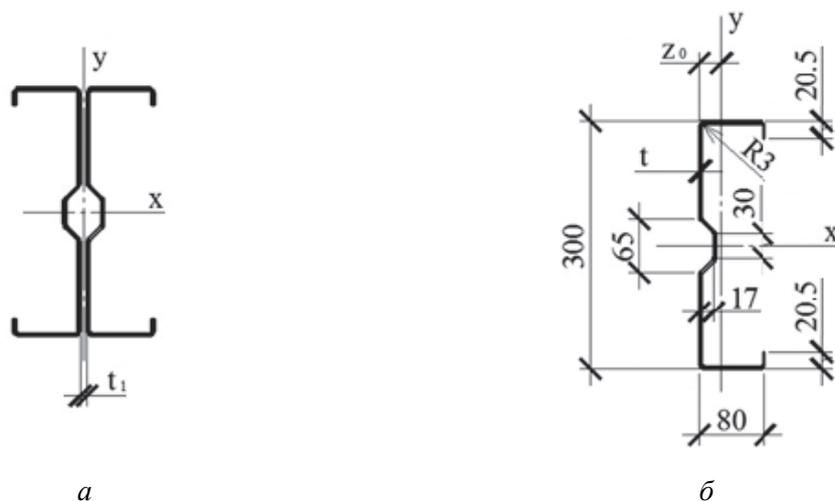


Рис. 10. Схемы гнутых профилей:
 а – составного сечения двутавровой формы; б – Σ -профиль
 [Figure 10. Schemes of bent profiles:
 а – composite section of I-shaped; б – Σ -profile]

Гнутый двутавр базового объекта, скомпонованный из пары сигма-профилей, имеет следующие расчетные параметры редуцированного сечения:

$$A_{gr} = 20,03 \text{ см}^2 (100 \ %); \quad A = 11,63 \text{ см}^2 (100 \ %);$$

$$I_x = 753,25 \text{ см}^4 (100 \ %); \quad W_x = 32,70 \text{ см}^3 (100 \ %),$$

где эталонные (стоцентные) значения приняты для сопоставления с аналогичными величинами по предлагаемому техническому решению.

Расчетные параметры двутаврового ГЗП оптимальной компоновки (с отношением размеров по ширине и высоте 1/5,2), альтернативного гнутому двутавру базового объекта, составляют:

$$U = nV = 0,1916202 \times 300 = 57,48606 \approx 57,5 \text{ мм};$$

$$t = A_{gr} / (14,377312U) = 20,03 / (14,377312 \times 5,75) = 0,2422899 \approx 0,24 \text{ см};$$

$$A_{gr} = 14,377312 \times 0,24 \times 5,75 = 19,84069 \approx 19,84 \text{ см}^2 (99,05 \ %);$$

$$A = 13,577312tU = 13,577312 \times 0,24 \times 5,75 = 18,73669 \approx 18,74 \text{ см}^2 (161,1 \ %);$$

$$I_x = 0,0178643A^3 / t^2 = 0,0178643 \times 18,74^3 / 0,24^2 = 2041,14 \text{ см}^4 (271,0 \ %);$$

$$W_x = 2I_x / V = 2 \times 2041,14 / 30,0 = 136,076 \text{ см}^3 (416,1 \ %).$$

Таблица 2

Расчетные параметры гнутых и гнутозамкнутых профилей
[Table 2. Design parameters of bent and bent closed profiles]

Профили [Profiles]	Характеристики сечений [Cross section characteristics]				
	$A, \text{ см}^2 [\text{см}^2], \ %$	$A_{gr}, \text{ см}^2 [\text{см}^2], \ %$	A / A_{gr}	$I_x, \text{ см}^4 [\text{см}^4], \ %$	$W_x, \text{ см}^3 [\text{см}^3], \ %$
2Σ 300×80 $t = 2,0 \text{ мм} [\text{мм}]$	11,63 100	20,03 100	0,581	753,25 100	32,70 100
ГЗП [ВСП] 300×57,5 $t = 2,4 \text{ мм} [\text{мм}]$	18,74 161,1	19,84 99,05	0,945	2041,14 271,0	136,076 416,1

Как видно из табл. 2, расчетный переход от составных двутавров из сигма-профилей к двутавровым ГЗП оптимальной компоновки приводит, с одной стороны, к уменьшению расхода конструкционного материала, а с другой стороны – к увеличению геометрических (статических) характеристик и, как следствие, росту несущей способности.

В целом такой итог представляется достаточно корректным обоснованием перспективности предлагаемых профилей для их дальнейшей проработки и оптимизации применительно к несущим конструкциям зданий и сооружений.

4. Заключение

Расчетные параметры двутавровых ГЗП в зависимости от отношения параметров ширины и высоты по новому техническому решению и основные результаты их оптимизации более наглядны на графиках (рис. 11), где на оси ординат для единиц измерений использованы обозначения площади сечения и толщины листовой полосы, подлежащей зигзагообразному резу на четыре заготовки: $A = \text{const}$, $t = \text{const}$.

Итоговые графики позволяют сделать некоторые выводы и обобщения.

1. Двутавровый ГЗП с двойной стенкой и двумя трубчатými полками из листовых заготовок одинаковой толщины имеет компактное сечение, момент сопротивления которого максимален при отношении размеров ширины и высоты, равном 1/5,2 по средней линии расчетного сечения. При этом внутренние грани его стенки и полки имеют в разрезе форму плоскооувального полукольца.

2. Двутавровый ГЗП с двойной стенкой и двумя трубчатými полками из листовых заготовок разных толщин может оказаться не менее рациональным и эффективным, чем такой же ГЗП из листовых загото-

вок одинаковой толщины. В частности, практический интерес представляет продолжение расчета оптимальной компоновки составного сечения такого профиля в пределах всего интервала отношения толщин.

3. Если отношение размеров ширины и высоты двутаврового ГЗП составляет 1/1 по средней линии расчетного сечения, внутренние грани его стенки и полки имеют в разрезе форму круглого полукольца. Расчетные параметры такого профиля обладают фиксированными значениями, при которых ширина равна радиусу, высота – диаметру полукольцевой грани, а величина этих фиксированных значений зависит от отношения толщин его полков и стенки. Если развивать профиль в ширину при постоянной высоте, равной диаметру, то его двутавровое очертание трансформируется в Н-образное. В случае развития профиля по высоте при постоянной ширине, равной радиусу, увеличивается его сходство с прокатными и сварными двутаврами.

4. Двутавровые ГЗП с трубчатыми полками по новому техническому решению достаточно рациональны и эффективны. Они достаточно универсальны для оптимального проектирования бистальных и перфорированных вариантов. Вполне очевидна также их перспективность в легких тонкостенных конструкциях зданий и сооружений, технико-экономические характеристики которых можно повысить за счет дополнительной оптимизации листовых заготовок, унифицированных для швеллерных и двутавровых профилей.

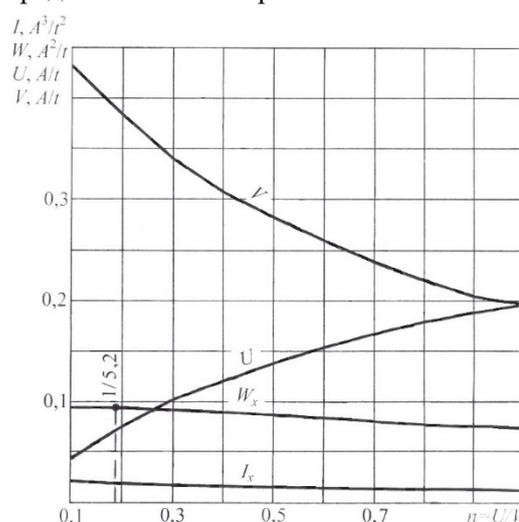


Рис. 11. Графики расчетных параметров двутавровых ГЗП в зависимости от отношения размеров их ширины и высоты
[Figure 11. Graphs of the design parameters of I-shaped BCP in depending on the ratio of their width and height sizes]

Список литературы

1. Мельников Н.П. Металлические конструкции: современное состояние и перспективы развития. М.: Стройиздат, 1983. 546 с.
2. Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А. Критерий оценки оптимальных решений при формировании кусочно-постоянных участков полки двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний // Вестник ТГАСУ. 2020. Т. 22. № 1. С. 92–105. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-1-92-105>
3. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Optimal solutions for creations in rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 2. Numerical examples // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. Vol. 15. No. 4. Pp. 101–110.
4. Перельмутер А.В. Конструктивная форма номер один // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. 2012. № 1. С. 27–39.
5. Ведяков И.И., Конин Д.В. О совершенствовании отечественных сортов двутавровых профилей с параллельными гранями полков и развитии норм проектирования современных металлических конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 3. С. 50–56.
6. Ведяков И.И., Конин Д.В., Еремеев П.Г. Разработка нового сортамента (ГОСТ Р) для выпуска двутавров с широкими полками // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2017. № 3–4. С. 40–43.
7. Sun Y., Zhao O. Material response and local stability of high-chromium stainless steel welded I-sections // Engineering Structures. 2019. No. 178. Pp. 212–226. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.10.024>
8. Нежданов К.К., Кузьмишкин А.А., Рубликов С.Г. Эффективный прокатный профиль // Известия вузов. Строительство. 2006. № 1. С. 105–108.
9. Патент РФ № 2232125. Балка / К.К. Нежданов, В.А. Туманов, А.К. Нежданов, А.С. Лаштанкин. 2004. Бюл. № 19. URL: https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=REPAT&DocNumber=21895068&TypeFile=html (дата обращения: 24.04.2020).
10. Брудка Я., Лубиньски М. Легкие стальные конструкции. М.: Стройиздат, 1974. С. 199–201.
11. Патент РФ № 176462. Многопролетная балка / В.В. Веселов, А.М. Федоров. 2018. Бюл. № 2. URL: https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPM&DocNumber=176462&TypeFile=html (дата обращения: 24.04.2020).
12. Катюшин В.В. Здания с каркасами из стальных рам переменного сечения. М.: АСВ, 2018. 1072 с.
13. United States Patent No. 1360720. Metal construction / E.E. Brown, D.J. Mooney. 1920, Nov. 30.

14. Патент РФ № 2043467. Сборно-разборная двутавровая балка с полыми полками / М.Е. Докторова. 1995. Бюл. № 24. URL: https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2043467&TypeFile=html (дата обращения: 24.04.2020).
15. Авторское свидетельство СССР № 314364. Двутавровая балка / А. Лантернье. 1971. Бюл. № 27. URL: https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=314364&TypeFile=html (дата обращения: 24.04.2020).
16. United States Patent No. 5501053. Interengageable structural members / L.D. Goleby. 1996, Mar. 26.
17. United States Patent No. 3342007. Structural member / K.J.W. Merson. 1967, Sept. 19.
18. Патент РФ № 2685013. Швеллерный гнутозамкнутый профиль / А.С. Марутян. 2019. Бюл. № 11. URL: https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2685013&TypeFile=html (дата обращения: 24.04.2020).
19. *Марутян А.С.* Сравнительный расчет оптимальных параметров швеллерных гнутых и гнутозамкнутых профилей // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 6. С. 415–432. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-415-432>
20. Патент РФ № 2680560. Двутавровый гнутозамкнутый профиль (варианты) / А.С. Марутян. 2019. Бюл. № 6. URL: https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2680560&TypeFile=html (дата обращения: 24.04.2020).
21. *Белов Г.И.* К расчету на прочность стержневых элементов легких стальных конструкций при многопараметрическом нагружении // *Вестник гражданских инженеров*. 2019. № 4. С. 13–17. DOI: 10.23968/1999-5571-2019-16-4-13-17.
22. *Yousefi A.M., Lim J.B.P., Clifton G.C.* Web crippling design of cold-formed ferritic stainless steel unlipped channels with fastened flanges under end-two-flange loading condition // *Journal of Constructional Steel Research*. 2019. No. 152. Pp. 12–28. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.03.032.
23. *Jun Ye, Hajirasouliha I., Becque J.* Experimental investigation of local-flexural interactive buckling of cold-formed steel channel columns // *Twin-Walled Structures*. 2019. No. 125. Pp. 245–258. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.01.020>
24. *Марутян А.С.* Гнутозамкнутые профили и расчет их оптимальных параметров // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 1. С. 33–43. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-1-33-43>
25. *Roy K., Mohammadjani Ch., Lim J.B.P.* Experimental and numerical investigation into the behaviour of face-to-face built-up cold-formed steel channel sections under compression // *Thin-Walled Structures*. 2019. No. 134. Pp. 291–309. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.09.045>
26. *Jun Ye, Becque J., Hajirasouliha I., Mojtabaei S.M., Lim J.B.P.* Development of optimum cold-formed steel sections for maximum energy dissipation in uniaxial bending // *Engineering Structures*. 2018. No. 161. Pp. 55–67. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.01.070.
27. *Anbarasu M., Adil Dar M.* Improved design procedure for battened cold-formed steel built-up columns composed of lipped angles // *Journal of Constructional Steel Research*. 2020. No. 164. Pp. 1–13. DOI: 10.1016/j.jcsr.2019.105781.
28. *Корсун Н.Д., Простакишина Д.А.* Применение легких тонкостенных конструкций как способ энергосбережения в стальном строительстве // *Вестник гражданских инженеров*. 2019. № 5. С. 83–89. DOI: 10.23968/1999-5571-2019-16-5-83-89.
29. *Кузнецов И.Л., Гайнетдинов Р.Г.* Болтовой узел соединения холодногнутого профиля с трапециевидной стенкой с применением сплошных втулок // *Известия КГАСУ*. 2020. № 1. С. 85–92.
30. Патент РФ № 2478764. Гнутый стальной профиль и составной строительный элемент на его основе / Л.В. Енджиевский, А.В. Тарасов, И.В. Тарасов. 2013. Бюл. № 10. URL: https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2478764&TypeFile=html (дата обращения: 24.04.2020).
31. *Ye J., Hajirasouliha I., Becque J., Pilakoutas K.* Development of more efficient cold-formed steel channel sections in bending // *Thin-Walled Structures*. 2016. No. 101. Pp. 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.12.021>
32. *Москалев Н.С., Попова Р.А.* Стальные конструкции легких зданий. М.: АСВ, 2003. С. 60–61.
33. *Марутян А.С.* Новый способ перепрофилирования круглых труб и расчет оптимальных параметров для балочных конструкций // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2018. № 1. С. 66–72.
34. *Морозов Ю.А.* Исследование предельных деформации листовой вытяжки с учетом пластического утонения и разрушения материала // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 5. С. 353–359. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-353-359>
35. *Скляднеев А.И., Попова Г.Н.* Оптимальное сечение симметричного двутавра при развитии пластических деформаций и совместном действии продольной силы и изгибающего момента // *Вестник ВолгГАСУ. Серия: Стр-во и архит.* 2013. Вып. 34 (53). С. 57–61.
36. СП 260.132555800.2016. Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутого оцинкованного профиля и гофрированных листов. Правила проектирования / Минстрой России. М., 2016. 124 с.
37. *Марутян А.С.* Оптимизация конструкций из трубчатых (гнуто сварных) профилей квадратных (прямоугольных) и ромбических сечений // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 1. С. 30–38.
38. *Марутян А.С.* Расчет оптимальных параметров полуплоскоовальных труб для ферменных и балочных конструкций // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 2. С. 68–74.

39. Нежданов К.К., Гарькин И.Н. Подкрановая балка с повышенным техническим ресурсом эксплуатации // Региональная архитектура и строительство. 2017. № 3. С. 119–122.
40. Архитектурно-строительная энциклопедия: справочник-словарь / под ред. А.Б. Голышева. М.: АСВ, 2006. С. 53.
41. Справочник по сопротивлению материалов / под ред. Г.С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1988. С. 68–69.
42. Рекомендации по проектированию, изготовлению монтажу ограждающих и несущих конструкций из стальных гнутых профилей повышенной жесткости. М.: ЦНИИПСК имени Н.П. Мельникова, 1999. С. 8–11.
43. Корсун Н.Д., Простакишина Д.А. Анализ НДС составного сечения из тонкостенных профилей с учетом начальных геометрических несовершенств // Академический вестник УралНИИПроект РААСН. 2018. № 4. С. 83–88.

References

1. Melnikov N.P. *Metallicheskie konstruksii: sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya* [Metal constructions: current status and development prospects]. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1983. (In Russ.)
2. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. A criterion for evaluating optimal solutions in the formation of piecewise constant sections of a flange of an I-beam with limited stability or the value of the first frequency of natural vibrations. *Vestnik TGASU*. 2020;22(1):92–105. (In Russ.) <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-1-92-105>
3. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Optimal solutions for creations in rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 2. Numerical examples. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019;15(4):101–110. DOI: 10.22337/2587-9618-2019-15-4-101-110. (In Russ.)
4. Perelmuter A.V. Constructive form number one. *Bulletin of the Donbass National Academy of Construction and Architecture*. 2012;1:27–39. (In Russ.)
5. Vedyakov I.I., Konin D.V. On the improvement of domestic assortments of I-profiles with parallel flange faces and the development of design standards for modern metal structures. *Structural Mechanics and Structural Analysis*. 2014;3:50–56. (In Russ.)
6. Vedyakov I.I., Konin D.V., Ereemeev P.G. Development of a new assortment (GOST R) for the production of I-beams with wide shelves. *Building materials, equipment, technologies of the XXI century*. 2017;3–4:40–43. (In Russ.)
7. Sun Y., Zhao O. Material response and local stability of high-chromium stainless steel welded I-sections. *Engineering Structures*. 2019;178:212–226. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.10.024>
8. Nezhdanov K.K., Kuzmishkin A.A., Publishing S.G. Effective rolling profile. *News of higher educational institutions. Construction*. 2006;1:105–108. (In Russ.)
9. Nezhdanov K.K., Tumanov V.A., Nezhdanov A.K., Lashtankin A.S. *Balka* [Beam]. Russian Federation patent No. 2232125. 2004. Bull. No. 19. (In Russ.) Available from: https://www1.fips.ru/register-doc-view/fips_servlet?DB=REPAT&DocNumber=21895068&TypeFile=html (accessed: 24.04.2020).
10. Brudka J., Lubinski M. *Legkie stal'nye konstruksii* [Lightweight steel structures]. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1974. p. 199–201. (In Russ.)
11. Veselov V.V., Fedorov A.M. *Mnogoproletnaya balka* [Multi-span beam]. Russian Federation patent No. 176462. 2018. Bull. No. 2. (In Russ.) Available from: https://www.fips.ru/register-doc-view/fips_servlet?DB=RUPM&DocNumber=176462&TypeFile=html (accessed: 24.04.2020).
12. Katyushin V.V. *Zdaniya s karkasami iz stal'nykh ram peremennogo secheniya* [Buildings with frames from steel frames of variable section]. Moscow: ASV Publ.; 2018. (In Russ.)
13. Brown E.E., Mooney D.J. *Metal construction*. United States Patent No. 1360720. 1920, Nov. 30.
14. Doktorova M.E. *Sborno-razbornaya dvutavrovaya balka s polymi polkami* [Collapsible I-beam with hollow shelves]. Russian Federation patent No. 2043467. 1995. Bull. No. 24. (In Russ.) Available from: https://www.fips.ru/register-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2043467&TypeFile=html (accessed: 24.04.2020).
15. Lanternier A. *Dvutavrovaya balka* [I-beam]. USSR author's certificate No. 314364. 1971. Bull. No. 27. (In Russ.) Available from: https://www.fips.ru/register-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=314364&TypeFile=html (accessed: 24.04.2020).
16. Goleby L.D. *Interengageble structural members*. United States Patent No. 5501053. 1996, Mar. 26.
17. Merson K.J.W. *Structural member*. United States Patent No. 3342007. 1967, Sept. 19.
18. Marutyanyan A.S. *Shvellernyi gnutozamknutyi profil* [Channel bent closed profile]. Russian Federation patent No. 2685013. 2019. Bull. No. 11. (In Russ.) Available from: https://www.fips.ru/register-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2685013&TypeFile=html (accessed: 24.04.2020).
19. Marutyanyan A.S. Comparative calculation of optimal parameters of channel bent and bent closed profiles. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(6):415–432. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-415-432>.
20. Marutyanyan A.S. *Dvutavrovyyi gnutozamknutyi profil* (varianty) [I-beam bent closed profile (options)]. Russian Federation patent No. 2680560. 2019. Bull. No. 6. (In Russ.) Available from: <https://www1.fips.ru/ofpstorage/Doc/IZPM/RUNWC1/000/000/002/013/%D0%98%D0%97-02685013-00001/document.pdf> (accessed: 24.04.2020).

21. Belov G.I. To the calculation of the strength of the core elements of light steel structures with multi-parameter loading. *Bulletin of civil engineers*. 2019;4:13–17. (In Russ.)
22. Yousefi A.M., Lim J.B.P., Clifton G.C. Web crippling design of cold-formed ferritic stainless steel unlipped channels with fastened flanges under end-two-flange loading condition. *Journal of Constructional Steel Research*. 2019;152:12–28. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.03.032.
23. Jun Ye, Hajirasouliha I., Becque J. Experimental investigation of local-flexural interactive buckling of cold-formed steel channel columns. *Twin-Walled Structures*. 2019;125:245–258. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.01.020>
24. Marutyan A.S. Bent profiles and calculation of their optimal parameters. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(1):33–43. (In Russ.)
25. Roy K., Mohammadjani Ch., Lim J.B.P. Experimental and numerical investigation into the behavior of face-to-face built-up cold-formed steel channel sections under compression. *Thin-Walled Structures*. 2019;134:291–309. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.09.045>
26. Jun Ye, Becque J., Hajirasouliha I., Mojtabaei S.M., Lim J.B.P. Development of optimum cold-formed steel sections for maximum energy dissipation in uniaxial bending. *Engineering Structures*. 2018;161:55–67. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.01.070.
27. Anbarasu M., Adil Dar M. Improved design procedure for battened cold-formed steel built-up columns composed of lipped angles. *Journal of Constructional Steel Research*. 2020;164:1–13. DOI: 10.1016/j.jcsr.2019.105781.
28. Korsun N.D., Prostakishina D.A. The use of light thin-walled structures as a way of energy saving in steel construction. *Bulletin of civil engineers*. 2019;5:83–89. (In Russ.)
29. Kuznetsov I.L., Gaynetdinov R.G. Bolt assembly of cold-formed sections with a trapezoidal wall using continuous bushings. *News of KGASU*. 2020;1:85–92. (In Russ.)
30. Endzhiievsky L.V., Tarasov A.V., Tarasov I.V. *Gnutyi stal'noi profil' i sostavnoi stroitel'nyi element na ego osnove* [Bent steel profile and composite building element based on it]. Russian Federation patent No. 2478764. 2013. Bull. No. 10. (In Russ.) Available from: https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2478764&TypeFile=html (accessed: 24.04.2020).
31. Jun Ye, Hajirasouliha I., Becque J., Pilakoutas K. Development of more efficient cold-formed steel channel sections in bending. *Thin-Walled Structures*. 2016;101:1–13. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.12.021>
32. Moskalev N.S., Popova R.A. *Stal'nye konstrukcii legkih zdaniy* [Steel structures of light buildings]. Moscow: ASV Publ.; 2003. (In Russ.)
33. Marutyan A.S. A new way of reprofiling round pipes and calculating optimal parameters for beam structures. *Structural Mechanics and Structural Analysis*. 2018;1:66–72. (In Russ.)
34. Morozov Yu.A. Investigation of the ultimate deformation of sheet hoods taking into account plastic thinning and fracture of the material. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(5):353–359. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-353-359>
35. Sklyadnev A.I., Popova G.N. The optimal section of a symmetric I-beam during the development of plastic deformations and the combined action of longitudinal force and bending. *Bulletin of VolgGASU. Series: Construction and architecture*. 2013;34(53):57–61. (In Russ.)
36. SP 260.132555800.2016. *Konstruktzii stal'nye tonkostennyye iz kholodnognutykh otsinkovannykh profilei i gofirovannykh listov. Pravila proektirovaniya* [Thin-walled steel structures made of cold-formed galvanized profiles and corrugated sheets. Design Rules]. Moscow: Ministry of Construction of Russia Publ.; 2016. (In Russ.)
37. Marutyan A.S. Optimization of structures from tubular (bent-welded) profiles of square (rectangular) and rhombic sections. *Construction Mechanics and Structural Analysis*. 2016;1:30–38. (In Russ.)
38. Marutyan A.S. Calculation of optimal parameters of half-flat pipe for truss and beam structures. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2019;2:68–74. (In Russ.)
39. Nezhdanov K.K., Garkin I.N. Crane beam with increased technical service life. *Regional architecture and construction*. 2017;3:119–122. (In Russ.)
40. Golysheva A.B. (Ed.). *Arkhitekturno-stroitel'naya entsiklopediya: spravochnik-slovar'* [Architecture and Construction Encyclopedia: Reference Dictionary]. Moscow: ASV Publ.; 2006. (In Russ.)
41. Pisarenko G.S. (Ed.). *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Handbook of resistance to materials]. Kiev: Naukova Dumka Publ.; 1988. p. 68–69. (In Russ.)
42. *Rekomendatsii po proektirovaniyu, izgotovleniyu montazhu ograzhdayushchikh i nesushchikh konstruktzii iz stal'nykh gnutnykh profilei povyshennoi zhestkosti* [Recommendations for the design, manufacture of installation of enclosing and supporting structures from steel bent profiles of increased rigidity]. Moscow: TSNIIPSK imeni N.P. Melnikova Publ.; 1999. p. 8–11. (In Russ.)
43. Korsun N.D., Prostakishina D.A. Analiz NDS sostavnogo secheniya iz tonkostennykh profilej s uchetom nachal'nykh geometricheskikh nesovershenstv [Analysis of the stress-strain state of a composite section made of thin-walled profiles taking into account the initial geometric imperfections]. *Akademicheskij vestnik UralNIiproekt RAASN*. 2018;4:83–88. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-351-360
УДК 624.04:531.391.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

Аналитическая оценка частоты собственных колебаний фермы с произвольным числом панелей

М.Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Российская Федерация, 111250, Москва, Красноказарменная, 14
c216@ya.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 3 июля 2020 г.
Доработана: 11 сентября 2020 г.
Принята к публикации: 19 сентября 2020 г.

Аннотация

Цель исследования – вывод формулы зависимости первой частоты собственных колебаний плоской статически определимой балочной фермы с параллельными поясами от числа панелей, размеров и одинаковых масс, сосредоточенных в узлах нижнего пояса фермы. Решетка фермы треугольная с вертикальными стойками. В решении использованы операторы системы компьютерной математики Maple. *Методы.* Основой для верхней оценки искомой частоты колебаний регулярной фермы является энергетический метод. В качестве формы прогиба фермы взят прогиб от действия равномерно распределенной нагрузки. Предполагаются только вертикальные перемещения грузов. Амплитудные значения прогиба фермы вычисляются по формуле Максвелла – Мора. Усилия в стержнях определяются в символьной форме методом вырезания узлов. Зависимость решения от числа панелей получается индуктивным обобщением серии решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. Для последовательностей коэффициентов искомой формулы составляются и решаются однородные линейные рекуррентные уравнения четвертого порядка. *Результаты.* Решение сравнивается с численным решением, полученным из анализа всего спектра собственных частот колебаний системы масс, расположенных в узлах фермы. Частотное уравнение составляется и решается с помощью операторов поиска собственных значений в системе Maple. Показано, что полученная аналитическая оценка отличается от численного решения на доли процента. При этом с увеличением числа панелей погрешность энергетического метода монотонно уменьшается. Приведена более простая нижняя оценка частоты колебаний по методу Донкерлея. Точность оценки снизу значительно меньше оценки сверху, зависит от размеров и числа панелей.

Ключевые слова: балочная ферма, собственные колебания, нижняя оценка частоты, верхняя оценка частоты, метод Донкерлея, Maple, индукция

Для цитирования

Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка частоты собственных колебаний фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 351–360. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-351-360>

Кирсанов Михаил Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Института энергомашиностроения и механики; eLIBRARY SPIN-код: 8679-6853, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8588-3871>, ResearcherID: H-9967-2013, IStinaResearcherID: 2939132.

© Кирсанов М.Н., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Analytical assessment of the frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels

Mikhail N. Kirsanov

National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, 14 Krasnokazarmennaya St, Moscow, 111250, Russian Federation
c216@ya.ru

Article history

Received: July 3, 2020

Revised: September 11, 2020

Accepted: September 19, 2020

Abstract

The aim of the work is to derive a formula for the dependence of the first frequency of the natural oscillations of a planar statically determinate beam truss with parallel belts on the number of panels, sizes and masses concentrated in the nodes of the lower truss belt. Truss has a triangular lattice with vertical racks. The solution uses Maple computer math system operators. *Methods.* The basis for the upper estimate of the desired oscillation frequency of a regular truss is the energy method. As a form of deflection of the truss taken deflection from the action of a uniformly distributed load. Only vertical mass movements are assumed. The amplitude values of the deflection of the truss is calculated by the Maxwell – Mohr’s formula. The forces in the rods are determined in symbolic form by the method of cutting nodes. The dependence of the solution on the number of panels is obtained by an inductive generalization of a series of solutions for trusses with a successively increasing number of panels. For sequences of coefficients of the desired formula, fourth-order homogeneous linear recurrence equations are compiled and solved. *Results.* The solution is compared with the numerical one, obtained from the analysis of the entire spectrum of natural frequencies of oscillations of the mass system located at the nodes of the truss. The frequency equation is compiled and solved using Eigenvalue search operators in the Maple system. It is shown that the obtained analytical estimate differs from the numerical solution by a fraction of a percent. Moreover, with an increase in the number of panels, the error of the energy method decreases monotonically. A simpler lower bound for the oscillation frequency according to the Dunkerley method is presented. The accuracy of the lower estimate is much lower than the upper estimate, depending on the size and number of panels.

Keywords: beam truss, natural oscillations, lower frequency estimate, upper frequency estimate, Dunkerley method, Maple, induction

For citation

Kirsanov M.N. Analytical assessment of the frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):351–360. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-351-360>

1. Введение

Наряду с жесткостью и прочностью конструкции значение первой частоты колебаний фермы является одной из ее важнейших эксплуатационных характеристик. Эта величина входит в динамические расчеты вынужденных и затухающих колебаний фермы, в решения задач вибрации и сейсмостойкости. Существуют численные расчеты спектров колебаний ферм, реализуемые в различных специализированных пакетах [1–6]. Несмотря на широкое распространение численных методов расчета, их высокую точность и большой выбор доступных моделей ферм (линейных и нелинейных) для анализа частот колебаний, аналитические методы, сводящиеся к сравнительно простым формулам, редки.

С появлением в арсенале инженера современных систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Reduce и др.) аналитические методы становятся все более распространенными [7–12]. Формулы, полученные в результате решения уравнений в символьном виде, удобны как для оценки точности решений в специализированных пакетах, так и для простого предварительного расчета частотных характеристик сооружения. Наиболее значимы решения применимые для широкого класса систем. Расширение класса рассчитываемых аналитически систем в регулярных фермах достигается введением в набор параметров формулы числа панелей. Возможности аналитических решений для регулярных статически определимых ферм (плоских и пространственных) рассматривались в трудах R.G. Hutchinson, N.A. Fleck,

Mikhail N. Kirsanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength of the Institute of Power Machinery and Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 8679-6853, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8588-3871>, ResearcherID:H-9967-2013, IstinaresearcherID: 2939132.

F.W. Zok, R.M. Latture, M.R. Begley [13–15]. В работах [16; 17] предложены алгоритмы расчета динамики в общем случае статически неопределимых стержневых конструкций в аналитической форме с применением методов строительной механики. В настоящем исследовании ставится цель получить аналитическое решение задачи о низшей частоте собственных колебаний балочной фермы (рис. 1) в виде формулы, включающей в себя не только размеры и инертные свойства фермы, но и число панелей.

2. Методы

Энергетический метод. Масса фермы с треугольной решеткой и стойками моделируется одинаковыми грузами в узлах (шарнирах) нижнего пояса. Рассматриваются только вертикальные колебания грузов. Число степеней свободы системы грузов фермы с n панелями равно $N = 2n - 1$. Длина каждой панели $2a$, высота h . Рассматриваемая ферма относится к числу регулярных статически определимых конструкций, для которых доступны аналитические методы нахождения зависимостей усилий и деформаций от числа ячеек регулярности (здесь – панелей).

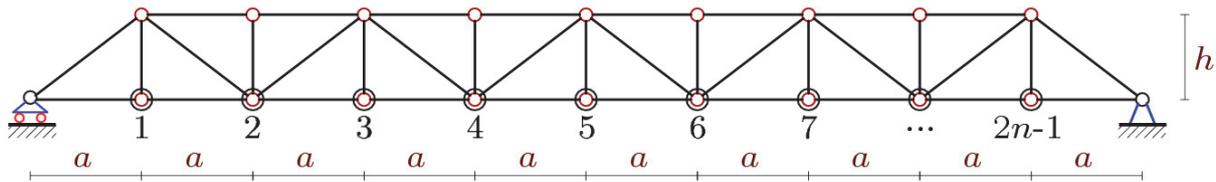


Рис. 1. Схема фермы, $n = 5$
 [Figure 1. Scheme of the truss, $n = 5$]

Система дифференциальных уравнений динамики грузов имеет матричный вид:

$$M_N \ddot{Y} + D_N Y = 0, \tag{1}$$

где $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ – вектор вертикальных перемещений масс $1, \dots, N$; D_N – матрица жесткости; M_N – матрица инерции размером $N \times N$; \ddot{Y} – вектор ускорений.

В случае одинаковых масс грузов матрица инерции имеет диагональный вид $M_N = mI_N$. Элементы матрицы податливости B_N , являющейся обратной к матрице жесткости D_N , определяются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\mu-3} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \tag{2}$$

где EF – жесткость стержней; $S_{\alpha}^{(i)}$ – усилие в стержне α от действия единичной вертикальной силы в узле i ; l_{α} – длина стержня α ; $\mu = 8n$ – число стержней фермы вместе с тремя стержнями, моделирующими подвижную и неподвижную опоры.

Опорные стержни принимаются недеформируемыми, суммирование в (2) на эти стержни не распространяется. Усилия в стержнях фермы определяются одновременно с реакциями опор из решения системы уравнений равновесия всех узлов фермы. Матрица системы строится по значениям направляющих косинусов усилий, найденных по данным координат концов стержней. Решение ищется в символьной форме с использованием возможностей компьютерной математики Maple [18; 19].

Умножая (1) слева на B_N с учетом замены $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$, соответствующей колебаниям вида

$$y_k = u_k \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{3}$$

сводим задачу к проблеме собственных чисел матрицы B_N : $B_N Y = \lambda Y$, где $\lambda = 1 / (m\omega^2)$ – собственное число матрицы B_N ; ω – собственная частота колебаний.

Усилия $S_\alpha^{(i)}$ в стержнях фермы, входящие в элементы матрицы \mathbf{B}_N , определяются из решения системы уравнений узлов фермы, в которую входят также и реакции опор. Для этого в системе компьютерной математики Maple составляется матрица уравнений равновесия узлов, состоящая из направляющих косинусов усилий в стержнях.

Получить аналитические решения для фермы с произвольным числом панелей не удастся. Возможностей системы компьютерной математики Maple хватает только для анализа ферм с $n = 1, 2, \dots, 6$. Например, для $n = 2$ оператором Eigenvalues получены следующие характеристические числа:

$$\lambda_1 = (a^3 + c^3 + 2h^3) / (2h^2 EF),$$

$$\lambda_{2,3} = (2c^3 + h^3 + 6a^3 \pm (2c^6 + 16a^3c^3 + h^6 + 32a^6)^{(1/2)}) / (2h^2 EF).$$

Соответствующие частоты вычисляются по формуле $\omega = \sqrt{1/(m\lambda)}$. Эти частоты включены также во все спектры частот ферм рассматриваемого вида с четным числом панелей, что подтверждает свойство вложения спектров регулярных систем [20; 21].

Для того чтобы найти аналитическое выражение первой частоты для произвольного числа панелей в ферме, используем приближенный энергетический метод. Формула Рэлея, следующая из равенства максимальных значений кинетической и потенциальной энергий:

$$T_{\max} = \Pi_{\max}. \quad (4)$$

Кинетическая энергия масс в узлах нижнего пояса:

$$T_{\max} = \max \sum_{k=1}^N mv_k^2 / 2.$$

Согласно (3) вертикальная скорость массы k имеет вид

$$v_k = \dot{y}_k = \omega u_k \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Отсюда, полагая $\max(\sin(\omega t + \varphi_0)) = 1$, получаем

$$T_{\max} = \omega^2 \sum_{k=1}^N mu_k^2 / 2, \quad (5)$$

где амплитуда вертикального смещения вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$u_k = \sum_{\alpha=1}^{\mu-3} S_\alpha^{(P)} \tilde{S}_\alpha^{(k)} l_\alpha / (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{\mu-3} \tilde{S}_\alpha^{(P)} \tilde{S}_\alpha^{(k)} l_\alpha / (EF) = P \tilde{u}_k.$$

Введены обозначения $S_\alpha^{(P)}$ – усилие в стержне $\alpha = 1, \dots, \mu$ от действия нагрузки P , распределенной по узлам нижнего пояса, и $\tilde{S}_\alpha^{(k)}$ – усилие в этом же стержне от единичной (безразмерной) нагрузки, приложенной к массе с номером k , $\tilde{S}_\alpha^{(P)} = S_\alpha^{(P)} / P$. Выбор такой нагрузки определяется близостью изогнутой оси нижнего пояса ферме колебаний системы грузов с первой частотой. Таким образом, (5) приобретает вид

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2 / 2, \quad (6)$$

где $\tilde{u}_k = u_k / P = \sum_{\alpha=1}^{\mu} \tilde{S}_\alpha^{(P)} \tilde{S}_\alpha^{(k)} l_\alpha / (EF)$ – амплитуда смещений массы с номером k под действием распределенной нагрузки (рис. 2), отнесенная к величине P .

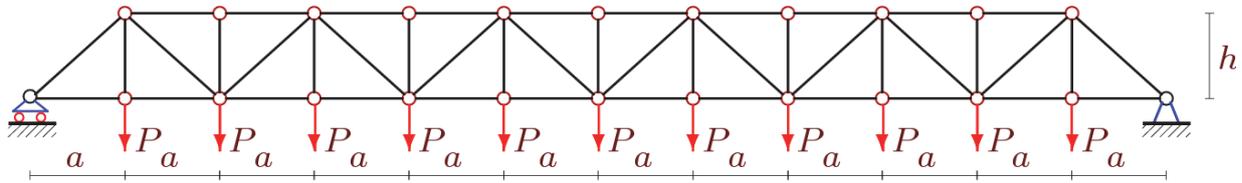


Рис. 2. Равномерно распределенная нагрузка, $n = 6$
 [Figure 2. Uniformly distributed load, $n = 6$]

Потенциальная энергия деформации стержней фермы распределенной нагрузкой имеет вид

$$\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^{\mu} S_{\alpha}^{(P)} \Delta l_{\alpha} / 2 = \sum_{\alpha=1}^{\mu} (S_{\alpha}^{(P)})^2 l_{\alpha} / (2EF).$$

В силу линейности задачи $S_{\alpha}^{(P)} = P \sum_{k=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(k)}$. Отсюда

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{\mu} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \sum_{k=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k. \quad (7)$$

Из (4) – (6) следует верхняя оценка первой частоты колебаний фермы (формула Релея):

$$\omega_R^2 = \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k / \sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2. \quad (8)$$

Для получения требуемой зависимости частоты от числа панелей перемещения \tilde{u}_k должны быть получены так же, как функции n . План решения следующий: 1) расчет перемещения массы с номером 1 при различных значениях n с последующим определением общего члена последовательностей $\tilde{u}_1(n)$; 2) расчет перемещений масс 2, 3, 4, ...; 3) обобщение формул $\tilde{u}_1(n), \tilde{u}_2(n), \tilde{u}_3(n), \dots$ по номеру массы и получение искомой зависимости $\tilde{u}_k(n)$.

Выведем формулу для смещения первой массы от действия распределенной нагрузки.

Расчет перемещения для ферм с различным числом панелей показывает, что вид решения не зависит от n :

$$\tilde{u}_k = \sum_{i=1}^3 C_i r_i^3 / (h^2 EF),$$

где для сокращения записи введены обозначения размеров фермы $r_1 = a, r_2 = c = \sqrt{a^2 + h^2}, r_3 = h$. Коэффициенты $C_i, i = 1, 2, 3$ зависят только от n . Для выявления закономерности в последовательности решений потребовалось рассчитать прогибы ферм с числом панелей $n = 1, \dots, 8$. Для значений коэффициента C_1 получена следующая последовательность: 5, 35/2, 42, 165/2, 143, 455/2, 340, 969/2. Для ее элементов оператор `rgf_findrecur` системы Maple возвращает рекуррентное уравнение $C_{n,1} = 4C_{n-1,1} - 6C_{n-2,1} + 4C_{n-3,1} - C_{n-4,1}$. Оператор `rsolve` с использованием начальных значений 5, 35/2, 42, 165/2 дает решение этого уравнения: $C_1 = n(4n^2 - 1) / 6$. Число рассчитываемых ферм $n = 1, \dots, 8$ определяется возможностью получить рекуррентное уравнение. Если длина последовательности недостаточно велика, оператор `rgf_findrecur` не дает решения. Аналогично при других значениях номеров масс k имеем следующие выражения:

$$k = 2, \quad C_1 = (n-1)(4n^2 + 4n - 3) / 3,$$

$$k = 3, \quad C_1 = (2n-3)(2n^2 + 3n - 4) / 2,$$

$$k = 4, \quad C_1 = 2(n-2)(4n^2 + 8n - 15) / 3,$$

$$k = 5, \quad C_1 = 5(2n-5)(2n^2 + 5n - 12) / 6,$$

...

Обобщение этих формул по k с применением операторов Maple дает окончательное выражение зависимости коэффициента C_1 от номера массы и числа панелей:

$$C_1(k) = k(k-2n)(k^2 - 2nk - 1 - 4n^2) / 12. \quad (9)$$

Также в два этапа, обобщением сначала по n , затем по k , получаются и другие коэффициенты:

$$C_2(k) = -k(k-2n) / 2, \quad C_3(k) = (1 - (-1)^k) / 2. \quad (10)$$

Отдельно вычислим числитель и знаменатель в (8). Числитель представим в виде

$$\sum_{k=1}^N \tilde{u}_k = \sum_{\alpha=1}^3 g_{\alpha} r_{\alpha}^3 / (h^2 EF), \quad (11)$$

где $g_i = \sum_{k=1}^N C_i(k)$, $i = 1, 2, 3$.

Конечные суммы коэффициентов (9) – (10) дает оператор sum системы Maple:

$$g_1 = (16n^4 - 1) / 30, \quad g_2 = (4n^2 - 1) / 6, \quad g_3 = 1. \quad (12)$$

Знаменатель (8):

$$\sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2 = m \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 f_{\alpha\beta} r_{\alpha}^3 r_{\beta}^3 / (h^4 E^2 F^2), \quad (13)$$

где обозначено $f_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^N C_{\alpha}(k) C_{\beta}(k)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Посредством суммирования оператором sum получаем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} f_{11} &= n(4n^2 - 1)(496n^6 + 328n^4 + 103n^2 + 18) / 11340, \\ f_{22} &= n(16n^4 - 1) / 60, \quad f_{33} = n, \\ f_{12} &= n(4n^2 - 1)(68n^4 + 31n^2 + 6) / 1260, \\ f_{13} &= n(8n^4 + 5n^2 + 2) / 30, \quad f_{23} = n(2n^2 + 1) / 6. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, верхнюю оценку первой частоты фермы в зависимости от числа панелей можно получить по формуле

$$\omega_R^2 = \frac{h^2 EF \sum_{\alpha=1}^3 g_{\alpha} r_{\alpha}^3}{m \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 f_{\alpha\beta} r_{\alpha}^3 r_{\beta}^3} \quad (15)$$

с коэффициентами (12), (14).

Оценка Донкерлея. Нижнюю оценку первой частоты колебаний получим по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (16)$$

где ω_k – частота колебания одной массы m , расположенной в узле $k + 1$ нижнего пояса, принимая нумерацию узлов от левой опоры.

Уравнение (1) в случае колебаний одной массы будет скалярным:

$$m\ddot{y}_k + d_k y_k = 0,$$

где y_k – вертикальное перемещение массы; \ddot{y}_k – вектор ускорений; d_k – коэффициент жесткости (k – номер массы).

Частота колебаний груза $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$. Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^{n-3} (\tilde{S}_\alpha^{(k)})^2 l_\alpha / (EF),$$

где $\tilde{S}_\alpha^{(k)}$ – усилия в стержне с номером α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу $k + 1$ (рис. 3).

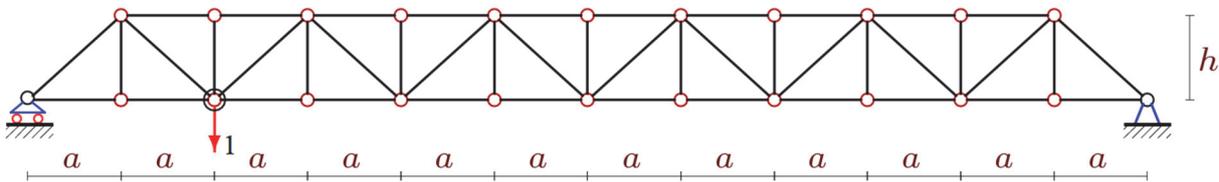


Рис. 3. К определению коэффициента жесткости, $n = 6, k = 2$

[Figure 3. On the determination of stiffness coefficient, $n = 6, k = 2$]

Методом индукции, последовательно рассчитывая смещение сначала массы 1 от действия нагрузки на этот узел при различных числах панелей $n = 1, 2, 3, \dots$ и обобщая эти решения на произвольное число n , затем рассчитывая смещение других масс, прикладывая всякий раз единичную силу к месту положения массы, получаем решение для произвольных значений n и k :

$$\delta_k = \sum_{i=1}^3 C_i r_i^3 / (h^2 EF),$$

где

$$C_1 = k(2k^2 - 4nk - 1)(k - 2n) / (6n),$$

$$C_2 = -k(k - 2n) / (2n),$$

$$C_3 = (1 - (-1)^k) / 2.$$

Из (16) суммированием этих выражений по k получаем нижнюю оценку для первой частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m((32n^4 + 20n^2 - 7)a^3 + 15(4n^2 - 1)c^3 + 90h^3n) / (90h^2 EF). \quad (17)$$

3. Результаты

Оценить точность полученных решений можно графически. Рассмотрим для примера ферму с n панелями высотой $h = 5$ м, длиной панели $a = 3$ м и грузами $m = 100$ кг в узлах нижнего пояса. Жесткость стальных стержней фермы примем $EF = 0,2 \cdot 10^8$ Н. Первая частота ω_R собственных колебаний фермы (15),

полученная по энергетическому методу Рэля, и оценка ω_D Донкерлея (17) с увеличением числа панелей сближаются (рис. 4). Численное же значение ω_1 собственной частоты системы с $N = 2n - 1$ степенями свободы, найденная как минимальная частота полного спектра частот, почти полностью совпадает с оценкой Рэля, кривые полностью сливаются. Для уточненной оценки степени полученного приближения введем относительные погрешности $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$, $\varepsilon_R = |\omega_R - \omega_1| / \omega_1$.

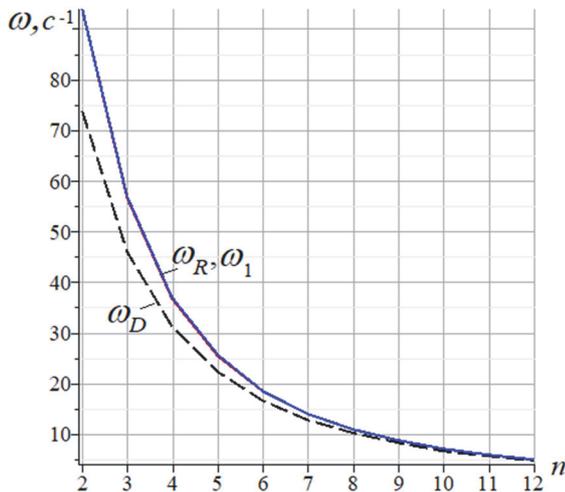


Рис. 4. Первая частота колебаний, полученная тремя способами в зависимости от числа панелей
[Figure 4. The first oscillation frequency obtained by three methods depending on the number of panels]

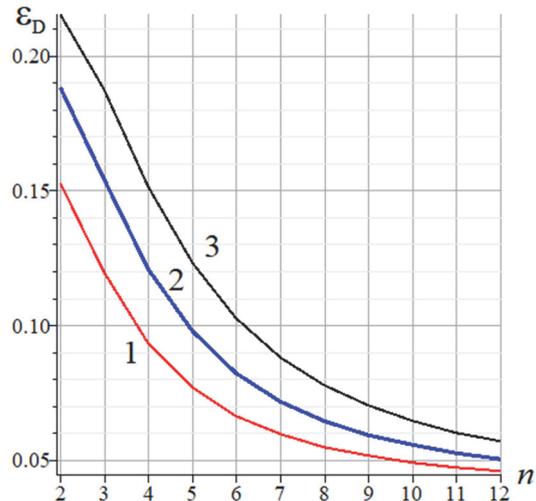


Рис. 5. Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от числа панелей:
 1 – $h = 3$ м; 2 – $h = 4$ м; 3 – $h = 5$ м
[Figure 5. Dunkerley's estimation error depending on the number of panels:
 1 – $h = 3$ m; 2 – $h = 4$ m; 3 – $h = 5$ m]

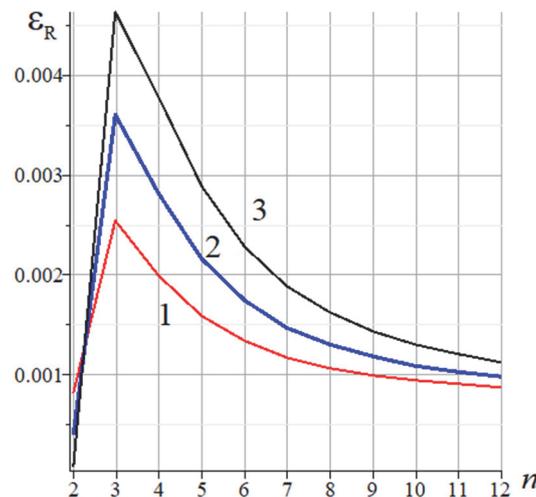


Рис. 6. Погрешность оценки Рэля в зависимости от числа панелей:
 1 – $h = 3$ м; 2 – $h = 4$ м; 3 – $h = 5$ м
[Figure 6. Rayleigh's estimation error depending on the number of panels:
 1 – $h = 3$ m; 2 – $h = 4$ m; 3 – $h = 5$ m]

В зависимости от числа панелей погрешность решения Донкерлея меняется от 4 % при большом числе панелей до 22 % при $n = 2$ (рис. 5). Графики построены для тех же параметров фермы, что и рис. 4. Для фермы с меньшей высотой степень приближения оценки Донкерлея больше.

Оценка Рэля, так же как и оценка Донкерлея, лучше при большем числе панелей (рис. 6), за исключением начального участка кривой, имеющей резкий всплеск при $n = 3$. Главная же особенность оценки, полученной по Рэлю, – весьма высокая ее точность. Точность порядка 0,2 % сопоставима с точ-

ностью входных данных: размеров, упругих характеристик и масс. На рис. 3 кривая ω_1 , найденная численно из анализа спектра системы со многими степенями свободы, практически сливается с кривой зависимости от числа панелей частоты по Рэлею ω_R .

4. Заключение

Для решения поставленной задачи в работе использована система компьютерной математики Maple. Выбор этой программы определялся только предпочтением автора. С не меньшим успехом здесь можно использовать и другие аналогичные программы, например Mathematica или Derive. В основном операторы Maple использовались для составления и решения в символьной форме уравнений равновесия узлов фермы. Определение же общих членов последовательностей можно выполнить в каком-либо онлайн-сервисе, например [22]. По сравнению с решениями задач о прогибе ферм с произвольным числом панелей, полученными методом индукции, формулы для оценок первой частоты оказались заметно сложнее. Однако они имеют замкнутую форму, не содержат сумм и рядов, которые надо вычислять, обрывая суммирование на некотором слагаемом, что вносит элемент субъективности в решение. Полученные формулы также не связаны с применением специальных функций и итеративными вычислениями. Выведенные формулы можно использовать при довольно большом числе панелей, то есть именно в тех случаях, где наиболее вероятно накопление ошибок вычислений. Кроме того, замкнутый аналитический вид решений позволяет применять все средства математического анализа для выявления их особенностей.

Список литературы

1. *Ufimtsev E.* Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses. Part 2. Examples of Calculations // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. Pp. 850–856. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.561.
2. *Tejani G.G., Savsani V.J., Patel V.K., Mirjalili S.* Truss optimization with natural frequency bounds using improved symbiotic organisms search // *Knowledge-Based Systems*. 2018. Vol. 143. Pp. 162–178. DOI: 10.1016/j.knsys.2017.12.012.
3. *Ufimtsev E., Voronina M.* Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. Pp. 1891–1897. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.188
4. *Jalbi S., Bhattacharya S.* Closed form solution for the first natural frequency of offshore wind turbine jackets supported on multiple foundations incorporating soil-structure interaction // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018. Vol. 113 (May). Pp. 593–613. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.06.011>
5. *Kilikevicius A., Fursenko A., Jurevicius M., Kilikeviciene K., Bureika G.* Analysis of parameters of railway bridge vibration caused by moving rail vehicles // *Measurement and Control (United Kingdom)*. 2019. Vol. 52. No. 9–10. Pp. 1210–1219. DOI: 10.1177/0020294019836123.
6. *Алдушкин Р.В., Савин С.Ю.* Исследование работы треугольных ферм при статических и динамических воздействиях // *Строительство и реконструкция*. 2010. № 3 (29). С. 3–6. https://elibrary.ru/download/elibrary_15503961_71987283.pdf (дата обращения: 01.05.2020).
7. *Bolotina T.D.* The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // *Вестник научных конференций*. 2016. № 4–3 (8). С. 7–8.
8. *Тимофеева Т.А.* Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 4 (23). С. 26–33.
9. *Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н.* Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 4 (23). С. 15–25.
10. *Белянкин Н.А., Бойко А.Ю.* Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 1 (20). С. 21–29.
11. *Ткачук Г.Н.* Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2 (21). С. 32–39.
12. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
13. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
14. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756–782.
15. *Zok F.W., Lature R.M., Begley M.R.* Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
16. *Рыбаков Л.С., Мишустин И.В.* Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5. № 2. С. 3–16.

17. Мишустин И.В., Рыбаков Л.С. Колебания плоских упругих ферм ортогональной структуры // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 2. С. 168–184.
18. Бука-Ваиваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 4. С. 510–517.
19. Kirsanov M. Analytical Solution of a Spacer Beam Truss Deflection with an Arbitrary Number of Panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 88 Article No. 8802. DOI: 10.18720/CUBS.88.2.
20. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14–20.
21. Тиньков Д.В. Аналитические решения задач о собственных частотах колебаний регулярных стержневых систем: дис. ... к.т.н. М., 2019. 113 с.
22. WolframAlpha System. URL: <https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/> (accessed: 03.07.2020).

References

1. Ufimtcev E. Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses. Part 2. Examples of Calculations. *Procedia Engineering*. 2017;206:850–856. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.561.
2. Tejani G.G., Savsani V.J., Patel V.K., Mirjalili S. Truss optimization with natural frequency bounds using improved symbiotic organisms search. *Knowledge-Based Systems*. 2018;143:162–178. DOI: 10.1016/j.knsys.2017.12.012.
3. Ufimtsev E., Voronina M. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations. *Procedia Engineering*. 2016;150:1891–1897. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.188.
4. Jalbi S., Bhattacharya S. Closed form solution for the first natural frequency of offshore wind turbine jackets supported on multiple foundations incorporating soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018;113(May):593–613. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.06.011>
5. Kilikevicius A., Fursenko A., Jurevicius M., Kilikeviciene K., Bureika G. Analysis of parameters of railway bridge vibration caused by moving rail vehicles. *Measurement and Control (United Kingdom)*. 2019;52(9–10):1210–1219. DOI: 10.1177/0020294019836123.
6. Aldushkin R.V., Savin S.Yu. Investigation of the operation of triangular farms with static and dynamic effects. *Construction and reconstruction*. 2010;3(29):3–6. (In Russ.) Available from: https://elibrary.ru/download/elibrary_15503961_71987283.pdf (accessed: 01.05.2020).
7. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016;(8)4–3:7–8.
8. Timofeeva T.A. Formulas for calculating the deflection of a flat lattice frame with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019;4(23):26–33. (In Russ.)
9. Boyko A.Y., Tkachuk G.N. Derivation of the formulas for the deflection of a flat hinged-rod frame in the of symbol mathematics Maple system. *Structural mechanics and structures*. 2019;4(23):15–25. (In Russ.)
10. Belyankin N.A., Boyko A.Y. Formula for deflection of a girder with an arbitrary number of panels under the uniform load. *Structural mechanics and structures*. 2019;1(20):21–29. (In Russ.)
11. Tkachuk G.N. The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019;2(21):32–39. (In Russ.)
12. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. *Magazine of Civil Engineering*. 2015;5(57):66–73. (In Russ.)
13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005;9(85):607–617.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006;54(4):756–782.
15. Zok F.W., Lature R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016;96:184–203.
16. Rybakov L.S., Mishustin I.V. Natural vibrations of flat regular elastic trusses of orthogonal structure. *Mechanics of composite materials and structures*. 1999;2(5):3–16. (In Russ.)
17. Mishustin I.V., Rybakov L.S. Oscillations of flat elastic trusses of orthogonal structure. *News of the Academy of Sciences. Solid Mechanics*. 2003;2:168–184. (In Russ.)
18. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020;15(4):510–517.
19. Kirsanov M. Analytical Solution of a Spacer Beam Truss Deflection with an Arbitrary Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020;88:8802.
20. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of the frequencies of small vibrations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2019;20(1):14–20. (In Russ.)
21. Tinkov D.V. Analytical solutions to problems on natural frequencies of oscillations of regular rod systems (Thesis of Candidate of Technical Sciences). Moscow; 2019. (In Russ.)
22. WolframAlpha System. Available from: <https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/> (accessed: 03.07.2020).

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ NUMERICAL METHODS OF STRUCTURES' ANALYSIS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379
UDC 539.3

RESEARCH PAPER / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Stress-strain state of shell of revolution analysis by using various formulations of three-dimensional finite elements

Natalia A. Gureeva¹, Yuriy V. Klochkov², Anatoly P. Nikolaev², Vladislav N. Yushkin^{2*}

¹Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradskii Ave, Moscow, 125993, Russian Federation

²Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskii Ave, Volgograd, 400002, Russian Federation

*aup-volgau@yandex.ru

Article history

Received: July 30, 2020

Revised: September 15, 2020

Accepted: September 24, 2020

Acknowledgements

The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as a part of research project No. 19-41-340004 p_a.

For citation

Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Stress-strain state of shell of revolution analysis by using various formulations of three-dimensional finite elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):361–379. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379>

Abstract

The aim of the work is to perform a comparative analysis of the results of analyzing arbitrarily loaded shells of revolution using finite element method in various formulations, namely, in the formulation of the displacement method and in the mixed formulation. *Methods*. To obtain the stiffness matrix of a finite element a functional based on the equality of the actual work of external and internal forces was applied. To obtain the deformation matrix in the mixed formulation the functional obtained from the previous one by replacing the actual work of internal forces in it with the difference of the total and additional work was used. *Results*. In the formulation of the displacement method for an eight-node hexahedral solid finite element, displacements and their first derivatives are taken as the nodal unknowns. Approximation of the displacements of the inner point of the finite element was carried out through the nodal unknowns on the basis of the Hermite polynomials of the third degree. For a finite element in the mixed formulation, displacements and stresses were taken as nodal unknowns. Approximation of the target finite element values through their nodal values in the mixed formulation was carried out on the basis of trilinear functions. It is shown on a test example that a finite element in the mixed formulation improves the accuracy of the strength parameters of the shell of revolution stress-strain state.

Keywords: solid finite element, mixed functional, finite element method implementation, deformation matrix, stiffness matrix

Natalia A. Gureeva, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics; ORCID iD: 0000-0003-3496-2008, eLIBRARY SPIN-code: 8393-5900.

Yuriy V. Klochkov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics of the Electric Power and Energy Faculty; eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693, Scopus ID: 57170472500.

Anatoly P. Nikolaev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department of the Ecology and Melioration Faculty; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484.

Vladislav N. Yushkin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department of the Ecology and Melioration Faculty; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3965-4397>, eLIBRARY SPIN-code: 4833-4701.

© Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Yushkin V.N., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов

Н.А. Гуреева¹, Ю.В. Клочков², А.П. Николаев², В.Н. Юшкин^{2*}

¹Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Российская Федерация, 125993, Москва, Ленинградский пр-кт, 49

²Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр-кт, 26

*aup-volgau@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 30 июля 2020 г.

Доработана: 15 сентября 2020 г.

Принята к публикации: 24 сентября 2020 г.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и Администрации Волгоградской области № 19-41-340004 p_a.

Для цитирования

Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 361–379. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379>

Аннотация

Цель исследования – выполнить сравнительный анализ результатов расчета произвольно нагруженных оболочек вращения при использовании метода конечных элементов в различных формулировках, а именно в формулировке метода перемещений и в смешанной формулировке. Методы. Для получения матрицы жесткости конечного элемента применен функционал, основанный на равенстве действительных работ внешних и внутренних сил, а для получения матрицы деформирования в смешанной формулировке – функционал, полученный из предыдущего путем замены в нем действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работы. Результаты. В формулировке метода перемещений для объемного конечного элемента в виде восьмиузлового шестигранника в качестве узловых неизвестных приняты перемещения и их первые производные. Аппроксимация перемещений внутренней точки конечного элемента осуществлялась через узловые неизвестные на основе полиномов Эрмита третьей степени. Для конечного элемента в смешанной формулировке в качестве узловых неизвестных принимались перемещения и напряжения. Аппроксимация искомых величин конечного элемента через их узловые значения в смешанной формулировке выполнялась на основе трилинейных функций. На тестовом примере показано, что конечный элемент в смешанной формулировке позволяет повысить точность прочностных параметров напряженно-деформированного состояния оболочки вращения.

Ключевые слова: объемный конечный элемент, смешанный функционал, реализация метода конечных элементов, матрица деформирования, матрица жесткости

1. Introduction

The theory of deformation of solids has been developed in sufficient detail to date [1–2]. However, analytical obtaining of specific results is possible only in some cases, far from the practice of engineering calculations. Therefore, the development of approximate and numerical methods for calculating structural elements of engineering structures is an actual task. Among the modern methods of studying the stress-strain state of building structures, the numerical finite element method (FEM) based on the displacement method has become widespread recently [3–15]. It can be stated that the main disadvantages of this FEM formulation are the lack of continuity of the displacement derivatives on the edges and side surfaces of finite elements. The development of finite elements in the mixed formulation [16–25] allows to reduce the degree of approximating functions for expressing the desired quantities through nodal unknowns, makes it possible to fulfill the conditions for the continuity of stresses and displacements not only at the nodal points, but also on the edges and lateral surfaces of the discretization elements.

The subject of the study is the stress-strain state of the shell of rotation under arbitrary loading. The purpose of the study is a comparative analysis of finite element algorithms for determining the strength parameters of the shell of rotation.

Гуреева Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, доцент департамента математики; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, eLIBRARY SPIN-код: 8393-5900.

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики электроэнергетического факультета; eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693, Scopus ID: 57170472500.

Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования эколого-мелиоративного факультета; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484.

Юшкин Владислав Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования эколого-мелиоративного факультета; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3965-4397>, eLIBRARY SPIN-код: 4833-4701.

To perform a comparative analysis of variants, finite element algorithms of the hexahedral finite element are developed in two formulations: in the formulation of the displacement method and in the mixed formulation. When obtaining the hexahedron stiffness matrix in the formulation of the displacement method, displacements and their first derivatives are used as nodal unknowns. When forming the matrix of the stress-strain state of a hexagon in a mixed formulation, displacements and stresses are taken as nodal unknowns.

2. Research methods

To obtain the stiffness matrix of a hexagonal finite element, the displacement method formulation uses a functional based on the equality of the actual work of external loads on displacements and the actual work of internal stresses on deformations over the volume of the finite element. To approximate the desired values of the internal point of a finite element through nodal unknowns, third-degree Hermite polynomials were used.

To obtain the stress-strain state matrix in a mixed formulation, we used a functional obtained by replacing the actual work of internal forces of the displacement method functional with the difference between the total work of internal forces and their additional work. Trilinear relations are used to approximate displacements and stresses through nodal unknowns.

2.1. Shell of revolution geometric parameters

Position of an arbitrary point M^0 in the shell of revolution middle surface is defined by radius vector

$$\vec{R} = x\vec{i} + r(x)\sin\theta\vec{j} + r(x)\cos\theta\vec{k}, \quad (1)$$

where $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – unit vectors of the Cartesian coordinate system; $r(x)$ – radius of revolution for the considered point of the middle surface; θ – angle measured counterclockwise from the vertical diameter.

Basis vectors of an arbitrary point on the middle surface are determined by expressions

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i} + r_{,x}\sin\theta\vec{j} + r_{,x}\cos\theta\vec{k}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^0 = r\cos\theta\vec{j} - r\sin\theta\vec{k}; \\ \vec{a}_3^0 &= \frac{\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|} = \frac{r_{,x}}{\sqrt{u}}\vec{i} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{u}}\vec{j} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{u}}\vec{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $u = 1 + r_{,x}^2$.

Position of an arbitrary point M^{0t} of the shell located at a distance t from the middle surface is defined by radius vector

$$\vec{R}^{0t} = \vec{R}^0 + t\vec{a}_3^0. \quad (3)$$

Base vectors of the point M^{0t} are defined by differentiation (3):

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{0t} = \vec{R}_{,x}^0 + t\vec{a}_{3,x}^0 = \vec{a}_1^0 + t\vec{a}_{3,x}^0; \\ \vec{g}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^{0t} = \vec{R}_{,\theta}^0 + t\vec{a}_{3,\theta}^0 = \vec{a}_2^0 + t\vec{a}_{3,\theta}^0; \\ \vec{g}_3^0 &= \vec{R}_{,t}^{0t} = \vec{a}_3^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Using (2) based on (4) the following matrix relations can be formed:

$$\left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}, \quad (5)$$

where $\left\{ \vec{g}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_1^0 \quad \vec{g}_2^0 \quad \vec{g}_3^0 \right\}$; $\left\{ \vec{i} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$.

Differentiating (4) taking into account (5), derivatives of the basis vectors of point M^{0t} can be defined by the components in the same basis:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_1] \left\{ \bar{\mathbf{i}} \right\}_{3 \times 1} = [N_1][S]^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1} = [m] \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_2] \left\{ \bar{\mathbf{i}} \right\}_{3 \times 1} = [N_2][S]^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1} = [n] \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,t}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_3] \left\{ \bar{\mathbf{i}} \right\}_{3 \times 1} = [N_3][S]^{-1} \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1} = [l] \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{3 \times 1}, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,x}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{1,x}^0, \bar{\mathbf{g}}_{2,x}^0, \bar{\mathbf{g}}_{3,x}^0 \right\}$; $\left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,\theta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{1,\theta}^0, \bar{\mathbf{g}}_{2,\theta}^0, \bar{\mathbf{g}}_{3,\theta}^0 \right\}$; $\left\{ \bar{\mathbf{g}}_{,t}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \bar{\mathbf{g}}_{1,t}^0, \bar{\mathbf{g}}_{2,t}^0, \bar{\mathbf{g}}_{3,t}^0 \right\}$.

2.2. Displacements and deformations

Displacement vector of point M^{0t} from load action is represented by components in the basis of point M^{0t} :

$$\bar{\mathbf{V}} = v^m \bar{\mathbf{g}}_m^0 = \left\{ \bar{\mathbf{g}}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ v \right\}_{3 \times 1}; \quad m = 1, 2, 3, \quad (7)$$

where $\left\{ v \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ v^1 \ v^2 \ v^3 \right\}$.

Derivatives of displacement vector (7) with respect to curvilinear coordinates x, θ, t are determined by expressions

$$\bar{\mathbf{V}}_{,m} = v_{,m}^1 \bar{\mathbf{g}}_1^0 + v^1 \bar{\mathbf{g}}_{1,m}^0 + v_{,m}^2 \bar{\mathbf{g}}_2^0 + v^2 \bar{\mathbf{g}}_{2,m}^0 + v_{,m}^3 \bar{\mathbf{g}}_3^0 + v^3 \bar{\mathbf{g}}_{3,m}^0. \quad (8)$$

Based on (6) relations (8) can be represented in the form

$$\bar{\mathbf{V}}_{,m} = f_m^k \bar{\mathbf{g}}_k^0, \quad (9)$$

where f_m^k – functions of components of the displacement vector and its derivatives, defined by the expressions

$$\begin{aligned} f_1^1 &= v_{,x}^1 + v^1 m_{11} + v^2 m_{21} + v^3 m_{31}; \\ &\dots \\ f_3^3 &= v_{,t}^3 + v^1 l_{13} + v^2 l_{23} + v^3 l_{33}. \end{aligned} \quad (10)$$

Deformations are determined by the relationships of continuum mechanics:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{g}}_i^0 \bar{\mathbf{v}}_{,j} + \bar{\mathbf{g}}_j^0 \bar{\mathbf{v}}_{,i} \right). \quad (11)$$

Taking into account (4) and (9), we can form the matrix relationship

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [L] \left\{ v \right\}_{3 \times 1}, \quad (12)$$

where $\left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23} \right\}$; $[L]$ – matrix of algebraic and differential operators.

2.3. Relationships between deformations and stresses

Hooke's law is represented in curvilinear coordinate system by expressions

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij}; \\ \sigma^{ij} &= \lambda I_1(\varepsilon) g^{0ij} + 2\mu g^{0ik} g^{0jl} \varepsilon_{kl}; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}^0; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} g_{im}^0 g_{jn}^0 \sigma^{mn} - \frac{\nu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}^0,\end{aligned}\quad (13)$$

where $I_1(\varepsilon) = g_{mn}^0 \varepsilon^{mn} = g^{0mn} \varepsilon_{mn}$ is the first invariant of strain tensor; $I_1(\sigma) = g_{mn}^0 \sigma^{mn} = g^{0mn} \sigma_{mn}$ is the first invariant of stress tensor; g_{mn}^0, g^{0mn} are covariant and contravariant components of metric tensor; $\varepsilon_{mn}, \varepsilon^{mn}$ are covariant and contravariant components of strain tensor; σ_{mn}, σ^{mn} are covariant and contravariant components of stress tensor; λ, μ are Lamé parameters; E is modulus of elasticity; ν is Poisson's ratio.

On the basis of relations (13) the following matrix expression is formed:

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [C]_{6 \times 6} \left\{ \sigma^{ij} \right\}_{6 \times 1}, \quad (14)$$

where $\left\{ \sigma^{ij} \right\}_{6 \times 1}^T = \left\{ \sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23} \right\}$.

2.4. Shell of revolution finite element in displacements method formulation

The finite element is taken in the form of a hexahedron with nodes i, j, k, l, m, n, p, h . For performing numerical integration, hexahedron is mapped onto a cube with local coordinates changing within the limits $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$. Displacements and their derivatives in local coordinates are taken as nodal unknowns.

Approximation of displacement for the inner points of the finite element was performed on the basis of Hermite polynomials of the third degree by the matrix expression below:

$$\left\{ v \right\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 96} \left\{ v_y^n \right\}_{96 \times 1}, \quad (15)$$

where $\left\{ v_y^n \right\}_{96 \times 1}^T = \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v_{,\xi}^{1i}, \dots, v_{,\xi}^{1h}, v_{,\eta}^{1i}, \dots, v_{,\eta}^{1h}, v_{,\zeta}^{1i}, \dots, v_{,\zeta}^{1h}, \dots, v^{3i}, \dots, v^{3h}, v_{,\xi}^{3i}, \dots, v_{,\xi}^{3h}, v_{,\eta}^{3i}, \dots, v_{,\eta}^{3h}, v_{,\zeta}^{3i}, \dots, v_{,\zeta}^{3h} \right\}$.

Vectors of the nodal unknowns in local and global coordinate systems are related by the following matrix ratio:

$$\left\{ v_y^n \right\}_{96 \times 1} = [T]_{96 \times 96} \left\{ v_y^r \right\}_{96 \times 1}, \quad (16)$$

where $\left\{ v_y^r \right\}_{96 \times 1}^T = \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v_{,x}^{1i}, \dots, v_{,x}^{1h}, v_{,\theta}^{1i}, \dots, v_{,\theta}^{1h}, v_{,t}^{1i}, \dots, v_{,t}^{1h}, \dots, v^{3i}, \dots, v^{3h}, v_{,x}^{3i}, \dots, v_{,x}^{3h}, v_{,\theta}^{3i}, \dots, v_{,\theta}^{3h}, v_{,t}^{3i}, \dots, v_{,t}^{3h} \right\}$.

Matrix $[T]$ is formed on the basis of differential relations

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial \xi} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \zeta}, \tag{17}$$

where q indicates components of the displacement vector v^1, v^2, v^3 .

Using (15), deformations (12) are defined in matrix form

$$\{\varepsilon\} = [L]\{v\} = [L][A]\{v_y^r\} = [B]\{v_y^r\}. \tag{18}$$

In order to construct the stiffness matrix for the finite element, a functional based on the equality of work done by internal and external forces is used:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \frac{1}{2} \int_S \{v\}^T \{q\} dS, \tag{19}$$

where V is element volume; S – specified load application surface; $\{q\}^T = \{q_1, q_2, q_3\}$ – components of external load vector.

Taking into account (14), (15), (16) and (18), functional (19) is given by expression

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \{v_y^r\}^T [T]^T \int_V [B]^T [C]^{-1} [B] dV [T] \{v_y^r\} - \frac{1}{2} \{v_y^r\}^T [T]^T \int_S [A]^T \{q\} dS. \tag{20}$$

After performing minimization of functional (20) the following is obtained:

$$[K] \{v_y^r\} = \{f\}, \tag{21}$$

where $[K] = [T]^T \int_V [B]^T [C]^{-1} [B] dV [T]$ is finite element stiffness matrix; $\{f\} = [T]^T \int_S [A]^T \{q\} dS$ – nodal forces vector.

2.5. Shell of revolution finite element in mixed formulation

Displacements and stresses of the hexahedral finite element are taken as nodal unknowns:

$$\begin{aligned} \{v_y\}^T_{1 \times 24} &= \{v^{1i}, \dots, v^{1h}, v^{2i}, \dots, v^{2h}, v^{3i}, \dots, v^{3h}\}; \\ \{\sigma_y\}^T_{1 \times 48} &= \{\sigma^{11i}, \dots, \sigma^{11h}, \sigma^{22i}, \dots, \sigma^{22h}, \sigma^{33i}, \dots, \sigma^{33h}, \sigma^{12i}, \dots, \sigma^{12h}, \sigma^{13i}, \dots, \sigma^{13h}, \sigma^{23i}, \dots, \sigma^{23h}\}. \end{aligned} \tag{22}$$

For approximating target quantities through nodal values, bilinear functions are adopted:

$$\lambda = \{\varphi(\xi, \eta, \zeta)\}^T_{1 \times 8} \{\lambda_y\}_{8 \times 1}, \tag{23}$$

where λ refers to values $v^1, v^2, v^3, \sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23}$.

Based on (22) and (23) the following matrix relations are formed:

$$\{v\} = [A_c] \{v_y\}; \{\sigma^{ij}\} = [S] \{\sigma_y\}. \tag{24}$$

Deformations (12) based on (24) can be written in matrix form:

$$\{\varepsilon\} = \begin{matrix} [L] \\ 6 \times 1 \end{matrix} \begin{matrix} [A_c] \\ 6 \times 3 \quad 3 \times 24 \end{matrix} \begin{matrix} \{v_y\} \\ 24 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [B_c] \\ 6 \times 24 \end{matrix} \begin{matrix} \{v_y\} \\ 24 \times 1 \end{matrix}. \quad (25)$$

For obtaining the finite element deformation matrix a functional, obtained from (19) by replacing the actual work of internal forces by the difference between total and additional work of internal forces, is used:

$$\Phi_c = \int_V \left[\{\sigma\}^T [L] \{v\} - \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \right] dV - \frac{1}{2} \int_S \{v\}^T \{q\} dS. \quad (26)$$

Based on (24) and (25), functional (26) for the finite element is written as

$$\Phi_c = \begin{matrix} \{\sigma_y\}^T \\ 1 \times 48 \end{matrix} \int_V [S]^T [B_c] dV \begin{matrix} \{v_y\} \\ 24 \times 1 \end{matrix} - \frac{1}{2} \begin{matrix} \{\sigma_y\}^T \\ 1 \times 48 \end{matrix} \int_V [S]^T [C] [S] dV \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 48 \times 1 \end{matrix} - \frac{1}{2} \begin{matrix} \{v_y\}^T \\ 1 \times 24 \end{matrix} \int_S [A_c]^T \{q\} dS. \quad (27)$$

After variation of functional (27) by nodal unknowns $\{\sigma_y\}^T$ and $\{v_y\}^T$ the following systems of equations are obtained:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_c}{\partial \{\sigma_y\}^T} &\equiv -[H] \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 48 \times 48 \end{matrix} + [Q] \begin{matrix} \{v_y\} \\ 48 \times 24 \end{matrix} = 0; \\ \frac{\partial \Phi_c}{\partial \{v_y\}^T} &\equiv [Q]^T \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 48 \times 1 \end{matrix} - \{f_y\} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

where $[Q] = \int_V [S]^T [B_c] dV$; $[H] = \int_V [S]^T [C] [S] dV$; $\{f_y\} = \int_S [A]^T \{q\} dS$.

Systems (28) are represented in traditional FEM formulation

$$[K] \begin{matrix} \{Z_y\} \\ 72 \times 72 \end{matrix} = \{F\}, \quad (29)$$

where $[K] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix}$ is finite element deformation matrix; $\begin{matrix} \{Z_y\}^T \\ 1 \times 72 \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} \{\sigma_y\}^T \\ 1 \times 48 \\ \{v_y\}^T \\ 1 \times 24 \end{matrix} \right\}$ – nodal unknowns row;

$\begin{matrix} \{F\}^T \\ 1 \times 72 \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} \{0\}^T \\ 1 \times 48 \\ \{f_y\}^T \\ 1 \times 24 \end{matrix} \right\}$ – finite element nodal loads row

3. Results and their analysis

The stress state of cylindrical shell fixed at the ends and loaded by internal pressure of intensity q was determined. The following initial data were specified: radius of middle surface $R = 1.0$ m; generatrix length $L = 0.5$ m; wall thickness $h = 0.02$ m; $q = 5$ MPa; modulus of elasticity $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; Poisson's ratio $\nu = 0.3$.

The results of the analysis are presented in Tables 1 and 2. The values of stresses in the direction of cylinder axis are given at the points: 1 – located in the fixed end; 2 – located at a distance $L/32 = \frac{25}{32}h$ from the fixed end; 3 – in the midspan.

Analytical model is represented by a single strip of hexahedral elements along the cylinder axis.

The first column in Table 1 shows the number of rows of finite elements along the thickness of the cylinder, the second column shows the number of nodal points in the axial direction and in the direction of shell thickness. The remaining columns show numerical results of the stresses in the direction of the cylinder axis in inner σ^B and outer σ^H fibers, respectively, at points 1, 2, 3.

Analysis of numerical results in Table 1 shows convergence of the computing process when using FEM in formulation of the displacement method.

Differences in the results of calculations for point 1 are explained by the difference in boundary conditions for finite elements in the specified formulations, namely, in the displacement method, boundary conditions are assigned for the derivatives of displacements, and in the mixed formulation, boundary conditions for displacements are assigned.

At point 2, which is at a distance $\frac{25}{32}h$ from the fixed support, the results stabilized by the mixed method already with one finite element in thickness, and in the displacement method, it monotonically tends to the same numerical values with an increase in the number of finite elements in thickness.

Table 1

Numerical values of parameters for stress-strain state of cylindrical shell when using elements in displacement method formulation

Number of rows of elements through cylinder's thickness	Mesh discretization	Cross section					
		Point 1		Point 2		Point 3	
		Stress, MPa					
		σ^B	σ^H	σ^B	σ^H	σ^B	σ^H
1	17 × 2	381.14	-308.97	298.26	-221.91	-57.04	141.07
	33 × 2	396.74	-298.97	303.02	-211.51	-56.83	140.99
	65 × 2	430.50	-269.26	302.17	-212.05	-56.61	140.88
	97 × 2	467.52	-236.44	301.87	-211.73	-56.46	140.81
	129 × 2	505.40	-202.51	301.66	-211.46	-56.33	140.74
2	17 × 3	444.24	-329.74	331.64	-253.09	-73.52	157.34
	33 × 3	464.29	-323.12	342.49	-260.16	-73.83	157.77
	65 × 3	489.77	-326.93	342.70	-261.20	-73.78	157.80
	97 × 3	516.03	-328.81	342.71	-260.89	-73.69	157.76
	129 × 3	540.37	-326.81	342.64	-260.69	-73.62	157.72
3	17 × 4	472.09	-347.74	334.54	-262.45	-75.68	159.53
	33 × 4	499.49	-349.06	345.85	-267.92	-76.03	160.00
	65 × 4	527.69	-352.34	347.01	-267.10	-76.03	160.07
	97 × 4	552.45	-352.12	346.93	-266.94	-75.95	160.03
	129 × 4	578.18	-351.27	346.82	-266.77	-75.88	160.00
4	17 × 5	491.13	-354.73	338.14	-265.33	-76.91	160.78
	33 × 5	526.89	-355.26	348.14	-270.49	-77.43	161.42
	65 × 5	561.89	-355.87	350.38	-270.86	-77.50	161.56
	97 × 5	586.72	-355.73	350.32	-270.78	-77.45	161.54
	129 × 5	611.58	-355.93	350.22	-270.64	-77.39	161.51
7	17 × 8	523.33	-362.29	348.61	-268.24	-78.25	162.14
	33 × 8	584.38	-363.68	350.40	-274.48	-79.00	163.04
	65 × 8	642.43	-365.46	354.14	-275.20	-79.19	163.29
	97 × 8	677.46	-365.73	354.56	-275.23	-79.19	163.32
	129 × 8	704.12	-365.73	354.53	-275.16	-79.16	163.31

Table 2

Numerical values of parameters for stress-strain state of cylindrical shell when using elements in mixed formulation

Number of rows of elements through cylinder's thickness	Mesh discretization	Cross section					
		Point 1		Point 2		Point 3	
		Stress, MPa					
		σ^B	σ^H	σ^B	σ^H	σ^B	σ^H
1	17 × 2	472.47	-381.34	373.02	-288.59	-72.05	159.57
	33 × 2	479.93	-390.65	365.74	-277.22	-79.57	165.13
	65 × 2	480.76	-392.41	366.43	-278.84	-81.44	166.05
	97 × 2	480.60	-392.55	366.27	-278.98	-81.76	166.07
	129 × 2	480.43	-392.54	366.11	-278.98	-81.87	166.03
2	17 × 3	532.16	-335.43	364.93	-292.25	-74.68	160.75
	33 × 3	543.99	-334.06	370.30	-278.72	-81.31	165.52
	65 × 3	544.53	-332.87	369.31	-279.13	-82.49	166.10
	97 × 3	543.17	-333.25	368.38	-279.17	-82.55	166.05
	129 × 3	542.10	-333.71	367.80	-279.22	-82.51	166.00
3	17 × 4	516.60	-365.22	365.88	-293.70	-75.69	160.87
	33 × 4	541.69	-384.38	363.23	-275.69	-81.81	165.84
	65 × 4	556.19	-394.50	364.47	-278.87	-82.82	166.42
	97 × 4	559.89	-397.72	364.49	-279.98	-82.84	166.34
	129 × 4	561.38	-399.15	364.43	-280.50	-82.80	166.26
4	17 × 5	519.91	-350.43	363.74	-296.82	-76.28	161.07
	33 × 5	553.90	-367.90	361.51	-274.04	-82.07	165.86
	65 × 5	583.84	-381.24	363.74	-277.62	-82.99	166.41
	97 × 5	592.53	-385.93	364.13	-278.75	-82.99	166.33
	129 × 5	595.59	-388.04	364.09	-279.27	-82.92	166.24
7	17 × 8	517.45	-354.04	364.49	-298.62	-76.85	161.26
	33 × 8	558.47	-382.77	358.64	-271.14	-82.31	165.97
	65 × 8	616.05	-413.21	361.39	-275.66	-83.07	166.43
	97 × 8	645.52	-425.87	363.43	-277.76	-83.06	166.35
	129 × 8	659.74	-431.69	364.19	-278.77	-83.01	166.28

Analysis of numerical results in Table 2 shows more rapid convergence of computational process when using finite element method in the mixed formulation.

It is explained by the fact that in the mixed finite element the stresses are consistent not only at the nodes of finite elements, but also on their faces. In the finite elements of the displacement method, there is no deformation compatibility along the faces.

4. Conclusion

The accuracy of determining the strength parameters of the shell of revolution and the convergence of computational process are higher when using finite elements in the mixed formulation. This is due to the fact that when obtaining the deformation matrix of this finite element, the degree of approximating functions for approximating the desired values of the inner point of the finite element through the nodal unknowns in the mixed formulation is lower than in the displacement method formulation. The compatibility condition of the target quantities in the displacement method formulation is satisfied only at nodal points. The aforementioned compatibility conditions are absent on the edges and faces of hexahedral finite elements. When using finite elements in the mixed formulation, the compatibility conditions for displacements and stresses are satisfied not only at nodal points, but also on the edges and faces of the hexahedral element.

1. Введение

Теория деформирования твердых тел в настоящее время развита достаточно подробно [1–2]. Однако аналитическое получение конкретных результатов возможно только в некоторых случаях, далеких от практики инженерных расчетов. Поэтому разработка приближенных и численных методов расчета конструктивных элементов инженерных структур является актуальной задачей. Среди современных методов исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) строительных конструкций в последнее время практически повсеместно получил распространение численный метод конечных элементов (МКЭ) на основе метода перемещений [3–15]. Основными недостатками данной формулировки МКЭ можно назвать отсутствие непрерывности производных от перемещений на ребрах и боковых поверхностях конечных элементов. Разработка конечных элементов в смешанной формулировке [16–25] позволяет понизить степень аппроксимирующих функций для выражения искомых величин через узловые неизвестные, дает возможность выполнить условия непрерывности напряжений и перемещений не только в узловых точках, но и на ребрах и боковых поверхностях элементов дискретизации.

Предметом исследования является напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при произвольном нагружении, целью – сравнительный анализ конечно-элементных алгоритмов определения параметров прочности оболочки вращения.

Для выполнения сравнительного анализа вариантов разработаны конечно-элементные алгоритмы шестигранного конечного элемента в двух формулировках: в формулировке метода перемещений и в смешанной формулировке. При получении матрицы жесткости шестигранника в формулировке метода перемещений в качестве узловых неизвестных использованы перемещения и их первые производные, а при формировании матрицы напряженно-деформированного состояния шестигранника в смешанной формулировке в качестве узловых неизвестных приняты перемещения и напряжения.

2. Методы исследования

Для получения матрицы жесткости шестигранного конечного элемента в формулировке метода перемещений использования функционал, основанный на равенстве действительных работ внешних нагрузок на перемещениях и действительных работ внутренних напряжений на деформациях по объему конечного элемента. Для аппроксимации искомых величин внутренней точки конечного элемента через узловые неизвестные применялись полиномы Эрмита третьей степени.

Для получения матрицы напряженно-деформированного состояния в смешанной формулировке использовался функционал, полученный путем замены действительной работы внутренних усилий функционала метода перемещений разностью полной работы внутренних усилий и их дополнительной работы, а для аппроксимации перемещений и напряжений через узловые неизвестные – трилинейные соотношения.

2.1. Геометрические параметры оболочки вращения

Положение произвольной точки M^0 срединной поверхности оболочки вращения определяется радиус-вектором

$$\vec{R} = x\vec{i} + r(x)\sin\theta\vec{j} + r(x)\cos\theta\vec{k}, \quad (1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат; $r(x)$ – радиус вращения рассматриваемой точки срединной поверхности; θ – угол, отсчитываемый от вертикального диаметра против хода часовой стрелки.

Базисные векторы произвольной точки срединной поверхности определяются выражениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i} + r_{,x}\sin\theta\vec{j} + r_{,x}\cos\theta\vec{k}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^0 = r\cos\theta\vec{j} - r\sin\theta\vec{k}; \\ \vec{a}_3^0 &= \frac{\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|} = \frac{r_{,x}}{\sqrt{u}}\vec{i} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{u}}\vec{j} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{u}}\vec{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u = 1 + r_{,x}^2$.

Положение произвольной точки оболочки M^{0t} , отстоящей на расстоянии t от срединной поверхности, определяется радиусом-вектором

$$\vec{R}^{0t} = \vec{R}^0 + t\vec{a}_3^0. \quad (3)$$

Базисные векторы точки M^{0t} определяются дифференцированием (3):

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{0t} = \vec{R}_{,x}^0 + t\vec{a}_{3,x}^0 = \vec{a}_1^0 + t\vec{a}_{3,x}^0; \\ \vec{g}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^{0t} = \vec{R}_{,\theta}^0 + t\vec{a}_{3,\theta}^0 = \vec{a}_2^0 + t\vec{a}_{3,\theta}^0; \\ \vec{g}_3^0 &= \vec{R}_{,t}^{0t} = \vec{a}_3^0. \end{aligned} \quad (4)$$

При использовании (2) на основе (4) можно сформировать матричные соотношения

$$\left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}, \quad (5)$$

где $\left\{ \vec{g}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_1^0, \vec{g}_2^0, \vec{g}_3^0 \right\}$; $\left\{ \vec{i} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$.

Дифференцированием (4) при учете (5) производные базисных векторов точки M^{0t} можно определить компонентами в этом же базисе:

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{g}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_1]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [N_1]_{3 \times 3} [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [m]_{3 \times 3} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \vec{g}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_2]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [N_2]_{3 \times 3} [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [n]_{3 \times 3} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \vec{g}_{,t}^0 \right\}_{3 \times 1} &= [N_3]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [N_3]_{3 \times 3} [S]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1} = [l]_{3 \times 3} \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\left\{ \vec{g}_{,x}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_{1,x}^0, \vec{g}_{2,x}^0, \vec{g}_{3,x}^0 \right\}$; $\left\{ \vec{g}_{,\theta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_{1,\theta}^0, \vec{g}_{2,\theta}^0, \vec{g}_{3,\theta}^0 \right\}$; $\left\{ \vec{g}_{,t}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{g}_{1,t}^0, \vec{g}_{2,t}^0, \vec{g}_{3,t}^0 \right\}$.

2.2. Перемещения и деформации

Вектор перемещения точки M^{0t} от действия нагрузки представляется компонентами в базисе точки M^{0t} :

$$\vec{V} = v^m \vec{g}_m^0 = \left\{ \vec{g}^0 \right\}_{3 \times 1}^T \left\{ v \right\}_{3 \times 1}; \quad m = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $\left\{ v \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ v^1, v^2, v^3 \right\}$.

Производные вектора перемещения (7) по криволинейным координатам x, θ, t определяются выражениями

$$\vec{V}_{,m} = v_{,m}^1 \vec{g}_1^0 + v_{,m}^1 \vec{g}_{1,m}^0 + v_{,m}^2 \vec{g}_2^0 + v_{,m}^2 \vec{g}_{2,m}^0 + v_{,m}^3 \vec{g}_3^0 + v_{,m}^3 \vec{g}_{3,m}^0. \quad (8)$$

С учетом (6) соотношения (8) можно представить в виде

$$\vec{V}_{,m} = f_m^k \vec{g}_k^0, \quad (9)$$

где f_m^k – функции компонент вектора перемещения и их производных, определяемые выражениями

$$f_1^1 = v_{,x}^1 + v^1 m_{11} + v^2 m_{21} + v^3 m_{31};$$

$$\dots$$

$$f_3^3 = v_{,t}^3 + v^1 l_{13} + v^2 l_{23} + v^3 l_{33}. \quad (10)$$

Деформации определяются соотношениями механики сплошной среды:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{g}_i^0 \bar{v}_{,j} + \bar{g}_j^0 \bar{v}_{,i}). \quad (11)$$

С учетом (4) и (9) можно сформировать матричное соотношение

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [L] \left\{ v \right\}_{3 \times 1}, \quad (12)$$

где $\left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T = \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23} \}$; $[L]$ – матрица алгебраических и дифференциальных операторов.

2.3. Соотношения между деформациями и напряжениями

Закон Гука представляется в криволинейной системе координат выражениями

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij};$$

$$\sigma^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{0ij} + 2\mu g^{0ik} g^{0jl} \varepsilon_{kl};$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}^0;$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} g_{im}^0 g_{jn}^0 \sigma^{mn} - \frac{\nu}{E} I_1(\sigma) g_{ij}^0, \quad (13)$$

где $I_1(\varepsilon) = g_{mn}^0 \varepsilon^{mn} = g^{0mn} \varepsilon_{mn}$ – первый инвариант тензора деформаций; $I_1(\sigma) = g_{mn}^0 \sigma^{mn} = g^{0mn} \sigma_{mn}$ – первый инвариант тензора напряжений; g_{mn}^0, g^{0mn} – ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора; $\varepsilon_{mn}, \varepsilon^{mn}$ – ковариантные и контравариантные компоненты тензора деформаций; σ_{mn}, σ^{mn} – ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений; λ, μ – параметры Ламе; E – модуль упругости материала; ν – коэффициент поперечной деформации.

На основании соотношений (13) формируется матричное выражение

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [C] \left\{ \sigma^{ij} \right\}_{6 \times 1}, \quad (14)$$

где $\left\{ \sigma^{ij} \right\}_{1 \times 6}^T = \{ \sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23} \}$.

2.4. Конечный элемент оболочки вращения в формулировке метода перемещений

Конечный элемент принят в виде шестигранника с узлами i, j, k, l, m, n, p, h . Для выполнения численного интегрирования шестигранник отображается на куб с локальными координатами, изменяющимися в пределах $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$. В качестве узловых неизвестных приняты перемещения и их производные по локальным координатам.

Аппроксимация перемещений внутренней точки конечного элемента выполнялась на основе полиномов Эрмита третьей степени матричным выражением

$$\left\{ \mathbf{v} \right\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{96 \times 1}, \quad (15)$$

где $\left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{1 \times 96}^T = \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v_{,\xi}^{1i}, \dots, v_{,\xi}^{1h}, v_{,\eta}^{1i}, \dots, v_{,\eta}^{1h}, v_{,\zeta}^{1i}, \dots, v_{,\zeta}^{1h}, \dots, v^{3i}, \dots, v^{3h}, v_{,\xi}^{3i}, \dots, v_{,\xi}^{3h}, v_{,\eta}^{3i}, \dots, v_{,\eta}^{3h}, v_{,\zeta}^{3i}, \dots, v_{,\zeta}^{3h} \right\}$.

Векторы узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат связаны матричным соотношением

$$\left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{96 \times 1} = [T]_{96 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{96 \times 1}, \quad (16)$$

где $\left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{1 \times 96}^T = \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v_{,x}^{1i}, \dots, v_{,x}^{1h}, v_{,0}^{1i}, \dots, v_{,0}^{1h}, v_{,t}^{1i}, \dots, v_{,t}^{1h}, \dots, v^{3i}, \dots, v^{3h}, v_{,x}^{3i}, \dots, v_{,x}^{3h}, v_{,0}^{3i}, \dots, v_{,0}^{3h}, v_{,t}^{3i}, \dots, v_{,t}^{3h} \right\}$.

Матрица $[T]$ сформирована на основе дифференциальных соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \xi} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial q}{\partial \zeta} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (17)$$

где под q принимаются компоненты вектора перемещения v^1, v^2, v^3 .

С использованием (15) деформации (12) определяются в матричном виде

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \right\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \left\{ \mathbf{v} \right\}_{3 \times 1} = [L]_{6 \times 3} [A]_{3 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{96 \times 1} = [B]_{6 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^n \right\}_{96 \times 1}. \quad (18)$$

Для формирования матрицы жесткости конечного элемента используется функционал, основанный на равенстве работ внешних и внутренних сил:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \right\}_{6 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_S \left\{ \mathbf{v} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \mathbf{q} \right\}_{3 \times 1} dS, \quad (19)$$

где V – объем элемента; S – поверхность приложения заданной нагрузки; $\left\{ \mathbf{q} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ q_1, q_2, q_3 \right\}$ – компоненты вектора внешних нагрузок.

При учете (14), (15), (16) и (18) функционал (19) запишется выражением

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{1 \times 96}^T [T]_{96 \times 96}^T \int_V [B]^T [C]^{-1} [B] dV [T] \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{96 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{1 \times 96}^T [T]_{96 \times 96}^T \int_S [A]^T \left\{ \mathbf{q} \right\}_{3 \times 1} dS. \quad (20)$$

После выполнения минимизации функционала (20) получается

$$[K]_{96 \times 96} \left\{ \mathbf{v}_y^r \right\}_{96 \times 1} = \left\{ \mathbf{f} \right\}_{96 \times 1}, \quad (21)$$

где $[K]_{96 \times 96} = [T]_{96 \times 96}^T \int_V [B]^T [C]^{-1} [B] dV [T]_{96 \times 96}$ – матрица жесткости конечного элемента; $\left\{ \mathbf{f} \right\}_{96 \times 1} = [T]_{96 \times 96}^T \int_S [A]^T \left\{ \mathbf{q} \right\}_{3 \times 1} dS$ – вектор узловых усилий.

2.5. Конечный элемент оболочки вращения в смешанной формулировке

В качестве узловых неизвестных шестигранного конечного элемента принимаются перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} \left\{ v_y \right\}_{1 \times 24}^T &= \left\{ v^{1i}, \dots, v^{1h}, v^{2i}, \dots, v^{2h}, v^{3i}, \dots, v^{3h} \right\}; \\ \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T &= \left\{ \sigma^{11i}, \dots, \sigma^{11h}, \sigma^{22i}, \dots, \sigma^{22h}, \sigma^{33i}, \dots, \sigma^{33h}, \sigma^{12i}, \dots, \sigma^{12h}, \sigma^{13i}, \dots, \sigma^{13h}, \sigma^{23i}, \dots, \sigma^{23h} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для аппроксимации искомых величин через узловые значения приняты билинейные функции

$$\lambda = \left\{ \varphi(\xi, \eta, \zeta) \right\}_{1 \times 8}^T \left\{ \lambda_y \right\}_{8 \times 1}, \quad (23)$$

где под λ понимаются величины $v^1, v^2, v^3, \sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23}$.

На основе (22) и (23) формируются матричные соотношения

$$\left\{ v \right\}_{3 \times 1} = \left[A_c \right]_{3 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}; \quad \left\{ \sigma^{ij} \right\}_{6 \times 1} = \left[S \right]_{6 \times 48} \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1}. \quad (24)$$

Деформации (12) на основе (24) запишутся в матричном виде:

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = \left[L \right]_{6 \times 3} \left[A_c \right]_{3 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1} = \left[B_c \right]_{6 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1}. \quad (25)$$

Для получения матрицы деформирования конечного элемента использован функционал, полученный из (19) путем замены действительной работы внутренних сил разностью полной и дополнительной работы внутренних усилий:

$$\Phi_c = \int_V \left[\left\{ \sigma \right\}_{1 \times 6}^T \left[L \right]_{6 \times 3} \left\{ v \right\}_{3 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} \right] dV - \frac{1}{2} \int_S \left\{ v \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ q \right\}_{3 \times 1} dS. \quad (26)$$

С учетом (24) и (25) функционал (26) для конечного элемента запишется выражением

$$\Phi_c = \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T \int_V \left[S \right]_{48 \times 6}^T \left[B_c \right]_{6 \times 24} dV \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 48}^T \int_V \left[S \right]_{48 \times 6}^T \left[C \right]_{6 \times 6} \left[S \right]_{6 \times 48} dV \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ v_y \right\}_{1 \times 24}^T \int_S \left[A_c \right]_{24 \times 3}^T \left\{ q \right\}_{3 \times 1} dS. \quad (27)$$

После варьирования функционала (27) по узловым неизвестным $\left\{ \sigma_y \right\}^T$ и $\left\{ v_y \right\}^T$ получаются системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_c}{\partial \left\{ \sigma_y \right\}^T} &\equiv - \left[H \right]_{48 \times 48} \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1} + \left[Q \right]_{48 \times 24} \left\{ v_y \right\}_{24 \times 1} = 0; \\ \frac{\partial \Phi_c}{\partial \left\{ v_y \right\}^T} &\equiv \left[Q \right]_{24 \times 48}^T \left\{ \sigma_y \right\}_{48 \times 1} - \left\{ f_y \right\}_{24 \times 1} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\left[Q \right]_{48 \times 24} = \int_V \left[S \right]_{48 \times 6}^T \left[B_c \right]_{6 \times 24} dV$; $\left[H \right]_{48 \times 48} = \int_V \left[S \right]_{48 \times 6}^T \left[C \right]_{6 \times 6} \left[S \right]_{6 \times 48} dV$; $\left\{ f_y \right\}_{24 \times 1} = \int_S \left[A \right]_{24 \times 3}^T \left\{ q \right\}_{3 \times 1} dS$.

Системы (28) представляются в традиционной для МКЭ форме

$$\left[K \right]_{72 \times 72} \left\{ Z_y \right\}_{72 \times 1} = \left\{ F \right\}_{72 \times 1}, \quad (29)$$

где $[K] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix}$ – матрица деформирования конечного элемента; $\{Z_y\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{\sigma_y\}^T \\ \{v_y\}^T \end{matrix} \right\}$ – строка узловых неизвестных; $\{F\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{0\}^T \\ \{f_y\}^T \end{matrix} \right\}$ – строка узловых нагрузок конечного элемента.

3. Результаты исследований и их анализ

Было определено напряженное состояние жестко заземленной по торцам цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением интенсивности q . Приняты следующие исходные данные: радиус средней поверхности $R = 1,0$ м; длина образующей $L = 0,5$ м; толщина стенки $h = 0,02$ м; $q = 5$ МПа; модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент поперечной деформации $\nu = 0,3$.

Таблица 1

Численные значения параметров напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при использовании элементов в формулировке метода перемещений

Число рядов элементов по толщине цилиндра	Сетка дискретизации	Сечение					
		Точка 1		Точка 2		Точка 3	
		Напряжения, МПа					
		σ^B	σ^H	σ^B	σ^H	σ^B	σ^H
1	17 × 2	381,14	-308,97	298,26	-221,91	-57,04	141,07
	33 × 2	396,74	-298,97	303,02	-211,51	-56,83	140,99
	65 × 2	430,50	-269,26	302,17	-212,05	-56,61	140,88
	97 × 2	467,52	-236,44	301,87	-211,73	-56,46	140,81
	129 × 2	505,40	-202,51	301,66	-211,46	-56,33	140,74
2	17 × 3	444,24	-329,74	331,64	-253,09	-73,52	157,34
	33 × 3	464,29	-323,12	342,49	-260,16	-73,83	157,77
	65 × 3	489,77	-326,93	342,70	-261,20	-73,78	157,80
	97 × 3	516,03	-328,81	342,71	-260,89	-73,69	157,76
	129 × 3	540,37	-326,81	342,64	-260,69	-73,62	157,72
3	17 × 4	472,09	-347,74	334,54	-262,45	-75,68	159,53
	33 × 4	499,49	-349,06	345,85	-267,92	-76,03	160,00
	65 × 4	527,69	-352,34	347,01	-267,10	-76,03	160,07
	97 × 4	552,45	-352,12	346,93	-266,94	-75,95	160,03
	129 × 4	578,18	-351,27	346,82	-266,77	-75,88	160,00
4	17 × 5	491,13	-354,73	338,14	-265,33	-76,91	160,78
	33 × 5	526,89	-355,26	348,14	-270,49	-77,43	161,42
	65 × 5	561,89	-355,87	350,38	-270,86	-77,50	161,56
	97 × 5	586,72	-355,73	350,32	-270,78	-77,45	161,54
	129 × 5	611,58	-355,93	350,22	-270,64	-77,39	161,51
7	17 × 8	523,33	-362,29	348,61	-268,24	-78,25	162,14
	33 × 8	584,38	-363,68	350,40	-274,48	-79,00	163,04
	65 × 8	642,43	-365,46	354,14	-275,20	-79,19	163,29
	97 × 8	677,46	-365,73	354,56	-275,23	-79,19	163,32
	129 × 8	704,12	-365,73	354,53	-275,16	-79,16	163,31

Таблица 2

Численные значения параметров напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при использовании элементов в смешанной формулировке

Число рядов элементов по толщине цилиндра	Сетка дискретизации	Сечение					
		Точка 1		Точка 2		Точка 3	
		Напряжения, МПа					
		σ^B	σ^H	σ^B	σ^H	σ^B	σ^H
1	17 × 2	472,47	-381,34	373,02	-288,59	-72,05	159,57
	33 × 2	479,93	-390,65	365,74	-277,22	-79,57	165,13
	65 × 2	480,76	-392,41	366,43	-278,84	-81,44	166,05
	97 × 2	480,60	-392,55	366,27	-278,98	-81,76	166,07
	129 × 2	480,43	-392,54	366,11	-278,98	-81,87	166,03
2	17 × 3	532,16	-335,43	364,93	-292,25	-74,68	160,75
	33 × 3	543,99	-334,06	370,30	-278,72	-81,31	165,52
	65 × 3	544,53	-332,87	369,31	-279,13	-82,49	166,10
	97 × 3	543,17	-333,25	368,38	-279,17	-82,55	166,05
	129 × 3	542,10	-333,71	367,80	-279,22	-82,51	166,00
3	17 × 4	516,60	-365,22	365,88	-293,70	-75,69	160,87
	33 × 4	541,69	-384,38	363,23	-275,69	-81,81	165,84
	65 × 4	556,19	-394,50	364,47	-278,87	-82,82	166,42
	97 × 4	559,89	-397,72	364,49	-279,98	-82,84	166,34
	129 × 4	561,38	-399,15	364,43	-280,50	-82,80	166,26
4	17 × 5	519,91	-350,43	363,74	-296,82	-76,28	161,07
	33 × 5	553,90	-367,90	361,51	-274,04	-82,07	165,86
	65 × 5	583,84	-381,24	363,74	-277,62	-82,99	166,41
	97 × 5	592,53	-385,93	364,13	-278,75	-82,99	166,33
	129 × 5	595,59	-388,04	364,09	-279,27	-82,92	166,24
7	17 × 8	517,45	-354,04	364,49	-298,62	-76,85	161,26
	33 × 8	558,47	-382,77	358,64	-271,14	-82,31	165,97
	65 × 8	616,05	-413,21	361,39	-275,66	-83,07	166,43
	97 × 8	645,52	-425,87	363,43	-277,76	-83,06	166,35
	129 × 8	659,74	-431,69	364,19	-278,77	-83,01	166,28

Результаты расчетов представлены в табл. 1 и 2. Приведены значения напряжений по направлению оси цилиндра в точках, расположенных следующим образом: 1 – в заделке; 2 – на расстоянии $L/32 = \frac{25}{32}h$ от заделки; 3 – в середине пролета.

Расчетная схема представлена одной полоской шестигранных элементов вдоль оси цилиндра.

В табл. 1 в первой колонке показано число рядов конечных элементов по толщине цилиндра, во второй колонке – число узловых точек в осевом направлении и в направлении толщины оболочки. В последующих колонках приведены численные результаты напряжений по направлению оси цилиндра во внутренних σ^B и наружных σ^H волокнах соответственно в точках 1, 2, 3.

Анализ численных результатов табл. 1 показывает сходимость вычислительного процесса при использовании МКЭ в формулировке метода перемещений.

Различия в результатах расчетов для точки 1 объясняются отличием граничных условий для конечных элементов в принятых формулировках, а именно: в методе перемещений назначаются граничные условия по производным перемещений, а в смешанной формулировке назначаются граничные условия по перемещениям.

В точке 2, отстоящей от заделки на расстоянии $\frac{25}{32}h$, результаты стабилизировались при смешанном методе уже при одном конечном элементе по толщине, а в методе перемещений монотонно стремятся к таким же числовым значениям при увеличении количества конечных элементов по толщине.

Анализ численных результатов табл. 2 показывает более быструю сходимость вычислительного процесса при использовании метода конечных элементов в смешанной формулировке.

Это объясняется тем, что в смешанном конечном элементе выполняется совместность по напряжениям не только в узлах конечных элементов, но и по их граням. В конечных элементах метода перемещений совместность деформаций по граням отсутствует.

4. Заключение

Точность определения параметров прочности оболочки вращения и сходимость вычислительного процесса выше при использовании конечных элементов в смешанной формулировке. Это объясняется тем, что при получении матрицы деформирования этого конечного элемента степень аппроксимирующих функций для аппроксимирования искомых величин внутренней точки конечного элемента через узловые неизвестные в смешанной формулировке ниже, чем в формулировке метода перемещений. Условие совместности искомых величин в формулировке метода перемещений выполняются только в узловых точках. На ребрах и гранях шестигранных конечных элементов вышеупомянутые условия совместности отсутствуют. При использовании конечных элементов в смешанной формулировке условия совместности по перемещениям и напряжениям выполняются не только в узловых точках, но и на ребрах и гранях шестигранного элемента.

References

- Galimov K.Z., Paimushin V.N. *Teoriya obolochek slozhnoj geometrii* [Theory of shells of complex geometry]. Kazan: Kazan University Publ.; 1985. (In Russ.)
- Petrov V.V. *Nelinejnaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika* [Nonlinear incremental structural mechanics]. Volgda: Infra-Inzheneriya Publ.; 2014. (In Russ.)
- Bate K.-U. *Metody konechnyh elementov* [Finite Element Methods]. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2010. (In Russ.)
- Kosytsyn S.B., Akulich V.Y. Stress-strain state of a cylindrical shell of a tunnel using construction stage analysis. *Komunikacie*. 2019;21(3):72–76.
- Kosytsyn S.B., Akulich V.Y. The definition of the critical buckling load beam model and two-dimensional model of the round cylindrical shell that interact with the soil. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2019;15(4):291–298. (In Russ.)
- Kosytsyn S.B., Akulich V.Y. Numerical analysis of the account of the stages in the calculation of the shell together with the soil massif. *International journal for computational civil and structural engineering*. 2019;15(3):84–95. (In Russ.)
- Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnyh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstrukcij* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)
- Kiselev A.P., Gureeva N.A., Kiseleva R.Z. Raschet mnogoslojnoj obolochki s ispol'zovaniem ob'emnogo konechnogo elementa [Calculation of a multilayer shell using a volumetric finite element]. *Izvestia VSTU* [Bulletin of the Volgograd State Technical University]. 2010;4(4):125–128. (In Russ.)
- Kayumov R.A. K resheniyu zadach neodnorodnoj teorii uprugosti metodom konechnyh elementov [To the solution of problems of the heterogeneous theory of elasticity by the finite element method]. *Trudy Vtoroi Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii* [Proceedings of the Second All-Russian Scientific Conference] (June 1–3, 2005). Part 1. *Matematicheskie modeli mekhaniki, prochnost' i nadezhnost' konstruktivii. Matematicheskoe modelirovanie i kraevedcheskie zadachi* [Mathematical models of mechanics, strength and reliability of structures. Mathematical modeling and local history problems]. Samara: SamGTU Publ.; 2005. p. 143–145. (In Russ.)
- Kiselev A.P., Kiseleva R.Z., Nikolaev A.P. Account of the shift as rigid body of shell of revolution axially symmetric loaded on the base of FEM. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(6):59–64. (In Russ.)
- Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ischanov T.R. Finite element analysis of stress-strain state of shells of revolution with taking into account the strain of transversal shearing. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(5):48–56. (In Russ.)

12. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(6):459–466. (In Russ.)
13. Gureeva N.A., Arkov D.P. Flat problem of theory of jump in base method of final elements in mixed understanding in account physical nonlinearity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2010; (4):32–36. (In Russ.)
14. Beirão da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2015;(295):327–346.
15. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Stress-strain analysis of a thin-shell part of fuselage using a triangular finite element with Lagrange multipliers. *Russian Aeronautics*. 2016;59(3):316–323.
16. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016;45(1):51–58.
17. Magisano D., Liabg K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018;113(4):634–655.
18. Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Analysis of a shell of revolution subjected to axisymmetric loading taking into account geometric nonlinearity on the basis of the mixed finite element method. *Russian Aeronautics*. 2014;57(3):232–239.
19. Gureeva N.A., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Comparative analysis of finite element formulations at plane loading of an elastic body. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):139–145. (In Russ.)
20. Ignatyev V.A., Ignatyev A.V. Plane problem solution of elasticity theory by the finite element method in the form of classical mixed method. *Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture*. 2013;31–2(50):337–343. (In Russ.)
21. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Gamzatova E.A. Analysis of bending plates with unilateral constraints through the finite element method in the form of the classical mixed method. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2018;8(716):5–14. (In Russ.)
22. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Gamzatova E.A. Analysis of bending problem of plates with rigid inclusions or holes by the FEM in the form of a classical mixed method. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2017;9(705):5–14. (In Russ.)
23. Leonetti D., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for non-linear analyses of elastic shells. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 2017:1–24.
24. Chi H., Beirão da Veiga L., Paulino G.H. Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations. *Comput. Methods Appl. Engng*. 2017;318:148–192. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.12.020>
25. Artioli E., de Miranda S., Lovadina C., Patruno L. A stress/displacement virtual element method for plane elasticity problems. *Comput. Methods Appl. Engng*. 2017;325:155–174. DOI: 10.1016/j.cma.2017.06.036.

Список литературы

1. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань: Изд-во Казанского университета, 1985. 164 с.
2. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. Вологда: Инфра-Инженерия, 2014. 479 с.
3. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов / под ред. Л.И. Турчака. М.: Физматлит, 2010. 1024 с.
4. Kosytsyn S.B., Akulich V.Y. Stress-strain state of a cylindrical shell of a tunnel using construction stage analysis // *Komunikacie*. 2019. Vol. 21. No. 3. Pp. 72–76.
5. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Определение критической нагрузки потери устойчивости стержневой и плоской моделей круговой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 4. С. 291–298.
6. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Численный анализ учета стадийности в расчетах оболочки совместно с массивом грунта // *Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*. 2019. Т. 15. № 3. С. 84–95.
7. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
8. Киселев А.П., Гуреева Н.А., Киселева Р.З. Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента // *Известия ВолгГТУ*. 2010. Т. 4. № 4. С. 125–128.
9. Каюмов Р.А. К решению задач неоднородной теории упругости методом конечных элементов // *Труды Второй Всероссийской научной конференции (1–3 июня 2005 г.)*. Ч. 1. Математические модели механики, проч-

ность и надежность конструкций. Математическое моделирование и краеведческие задачи. Самара: СамГТУ, 2005. С. 143–145.

10. Киселев А.П., Киселева Р.З., Николаев А.П. Учет смещения как жесткого целого осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 6. С. 59–64.

11. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р. Конечно-элементный анализ НДС оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 5. С. 48–56.

12. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Клочков М.Ю. Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 459–466.

13. Гуреева Н.А., Арьков Д.П. Решение плоской задачи теории пластичности на основе МКЭ в смешанной формулировке // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 4. С. 32–36.

14. Beirão da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2015. Vol. 295. Pp. 327–346.

15. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Stress-strain analysis of a thin-shell part of fuselage using a triangular finite element with Lagrange multipliers // Russian Aeronautics. 2016. Vol. 59. No. 3. Pp. 316–323.

16. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. Vol. 45. No. 1. Pp. 51–58.

17. Magisano D., Liabg K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018. Vol. 113. Issue 4. Pp. 634–655.

18. Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П. Расчет осесимметрично нагруженной оболочки вращения с учетом геометрической нелинейности на основе смешанного МКЭ // Известия вузов. Авиационная техника. 2014. № 4. С. 14–19.

19. Гуреева Н.А., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Сравнительный анализ конечно-элементных формулировок при плоском нагружении упругого тела // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 139–145.

20. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Решение плоской задачи теории упругости по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2013. Вып. 31–2 (50). С. 337–343.

21. Игнатъев А.В., Игнатъев В.А., Гамзатова Е.А. Анализ изгибаемых пластинок с односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 8 (716). С. 5–14.

22. Игнатъев А.В., Игнатъев В.А., Гамзатова Е.А. Анализ изгибаемых пластинок, имеющих жесткие включения или отверстия, по МКЭ в форме классического смешанного метода // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2017. № 9 (705). С. 5–14.

23. Leonetti D., Ruess M. An efficient mixed variational reduced order model formulation for non-linear analyses of elastic shells // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2017. Pp. 1–24.

24. Chi H., Beirão da Veiga L., Paulino G.H. Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations // Comput. Methods Appl. Engng. 2017. Vol. 318. Pp. 148–192. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.12.020>

25. Artioli E., de Miranda S., Lovadina C., Patruño L. A Stress/Displacement Virtual Element Method for Plane Elasticity Problems // Comput. Methods Appl. Engng. 2017. Vol. 25. Pp. 155–174. DOI: 10.1016/j.cma.2017.06.036.

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389
УДК 69.04

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС

В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{2*}¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 1129337, Москва, Ярославское шоссе, 26²Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

*markovich-as@rudn.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 1 июня 2020 г.

Доработана: 24 сентября 2020 г.

Принята к публикации: 9 октября 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Вопросы устойчивости играют важную роль при проектировании конструкций и сооружений. Расчеты на устойчивость реализованы во многих конечно-элементных программах, таких как NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, ADINA, DIANA и др. Ввиду большой ответственности расчеты на устойчивость необходимо вести как минимум с использованием двух разных программ, однако из-за высокой стоимости программных продуктов не все проектные организации в состоянии себе это позволить. Альтернативой может стать разработка программ, в которых задачи устойчивости решались бы несколькими методами, что повысило бы надежность и достоверность результатов расчета. Такая возможность реализована в вычислительном комплексе ПРИНС, в котором расчет устойчивости ведется двумя методами – статическим и динамическим. **Цели** данной работы – описать теоретические аспекты и практическую реализацию динамического принципа расчета конструкций и сооружений на устойчивость методом конечных элементов, привести алгоритм, реализованный в программе ПРИНС, а также результаты верификационных расчетов, подтверждающие его достоверность. **Результаты.** Алгоритм, приведенный в настоящей статье и реализованный в вычислительном комплексе ПРИНС, позволяет определять критические нагрузки с использованием динамического критерия устойчивости. На основании многочисленных верификационных расчетов установлено, что реализованный алгоритм обладает эффективностью определения критических нагрузок для стержневых, тонкостенных и подкрепленных конструкций. Использование вычислительного комплекса ПРИНС позволяет в дополнении к классическому (статическому) методу использовать альтернативный метод определения критических нагрузок для широкого класса инженерных задач.

Ключевые слова: устойчивость конструкций, метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, критические нагрузки, вынужденные колебания, механика деформируемых тел

Для цитирования

Агапов В.П., Маркович А.С. Динамический метод определения критических нагрузок в вычислительном комплексе ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 380–389. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1749-5797>, eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104.

Маркович Алексей Семенович, кандидат технических наук, доцент департамента строительства Инженерной академии РУДН; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3967-2114>, eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434.

© Агапов В.П., Маркович А.С., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program

Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich^{2*}

¹National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 1129337, Russian Federation

²Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

*markovich-as@rudn.ru

Article history

Received: June 1, 2020

Revised: September 24, 2020

Accepted: October 9, 2020

Abstract

Relevance. Buckling analysis is important in the design of buildings and structures. It is used in various fields of engineering – mechanical engineering, aircraft and shipbuilding, civil engineering, etc. Until the second half of the twentieth century, mainly analytical methods of buckling were applied in practice. With the appearance of computers, numerical methods, in particular, the finite element analysis, began to prevail. Buckling analysis was implemented in programs of finite element analysis, such as NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, ADAMS, DIANA, and others. In view of great responsibility, buckling analysis of structure should be carried out using at least two different programs. However, due to the high cost of software products, not all project organizations are able to have a number of programs. An alternative is to develop programs that can complete buckling analysis using several methods. This would increase the reliability and quality of calculation results. The PRINS computer program has opportunity for buckling analysis using two methods – static and dynamic. *The aims of the work* – to show the theoretical aspects and practical implementation of the dynamic principle of buckling analysis in buildings and structures using finite element method, as well as to give the algorithm implemented in the PRINS program and the results of verification calculations confirming its reliability. **Results.** The algorithm presented in this article and implemented in the PRINS computer program allows to determine critical loads using a dynamic buckling criterion. On the basis of numerous verification calculations, it was established that the implemented algorithm was effective for determining critical loads in frame, thin-walled and ribbed plate structures. The use of the PRINS computer program enables to use an alternative method for determining critical loads for a wide class of engineering problems in addition to the classical (static) method.

Keywords: buckling analysis, finite element method, PRINS computer program, forced vibration, mechanics of deformable solids

For citation

Agapov V.P., Markovich A.S. Dynamic method for determining critical loads in the PRINS computer program. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):380–389. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-380-389>

1. Введение

Расчеты на устойчивость играют важную роль при проектировании конструкций и сооружений, используемых в различных областях техники – машиностроении, авиа- и судостроении, промышленном и гражданском строительстве и др. Теоретические аспекты проблемы устойчивости описаны в многочисленных журнальных статьях и монографиях [1–10]. На практике до второй половины XX века применялись, главным образом, аналитические методы расчета на устойчивость [1–5]. С появлением вычислительных машин стали преобладать численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ) [6–9]. В последнее время вопросу устойчивости стержней, пластин и оболочек посвящено большое количество исследований [11–15]. Расчеты на устойчивость реализованы во многих конечно-элементных программах, например, NASTRAN [16], ANSYS [17], ABAQUS [18], ADINA [19], DIANA [20] и др. В силу большой ответственности требуется проводить расчеты на устойчивость по крайней мере с использованием нескольких программ, что не всегда выполнимо по причине высокой стоимости программных продуктов. Разработка программ, в которых задачи устойчивости решались бы несколькими методами, повысит надежность и достоверность результатов расчета на устойчивость.

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Reinforced Concrete and Stone Structures; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1749-5797>, eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104.

Alexey S. Markovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering of the Engineering Academy; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3967-2114>, eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434.

Образцом подобной программы является вычислительном комплексе ПРИНС [21]. Расчет на устойчивость ведется в нем двумя методами – статическим и динамическим. При этом статический метод разработан в форме, не требующей решения проблемы собственных значений. Это стало возможным благодаря использованию критерия потери устойчивости в виде равенства нулю реакции единственной нагруженной на заданную систему связи при смещении этой связи на малое расстояние в направлении ожидаемой потери устойчивости. Теоретические основы этого метода и его практическая реализация описаны в работе [22].

В данной статье описываются теоретические аспекты и практическая реализация динамического метода расчета на устойчивость, а также приводятся результаты верификационных расчетов, подтверждающие его достоверность.

2. Методы

Уравнение для определения методом конечных элементов минимальных критических нагрузок, соответствующих потере устойчивости нелинейно деформируемых систем при наличии начальных напряжений и перемещений, представляется в виде [21]

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{nl1} + \mathbf{K}_{nl2})\mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$ – матрица жесткости нулевого порядка; $\mathbf{K}_u = \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}) dV$ – матрица начальных перемещений; $\mathbf{K}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G} dV$ – матрица начальных напряжений; \mathbf{K}_{nl1} и \mathbf{K}_{nl2} – нелинейные матрицы, получение которых рассмотрено в [21]; \mathbf{u} – вектор перемещений.

Как правило, решение уравнения (1) находится методом последовательных приближений при задании нагрузки в виде $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_0$, где \mathbf{P}_0 – нормированная нагрузка.

В том случае, когда рассматриваемые системы линейно деформируемы, а начальные перемещения отсутствуют ($\mathbf{K}_u = \mathbf{K}_{nl1} = \mathbf{K}_{nl2} = 0$), расчет на устойчивость сводится к решению обобщенной проблемы собственных значений:

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma)\mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где $\lambda = \mathbf{P}_{cr} / \mathbf{P}$ – параметр критической нагрузки.

В большинстве отечественных и зарубежных программных комплексах алгоритм расчета устойчивости конструкций сводится к решению проблемы собственных значений (2). Обычно он остается единственным методом, доступным пользователю конкретной программы. Таким образом, при расчете сложных систем с большим количеством неизвестных, для которых не существует точного решения, верифицировать полученные на основании (2) результаты без использования альтернативных методов определения критических сил становится весьма затруднительно.

При разработке вычислительного комплекса ПРИНС (автор – доктор технических наук, профессор В.П. Агапов) был учтен этот недостаток. В комплексе реализован алгоритм использования динамического критерия для определения критических нагрузок.

Как известно, при достижении нагрузками критических значений деформированная система теряет способность совершать колебательные движения [2]. Следовательно, критерием потери устойчивости является равенство нулю частоты собственных колебаний системы. Уравнение для определения частот собственных колебаний системы под нагрузкой при наличии начальных перемещений и напряжений представляется следующим образом:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma)\mathbf{q} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{q} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{M} – матрица масс, ω и \mathbf{q} – собственные частота и вектор.

Метод определения собственных частот нагруженной конструкции реализован шагово-итерационным методом. Для расчета вводятся начальное и конечное значения параметра нагрузки, приращение этого параметра, количество исследуемых форм колебаний, требуемое число шагов итерации и точность схо-

димости. На каждом шаге нагружения вычисляются матрицы K_u , K_σ и из уравнения (3) определяются частоты и векторы форм собственных колебаний. По мере приращения параметра нагрузки на каждом шаге собственные частоты уменьшаются и расчет продолжается до тех пор, пока значение собственной частоты не обратится в ноль. Таким образом, параметр нагрузки, при котором собственная частота обращается в ноль, является критическим.

Блок-схема алгоритма определения критических нагрузок с использованием динамического критерия приведена на рис. 1.

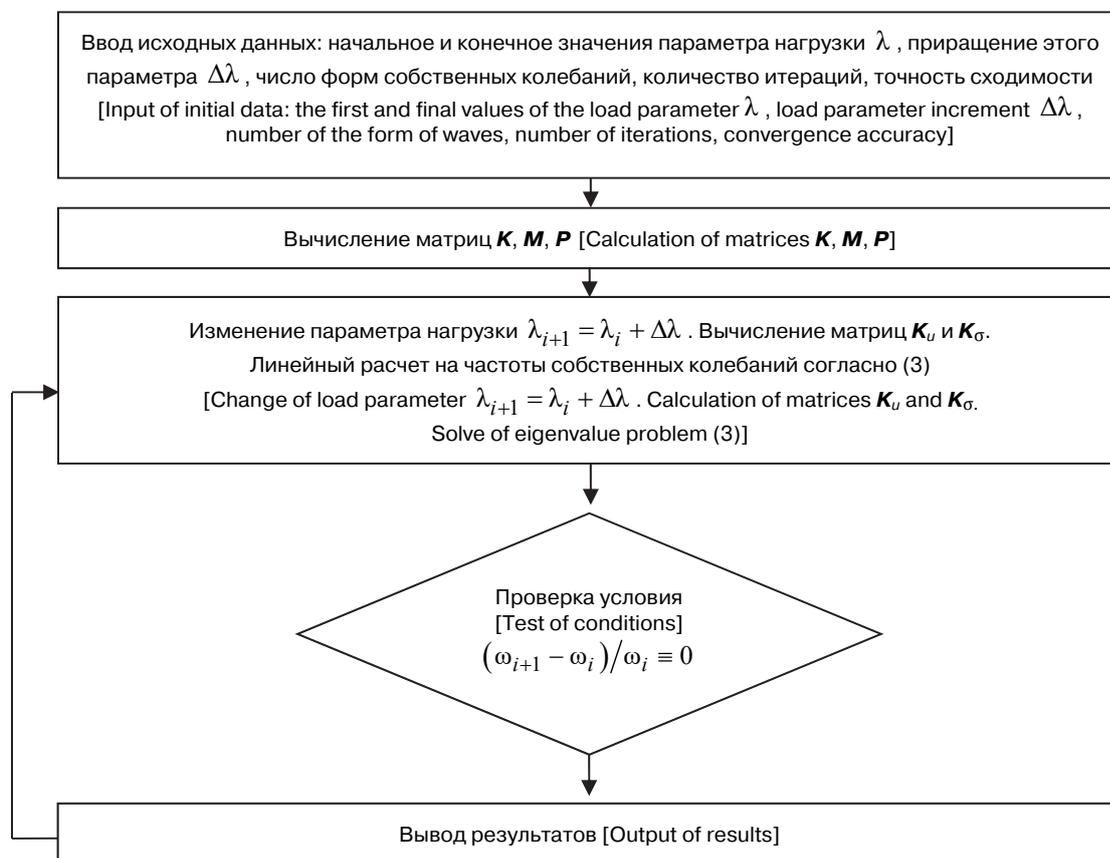


Рис. 1. Блок-схема алгоритма для определения критических нагрузок
[Figure 1. Scheme of the algorithm for determining critical loads]

3. Результаты и обсуждение

Для иллюстрации возможностей описанного выше алгоритма мы приводим ряд численных расчетов, выполненных в вычислительном комплексе ПРИНС.

3.1. Прямоугольная свободно опертая по контуру пластинка

Рассматривается пластинка, нагруженная распределенной нагрузкой (рис. 2) при следующих исходных данных: длина $a = 0,522$ м, ширина $b = 0,6$ м, толщина $h = 1$ см, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, удельный вес $\gamma = 78,5$ кН/м³.

Расчеты выполнялись с использованием трех- и четырехугольных оболочечных конечных элементов (КЭ) типа EL36 в отсутствии начальных перемещений ($K_u = 0$) при разбиении пластинки на КЭ-сетку следующих размеров: 10×10 , 20×20 и 30×30 (рис. 3).

Для определения критических нагрузок задавалось начальное значение нагрузки $q = 1$ кН/м. На каждом шаге приращение нагрузки принималось равным $\Delta q = 10q$ и из уравнения (3) определялись частоты и векторы форм собственных колебаний. Итерационный процесс останавливался при выполнении условия $(\omega_{i+1} - \omega_i) / \omega_i \approx 0$.

Результаты расчета прямоугольной пластинки представлены в табл. 1 (значения в скобках относятся к результатам, полученным с использованием треугольного КЭ EL36).

На рис. 4, а приведена первая форма собственных колебаний пластинки под нагрузкой. Зависимость частоты колебаний от параметра λ показана на рис. 4, б.

Как известно, аналитическое уравнение для поверхности выпучивания пластинки представляется в виде

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

которое допускает частное решение

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi z}{b}. \quad (5)$$

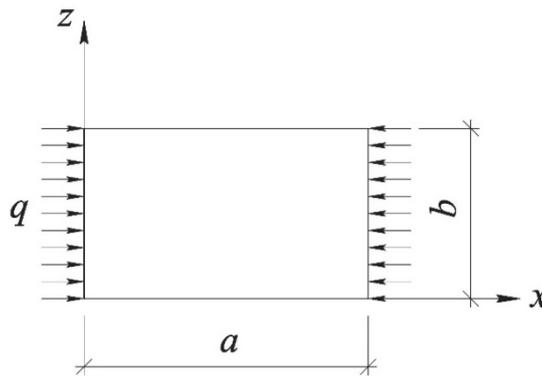


Рис. 2. Прямоугольная пластинка, всем периметром опертая на контур
[Figure 2. Rectangular plate supported on the contour]

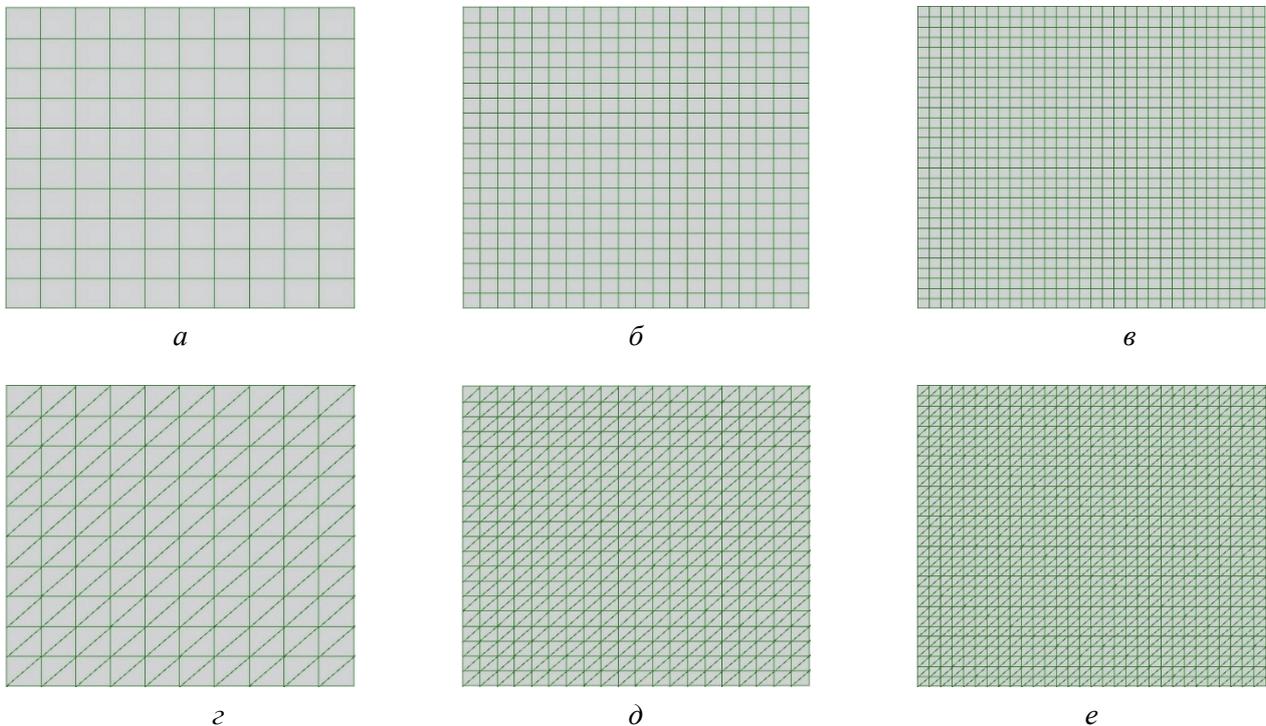
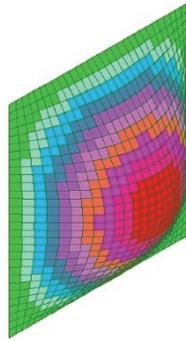


Рис. 3. Конечно-элементные схемы для расчета прямоугольной пластинки при сетке КЭ размером 10×10, 20×20, 30×30:
а, б, в – с использованием четырехугольных элементов; г, д, е – с использованием треугольных элементов

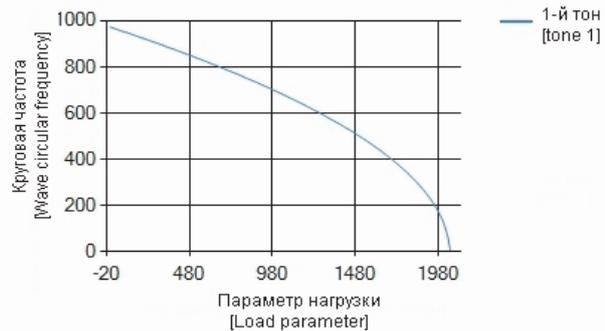
[Figure 3. Finite element schemes for the rectangular plate calculating with a FE mesh dimension of 10×10, 20×20, 30×30:
а, б, в – using quadrangular elements; г, д, е – using triangular elements]

Результаты расчета прямоугольной пластинки
 [Table 1. The results of rectangular plate calculation]

Размерность КЭ сетки [Dimension of FE mesh]	Частота собственных колебаний ненагруженной конструкции ω_0 , рад/с [Structural frequency without load ω_0 , rad/s]	Критический параметр нагрузки λ [Critical parameter of load λ]		
		Решение по МКЭ [FEM solution]	Аналитическое решение [Analytical solution]	Погрешность Δ , % [Approximation error Δ , %]
10×10	974,534 (975,534)	2080 (2070)		1,249 (0,763)
20×20	972,535 (972,535)	2060 (2060)	2054,335	0,276 (0,276)
30×30	972,535 (972,535)	2060 (2060)		0,276 (0,276)



а



б

Рис. 4. Расчет прямоугольной пластинки:
 а – форма колебаний; б – график зависимости $\omega(\lambda)$
[Figure 4. The calculation of a rectangular plate:
 а – the form of waves; б – the schedule $\omega(\lambda)$]

Подставляя (5) в уравнение (4), с учетом граничных условий (при $x=0$ и $x=l$, $w=0$) получается выражение для определения критической нагрузки:

$$q_{cr} = \frac{UE}{12(1-\nu^2)} \frac{h^3}{b^2}, \tag{6}$$

где U – коэффициент, принимаемый по табл. А из [3].

Применительно к рассматриваемому примеру $q_{cr} = 2054,335$ кН/м. Следовательно, параметр $\lambda = q_{cr}/q = 2054,335$.

3.2. Шарнирно опертая по краям пластинка с прежними размерами сторон, но подкрепленная четырьмя равноудаленными продольными ребрами жесткости

Геометрические характеристики сечения ребер: $F = 8$ см², $J_z = 10,667$ см⁴ (рис. 5).

Расчеты выполнялись с использованием четырехугольных КЭ (тип EL36) в отсутствии начальных перемещений ($K_u = 0$) при разбиении конструкции на КЭ-сетку с размерами 10×10, 20×20 и 30×30 (рис. 3, а–в).

Результаты расчета подкрепленной пластинки представлены в табл. 2.

На рис. 6, а приведена первая форма собственных колебаний подкрепленной пластинки. Зависимость частоты колебаний от параметра нагрузки показана на рис. 6, б.

Уравнение для определения критической нагрузки в случае подкрепленной ребрами пластинки представляется так [3]:

$$q_{cr} = \frac{Ph \left[(1 + \beta)^2 + 2 \sum_{i=1}^4 \gamma_i \left(\sin \frac{\pi c_i}{b} \right)^2 \right]}{\beta^2 \left[1 + 2 \sum_{i=1}^4 \delta_i \left(\sin \frac{\pi c_i}{b} \right)^2 \right]}, \tag{7}$$

где $P = \frac{D\pi^2}{b^2h}$, $\gamma_i = \frac{B_i}{bD}$, $\delta_i = \frac{F_i}{bh}$, $\beta = a/b$, $B_i = EJ_{z,i}$ – жесткость подкрепляющего ребра, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ –

цилиндрическая жесткость пластинки.

Для рассматриваемой задачи $q_{cr} = 5092$ кН/м. Таким образом, критический параметр $\lambda = q_{cr}/q = 5092$.

Таблица 2

Результаты расчета подкрепленной пластинки
[Table 2. The results of the ribbed plate calculation]

Размерность КЭ сетки [Dimension of FE mesh]	Частота собственных колебаний ненагруженной конструкции ω_0 , рад/с [Structural frequency without load ω_0 , rad/s]	Критический параметр нагрузки λ [Critical parameter of load λ]		
		Решение по МКЭ [FEM solution]	Аналитическое решение [Analytical solution]	Погрешность Δ , % [Approximation error Δ , %]
10×10	1269,394	5371		5,479
20×20	1269,394	5246	5092	3,024
30×30	1269,394	5177		1,669

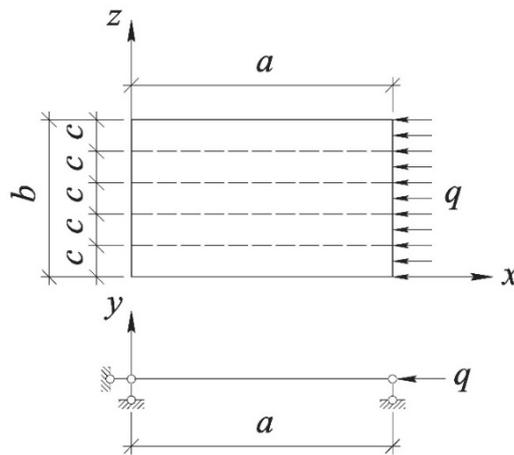


Рис. 5. Прямоугольная пластинка, подкрепленная продольными ребрами
[Figure 5. Rectangular plate supported by longitudinal ribs]

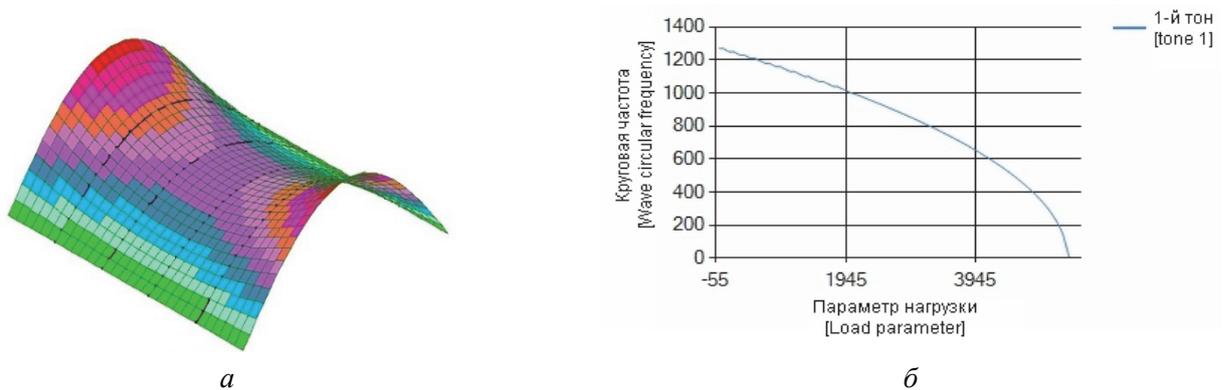


Рис. 6. Расчет подкрепленной пластинки:

a – форма колебаний; b – график зависимости $\omega(\lambda)$

[Figure 6. The calculation of the ribbed plate:

a – the form of waves; b – the schedule $\omega(\lambda)$]

3.3. Цилиндрическая оболочка с шарнирно закрепленными краями, испытывающая равномерное сжатие вдоль оси цилиндра

Определение критических нагрузок выполнялось в отсутствие начальных перемещений ($K_u = 0$) для КЭ-схем оболочки с размерами 12×24, 16×32 и 24×40 (рис. 7). Исходные данные: $l/R = 2$, $R/h = 25$, $h = 1$ см, $E = 2 \cdot 10^8$ кПа, $\nu = 0,3$, $\gamma = 78,5$ кН/м³. Нормированная нагрузка $q = 100$ кН/м.

Результаты определения критических нагрузок для оболочки представлены в табл. 3.

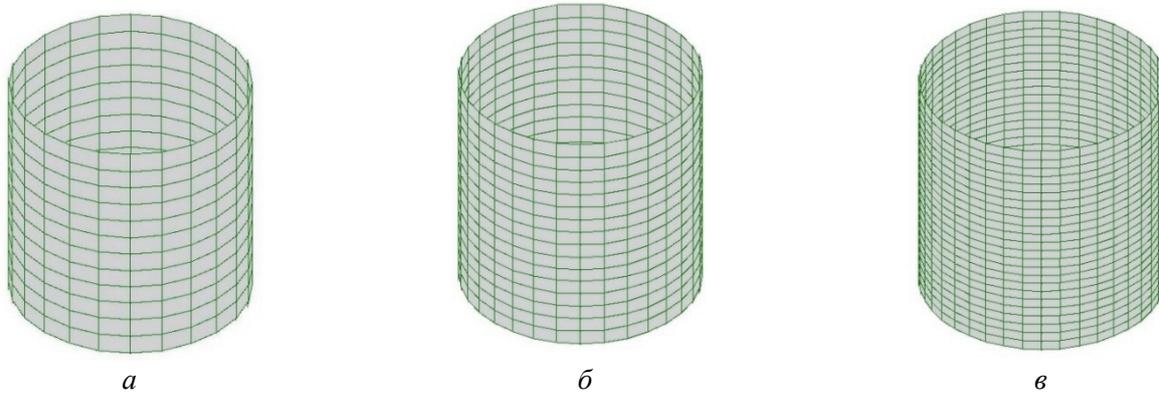


Рис. 7. Конечно-элементные схемы цилиндрической оболочки:
 а – с размером 12×24; б – 16×32; в – 24×40
 [Figure 7. Finite-element meshes of a cylindrical shell:
 а – with a size of 12×24; б – 16×32; в – 24×40]

Таблица 3

Результаты расчета цилиндрической оболочки
 [Table 3. The results of the cylindrical shell calculation]

Размерность КЭ сетки [Dimension of FE mesh]	Частота собственных колебаний ненагруженной конструкции ω_0 , рад/с [Structural frequency without load ω_0 , rad/s]	Критический параметр нагрузки λ [Critical parameter of load λ]		
		Решение по МКЭ [FEM solution]	Аналитическое решение [Analytical solution]	Погрешность Δ , % [Approximation error Δ , %]
12×24	5447,398	482		0,454
16×32	5367,436	476	484,20	1,694
24×40	5337,450	474		2,106

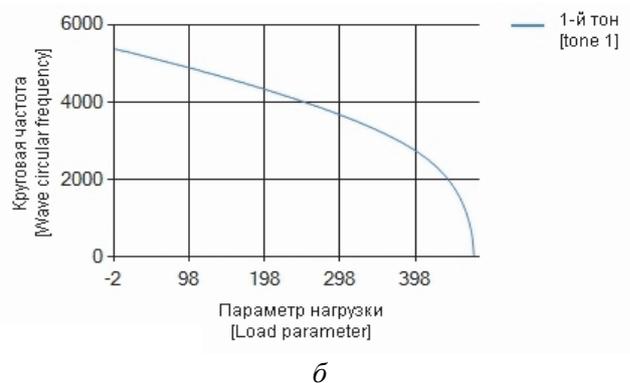
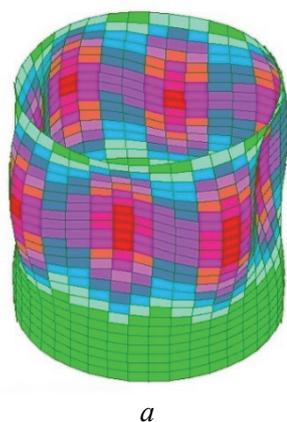


Рис. 8. Расчет цилиндрической оболочки:
 а – форма колебаний; б – график зависимости $\omega(\lambda)$
 [Figure 8. The calculation of a cylindrical shell:
 а – the form of waves; б – the schedule $\omega(\lambda)$]

На рис. 8, а приведена первая форма колебаний оболочки под нагрузкой. Зависимость частоты колебаний от параметра нагрузки для рассматриваемой оболочки показана на рис. 8, б.

Известно, что для осесимметричной формы потери устойчивости сжатой цилиндрической оболочки справедливо уравнение [2]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2} w + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

При шарнирном опирании краев оболочки ($w=0$ и $d^2w/dx^2=0$) решение этого уравнения ищется в виде

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (9)$$

где m – число полуволн.

Подстановка (9) в уравнение срединной поверхности оболочки (8) позволяет получить выражение для нахождения минимальной критической нагрузки:

$$q_{cr} = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (10)$$

Для рассматриваемого примера $q_{cr} = 48420$ кН/м, а критический параметр $\lambda = q_{cr}/q = 484,20$.

4. Заключение

Алгоритм, приведенный в данной статье и реализованный в вычислительном комплексе ПРИНС, позволяет определять критические нагрузки с использованием динамического критерия устойчивости.

На основании многочисленных верификационных расчетов установлено, что описанный алгоритм обладает эффективностью определения критических нагрузок для стержневых, тонкостенных и подкрепленных конструкций.

Использование вычислительного комплекса ПРИНС дает возможность в дополнение к классическому (статическому) методу использовать альтернативный (динамический) метод определения критических нагрузок для широкого класса инженерных задач. Таким образом, вычислительный комплекс ПРИНС успешно может быть использован инженерами проектных и научных организаций для расчета устойчивости конструкций и сооружений, требующих большой ответственности.

Список литературы / References

1. Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietate gaudentes. *Opera Omnia: Series I*. 1744;24.
2. Timoshenko S., Gere J.M. *Theory of Elastic Stability*. 2nd ed. McGraw-Hill; 1961.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 284 с.
Volmir A.S. *Ustojchivost' deformiruemyyh system [Stability of deformable systems]*. Moscow: Nauka Publ.; 1967. (In Russ.)
4. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustojchivost' obolochek [Shell stability]*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. (In Russ.)
5. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. М.: Стройиздат, 1949. 376 с.
Kornouhov N.V. *Prochnost' i ustojchivost' stержnevyyh system [Strength and stability of frame systems]*. Moscow: Strojizdat Publ.; 1949. 376 p. (In Russ.)
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element for Solid and Structural Mechanics*. 6th ed. McGraw-Hill; 2005.
7. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. New Jersey: Prentice-Hall; 2005.
8. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons Ltd.; 1977.
9. Oden J.T. *Finite elements in nonlinear continua*. New York: McGraw-Hill Book Company; 1972.
10. Reza Eslami N.M. *Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells. Structural Integrity. Vol. 1*. Springer International Publishing AG; 2018.
11. Gowda R.S., Sunagar P., Nruthya K., Manish S. Dharek, Sreekeshava K.S., Abhishek Kumar Chaurasiya and Priyanka. Analytical and Finite Element Buckling and Post Buckling Analysis of Laminated Plates. *International Journal of Civil Engineering and Technology*. 2020;11(5):84–92.

12. Iwasa T., Nishizawa Sh., Sakai M. Buckling severity measurement of axially compressed cylindrical structures with periodic buckling pattern. *Engineering Structures*. 2020;213:110568. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110568.
13. Li D.M., Featherston C.A., Wu Z. An element-free study of variable stiffness composite plates with cutouts for enhanced buckling and post-buckling performance. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020;371:113314. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113314>
14. Buoso D., Parin E. The buckling eigenvalue problem in the annulus. *Communications in Contemporary Mathematics*. 2020. <https://doi.org/10.1142/S0219199720500443>
15. Heo J., Yang Z., Xia W., Oterkus S., Oterkus E. Buckling analysis of cracked plates using peridynamics. *Ocean Engineering*. 2020;214:107817. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107817.
16. *MSC NASTRAN 2016. Nonlinear User's Guide SOL 400*. MSC Software; 2016.
17. *ANSYS Theory Reference. Release 5.6*. Canonsburg, PA: ANSYS Inc.; 1999.
18. *ABAQUS 6.12. Theoretical manual*. DS Simulia; 2012.
19. *ADINA Theory and Modeling Guide*. ADINA R&D, Inc.; 2005.
20. *DIANA FEA User's Manual. Release 10*. DIANA FEA BV; 2017.
21. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: АСВ, 2005. 245 с.
Agapov V.P. *Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustojchivosti konstrukcij* [Finite element method in statics, dynamics and stability of structures]. Moscow: ASV Publ., 2005. (In Russ.)
22. Agapov V.P. Buckling Analysis of the Structures by Single Imposed Constraint Method. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2017;12(16):5990–5994.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
THEORY OF ELASTICITYDOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-390-413
UDC 539.3

RESEARCH PAPER / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Modern interpretation of Saint-Venant's principle and semi-inverse method

Evgeny M. Zveryaev

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, 4 Miusskaya Sq, Moscow, 125047, Russian Federation**Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Highway, Moscow, 125993, Russian Federation*

zveryaev@mail.ru

Article history

Received: August 23, 2020

Revised: October 4, 2020

Accepted: October 14, 2020

Abstract

Relevance. The progressive development of views on the Saint-Venant formulated principles and methods underlying the deformable body mechanics, the growth of the mathematical analysis branch, which is used for calculation and accumulation of rules of thumb obtained by the mathematical results interpretation, lead to the fact that the existing principles are being replaced with new, more general ones, their number is decreasing, and this field is brought into an increasingly closer relationship with other branches of science and technology. Most differential equations of mechanics have solutions where there are gaps, quick transitions, inhomogeneities or other irregularities arising out of an approximate description. On the other hand, it is necessary to construct equation solutions with preservation of the order of the differential equation in conjunction with satisfying all the boundary conditions. Thus, the following *aims of the work* were determined: 1) to complete the familiar Saint-Venant's principle for the case of displacements specified on a small area; 2) to generalize the semi-inverse Saint-Venant's method by finding the complement to the classical local rapidly decaying solutions; 3) to construct on the basis of the semi-inverse method a modernized method, which completes the solutions obtained by the classical semi-inverse method by rapidly varying decaying solutions, and to rationalize asymptotic convergence of the solutions and clarify the classical theory for a better understanding of the classic theory itself. To achieve these goals, we used such *methods*, as: 1) strict mathematical separation of decaying and non-decaying components of the solution out of the plane elasticity equations by the methods of complex variable theory function; 2) construction of the asymptotic solution without any hypotheses and satisfaction of all boundary conditions; 3) evaluation of convergence. *Results.* A generalized formulation of the Saint-Venant's principle is proposed for the displacements specified on a small area of a body. A method of constructing asymptotic analytical solutions of the elasticity theory equations is found, which allows to satisfy all boundary conditions.

Keywords: contraction mapping principle, fixed point theorem, elasticity, strip, Saint-Venant, complete solution

For citation

Zveryaev E.M. Modern interpretation of Saint-Venant's principle and semi-inverse method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5): 390–413. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-390-413>

Evgeny M. Zveryaev, Doctor of Technical Sciences, Professor, senior researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Professor of Moscow Aviation Institute (National Research University); Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-code: 4893-2337.

© Zveryaev E.M., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Современная трактовка принципа и полуобратного метода Сен-Венана

Е.М. Зверьяев

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., 4
Московский авиационный институт, Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
zveriaev@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 23 августа 2020 г.

Доработана: 4 октября 2020 г.

Принята к публикации: 14 октября 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Постепенное развитие взглядов на сформулированные Сен-Венаном принципы и методы, лежащие в основе механики деформируемого тела, рост той ветви математического анализа, которая применяется при вычислениях, и накопление практических правил, получаемых путем истолкования математических результатов, приводят к тому, что существующие принципы заменяются новыми, более общими, число их уменьшается и данная область приводится во все более тесную связь с другими отделами науки и техники. Большинство дифференциальных уравнений механики обладает решениями, в которых наблюдаются разрывы, быстрые переходы, неоднородности или другие неправильности, возникающие из приближенного описания. Большой интерес представляет обобщенная формулировка принципа Сен-Венана для затухания заданных на малом участке перемещений для объяснения полученных приближенных решений. С другой стороны, необходимо построение решений уравнений с сохранением порядка дифференциального уравнения в сочетании с выполнением всех граничных условий. Таким образом, были определены следующие *цели исследования*: 1) дополнить известный принцип Сен-Венана для случая заданных на малом участке тела перемещений; 2) построить на основе полуобратного метода модернизированный метод, дополняющий полученные классическим полуобратным методом решения быстро меняющимися затухающими решениями; 3) обосновать асимптотическую сходимость решений и уточнить классические теории для более полного понимания самой классической теории. Для достижения поставленных целей использовались такие *методы*, как: 1) строгое математическое выделение затухающей и незатухающей компонент решения из уравнений плоской задачи теории упругости методами теории функций комплексного переменного; 2) построение асимптотического решения без каких-либо гипотез и выполнение всех граничных условий; 3) оценка сходимости решения. **Результаты.** Предложена формулировка обобщенного принципа Сен-Венана для заданных на малом участке тела перемещений. Найден метод построения асимптотических аналитических решений уравнений теории упругости, позволяющий выполнить все граничные условия.

Ключевые слова: принцип сжатых отображений, теорема о неподвижной точке, упругость, полоса, Сен-Венан, полное решение

Для цитирования

Зверьяев Е.М. Современная трактовка принципа и полуобратного метода Сен-Венана // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 390–413. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-390-413>

1. Introduction

The main factor for refusing a researcher in recognition of his works becomes fairly meaningful and reasonable lack of trust for something overly unconventional and provocative. If we go back to the image of sphere of knowledge, then any attempt at leaping too far out of the bounds of the sphere will likely be eventually unsuccessful. These are, for example, numerous attempts at creating a “theory of everything” or alternatively subverting some fundamental theory – theory of relativity or evolution. Such “theories of everything” and “subversions of fundamentals” look too mistrustful to spark an interest to seriously consider them. In this case the apriori lack of trust for something excessively strange and pretentious serves as “population control” for disposing of potentially destructive phenomena.

It is common for continuum mechanics and the related field of partial derivatives mathematics to gradually develop fundamental ideas, put forth by the “founding fathers” of the science. Progressive development of views on the principles underlying deformable body mechanics, growth of the mathematical analysis field, which is used for computation and accumulation of rules of thumb, obtained by interpreting mathematical results, lead to

Зверьяев Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, профессор Московского авиационного института; Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337.

the fact that the principles are replaced by the other, more general ones, their number decreases, and this field is brought into an increasingly closer relationship with other branches of physics. Besides, some physical principles, in the end, serve as a basis for them all.

Elasticity theory is considered to be founded on two basic Saint-Venant's ideas: the principle and the semi-inverse method. Saint-Venant's principle, named after Adhemar Jean Claude Saint-Venant, may be expressed as follows: "...the difference between the effects of two unique, but statically equivalent loads, becomes very small at sufficiently large distances from the load". This statement was published by Saint-Venant in 1855 [1]. Later, von Mises brought forward an assumption that the principle cannot be applied to the bodies of finite dimensions [2]. In this paper, this assertion is refuted.

The force and moment based (stress resultants) solution for thin-walled systems had been determining the direction of researchers' efforts for a long time. After constructing basic theories for plates, shells and thin-walled systems some contradictions were noted: it is impossible to satisfy all the boundary conditions and to evaluate all the stresses and displacements. Then, great difficulties were encountered in solving problems for anisotropic composite materials. Due to this, attention was given to solving problems in stresses, at least in the constraints area. The problem of applying semi-inverse Saint-Venant's method to mechanics of composite materials was brought to the forefront. Such problems require reconsideration of the accumulated practice and its generalization in order to obtain new possibilities of expanded application of classic ideas to new problems and materials on the basis of extended and generalized formulations.

Friedrichs and Dressler [3] and Goldenveiser and Kolos [4] have independently proven that the classical Kirchhoff's plate theory is the main term of the asymptotic expansion (by small parameter of thickness) for the linear theory of thin-wall isotropic bodies. On the other hand, based on their approach the internal solution, which has a value only close to an edge, is determined by a series of boundary value problems. These problems are very complicated to solve, almost as complicated as the initial problem. Saint-Venant's principle may be used for boundary stresses to create boundary conditions in the classic plate theory and also for some external expansions of higher order without any reference to the internal boundary solution. Attempts at obtaining the corresponding boundary conditions for displacements were unsuccessful.

Gregory and Wan [5] applied a general method developed by them for obtaining the proper boundary condition series for arbitrarily defined allowed boundary conditions (without an explicit solution of internal or boundary layer) for a number of special cases of general interest, including cases with defined boundary displacements. Their overall results demonstrate that in order to be strictly correct, the Saint-Venant's principle can be used only to the leading terms of the external solution, i.e. classical plate theory.

Horgan et al. [6–10] investigated various aspects of applying the Saint-Venant's principle to the boundary layer and obtained a number of insightful practical results. The practical conclusions for composites are: effect of the end constraints of samples in mechanical tests, effect of support elements, connections, cuts, etc., in composite structures and limitations of strength of materials formulas when applied to composites. It was established that neglecting the elasticity of the end constraints, generally rationalized by the Saint-Venant's principle, cannot be applied to problems involving composite materials. Particularly, in fiber reinforced composite material the characteristic attenuation length of the end effects is significant, generally several times greater than in isotropic materials. Even though the answers on many of the questions in Saint-Venant's principle discussion in its classical interpretation were obtained, the full analysis of extended physical and mathematical issues emerging with the asymptotic solution in composites' elasticity needs to be carried out.

Semi-inverse Saint-Venant's method in its classical interpretation in the publications is used for obtaining solutions of non-linear problems of elasticity theory, linear problems of porous and graded materials, etc. [10–14]. The wide applicability range of the Saint-Venant's principle and the semi-inverse method may be also explained by that they make it possible to construct insightful analytical solutions, which may serve as a guide for calculation automation by means of numerical methods.

In [15–19] the Saint-Venant's method acquires an extended iteration-based interpretation, allowing to obtain asymptotic analytical solutions without any hypotheses and to satisfy all the boundary conditions. The solution converges satisfying the Banach fixed-point theorem [20].

Saint-Venant's principle is qualitative and, being applied to an end-loaded bar problem for the first time, it states that a statically equivalent to zero system of forces, distributed over a small area, creates only local disturbances. The disturbances decay rapidly with increasing distance from that area and become negligible at sufficiently large distances compared to its dimensions. The stress state in a long prismatic bar, loaded only at the end sections, practically does not depend on the way of surface forces distribution and is determined at some

distance from the ends by their resulting vector and resulting moment. However, for example, this formulation is insufficient for the extended theories of thin-walled systems from isotropic and composite material, which include bars, plates, shells and thin-walled bars. Stresses in corners, caused by the changing lateral dimension of the long elastic strip, rise a question about the formulation of attenuation conditions stated for displacements [19] given on a small area on frontal and side surfaces of a thin-walled body. Iteration-based interpretation of the semi-inverse method expands its application range to composite materials [20].

2. Generalized formulation of Saint-Venant's principle for stresses and displacements

Let us consider a problem of establishing stress-strain state localization conditions, analogous to the Saint-Venant's conditions, in a long prismatic bar, given the end displacements rather than stresses. Let a strip, modeling the state of the bar, be defined by $0 \leq x \leq l$, $-1 \leq z \leq 1$. Long edges of the strip $z \pm 1$ are free from any loading and constraints. On the short edges $x = 0, l$ the displacements are defined as

$$u(l, z) = f_1(z); \quad w(l, z) = f_2(z); \quad u(0, z) = f_3(z); \quad w(0, z) = f_4(z). \quad (1)$$

On edges $z \pm 1$

$$\sigma_z(x, \pm 1) = \tau(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

The solution comes down to finding Airy's stress function $\varphi(x, z)$, which satisfies biharmonic equation

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Stresses in terms of $\varphi(x, z)$ function are calculated as follows:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad \sigma_z = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}; \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Deformations are evaluated with the help of elasticity relations

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_z); \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xz} = \frac{t_{xz}}{G}.$$

Deformation-displacement formulas allow to determine the displacements

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z.$$

Let us rewrite the equation (3) as follows:

$$-\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} \right).$$

Integrating it twice over x and twice over z , we get

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} dx dx \right) + a(z)x + b(z); \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} dz dz \right) + c(x)z + d(x), \end{aligned} \quad (4)$$

where a, b, c, d are arbitrary functions of integration.

Elasticity relationships and deformation-displacement formulas, taking into account (4), yield

$$\begin{aligned}
 E \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} dzdz \right) + \nu [c(x)y + d(x)]; \\
 E \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} dx dx \right) + \nu [a(z)x + b(z)].
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Let us define in the equation (5)

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Z_k(z),
 \tag{6}$$

where the functions $Z_k(z)$ satisfy the equation $Z_k'''' = \kappa_k^4 Z_k$ and the conditions on the ends $Z_k(\pm 1) = Z_k'(\pm 1) = 0$. Prime mark designates differentiation with respect to z coordinate. In this case the conditions (2) are satisfied and the solution to equation (2) is sought by the Bubnov – Galerkin method. Functions $X_k(x)$ contain exponential multipliers, which provide the decay of the end effect.

Substituting expression (6) into formula (5) and integrating accordingly, the following is obtained:

$$\begin{aligned}
 Eu &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\nu}{2} \right) X_k^* \kappa_k^2 + \frac{\nu}{2} X_k''' \frac{1}{\kappa_k^2} \right] Z_{k2} + \nu [c^*(x)z + d^*(x)] + n(z); \\
 Ew &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\nu}{2} \right) X_k'' \frac{1}{\kappa_k} + \frac{\nu}{2} X_k^{**} \kappa_k^3 \right] Z_{k3} + \nu [a^*(z)x + b^*(z)] + m(x).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Here m and n are arbitrary functions of integration, the asterisk indicates that integration is carried out with respect to the corresponding coordinate, i.e. $Q^*(t) = \int Q(t) dt$. Z_k are the eigenfunctions for the problem of free vibration of a bar fixed at both ends and are fairly well examined. For a symmetrical about z axis case they become:

$$\begin{aligned}
 Z_k &= \cos \kappa_k \cosh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \cos \kappa_k z; \\
 Z_k' &= \kappa_k Z_{k1} = \kappa_k (\cos \kappa_k \sinh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \sin \kappa_k z); \\
 Z_k'' &= \kappa_k^2 Z_{k2} = \kappa_k^2 (\cos \kappa_k \cosh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \cos \kappa_k z); \\
 Z_k''' &= \kappa_k^3 Z_{k3} = \kappa_k^3 (\cos \kappa_k \sinh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \sin \kappa_k z),
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

where κ_k satisfies the transcendental equation

$$\tan \kappa_k + \tanh \kappa_k = 0.
 \tag{9}$$

For asymmetrical about z axis case

$$\begin{aligned}
 Z_k &= \cos \kappa_k \sinh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \sin \kappa_k z; \\
 Z_k' &= \kappa_k Z_{k1} = \kappa_k (\cos \kappa_k \cosh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \cos \kappa_k z); \\
 Z_k'' &= \kappa_k^2 Z_{k2} = \kappa_k^2 (\cos \kappa_k \sinh \kappa_k z + \cosh \kappa_k \sin \kappa_k z); \\
 Z_k''' &= \kappa_k^3 Z_{k3} = \kappa_k^3 (\cos \kappa_k \cosh \kappa_k z + \cosh \kappa_k \cos \kappa_k z),
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

where κ_k satisfies the transcendental equation $\tan \kappa_k - \tanh \kappa_k = 0$.

Let us now consider the possibility of satisfying the conditions (1) by representing displacements in the form of the expressions (7). On the end at $x = l$ there must be

$$\begin{aligned}
 Ef_1(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\nu}{2} \right) X_k^* \kappa_k^2 + \frac{\nu}{2} X_k''' \frac{1}{\kappa_k^2} \right] Z_{k2} + \nu [c^*(l)z + d^*(l)] + n(z); \\
 Ef_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\nu}{2} \right) X_k'' \frac{1}{\kappa_k} + \frac{\nu}{2} X_k^{**} \kappa_k^3 \right] Z_{k3} + \nu [a^*(z)x + b^*(z)] + m(l).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Let us determine the conditions, which must be imposed on the functions f_1 and f_2 , for the expansions (11) to be valid. If the systems of functions $\{Z_{k2}\}$ and $\{Z_{k3}\}$ are full, the arbitrary functions a^*, b^*, c^*, d^*, m, n must be zero. Let us check the fullness of these systems. May a certain symmetrical with respect to α function $\xi_1(\alpha)$ on the interval $(-1, 1)$ be expanded in a series by functions $Z_{k2}(\kappa_k \alpha)$ and antisymmetric function $\xi_2(\alpha)$ in a series by functions $Z_{k3}(\kappa_k \alpha)$. Thus,

$$\xi_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_{k2}(\kappa_k \alpha); \quad \xi_2(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Z_{k3}(\kappa_k \alpha);
 \tag{12}$$

$$a_k = \frac{1}{N_k} \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) Z_{k2}(\kappa_k \beta) d\beta; \quad b_k = \frac{1}{N_k} \int_{-1}^1 \xi_2(\beta) Z_{k1}(\kappa_k \beta) d\beta,
 \tag{13}$$

where $N_k(\kappa_k) = \int_{-1}^1 Z_{k2}^2(\kappa_k \beta) d\beta$.

Functions Z_{k1}, Z_{k2}, Z_{k3} satisfy the following orthogonality conditions:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 Z_{k2}(\kappa_k \beta) Z_{n2}(\kappa_n \beta) d\beta &= \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ N_k & (n = k) \end{cases}; \\
 \int_{-1}^1 Z_{k3}(\kappa_k \beta) Z_{n1}(\kappa_n \beta) d\beta &= \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ -N_k & (n = k) \end{cases}.
 \end{aligned}$$

For symmetric functions Z_{k2} it will be $N_k = \cosh^2 \kappa_k + \cos^2 \kappa_k$.

Let us compose expressions for partial sums of the series (12) substituting coefficients (13) into them:

$$\begin{aligned}
 S_K(Z_{k2}, Z_{k2}) &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{N_k} Z_{k2}(\kappa_k \alpha) \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) Z_{k2}(\kappa_k \beta) d\beta; \\
 S_K(Z_{k3}, Z_{k1}) &= -\sum_{k=1}^K \frac{1}{N_k} Z_{k3}(\kappa_k \alpha) \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) Z_{k1}(\kappa_k \beta) d\beta.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Therefore, the problem of correspondence of left and right parts in the formulas (12) results in evaluating the limits of the respective sums $S_K(Z_{k2}, Z_{k2}), S_K(Z_{k3}, Z_{k1})$ when $K \rightarrow \infty$. Changing the order of summation and integration in (14), the expressions for partial sums can be written as follows:

$$S_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) \sum_{k=1}^K \frac{Z_{k2}(\kappa_k \alpha) Z_{k2}(\kappa_k \beta)}{N_k} d\beta = \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) Q_K(Z_{k2}, Z_{k2}) d\beta;$$

$$S_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = \int_{-1}^1 \xi_2(\beta) \sum_{k=1}^K \frac{Z_{k3}(\kappa_k \alpha) Z_{k1}(\kappa_k \beta)}{N_k} d\beta = - \int_{-1}^1 \xi_2(\beta) Q_K(Z_{k3}, Z_{k1}) d\beta. \tag{15}$$

Let us also consider the same way as in [21] the contour integrals corresponding to the relationships (15):

$$I_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_K} \frac{Z_{k2}(\zeta \alpha) Z_{k2}(\zeta \beta)}{\cosh^2 \zeta \cos^2 \zeta \psi(\zeta)} d\zeta;$$

$$I_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_K} \frac{Z_{k3}(\zeta \alpha) Z_{k1}(\zeta \beta)}{\cosh^2 \zeta \cos^2 \zeta \psi(\zeta)} d\zeta, \tag{16}$$

which are evaluated by going in positive direction around a circle of radius R_K , circumscribed from the origin in the complex plane ζ . Radius R_K is chosen such that radiuses $2K$ of real and $2K$ imaginary roots of the equation (9) get inside the circle. The contour also does not pass the points $\zeta_k^{(0)} = \pi(2k+1)/2$ and $\zeta_k^{(1)} = \pi i(2k+1)/2$, which are the roots of the equation $\cos \zeta_k^{(0)} = 0$ and $\cosh \zeta_k^{(1)} = 0$. Then, every integral in the formulas (16) is equal to the sum of subtractions by all special points inside the circle R_K .

With respect to the stated for the formulas (16) above and taking into account that $N_K = \cosh \zeta \cos \zeta \psi(\zeta)$, we obtain

$$I_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = 4Q_K(Z_{k2}, Z_{k2}) - 2 \sum_{k=-K}^K \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta - 2;$$

$$I_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = -4Q_K(Z_{k2}, Z_{k2}) + 2 \sum_{k=-K}^K \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta. \tag{17}$$

The last term in the first expression (17) is subtraction for the integrand of the first integral from (16). Subtraction in zero for the second integral is equal to zero. The expressions (17) lead to

$$\lim_{K \rightarrow 0} Q_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta - \frac{1}{2};$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} Q_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta. \tag{18}$$

Substituting the expressions (18) into the formulas (15), we obtain

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta d\beta - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) d\beta = \xi_1(\alpha) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) d\beta;$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_2(\beta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \sin \frac{2k+1}{2} \pi \beta d\beta = \xi_2(\alpha). \tag{19}$$

Thus, the first series in the expression (12) converges to the original function ξ_1 , if

$$\int_{-1}^1 \xi_1(\beta) d\beta = 0. \tag{20}$$

The second series converges to the function ξ_2 unconditionally.

Let us now consider the case of expanding the asymmetric with respect to α function $\xi_3(\alpha)$ on the interval $(-1,1)$ in a series by antisymmetric functions $Z_{k2}(\kappa_k \alpha)$ and symmetric function $\xi_4(\alpha)$ in a series by antisymmetric functions $Z_{k2}(\kappa_k \alpha)$ from the definitions (10). Operating the same way, we obtain the following expressions for the corresponding contour integrals:

$$I_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = -4Q_K(Z_{k2}, Z_{k2}) + 2 \sum_{k=-K}^K \sin \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \sin \frac{2k+1}{2} \pi \beta - 6\alpha \beta;$$

$$I_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = -4Q_K(Z_{k3}, Z_{k1}) + 2 \sum_{k=-K}^K \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta - 3(1-\beta^2). \quad (21)$$

In both cases the last terms are subtractions at the point $\zeta = 0$. Proceeding to the limit when $K \rightarrow \infty$ we obtain the following for the partial sums:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \xi_3(\alpha) - \frac{3}{2} \alpha \int_{-1}^1 \xi_3(\beta) \beta d\beta;$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = \xi_4(\alpha) - \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \xi_4(\beta) (1-\beta^2) d\beta. \quad (22)$$

The first series converges to the original function ξ_3 , and the second series to the function ξ_4 , if

$$\int_{-1}^1 \xi_3(\beta) \beta d\beta = 0; \quad \int_{-1}^1 \xi_4(\beta) (1-\beta^2) d\beta = 0. \quad (23)$$

Let us elaborate the meaning of the expressions (20) and (23). Let us consider a problem of a cantilever bar of unit thickness, length l and height equal to two. Then $f_3 = f_4 = 0$ in the expressions (1) as for a fixed end. At $x=l$ the non-zero first two displacements (1) are defined. By removing the constraints defining these displacements and substituting them by normal force N , shear force and bending moment M , statically equivalent to stresses, which do not decay away from $x=l$ edge, we obtain

$$\sigma_x = \frac{1}{2} N + \frac{3}{2} Mz + \frac{3}{2} Q(l-x); \quad \sigma_z = 0; \quad \tau_{xz} = \frac{3}{4} (1-z^2).$$

Let us calculate the work done by the non-decaying stresses on the displacements (1) at the $x=l$ end:

$$U = \int_{-1}^1 [\sigma_x f_1(z) + \tau_{xz} f_2(z)] dz = \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{N}{2} + \frac{3}{2} Mz \right) f_1(z) + \frac{3}{4} Q(1-z^2) f_2(z) \right] dz. \quad (24)$$

Imposing a requirement that the emerging in the strip non-decaying stresses do not perform any work on the defined displacements of the bar end, the following expressions are obtained, owing to the independence of the values N, M, Q :

$$\int_{-1}^1 f_1(z) dz = 0; \quad \int_{-1}^1 f_1(z) z dz = 0; \quad \int_{-1}^1 f_2(z) (1-z^2) dz = 0,$$

which correspond to the conditions (20), (23), where the functions $\xi_1 + \xi_2$ and ξ_4 match in meaning with f_1 and f_2 respectively.

Apparently, analogous to the famous Saint-Venant's principle formulated for the cases of stresses on a small area, it is possible to formulate the locality of stress-strain state in elastic body, specified by displacements on a small area.

Displacements specified on a small area of elastic body produce only local stress-strain state, which decays faster with increasing distance from that area and becomes negligibly small at sufficiently large distances compared to the area dimensions, if the resulting vector and resulting moment, statically equivalent to the stresses on that area, do not produce work on the specified displacements.

3. Generalized iteration-based formulation of semi-inverse Saint-Venant's method

Let us consider a problem of generalizing the semi-inverse Saint-Venant's method to iteration-based form without resolving the equations in forces and moments by constructing an asymptotic analytical solution. The issues associated with existence and uniqueness of the solutions are formulated in functional analysis as a question about existence and uniqueness of a fixed point when a certain metric space is mapped onto itself. Among the various criteria of existence and uniqueness of a fixed point the most general one is the contraction mapping principle [21], which rationalises the convergence of simple iterations.

May a long rectangular strip be located in orthogonal coordinate system x^*, z^* such that $0 \leq x^* \leq l$, $-h \leq z^* \leq h$. The long edges of the strip carry some arbitrary load, the short edges may be loaded or constrained. The plane elasticity equations describing the stress-strain state of such strip are taken as

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} &= 0; & \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} &= 0; \\ \sigma_x^* &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z); & \tau^* &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma; & \sigma_z^* &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x); \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w^*}{\partial z^*}; & \varepsilon_x &= \frac{\partial u^*}{\partial x^*}; & \gamma &= \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}. \end{aligned}$$

Let us introduce the dimensionless coordinates $x = x^* / l$, $z = z^* / h$, dimensionless displacements $u = u^* / h$, $w = w^* / h$ along the axes x^*, z^* respectively, and dimensionless stresses $\sigma_x = \sigma_x^* / E$, $\sigma_z = \sigma_z^* / E$, $\tau = \tau^* / E$ (dimensional displacements, stresses and loads are marked by an asterisk). Dimensionless equations with these variables become

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= 0; \\ \sigma_x &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z); & \tau &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma; & \sigma_z &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x); \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \varepsilon_x &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

May the above equations be modified such that it is possible to successively calculate the remaining unknown variables by choosing some arbitrary w_0 и γ_0 as initial approximation values

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z; & \frac{\partial u}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma; & \tau &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma; & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x}; \\ \varepsilon_x &= \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}; & \sigma_x &= \varepsilon_x + \nu \sigma_z; & \varepsilon_z &= (1-\nu^2) \sigma_z - \nu \varepsilon_x; & \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z; \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z; & \frac{\partial \tau}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}; & \gamma &= 2(1+\nu) \tau \end{aligned}$$

by the method of successive approximations with increasing index (n) with respect to the following iteration scheme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{(n)}}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial w_{(n)}}{\partial x} + \gamma_{(n)}; & \tau_{(n)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_{(n)}; \\ \frac{\partial \sigma_{z(n)}}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n)}}{\partial x}; & \varepsilon_{x(n)} &= \varepsilon \frac{\partial u_{(n)}}{\partial x}; & \sigma_{x(n)} &= \varepsilon_{x(n)} + \nu \sigma_{z(n)}; \\ \varepsilon_{z(n)} &= (1-\nu^2) \sigma_{z(n)} - \nu \varepsilon_{x(n)}; & \frac{\partial w_{(n)}}{\partial z} &= \varepsilon_{z(n)}; \\ \frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x(n)}}{\partial x}; & \frac{\partial \sigma_{z(n+1)}}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial x}; & \gamma_{(n+1)} &= 2(1+\nu) \tau_{(n+1)} \dots\end{aligned}$$

From this point on the lower index in parenthesis indicates the number of approximation.

We will be interested in the equations of zero and first approximations when choosing values in accordance with the semi-inverse Saint-Venant method in the form of initial approximation

$$w_0 = w_0(x); \quad \gamma_{(0)} = \gamma_0(x).$$

Due to the initial approximation values being independent from z , all the other remaining unknowns are calculated as a result of the quadratures by z :

$$\begin{aligned}w_{(0)} &= w_0(x); & \gamma_{(0)} &= \gamma_0(x); & u_{(0)} &= -\varepsilon \int w_0' dz + \int \gamma_0 dz + u_0(x); \\ \tau_0 &= \gamma_0 / 2(1+\nu); & \sigma_{z(0)} &= -\varepsilon \int \tau_0' dz + \sigma_{z_0}(x); & \varepsilon_{x(0)} &= \varepsilon u_{(0)}'; \\ \sigma_{x(0)} &= \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}; & \tau_{(1)} &= -\varepsilon \int \sigma_{x(0)}' dz + \tau_0(x); & \gamma_{(1)} &= 2(1+\nu) \tau_{(1)}; \\ \varepsilon_{z(0)} &= (1-\nu^2) \sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)}; & w_{(1)} &= \int \varepsilon_{z(0)} dz + w_0(x).\end{aligned}$$

Lower index 0 indicates the arbitrary functions of integration. Calculation of the next values by the previous ones is accompanied by multiplying by a small parameter ε in order to write the unknowns in the form of asymptotic series based on the power of ε . It is clear that on this stage of iterations four arbitrary functions $w_0 = w_0(x)$, $\gamma_0 = \gamma_0(x)$, $u_0 = u_0(x)$, $\sigma_{z_0} = \sigma_{z_0}(x)$ are obtained, which allow to satisfy four boundary conditions on the long edges of the strip. From this point on dashes indicate differentiation over x ; zero without parenthesis specifies the arbitrary functions of integration that depend only on x .

Now it is possible to write the expressions for all the unknowns in the problem, assuming that they describe the produced displacements, deformations and stresses sufficiently accurate:

$$\begin{aligned}w &\approx w_0 + \left[(1-\nu^2) \sigma_{z_0} - \varepsilon \nu u_0' \right] z + \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon (1+\nu)^2 \tau_0' \right] \frac{z^2}{2}; \\ u &\approx u_0 + \left[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu) \tau_0 \right] z; \\ \varepsilon_x &\approx \varepsilon u_0' + \left[-\varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon (2+\nu) \tau_0' \right] z; \\ \sigma_x &\approx \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} + \left[-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu) \varepsilon \tau_0' \right] z; \\ \varepsilon_z &\approx (1-\nu^2) \sigma_{z_0} - \varepsilon \nu u_0' + \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon (1+\nu)^2 \tau_0' \right] z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau &\approx \tau_0 - \left(\varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' \right) z + \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2}; \\ \sigma_z &\approx \sigma_{z_0} - \varepsilon \tau_0' z + \left(\varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' \right) \frac{z^2}{2} + \left[-\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6}. \end{aligned} \quad (25)$$

Values τ and σ_z are given in the first approximation, the rest are in the zeroth approximation. Boundary conditions that correspond to the loading conditions must be satisfied on the long edges of the strip $z^* = \pm h$. In dimensionless form these conditions are written as

$$\begin{aligned} \sigma_z &= Z_+(x), \quad \tau = X_+(x) \quad \text{при } z = 1; \\ \sigma_z &= Z_-(x), \quad \tau = X_-(x) \quad \text{при } z = -1. \end{aligned} \quad (26)$$

Dimensionless loads are obtained by dividing the dimensional ones by stiffness E . Let us assume that – the loads are slowly changing functions of coordinate x . Let the conditions (26) be satisfied by the first approximation values from the relationships (25). As a result the equations with respect to the unknowns w_0, τ_0 , defining the bending problem:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2\tau_0 &= X_+ + X_-; \\ -\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' - 6\varepsilon \tau_0' &= 3(Z_+ - Z_-), \end{aligned} \quad (27)$$

and with respect to u_0, σ_{z_0} , defining the axial load problem:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' &= (X_+ - X_-) / 2; \\ \varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} &= Z_+ + Z_-, \end{aligned} \quad (28)$$

are obtained.

Equations (27) and (28), assuming small variability of the functions τ_0 and σ_{z_0} after removing the values with small multipliers, are brought to the classic form

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0^{s''' } + 2\tau_0^s &= X_+ + X_-; \\ -\varepsilon^4 w_0^{s'''' } - 6\varepsilon \tau_0^{s'} &= 3(Z_+ - Z_-); \\ -\varepsilon^2 u_0^{s'' } - \varepsilon \nu \sigma_{z_0}^{s'} &= (X_+ - X_-) / 2; \\ \varepsilon^3 u_0^{s''' } + 2\sigma_{z_0}^s &= Z_+ + Z_-, \end{aligned} \quad (29)$$

confirming that equations (27) and (28) generalize the classic representations of the semi-inverse Saint-Venant's method and their solutions depend on x . The upper index s indicates the association with slowly varying components of the stress-strain state.

Subtracting by pair the equations (29) from (27) and equations (30) from (28) and taking into account assumptions $w_0^{s'} \sim \varepsilon^0 w_0^s(x)$, $\tau_0^{s'} \sim \varepsilon^0 \tau_0^s(x)$, $\tau_0^{q'} \sim \varepsilon^{-1} \tau_0^q(x/\varepsilon)$, it is possible to obtain singularly perturbed equations indicated by index q :

$$-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0; \quad (31)$$

$$(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q'''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0. \quad (32)$$

Their solutions differ by a constant that must be removed as a non-conforming to the condition of large variability. Therefore, both solutions of the equations (31) and (32) match:

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_1 \exp\left(-k \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ C_2 \exp\left(-k \frac{(1-x)}{\varepsilon}\right) \end{cases}$$

As they depend from the argument x/ε , they can be used for satisfying lost boundary conditions and smoothing out discontinuities in slowly varying classical solutions. The upper solution is true when $x \geq 0$, and the lower is true when $x \leq 1$. If taking $C_1 = -\frac{k}{2\varepsilon}$, then $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{\varepsilon} \exp\left(-k \frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$. That means that the equation (31) allows to establish a relationship between the ordinary numerical function τ_0^q and the generalized Dirac δ function.

4. Conclusion

Two Saint-Venant's methods are analysed and modernized. The first method involves evaluation of stress-strain state components for the purpose of simplifying the problem statement of seeking the solution by a priori removal of rapidly varying and decaying solution components. It was introduced because Saint-Venant took into account the complexity of finding general solutions. Hence, by developing the method of solving the problem he came to inventing the principle that rationalizes the components lost in the process of constructing the solution, in particular due to the transition from stresses to forces and moments (stress resultants). An addition to his classical principle for the case of displacements specified on a small area was formulated on an example of a long elastic strip, which is absent in the literature. However, both the Saint-Venant's principle and the generalized principle cannot give any recommendations to its constructive use, but are practical for mechanical interpretation of the partial approximate solutions obtained by any method.

The second method was named semi-inverse, because Saint-Venant suggested to specify a part of the unknown variables and to resolve the rest. With that Saint-Venant moved from stresses to forces and moments, rationalizing the transition by the principle. It can be stated that all the thin-walled body theories are based on forces and moments, assuming the rationalization of transition to them by the Saint-Venant's principle. It is shown in this paper that if taking the idea of specifying a part of the unknowns, but not transitioning to forces and moments, the semi-inverse method may be expanded into a constructive one and will be converging independently of the choice of the initial approximation. This possibility is based on the Poincaré small parameter method, Picard – Lindelöf iteration method and Banach's fixed point method. With that a transformation of a complex operator in the problem to a series of simple integratable operators and a methodology of separating rapidly varying and slowly varying components of the general solution, provided the satisfaction of all the boundary conditions of the original problem, are proposed. The calculation process may be interpreted as splitting the complex operator into four consecutive Picard's operators with respect to lateral coordinate and three – with respect to longitudinal coordinate. The accuracy of the obtained solution is evaluated by the order of the first removed term by ε for slowly varying values. Then the semi-inverse method becomes independent from the Saint-Venant's principle.

RUS

1. Введение

Основным фактором для отказа исследователю в признании его работ становятся вполне здравое и обоснованное недоверие к чересчур нестандартному и вызывающему. Если вернуться к образу сферы изученного, то любые попытки сильно выйти за ее границы с большой вероятностью окажутся в конечном счете провальными. Таковы, например, многочисленные попытки создать «теорию всего» или, наоборот, ниспровергнуть какую-нибудь краеугольную теорию – относительности или эволюции. Подобные «теории

всего» и «ниспровержения основ» выглядят слишком подозрительно, чтобы вызвать желание в них всерьез разбираться. В данном случае априорное недоверие к излишне странному и претенциозному выполняет в науке функцию «санитара леса» – экономного способа избавиться от потенциально деструктивных явлений.

Механике сплошных сред и близкой к ней области математики уравнений в частных производных свойственно поэтапное развитие основных, выдвинутых «отцами науки» идей. Постепенное развитие взглядов на принципы, лежащие в основе механики деформируемого тела, рост той ветви математического анализа, которая применяется при вычислениях, и накопление практических правил, получаемых путем истолкования математических результатов, приводят к тому, что одни принципы заменяются другими, более общими, число их уменьшается и данная область приводится во все более тесную связь с иными отделами физики, причем одинаковые физические принципы служат в последнем счете основой их всех.

Считается, что теория упругости основывается на двух основных идеях Сен-Венана: принцип и полуобратный метод. Принцип Сен-Венана, названный в честь Адемара Жан-Клода де Сен-Венана, может быть выражен следующим образом: «...разница между эффектами двух разных, но статически эквивалентных нагрузок становится очень малой при достаточно больших расстояниях от нагрузки». Это заявление было опубликовано Сен-Венаном в 1855 г. [1]. Позднее Мизес выдвинул предположение, что принцип неприменим к телам конечных размеров [2]. В нашей статье это утверждение опровергается.

Решение в усилиях и моментах (stress resultants) задач для тонкостенных систем долгое время определяло направление исканий исследователей. После построения основных теорий, пластин, оболочек и тонкостенных систем были отмечены противоречия в них: невозможность выполнения всех граничных условий и определения всех напряжений и перемещений. Далее большие трудности встретились при решении задач для анизотропных композиционных материалов. В связи с этим было обращено внимание на решение задач в напряжениях, хотя бы в области закреплений. На первый план вышла проблема применения полуобратного метода Сен-Венана к механике композиционных материалов. Такие задачи требуют переосмысления накопленного опыта и его обобщения с целью получения на основе расширенных и обобщенных формулировок новых возможностей применения классических идей к новым задачам и материалам.

Фридрихс и Дресслер [3] и Гольденвейзер и Колос [4] независимо друг от друга показали, что классическая теория пластины Кирхгофа является главным членом асимптотического разложения (по малому параметру толщины) для линейной теории тонкостенных изотропных тел. При их подходе внутреннее решение, имеющее значение лишь вблизи края, определяется последовательностью краевых задач, которые очень трудно решить, почти так же трудно, как решить исходную задачу. В случае напряжений на краю принцип Сен-Венана может быть использован для создания граничных условий в классической теории пластин, а также для некоторых внешних разложений более высокого порядка без какой-либо ссылки на внутреннее краевое решение. Попытки получить соответствующие граничные условия для перемещений не привели к успеху.

Грегори и Ван [5] применили разработанный ими метод получения правильной последовательности граничных условий для произвольно заданных допустимых краевых условий (без явного решения внутреннего или пограничного слоя решения) в ряде специальных случаев, представляющих общий интерес, в том числе случаев с заданными краевыми перемещениями. Их результаты показывают, что принцип Сен-Венана следует применять только к ведущим членам внешнего решения, то есть к классической теории пластины.

Norgan с соавторами [6–10] исследовали разные аспекты применения принципа Сен-Венана в пограничном слое и получили много интересных практических результатов. Для композитов было определено влияние закреплений концов образцов в механических испытаниях, влияние крепежных элементов, соединений, вырезов и тому подобного в композитных структурах, выявлена ограниченность формул сопротивления материалов при применении к композитам. Установлено, что пренебрежение упругостью концевых закреплений, как правило, оправдывающихся принципом Сен-Венана, не применимо в задачах, связанных с композитными материалами. В частности, для армированного волокнами композиционного материала характерная длина затухания концевых эффектов является значительной, в общем случае в несколько раз длиннее, чем в случае изотропных материалов. Хотя на многие из обсуждаемых вопросов принципа Сен-Венана в его классической интерпретации ответы были получены, должен быть выполнен полный анализ более широких физических и математических вопросов, возникающих в связи с асимптотикой решений в упругости композитов.

Полуобратный метод Сен-Венана в его классической интерпретации в статьях используется для получения решений нелинейных задач теории упругости, линейных задач для пористых и градиентных

материалов и т. д. [10–14]. Широту применения полуобратного метода и принципа Сен-Венана можно объяснить еще и тем, что они дают возможности, если удастся, построить понимаемые аналитические решения, которые могут служить руководством для автоматизации расчетов численными методами.

В статьях [15–19] метод Сен-Венана приобретает расширенную итерационную трактовку, позволяя получить асимптотические аналитические решения без каких-либо гипотез и выполнить все граничные условия. Решение сходится, удовлетворяя теореме Банаха о неподвижной точке [20].

Принцип Сен-Венана имеет качественный характер и, будучи впервые сформулированным в применении к задаче о нагруженном по концам стержне, состоит в утверждении, что статически эквивалентная нулю система сил, распределенных по малому участку поверхности, создает лишь локальные возмущения, быстро затухающие по мере удаления от этого участка и становящиеся пренебрежимо малыми на расстояниях, достаточно больших по сравнению с его размерами. В длинном призматическом стержне, нагруженном только по концевым сечениям, напряженное состояние практически не зависит от способа распределения по нему поверхностных сил и определяется на некотором расстоянии от концов их главным вектором и главным моментом. Однако, например, для уточненных теорий тонкостенных систем из изотропного и композиционного материала, к которым относятся стержни, пластины, оболочки и тонкостенные стержни, такой формулировки принципа становится недостаточно. Вызванные изменением поперечного размера длинной упругой полосы напряжения в углах ставят вопрос о формулировке условий затухания, определенных для перемещений [19], заданных на малом участке лицевой и боковой поверхностей тонкостенного тела. Итерационная трактовка полуобратного метода расширяет возможности его применения к композиционным материалам [20].

2. Обобщенная формулировка принципа Сен-Венана для напряжений и перемещений

Рассмотрим задачу об установлении аналогичных условиям Сен-Венана условий локализации напряженно-деформированного состояния в длинном призматическом стержне, на концах которого заданы не напряжения, а перемещения. Пусть полоса, с помощью которой моделируется состояние стержня, задана неравенствами $0 \leq x \leq l$, $-1 \leq z \leq 1$. Длинные края полосы $z \pm 1$ свободны от каких-либо нагрузок и закреплений. На коротких сторонах $x = 0, l$ заданы перемещения

$$u(l, z) = f_1(z); \quad w(l, z) = f_2(z); \quad u(0, z) = f_3(z); \quad w(0, z) = f_4(z). \quad (1)$$

На краях $z \pm 1$

$$\sigma_z(x, \pm 1) = \tau(x, \pm 1) = 0. \quad (2)$$

Решение сводится к нахождению функции Эри $\varphi(x, z)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Напряжения через функцию $\varphi(x, z)$ вычисляются по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad \sigma_z = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}; \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Деформации находятся с помощью соотношений упругости

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_z); \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xz} = \frac{t_{xz}}{G}.$$

Формулы деформации – перемещения дают возможность определить перемещения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z.$$

Перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$-\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} \right).$$

Интегрируя его дважды по x и дважды по z , получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} dx dx \right) + a(z)x + b(z); \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} dz dz \right) + c(x)z + d(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где a, b, c, d – произвольные функции интегрирования.

Соотношения упругости и формулы деформации – перемещения с учетом (4) дают

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} dz dz \right) + \nu [c(x)y + d(x)]; \\ E \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \iint \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} dx dx \right) + \nu [a(z)x + b(z)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим в уравнении (5)

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Z_k(z), \quad (6)$$

где функции $Z_k(z)$ удовлетворяют уравнению $Z_k'''' = \kappa_k^4 Z_k$ и условиям на концах $Z_k(\pm 1) = Z_k'(\pm 1) = 0$. Штрихом обозначено дифференцирование по координате z . В этом случае условия (2) выполнены, а решение уравнения (2) разыскивается методом Бубнова – Галеркина. Функции $X_k(x)$ содержат экспоненциальные множители, обеспечивающие затухание концевого воздействия.

Подставив выражение (6) в формулы (5) и интегрируя соответствующим образом, получим выражения для перемещений

$$\begin{aligned} Eu &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\nu}{2} \right) X_k^* \kappa_k^2 + \frac{\nu}{2} X_k''' \frac{1}{\kappa_k^2} \right] Z_{k2} + \nu [c^*(x)z + d^*(x)] + n(z); \\ Ew &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\nu}{2} \right) X_k'' \frac{1}{\kappa_k} + \frac{\nu}{2} X_k^{**} \kappa_k^3 \right] Z_{k3} + \nu [a^*(z)x + b^*(z)] + m(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь m и n произвольные функции интегрирования, звездочка означает, что произведено интегрирование по соответствующей координате, то есть $Q^*(t) = \int Q(t) dt$. Функции Z_k являются собственными для задачи о собственных колебаниях защемленной по концам балки и достаточно хорошо исследованы. Для симметричного по координате z случая они имеют вид

$$\begin{aligned} Z_k &= \cos \kappa_k \cosh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \cos \kappa_k z; \\ Z_k' &= \kappa_k Z_{k1} = \kappa_k (\cos \kappa_k \sinh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \sin \kappa_k z); \\ Z_k'' &= \kappa_k^2 Z_{k2} = \kappa_k^2 (\cos \kappa_k \cosh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \cos \kappa_k z); \\ Z_k''' &= \kappa_k^3 Z_{k3} = \kappa_k^3 (\cos \kappa_k \sinh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \sin \kappa_k z), \end{aligned} \quad (8)$$

где κ_k удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\tan \kappa_k + \tanh \kappa_k = 0. \tag{9}$$

Для антисимметричного по z случая

$$\begin{aligned} Z_k &= \cos \kappa_k \sinh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \sin \kappa_k z; \\ Z_k' &= \kappa_k Z_{k1} = \kappa_k (\cos \kappa_k \cosh \kappa_k z - \cosh \kappa_k \cos \kappa_k z); \\ Z_k'' &= \kappa_k^2 Z_{k2} = \kappa_k^2 (\cos \kappa_k \sinh \kappa_k z + \cosh \kappa_k \sin \kappa_k z); \\ Z_k''' &= \kappa_k^3 Z_{k3} = \kappa_k^3 (\cos \kappa_k \cosh \kappa_k z + \cosh \kappa_k \cos \kappa_k z), \end{aligned} \tag{10}$$

где κ_k удовлетворяет трансцендентному уравнению $\tan \kappa_k - \tanh \kappa_k = 0$.

Рассмотрим теперь возможность выполнения условий (1) с помощью представления перемещений в виде выражений (7). На конце при $x = l$ должно быть

$$\begin{aligned} Ef_1(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) X_k^* \kappa_k^2 + \frac{\nu}{2} X_k''' \frac{1}{\kappa_k^2} \right] Z_{k2} + \nu [c^*(l)z + d^*(l)] + n(z); \\ Ef_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) X_k'' \frac{1}{\kappa_k} + \frac{\nu}{2} X_k^{**} \kappa_k^3 \right] Z_{k3} + \nu [a^*(z)x + b^*(z)] + m(l). \end{aligned} \tag{11}$$

Определим условия, которые должны быть наложены на функции f_1 и f_2 для того, чтобы разложения (11) имели место. Если системы функций $\{Z_{k2}\}$ и $\{Z_{k3}\}$ полны, произволы интегрирования a^*, b^*, c^*, d^*, m, n должны быть положены нулями. Проверим полноту этих систем. Разложим некоторую симметричную по α функцию $\xi_1(\alpha)$ на интервале $(-1, 1)$ в ряд по функциям $Z_{k2}(\kappa_k \alpha)$ и антисимметричную функцию $\xi_2(\alpha)$ в ряд по функциям $Z_{k3}(\kappa_k \alpha)$. Таким образом,

$$\xi_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_{k2}(\kappa_k \alpha); \quad \xi_2(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k Z_{k3}(\kappa_k \alpha); \tag{12}$$

$$a_k = \frac{1}{N_k} \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) Z_{k2}(\kappa_k \beta) d\beta; \quad b_k = \frac{1}{N_k} \int_{-1}^1 \xi_2(\beta) Z_{k3}(\kappa_k \beta) d\beta, \tag{13}$$

где $N_k(\kappa_k) = \int_{-1}^1 Z_{k2}^2(\kappa_k \beta) d\beta$.

Функции Z_{k1}, Z_{k2}, Z_{k3} удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Z_{k2}(\kappa_k \beta) Z_{n2}(\kappa_n \beta) d\beta &= \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ N_k & (n = k) \end{cases}; \\ \int_{-1}^1 Z_{k3}(\kappa_k \beta) Z_{n3}(\kappa_n \beta) d\beta &= \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ -N_k & (n = k) \end{cases}. \end{aligned}$$

Для симметричных функций Z_{k2} будет $N_k = \cosh^2 \kappa_k + \cos^2 \kappa_k$.

Составим выражения для частичных сумм рядов (12), подставив в них коэффициенты (13):

$$\begin{aligned}
 S_K(Z_{k_2}, Z_{k_2}) &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{N_k} Z_{k_2}(\kappa_k \alpha) \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) Z_{k_2}(\kappa_k \beta) d\beta; \\
 S_K(Z_{k_3}, Z_{k_1}) &= -\sum_{k=1}^K \frac{1}{N_k} Z_{k_3}(\kappa_k \alpha) \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) Z_{k_1}(\kappa_k \beta) d\beta.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Следовательно задача о соответствии левых и правых частей в формулах (12) сводится к нахождению пределов соответствующих сумм $S_K(Z_{k_2}, Z_{k_2})$, $S_K(Z_{k_3}, Z_{k_1})$ при $K \rightarrow \infty$. Изменив порядок суммирования и интегрирования в (14), запишем выражения для частичных сумм в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 S_K(Z_{k_2}, Z_{k_2}) &= \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) \sum_{k=1}^K \frac{Z_{k_2}(\kappa_k \alpha) Z_{k_2}(\kappa_k \beta)}{N_k} d\beta = \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) Q_K(Z_{k_2}, Z_{k_2}) d\beta; \\
 S_K(Z_{k_3}, Z_{k_1}) &= \int_{-1}^1 \xi_2(\beta) \sum_{k=1}^K \frac{Z_{k_3}(\kappa_k \alpha) Z_{k_1}(\kappa_k \beta)}{N_k} d\beta = -\int_{-1}^1 \xi_2(\beta) Q_K(Z_{k_3}, Z_{k_1}) d\beta.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Рассмотрим, так же как и в [21], соответствующие соотношениям (15) контурные интегралы

$$\begin{aligned}
 I_K(Z_{k_2}, Z_{k_2}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{R_K} \frac{Z_{k_2}(\zeta \alpha) Z_{k_2}(\zeta \beta)}{\cosh^2 \zeta \cos^2 \zeta \psi(\zeta)} d\zeta; \\
 I_K(Z_{k_3}, Z_{k_1}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{R_K} \frac{Z_{k_3}(\zeta \alpha) Z_{k_1}(\zeta \beta)}{\cosh^2 \zeta \cos^2 \zeta \psi(\zeta)} d\zeta,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

вычисленные при обходе в положительном направлении по кругу радиуса R_K , описанному из начала координат в комплексной плоскости ζ . Радиус R_K выбираем таким образом, чтобы внутри окружности попали радиусы $2K$ вещественных и $2K$ мнимых корней уравнения (9). Контур также не проходит через точки $\zeta_k^{(0)} = \pi(2k+1)/2$ и $\zeta_k^{(1)} = \pi i(2k+1)/2$, являющиеся корнями уравнения $\cos \zeta_k^{(0)} = 0$ и $\cosh \zeta_k^{(1)} = 0$. Тогда каждый интеграл в формулах (16) равен сумме вычетов по всем особым точкам внутри круга R_K .

В соответствии со сказанным для формул (16) и учитывая, что $N_k = \cosh \zeta \cos \zeta \psi(\zeta)$, получаем

$$\begin{aligned}
 I_K(Z_{k_2}, Z_{k_2}) &= 4Q_K(Z_{k_2}, Z_{k_2}) - 2 \sum_{k=-K}^K \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta - 2; \\
 I_K(Z_{k_3}, Z_{k_1}) &= -4Q_K(Z_{k_3}, Z_{k_1}) + 2 \sum_{k=-K}^K \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Последний член в первом выражении (17) есть вычет для подынтегрального выражения первого интеграла из (16). Вычет в нуле для второго интеграла равен нулю. Из выражений (17) следует, что

$$\begin{aligned}
 \lim_{K \rightarrow 0} Q_K(Z_{k_2}, Z_{k_2}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta - \frac{1}{2}; \\
 \lim_{K \rightarrow 0} Q_K(Z_{k_3}, Z_{k_1}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Подставив выражения (18) в формулы (15), получим

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta d\beta - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) d\beta = \xi_1(\alpha) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_1(\beta) d\beta;$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi_2(\beta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \sin \frac{2k+1}{2} \pi \beta d\beta = \xi_2(\alpha). \quad (19)$$

Следовательно, первый ряд в выражении (12) сходится к исходной функции ξ_1 , если

$$\int_{-1}^1 \xi_1(\beta) d\beta = 0. \quad (20)$$

Второй ряд сходится к функции ξ_2 безусловно.

Рассмотрим теперь случай разложения антисимметричной по α функции $\xi_3(\alpha)$ на интервале $(-1, 1)$ в ряд по антисимметричным функциям $Z_{k2}(\kappa_k \alpha)$ и симметричную функцию $\xi_4(\alpha)$ в ряд по антисимметричным функциям $Z_{k2}(\kappa_k \alpha)$ из определений (10). Поступая аналогичным образом, получим для соответствующих контурных интегралов выражения

$$I_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = -4Q_K(Z_{k2}, Z_{k2}) + 2 \sum_{k=-K}^K \sin \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \sin \frac{2k+1}{2} \pi \beta - 6\alpha\beta;$$

$$I_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = -4Q_K(Z_{k3}, Z_{k1}) + 2 \sum_{k=-K}^K \cos \frac{2k+1}{2} \pi \alpha \cos \frac{2k+1}{2} \pi \beta - 3(1-\beta^2). \quad (21)$$

В обоих выражениях последние члены являются вычетами в точке $\zeta = 0$. Перейдя к пределу при $K \rightarrow \infty$, получим для частичных сумм

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(Z_{k2}, Z_{k2}) = \xi_3(\alpha) - \frac{3}{2} \alpha \int_{-1}^1 \xi_3(\beta) \beta d\beta;$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K(Z_{k3}, Z_{k1}) = \xi_4(\alpha) - \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \xi_4(\beta) (1-\beta^2) d\beta. \quad (22)$$

Первый ряд сходится к исходной функции ξ_3 , а второй ряд к функции ξ_4 , если

$$\int_{-1}^1 \xi_3(\beta) \beta d\beta = 0; \quad \int_{-1}^1 \xi_4(\beta) (1-\beta^2) d\beta = 0. \quad (23)$$

Поясним смысл полученных выражений (20) и (23). Рассмотрим задачу для консоли единичной толщины, длиной l и высотой, равной двум. В этом случае в выражениях (1) для заделки надо положить $f_3 = f_4 = 0$. При $x = l$ заданы ненулевые первые два перемещения (1). Отбросим задающие эти перемещения связи и заменим их нормальной силой N , поперечной силой и изгибающим моментом M , статически эквивалентным незатухающим по мере удаления от края $x = l$ напряжениям.

$$\sigma_x = \frac{1}{2} N + \frac{3}{2} Mz + \frac{3}{2} Q(l-x); \quad \sigma_z = 0; \quad \tau_{xz} = \frac{3}{4} (1-z^2).$$

Подсчитаем работу, совершаемую незатухающими напряжениями на перемещениях (1) конца $x = l$:

$$U = \int_{-1}^1 [\sigma_x f_1(z) + \tau_{xz} f_2(z)] dz = \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{N}{2} + \frac{3}{2} Mz \right) f_1(z) + \frac{3}{4} Q(1-z^2) f_2(z) \right] dz. \quad (24)$$

Потребовав, чтобы возникающие в полосе незатухающие напряжения не совершали работу на заданных перемещениях конца стержня, получим в силу независимости величин N, M, Q следующие выражения:

$$\int_{-1}^1 f_1(z) dz = 0; \quad \int_{-1}^1 f_1(z) z dz = 0; \quad \int_{-1}^1 f_2(z) (1-z^2) dz = 0,$$

совпадающие с условиями (20), (23), где функции $\xi_1 + \xi_2$ и ξ_4 совпадают по смыслу с f_1 и f_2 соответственно.

По-видимому, по аналогии с известным принципом Сен-Венана, сформулированным для случая заданных на малом участке напряжений, можно дать формулировку локальности напряженно-деформированного состояния, вызванного в упругом теле заданными на малом участке его поверхности перемещениями.

Заданные на малом участке поверхности упругого тела перемещения создают лишь локальное напряженно-деформированное состояние, быстро затухающее по мере удаления от этого участка и становящееся пренебрежимо малым на расстояниях, достаточно больших по сравнению с размерами участка, если главный вектор и главный момент, статически эквивалентные возникающим на этом участке напряжениям, не совершают работу на заданных перемещениях.

3. Обобщенная итерационная формулировка полубратного метода Сен-Венана

Рассмотрим вопрос об обобщении полубратного метода Сен-Венана к итерационному виду без сведения уравнений к усилиям и моментам путем построения асимптотического аналитического решения. Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений, формулируются в функциональном анализе в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений [21], обосновывающий сходимость простых итераций.

Длинную прямоугольную полосу отнесем к прямоугольной системе координат x^*, z^* , так что $0 \leq x^* \leq l$, $-h \leq z^* \leq h$. Длинные стороны полосы несут некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или нагружены. Уравнения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, возьмем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} &= 0; & \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} &= 0; \\ \sigma_x^* &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z); & \tau^* &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma; & \sigma_z^* &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x); \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w^*}{\partial z^*}; & \varepsilon_x &= \frac{\partial u^*}{\partial x^*}; & \gamma &= \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}. \end{aligned}$$

Введем безразмерные координаты $x = x^*/l$, $z = z^*/h$, безразмерные перемещения $u = u^*/h$, $w = w^*/h$ вдоль осей x^*, z^* соответственно и безразмерные напряжения $\sigma_x = \sigma_x^*/E$, $\sigma_z = \sigma_z^*/E$, $\tau = \tau^*/E$ (размерные перемещения, напряжения и нагрузки отмечаются звездочкой). Безразмерные уравнения в этих переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= 0; \\ \sigma_x &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z); & \tau &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma; & \sigma_z &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x); \end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Преобразуем их так, чтобы, выбрав в качестве величин начального приближения некоторые w_0 и γ_0 , можно было последовательно вычислить все остальные искомые неизвестные

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma; \quad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x}; \\ \varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_x = \varepsilon_x + \nu \sigma_z; \quad \varepsilon_z = (1-\nu^2) \sigma_z - \nu \varepsilon_x; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z; \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z; \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}; \quad \gamma = 2(1+\nu) \tau \end{aligned}$$

методом последовательных приближений по мере увеличения номера (n) в соответствии со следующей итерационной схемой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{(n)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w_{(n)}}{\partial x} + \gamma_{(n)}; \quad \tau_{(n)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma_{(n)}; \\ \frac{\partial \sigma_{z(n)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n)}}{\partial x}; \quad \varepsilon_{x(n)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(n)}}{\partial x}; \quad \sigma_{x(n)} = \varepsilon_{x(n)} + \nu \sigma_{z(n)}; \\ \varepsilon_{z(n)} = (1-\nu^2) \sigma_{z(n)} - \nu \varepsilon_{x(n)}; \quad \frac{\partial w_{(n)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(n)}; \\ \frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_{x(n)}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \sigma_{z(n+1)}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{(n+1)}}{\partial x}; \quad \gamma_{(n+1)} = 2(1+\nu) \tau_{(n+1)} \dots \end{aligned}$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения.

Нас будут интересовать уравнения нулевого и первого приближений при выборе величин в соответствии с полуобратным методом Сен-Венана в виде начального приближения

$$w_0 = w_0(x); \quad \gamma_{(0)} = \gamma_0(x).$$

В силу независимости величин начального приближения от z все остальные неизвестные вычисляются в результате квадратур по z :

$$\begin{aligned} w_{(0)} = w_0(x); \quad \gamma_{(0)} = \gamma_0(x); \quad u_{(0)} = -\varepsilon \int w_0' dz + \int \gamma_0 dz + u_0(x); \\ \tau_0 = \gamma_0 / 2(1+\nu); \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon \int \tau_0' dz + \sigma_{z0}(x); \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}'; \\ \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}; \quad \tau_{(1)} = -\varepsilon \int \sigma_{x(0)}' dz + \tau_0(x); \quad \gamma_{(1)} = 2(1+\nu) \tau_{(1)}; \\ \varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2) \sigma_{z(0)} - \nu \varepsilon_{x(0)}; \quad w_{(1)} = \int \varepsilon_{z(0)} dz + w_0(x). \end{aligned}$$

Нижним индексом 0 обозначены произволы интегрирования. Вычисление последующих величин по предыдущим сопровождается умножением на малый параметр ε с целью формирования записи неизвестных в виде асимптотической последовательности по степеням ε . Видно, что на данном этапе итерационных вычислений мы получили четыре произвольных функции $w_0 = w_0(x)$, $\gamma_0 = \gamma_0(x)$, $u_0 = u_0(x)$,

$\sigma_{z_0} = \sigma_{z_0}(x)$, позволяющие выполнить четыре граничных условия на длинных сторонах полосы. Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по x , в индексе нулем без скобок обозначены произвольные функции интегрирования, зависящие только от x .

Теперь можно записать выражения для всех неизвестных задачи, предполагая, что они достаточно точно описывают возникающие перемещения, деформации и напряжения:

$$\begin{aligned} w &\approx w_0 + \left[(1 - \nu^2) \sigma_{z_0} - \varepsilon \nu u_0' \right] z + \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon (1 + \nu)^2 \tau_0' \right] \frac{z^2}{2}; \\ u &\approx u_0 + \left[-\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 \right] z; \\ \varepsilon_x &\approx \varepsilon u_0' + \left[-\varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon (2 + \nu) \tau_0' \right] z; \\ \sigma_x &\approx \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} + \left[-\varepsilon^2 w_0'' + (2 + \nu) \varepsilon \tau_0' \right] z; \\ \varepsilon_z &\approx (1 - \nu^2) \sigma_{z_0} - \varepsilon \nu u_0' + \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - \varepsilon (1 + \nu)^2 \tau_0' \right] z; \\ \tau &\approx \tau_0 - \left(\varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' \right) z + \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' \right] \frac{z^2}{2}; \\ \sigma_z &\approx \sigma_{z_0} - \varepsilon \tau_0' z + \left(\varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' \right) \frac{z^2}{2} + \left[-\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' \right] \frac{z^3}{6}. \end{aligned} \quad (25)$$

Величины τ и σ_z записаны в первом приближении, остальные – в нулевом. На длинных сторонах полосы $z^* = \pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются как

$$\begin{aligned} \sigma_z &= Z_+(x), \quad \tau = X_+(x) \quad \text{при } z = 1; \\ \sigma_z &= Z_-(x), \quad \tau = X_-(x) \quad \text{при } z = -1. \end{aligned} \quad (26)$$

Безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость E . Будем считать нагрузки медленно изменяющимися функциями координаты x . Пусть условия (26) удовлетворяются величинами первого приближения из соотношений (25). В результате получим уравнения относительно неизвестных w_0, τ_0 , определяющих задачу изгиба:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' + 2\tau_0 &= X_+ + X_-; \\ -\varepsilon^4 w_0'''' + (2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0''' - 6\varepsilon \tau_0' &= 3(Z_+ - Z_-), \end{aligned} \quad (27)$$

и относительно u_0, σ_{z_0} , определяющих задачу растяжения – сжатия:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon \nu \sigma_{z_0}' &= (X_+ - X_-) / 2; \\ \varepsilon^3 u_0''' + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} &= Z_+ + Z_-. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения (27) и (28) в предположении малой изменчивости функций τ_0 и σ_{z_0} после отбрасывания величин с малыми множителями сводятся к классическому виду

$$\begin{aligned}\varepsilon^3 w_0^{s''''} + 2\tau_0^s &= X_+ + X_-; \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} - 6\varepsilon\tau_0^{s'} &= 3(Z_+ - Z_-); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}-\varepsilon^2 u_0^{s''} - \varepsilon v \sigma_{z_0}^{s'} &= (X_+ - X_-) / 2; \\ \varepsilon^3 u_0^{s''''} + 2\sigma_0^s &= Z_+ + Z_-, \end{aligned} \quad (30)$$

подтверждая, что уравнения (27) и (28) обобщают классические представления полуобратного метода Сен-Венана и их решения зависят от аргумента x . Верхний индекс s указывает на принадлежность отмеченных им величин к медленно меняющимся компонентам напряженно-деформированного состояния.

Вычитая из уравнений (27) попарно уравнения (29) и из уравнений (28) уравнения (30), с учетом предположений $w_0^{s'} \sim \varepsilon^0 w_0^s(x)$, $\tau_0^{s'} \sim \varepsilon^0 \tau_0^s(x)$, $\tau_0^{q'} \sim \varepsilon^{-1} \tau_0^q(x/\varepsilon)$ получим сингулярно возмущенные уравнения, отмеченные индексом q :

$$-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0; \quad (31)$$

$$(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0. \quad (32)$$

Их решения отличаются на константу, которая должна быть отброшена как неудовлетворяющая условию большой изменчивости, поэтому оба решения уравнений (31) и (32) совпадают:

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_1 \exp\left(-k \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ C_2 \exp\left(-k \frac{(1-x)}{\varepsilon}\right) \end{cases}.$$

Поскольку они зависят от аргумента x/ε , их можно использовать для удовлетворения потерянных граничных условий и сглаживания разрывов в медленно меняющихся классических решениях. Верхнее решение справедливо при $x \geq 0$, а нижнее – при $x \leq 1$. Если принять $C_1 = -\frac{k}{2\varepsilon}$, можно показать, что

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{\varepsilon} \exp\left(-k \frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$, то есть уравнение (31) позволяет установить связь между обычной числовой функцией τ_0^q и обобщенной δ – функцией Дирака.

4. Заключение

Два метода Сен-Венана рассмотрены и модернизированы. Первый метод состоит в оценке компонент напряженно-деформированного состояния с целью упростить постановку задачи нахождения решения путем априорного отбрасывания быстро меняющихся и затухающих компонент решения. Он был предложен, поскольку Сен-Венан учитывал трудность нахождения общих решений. Поэтому, разрабатывая метод построения решения, он пришел к изобретению принципа, позволяющего оправдывать потерянные при построении решения компоненты решения, в частности из-за перехода от напряжений к усилиям и моментам (stress resultants). На примере длинной упругой полосы сформулировано дополнение к его классическому принципу для случая заданных на малом участке перемещений, отсутствующее в литературе. Однако и принцип Сен-Венана, и обобщенный принцип не могут дать никаких рекомендаций к своему конструктивному использованию, но пригодны для механического толкования полученных каким-либо способом неполных приближенных решений.

Второй метод получил название полуобратного, поскольку Сен-Венан предложил часть искомым неизвестных в уравнениях задать, а остальные вычислить. При этом Сен-Венан перешел от напряжений к

усилиям и моментам, оправдывая переход принципом. Можно сказать, что все теории тонкостенных тел построены в усилиях и моментах, предполагая справедливость перехода к ним, обоснованную принципом Сен-Венана. В статье показано, что, если взять идею задания части неизвестных, но не переходить к усилиям и моментам, полуобратный метод может быть расширен до конструктивного и будет сходящимся независимо от выбора начального приближения. Такая возможность основана на идее метода малого параметра Пуанкаре, метода простых итераций Линделефа – Пикара и теореме о неподвижной точке Банаха. При этом предложены преобразование сложного оператора задачи в последовательность простых интегрируемых операторов и методика разделения быстро меняющихся и медленно меняющихся компонент общего решения при выполнении всех граничных условий исходной задачи. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление сложного оператора на четыре последовательных оператора Пикара относительно поперечной координаты и три – относительно продольной. Близость полученного решения оценивается порядком первого отброшенного члена по ε для медленно меняющихся величин. Тогда полуобратный метод становится независимым от принципа Сен-Венана.

References / Список литературы

1. Saint-Venant A.J.C.B. Memoire sur la Torsion des Prismes. *Mem. Divers Savants*. 1855;14:233–560.
2. Mises R. On Saint-Venant's Principle. *Bull. AMS*. 1945;51:555–562.
3. Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary layer theory for elastic bending of plates. *Comm. Pure Appl. Math.* 1961;14:1–33. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160140102>
4. Goldenveiser A.L., Kolos A.V. К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок [On the derivation of two-dimensional equations in the theory of thin elastic plates]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1965;29(1):141–155.
Гольденвейзер А.Л., Колос А.В. К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. № 1. С. 152–162.
5. Gregory R.D., Wan F.Y.M. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *J. Elasticity*. 1984;14:27–64. <https://doi.org/10.1007/BF00041081>
6. Horgan C.O., Knowles J.K. Recent developments concerning Saint-Venant's principle. *Advances in Applied Mechanics*. 1983;23:179–269. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70244-8.
7. Horgan C.O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: an update. *Applied Mech. Reviews*. 1989;42:295–303.
8. Horgan C.O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: a second update. *Applied Mech. Reviews*. 1996;49:101–111.
9. Horgan C.O., Simmonds J.G. Saint-Venant end effects in composite structures. *Composites Engineering*. 1994;4(3):279–286. [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(94\)90078-7](https://doi.org/10.1016/0961-9526(94)90078-7)
10. De Pascalis R., Destrade M., Saccomandi G. The stress field in a pulled cork and some subtle points in the semi-inverse method of nonlinear elasticity. *Proc. R. Soc. Ser. A. Math., Phys., Engng. Sci.*, 2007; 463: 2945–2959. URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.2007.0010>
11. De Pascalis R., Rajagopal K.R., Saccomandi G. Remarks on the use and misuse of the semi-inverse method in the nonlinear theory of elasticity. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 2009;62(4):451–464. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbp019>
12. Bulgariu E. On the Saint-Venant's problem in microstretch elasticity. *Libertas Mathematica*. 2011;31:147–162.
13. Chirieta S. Saint-Venant's problem and semi-inverse solutions in linear viscoelasticity. *Acta Mechanica*. 1992;94:221–232. <https://doi.org/10.1007/BF01176651>
14. Placidi L. Semi-inverse method a la Saint-Venant for two-dimensional linear isotropic homogeneous second-gradient elasticity. *Math. Mech. Solids*. 2015;22(5):919–937. <https://doi.org/10.1177/1081286515616043>
15. Zveryaev E.M. Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method. In: Pietraszkiewicz W., Szymczak C. (eds.) *Shell Structures: Theory and Application*. London: Taylor & Francis Group; 2006. p. 191–198.
16. Zveryayev Ye.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beam and plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003;67(3):425–434.
Зверьяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.

17. Zveryayev Ye.M., Makarov G.I. A general method for constructing Timoshenko-type theories. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008;72(2):197–207. Available from: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=10332626> (accessed: 10.07.2020).

Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=10332626> (дата обращения: 10.07.2020).

18. Zveryayev E.M., Olekhova L.V. Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle. *KIAM Preprint No. 95*. Moscow; 2014. (In Russ.) Available from: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-95> (accessed: 10.07.2020).

Зверьяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2014. № 95. 29 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-95> (дата обращения: 10.07.2020).

19. Zveryayev E.M. Saint-Venant – Picard – Banach Method for Integrating Thin-Walled System Equations of the Theory of Elasticity. *Mechanics of Solids*. 2020;55(7):124–132. (In Russ.) DOI: 10.1134/S0032823519050126.

Зверьяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833. DOI: 10.1134/S0032823519050126.

20. Granas A. *Fixed point theory*. New York: Springer-Verlag; 2003.

21. Greenberg G.A. О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях [On the method proposed P.F. Papkovich for solutions theory of elasticity plan problem for the rectangular area, and the bending problem for rectangular thin plate with two fixed edges, and some of its generalizations]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1953;17(2):211–228. (In Russ.)

Гринберг Г.А. О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // Прикладная математика и механика. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211–228.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ EXPERIMENTAL RESEARCHES

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-414-423
УДК 621.039:621.311.22:519.257:519.222:51-74

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

Остаточная дефектность и вероятность существования дефектов с размером, превышающим допустимое значение

Д.А. Кузьмин, А.Ю. Кузьмичевский, М.В. Верташенок*

Вероссийский Научно-исследовательский институт по эксплуатации атомных электростанций, Российская Федерация, Москва, ул. Ферганская, 25

*rodionova_m@bk.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 15 июля 2020 г.
Доработана: 21 сентября 2020 г.
Принята к публикации: 27 сентября 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Неразрушающий контроль металла определяет фактическое состояние металла, наличие несплошностей и их размеры, а также позволяет определить каким механизмом деградации металл был подвержен. Одной из основных характеристик качества неразрушающего контроля является выявляемость несплошностей и дефектов. Если дефекты не были пропущены, то можно гарантировать надежную работу объекта до следующего планового контроля. Статья посвящена изучению функции вероятности обнаружения дефектов и определению вероятности существования остаточного дефекта с размером, превышающим допустимое значение. **Цель** исследования – разработать метод, позволяющий определить вероятность существования остаточного дефекта с размером, превышающим допустимое значение, после проведения неразрушающего контроля и ремонта оборудования и трубопроводов атомной электрической станции. **Методы.** При проведении работы были использованы формулы вероятности обнаружения дефекта и исходной дефектности, нормативные требования в области аттестации дефектоскопистов, результаты исследований по неразрушающему контролю. **Результаты.** Представлен метод определения вероятности существования дефектов с размером, превышающим допустимое значение, на примере корпуса реактора. Методика основана на остаточной дефектности, которая учитывает выявляемость дефектов. Установлено значение коэффициента, учитывающего влияние человеческого фактора, приборно-методических недостатков или сложности доступа к месту контроля, что позволяет снизить степень неопределенности при диагностике остаточной дефектности. Результаты проведенной работы позволяют определить вероятность существования дефекта с размером, превышающим допустимое значение. Развитие остаточного дефекта до критических значений характеризует исходное событие для разрушения целостности конструкции. Таким образом, вероятность остаточного дефекта может использоваться при выполнении анализа безопасности корпуса водо-водяного энергетического реактора.

Ключевые слова: атомная станция, корпус реактора, остаточная дефектность, неразрушающий контроль, выявляемость дефектов

Для цитирования

Кузьмин Д.А., Кузьмичевский А.Ю., Верташенок М.В. Остаточная дефектность и вероятность существования дефектов с размером, превышающим допустимое значение // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 414–423. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-414-423>

Кузьмин Дмитрий Александрович, кандидат технических наук, начальник отдела прочностной надежности АЭС; Scopus iD: 56804728400, eLIBRARY SPIN- код: 3207-3489.

Кузьмичевский Александр Юрьевич, кандидат технических наук, главный эксперт отдела прочностной надежности АЭС; eLIBRARY SPIN-код: 3408-6736.

Верташенок Марина Владимировна, ведущий специалист отдела прочностной надежности АЭС.

© Кузьмин Д.А., Кузьмичевский А.Ю., Верташенок М.В., 2020

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Investigation of the probability of existence of defects with a size exceeding the allowed value

Dmitry A. Kuzmin, Alexander Yu. Kuzmichevsky, Marina V. Vertashenok*

All-Russian Research Institute for Nuclear Power Plants Operation, 25 Ferganskaya St, Moscow, 109507, Russian Federation

*rodionova_m@bk.ru

Article history

Received: July 15, 2020

Revised: September 21, 2020

Accepted: September 27, 2020

Abstract

Relevance. Non-destructive testing of metal determines the actual state of the metal, the presence of discontinuities and their sizes, and also allows to determine what mechanisms of metal degradation were subjected to. One of the main characteristics of the quality of non-destructive testing is the detectability of discontinuities and defects. If no defects were missed, then it's possible to guarantee the reliable operation of the facility until the next scheduled inspection. The article is devoted to the study of the probability function of detecting defects and determining the probability of the existence of a residual defect with a size exceeding the permissible value. *The aim of the work* – to develop a method to determine the probability of the existence of a residual defect with a size exceeding the permissible value after non-destructive testing and repairs of equipment and pipelines of a nuclear power plant. *Methods.* During the work formulas for the probability of detecting a defect and initial defectiveness, regulatory requirements in the field of certification of flaw detectors, and the results of research on non-destructive testing were used. *Results.* A method for determining the probability of defects with a size exceeding the allowed value, using the example of a reactor vessel, is presented. The method is based on residual defects, which takes into account the detectability of defects. The value of the coefficient that takes into account the influence of the human factor, instrument and methodological shortcomings or complexity of access to the control point is determined, which reduces the degree of uncertainty in determining the residual defect. The results of this work permit to evaluate the probability of the existence of a defect with a size exceeding the allowed value. The development of a residual defect to critical values characterizes the initial event for the destruction of the integrity of the structure. Thus, the probability of a residual defect can be used when performing a safety analysis of the water-water energetic reactor vessel.

Keywords: nuclear power plant, reactor vessel, residual defectiveness, non-destructive testing, detectability of defects

For citation

Kuzmin D.A., Kuzmichevsky A.Yu., Vertashenok M.V. Investigation of the probability of existence of defects with a size exceeding the allowed value. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):414–423. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-414-423>

1. Введение

В металле со временем происходят изменения, влияющие на механические свойства. Эти изменения наиболее вероятны при различных воздействиях, таких как температура, давление, влияние среды, которые неизбежны во время эксплуатации. Для атомной энергетики контроль за состоянием металлических конструкций играет важную роль.

Проведение контроля металла в Российской Федерации регулируется документом [1] и включает в себя контроль состояния металла неразрушающими и разрушающими методами, а также подразделяется на предэксплуатационный, эксплуатационный (периодический) и внеочередной. Контроль состояния металла выполняется неразрушающими и разрушающими методами, но именно неразрушающий контроль позволяет определить фактическое состояние оборудования, не нарушая его целостность. Нередко по результатам проведения неразрушающего контроля обнаруживаются несплошности и дефекты, которые могут привести к авариям. Наиболее устоявшиеся методы неразрушающего контроля для обнаружения и оценки развития дефектов приведены в работах [2–4].

Преимущественно из-за недостатков технологии изготовления в первые годы эксплуатации возникает значительное количество нарушений сплошности металла. Всегда имеется конечная вероятность при

Dmitry A. Kuzmin, Candidate of Technical Sciences, Head of the Strength Reliability Division of Nuclear Power Plant; Scopus iD: 56804728400, eLIBRARY SPIN-code: 3207-3489.

Alexander Yu. Kuzmichevsky, Candidate of Technical Sciences, chief expert of the Strength Reliability Division of Nuclear Power Plant; eLIBRARY SPIN-code: 3408-6736.

Marina V. Vertashenok, leading specialist of the Strength Reliability Division of Nuclear Power Plant.

контроле пропустить дефект, который может повлиять на безопасность. В связи с этим можно утверждать, что после изготовления, контроля и ремонта в конструкциях еще могут оставаться не выявленные дефекты [5]. Совокупность оставшихся после контроля и ремонта дефектов в изделии назовем остаточной дефектностью. Исследования в области оценки безопасности и надежности оборудования с дефектами рассматривались в статьях [6–12].

С точки зрения прочности и ресурса конструкции остаточная дефектность является важнейшей характеристикой материала данной конструкции. Действительно, если пропущенный дефект достигает критических размеров, то происходит разрушение всей конструкции или ее элемента, а так как информация о пропущенном дефекте отсутствует, то разрушение происходит внезапно.

Целью настоящей статьи является исследование остаточной дефектности после проведения неразрушающего контроля корпуса реактора атомной станции с учетом величины выявляемости дефектов. Выявляемость дефектов – это вероятность обнаружения дефектов с заданными характеристиками, которая определена в нормативных документах в размере 70 % от общего количества несплошностей размером, превышающим чувствительность прибора при контроле. В соответствии с опытом эксплуатации принято использовать консервативный подход при рассмотрении результатов неразрушающего контроля, то есть все несплошности представлять в виде трещины как наиболее опасного для эксплуатации вида. Рассчитано значение коэффициента, учитывающего влияние человеческого фактора, приборно-методических недостатков или сложности доступа к месту контроля, что позволяет снизить неопределенность при определении остаточной дефектности. Также определена вероятность существования дефекта с размером, превышающим допустимое значение, то есть дефекта, который может привести к разрушению конструкции.

2. Методы

2.1. Вероятность обнаружения дефектов

Функция вероятности обнаружения дефектов в зависимости от линейного размера дефекта, например глубины a , имеет вид [5; 13]

$$F(a) = 1 - e^{-\beta(a-a_0)}, \quad (1)$$

где a_0 – граничный наименьший размер выявляемого дефекта, зависящий от чувствительности метода контроля, мм; β – коэффициент, учитывающий влияние человеческого фактора, приборно-методических недостатков или сложности доступа к месту контроля, мм⁻¹.

В качестве линейного размера дефекта также могут быть использованы глубина, протяженность, комбинация линейных размеров, площадь или объем дефекта.

Вероятность обнаружения дефектов при $a < a_0$ равна нулю, так как при проведении контроля прибор не может определить дефект меньше, чем чувствительность прибора, то есть

$$F(a < a_0) \equiv 0. \quad (2)$$

Зависимость (1) в общем виде имеет вид, представленный на рис. 1, при дефектах с размерами $a_0 < a < S$, где S – толщина стенки.

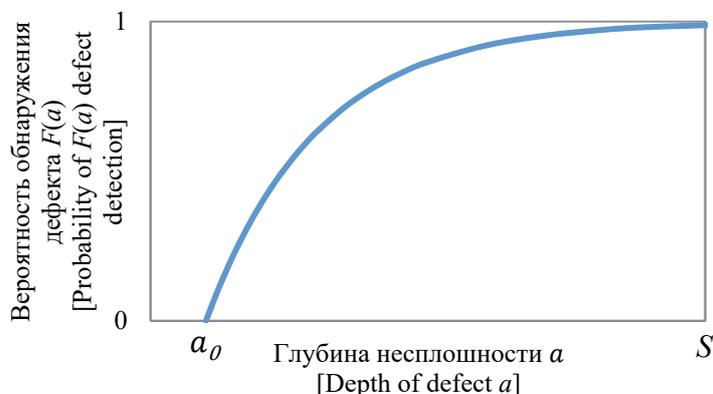


Рис. 1. График функции распределения вероятности обнаружения дефектов от их размера
[Figure 1. Graph of a distribution function of a probability of detection of defects from their size]

Функция плотности вероятности (1) имеет вид

$$f(a) = \beta e^{-\beta(a-a_0)}. \quad (3)$$

Найти все дефекты с размерами $a_0 < a < S$ не представляется возможным. Данные экспериментальных исследований по выявляемости дефектов по результатам неразрушающего контроля с использованием тест-образцов представлены в табл. 1 [5]. Из них видно, что выявляемость дефектов при неразрушающем контроле варьируется от 50 до 100 % в зависимости от условий его проведения, таких как метод контроля, размеры заложенных дефектов и квалификации дефектоскопистов. В настоящее время ведется множество исследований, ориентированных на изучение влияния различных факторов на выявляемость дефектов и усовершенствование методов неразрушающего контроля [14–18].

Таблица 1

Результаты исследований по выявляемости дефектов по результатам неразрушающего контроля с использованием тест-образцов
[Table 1. The results of researches to determine the detection of defects according to the results of non-destructive testing using test samples]

Метод контроля [Control method]	Протяженность дефекта, мм [Defect length, mm]					
	До [Up to] 15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
Радиография [Radiography]	86 %	100 %	75 %	50 %	100 %	100 %
Автоматический ультразвуковой контроль [Automatic ultrasonic testing]	84 %	75 %	100 %	75 %	100 %	100 %

Согласно нормативному документу РФ [19], Федеральной службой по экологическому, технологическому и атомному надзору установлены требования к количеству обнаруженных дефектов для персонала, выполняющего неразрушающий контроль, в размере 70 % или более от общего количества несплошностей размером более a_0 . Значение 70 % установлено как пороговое для получения положительного решения по аттестации в области неразрушающего контроля. В соответствии с этим найдем значение $[\beta]$ функции (1), при котором совокупность обнаруженных несплошностей составляет 70 % от общего количества несплошностей в металле:

$$\int_{a_0}^S (1 - e^{-[\beta](a-a_0)}) da = 0,7(S - a_0). \quad (4)$$

Преобразуем уравнение (4):

$$(S - a_0) - \frac{1}{[\beta]} (1 - e^{-[\beta](S-a_0)}) = 0,7(S - a_0). \quad (5)$$

Из уравнения (5) получим

$$[\beta] = \frac{1}{S-a_0} \left(W \left(-\frac{10}{3e^{\frac{10}{3}}} \right) + \frac{10}{3} \right) \approx \frac{3,197}{S-a_0}, \quad (6)$$

где $W(z)$ – W -функция Ламберта.

Перепишав выражение (4) в общем виде в зависимости от величины выявляемости дефектов P , выраженной в долях единицы, можно получить выражение для коэффициента β , учитывающего условия проведения контроля:

$$\beta = \frac{1}{S-a_0} \left(W \left(-\frac{1}{(1-P)} e^{-\frac{1}{(1-P)}} \right) + \frac{1}{(1-P)} \right), \quad (7)$$

где S – толщина стенки, мм; a_0 – чувствительность метода контроля, мм; P – выявляемость дефектов, выраженная в долях единицы.

Полученное в (6) значение $[\beta]$ определяет минимально допустимое значение для обеспечения требования по обнаружению дефектов в размере 70 % или более от общего количества несплошностей размером более a_0 . Далее будет использовано значение $[\beta] = \frac{3,197}{S-a_0}$.

Подставив полученное выражение (6) в функцию (3), получаем зависимость функции плотности вероятности обнаружения дефекта от толщины стенки S и чувствительности измерения a_0 :

$$f_{[\beta]}(a) = \frac{3,197}{S-a_0} e^{-\frac{3,197}{S-a_0}(a-a_0)}. \quad (8)$$

Тогда вероятность обнаружения дефекта определяется следующим образом:

$$F_{[\beta]}(a) = 1 - e^{-\frac{3,197}{S-a_0}(a-a_0)}. \quad (9)$$

Используя значения толщины стенки $S=150$ мм для корпуса реактора ВВЭР-440 и чувствительность измерения при ультразвуковом контроле $a_0 = 1$ мм, получаем $[\beta] \approx 0,021 \text{ мм}^{-1}$ для обеспечения выявления 70 % от общего количества несплошностей в металле.

2.2. Количественная оценка обнаруженной дефектности

Число обнаруженных дефектов $N_{\text{обн}}(a)$ можно представить зависимостью от исходной дефектности $N_{\text{исх}}(a)$ и от достоверности контроля, которую можно описать функцией вероятности обнаружения дефектов $F(a)$ [5–7; 20]:

$$N_{\text{обн}}(a) = N_{\text{исх}}(a)F(a). \quad (10)$$

Под исходной дефектностью понимается зависимость количества дефектов, находящихся в материале для $0 < a < S$, от их размера.

Функцию $F(a)$ можно описать уравнением (1), а $N_{\text{исх}}(a)$ может быть оценена на основе анализа дефектов на заводе-изготовителе во взаимосвязи с конкретной технологией изготовителя и прямыми экспериментальными исследованиями выявляемости дефектов на тест-образцах.

В общем случае допустимо утверждать, что число несплошностей в конструкции уменьшается с увеличением их размеров. Такую зависимость $N_{\text{исх}}$ от размера дефекта можно описать в виде

$$N_{\text{исх}}(a) = Aa^{-n}, \quad (11)$$

где A и n – коэффициенты аппроксимации, которые в общем случае зависят от технологии.

Зависимость (11) подтверждается тем, что несплошности, находящиеся в металле, условно разделяются на три группы в соответствии с их размерами (табл. 2).

Таблица 2

Виды несплошностей в металле

№	Вид несплошности, размер	Причины возникновения	Количество
I	Субмикроскопические, сравнимы с размерами атомов	Дефекты кристаллической решетки	В металле количество очень велико (в сечении 1 см^3 попадает $10^8 \div 10^{12}$ дислокаций)
II	Микроскопические, сравнимы с размерами зерен в металле	Связаны с процессами получения слитка, его обработки давлением, изготовления полуфабриката детали (микропоры, неметаллические включения, микронадрывы и т. п.)	Число микроскопических дефектов существенно меньше субмикроскопических, но все еще велико. На 1 см^3 может быть несколько дефектов
III	Макроскопические	Характерны, как правило, для сварных соединений	Вероятность попадания в эксплуатацию конструкции с макродефектом в основном металле очень мала, но существует

Table 2

Types of discontinuities in metal

No.	Type of discontinuity, size	Causes	Quantity
I	Submicroscopic, comparable to atom sizes	Lattice defects	The quantity in the metal is very large ($10^8 \div 10^{12}$ dislocations fall in the cross section of 1 cm^3)
II	Microscopic, comparable to grain sizes in metal	Associated with the processes of obtaining an ingot, its processing by pressure, manufacturing of a semi-finished product (micropores, non-metallic inclusions, micro bursts, etc.)	The number of microscopic defects is significantly less than submicroscopic, but still large. There may be several defects per 1 cm^3
III	Macroscopic	Typical for welded joints	The probability of getting into operation of a structure with a macrodefect in the base metal is very small, but exists

Подставив выражения (11) и (9) в (10), получаем

$$N_{\text{обн},[\beta]}(a) = Aa^{-n} \left(1 - e^{-\frac{3,197}{S-a_0}(a-a_0)} \right). \quad (12)$$

Уравнение (12) позволяет по зависимости для обнаруженной дефектности, определенной как огибающая гистограммы результатов неразрушающего контроля, определить исходную дефектность. Такая задача сводится к выявлению неизвестных постоянных A , n .

В работе [6] задача по определению обнаруженной дефектности решалась в зависимости от трех переменных A , n и β . Снижение степени неопределенности к двум переменным A и n за счет использования условия о величине выявляемости в размере 70 % от общего количества несплошностей и определения β , используемые в настоящем методе, существенно упрощает задачу.

Для исследования результатов по неразрушающему контролю используем данные по дефектности корпуса реактора ВВЭР-440 [20]. Получим функцию зависимости обнаруженной дефектности от глубины дефекта. Исследование результатов неразрушающего контроля применялось при определении фактических толщин стенок оборудования и трубопроводов (ОиТ), подверженных эрозионно-коррозионному износу [9]. Аппроксимация гистограммы представлена на рис. 2.

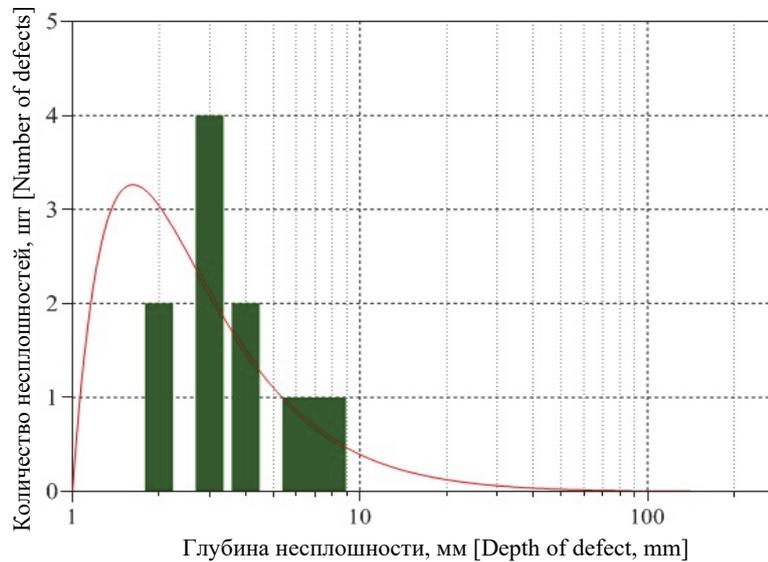


Рис. 2. Функция зависимости обнаруженной дефектности от глубины дефектов
[Figure 2. The function of the dependence of the detected defect on the depth of defects]

Для корпуса реактора ВВЭР-440, согласно (6), $[\beta] = 0,021 \text{ мм}^{-1}$, используя аппроксимацию получаем $[A] = 877,9 \text{ мм}^{2,585}$ и $[n] = 2,585$. Подставив их значения в (12), получаем зависимость количества обнаруженных дефектов $N_{\text{обн}}$ от размера дефекта a :

$$N_{\text{обн},[\beta]}(a) = \frac{877,9}{a^{2,585}} \left(1 - e^{-0,021(a-1)} \right). \quad (13)$$

Полученная функция описывает зависимость обнаруженной дефектности от размера дефекта при условии выявления при контроле 70 % от общего количества несплошностей размером $a_0 < a < S$ для корпуса реактора ВВЭР-440.

2.3. Количественная оценка остаточной дефектности

Все известные способы неразрушающего контроля не обеспечивают полное выявление дефектов, остаются несплошности или дефекты, которые влияют на надежность эксплуатации ОиТ АЭС. Совокупность оставшихся после контроля и ремонта дефектов определяют термином «остаточная дефектность» [2–5; 20].

Остаточную дефектность $N_{\text{ост}}$ можно определить по формуле

$$N_{\text{ост}}(a) = N_{\text{исх}}(a) - N_{\text{обн}}(a), \quad (14)$$

где $N_{\text{исх}}(a)$ – функция исходной дефектности.

Подставив выражение (10) в уравнение (14), получим

$$N_{\text{ост}}(a) = N_{\text{исх}}(a) - N_{\text{исх}}(a)F(a) = N_{\text{исх}}(a)(1 - F(a)). \quad (15)$$

Уравнение (15) справедливо для области, где $F > 0$. Эта область определяется чувствительностью метода контроля a_0 .

Подставив выражения (1) и (11) в уравнение (15), получим

$$N_{\text{ост}}(a) = \frac{A}{a^n} e^{-\beta(a-a_0)}, \quad (16)$$

где β в общем виде определяется по формуле (7).

Используя значение $[\beta]$ для обеспечения выявления 70 % от общего количества несплошностей в металле, получаем

$$N_{\text{ост},[\beta]}(a) = \frac{A}{a^n} e^{-\frac{3,197}{s-a_0}(a-a_0)}. \quad (17)$$

Применяя полученные значения $[A] = 877,9 \text{ мм}^{2,585}$ и $[n] = 2,585$ для корпуса реактора ВВЭР-440 и условия выявления 70 % от общего количества несплошностей, получаем

$$N_{\text{ост},[\beta]}(a) = \frac{877,9}{a^{2,585}} e^{-0,021(a-1)}. \quad (18)$$

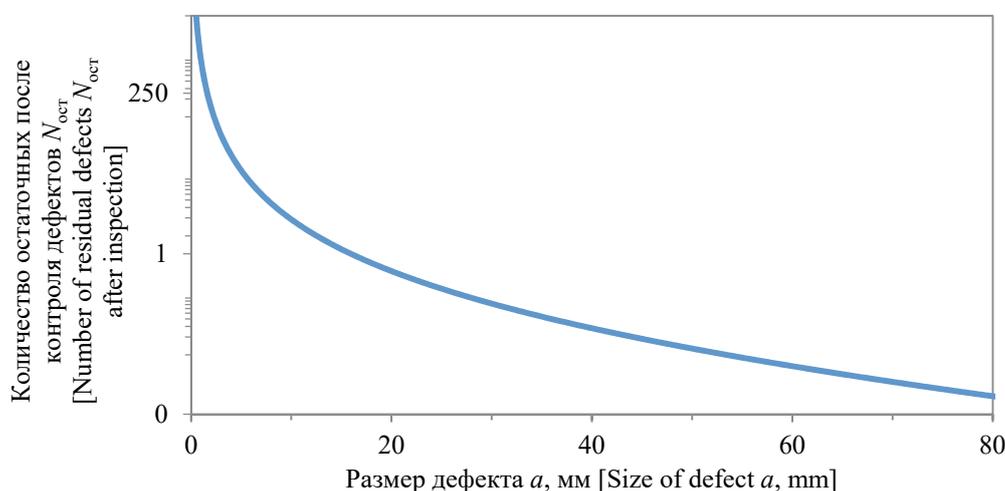


Рис. 3. Функция остаточной дефектности от глубины дефекта (при условии выявления 70 % от общего количества несплошностей в металле)
[Figure 3. The function of residual defectiveness on the depth of discontinuity (provided that 70 % of the total number of discontinuities in the metal be detected)]

Зависимость (18), представленная на рис. 3, показывает, что после проведения контроля и ремонта еще остаются дефекты, поэтому важно, чтобы они не оказались опасными, то есть приводящими к разрушению конструкции. Далее определим вероятность существования дефекта размером более допускаемого значения.

3. Результаты исследований

3.1. Исследование вероятности существования дефекта с размером, превышающим допускаемое значение

Определим вероятность нахождения остаточного опасного дефекта, то есть дефекта размером больше допускаемого значения $[a]$.

Введем функцию вероятности существования дефекта размером $a \geq [a]$ следующим образом:

$$P_{[a]}(a \geq [a]) = \frac{\int_{[a]}^S N_{\text{ост}}(a) da}{\int_{a_0}^S N_{\text{ост}}(a) da}. \quad (19)$$

Знаменатель в выражении (19) имеет смысл нормировочного коэффициента.
Подставив (16) в выражение (19), получаем

$$P_{[a]}(a \geq [a]) = \frac{\int_{[a]}^S \frac{A}{a^n} e^{-\beta(a-a_0)} da}{\int_{a_0}^S \frac{A}{a^n} e^{-\beta(a-a_0)} da} \quad (20)$$

Результаты вычислений в выражении (20) дают формулу определения вероятности остаточного дефекта размером больше допускаемого значения $[a]$:

$$P_{[a]}(a \geq [a]) = \frac{\gamma(1-n, S\beta) - \gamma(1-n, [a]\beta)}{\gamma(1-n, S\beta) - \gamma(1-n, a_0\beta)}, \quad (21)$$

где $\gamma(m, z) = \int_0^z t^{m-1} e^{-t} dt$ – нижняя неполная гамма-функция, $t > 0$.

3.2. Определение вероятности существования дефекта с размером, превышающим допускаемое значение, на примере корпуса реактора

Используя значения толщины стенки $S = 150$ мм корпуса реактора ВВЭР-440, чувствительность измерения при ультразвуковом контроле $a_0 = 1$ мм, условия выявления 70 % от общего количества несплошностей, при котором $[\beta] = 0,021 \text{ мм}^{-1}$, $[n] = 2,585$, предположим, что допускаемое значение размера дефекта $[a] = 0,25S$, получим

$$P_{[a]}(a \geq 0,25S) = 8,86 \cdot 10^{-4}. \quad (22)$$

Вероятность существования в корпусе реактора ВВЭР-440 дефекта с размером, превышающим допускаемое значение (не более $0,25S$), равна $8,86 \cdot 10^{-4}$.

Развитие остаточного дефекта с размером больше допускаемого значения до критических значений может характеризовать исходное событие разрушения целостности оборудования или трубопровода. Поэтому вероятность (22) можно использовать для описания частоты возникновения исходных событий, связанных с результатами неразрушающего контроля, при расчете вероятности разрушения.

4. Заключение

Исследована функция вероятности обнаружения дефектов. Используя функцию плотности распределения вероятности обнаружения дефекта и требований надзорного органа в части необходимого объема обнаружения несплошностей, получена зависимость коэффициента β , учитывающего влияние особенностей проведения контроля, от толщины стенки S и чувствительности прибора при контроле a_0 .

Для корпуса реактора ВВЭР-440 получено значение коэффициента $[\beta] \approx 0,021$ для обеспечения выявления 70 % от общего количества несплошностей в металле, а также зависимость остаточной дефектности $N_{\text{ост}}$ от размера дефекта, показывающая, что после проведения контроля и ремонта еще остаются дефекты, поэтому важно, чтобы они не оказались опасными, то есть приводящими к разрушению конструкции.

Разработан метод, позволяющий определить вероятность существования остаточного дефекта с размером, превышающим допускаемое значение, после проведения неразрушающего контроля и ремонта ОиТ АЭС.

Представленный метод позволит сделать выводы о необходимости разработки дополнительных условий качества и контроля металла для обеспечения критериев безопасности, в частности:

- определения требований к аттестации дефектоскопистов;
- допускаемых значений характеристик контроля металла (чувствительности, точности определения размеров дефектов и др.);
- возможных размеров и количества обнаруживаемых дефектов;
- периодичности проведения контроля металла.

Список литературы

1. Федеральные нормы и правила в области использования атомной энергии «Правила контроля основного металла, сварных соединений и наплавленных поверхностей при эксплуатации оборудования, трубопроводов и других элементов атомных станций» (НП-084-15). М., 2016.

2. Wang B., Zhong S., Lee T.L., Fancey K.S., Mi J. Non-destructive testing and evaluation of composite materials/structures: a state-of-the-art review // Advances in mechanical engineering. 2020, February. Vol. 12. No 4. Pp. 1–28. DOI: 10.1177/1687814020913761.

3. Santos T.G., Oliveira J.P., Machado M.A., Inácio P.L. Reliability and NDT Methods // Additive Manufacturing Hybrid Processes for Composites Systems. 2020, April. Pp. 265–295. DOI: 10.1007/978-3-030-44522-5_8.
4. Ravindra Kumar P., Vijay Kumar G., Naga Murali K., Kishore R.B.S.S. Experimental Investigation of Ultrasonic Flaw Defects in Weld Clad Materials Using NDT Technique // Advances in Applied Mechanical Engineering. 2020, January. Pp.1039–1051. DOI: 10.1007/978-981-15-1201-8_111.
5. Аркадов Г.В., Гетман А.Ф., Родионов А.Н. Надежность оборудования и трубопроводов АЭС и оптимизация их жизненного цикла. М.: Энергоиздат, 2010. 424 с.
6. Кузьмичевский А.Ю., Гетман А.Ф. Определение количественных показателей надежности по критериям разрушения, течи или выявления дефекта в эксплуатации // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2010. Т. 76. № 10. С. 42–46.
7. Кузьмин Д.А. Исследование условий обеспечения безопасности главного циркуляционного трубопровода на основе концепции ТПП // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 5. С. 16–23. URL: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/14603> (дата обращения: 10.06.2020).
8. Кузьмин Д.А., Матвиенко Ю.Г. Обобщенное уравнение раскрытия сквозной кольцевой трещины в толстостенном плакированном трубопроводе // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 41–48.
9. Кузьмин Д.А., Кузьмичевский А.Ю. Определение фактических толщин стенок оборудования и трубопроводов, подверженных эрозивно-коррозионному износу на примере конических переходов // Надежность и безопасность энергетики. 2019. № 12(4). С. 274–280. DOI: 10.24223/1999-5555-2019-12-4-274-280.
10. Pástor M., Frankovský P., Hagara M., Lengvarský P. The Use of Optical Methods in the Analysis of the Areas With Stress Concentration // Journal of Mechanical Engineering. 2018. Vol. 68. No. 2. Pp. 61–76. DOI: 10.2478/scjme-2018-0018.
11. Xiaohui Chen, Shuang Fang, Haofeng Chen. Stress concentration factor and fatigue analysis of a lateral nozzle with local wall thinning // Engineering Failure Analysis. 2019, November. Vol. 105. Pp. 289–304. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2019.07.004.
12. Маловик К.Н., Мирошниченко А.Н. Совершенствование контроля остаточной дефектности трубопроводов АЭС // Вестник Белорусско-Российского университета. 2015. № 1 (46). С. 79–85. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23174900> (дата обращения: 15.06.2020).
13. Волченко В.Н. Вероятность и достоверность оценки качества металлопродукции. М.: Металлургия, 1987.
14. Shrestha Ranjit, Jeonghak Park, Wontae Kim. Application of thermal wave imaging and phase shifting method for defect detection in stainless steel // Infrared Physics & Technology. 2016, May. Vol. 76. Pp. 676–683. DOI: 10.1016/j.infrared.2016.04.033.
15. Zhengwei Yang, Guangjie Kou, Yin Li, Gan Tian. Inspection Detectability Improvement for Metal Defects Detected by Pulsed Infrared Thermography // Photonic Sensors. 2019, March. No. 9(18). Pp. 1–9. DOI: 10.1007/s13320-019-0489-1.
16. O'Brien N., Mavrogordato M., Boardman R.P., Sinclair I. Comparing cone beam laminographic system trajectories for composite NDT // Case Studies in Nondestructive Testing and Evaluation. 2016, November. Vol. 6. Part B. Pp. 56–61. DOI: 10.1016/j.cnsndt.2016.05.004.
17. Базулин Е.Г., Вopilкин А.Х., Тихонов Д.С. Повышение достоверности ультразвукового контроля. Ч. 1. Определение типа несплошности при проведении ультразвукового контроля антенными решетками // Контроль. Диагностика. 2015. № 8. С. 7–22. DOI: 10.14489/td.2015.08.pp.007-022.
18. Базулин Е.Г., Вopilкин А.Х., Тихонов Д.С. Повышение достоверности ультразвукового контроля. Ч. 2. Повышение отношения сигнал/шум // Контроль. Диагностика. 2015. № 9. С. 10–27. DOI: 10.14489/td.2015.09.pp.010-027
19. ПБ 03-440-02. Правила аттестации персонала в области неразрушающего контроля // Серия 28. Неразрушающий контроль. Вып. 3. М.: ЗАО НТЦ ПБ, 2010. 56 с.
20. Гетман А.Ф. Ресурс эксплуатации сосудов и трубопроводов АЭС. М.: Энергоатомиздат, 2000. 427 с.

References

1. Federal'nye normy i pravila v oblasti ispol'zovaniya atomnoj energii "Pravila kontrolya osnovnogo metalla, svarynyh soedinenij i naplavlennyh poverhnostej pri ekspluatácii oborudovaniya, truboprovodov i drugih elementov atomnyh stancij" (NP-084-15) [Federal Rules and Regulations in the Field of Nuclear Energy Use "Unified Inspection Procedures for Base Materials, Weld Joints and Build-Ups in the Course of Operation of Equipment, Pipelines and Other Elements of Nuclear Power Plants" (NP-084-15)]. Moscow; 2016. (In Russ.)
2. Wang B., Zhong S., Lee T.L., Fancey K.S., Mi J. Non-destructive testing and evaluation of composite materials/structures: a state-of-the-art review. *Advances in mechanical engineering*. 2020;12(4)(February):1–28. DOI: 10.1177/1687814020913761.
3. Santos T.G., Oliveira J.P., Machado M.A., Inácio P.L. Reliability and NDT Methods. *Additive Manufacturing Hybrid Processes for Composites Systems*. 2020;(April):265–295. DOI: 10.1007/978-3-030-44522-5_8.

4. Ravindra Kumar P., Vijay Kumar G., Naga Murali K., Kishore R.B.S.S. Experimental Investigation of Ultrasonic Flaw Defects in Weld Clad Materials Using NDT Technique. *Advances in Applied Mechanical Engineering*. 2020;(February):1039–1051. DOI: 10.1007/978-981-15-1201-8_111.
5. Arkadov G.V., Hetman A.F., Rodionov A.N. *Nadezhnost' oborudovaniya i truboprovodov AES i optimizacii ih zhiznennogo cikla (veroyatnostnye metody) [Reliability of NPP equipment and pipelines and optimization of their life cycle (probabilistic methods)]*. Moscow: Energoizdat Publ.; 2010. (In Russ.)
6. Kuzmichevsky A.Y., Getman A.F. Quantification of the reliability using the criteria of failure and leaks or the defect identification in service. *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*. 2010;76(10):42–46. (In Russ.)
7. Kuzmin D.A. Investigation of the conditions of safety ensure of the main circulating pipeline on the basis of the LBB concept. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(5):16–23. (In Russ.) Available from: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/14603> (accessed: 10.06.2020).
8. Matvienko Y.G., Kuzmin D.A. Generalized equation of the opening of a through-thickness ring crack in a clad thick-wall pipeline. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018;47(5):420–426. DOI: 10.3103/S1052618818050084.
9. Kuzmin D.A., Kuzmichevskiy A.Y. Determination of actual wall thicknesses of equipment and pipelines exposed to flow-accelerated corrosion on the example of conical reducers. *Safety and Reliability of Power Industry*. 2019;12(4):274–280. DOI: 10.24223/1999-5555-2019-12-4-274-280. (In Russ.)
10. Pástor M., Frankovský P., Hagara M., Lengvarský P. The Use of Optical Methods in the Analysis of the Areas With Stress Concentration. *Journal of Mechanical Engineering*. 2018;68(2):61–76. DOI: 10.2478/scjme-2018-0018.
11. Xiaohui Chen, Shuang Fang, Haofeng Chen. Stress concentration factor and fatigue analysis of a lateral nozzle with local wall thinning. *Engineering Failure Analysis*. 2019;105(November):289–304. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2019.07.004.
12. Malovik K.N., Miroshnichenko A.N. Improvement of residual defectiveness control of the NPP pipelines. *Vestnik Belorussko-Rossijskogo universiteta [Bulletin of the Belarusian-Russian University]*. 2015;1(46):79–85. (In Russ.) Available from: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23174900> (accessed: 15.06.2020).
13. Volchenko V.N. *Veroyatnost' i dostovernost' ocenki kachestva metalloprodukcii [Probability and reliability of metal product quality assessment]*. Moscow: Metallurgiya Publ.; 1987. (In Russ.)
14. Shrestha Ranjit, Jeonghak Park, Wontae Kim. Application of thermal wave imaging and phase shifting method for defect detection in stainless steel. *Infrared Physics & Technology*. 2016;76(May):676–683. DOI: 10.1016/j.infrared.2016.04.033.
15. Zhengwei Yang, Guangjie Kou, Yin Li, Gan Tian. Inspection Detectability Improvement for Metal Defects Detected by Pulsed Infrared Thermography. *Photonic Sensors*. 2019;9(18)(March):1–9. DOI: 10.1007/s13320-019-0489-1.
16. O'Brien N., Mavrogordato M., Boardman R.P., Sinclair I. Comparing cone beam laminographic system trajectories for composite NDT. *Case Studies in Nondestructive Testing and Evaluation*. 2016;6(B)(November):56–61. DOI: 10.1016/j.csndt.2016.05.004.
17. Bazulin E.G., Vopilkin A.H., Tihonov D.S. Improved reliability of ultrasonic inspection. Part 1. *Testing. Diagnostics*. 2015;(8):7–22. DOI: 10.14489/td.2015.08.pp.007-022. (In Russ.)
18. Bazulin E.G., Vopilkin A.H., Tihonov D.S. Improved reliability of ultrasonic inspection. Part 2. *Testing. Diagnostics*. 2015;(9):10–27. DOI: 10.14489/td.2015.09.pp.010-027. (In Russ.)
19. PB 03-440-02. Pravila attestacii personala v oblasti nerazrushayushchego kontrolya [PB 03-440-02. Attestation rules for non-destructive inspection personnel]. *Seriya 28. Nerazrushayushchij kontrol' [Series 28. Non-Destructive inspection]* (issue 3). Moscow: STC “Industrial Safety” CJSC; 2010. (In Russ.)
20. Getman A.F. *Resurs ekspluatatsii sosudov i truboprovodov AES [The operational life of vessels and pipelines of NPP]*. Moscow: Energoatomizdat Publ.; 2000. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-424-434
UDC 69.04

RESEARCH PAPER / НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Improving the compressive strength of lightweight cylindrical concrete column with basalt fiber reinforced polymer acting under imposed load

Paschal C. Chiadighikaobi

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation
passydking2@mail.ru

Article history

Received: August 13, 2020
Revised: October 1, 2020
Accepted: October 19, 2020

For citation

Chiadighikaobi P.C. Improving the compressive strength of lightweight cylindrical concrete column with basalt fiber reinforced polymer acting under imposed load. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):424–434. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-424-434>

Abstract

Relevance. The brittleness of lightweight concrete has developed concern among structural engineers. This concern led to the search on how to improve the strength of lightweight concrete and still retain the weight lightness. Researches are ongoing to solve the strength challenges noticed in lightweight concrete, but at the moment there are few works on solving the issues regarding expanded clay concrete, thus it served as a motivation for studying this issue. *The aim of the work* is to analyze the effects of basalt fiber polymers on lightweight expanded clay concrete columns acting under imposed loads. *Methods.* To achieve this process, a total number of nine expanded clay cylindrical concrete columns were experimentalized and analyzed. 1.6 % of dispersed chopped basalt fiber was used in the concrete mixture which serves as reinforcement. Also, basalt fiber mesh was used in the experimental analysis. *Results.* The expanded clay cylindrical column without basalt fiber polymer withstood strength up to 19.6 tons at 58 minutes, the column with dispersed chopped basalt fiber withstood strength up to 26.67 tons at 61 minutes while the column with dispersed chopped basalt fiber and basalt mesh confinement got destroyed at 29 tons at 64 minutes. The results show that lightweight expanded clay cylindrical columns confined with basalt fiber mesh withstood higher load compared to the columns with just dispersed chopped basalt fiber and without it.

Keywords: expanded clay, cylindrical columns, basalt mesh confinement, strength, concrete columns

Повышение прочности на сжатие цилиндрических колонн из легкого бетона под нагрузкой с помощью базальтопластика

П.С. Чиладигхикаоби

Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
passydking2@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 13 августа 2020 г.
Доработана: 1 октября 2020 г.
Принята к публикации: 19 октября 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Проблема хрупкости легкого бетона все больше обращает на себя внимание инженеров-строителей, что привело к поискам способов повышения прочности легкого бетона при сохранении малого веса. Исследования с целью разрешить проблему прочности в легком бетоне продолжаются, однако на настоящий момент существует довольно мало работ по решению задачи прочности керамзитобетона, что послужило мотивацией для изучения данного вопроса. *Целью* статьи является анализ влияния базальтового волокна на сопротивление легких керамзитобетонных колонн нагрузке.

Paschal C. Chiadighikaobi, Ph.D student of the Department of Civil Engineering of the Engineering Academy; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4699-8166>, Scopus ID: 57212346689.

Чиладигхикаоби Паскал Чимеремезе, аспирант департамента строительства Инженерной академии; ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-4699-8166>, Scopus ID: 57212346689.

© Chiadighikaobi P.C., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Для цитирования

Chiadighikaobi P.C. Improving the compressive strength of lightweight cylindrical concrete column with basalt fiber reinforced polymer acting under imposed load // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 424–434. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-424-434>

Методы. Для достижения поставленной цели было испытано и рассчитано девять цилиндрических бетонных колонн из керамзита. В бетонную смесь добавлялось 1,6 % диспергированного рубленого базальтового волокна, которое служило для армирования бетона. Кроме того, в экспериментах использовалась сетка из базальтового волокна. *Результаты.* Цилиндрическая колонна из керамзита без базальтового волокна держала нагрузку до 19,6 т в течение 58 мин, колонна с диспергированным рубленым базальтовым волокном – до 26,67 т в течение 61 мин, а колонна с диспергированным рубленым базальтовым волокном, усиленная оболочкой из базальтовой сетки, разрушилась при 29 т через 64 мин. Таким образом, опыты показали, что легкие цилиндрические керамзитобетонные колонны, усиленные сеткой из базальтового волокна, выдерживают более высокие нагрузки по сравнению с колоннами только с диспергированным базальтовым волокном и с колоннами без волокна.

Ключевые слова: цилиндрические колонны, керамзитобетон, усиление базальтовой сеткой, прочность, бетонные колонны

1. Introduction

Concrete is the widely used construction material throughout the world; however, it completely loses the load-carrying capacity once cracks/failures are initiated. To overcome these issues, the inclusion of short dispersed fibers in concrete has been practiced and studied by various researchers.

The randomly oriented short fibers control the propagation of microcrack and improve the overall crack resistance of the concrete. Also, the fiber-reinforced concrete (FRC) behaves like a composite material and this behavior is significantly different from the conventional concrete.

Lightweight concrete (LWC) is generally defined as concrete made of ordinary Portland cement (OPC), water, river sand (or lightweight sand), and lightweight coarse aggregates, and its density is typically below to 1950 kg/m³ [1]. Consider the growing demand, including high-rise buildings, large-span concrete structures, and floating structures, lightweight concrete that is made by diverse types of aggregate has been widely studied and successfully developed and applied over the past two decades [2–6].

LWC offers several advantages, such as saving dead loads for foundations, high strength/weight ratio, and service as ideal filled materials for sandwich structures. Thus, lightweight concrete has many potential applications in the construction industry. Nevertheless, some drawbacks in lightweight concrete’s natural mechanical properties have limited applications, especially as load-bearing structural members [3]. At the same mixing ratio and compressive strength, the brittleness of LWC is much higher than normal concrete (NC). Plus, the deformation capacity of lightweight concrete is also poor when compared with NC [7].

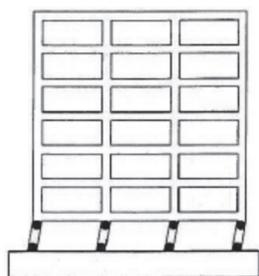


Figure 1. Mechanism of weak column strong beam in a building frame [8]

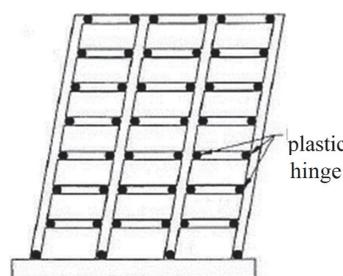


Figure 2. Mechanism of formation of plastic hinge in beams [8]

In many recent earthquakes, it has been observed that buildings with relatively weak columns collapsed in a pancake fashion. This is due to the presence of soft stories and due to the presence of strong beams but comparatively weaker columns (Figure 1). In multistory reinforced concrete buildings, it is desirable to form plastic hinges in beams rather than in columns to dissipate earthquake induced energy by yielding of the beams rather than the columns (Figure 2). The columns are responsible for the overall strength and stability of the structure, during severe seismic jolt. Furthermore, columns are compression members and axial compression reduces the ductility of reinforced concrete columns, thus necessitating more stiff confining reinforcement. Therefore, it is preferable to control inelasticity in columns, to the extent possible, while dissipating most of the energy

through yielding of the beams as a measure against the total collapse of the structure [9; 10]. To achieve this “weak beam strong column” objective, the columns of a building can be made stiffer against deformation by wrapping them with fiber-reinforced polymers (FRP). Research work was done to conduct experimental studies of reinforced concrete retaining walls, including considering their reinforcement by inclined reinforcing bars [11]. The results obtained from the research showed the opening of horizontal interblock joints, the formation of inclined cracks emerging from the joints. An increase in the strength of reinforced concrete structures of retaining walls and a decrease in their deformability due to reinforcement by inclined rods in the interblock weld were recorded.

Confinement has been known to add both strength and ductility in the axial direction for concrete column and this idea originally developed back in the 1920s [12]. Numerous conventional techniques, e.g. ferrocement, concreting overlay, grout injection, external reinforcement, post-tensioning, near-surface retrofitting, etc., are available and getting popular for retrofitting of the concrete column. In recent years, the use of fiber-reinforced polymers as an external strengthening has gained considerable popularity over conventional strengthening and repair of concrete structures. The FRP composites have been used successfully for rehabilitation and strengthening of existing reinforced concrete elements to meet the higher standard of seismic loading. One popular technique of FRP strengthening is the wrapping of reinforced concrete columns to increase their axial strength, shear strength, and seismic resistance.

Fiber-reinforced polymer composites have become a favorite material of professionals in both engineering and construction due to its advantages. Major ones include lightweight, high strength, and construction convenience [13–19]. FRP composites provide excellent corrosion resistance, which keeps costs down and increases the service life of structural materials [20–29]. The circumferential confinement of FRPs restrains the transverse expansion of concrete; thus, the strength and ductility of FRP-confined concrete are notably enhanced when the concrete is subjected to a triaxial compressive load [30–33]. Therefore, it can be inferred that the problem of high brittleness and the poor ductility of lightweight aggregate concrete can be effectively solved by using FRP confinement. Thus, FRP application can make it an effective method to reduce self-weight in structural design. The advantage of the composite structure is that it can fully use the characteristics of the multi-materials [34–36].

Concrete elements are known for their brittleness therefore the need to strengthen the elements. The column is a very important load-bearing element in structures. Though a lot of researches have been done on the strength improvement of conventional concrete columns, very few researches have been done on the strength of lightweight expanded concrete with or without basalt fiber (BF). Based on the above, this research work has the task to suggest or solve the problem associated with the brittleness of lightweight concrete structural elements.

2. Materials and methods

This experimental study of concrete is carried out by using the state standard GOST 10180-2012 [37]. The materials for the lightweight concrete mix and the production of the concrete for this study are listed below for better illustration.

1. Lightweight expanded clay aggregate of 5–8 mm fraction as coarse aggregate. The lightweight expanded clay was washed to remove the dust in the aggregate. After washing the aggregate, it was spread on the metal surface for 48 hours to dry up. Expanded clay aggregate is a lightweight aggregate from clay. The clay is dried, heated, and burned in rotary kilns at 1100–1300 °C inhabiting essential properties like lightweight, insulating, strong, non-combustible, and fire-resistant, extremely stable and durable, natural material for sustainable construction, versatility, and high drainage capacity [38–42].

2. Quartz sand of 0.6–1.2 mm fraction as fine aggregate. A feature of the proposed quartz is the presence of coarse-grained sand, with a large modulus of fineness up to M3,5. Quartz sand has a rounded part with a low content of clay inclusions and inclusions of soft rocks. The resulting quartz sand undergoes additional enrichment and drying. The moisture content is up to 0.2% [43].

3. Mineral filler Silverbond quartz flour of 50 µm. Quartz flour is produced by grinding chemically pure, natural quartz sand to a finely divided state. The technology used guarantees the stability of the chemical composition during grinding and allows to get a constant particle size distribution of quartz flour. The crushed quartz flour is represented by rounded particles with uneven, broken edges. Quartz differs from other mineral fillers in hardness, abrasion and chemical resistance, anti-corrosion, and low coefficient of thermal expansion. Quartz is a chemically stable mineral, it is soluble only in hydrofluoric acid. With a low oil absorption and a small surface area of the particles, the use of quartz flour will enable to get a system with a high degree of filling.

4. Binder Holcim Portland cement M500 D20 CEM II 42.5 N. The characteristics of Holcim Portland cement M500 D20 CEM II 42.5 N: M – brand, 500 is a figure showing the average compressive strength for 28 days in kg/cm²,

D – additives, 20 – allowable number of additives in % (up to 20%), CEM II – cement containing additives, and the content of additives is 6–20%, I-type additives, limestone, 42.5-class compressive strength for 28 days, must be at least this value, and B-quick hardening.

5. Organic mineral-based additives: silica fume, and fly ash.
 6. Super plasticizing and water-reducing additive Sika Plast concrete.
 7. Tap water at room temperature. Generally, water that is suitable for drinking is satisfactory for use in concrete.
- For concrete reinforcement, the following materials are needed.*
8. Chopped basalt fiber. The length of the chopped basalt fiber used is 20 mm and the diameter 15 μm .
 9. Basalt mesh. Technical characteristics of the construction grid Ecostroy (basalt mesh):
 - tensile strength: longitudinal direction – 50 kn/m, transverse – 50 kn/m;
 - the relative elongation (longitudinal, transverse direction) is about 4%;
 - the surface density is 200 g/m^2 ;
 - characteristics of the roll: width – 36 cm, length – 50 m;
 - cell parameters: 25×25 mm.

The tests will be done on nine expanded clay concrete (ECC) cylindrical columns of four sets of lightweight concrete mixtures. The dimensions of the concrete cylindrical columns are height 300 mm × diameter 150 mm. The percentage of BF used as dispersed chopped BF in the ECC is stated in Table in the result section. The three sets of cylindrical concrete mix are:

- 1) three cylindrical concrete columns without both dispersed chopped basalt fiber and confinement basalt mesh;
- 2) three cylindrical concrete columns with dispersed chopped basalt fiber without confinement basalt mesh;
- 3) three cylindrical concrete columns with dispersed chopped basalt fiber and confined with basalt mesh.



Figure 3. Process of ECC cylindrical column:
a – euro cylinder with basalt mesh for confinement inside; *b* – ECC in mold; *c* – ECC cylindrical columns



Figure 4. The compressive test is done on hydraulic press PG-100



Figure 5. Strain gauge sensor location on ECC cylindrical column

The columns will be molded in a Euro cylinder of dimensions $\varnothing 150 \text{ mm} \times \text{height } 300 \text{ mm}$. The concrete columns are molded in Euro cylinder forms according to Eurocode 1 and 2 [44; 45] as shown in Figure 3. After pouring the ECC in cylindrical columns molds, the molds were covered with polytelin and kept at room temperature (20 ± 5) °C and relative air humidity (95 ± 5)%. On the 76th hour, the ECC columns were removed from the molds and kept in the curing bath till the 28th day then the columns were tested for deformation on a compressive test on a hydraulic press PG-100 (Figure 4).

After the test, a comprehensive strength comparison of the three sets of concrete will be done. From the analysis, the stress deformation and time will be analyzed from the average results of three columns from each of the three sets for comparison. Three strain gauge sensors are clued on the body of the ECC cylindrical column and numbered 1, 2, 3 as shown in Figure 5. Sensors 1 and 2 are for measuring the stress-strain deformation on the vertical zone of the column while sensor 3 is for measuring the horizontal deformation of the column.

3. Results

The 1.6% dispersed chopped basalt fiber used in this research experiment was derived from the compressive test results in Table where ECC cube with 1.6% BF showed better compressive strength.

Table

Results of the laboratory tests of ECC specimens of 100×100×100 mm on the compressive strength

Curing period, days	Compressive strength, MPa				
	0% BF	0.45% BF	0.9% BF	1.2% BF	1.6% BF
7	14.145	15.861	18.248	20.189	23.573
14	19.738	21.596	24.969	27.771	31.326
28	22.524	25.123	28.497	31.926	36.235

Figures 6, 9, 10, and 11 show the views of the ECC cylindrical columns after they have undergone imposed loads. From the experiments, the ECC cylindrical column could hold imposed loads of up to 19.6 tons. The deformations were measured at a pace of 5 tonnes. The compressive test started at time 18:05 and noticeable deformation started at 18:53 and complete test destruction ended at 19:03. Therefore, it took 58 minutes to achieve the compressive test result at deformation. Figure 9 shows the comparison of the maximum compressive load strength of the columns. Figure 11, it is seen the effect of the load on the strain gage. In Figure 11, the strain gage 1 (in green line graph) sustained from 18:02 – 18:55, strain gage 2 (in red) sustained from 18:02 – 19:02 while strain gage 3 (in blue) sustained from 18:03 – 18:56.

Figures 7, 9, 10, and 12 show the views of the ECC + BF cylindrical columns after undergoing imposed loads. The ECC + BF cylindrical columns could hold imposed loads of up to 26.67 tons. The deformations were measured at a pace of 5 tonnes. The compressive test started at time 16:56 and complete test destruction at 17:57. It took 1 hour and 01 minute for the complete deformation. Figure 12 shows that strain gage 1 (in green line graph) sustained from 16:56 – 17:57, strain gage 2 (in blue) sustained from 16:59 – 17:57 while strain gage 3 (in red) sustained from 16:59 – 17:57.

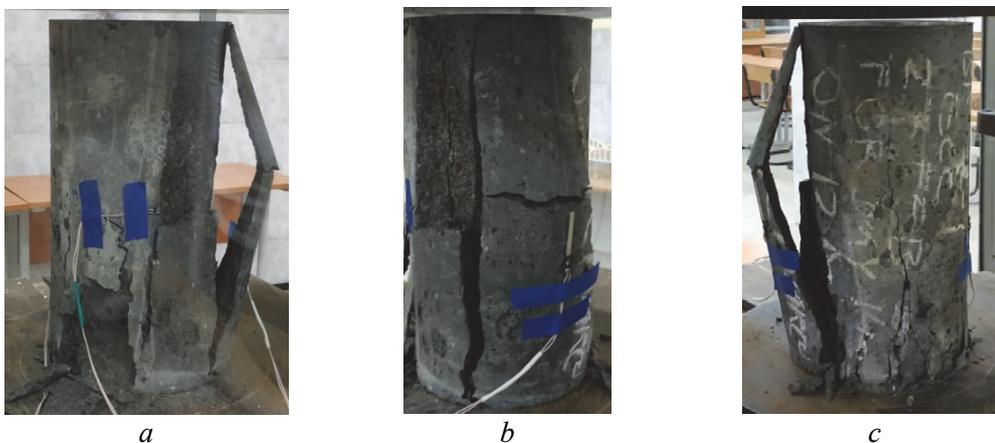


Figure 6. ECC cylindrical column after imposed loading shows deformation: a – at tensile gage 3; b – at tensile gage 1; c – at tensile gage 2

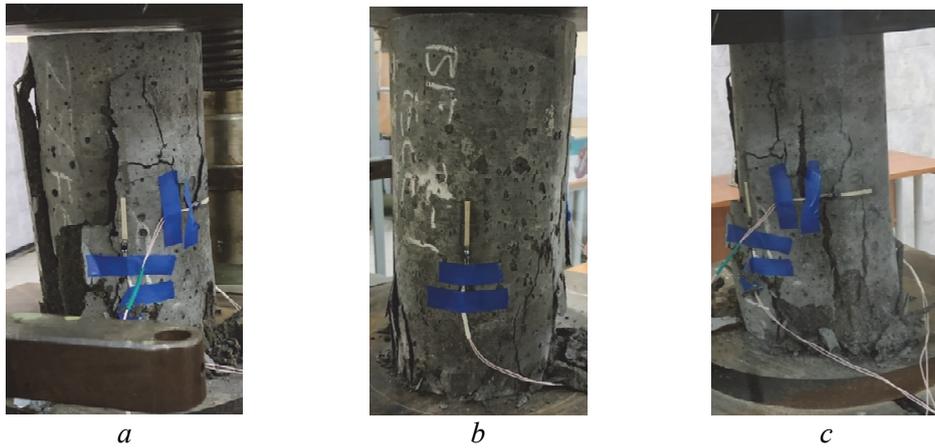


Figure 7. ECC + BF cylindrical column after imposed loading shows deformation:
a – at tensile gage 1; *b* – at tensile gage 2; *c* – at tensile gage 3

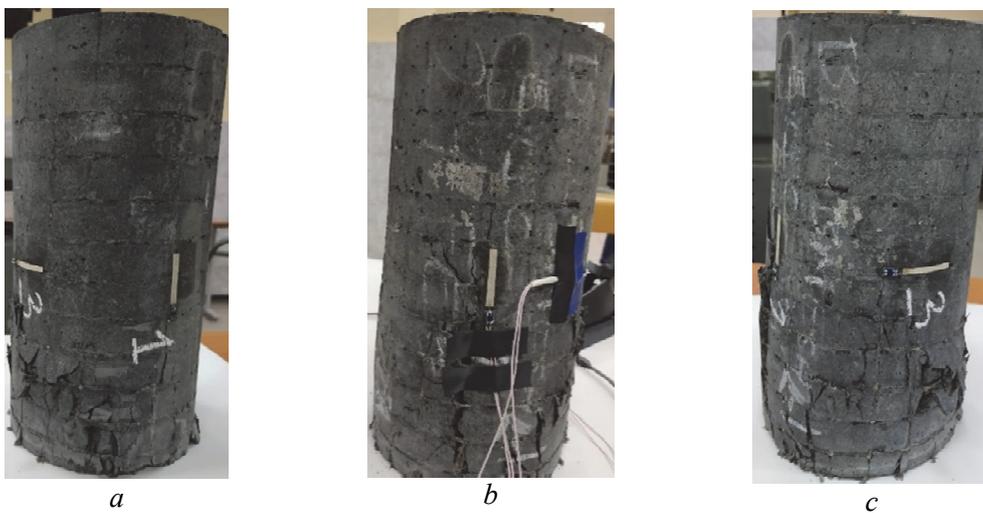


Figure 8. ECC + BF + basalt mesh cylindrical column after imposed loading shows deformation:
a – at tensile gage 1; *b* – at tensile gage 2; *c* – at tensile gage 3

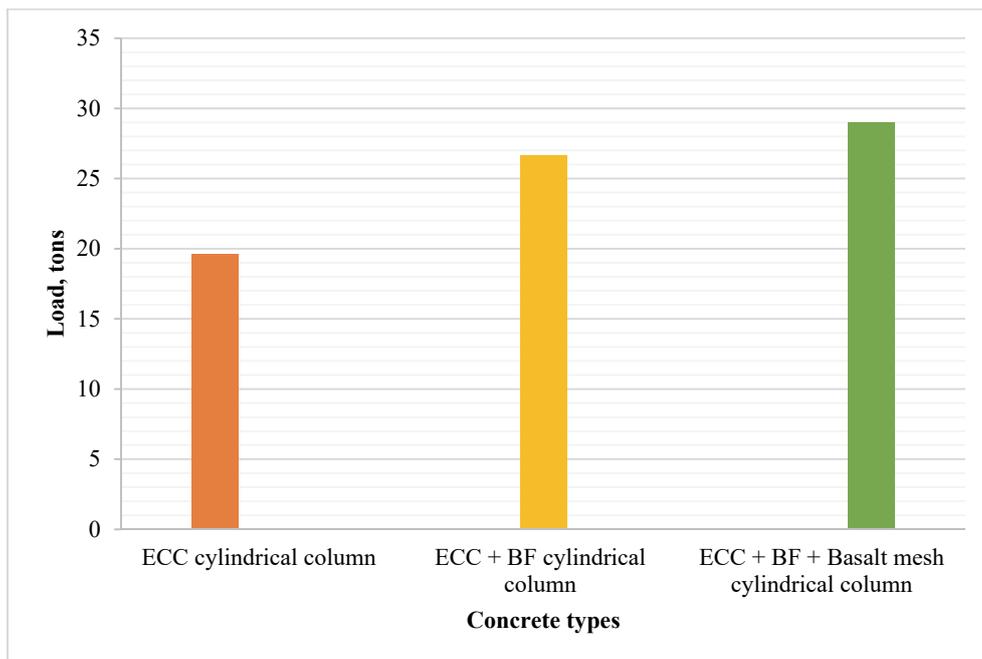


Figure 9. Compressive load diagram of ECC cylindrical columns

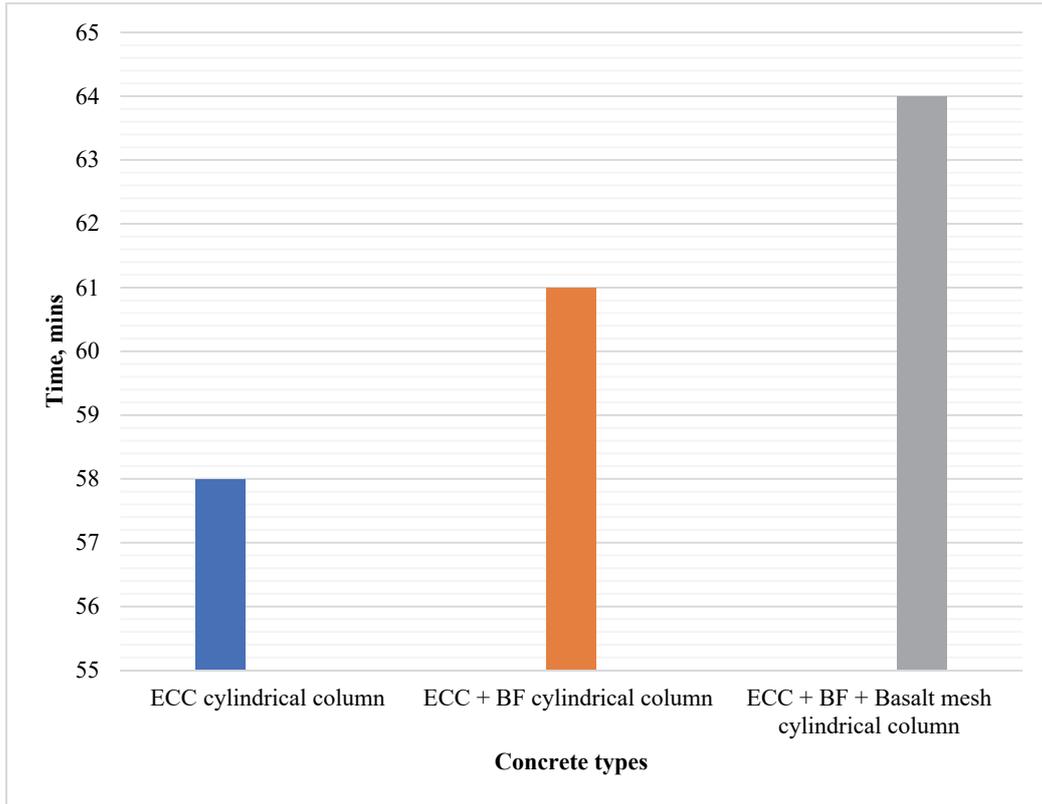


Figure 10. Compressive load time diagram of ECC cylindrical columns

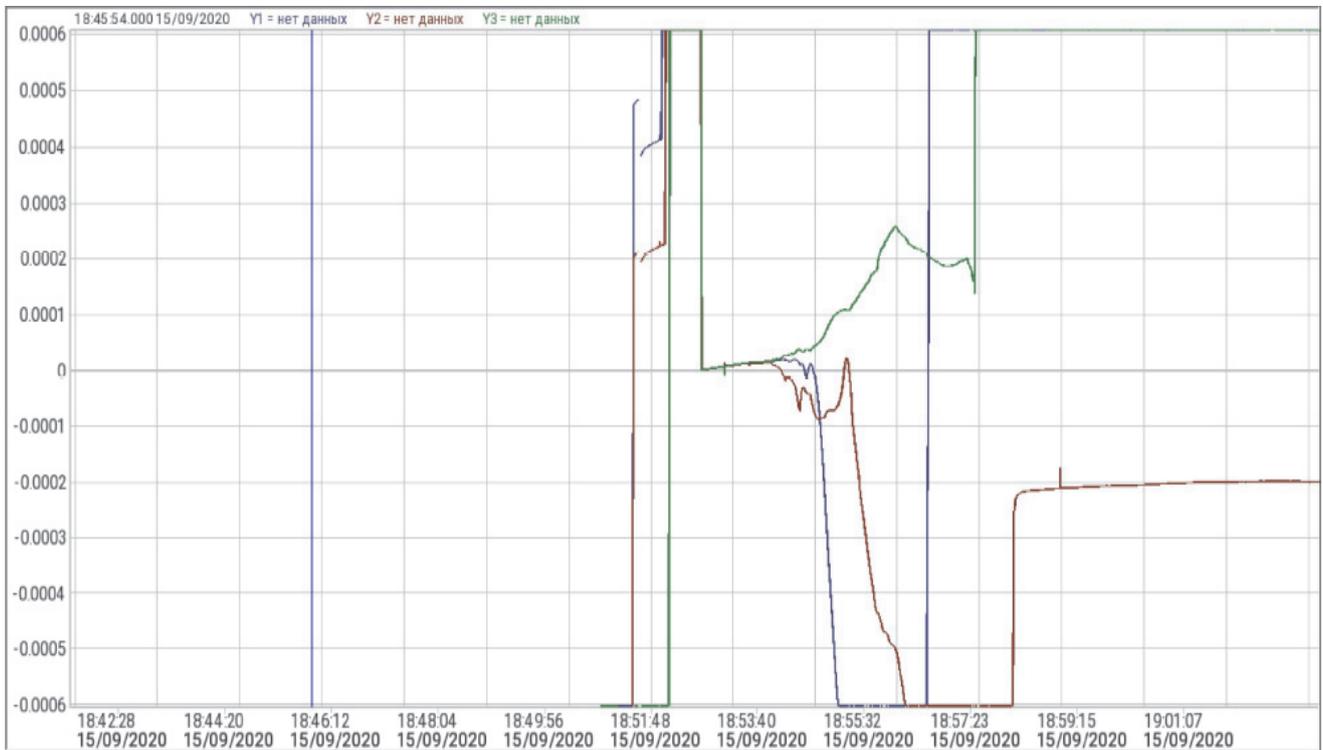


Figure 11. The time-deformation of ECC cylindrical column



Figure 12. The time-deformation of ECC with BF cylindrical column

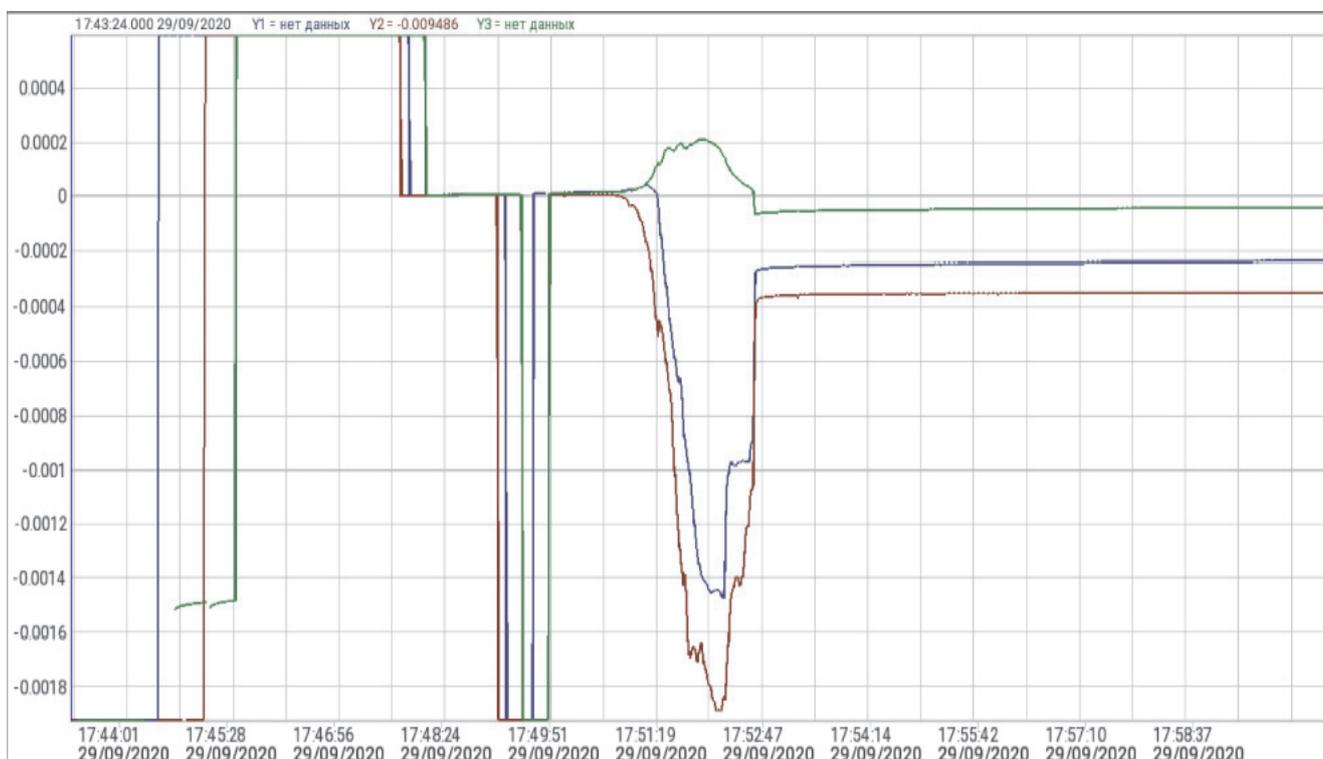


Figure 13. The time-deformation of ECC with both BF and basalt mesh confined cylindrical column

Figures 8, 9, 10, and 13 show the results of ECC + BF + Basalt mesh confined cylindrical columns after imposed loads. The ECC + BF + basalt mesh sustained a load of 29 tons. The compressive test started at time 16:56 and noticeable deformation started at 17:50 and complete test destruction at 18:00. It took 64 minutes for the complete deformation. Figure 13 shows that strain gage 1 (in green line graph) sustained from 16:59 – 17:59, strain gage 2 (in blue) sustained from 16:59 – 17:59 while strain gage 3 (in red) sustained from 17:00 – 18:00.

4. Conclusion

From the experimental results, the following conclusions are made.

1. The addition of basalt fiber in ECC affected the strength of the concrete and the destruction time.
2. The BF increased the compressive load of the column by 36% compared to the regular column.
3. The ECC column with both BF and basalt mesh improved the compressive strength by 48% compared to the regular column.
4. A 9% increase in strength was calculated when comparing the ECC column with BF and basalt mesh to the column with the only BF.

References

1. JGJ12-2006. *Technical specification for lightweight aggregate concrete structures*. Beijing: China Engineering and Construction Society Press; 2006.
2. Sohel K.M.A., Liew J.Y.R., Yan J.B., Zhang M.H., Chia K.S. Behavior of steel-concrete-steel sandwich structures with lightweight cement composite and novel shear connectors. *Composite Structures*. 2012;94:3500–3509. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.05.023.
3. Kong F., Evans R.H. *Handbook of Structural Concrete*. New York: McGraw-Hill; 1983.
4. Zhou Y., Liu X., Xing F., Cui H., Sui L. Axial compressive behavior of FRP-confined lightweight aggregate concrete: an experimental study and stress-strain relation model. *Construction and Building Materials*. 2016;119:1–15. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.02.180.
5. Wang H.T., Wang L.C. Experimental study on static and dynamic mechanical properties of steel fiber reinforced lightweight aggregate concrete. *Construction and Building Materials*. 2013;38:1146–1151. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2012.09.016.
6. Huang Z., Liew J.Y.R., Xiong M., Wang J. Structural behaviour of double skin composite system using ultra-lightweight cement composite. *Construction and Building Materials*. 2015;86:51–63. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2015.03.092.
7. Lim J.C., Ozbakkaloglu T. Stress-strain model for normal-and light-weight concretes under uniaxial and tri-axial compression. *Construction and Building Materials*. 2014;71:492–509. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2014.08.050.
8. Ataur R., Madhobi M., Shantanu G. Experimental behavior of FRP confined concrete cylinder wrapped by two different FRPs. *Journal of Materials Science Research*. 2018;7(2):1–8.
9. Saatcioglu M. Seismic design. *ACI design handbook (SI edition): Design of structural reinforced concrete elements in accordance with the strength design method of ACI318M-05* (chapter 6). Farmington Hills, MI: American Concrete Institute; 2010.
10. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kapriellov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S. Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):290–297. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297> (In Russ.)
11. Rubin O.D., Lisichkin S.E., Pashchenko F.A. Results of experimental researches of reinforced concrete retaining walls. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(2):152–160. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-152-160> (In Russ.)
12. Richart F.E., Brandtzaeg A., Brown, R.L. *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*. Bulletin No. 185. Champaign, Ill: University of Illinois Engineering Experimental Station; 1928.
13. Li P., Wu Y.F., Zhou Y., Xing F. Cyclic stress-strain model for FRP-confined concrete considering post-peak softening. *Composite Structures*. 2018;201:902–915. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.06.088.
14. Zhang H., Li H., Corbi I., Corbi O., Wu G., Zhao C., Cao T. AFRP influence on parallel bamboo strand lumber beams. *Sensors*. 2018;18:2854. DOI: 10.3390/s18092854.
15. Wang H.T., Wu G., Pang Y.Y. Theoretical and numerical study on stress intensity factors for FRP-strengthened steel plates with double-edged cracks. *Sensors*. 2018;18:2356. DOI: 10.3390/s18072356.

16. Luo M., Li W., Hei C., Song G. Concrete infill monitoring in concrete-filled FRP tubes using a PZT-based ultrasonic time-of-flight method. *Sensors*. 2016;16:2083. DOI: 10.3390/s16122083.
17. Yu Q.Q., Wu Y.F. Fatigue strengthening of cracked steel beams with different configurations and materials. *Journal of Composite Construction*. 2016;21:04016093. DOI: 10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000750.
18. Yu Q.Q., Wu Y.F. Fatigue durability of cracked steel beams retrofitted with high-strength materials. *Construction and Building Materials*. 2017;155:1188–1197. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.09.051.
19. Teng J.G., Jiang T., Lam L., Luo Y.Z. Refinement of a design-oriented stress-strain model for FRP-confined concrete. *Journal of Composite Construction*. 2009;13:269–278. DOI: 10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000012.
20. Kharun M., Koroteev D.D., Dkhar P., Zdero S., Elroba S.M. Physical and mechanical properties of basalt-fibered high-strength concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(5):396–403. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-5-396-403> (In Russ.)
21. Chen C., Sui L., Xing F., Li D., Zhou Y., Li P. Predicting bond behavior of HB FRP strengthened concrete structures subjected to different confining effects. *Composite Structures*. 2018;187:212–225. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.12.036.
22. Jiang C., Wu Y.F., Jiang J.F. Effect of aggregate size on stress-strain behavior of concrete confined by fiber composites. *Composite Structures*. 2017;168:851–862. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.02.087.
23. Wu Y.F., Jiang C. Quantification of bond-slip relationship for externally bonded FRP-to-concrete joints. *Journal of Composite Construction*. 2013;17:673–686. DOI: 10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000375.
24. Zhou Y., Li M., Sui L., Xing F. Effect of sulfate attack on the stress-strain relationship of FRP-confined concrete. *Construction and Building Materials*. 2016;110:235–250. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2015.12.038.
25. Sui L., Luo M., Yu K., Xing F., Li P., Zhou Y., Chen C. Effect of engineered cementitious composite on the bond behavior between fiber-reinforced polymer and concrete. *Composite Structures*. 2018;184:775–788. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.10.050.
26. Dai J.G., Gao W.Y., Teng J.G. Bond-slip model for FRP laminates externally bonded to concrete at elevated temperature. *Journal of Composite Construction*. 2013;17:217–228. DOI: 10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000337.
27. Zhang D., Gu X.L., Yu Q.Q., Huang H., Wan B., Jiang C. Fully probabilistic analysis of FRP-to-concrete bonded joints considering model uncertainty. *Composite Structures*. 2018;185:786–806. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.11.058.
28. Liu Z., Chen K., Li Z., Jiang X. Crack monitoring method for an FRP-strengthened steel structure based on an antenna sensor. *Sensors*. 2017;17:2394. DOI: 10.3390/s17102394.
29. Wu Y.F., Jiang C. Effect of load eccentricity on the stress-strain relationship of FRP-confined concrete columns. *Composite Structures*. 2013;98:228–241. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.11.023.
30. Teng J.G., Huang Y.L., Lam L., Ye L.P. Theoretical model for fiber-reinforced polymer-confined concrete. *Journal Composite Construction*. 2007;11:201–210. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0268(2007)11:2(201).
31. Jiang J.F., Wu Y.F. Plasticity-based criterion for confinement design of FRP jacketed concrete columns. *Material and Structures*. 2015;49:2035–2051. DOI: 10.1617/s11527-015-0632-4.
32. Wu Y.F., Jiang J.F. Effective strain of FRP for confined circular concrete columns. *Composite Structures*. 2013;95:479–491. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.08.021.
33. Jiang J.F., Wu Y.F. Identification of material parameters for Drucker – Prager plasticity model for FRP confined circular concrete columns. *International Journal of Solids and Structures*. 2012;49:445–456. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.10.002.
34. Valvano S., Carrera E. Multilayered plate elements with node-dependent kinematics for the analysis of composite and sandwich structures. *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. 2017;15:1–30. DOI: 10.22190/FUME170315001V.
35. Popov V.L. Analysis of impact on composite structures with the method of dimensionality reduction. *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. 2015;13:39–46.
36. Rohwer K. Models for intralaminar damage and failure of fiber composites: a review. *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. 2016;14:1–19.
37. GOST 10180-2012. *Betony. Metody opredeleniya prochnosti po kontrol'nym obraztsam [Concretes. Methods for strength determination using reference specimens]*. Moscow; 2013. (In Russ.)
38. Slater E., Moni M., Alam M.S. Predicting the shear strength of steel fiber reinforced concrete beams. *Construction and Building Materials*. 2012;26(1):423–436. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2011.06.042>
39. Shafigh P., Hassanpour M., Razavi S.V., Kobraei M. An investigation of the flexural behaviour of reinforced lightweight concrete beams. *International Journal of Physics and Sciences*. 2011;6(10):2414–2421.

40. Sepehr M.N., Kazemian H., Ghahramani E., Amrane A., Sivasankar V., Zarrabi M. Defluoridation of water via light weight expanded clay aggregate (LECA): adsorbent characterization, competing ions, chemical regeneration, equilibrium, and kinetic modeling. *Journal of Taiwan Institute of Chemical Engineers*. 2014;45:1821–1834.
41. Md I., Sharmin N.S., Md M., Akhtar U.S.U. Effect of soda lime silica glass waste on the basic properties of clay aggregate. *International Journal of Science and Engineering Research*. 2016;7(4):149–153.
42. Zendezhaban M., Sharifnia S., Hosseini S.N. Photocatalytic degradation of ammonia by light expanded clay aggregate (LECA)-coating of TiO₂ nanoparticles. *Korean Journal of Chemical Engineering*. 2013;30(3):574–579.
43. Fractionated quartz sand. Available from: http://www.batolit.ru/93_p.shtml (accessed: 06.02.2019).
44. EN 1991-1-1 (2002) (English). *Eurocode 1: Actions on structures. Part 1–1: General actions – Densities, self-weight, imposed loads for buildings* (Authority: The European Union Per Regulation 305/2011, Directive 98/34/EC, Directive 2004/18/EC).
45. EN 1992-1-1 (2004) (English). *Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1–1: General rules and rules for buildings* (Authority: The European Union Per Regulation 305/2011, Directive 98/34/EC, Directive 2004/18/EC).



Уважаемые коллеги!

Инженерная академия Российского университета дружбы народов приглашает вас принять участие в научных мероприятиях в 2021 году.

**ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
«ИНЖЕНЕРНЫЕ СИСТЕМЫ – 2021»**

Апрель 2021 года

Место проведения: Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3,
Департамент строительства, Инженерная академия РУДН.

**ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
«ИНЖЕНЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ – 2021»**

Октябрь 2021 года

Место проведения: Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3,
Департамент строительства, Инженерная академия РУДН.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИЙ

Русский, английский.

ПУБЛИКАЦИЯ МАТЕРИАЛОВ КОНФЕРЕНЦИЙ

Статьи будут опубликованы в сборниках трудов конференций, индексируемых в БД РИНЦ, или в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science.

НАУЧНЫЕ СЕКЦИИ

- Материаловедение, металлургия и нанотехнологии.
- Машиностроение, энергетика и транспорт.
- Авиационные и космические системы.
- Геология, горное и нефтегазовое дело.
- Гражданское, промышленное и гидротехническое строительство.
- Архитектура и промышленный дизайн.
- Инновационный менеджмент в промышленности.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Организатор конференций: Российский университет дружбы народов (РУДН).

Адрес страницы конференций на портале РУДН: <http://engr.rudn.ru/?p=14247>

Место проведения конференций:

Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, Инженерная академия РУДН.

Заседание секции «Машиностроение, энергетика и транспорт» состоится по адресу:

Москва, Подольское ш., д. 8, корп. 5.

Председатель Оргкомитета:

Малькова Марианна Юрьевна, профессор департамента строительства Инженерной академии РУДН.

E-mail: malkova-myu@rudn.ru

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФОРУМ ПО МЕХАНИКЕ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА, КОСМИЧЕСКИМ КОНСТРУКЦИЯМ И МАТЕРИАЛАМ (IAA/AAS SciTech Forum)

2–4 июня 2021 года

Место проведения: Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6,

Инженерная академия РУДН.

Организатор форума: Российский университет дружбы народов (РУДН).

Тел.: +7 (495) 952-08-29, e-mail: kupreev-sa@rudn.ru

ОФИЦИАЛЬНЫЙ ЯЗЫК

Английский.

ПУБЛИКАЦИЯ МАТЕРИАЛОВ ФОРУМА

Статьи будут опубликованы в сборнике трудов, индексируемом в БД Scopus и Web of Science.