

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2020 Том 16 № 4

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения, 05.23.02 – Основания и фундаменты, подземные сооружения, 05.23.17 – Строительная механика.

Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода).

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Акимов П.А., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Галишикова В.В., д-р техн. наук, доц., РУДН, Москва, Россия

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., МГСУ, Москва, Россия

Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Баженов В.А., акад., Национальная академия педагогических наук, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина

Буй Суан Нам, доцент, Ханойский университет горного дела и геологии, Ханой, Вьетнам

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., Киевский политехнический университет, Киев, Украина

Заксенхофер Райханд Ф., профессор, Горный университет в Леобене, Австрия

Зверев Е.М., д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

Иванов С.П., д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

Красич Соня, кандидат технических наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Лисичкин С.Е., д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

Ляхович Л.С., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

Магуле Фредерик, профессор, Высшая инженерная школа «Централь Сюделек», Университет Париж-Сакли, Франция

Мандроне Джузеппе, доцент, Университет Турина, Италия

Обозов В.И., д-р техн. наук, проф., ЦНИИСК, Москва, Россия

Санжаровский Р.С., д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Якутов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

- Соловьев С.А.* Моделирование случайной статической нагрузки на покрытие сооружений при неполной статистической информации 243
Кужахметова Э.Р. Моделирование свайного фундамента в среде Femap with NX Nastran 250

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

- Ляпичев Ю.П.* Выбор математических моделей грунтов в статических и сейсмических расчетах грунтовых плотин 261

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК

- Krivoshapko S.N.* The opportunities of umbrella-type shells (Возможности оболочек зонтичного типа) 271
Романова В.А. Визуализация образования поверхности полуправильных многогранников Архимеда 279

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

- Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kapriylov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S.* Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion (Результаты экспериментальных исследований сложнапряженных балок круглого поперечного сечения из высокопрочного фиброжелезобетона) 290

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

- Пшеничкина В.А., Дроздов В.В., Строк С.И.* Влияние жесткости основания на динамические характеристики здания как многомассового консольного стержня 298

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Булдакова Ю.М., Кудрявцев С.Г.* Напряженное состояние двухслойной полосы при взаимодействии с жестким основанием 311

Редактор Ю.А. Заикина

Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова

Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел.: +7 (495) 955-08-28; факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 20.08.2020. Выход в свет 28.08.2020. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 9,30. Тираж 250 экз. Заказ № 845. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов, 2020

© Алборова Л.А., фото на обложке

(Бизнес-центр Dominion Tower, или Пересвет-Плаза, Москва), 2020

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2020 VOLUME 16 No. 4

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI (elibrary.ru), Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The Journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the Journal.

The Journal website contains full information about the Journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the Journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

P.A. Akinov, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

V.V. Galishnikova, DSc, RUDN University, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

I.A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

V.P. Agapov, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

V.I. Andreev, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

V.A. Bazhenov, Member of the National Academy of Educational Science of Ukraine, DSc, Professor, Kiev National University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine

Xuan Nam Bui, PhD, Assoc. Professor, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi, Vietnam

S.P. Ivanov, DSc, Professor, Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia

N.I. Karpenko, Member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

V.I. Kolchunov, Member of the RAACS, DSc, Professor, South-West State University, Kursk, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

S.E. Lisichkin, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

L.S. Lyakhovich, Member of the RAACS, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France

Giuseppe Mandrone, PhD, Ass. Prof. in Engineering Geology, University of Torino, Italy

V.I. Obozov, DSc, Professor, Central Research Institute of Building Structures (TzNIISK im. V.V. Kucherenko), Moscow, Russia

Reinhard F. Sachsenhofer, PhD, Professor, Montanuniversität Leoben, Austria

R.S. Sanjarovskiy, DSc, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

V.I. Travush, Member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

V.V. Vanin, DSc, Professor, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine

N.M. Yakupov, Corresponding Member of Russian Engineering Academy, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

E.M. Zveryaev, DSc, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia

CONTENTS

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

Solovev S.A. Modeling of random static loads on a structural cover with limited statistical data 243

Kuzhakhmetova E.R. Modeling of a piled foundation in a Femap with NX Nastran 250

NUMERICAL METHODS OF STRUCTURES' ANALYSIS

Lyapichev Yu.P. Choice of mathematic models of soils in static and seismic analyses of embankment dams 261

GEOMETRY OF MIDDLE SURFACES OF SHELLS

Krivoshapko S.N. The opportunities of umbrella-type shells 271

Romanova V.A. Visualizing surface formation of semi-regular polyhedra of Archimedes 279

EXPERIMENTAL RESEARCHES

Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kapriellov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S. Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion 290

DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I. Influence of the foundation bed stiffness on the dynamic properties of the building as of a multi-mass cantilever bar 298

THEORY OF ELASTICITY

Buldakova J.M., Kudryavtsev S.G. Stressed state of two-layer strip when interacting with rigid base 311

Copy Editor Iu.A. Zaikina
Graphic Designer Iu.N. Efremova
Layout Designer Iu.A. Zaikina

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel.: +7 (495) 955-08-28; fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-243-249
УДК 624.046.5

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Моделирование случайной статической нагрузки на покрытия сооружений при неполной статистической информации

С.А. Соловьев

Вологодский государственный университет, Российская Федерация, 160000, Вологда, ул. Ленина, 15
solovevsa@vogu35.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 3 июня 2020 г.
Доработана: 4 июля 2020 г.
Принята к публикации: 15 июля 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Нагрузки на сооружения представляют собой сложные стохастические структуры, включающие в себя несколько типов неопределенностей одновременно. В статье разработан подход к вероятностному моделированию нагрузки на покрытие сооружений с учетом неполной статистической информации, когда параметры функций распределения представлены в интервальной форме. **Цель исследования** – разработка подхода к моделированию вероятностного распределения случайной нагрузки на покрытие сооружений в условиях ограниченной (неполной) статистической информации о нагрузке. **Методы.** Распределение вероятностей отдельного вида нагружения представлено в виде p -блоков (probability boxes). На численном примере показан алгоритм определения p -блока, состоящего из суммы p -блоков, характеризующих различные нагружения с различными граничными функциями распределения. **Результаты.** На основе предложенного подхода можно определить интервалы нормативной и расчетной нагрузки с заданной обеспеченностью, рассчитать вероятность безотказной работы элемента сооружений, произвести оценку риска аварии рассматриваемого элемента сооружений, а также подбор сечения элемента по заданному уровню надежности.

Ключевые слова: проектирование, случайная величина, покрытие, теория свидетельств, p -блоки, интервал значений, расчетная нагрузка, ферма, балка покрытия

Для цитирования

Соловьев С.А. Моделирование случайной статической нагрузки на покрытия сооружений при неполной статистической информации // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 243–249. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-243-249>

Введение

В соответствии с Межгосударственным стандартом ГОСТ 27751-2014 «Надежность строительных конструкций и оснований» рекомендуется применять вероятностно-статистические методы для обоснования нормативных и расчетных характери-

стик нагрузок и коэффициентов сочетаний. Применение таких методов допускается при наличии эффективных вероятностных методик учета случайной изменчивости основных параметров. При моделировании нагрузки на сооружение на основе вероятностно-статистических методов необходимо учитывать два типа неопределенности: алеторную, обусловленную естественной природой изменчивости климатических нагрузок и неоднородностью физико-механических свойств, и эпистемологическую, связанную с использованием ограниченной по объему статистической выборки и принятием отдельных статистических гипотез.

Соловьев Сергей Александрович, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства, кандидат технических наук, eLIBRARY SPIN-код: 4738-8927; Scopus ID: 57191529586; Web of Science ResearcherID: AAJ-1708-2020.

© Соловьев С.А., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

В исследовании [1] отмечается, что фактическая надежность конструкций покрытия в ряде случаев получается ниже расчетного уровня надежности вследствие изменчивости снеговой нагрузки. В работе [2] приведены различные подходы к описанию снеговой нагрузки на конструкции покрытий сооружений. В [3] также отмечается многообразие подходов к вероятностно-статистическому моделированию снеговой нагрузки на покрытие.

Проблема выбора конкретных вероятностно-статистических распределений для снеговой нагрузки может быть решена путем использования математических методов моделирования при неполной статистической информации. Широкое распространение получили методы вероятностного проектирования и расчета надежности в условиях неопределенности на основе p -блоков [4]. В работе [5] рассматривается перспективное направление использования топологической оптимизации с учетом неопределенности в параметрах нагрузки.

1. Цель исследования

Множество различных подходов к моделированию эксплуатационной нагрузки как случайной величины формирует эпистемологическую неопределенность в рамках анализа надежности элементов покрытия сооружения. В данной работе предлагается рассмотреть подход к моделированию случайной статической нагрузки на конструкции покрытий сооружений с учетом неопределенности в виде неточных (интервальных) оценок статистических параметров в математической модели нагрузки.

2. Материалы и методы

В общем виде условие прочности изгибаемой конструкции покрытия можно записать в виде:

$$\tilde{M}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n) \leq \tilde{M}_{\text{ult}}, \quad (1)$$

где $\tilde{M}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$ – функция изгибающего момента, зависящая от случайных (по значению) нагрузок на конструкцию покрытия $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$; \tilde{M}_{ult} – предельный допустимый изгибающий момент.

В общем виде нагрузки на покрытие можно классифицировать на нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия, климатические нагрузки и технологические нагрузки. Нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия могут быть описаны нормальным законом распределения. Так, в приложении С Eurocode 0 «Basis of structural design» отмечено, что нормальное рас-

пределение допустимо использовать для описания распределения собственного веса конструкций. Для моделирования снеговой нагрузки чаще используется закон распределения Гумбеля (или двойной экспоненциальный) [6]:

$$F_X(x) = \exp\left[-\exp\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right)\right], \quad (2)$$

где $\beta \approx \frac{S_X \sqrt{6}}{\pi}$ – мера рассеяния распределения Гумбеля, S_X – среднеквадратическое отклонение случайной величины X ; $\alpha = m_X - \gamma \cdot \beta \approx m_X - 0,45 \cdot S_X$ – мера центра распределения Гумбеля, γ – постоянная Эйлера – Маскерони.

В случае ограниченной по объему выборки возможно ввести поправки для оценки коэффициентов β и α в виде $\alpha = m_X - (0,45 + 0,34n^{-0,69}) \cdot S_X$ и $\beta = (0,78 + 1,54n^{-0,75}) S_X$.

Числовые параметры математического ожидания и стандартного отклонения для снеговой нагрузки содержатся в работе [6]. Эти параметры представляют собой некоторую неопределенность, одним из способов оценки которой является представление данных параметров в виде интервалов значений $[\underline{m}_X; \bar{m}_X]$ и $[\underline{S}_X; \bar{S}_X]$. Предположим, что по результатам статистического анализа данных о снеговой нагрузке получены следующие доверительные интервалы: $[\underline{m}_X; \bar{m}_X] \in [140; 150]$ кгс/м² и $[\underline{S}_X; \bar{S}_X] \in [20; 30]$ кгс/м². Различные возможные функции распределения (2) по граничным значениям параметров приведены на рис. 1.

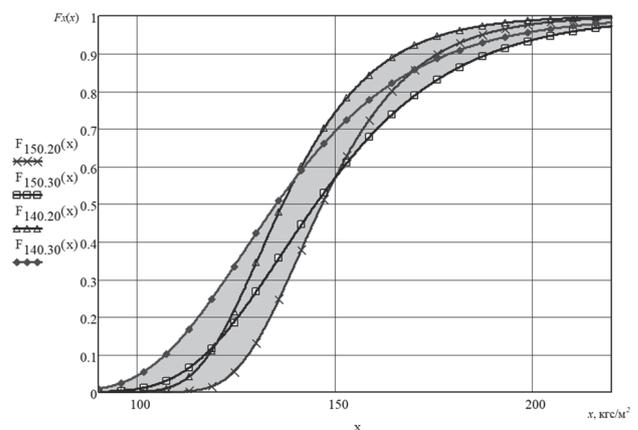


Рис. 1. Граничные функции распределения, формирующие p -блок для снеговой нагрузки
[Figure 1. Boundary distribution functions as a p -box for snow load]

Подмножество возможных функций распределения формируют область, которая называется *p*-box (probability box), или *p*-блоки. Предполагается, что действительная функция распределения снеговой нагрузки будет проходить внутри данной области. Таким образом, для снеговой нагрузки можно сформировать две граничные функции распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} \exp \left[-\exp \left(\frac{[\underline{m}_X - 0,45 \cdot \bar{S}_X] - x}{0,78 \cdot \bar{S}_X} \right) \right], & \text{если } x < \underline{m}_X \\ \exp \left[-\exp \left(\frac{[\underline{m}_X - 0,45 \cdot \underline{S}_X] - x}{0,78 \cdot \underline{S}_X} \right) \right], & \text{если } x \geq \underline{m}_X \end{cases},$$

$$\bar{F}_X(x) = \begin{cases} \exp \left[-\exp \left(\frac{[\bar{m}_X - 0,45 \cdot \underline{S}_X] - x}{0,78 \cdot \underline{S}_X} \right) \right], & \text{если } x < \bar{m}_X \\ \exp \left[-\exp \left(\frac{[\bar{m}_X - 0,45 \cdot \bar{S}_X] - x}{0,78 \cdot \bar{S}_X} \right) \right], & \text{если } x \geq \bar{m}_X \end{cases}.$$

Нагрузка от собственного веса конструкций, как было отмечено выше, зачастую описывается нормальным законом распределения, для которого в условиях интервальных оценок его параметров также может быть построена модель *p*-box. Так как нагрузка от собственного веса представлена суммой нагрузок от собственных весов элементов конструкции покрытия со своими доверительными оценками, то параметры для нормального распределения вычисляются по общеизвестным формулам: $m_X = \sum_{i=1}^n m_{x_i}$ и $S_X = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_{x_i}^2}$. В интервальной форме значения параметров суммируются по правилам интервальной арифметики [7]:

$$[\underline{m}_X; \bar{m}_X] = \sum_{i=1}^n [\underline{m}_{x_i}; \bar{m}_{x_i}]$$

и

$$[\underline{S}_X; \bar{S}_X] = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\underline{S}_{x_i}^2; \bar{S}_{x_i}^2]}.$$

С учетом вышеизложенного математическую модель предельного состояния (1) запишем в виде

$$\tilde{M}(\tilde{q}^{\text{snow}} + \tilde{q}^w) \leq \tilde{M}_{\text{ult}}, \quad (3)$$

где \tilde{q}^{snow} – снеговая нагрузка; \tilde{q}^w – нагрузка от веса конструкций.

Случайные статические нагрузки в модели (3) представлены *p*-блоками. Для суммирования *p*-блоков необходимо их преобразовать в структуру типа Демпстера – Шефера [8]. Непрерывные граничные функции распределения в *p*-блоках дискретизируются на определенное число блоков (рис. 2).

Распределения при дискретизации ограничиваются 0,05 и 99,5 перцентилями [9].

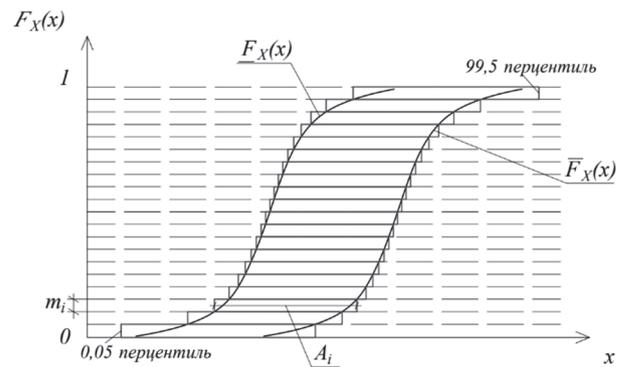


Рис. 2. Дискретизация *p*-блока на фокальные элементы A_i с базовыми вероятностями m_i
 [Figure 2. *P*-box discretization to focal elements A_i with basic probabilities m_i]

Шаг дискретизации m_i обычно принимают 0,01 с учетом $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. В данном случае мы получаем

100 интервальных оценок A_i случайной величины X . Следовательно, дискретизируя *p*-блоки для снеговой нагрузки, получим 100 интервалов: $[\underline{q}_1^{\text{snow}}; \bar{q}_1^{\text{snow}}]$, $[\underline{q}_2^{\text{snow}}; \bar{q}_2^{\text{snow}}]$, ..., $[\underline{q}_{100}^{\text{snow}}; \bar{q}_{100}^{\text{snow}}]$. Аналогично можно получить 100 интервалов для нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия $[\underline{q}_1^w; \bar{q}_1^w]$, $[\underline{q}_2^w; \bar{q}_2^w]$, ..., $[\underline{q}_{100}^w; \bar{q}_{100}^w]$.

Для построения *p*-блока суммарной статической нагрузки необходимо каждый интервал снеговой нагрузки сложить с каждым интервалом нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия. Табличная форма решения продемонстрирована в табл. 1.

Объединение двух структур (комбинация) Демпстера – Шефера [8]
[Table 1. Combination of two Dempster – Shafer structures]

$\left[\underline{q}_1^{\text{snow}} ; \bar{q}_1^{\text{snow}} \right], 0,01$	$\left[\underline{q}_2^{\text{snow}} ; \bar{q}_2^{\text{snow}} \right], 0,01$...	$\left[\underline{q}_{100}^{\text{snow}} ; \bar{q}_{100}^{\text{snow}} \right], 0,01$
$\left[\underline{q}_1^w ; \bar{q}_1^w \right], 0,01$	$\left[\underline{q}_1^{\text{snow}} + \underline{q}_1^w ; \bar{q}_1^{\text{snow}} + \bar{q}_1^w \right], 0,0001$	$\left[\underline{q}_2^{\text{snow}} + \underline{q}_2^w ; \bar{q}_2^{\text{snow}} + \bar{q}_2^w \right], 0,0001$...
$\left[\underline{q}_2^w ; \bar{q}_2^w \right], 0,01$	$\left[\underline{q}_1^{\text{snow}} + \underline{q}_2^w ; \bar{q}_1^{\text{snow}} + \bar{q}_2^w \right], 0,0001$	$\left[\underline{q}_2^{\text{snow}} + \underline{q}_2^w ; \bar{q}_2^{\text{snow}} + \bar{q}_2^w \right], 0,0001$...
....
$\left[\underline{q}_{100}^w ; \bar{q}_{100}^w \right], 0,01$	$\left[\underline{q}_1^{\text{snow}} + \underline{q}_{100}^w ; \bar{q}_1^{\text{snow}} + \bar{q}_{100}^w \right], 0,0001$	$\left[\underline{q}_2^{\text{snow}} + \underline{q}_{100}^w ; \bar{q}_2^{\text{snow}} + \bar{q}_{100}^w \right], 0,0001$...
			$\left[\underline{q}_{100}^{\text{snow}} + \underline{q}_{100}^w ; \bar{q}_{100}^{\text{snow}} + \bar{q}_{100}^w \right], 0,0001$

Элементы в табл. 1 записаны по принципу $A_i \in \left[\underline{q}_i ; \bar{q}_i \right]$, m_i , где $\underline{q}_i ; \bar{q}_i$ – нижняя и верхняя границы интервала фокального элемента A_i ; m_i – базовая вероятность для фокального элемента A_i .

В итоге получим $100 \times 100 = 10\,000$ интервалов. По этим интервалам можно построить нижнюю и верхнюю граничные функции распределения на основе положений теории свидетельств Демпстера – Шефера [10]. Данные граничные функции распределения будут создавать p -блок суммарной нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия и снеговой нагрузки.

3. Результаты

Пусть для стального прогона покрытия даны статистические характеристики нагрузок:

1. Собственный вес x_1 : математическое ожидание [0,14; 0,15] кН/м; среднее квадратическое отклонение [0,005; 0,010] кН/м.

2. Панель покрытия x_2 : математическое ожидание [0,50; 0,55] кН/м; среднее квадратическое отклонение [0,02; 0,04] кН/м.

3. Снеговая нагрузка x_3 : математическое ожидание [2,20; 2,50] кН/м; среднее квадратическое отклонение [0,10; 0,30] кН/м.

Математическое ожидание нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия: $m_{q,w} = [0,14; 0,15] + [0,50; 0,55] = [0,64; 0,70]$ кН/м.

Среднее квадратическое отклонение нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия: $S_{q,w} = \sqrt{[0,005^2; 0,010^2] + [0,020^2; 0,040^2]} = [0,021; 0,041]$ кН/м.

В общем виде граничные функции для нормального распределения нагрузки от собственного веса элементов покрытия можно записать в виде

$$F_{q,w}(q^w) = \begin{cases} F^{\text{norm}}(\underline{m}_{q,w}, \bar{S}_{q,w}), & \text{если } q^w < \underline{m}_{q,w} \\ F^{\text{norm}}(\underline{m}_{q,w}, \underline{S}_{q,w}), & \text{если } q^w \geq \underline{m}_{q,w} \end{cases},$$

$$\bar{F}_{q,w}(q^w) = \begin{cases} F^{\text{norm}}(\bar{m}_{q,w}, \underline{S}_{q,w}), & \text{если } q^w < \bar{m}_{q,w} \\ F^{\text{norm}}(\underline{m}_{q,w}, \bar{S}_{q,w}), & \text{если } q^w \geq \bar{m}_{q,w} \end{cases},$$

где F^{norm} – функция закона нормального распределения.

В примере рассмотрим дискретизацию p -блоков нагрузок на 10 элементов (рис. 3).

В рамках дискретизации на 10 элементов получим следующие интервалы: [0,535 (0,05 перцентиль); 0,673]; [0,588; 0,682]; [0,606; 0,689]; [0,619; 0,695]; [0,630; 0,700]; [0,640; 0,710]; [0,646; 0,722]; [0,651; 0,735]; [0,658; 0,752]; [0,668; 0,805 (99,5 перцентиль)] кН/м.

При дискретизации распределения снеговой нагрузки на 10 элементов получим следующие интервалы: [1,680 (0,05 перцентиль); 2,390]; [1,870; 2,418]; [1,954; 2,440]; [2,022; 2,462]; [2,084; 2,484]; [2,150; 2,522]; [2,208; 2,607]; [2,236; 2,716]; [2,272; 2,891]; [2,330; 3,600 (99,5 перцентиль)] кН/м.

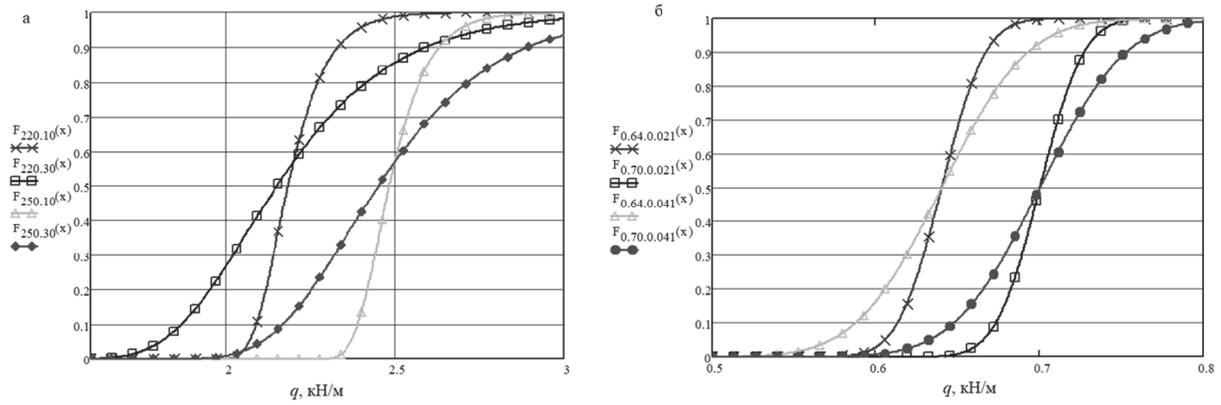


Рис. 3. Дискретизация p -блоков снеговой нагрузки (а) и нагрузки от собственного веса конструкций (б), кН/м
 [Figure 3. The snow load (a) and self-weight load (б) p -boxes discretization, kN/m]

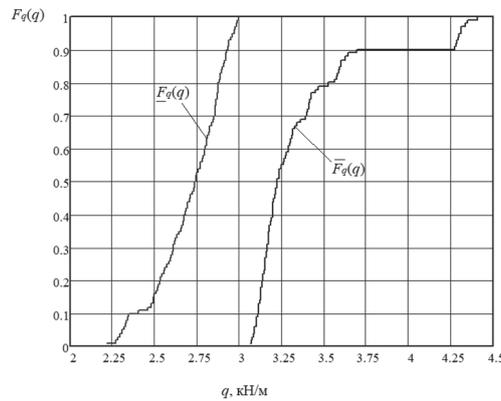


Рис. 4. Граничные функции распределения $\underline{F}_q(q)$ и $\overline{F}_\phi(q)$, формирующие p -блок суммарной нагрузки на покрытие
 [Figure 4. Boundary distribution functions $\underline{F}_q(q)$ and $\overline{F}_\phi(q)$ as p -box of common load on structural surface]

Таблица 2

Объединение двух нагрузок в общую структуру
 [Table 2. Combinations of two types of loads in common structure]

	[0,535; 0,673]	[0,588; 0,682]	[0,606; 0,689]	[0,619; 0,695]	[0,630; 0,700]	[0,640; 0,710]	[0,646; 0,722]	[0,651; 0,735]	[0,658; 0,752]	[0,668; 0,805]
[1,680; 2,390]	[2,215; 3,063]	[2,268; 3,072]	[2,286; 3,079]	[2,299; 3,085]	[2,310; 3,090]	[2,320; 3,100]	[2,326; 3,100]	[2,331; 3,125]	[2,338; 3,142]	[2,348; 3,195]
[1,870; 2,418]	[2,405; 3,091]	[2,458; 3,100]	[2,476; 3,107]	[2,489; 3,113]	[2,500; 3,118]	[2,510; 3,128]	[2,516; 3,128]	[2,521; 3,153]	[2,528; 3,170]	[2,538; 3,223]
[1,954; 2,440]	[2,489; 3,113]	[2,542; 3,112]	[2,560; 3,219]	[2,573; 3,135]	[2,584; 3,140]	[2,594; 3,150]	[2,600; 3,150]	[2,605; 3,175]	[2,612; 3,192]	[2,622; 3,245]
[2,022; 2,462]	[2,557; 3,135]	[2,610; 3,144]	[2,628; 3,151]	[2,641; 3,157]	[2,652; 3,162]	[2,662; 3,172]	[2,668; 3,172]	[2,673; 3,197]	[2,680; 3,214]	[2,690; 3,267]
[2,084; 2,484]	[2,619; 3,157]	[2,672; 3,166]	[2,690; 3,173]	[2,703; 3,179]	[2,714; 3,184]	[2,724; 3,194]	[2,730; 3,194]	[2,735; 3,219]	[2,742; 3,236]	[2,752; 3,289]
[2,150; 2,522]	[2,685; 3,195]	[2,738; 3,204]	[2,756; 3,211]	[2,769; 3,217]	[2,780; 3,222]	[2,790; 3,232]	[2,796; 3,232]	[2,801; 3,257]	[2,808; 3,274]	[2,818; 3,327]
[2,208; 2,607]	[2,743; 3,280]	[2,796; 3,289]	[2,814; 3,296]	[2,827; 3,302]	[2,838; 3,416]	[2,848; 3,317]	[2,854; 3,317]	[2,859; 3,342]	[2,866; 3,359]	[2,876; 3,412]
[2,236; 2,716]	[2,771; 3,389]	[2,824; 3,398]	[2,842; 3,405]	[2,855; 3,411]	[2,866; 3,416]	[2,876; 3,426]	[2,882; 3,426]	[2,887; 3,451]	[2,894; 3,468]	[2,904; 3,521]
[2,272; 2,891]	[2,807; 3,564]	[2,860; 3,573]	[2,878; 3,580]	[2,891; 3,586]	[2,902; 3,591]	[2,912; 3,601]	[2,918; 3,601]	[2,923; 3,626]	[2,930; 3,643]	[2,940; 3,696]
[2,330; 3,600]	[2,865; 4,273]	[2,918; 4,282]	[2,936; 4,289]	[2,949; 4,295]	[2,960; 4,300]	[2,970; 4,310]	[2,976; 4,310]	[2,981; 4,335]	[2,988; 4,352]	[2,998; 4,405]

Пример объединения нагрузки от собственного веса и снеговой нагрузки в единую структуру типа Демпстера – Шефера для заданных значений приведен в табл. 4

На рис. 4 представлен p -блок, который характеризует граничные функции распределения суммарной случайной нагрузки на покрытие.

4. Обсуждение

Полученные граничные функции распределения могут быть использованы при анализе надежности элементов покрытия [1; 11; 12]. Если несущая способность элемента покрытия может быть представлена в виде плотностей распределения с граничными функциями $\bar{f}_{q,ult}$ и $\underline{f}_{q,ult}$, то верхняя и нижняя границы вероятностей безотказной работы вычисляются по формулам

$$\underline{P} = \int_0^{+\infty} \bar{F}_q(q) \underline{f}_{q,ult}(q) dx,$$

$$\bar{P} = \int_0^{+\infty} \underline{F}_q(q) \bar{f}_{q,ult}(q) dx,$$

где $\bar{F}_q(q)$ и $\underline{F}_q(q)$ – граничные функции распределения случайной нагрузки на элемент; $\bar{f}_{q,ult}(q)$ и $\underline{f}_{q,ult}(q)$ – функции плотности граничных распределений несущей способности элемента.

Информацию о допустимых значениях вероятностей безотказной работы и вероятностей отказа можно найти в работах [13; 14].

Заключение

В статье описан подход к моделированию случайной нагрузки на конструкции покрытий сооружений при ограниченной статистической информации о нагрузках.

Интервальная оценка параметров функций распределения и формирование p -блоков позволяют более осторожно подойти к вероятностным задачам строительной механики.

Продемонстрирован способ суммирования случайных нагрузок, характеризующихся различными p -блоками, путем их дискретизации в структуры Демпстера – Шефера;

Представление нагрузки в виде p -блоков может быть использовано в задачах по расчету вероятности безотказной работы элементов сооружений, при оценке риска аварии рассматриваемого элемента сооружений, а также при подборе сечения элемента по заданному уровню надежности (индексу надежности).

Список литературы / References

1. Kozak D.L., Liel A.B. Reliability of steel roof structures under snow loads. *Structural Safety*. 2015;(54):46–56.
2. Rózsás Á., Sýkora M. Propagating snow measurement uncertainty to structural reliability by statistical and interval-based approaches. *7th International Workshop on Reliable Engineering Computing, REC2016. Computing with Polymorphic Uncertain Data*. 2016:91–110.
3. Qiang S., Zhou X., Gu M. Research on reliability of steel roof structures subjected to snow loads at representative sites in China. *Cold Regions Science and Technology*. 2018;(150):62–69.
4. Zhang H., Mullen R.L., Muhanna R.L. Structural analysis with probability-boxes. *International Journal of Reliability and Safety*. 2012;6(1–3):110–129.
5. Guest J.K., Igusa T. Structural optimization under uncertain loads and nodal locations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008;198(1):116–124.
6. Zolina T.V., Sadchikov P.N. Modelirovanie snegovoy nagruzki na pokrytie promyshlennogo zdaniya [Modeling of the Snow Load on the Roofs of Industrial Buildings]. *Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]*. 2016;(8):25–33. (In Russ.)
7. Moore R.E. *Methods and applications of interval analysis*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 1979.
8. Ferson S., Kreinovich V., Grinzbarg L., Myers D., Sentz K. *Constructing probability boxes and Dempster – Shafer structures (No. SAND-2015-4166J)*. Sandia National Lab. (SNL-NM), Albuquerque; 2003.
9. Zhang H., Mullen R.L., Muhanna R.L. Finite element structural analysis using imprecise probabilities based on p -box representation. *4th International Workshop on Reliable Engineering Computing*. Professional Activities Centre, National University of Singapore; 2010. p. 211–225.
10. Sallak M., Schön W., Aguirre F. Reliability assessment for multi-state systems under uncertainties based on the Dempster – Shafer theory. *IIE Transactions*. 2013;45(9): 995–1007.
11. Melchers R.E., Beck A.T. *Structural reliability analysis and prediction*. John Wiley & Sons; 2018.
12. Utkin V.S., Solovyev S.A. Reliability analysis of reinforced concrete elements with normal cracks (on RC beam example). *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018;14(3):142–152.
13. Holicky M., Markova J., Sykora M. Target reliability levels in present standards. *Transactions of the VSB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*. 2014;14(2):46–53.
14. Marano G.C., Quaranta G. A new possibilistic reliability index definition. *Acta mechanica*. 2010;210(3–4):291–303.

Modeling of random static loads on a structural cover with limited statistical data

Sergey A. Solovev

Vologda State University, 15 Lenina St, Vologda, 160000, Russian Federation
solovevsa@vogu35.ru

Article history:

Received: June 3, 2020

Revised: July 4, 2020

Accepted: July 15, 2020

Abstract

Relevance. Loads on structures are complex stochastic elements that include several types of uncertainties simultaneously. The article describes a probabilistic approach to the load modeling on structural covers taking into account limited statistical data, when the parameters of distribution functions are presented in an interval form. **The aim of the work** is development of an approach to modeling the probabilistic distribution of random load on the structural surface in conditions of limited (incomplete) statistical information about the design load. **Methods.** The probability distribution of a particular type of loading is represented as *p*-boxes (probability boxes). A numerical example shows an algorithm for determining a *p*-box consisting of a sum of *p*-boxes that characterize different loads with different boundary distribution functions. **Results.** Based on the proposed approach, it is possible to define the intervals of normative and design loads with a given confidence level, to estimate the failure probability of structural elements, to assess the risk of an accident and also to make selection for structural element cross-section at the target level of reliability.

Keywords: structural design, random variable, cover, evidence theory, *p*-boxes, interval value, design load, truss, roof beam

For citation

Solovev S.A. Modeling of random static loads on a structural cover with limited statistical data. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4): 243–249. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-243-249> (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-250-260
УДК 69.04 (69.07)

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Моделирование свайного фундамента в среде Femap with NX Nastran

Э.Р. Кужахметова*Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Российская Федерация, 236041, Калининград, ул. Александра Невского, 14
elja_09@bk.ru*

История статьи:

Поступила в редакцию: 22 апреля 2020 г.
Доработана: 25 июня 2020 г.
Принята к публикации: 12 июля 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Подземная часть здания (фундамент и грунт) оказывает существенное влияние на его напряженно-деформированное состояние и поведение под действием эксплуатационных нагрузок. Поэтому существующая нормативно-техническая документация регламентирует проектирование зданий (сооружений) с учетом совместной работы их надземной и подземной частей. На практике подобный учет становится возможным на основе комплексного инженерного анализа здания как большой механической системы «здание – фундамент – основание», который сегодня можно провести с применением метода конечных элементов. В случае применения свайных фундаментов правильность получаемого результата во многом зависит от обоснованного выбора расчетной модели подсистемы «свая – грунт». В статье анализируются три расчетные модели сваи, работающей в массиве грунтового основания. Первая модель – дискретная (стержневая). В ней свая моделируется пространственными стержнями (типа Bar) и опирается на упругие опоры (Spring) с обобщенными жесткостями. Вторая модель – пространственная, в которой свая и грунт набраны объемными элементами (Solid). Третья модель – пространственно-стержневая, или комбинированная, в которой стержневая свая встроена в сетку грунтового массива при помощи веерной подструктуры, образованной стерженьками большой жесткости (типа Rigid). **Цель исследования** – определить рациональную расчетную модель подсистемы «свая – грунт» позволяющую, с одной стороны, сократить общий порядок системы разрешающих уравнений, а с другой – сохранить точность оценки напряженно-деформированного состояния расчетной модели «свая – грунт» и здания в целом. **Материалы и методы.** Численные результаты анализа статике свайного фундамента с применением трех расчетных моделей «свая – грунт» выполнены в программном комплексе CAE – класса Femap with NX Nastran, реализующим метод конечных элементов. **Результаты.** Сравнительно-численный анализ напряженно-деформированного состояния подсистемы «свайный фундамент – основание» позволил определить достоинства, недостатки, а также области рационального использования стержневой, пространственной и комбинированной расчетных моделей. В следующих статьях планируется рассмотреть расчет свай на вертикальные нагрузки, осуществить сравнительный анализ численных результатов с экспериментальными данными (в лаборатории или в натуральных условиях) на горизонтальные и вертикальные воздействия.

Ключевые слова: свая, свайный фундамент, грунт, дискретная модель сваи с грунтом, пространственная модель сваи с грунтом, стержневая модель, объемная модель, основание, грунтовый массив, упругие опоры

Для цитирования

Кужахметова Э.Р. Моделирование свайного фундамента в среде Femap with NX Nastran // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 250–260. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-250-260>

Введение

В настоящее время проверочные расчеты прочности, устойчивости и колебаний проектируемых

зданий и сооружений выполняются с учетом фундамента и основания с реальными физико-механическими свойствами, в том числе определяемыми в результате статического и динамического зондирования. При этом широко используются программные комплексы инженерного анализа CAE-класса, реализующие метод конечных элементов (МКЭ) и позволяющие выстраивать и рассчитывать сложные пространственные (3D) расчетные модели. Высо-

Кужахметова Эльвира Рафаэлевна, аспирант, старший преподаватель кафедры машиноведения и технических систем, eLIBRARY SPIN-код: 1949-1140, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0907-786X>

© Кужахметова Э.Р., 2020

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

кая производительность и большие объемы памяти современных компьютеров позволяют осуществить объединение расчетных моделей надземной и подземной частей здания (сооружения). Инженерный анализ большой системы «здание – фундамент – основание» раскрывает инженеру-конструктору полную картину напряженно-деформированного состояния (НДС) проектируемого объекта, обеспечивает оценку степени взаимовлияния его составных частей.

Во многом благодаря новым вычислительным возможностям компьютерной техники в последние годы выполнен значительный объем теоретических и практических исследований по фундаментам, что позволило усовершенствовать методы расчета и нормы проектирования. Однако расчет большой механической системы «здание – фундамент – основание» МКЭ приводит к разрешающим системам уравнений очень большого порядка. Во многом это связано с моделированием именно подземной части. Расчетная модель надземной части здания и сооружения (пространственный каркас) обычно формируется стержневыми и пластинчатыми (оболочечными) конечными элементами с шестью обобщенными перемещениями в узлах. Численный инженерный анализ подобных моделей особых вычислительных трудностей не вызывает [1; 2]. Ситуация меняется при моделировании подземной части. Применение объемных конечных элементов приводит к существенному росту порядка решаемой задачи и значительному увеличению времени анализа. В результате выбор модели «фундамент – основание» зачастую производится исходя из доступной производительности и объема памяти вычислительной машины, а не из соображений необходимой точности моделирования (адекватности модели). При этом актуализируется не только задача решения больших систем уравнений по частям, но также и задача выбора рациональной расчетной схемы «фундамент – основание».

При решении первой задачи порядок решаемой системы уравнений можно существенно понизить с помощью методов подструктур и суперэлементов, контурных и расчетных точек [3–6] и др. В качестве примера можно привести программный комплекс Femap with NX Nastran, реализующий технологию внешнего суперэлемента. Его использование позволяет свести расчет глобальной системы «здание – фундамент – основание» к расчету здания, находящегося на дискретном упругом основании с обобщенными жесткостными характеристиками, зависящими от реологических свойств основания (грунта) [7]. В результате общая трудоемкость, время и стоимость расчетного анализа сложной системы существенно снижаются, причем без потери точности результата.

Для решения второй задачи необходим сопоставительный анализ различных расчетных моделей подсистемы «фундамент – основание». Далее будут рассмотрены расчетные модели фундаментов свайного типа. Подобные фундаменты получили широкое распространение при строительстве зданий и сооружений в основном благодаря своей высокой надежности, технологичности и относительной простоте изготовления [8]. Как известно, в зависимости от характера работы в грунте сваи разделяются на сваи-стойки и висячие сваи [9; 10]. Под свайным фундаментом подразумевается как группа свай, объединенная ростверком (ленточно-и плитно-свайные поля), так и сваи без ростверка, то есть отдельно стоящие сваи под опоры (колонны). Рассмотрение ленточно-свайных и плитно-свайных фундаментов выходит за рамки данной статьи, поскольку создание геометрии «свая – ростверк – грунт» не меняет основных принципов моделирования, характерных для отдельной сваи. Поэтому нами были исследованы модели висячей сваи с грунтовым основанием, представляющим однородную замкнутую область с заданными физико-механическими характеристиками. Из-за ограниченного объема статьи рассмотрим расчет сваи на горизонтальную нагрузку. Объектом анализа послужит квадратная свая в поперечном сечении размером $0,3 \times 0,3$ м, работающая совместно с грунтовым массивом. Для наглядности методик [10–14], учитывающих помимо ее горизонтального смещения и поворота в вертикальной плоскости еще и поперечную упругую деформацию, примем длину сваи 2 м. Продемонстрированные расчетные модели «свая – грунт» можно использовать для свай разной длины, а также при расчете как на горизонтальные, так и на вертикальные нагрузки [8; 15; 16].

Изучены следующие варианты расчетных моделей подсистемы «свая – грунт»:

- модель 1 – стержневая модель сваи с дискретными упругими опорами (пружинками) (рис. 1);
- модель 2 – пространственная модель сваи с грунтом (рис. 2);
- модель 3 – пространственно-стержневая модель сваи с веерной системой, составленной из жестких стержней типа Rigid (рис. 3).

1. Модельные представления свайного фундамента с грунтовым основанием

Модель 1. Стержневая модель сваи с дискретными упругими опорами (пружинками)

Свайная конструкция представляет собой стержневой элемент, в общем случае работающий на сжатие, растяжение, изгиб и кручение. Грунт моделируется в рамках гипотезы Винклера установкой ряда

дискретных упругих опор (конечных элементов типа Spring), расположенных по длине сваи [10]. Изменение жесткости грунта C_h , кН/м^3 , по глубине принята согласно нормативным документам [11; 12]. Формирование упрощенного графика грунта осуществляется по трем характерным его точкам (рис. 1). Началом отсчета является уровень отметки поверхности земли, затем выбирается точка, где грунт сложился как однородная структура, в которой проводится экспериментальное измерение коэффициента жесткости грунта C_h , кН/м^3 . Крайняя точка назначается на глубине 10 м. Ниже нее жесткость грунта возрастает лишь незначительно. Такой подход к построению графика изменения жесткости по глубине позволяет ограничиться одним измерением C_h . Методика определения коэффициента жесткости C_i , кН/м , для каждой i -упругой опоры (Spring) сваи (рис. 2) подробно изложена в работах [13–15]. Коэффициент жесткости упругой опоры C_i , кН/м , – это коэффициент жесткости грунта C_h , кН/м^3 , в уровне расположения опоры, умноженный на площадь $A = ab \text{ м}^2$, к ней относящуюся где a – расстояние между упругими опорами, м; b – ширина сваи, м.

При использовании модели 1 необходимы надежные методики определения обобщенных жесткостных характеристик грунта, которые могут быть получены на основе предварительных расчетов альтернативными методами [11–15].

Модель 2. Пространственная модель сваи с грунтом

Эталонной моделью «свая – грунт» будем считать трехмерную модель сваи с грунтовым основанием (рис. 3, а), в которой свайная конструкция и массив грунта представлены объемными (например, тетраэдральными) конечными элементами (КЭ) типа Solid [17; 18]. Каждый конечный элемент в указанной расчетной модели подземной части имеет по три степени свободы в узлах и полилинейную аппроксимацию перемещений по осям x , y , z [19].

Модель 3. Пространственно-стержневая модель с элементами (Rigid)

На рис. 3, б показана модель, в которой свая представлена стержневыми конечными элементами, а грунтовое основание – объемными КЭ. Узлы стержневых и объемных КЭ соединяются при помощи жестких стерженьков типа Rigid, образующих многоуровневые веерные подструктуры КЭ. Таким образом, при моделировании сваи реализуется гипотеза плоских сечений. При этом узлы

сваи сохраняют все шесть степеней свободы, что позволяет отслеживать в местах соединений не только нормальные и перерезывающие силы, но также изгибающие и крутящие моменты.

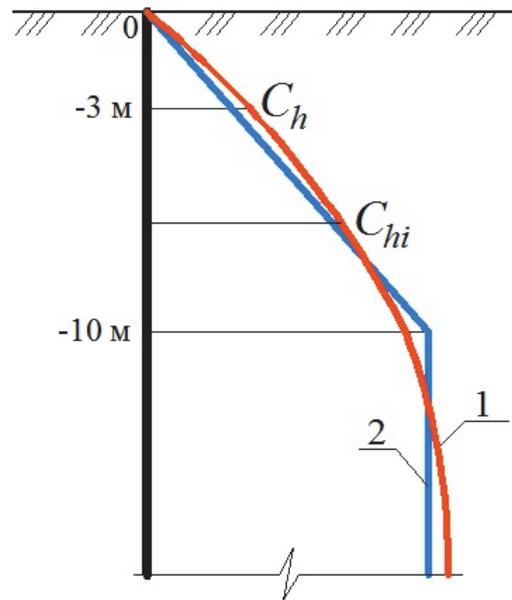


Рис. 1. Расчетная схема сваи

и определение отпорности основания:

P – горизонтальная сила, Н; a – расстояние между упругими опорами, м; C_h – коэффициент жесткости грунта в уровне расположения опоры, Н/м^3 ;

C_i – коэффициент жесткости упругой опоры, Н/м

[Figure 1. The design scheme of the piles and the determination of the resistance of the base:

P – horizontal force, N; a – distance between the elastic supports, m;

C_h – soil stiffness coefficient at the level of support location, N/m^3 ;

C_i – coefficient of stiffness of the elastic support, N/m]

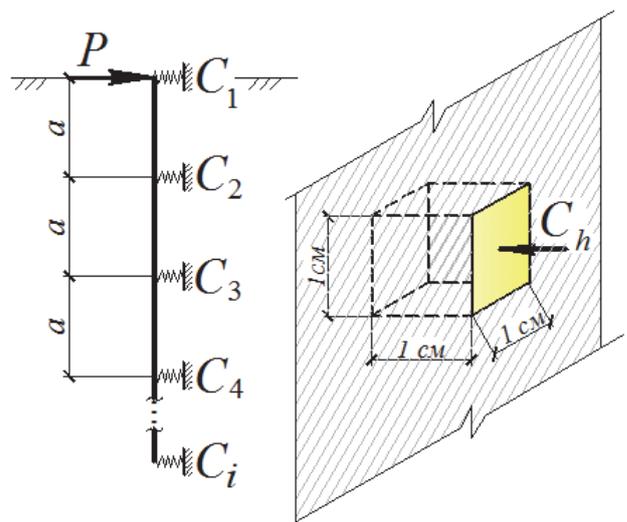


Рис. 2. График изменения жесткости грунта C_{hi} , Н/м^3 , по глубине h , м:

1 – реальное изменение; 2 – расчетное изменение

[Figure 2. The graph of the change in the stiffness of the soil C_{hi} , N/m^3 , in depth h , м:

1 – real change; 2 – estimated change]

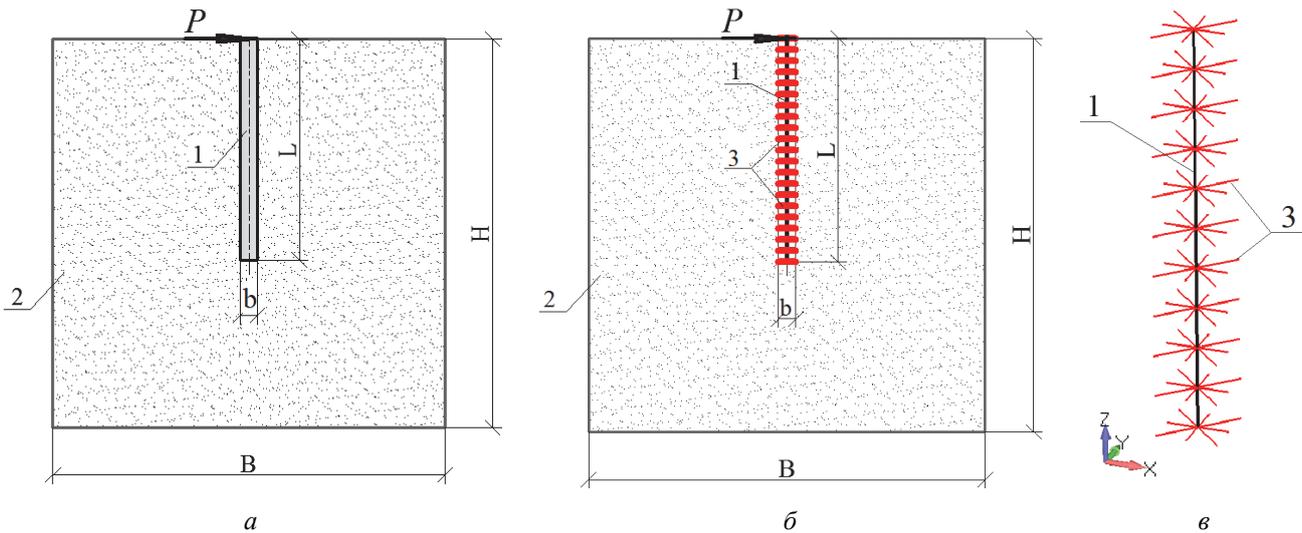


Рис. 3. Расчетные модели «свая – грунт»:

a – модель 2 – пространственная модель сваи с грунтом; *б* – модель 3 – пространственно-стержневая модель;
в – фрагмент сваи в виде стержня с элементами типа Rigid; 1 – железобетонная свая в виде стержневого конечного элемента Bar;
 2 – однородное грунтовое основание в виде объемного тела Solid; 3 – жесткие Rigid-элементы с заданным шагом разбиения сетки;
P – горизонтальная сила, Н; *H*; *b* – ширина сваи, м; *L* – длина сваи, м

[Figure 3. Design models “pile – soil”:

a – model 2 – solid model of soil piles; *б* – model 3 – spatial-bar model; *в* – fragment of a pile in the form of a bar with elements of the Rigid type;
 1 – reinforced concrete pile in the form of a finite element Bar; 2 – homogeneous soil base in the form of a solid body;
 3 – Rigid-elements with a given mesh partition step; *P* – horizontal force, N; *b* – pile width, m; *L* – pile length, m]

2. Материалы исследования

Для расчетного исследования возьмем исходные данные, аналогичные данным ранее опубликованных работ [14; 15].

Принята железобетонная забивная свая квадратного поперечного сечения $b \times h = 0,3 \times 0,3$ м, длиной $L = 2$ м по ГОСТ 19.804.1 [20]. Материал сваи – тяжелый бетон класса В15 с модулем упругости $E_b = 24 \cdot 10^3$ МПа (табл. 6.11 в [21]). Значение модуля сдвига бетона равняется $G_b = 0,4E_b = 0,4 \cdot 24 \cdot 10^3 = 9,6 \cdot 10^3$ МПа (п. 6.1.15 в [21]), а коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$ (п. 6.1.17 в [21]).

Грунт основания – песок четвертичного отложения, пылеватый (коэффициент пористости $e = 0,65$) с модулем деформации $E = 18$ МПа, углом внутреннего трения $\varphi = 30^\circ$, удельным сцеплением $c = 4$ кПа (табл. Б.1 в [22]) и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ (табл. 5.10 в [22]). Внешняя горизонтальная нагрузка на все расчетные модели сваи составляет $P = 100\,000$ Н [14; 15; 22].

3. Методы исследования

Сегодня метод конечных элементов является универсальным средством численного инженерного анализа сложных конструкций, включая конструкции зданий и сооружений. Он позволяет использовать в инженерном анализе широкий набор надежных стержневых, пластинчатых (оболочечных) и объемных конечных элементов с различными ап-

роксимирующими функциями полей перемещений. Для расчета стержневых и объемных тел применима дискретная модель, которая обуславливает описание НДС исследуемого объекта в виде системы алгебраических уравнений, порядок которой может быть весьма высоким. Поэтому анализ модели конструкции, построенной на основе МКЭ, имеет смысл лишь при условии полной автоматизации расчетных исследований. В исследовании расчетных моделей свайных фундаментов применен расчетный комплекс Femap with NX Nastran, реализующий весьма широкий набор расчетных подходов и методов.

4. Результаты

Рассмотрим результаты сравнительного расчетного анализа напряженно-деформированного состояния свайного фундамента с применением трех расчетных моделей «свая – грунт».

Модель 1. Стержневая модель сваи с дискретными упругими опорами (пружинками)

Для двухметровой сваи используются три опорные точки – по краям и в центре – с шагом $a = 1$ м (рис. 4).

В точке 1 (расположенной на поверхности при $h_{гр} = 0$ м) коэффициент жесткости упругой опоры составляет $C_1 = 2 \cdot 10^6$ Н/м, в точке 2 (на глубине $h_{гр} = 1,5$ м) – $C_2 = 8 \cdot 10^6$ Н/м, а в точке 3 (на глубине $h_{гр} = 3$ м) коэффициент жесткости упругой опоры

равен $C_3 = 11,2 \cdot 10^6$ Н/м. Конечно-элементная модель стержня состоит из шести конечных элементов типа Bar, состыкованных в семи узлах. Каждая пружинка (элемент типа Spring) имеет несмещаемое опирание. На рис. 5 представлены результаты расчета: горизонтальные перемещения (а) и реакции опор (б) свай.

Увеличение шага упругих опор не оказывает существенного влияния на результат (табл. 1).

Модель 2. Пространственная модель «свая – грунт» (Solid-модель)

Рассмотрена замкнутая область грунта в виде куба с размерами $H \times B \times L = 6 \times 6 \times 6$ м. Размеры свай составили $0,3 \times 0,3$ м, длина $L = 2$ м. Общее число объемных КЭ расчетной модели – 37 979, число узлов стыковки – 55 478, сетка с шагом 0,3 м. Граничные условия для грунтового массива принимались следующими:

- перемещения нижней и боковых поверхностей равны нулю;
- перемещение верхней поверхности массива не ограничивается.

К свае приложена сосредоточенная горизонтальная (вдоль оси x) сила $P = 100\,000$ Н. Нагрузка равномерно распределялась по верхней образующей поверхности при помощи веерной системы жестких КЭ типа Rigid. На рис. 6 показано горизонтальное перемещение свай совместно с грунтом (а) и эквивалентные напряжения в свае $\sigma_{эжв}$, Н, (б), вычисленные в соответствии с энергетической гипотезой фон Мизеса:

$$\sigma_{эжв} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6 \cdot \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)},$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения по осям x, y, z ; $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ – касательные напряжения на площадках, перпендикулярные к осям x, y, z .

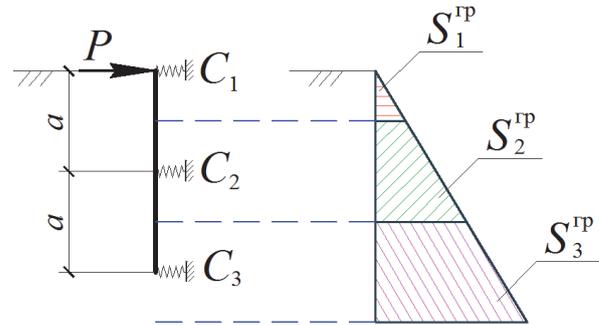


Рис. 4. Модель 1 – стержневая модель свай с дискретными упругими опорами C_i и схема определения жесткости упругих опор для свай $L = 2$ м: P – горизонтальная сила, Н; a – расстояние между упругими опорами, м; C_1, C_2, C_3 – коэффициенты жесткости упругих опор, Н/м; S_i^{gp} – грузовые площади, относящиеся к упругим опорам, м²

[Figure 4. Model 1 – bar model of piles with discrete elastic supports C_i and a scheme for determining the stiffness of elastic supports for piles $L = 2$ m: P – horizontal force, N; a – distance between the elastic supports, m; C_1, C_2, C_3 – stiffness coefficients of elastic supports, N/m; S_i^{gp} – cargo area related to elastic supports, m²]

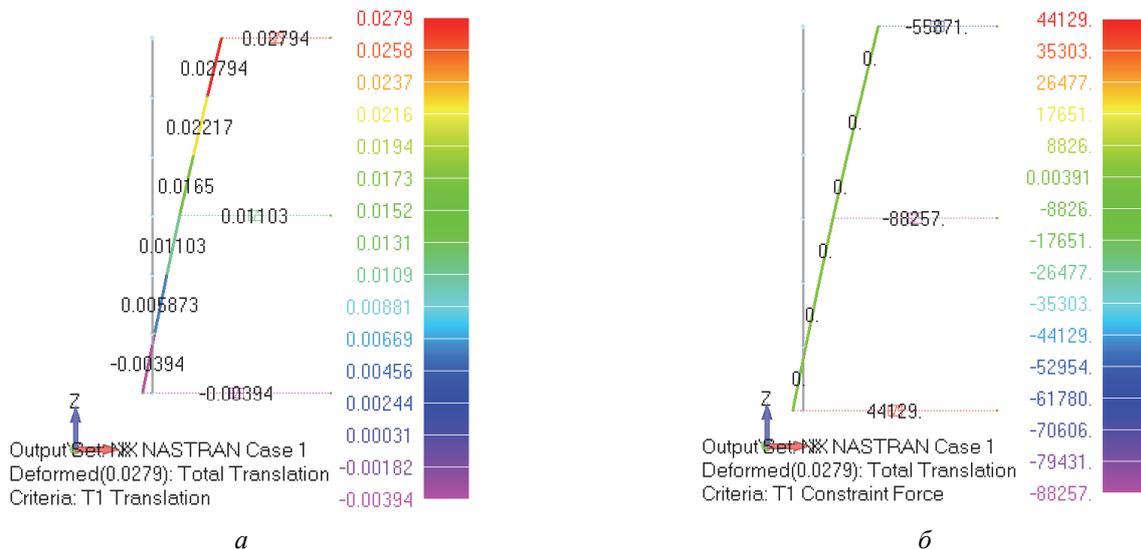


Рис. 5. Результаты расчета стержневой модели 1:
 а – перемещение V_i узла по оси x в точках $V_1 = 0,02794$ м, $V_2 = 0,01103$ м, $V_3 = -0,00394$ м;
 б – опорные реакции P_i по оси x в точках $P_1 = 55871$ Н, $P_2 = 88257$ Н, $P_3 = -44129$ Н
[Figure 5. The calculation results of the core model 1:
 а – translation V_i of a node along the x axis at points $V_1 = 0,02794$ м, $V_2 = 0,01103$ м, $V_3 = -0,00394$ м;
 б – constrain force P_i along the x axis at points $P_1 = 55871$ Н, $P_2 = 88257$ Н, $P_3 = -44129$ Н]

Исходные данные и результаты расчета модели 1
 [Table 1. The initial data and the calculation results of the model 1]

№ п/п [No.]	Исходные данные модели [Initial data of the model]			Результаты расчета [Calculation results]		
	Размер сетки s , м [Mesh size on solid s , m]	Число узлов [Number of nodes]	Число элементов [Number of elements]	Перемещение V_i , м, узла по оси x в точках [Translation V_i , m, of a node along the x axis at points]		
				1	2	3
1	0,5	9	10	0,02794	0,01103	-0,00394
2	0,4	12	11	0,02794	0,01103	-0,00394
3	0,3	13	12	0,02794	0,01103	-0,00394
4	0,2	21	22	0,02794	0,01103	-0,00394
5	0,1	41	42	0,02794	0,01103	-0,00394

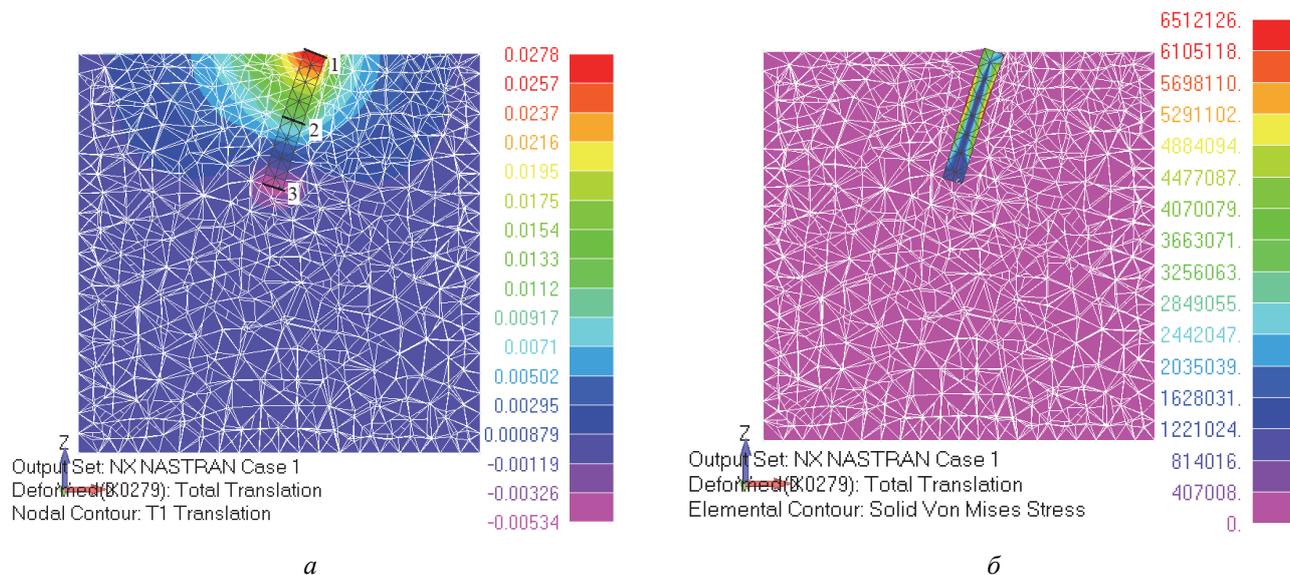


Рис. 6. Результаты расчета пространственной модели 2:
 а – перемещение V_i узла по оси x в точках $V_1 = 0,0279$ м, $V_2 = 0,0112$ м, $V_3 = -0,00534$ м;
 б – эквивалентные напряжения в объемном элементе $\sigma_{\text{эбв}}$, Н
 [Figure 6. The results of the calculation of solid model 2:
 а – translation V_i of a node along the x axis at points $V_1 = 0.0278$ m, $V_2 = 0.0112$ m, $V_3 = -0.00534$ m;
 б – solid Von Mises stress $\sigma_{\text{эбв}}$, N]

Исходные данные и полученные результаты расчета пространственной модели 2
 [Table 2. The initial data and the calculation results of the spatial model 2]

№ п/п [No.]	Исходные данные модели [Initial data of the model]			Результаты расчета [Calculation results]		
	Размер сетки s , м [Mesh size on solid s , m]	Число узлов [Number of nodes]	Число элементов [Number of elements]	Перемещение V_i , м, узла по оси x в точках [Translation V_i , m, of a node along the x axis at points]		
				1	2	3
1	0,5	17033	11457	0,0274	0,01120	-0,00508
2	0,4	28104	19047	0,0276	0,01120	-0,00522
3	0,3	55478	37979	0,0279	0,01120	-0,00534
4	0,2	142482	98617	0,0280	0,01130	-0,00556
5	0,1	714857	503816	0,0280	0,01130	-0,00556

Для сравнительного анализа результатов (по горизонтальному смещению) размер разбиения конечно-

элементной сетки изменялся в пределах от 0,1 до 0,5 м. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Как видно, с уменьшением размера сетки (сгущения) незначительно возрастает числовое значение горизонтального перемещения в верхней и нижней частях сваи (табл. 2, рис. 6, а).

Модель 3. Пространственно-стержневая модель с элементами Rigid

По аналогии с предыдущей моделью массив грунта представлен кубом с размерами $H \times B \times L = 6 \times 6 \times 6$ м. Шаг КЭ сетки составил 0,3 м. Область грунта разбита на 37 251 элемент. Число узлов стыковки – 25 231. Граничные условия грунта приняты аналогичными пространственной модели 2.

В рамках регулярной конечно-элементной сетки стержневой сваи в каждом ее узле установлен плос-

кий веер жестких элементов Rigid, соединяющих сваю с грунтовым основанием. В сравнении с моделью 2 число конечных элементов и узловых точек сократилось до 33 %, а следовательно, сократился и порядок системы разрешающих уравнений. Полученные результаты расчета деформированного состояния подсистемы «свая – грунт» приведены на рис. 7.

В табл. 3 представлен сравнительный анализ численного расчета деформированного состояния модели 3 с шагом разбиения сетки КЭ от 0,1 до 0,5 м.

Результаты численного анализа деформированного состояния по всем расчетным вариантам сведены в табл. 4 и сопоставлены с аналогичными результатами, полученными численно-аналитическими методами расчета, изложенными в [10–15].

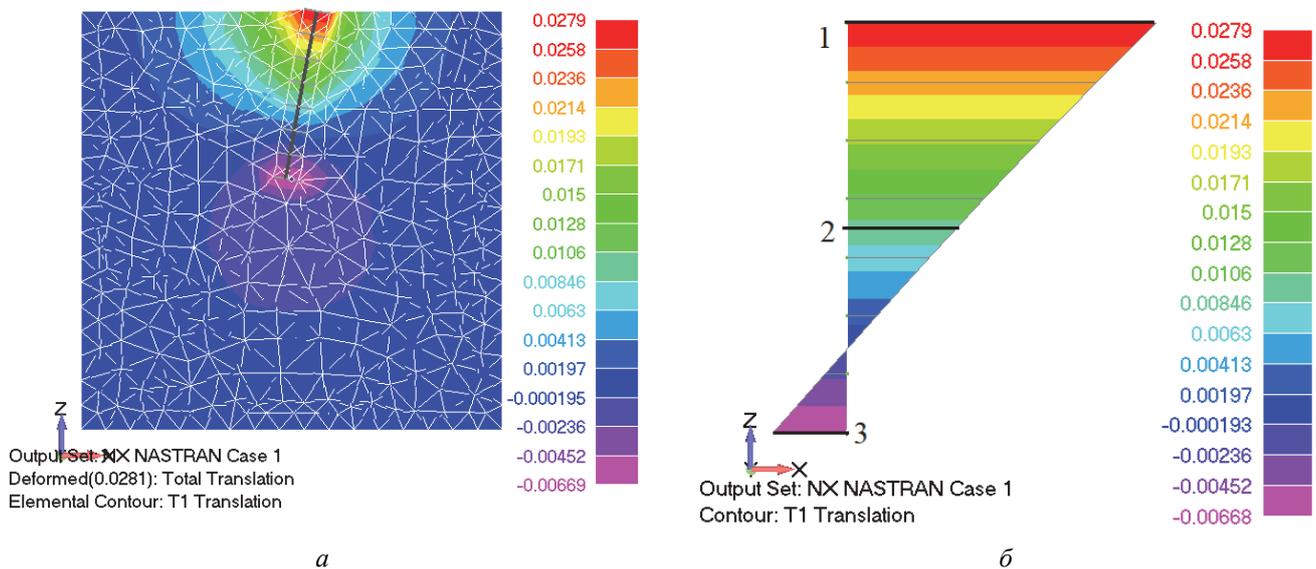


Рис. 7. Результаты расчета пространственно-стержневой модели 3:

а – перемещение грунта V_i узла по оси x в точках $V_1 = 0,0339$ м, $V_2 = 0,0129$ м, $V_3 = -0,00805$ м;

б – перемещение сваи V_i узла по оси x в точках $V_1 = 0,0339$ м, $V_2 = 0,0129$ м, $V_3 = -0,00805$ м

[Figure 7. The results of the calculation of the solid-bar model 3:

а – translation of soil V_i of a node along the x axis at points $V_1 = 0,0339$ м, $V_2 = 0,0129$ м, $V_3 = -0,00805$ м;

б – translation of the pile V_i of a node along the x axis at points $V_1 = 0,0339$ м, $V_2 = 0,0129$ м, $V_3 = -0,00805$ м;]

Таблица 3

Результаты расчета пространственно-стержневой модели 3
[Table 3. The calculation results of the solid-bar model 3]

№ п/п [No.]	Исходные данные модели [Initial data of the model]			Результаты расчета [Calculation results]		
	Размер сетки s , м [Mesh size on solid s , m]	Число узлов [Number of nodes]	Число элементов [Number of elements]	Перемещение V_i , м, узла по оси x в точках [Translation V_i , m, of a node along the x axis at points]		
				1	2	3
1	0,5	11043	7310	0,0273	0,0103	-0,00676
2	0,4	19536	13051	0,0277	0,0105	-0,00666
3	0,3	37251	25231	0,0280	0,0106	-0,00668
4	0,2	89316	61252	0,0280	0,0107	-0,00687
5	0,1	464655	327480	0,0280	0,0107	-0,00687

Сравнительный анализ полученных результатов статического линейного расчета
[Table 4. Comparative analysis of the results of static linear calculation]

№ п/п [No.]	Расчетные варианты моделирования «свая – грунт» [Design models “pile – soil”]	Результаты расчета [Calculation results]					
		Перемещение V_i , м, узла по оси x в точках [Translation V_i , m, of a node along the x axis at points]			Опорные реакции грунта P_i , кН, по оси x в точках [Constrain force P_i , kN, along the x axis at points]		
		V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3
1	Численно-аналитические методы расчета [Numerical and analytical methods of calculation] [15]						
1.1	Численно-аналитические методы [Numerical and analytical methods]	0,02800	0,01100	-0,0039	56,000	88,000	-44,000
2	Метод конечных элементов [Finite element method]						
2.1	Модель 1. Стержневая модель свай с упругими опорами Spring [Model 1. Bar model of piles with discrete elastic supports]	0,02794	0,01103	-0,00394	55,871	88,257	-44,129
2.2	Модель 2. Пространственная модель свай с грунтом [Model 2. The solid model “pile – soil”]	0,02790	0,01120	-0,00534	–	–	–
2.3	Модель 3. Пространственно-стержневая модель с элементами Rigid [Model 3. Solid-bar model with Rigid elements]	0,02800	0,01060	-0,00668	–	–	–

На рис. 8 представлен график сходимости результатов расчета от действия горизонтальной силы $P = 100\,000$ Н, полученный для трех моделей «свая – грунт» с учетом размера разбиения сетки s , м. Результаты численного метода практически подтвердили сходство с аналитическим методом (табл. 4). Если сравнить результаты расчетов моделей 1, 2 и 3 с аналогичными результатами, полученными альтернативными методами [14; 15], то они совпадают с достаточно высокой точностью.

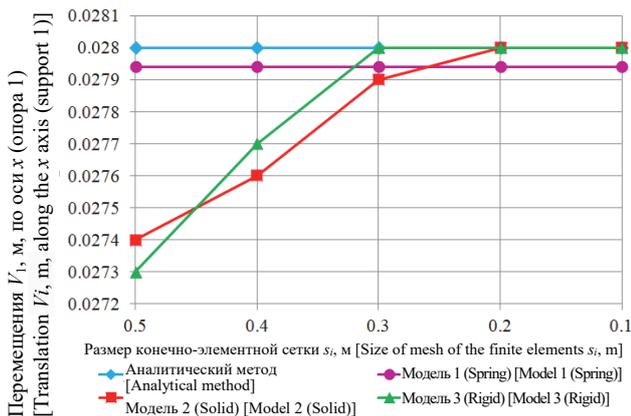


Рис. 8. График сходимости результатов (с точностью до 0,0001 м), полученных численно-аналитическими методами расчета, на примере трех расчетных моделей «свая – грунт» [Figure 8. The graph of convergence of the results obtained by numerical and analytical methods of calculation on the example of three calculation models “pile – soil”]

Отметим ряд особенностей, отражающих специфику формирования и применения расчетных моделей «свая – грунт» и влияющих на анализ результатов расчета.

Модель 1. Стержневая модель свай с дискретными упругими опорами (пружинками)

Преимуществом данной модели является наименьшая трудоемкость в создании геометрической и расчетной моделей, и отсюда – экономия времени на выполнение расчета. Из-за малого числа конечных элементов и узлов время численного анализа и число решаемых уравнений, как и следовало ожидать, оказалось существенно меньше, чем у моделей 2 и 3. Основным недостатком модели 1 является трудоемкий расчет по определению коэффициентов жесткости C_i , кН/м, каждой i -упругой опоры (Spring), выполняемый аналитическими методами. Так, трудоемкость существенно возрастет при заданных гидрогеологических условиях строительной площадки, имеющей сложную схему геологического разреза по слоям и типам грунта. К тому же, в научно-технической литературе коэффициент постели (коэффициент жесткости) грунта C_h , кН/м³, имеет весьма размытые границы, что затрудняет его практический выбор. Результатами анализа модели являются перемещения и деформации свай, изгибающие и крутящие моменты, продольные и поперечные силы, нормальные и касательные напряжения в свае, вызванные кручением, а также реакции грунта, заданные в дискретном виде.

Модель 2. Пространственная модель сваи с грунтом

Преимущество модели 2 заключается в относительной простоте ввода в расчет заданных физико-механических свойств грунта, определяемых по результатам инженерно-геологических изысканий, включая создание точных переходов между слоями различных типов грунта. Однако данная задача является очень трудоемкой на начальной стадии создания геометрической и конечно-элементной пространственных моделей грунтового основания. Отсюда увеличение порядка решаемых алгебраических уравнений за счет большого числа КЭ и существенное увеличение продолжительности численного анализа. Поскольку каждый КЭ расчетной модели подземной части здания имеет по три линейных перемещения в узлах и полилинейную аппроксимацию перемещений, то могут возникнуть сложности при ее стыковке с надземной частью конструкции, конечные элементы которой имеют иную аппроксимацию полей перемещений. Характерным примером может служить стыковка стержневой удерживающей колонны здания с объемной свайей, приводящая к потере точности ряда анализируемых внутренних силовых факторов. Результатами расчетов являются все характеристики НДС, включая перемещения по осям x , y , z , и компоненты тензора напряжений и деформаций.

Модель 3. Пространственно-стержневая модель с элементами Rigid

Модель 3 характерна использованием стержневой сваи, имеющей по шесть узловых степеней свободы, что позволяет стыковать ее с узлами надземной части без потери точности результата. При этом в точках стыковки сохраняется полный набор внутренних силовых факторов, что выгодно отличает ее, например, от модели 2. К тому же модель 3 сохраняет все преимущества развернутого анализа НДС объемного грунтового массива с учетом разнообразных реологических свойств. В данной модели для анализа доступны все характеристики НДС, предусмотренные для стержневого и объемного КЭ.

Заключение

В статье проведено сопоставление трех расчетных конечно-элементных моделей подземной части здания (подсистемы «свая – грунт»), предназначенных для численного анализа статике и динамики большой механической системы «здание – фундамент – основание».

Каждая расчетная модель обладает своими достоинствами и недостатками. Окончательный выбор

зависит от заданных условий задачи, объема исходной информации, знаний и профессионального опыта инженера-конструктора, технических характеристик используемой электронно-вычислительной машины, а также лимита времени, предусмотренного на выполнение всего комплекса инженерных расчетов.

Список литературы

1. Кужахметова Э.Р. Напряженно-деформированное состояние цилиндрично-плитно-вантового (ЦПВ) покрытия здания (сооружения) с различными формами наружного опорного контура // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 95–110. [http:// dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-95-110](http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-95-110)
2. Кужахметова Э.Р. Конструктивные решения расположения ванта в цилиндрично-плитно-вантовом (ЦПВ) покрытии здания (сооружения) // Вестник БГТУ имени В.Г. Шухова. 2019. № 5. С. 77–89. doi: 10.34031/article_5ce292ca24bc23.91006970.
3. Przemieniecki J.S. Matrix Structural Analysis of Structures // AIAA Journal. 1963. Vol. 1. No.1 Pp. 138–147.
4. Meissner C.J. A Multiple Coupling Algorithm for the Stiffness Method of Structural Analysis // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. No. 11. Pp. 2184–2185.
5. Сапожников А.И. Методы контурных и расчетных точек в нелинейных расчетах свайных эстакад, нагруженных горизонтальными нагрузками // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. 1984. № 5. С. 29–30.
6. Кужахметова Э.Р. Расчетное проектирование каркасного здания с учетом обобщенных жесткостей и нагрузок основания и фундамента (часть 1). 2019. № 12. С. 34–36. doi: 10.34031/2071-7318-2019-4-12-34-46.
7. Трофименко Ю.Г., Ободовский А.А. Свайные фундаменты для жилых и промышленных зданий. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Издательство литературы по строительству, 1970. 241 с.
8. СП 24.13330.2011. Свайные фундаменты. Актуализированная редакция СНиП 2.02.03-85 с изм. № 1–3. М.: Министерство регионального развития Российской Федерации, 2011.
9. СП 50-102-2003. Проектирование и устройство свайных фундаментов. М.: Министерство регионального развития Российской Федерации, 2004.
10. Сапожников А.И., Солгалов Ю.В. Расчет свай на горизонтальную нагрузку в нелинейно-деформируемом основании // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1980. № 4. С. 9–11.
11. Сапожников А.И., Абдурахманов А. Методические указания по расчету одноэтажных каркасных сельскохозяйственных зданий на сваях-колоннах. Киев: НИИСК Госстроя СССР, 1979. 41 с.
12. Сапожников А.И., Штанько Л.Ф. Руководство по определению горизонтальной сейсмической нагрузки, действующей на свайные пирсы и набережные. М.: СоюзморНИИпроект, РМС 40-74, 1974. 61 с.

13. Сапожников А.И. Расчет жестких и коротких свай на продольно-поперечные нагрузки: методические указания. Астрахань: АИСИ, 1994. 11 с.
14. Сапожников, А.И., Кужахметова Э.Р. Способы погружения, прочностные и деформационные расчеты свай. Б. и., 2015. 71 с. URL: <https://rucont.ru/efd/314524> (дата обращения: 04.04.2020).
15. Кужахметова Э.Р., Сапожников А.И. Сравнительный анализ работы длинных и коротких свай при горизонтальном нагружении // Строительные материалы, технологии, оборудования XXI века. 2015. № 5–6. С. 30–34.
16. Кужахметова Э.Р. Погружение, расчет и конструирование монолитной железобетонной сваи конической формы // Научное обозрение. Технические науки. 2017. № 2. С. 57–64.
17. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. М.: ДМК Пресс, 2013. 784 с.
18. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. М.: ДМК Пресс, 2003. 448 с. (Серия «Проектирование»).
19. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 540 с.
20. ГОСТ 19.804.1 Сваи забивные железобетонные цельные сплошного квадратного сечения с ненапрягаемой арматурой и поперечным армированием ствола и с напрягаемой арматурой. М.: Издательство стандартов, 1980.
21. СП 63.13330.2011. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 с изменением № 1. М.: Министерство регионального развития Российской Федерации, 2015.
22. СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*. М.: Министерство регионального развития Российской Федерации, 2010.

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-250-260

RESEARCH PAPER

Modeling of a piled foundation in a Femap with NX Nastran

Elvira R. Kuzhakhmetova

Immanuel Kant Baltic Federal University, 14 Aleksandra Nevskogo St, Kaliningrad, 236041, Russian Federation
elja_09@bk.ru

Article history:

Received: April 22, 2020

Revised: June 25, 2020

Accepted: July 12, 2020

Abstract

Relevance. The underground part of the building (foundation and soil) has a significant impact on its stress-strain state and behavior under the influence of operational loads. Therefore, the existing regulatory and technical documentation regulates the design of buildings (structures), taking into account the joint work of their aboveground and underground parts. In practice, such accounting becomes possible on the basis of a comprehensive engineering analysis of the building as a large mechanical system “building – foundation – soil”, which today can be carried out using the finite element method. In the case of pile foundations, the correctness of the result depends largely on the reasonable choice of the design model of the pile-soil subsystem. The article analyzes three design models of piles operating in an array of soil foundation. The first model is discrete. In it, the pile is modeled by bars and is based on elastic supports (Spring) with generalized stiffnesses. Second model – spatial, in which the pile and soil are typed in by volumetric elements (Solid). Third model – spatial-bar or combined, in which the bar pile is embedded in the mesh of the soil mass using a rigid substructure formed by bars of high rigidity. **The aim of the work** – to determine a rational calculation model of the “pile – soil” subsystem, which allows, on the one hand, to reduce the general order of the system of resolving equations, and, on the other hand, to maintain the accuracy of the assessment of the stress-strain state of the calculation model of “pile – soil” and the building as a whole. **Materials and methods.** The numerical results of the analysis of the pile foundation statics using the three “pile – soil” calculation models were performed in the CAE software package – the Femap with NX Nastran class, which implements the finite element method. **Results.** Comparative-numerical analysis of the stress-strain state of the “pile foundation – soil” subsystem made it possible to determine the advantages, disadvantages, and also the areas of rational use of bar, spatial combined calculation models. In the next articles, it is planned to consider the calculation of piles for vertical loads, as well as a comparative analysis of numerical results with experimental data (in the laboratory or in field conditions) for horizontal and vertical effects.

Keywords: pile, pile foundation, soil, discrete model of pile with soil, spatial model of pile with soil, bar model, volumetric model, soil mass, elastic supports

For citation

Kuzhakhmetova E.R. Modeling of a piled foundation in a Femap with NX Nastran. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):250–260. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-250-260> (In Russ.)

Elvira R. Kuzhakhmetova, postgraduate student, senior lecturer of the Department of Engineering Science and Technical Systems, eLIBRARY SPIN-code: 1949-1140, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0907-786X>

References

1. Kuzhakhmetova E.R. Stress-strain state cylinder-plate-cable-stayed roof buildings (structures) with various forms of external support contour. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16 (2):95–110. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-95-110> (In Russ.)
2. Kuzhakhmetova E.R. Constructive solutions of cable location in cylinder-plate-cable-stayed roof of building (structures). *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2019; (5):77–89. doi: 10.34031/article_5ce292ca24bc23.91006970. (In Russ.)
3. Przemieniecki J.S. Matrix Structural Analysis of Substructures. *AIAA Journal*. 1963;1(1):138–147. <https://doi.org/10.2514/3.1483>
4. Meissner C.J. A Multiple Coupling Algorithm for the Stiffness Method of Structural Analysis. *AIAA Journal*. 1968;6(11):2184–2185. <https://doi.org/10.2514/3.4954>
5. Sapozhnikov A.I. Metody konturnykh i raschetnykh tochek v nelinejnykh raschetah svajnykh estakad, zagruzhennykh gorizontálnymi nagruzkami [Methods of contour and design points in nonlinear calculations of pile racks loaded with horizontal loads]. *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Stroitel'stvo i arhitektura [News of higher educational institutions. Construction and architecture]*. 1984;(5):29–30. (In Russ.)
6. Kuzhakhmetova E.R. Numerical design of frame buildings taking into account the generalized stiffness and load of soil and foundation (part 1). *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2019;(12):4–36. doi: 10.34031/2071-7318-2019-4-12-34-46. (In Russ.)
7. Trofimenkov Yu.G., Obodovskiy A.A. *Svaynyye fundamenty dlya zhilykh i promyshlennykh zdaniy [Pile foundations for residential and industrial buildings]*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1970. (In Russ.)
8. SP 24.13330.2011. *Svaynyye fundamenty. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 2.02.03-85 [Pile foundations. Updated edition of SNIp 2.02.03-85]*. Moscow; 2011. (In Russ.)
9. SP 50-102-2003. *Proyektirovaniye i ustroystvo svaynykh fundamentov [Design and construction of pile foundations]*. Moscow; 2004. (In Russ.)
10. Sapozhnikov A.I., Solgalov Yu.V. Raschet svaj na gorizontálnuyu nagruzku v nelinejno-deformiruemom osnovanii [Calculation of piles for horizontal load in a nonlinearly deformable foundation]. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov [Soil Mechanics and Foundation Engineering]*. 1980;(4):9–11.
11. Sapozhnikov A.I., Abdurakhmanov A. *Metodicheskie ukazaniya po raschetu odnoetazhnykh karkasnykh sel'skokozyajstvennykh zdaniy na svayah-kolonnah [Methodical instructions for the calculation of one-story frame agricultural buildings on stilts-columns]*. Kiev; 1979. (In Russ.)
12. Sapozhnikov A.I., Shtanko L.F. *Rukovodstvo po opredeleniyu gorizontál'noy seymicheskoy nagruzki, deistvuyushchey na svaynyye pirsy I naberezhnyye [Guidance on the determination of horizontal seismic load acting on pile piers and embankments]*. Moscow; 1974. P. 40–74. (In Russ.)
13. Sapozhnikov A.I. Raschet zhestkih i korotkiy svaj na prodol'no-poperechnye nagruzki [Calculation of hard and short piles for longitudinal-transverse loads]: methodical instructions. Astrakhan; 1994. (In Russ.)
14. Sapozhnikov A.I. Kuzhakhmetova E.R. Sposoby pogruzheniya, prochnostnyye i deformatsionnyye raschoty svay [Immersion methods, strength and deformation calculations of piles]. 2015. Available from: <https://rucont.ru/efd/314524> (accessed: 04.04.2020). (In Russ.)
15. Kuzhakhmetova E.R., Sapozhnikov A.I. Comparative analysis of long and short piles with horizontal uploading. *Building materials, equipment, technologies of the XXI century*. 2015;(5–6):30–34. (In Russ.)
16. Kuzhakhmetova E.R. Dipping, calculation and construction of the monolithic reinforced concrete pile of the conical form. *Scientific review. Technical sciences*. 2017;(2): 57–64. (In Russ.)
17. Rychkov S.P. *Modelirovaniye konstruksiy v srede Femap with NX Nastran [Structural modeling in Femap with NX Nastran]*. Moscow: DMK Press; 2013. (In Russ.)
18. Shimkovich D.G. *Raschet konstruksiy v MSC/NASTRAN for Windows [Structural Analysis in MSC/NASTRAN for Windows]*. Moscow: DMK Press; 2003. (In Russ.)
19. Zienkiewicz O.C. *The finite element method in engineering science*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.)
20. GOST 19.804.1 *Svai zabivnyye zhelezobetonnyye tsel'nyye sploshnogo kvadratnogo secheniya s nenapryagayemoy armaturoy i poperechnym armirovaniyem stvola i s napryagayemoy armaturoy [Reinforced concretedriver square piles. Structure and dimensions]*. Moscow: Standartinform Publ.; 1980. (In Russ.)
21. SP 63.13330.2011. *Betonnyye i zhelezobetonnyye konstruksii. Osnovnyye polozheniya. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 52-01-2003 s izmeneniyem No. 1 [Concrete and reinforced concrete structures. Fundamental requirements. Updated edition of SNIp 52-01-2003 with amendment No. 1]*. Moscow; 2015. (In Russ.)
22. SP 22.13330.2011. *Osnovaniya zdaniy i sooruzheniy. Aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 2.02.01-83* [Soil bases of buildings and structures. Updated edition of SNIp 2.02.01-83*]*. Moscow; 2010. (In Russ.)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ NUMERICAL METHODS OF STRUCTURES' ANALYSIS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270
УДК 624.824

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Выбор математических моделей грунтов в статических и сейсмических расчетах грунтовых плотин

Ю.П. Ляпичев

АО «Институт “Гидропроект”», Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 2,
Международная комиссия по большим плотинам (ICOLD), Французская Республика, 75016, Париж, Avenue Kleber, 61
lyapichev@mail.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 30 мая 2020 г.
Доработана: 5 июля 2020 г.
Принята к публикации: 17 июля 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Численные статические и сейсмические (динамические) расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) грунтовых плотин обычно выполняются с применением различных вычислительных программ, в которых используются разные, часто сложные математические модели грунтов. Однако правильный выбор этих моделей остается за пользователем программы, обычно не имеющим достаточного опыта, поэтому результаты расчетов часто бывают непонятными и ошибочными. Таким образом, **цели настоящего исследования** – разработка рекомендаций по выбору достоверных математических моделей грунтов в численных расчетах грунтовых плотин и их сравнение с наиболее распространенными моделями в современной практике применения. **Методы.** Глубокий сравнительный анализ многих моделей грунтов проводился по результатам их применения в расчетах грунтовых плотинах во время работы в Комитете СИГБ (ICOLD) по численным расчетам и проектированию плотин. **Результаты.** На основе оценки достоверности моделей грунтов получены рекомендации по выбору и применению моделей в численных расчетах НДС грунтовых плотин при статических и сейсмических воздействиях; определены взаимодействия между результатами расчетов и данными мониторинга поведения плотин.

Ключевые слова: грунтовые плотины, численные расчеты, математические модели грунтов, напряженно-деформированное состояние, оценка достоверности моделей грунтов

Для цитирования

Ляпичев Ю.П. Выбор математических моделей грунтов в статических и сейсмических расчетах грунтовых плотин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 261–270. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270>

Введение

Будучи членом комитета СИГБ (ICOLD) в 1993–2013 гг. по численным расчетам и проектированию плотин, нам довелось отвечать за подготовку больших разделов двух Бюллетеней СИГБ, по-

священных грунтовым плотинам и математическим моделям грунтов [1–2].

В настоящей статье рассматриваются математические модели грунтов, применяемые в статических и сейсмических (динамических) численных расчетах грунтовых плотин. Динамический расчет означает, что сейсмическое воздействие используется в виде записанных или синтетических акселерограмм землетрясений.

Любая численная модель сооружения представляет собой упрощенное представление реальной физической системы, отклонениями от реальности которой являются: 1) упрощение геометрии (конечные

Ляпичев Юрий Петрович, эксперт АО «Институт “Гидропроект”» по зарубежным проектам, член Комитета СИГБ по компьютерным аспектам расчета и проектирования плотин, доктор технических наук, профессор, eLIBRARY SPIN-код: 3096-6362, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3750-3165>

© Ляпичев Ю.П., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

границы, упущенные детали); 2) упрощение свойств материалов в принятых определяющих законах; 3) упрощение пространства изменений поведения материалов: например, в модели изменения в пространстве перемещений необходимо следовать функциям формы (со степенью 1 или 2), которые по сути лишь приближения, часто слишком грубые; 4) схематизация распределения нагрузок в пространстве и во времени.

Таким образом, результаты численных расчетов, которые обеспечивают применение численной модели, могут быть достаточно далекими от того, что происходит в реальности, в зависимости от принятых упрощений в расчетах. Сама численная модель не дает оценки собственного уровня неточности по отношению к реальной моделируемой системе.

1. Сравнение численных расчетов НДС различных грунтовых плотин при сейсмических и статических воздействиях

Выбор методов численных расчетов при сейсмических (динамических) воздействиях

При сейсмическом воздействии для определения реакции грунтовых плотин используются более сложные методы, чем при статическом. Реакция плотины зависит от нагрузок, которые она получает от основания и водохранилища (верхнего бьефа – ВБ), и изменения механических характеристик материалов, вызванных сейсмическим воздействием. Простые методы, такие как линейный эквивалентный метод Сиды (ЛЭМС), модифицируют модуль сдвига и коэффициент затухания колебаний как функцию искривления (деформации сдвига). ЛЭМС прямо не оценивает сейсмически возникающее давление в поровой воде грунта, хотя оно играет очень важную роль, когда грунты не плотные и могут уплотняться при землетрясении. Современные динамические методы учитывают поведение поровой воды при и после землетрясения. Они используют реологические законы, описывающие дилатансию (разуплотнение при сдвиге) грунта, эффекты его размягчения, деформационное упрочнение и др.

В простых динамических задачах необратимые перемещения грунтовой плотины рассчитываются по методу Ньюмарка [3]. Это включает определение предельного горизонтального ускорения колебаний, которое соответствует коэффициенту запаса устойчивости плотины 1,0 для заданной круговой или многоугольной поверхности скольжения. Согласно СП39.13330.2012 коэффициент запаса устойчивости грунтовой плотины превышает 1,0 с учетом класса плотины, коэффициента условий рабо-

ты и сочетания нагрузок. Затем, используя акселерограмму землетрясения в центре тяжести неустойчивой зоны плотины, дважды интегрируется предельное горизонтальное ускорение для получения горизонтального необратимого перемещения. В сложных динамических задачах метод Ньюмарка может использоваться для обеспечения неразрывности этих задач со стандартной инженерной практикой.

Методы расчета устойчивости грунтовых плотин являются простым способом использования исходных механических параметров грунта для определения коэффициента запаса устойчивости плотины. Однако опытный инженер по механике грунтов получит максимальную отдачу от расчетов, используя сложные численные модели, которые будут более точными инструментами.

Выбор типов моделей грунтов и методов их испытаний

Численные расчеты, проведенные с помощью линейной определяющей модели грунта, являются неполными, если не учтены сейсмические нагрузки низкой интенсивности. Поэтому следует применять связанные или несвязанные расчеты с нелинейными определяющими моделями с использованием пошагового интегрирования или по крайней мере эквивалентного линейного метода, последний является адекватным для оценки максимального ускорения, НДС, но не способен оценить остаточное НДС после сейсмического воздействия.

В динамических расчетах, как несвязанных, так и связанных с нелинейными определяющими моделями грунтов, основная трудность заключается в использовании этих моделей, способных достоверно описывать при динамических циклических нагрузках следующие аспекты: а) реакцию НДС на соответствующее обратное преобразование модели нагрузки; многие модели усиливают гистерезис колебаний по сравнению с данными экспериментов; б) рассеивание колебаний в системе «плотина – основание», вызванное пластическими деформациями и вязкими явлениями; в) явления циклической деградации (например, изменчивость НДС с ростом количества циклов); г) фазовые эффекты взаимосвязи (достоверный прогноз избыточного порового давления воды имеет определяющее значение для прогноза максимального ускорения и оценки постсейсмических эффектов). Поэтому нельзя считать, что связанные расчеты с использованием упруго-пластичных моделей грунтов являются более надежными, чем несвязанные, учитывая, что последние имеют критерии прогноза порового давления. Граница возможностей этого моделирования представлена трехфазной средой с

возможностью описания поведения частично водонасыщенных грунтов.

Если плотина находится в высокосейсмичном районе, свойства грунтов обычно определяются с помощью специальных экспериментов, таких как полевые динамические (на плотине и основании) и лабораторные (грунтов плотины и основания) испытания, обеспечивающих получение параметров деформации с требуемой точностью.

Менее надежным является прогноз параметров деформации, используемых в статическом расчете. Эти параметры сложно получить из полевых геотехнических испытаний, и они имеют низкую надежность при получении из лабораторных испытаний (например, трехосных). Относительно затухания колебаний, учитываемого в линейном эквивалентном и нелинейном расчетах, то общие оценки этого параметра вызывают высокий разброс результатов расчета.

Численные расчеты земляных плотин

Уровень сложности динамического расчета для прогноза поведения земляных плотин при сейсмических воздействиях выше относительно статических расчетов. Снижение надежности прогнозов объясняется повышенной сложностью определения условий нагружения в расчете и неопределенностями ряда факторов, среди которых наиболее важными являются: а) трудность определения и моделирования отражающих/поглощающих границ расчетной области; б) взаимодействие плотины с грунтом основания: в случае его сжимаемости это сильно меняет сейсмическую реакцию плотины по сравнению с жестким грунтом, необходимо обнаружить в аллювиальном основании прослойки с низкой плотностью и механическими параметрами, но трудно получить эти параметры; в) зависимость механических свойств грунта, определяющих сейсмическую реакцию плотины, от ее статического НДС.

При оценке реакции земляной плотины при и после сейсмического воздействия расчет ее НДС составляет основу любого прогноза. Общая устойчивость плотины, возможность разжижения грунта, поведение плотины после сейсмического воздействия, сосредоточенная фильтрация, гидравлический разрыв глинистого ядра и т. п. могут определяться и в псевдодинамических расчетах. С другой стороны, даже если выполняются псевдо-статические расчеты, они не могут достоверно учитывать такие важные явления, как эффект усиления амплитуды колебаний, остаточное избыточное поровое давление воды после сейсмического воздействия, разжижение грунта, перераспределение напряжений. Однако взаимодействие земляной плотины с ВБ существенно не изменяет частотную реакцию плотины.

Численные расчеты

каменно-земляных плотин с глинистым ядром

Для этих плотин с водонепроницаемым глинистым ядром только ядро и дренажи могут быть смоделированы с помощью реологического закона. Механическое поведение дренажей не является важным аспектом, поскольку они узкие, но их гидравлическое поведение следует учесть, так как это определяет граничные условия поведения воды в ядре. Продвинутое моделирование обеспечивает помощь в анализе риска гидравлического разрыва ядра путем расчета главного минимального напряжения и порового давления воды. Арочные эффекты в ядре (в его верховой или низовой грани), когда боковые зоны слабо деформируемые, или от берега к берегу в каньонах, или сочетание того и другого могут быть проанализированы с помощью этих методов. В настоящее время не существует адекватного закона поведения ядра, описывающего влияние наполнения ВБ на верховую зону плотины. Эта зона оседает при наполнении ВБ, хотя она насыщена водой и поэтому в ней низкие межблочные напряжения.

Численные расчеты каменно-насыпных плотин с непроницаемым экраном

В каменно-насыпной плотине с непроницаемым экраном вода ВБ обычно не проникает в плотину. Если вода, просачивающаяся из боковых примыканий плотины, и вода ВБ, поступающая в обход экрана, и/или грунтовые воды, поступающие с берегов, удовлетворительно контролируются цементационными и дренажными завесами, плотина может считаться неводонасыщенной. Проблема, которую следует решить, заключается в численных расчетах поведения экрана при статических и динамических нагрузках. Следовательно, принципиально, чтобы численная модель могла использовать реологический закон с деформационным упрочнением, который дает адекватное моделирование поведения каменной насыпи как функции ее напряженного состояния. Модель должна моделировать этап строительства плотины, так как закон деформационного упрочнения описывает историю нагружения материала плотины.

2. Классификация и выбор моделей грунтов в численных расчетах

Нелинейно-упругие модели

Этот тип моделей грунтов является наиболее простым и широко применяемым. Упругие модули (модуль Юнга, E , и коэффициент Пуассона, μ , или модули объемной деформации, B , и сдвига, G) принимаются нелинейно зависимыми от напряже-

ний. Эти модели включают до девяти параметров, легко определяемых из стандартных трехосных испытаний грунтов. Самая известная среди них – модель Дункана – Чанга [4], которая часто используется в статических расчетах грунтовых плотин, особенно каменно-насыпных с глинистыми ядрами, диафрагмами из асфальтобетона и экранами из железобетона.

Главным недостатком этих моделей является то, что все деформации грунта принимаются упругими и направление приращения напряжений зависит от направления приращения деформаций. Однако это допущение несправедливо для грунтовых плотин, в которых во время наполнения и опорожнения ВБ происходит поворот осей главных напряжений и изменение направления нагрузки. Таким образом, эти модели не учитывают влияние пути нагружения и не могут моделировать важный эффект дилатансии (разуплотнения при сдвиге) уплотненных грунтов и их нелинейное поведение при разгрузке и повторной нагрузке. Поэтому эти модели лучше всего использовать для расчетов одноосных земляных плотин из несвязных грунтов.

Упругие идеально пластичные модели

Среди них наиболее упрощенные модели – упругие идеально пластичные модели с критериями прочности Мора – Кулона, Мизеса и Друкера – Прагера. Известно, что эти приближения дают плохие результаты и не имеют реальных преимуществ в численных расчетах грунтовых плотин. Дилатансия несвязных грунтов контролирует предельные нагрузки грунтовых плотин. Тем не менее прогноз, выполненный с критериями прочности Мора – Кулона с ассоциированным правилом течения, нереально высокий.

Упруго-пластичные модели с упрочнением (модели УПУ)

Изотропные, кинематические и изотропно-кинематические правила упрочнения вследствие пластических объемных и сдвиговых деформаций приводят к моделям разной сложности. Модель критического состояния (КС или CS), разработанная Роско, Шофилдом и Берландом [5–6], модель бесконечного числа поверхностей (БЧП или INS), разработанная Мрозом, Норрисом и Зенкевичем [7], модели Лейда, Превоста и Зарецкого [8–11] – ряд примеров в этой группе моделей.

На данном этапе разработки моделей только модели УПУ могут достоверно описывать поведение грунтов. Список этих моделей с диапазоном их применимости, типов нагрузок и формулиров-

ки моделей приведены в нашей статье [12]. Хорошо разработанная модель КС (модифицированная модель Кэм-Клей) является основой около 30 моделей, предложенных для монотонных и циклических нагрузок. В формулировках моделей указаны правила течения (связанные или несвязанные) и правила упрочнения (изотропные или кинематические), так как это оказывает большое влияние на компьютерную реализацию моделей. Модель КС, разработанная для нормально уплотненных (Н-У или N-C) и слабо переуплотненных (коэффициент переуплотнения не более 2,0) глин, представляет собой простую модель с 4–5 параметрами и способна качественно предсказать основные аспекты поведения грунтов.

Далее рассмотрены наиболее распространенные в практике проектирования грунтовых плотин математические модели Кэм-Клей, применяемые в статических расчетах этих плотин.

Модифицированная модель Кэм-Клей (МКК)

Модель МКК была первоначально разработана для трехосных условий нагрузки. Экспериментальные измерения на мягких глинах послужили основой для развития конститутивной модели, выражающей изменение коэффициента пористости e (объемная деформация ε_v) в зависимости от логарифма эффективной длины напряжения σ_m^{eff} , как видно двух графиков на рис. 1. Оба графика связаны следующим образом:

$$\lambda^* = \lambda / (1 + e); k^* = k / (1 + e),$$

где k – наклон набухания; λ – наклон нормали уплотнения; e – текущий коэффициент пористости.

Первый график состоит из нормали уплотнения (NCL) и ряда кривых набухания. При первичной загрузке грунт деформируется вниз NCL. Далее он уплотняется до определенного напряжения (давления предварительного уплотнения p_c) и разгружается до текущего набухания. Затем после перезагрузки грунта на первых этапах он деформируется к кривой набухания и достигает напряженного состояния (параметра p_c), который был до разгрузки. В этот момент грунт начинает деформироваться до NLC (первичная нагрузка – кривая сжатия).

Параметры k и λ определяются по формулам $k = 1,3C_c(1 - \nu) / (1 + \nu)$; $\lambda = C_s / 2,3$; где C_c – коэффициент одномерной сжимаемости; C_s – коэффициент одномерного расширения; k – угловой коэффициент линии критического состояния; λ – угловой коэффициент нормали уплотнения; ν – коэффициент Пуассона.

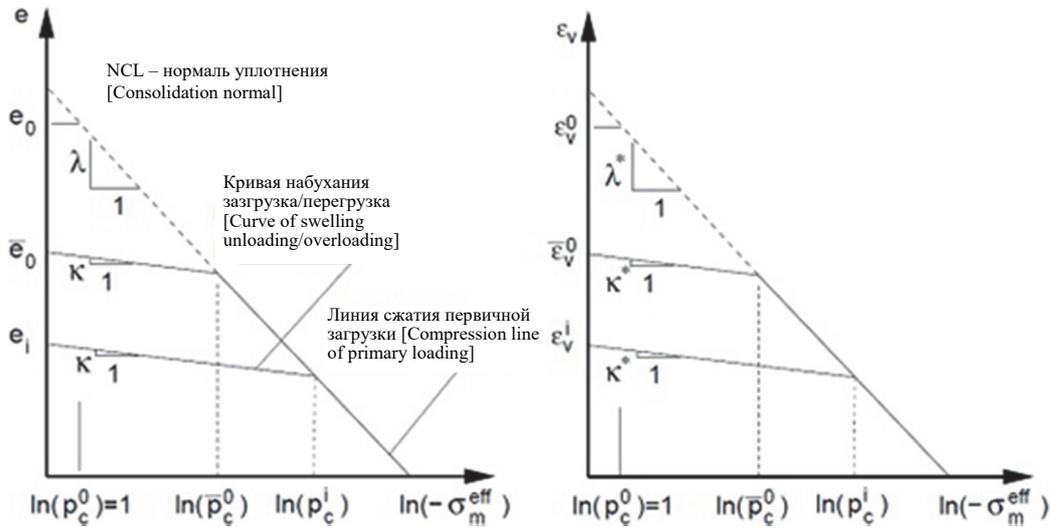


Рис. 1. Реакция грунта при изотропном уплотнении (основополагающая модель)
 [Figure 1. Soil response for the isotropic consolidation (fundamental model)]

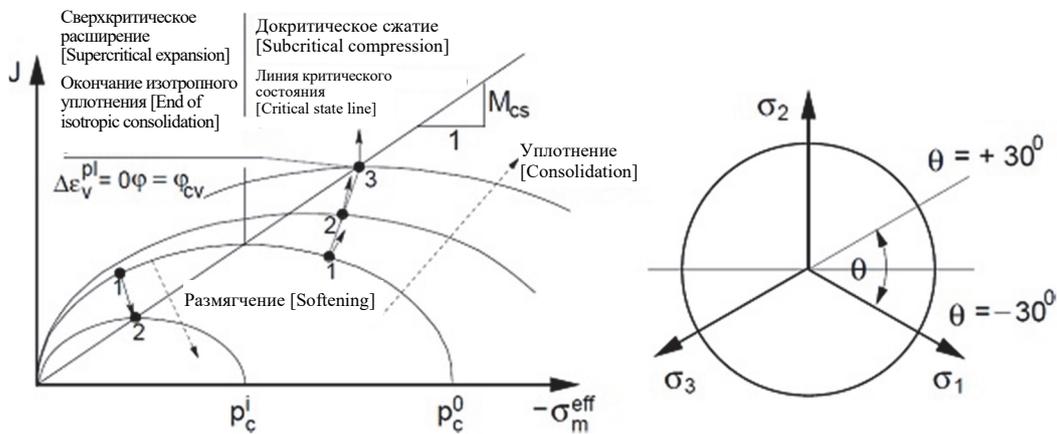


Рис. 2. Отображение функции текучести в меридиональных и девиаторных плоскостях
 [Figure 2. Representation of the yield function in meridional and deviatoric planes]

Поверхность текучести является гладкой без возможности развития растягивающих напряжений. Модель МКК позволяет, в отличие от других моделей, прямое моделирование деформационного упрочнения или размягчения для нормально уплотненных или переуплотненных грунтов, учитывает нелинейную зависимость объемной деформации грунта от эффективного среднего напряжения и предельные условия идеальной пластичности. При использовании модели МКК грунт нагружается и при сдвиге в нем могут возникнуть пластические деформации (на рис. 2 точки 1 и 2 для не затвердевания и размягчения соответственно) до достижения критического состояния (точки 3 и 2 для затвердевания и размягчения соответственно). Далее грунт деформируется при сдвиге при условии идеальной пластичности без изменения e и σ_m^{eff} . После разгрузки предполагается линейная (упругая) деформация грунта.

Развитие поверхности текучести (упрочнение/размягчение) определяется текущим значением давления предварительного уплотнения p_c : $P_c^{i+1} = P_c^i \exp [-\Delta \varepsilon_v^{\text{pl}} / (\lambda^* - k^*)]$, где P_c^{i+1} – текущее давление предварительного уплотнения; $\Delta \varepsilon_v^{\text{pl}}$ – прирост объемной пластической деформации.

Помимо параметров κ и λ , собственного веса грунта и коэффициента Пуассона, модель МКК использует следующие три параметра: M_{cs} – наклон линии критического состояния; OCR – коэффициент переуплотнения; e_0 – начальный коэффициент пористости.

Наклон линии критического состояния M_{cs} определяется из выражений $M_{cs}^{+30^\circ}(\varphi_{cv}) = (2\sqrt{3} \sin \varphi_{cv}) / (3 - \sin \varphi_{cv})$; $M_{cs}^{-30^\circ}(\varphi_{cv}) = (2\sqrt{3} \sin \varphi_{cv}) / (3 + \sin \varphi_{cv})$, где первая формула относится к трехосному сжатию, вторая – к трехосному расширению; φ_{cv} – угол внутреннего трения грунта, соответствующий его критическому состоянию.

Обобщенная модель Кэм-Клей (ОКК)

Эта модель является усовершенствованием модели МКК при моделировании грунта в сверхкритической области (рис. 3), где условие разрушения следует моделям Мора – Кулона, Друкера – Прагера и модифицированной модели Мора – Кулона (ММК). В отличие от модели МКК (штриховая линия на рис. 3), проекция ОКК на девиатор-

ную плоскость имеет тот же вид, что и ММК. Проекция модели МКК и модели Друкера – Прагера имеет вид окружности. В докритической области поведение моделей МКК и ОКК идентично. При разгрузке предполагается линейная реакция грунта.

Параметры, которые нужно задавать, применяя ОКК, аналогичны параметрам МКК.

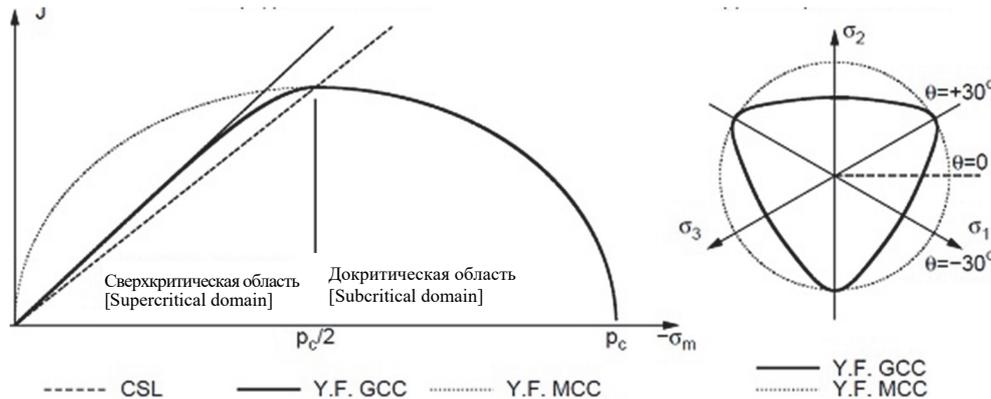


Рис. 3. Проекция области пластичности МКК и ОКК на меридианную и девиаторическую плоскости:
 ---- CSL – линия критического состояния; --- Y.F. GCC – поверхность текучести в обобщенной модели Кэм-Клей (ОКК);
 Y.F. MCC – поверхность текучести в модифицированной модели Кэм-Клей (МКК)
 [Figure 3. Plasticity projection of MCC and GCC on meridian and deviatoric planes:
 ---- CSL – critical state line; --- Y.F. GCC – yield surface in generalized Cam Clay Model (GCC);
 Y.F. MCC – yield surface in modified Cam Clay Model (MCC)]

Достоверность численных расчетов грунтовых плотин

Обобщим проблемы грунтовых плотин, которые пока не могут быть решены путем математического моделирования (индексы достоверности **RI. 3 и 4** подчеркнуты).

1. Внутренняя суффозия при строительстве, первом наполнении водохранилища и эксплуатации (статическое и постсейсмическое поведение, **RI = 4**).
2. Гидравлический разрыв глинистого ядра при первом наполнении водохранилища и эксплуатации (статическое и постсейсмическое поведение, **RI = 3**).

3. Оценка НДС при строительстве, первом наполнении водохранилища и эксплуатации (динамическое поведение, **RI = 3**).
4. Оценка общей устойчивости примыканий и откосов при строительстве, первом наполнении водохранилища и эксплуатации (динамическое поведение, **RI = 3**).
5. Разжижение грунта основания при строительстве, первом наполнении водохранилища и эксплуатации (динамическое поведение, **RI = 3**).
6. Постсейсмическая фильтрация при строительстве, первом наполнении водохранилища и эксплуатации (динамическое поведение, **RI = 3**).

Таблица 1

Достоверность численных расчетов грунтовых плотин: статическое поведение

Проблемы безопасности плотины	Элементы системы «плотина – основание – водохранилище»	Индексы достоверности, RI		
		Строительство	Наполнение ВВ	Эксплуатация
		Тип плотины: a, b, c, d, e	Тип плотины: a, b, c, d, e	Тип плотины: a, b, c, d, e
НДС (смещения, деформации, напряжения)	Тело плотины; основание	RI = 2	a, b, c, d: RI = 2 ; e: RI = 1	RI = 1
		RI = 2	RI = 2	RI = 2
Общая устойчивость плотины	Тело плотины; примыкания, откосы	RI = 1	RI = 1	RI = 1
		RI = 2	RI = 2	RI = 2

Проблемы безопасности плотины	Элементы системы «плотина – основание – водохранилище»	Индексы достоверности, RI		
		Строительство	Наполнение ВБ	Эксплуатация
		Тип плотины: <i>a, b, c, d, e</i>	Тип плотины: <i>a, b, c, d, e</i>	Тип плотины: <i>a, b, c, d, e</i>
Фильтрация в плотине и основании	Тело плотины; основание	$RI = 2$	$RI = 2$ $RI = 2$	$RI = 1$ $RI = 2$
Внутренняя суффозия грунта	Тело плотины; основание	$RI = 4$	$RI = 4$ $RI = 4$	$RI = 4$ $RI = 4$
Гидравлический разрыв глинистых элементов	Тело плотины; основание	$RI = 3$	$a, b, d: RI = 3$ $RI = 3$	$a, b, d: RI = 3$ $RI = 3$
Статическое разжижение грунта	Основание плотины	$RI = 2$	$RI = 2$	$RI = 2$
Растворение грунта при фильтрации	Основание плотины	$RI = 4$	$RI = 4$	$RI = 4$

Примечания. Индексы RI (1, 2, 3, 4) даны в матрице $[i, j]$, $i = 1, \dots, 12$ – число рядов, где рассмотрена проблема; $j = 1, \dots, 3$ – число столбцов, где даны периоды службы плотины.

Типы грунтовых плотин: a – однородная плотина; b – зонированная плотина; c – плотина с негрунтовым экраном или диафрагмой; d – зонированная каменно-земляная плотина; e – каменно-насыпная плотина с негрунтовым экраном или диафрагмой.

Table 1

Reliability of numerical analyses of embankment dams: static behavior

Problems of dam safety	Elements of system “dam – foundation – reservoir “	Indices of reliability, RI		
		Construction	Filling of reservoir	Operation
		Type of dam: <i>a, b, c, d, e</i>	Type of dam: <i>a, b, c, d, e</i>	Type of dam: <i>a, b, c, d, e</i>
Stress-strain state (displacements, deformations, stresses)	Dam body; foundation	$RI = 2$	$a, b, c, d: RI = 2; e: RI = 1$	$RI = 1$
		$RI = 2$	$RI = 2$	$RI = 2$
General stability of dam	Dam body; abutments, slopes	$RI = 1$	$RI = 1$	$RI = 1$
		$RI = 2$	$RI = 2$	$RI = 2$
Seepage in dam and foundation	Dam body; foundation	$RI = 2$	$RI = 2$	$RI = 1$
		$RI = 2$	$RI = 2$	$RI = 2$
Inner piping of soil	Dam body; foundation	$RI = 4$	$RI = 4$	$RI = 4$
		$RI = 4$	$RI = 4$	$RI = 4$
Hydraulic fracturing of clay elements	Dam body; foundation	$RI = 3$	$a, b, d: RI = 3$	$a, b, d: RI = 3$
		$RI = 3$	$RI = 3$	$RI = 3$
Static liquefaction of soil	Dam foundation	$RI = 2$	$RI = 2$	$RI = 2$
Dilution of soil during seepage	Dam foundation	$RI = 4$	$RI = 4$	$RI = 4$

Notes. Indices RI (1, 2, 3, 4) are given in matrix $[i, j]$, $i = 1, \dots, 12$ – number of rows, where problem is considered; $j = 1, \dots, 3$ – number of columns, where periods of dam service are given.

Types of embankment dams: a – homogeneous dam; b – zoned dam; c – dam with non-soil face or diaphragm; d – rockfill dam with clay core; e – rockfill dam with non-soil face or diaphragm.

Таблица 2

Достоверность численных расчетов грунтовых плотин: динамическое поведение

Проблемы безопасности плотин	Элементы системы «плотина – основание – водохранилище»	Индексы достоверности, <i>RI</i>		
		<i>Строительство</i>	<i>Наполнение ВБ</i>	<i>Эксплуатация</i>
		Тип плотины: <i>a, b, c, d, e</i>	Тип плотины: <i>a, b, c, d, e</i>	Тип плотины: <i>a, b, c, d, e</i>
НДС (смещения, деформации, напряжения)	Тело плотины; основание	<i>RI = 2</i>	<i>a, b, c, d: RI = 2; e: RI = 1</i>	<i>RI = 1</i>
		<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>
Общая устойчивость плотины	Тело плотины; примыкания, откосы	<i>RI = 1</i>	<i>RI = 1</i>	<i>RI = 1</i>
		<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>
Фильтрация в плотине и основании	Тело плотины; основание	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 1</i>
		<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>
Внутренняя суффозия грунта	Тело плотины; основание	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>
		<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>
Гидравлический разрыв глинистых элементов	Тело плотины; основание	<i>RI = 3</i>	<i>a, b, d: RI = 3</i>	<i>a, b, d: RI = 3</i>
		<i>RI = 3</i>	<i>RI = 3</i>	<i>RI = 3</i>
Статическое разжижение грунта	Основание плотины	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>
Растворение грунта при фильтрации	Основание плотины	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>

Примечания к табл. 2 аналогичны примечаниям к табл. 1.

Table 2

Reliability of numerical analyses of embankment dams: dynamic behavior

Problems of dam safety	Elements of system “dam – foundation – reservoir”	Indices of reliability, <i>RI</i>		
		<i>Construction</i>	<i>Filling of reservoir</i>	<i>Operation</i>
		Type of dam: <i>a, b, c, d, e</i>	Type of dam: <i>a, b, c, d, e</i>	Type of dam: <i>a, b, c, d, e</i>
Stress-strain state (displacements, deformations, stresses)	Dam body; foundation	<i>RI = 2</i>	<i>a, b, c, d: RI = 2; e: RI = 1</i>	<i>RI = 1</i>
		<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>
General stability of dam	Dam body; abutments, slopes	<i>RI = 1</i>	<i>RI = 1</i>	<i>RI = 1</i>
		<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>
Seepage in dam and foundation	Dam body; foundation	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 1</i>
		<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>
Inner piping of soil	Dam body; foundation	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>
		<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>
Hydraulic fracturing of clay elements	Dam body; foundation	<i>RI = 3</i>	<i>a, b, d: RI = 3</i>	<i>a, b, d: RI = 3</i>
		<i>RI = 3</i>	<i>RI = 3</i>	<i>RI = 3</i>
Static liquefaction of soil	Dam foundation	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>	<i>RI = 2</i>
Dilution of soil during seepage	Dam foundation	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>	<i>RI = 4</i>

Notes for Table 2 are similar to notes for Table 1.

Заклучение

Модифицированная математическая модель Кэм-Клей (МКК-модель) до сих пор является самой проверенной и применяемой из всех упруго-пластических моделей грунтов в численных расчетах грунто-

вых плотин, массивов и оснований. Поэтому в численных расчетах грунтовых плотин и оснований рекомендуется использовать модифицированную или обобщенную модель Кэм-Клей и одну-две более сложные модели (Зарецкого, Превоста или Лейда).

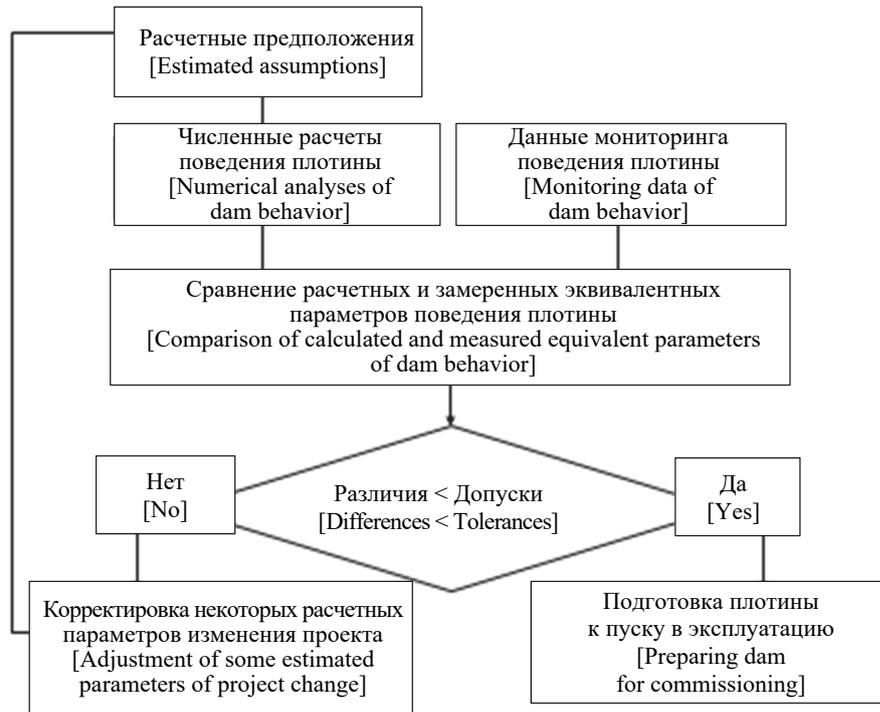


Рис. 4. Блок-схема взаимодействия между данными мониторинга и численного моделирования поведения плотины при первом наполнении водохранилища (согласно СИГБ)
 [Figure 4. Flow chart of the interaction between monitoring data and numerical modelling of dam behavior during the first filling of reservoir (as per ICOLD)]

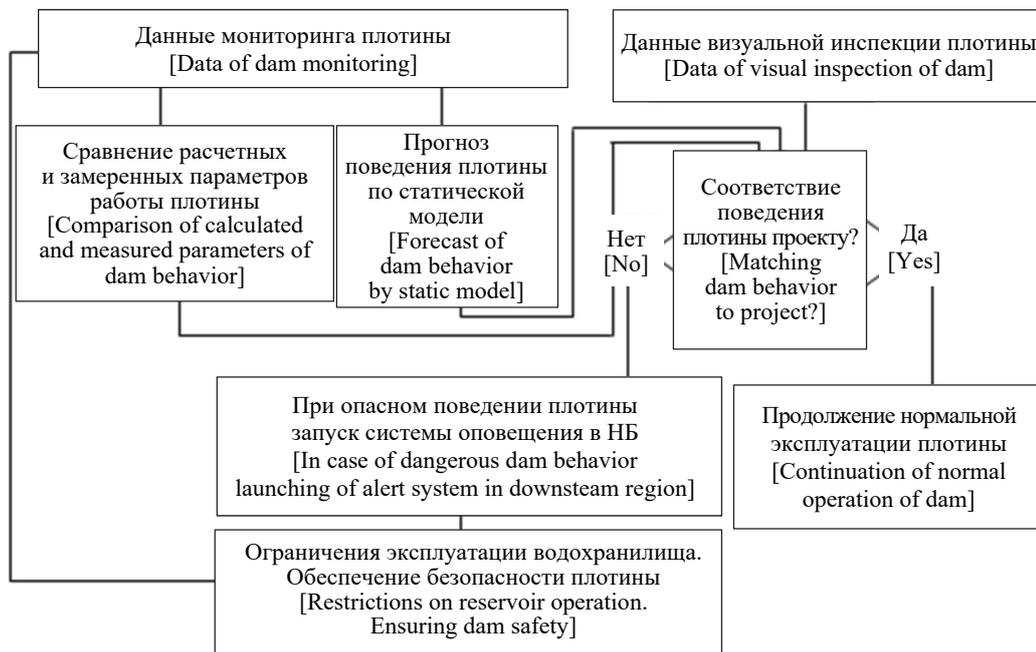


Рис. 5. Блок-схема взаимодействия между данными мониторинга и численным моделированием поведения плотины при ее эксплуатации (согласно СИГБ)
 [Figure 5. Flow chart of the interaction between monitoring data and numerical modelling of dam behavior during its operation (as per ICOLD)]

Принятые в численных расчетах грунтовых плотин и оснований модели грунтов в дальнейшем следует использовать для определения взаимодействия между результатами этих расчетов

и данными мониторинга поведения грунтовой плотины при первом наполнении водохранилища и последующей эксплуатации плотины (рис. 4, 5).

Список литературы / References

1. ICOLD Bulletins. No. 122. *Computational procedures for dams*. ICOLD Edition, Paris; 2001.
2. ICOLD Bulletins. № 155. *Guidelines for use of numerical models in dams*. ICOLD Edition, Paris; 2013.
3. Newmark N.M., Rosenblueth E. *Fundamentals of Earthquake Engineering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.; 1971.
4. Duncan J.M., Chang Y.Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1970;96(5):1629–1653.
5. Mroz Z., Norris V., Zienkiewicz O. Anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading. *Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomechanics*. 1978;2:203–221.
6. Roscoe K.H., Schofield A.N. Mechanical behaviour of an idealized ‘wet clay’. *Proc. of 2nd European Conf. on Soil Mechanics (Wiesbaden)*. 1963;1:47–54.
7. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behaviour of ‘wet clay’. In: Heyman J., Leckie F.A. (eds.) *Engineering Plasticity*. Cambridge University Press, Cambridge; 1968. p. 535–609.
8. Lade P.V. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *Int. Journal of Solids and Structures*. 1977;13:1019–1035.
9. Prevost J.H. Plasticity theory for soil stress-strain behavior. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1978;104(5):1177–1194.
10. Prevost J.H. Anisotropic undrained stress-strain behavior of clays. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. 1978;104(8):1075–1090.
11. Zaretsky Yu. *Soil viscoplasticity and design of structures*. Balkema, Holland; 1996.
12. Lyapichev Yu.P. Ocenka dostovernosti matematicheskikh modelej gruntov dlya chislennykh raschetov pove-deniya gruntovykh plotin [Estimation of reliability of mathematical models of soils for numerical calculations of the behavior of soil dams]. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2000;(3):110–115. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270

RESEARCH PAPER

Choice of mathematic models of soils in static and seismic analyses of embankment dams

Yury P. Lyapichev

Hydroproject Institute (Joint Stock Company), 2 Volokolamskoe Highway, Moscow, 125993, Russian Federation
 International Commission on Large Dams (ICOLD), 61 Kleber Ave., Paris, 75016, French Republic
 lyapichev@mail.ru

Article history:

Received: May 30, 2020

Revised: July 5, 2020

Accepted: July 17, 2020

Abstract

Relevance. Numerical analyses of behavior or stress-strain state (SSS) of embankment dams are usually performed using various computational programs, which use different, often complex mathematical models of soils. However, the right choice of these models is left to the program user, who usually has not enough experience in this field of knowledge, and therefore the results of these analyses are often obscure and erroneous. **The aims of the work** – development of recommendations for selecting the most reliable mathematical models of soils in numerical analyses of embankment dams and comparing these models with the most common models in modern world practice of their application. **Methods.** Deep comparative analysis of many soil models was conducted on the use of the soil models in numerical analyses of embankment dams during author’s work in ICOLD Committee on Analysis and Dam Design. **Results.** On the basis of the evaluation of the reliability of soil models, recommendations were obtained on the choice and application of these models in the numerical analyses of SSS of embankment dams under action of static and seismic impacts; interactions between the results of these analyses and dam monitoring data were identified.

Keywords: embankment dams, numerical analyses, mathematical models of soils, stress-strain state, evaluation of reliability of soil models

For citation

Lyapichev Yu.P. Choice of mathematic models of soils in static and seismic analyses of embankment dams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):261–270. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-261-270> (In Russ.)

Yury P. Lyapichev, expert for foreign projects of JSC “Hydroproject Institute”, member of the International Commission on Large Dams (ICOLD), Doctor of Technical Sciences, Professor, eLIBRARY SPIN-code: 3096-6362, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3750-3165>

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК GEOMETRY OF MIDDLE SURFACES OF SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-271-278
UDC 514.8:539.3:72.01

RESEARCH PAPER

The opportunities of umbrella-type shells

Sergey N. Krivoshapko

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation
krivoshapko-sn@rudn.ru

Article history:

Received: March 19, 2020

Revised: May 23, 2020

Accepted: June 29, 2020

Abstract

Relevance. The necessity of division of umbrella surfaces and surfaces of umbrella type into two separated classes is explained in introduction. Earlier, umbrella surfaces and surfaces of umbrella type were in the same class of surfaces because they consist of the identical fragments lying on the surfaces of revolution. Umbrella surfaces are compound surfaces on the base surface of revolution but umbrella-type surfaces are kinematic surfaces formed by continuous movement of a changing curve and that is why taking into account the methods of construction of these surfaces they were divided in two separate classes. **The aim of the work** is a collection of main publications on all areas of the investigation of umbrella-type shells. **Methods.** For the determination of principal results of investigation of umbrella-type shells, it is necessary to know differential geometry of surfaces, structural mechanics of thin shells, and approaches used in architecture of spatial structures. **Results.** In this article, the principal scientific papers on geometry, strength analysis, and offers of applications of thin-walled shells of umbrella type in building and of reflectors of umbrella type for space apparatuses. The accurate parametric equations of some determined surfaces are presented. The approximated computer models of middle surfaces of the real umbrella shells but in the form of umbrella-type surfaces are given. The examples of determination of stress-strain state of thin-walled shells of umbrella type without dividing of the whole shell in identical fragments are shown. New information and materials already known about shells of umbrella type give reasons to suppose that the shells of this type will be claimed by engineers and architects.

Keywords: umbrella shell, shell of umbrella type, waving dome, reflector of umbrella type for space apparatus, shell of radar installation, finite difference energy method

For citation

Krivoshapko S.N. The opportunities of umbrella-type shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):271–278. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-271-278>

Introduction

At present, the movement in the direction of increasing of the interest for design of large-span structures begins to show. Interesting facts from the history of building and design of thin-walled spatial struc-

tures and perspectives of their application in future are presented in a review paper [1] where the authors insist that “there are signs, however, that shells are attracting interest among the new generation of architects and engineers”. The modern architects’ views at the place of shell structures in modern architecture of arbitrary forms and in building are set forth in papers [2; 3].

Consider the investigations on geometry, analysis, and application of umbrella-type shells and show up their advantages in comparison with umbrella shells.

Sergey N. Krivoshapko, Professor of the Department of Civil Engineering of Academy of Engineering, DSc, Professor, eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9385-3699>

© Krivoshapko S.N., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



The definitions of umbrella surfaces and umbrella-type surfaces are given in a monograph [4] or in an encyclopedia [5]. Adduce them almost word for word.

“A cyclic symmetrical spatial structure formed from several identical elements is called an *umbrella dome* (Figure 1). Curves obtained as a result of the inter-

section of their middle surfaces are the generatrix curves of any dome-shaped surface of revolution. A dome-shaped surface of revolution, on which the contour curves of the elements of a dome are placed, is called a *contour surface*. The contour curves of the element are the curves bounding the contour of the middle surface of the element of the dome.”

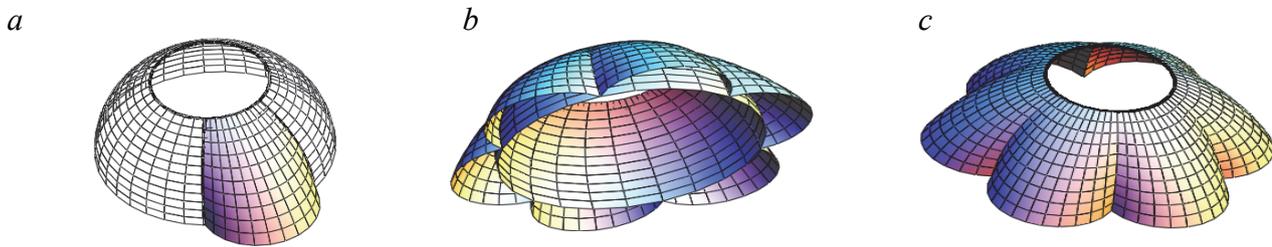


Figure 1. The formation of an umbrella dome with the opening at the top [6; 7]

In scientific and technical literature, the shells put together from identical fragments of the hypar are also called umbrella domes. F. Candela [4; 8] designed and built the first umbrella shell in the form of four intersecting hypars that formed a covering of a restaurant in Xochomilco, Mexico, in 1957.

“The cyclic symmetrical surfaces consisting from several identical elements are called *surfaces of umbrella type*. But unlike an umbrella surface, the whole surface of umbrella type and all surfaces of the identical elements forming the whole surface are determined by one and the same explicit, implicit or parametrical equations. In popular scientific literature, the umbrella-type shells are often called also waving or wave-shaped domes.”

Much useful information is presented in a manuscript [9] where 240 individual solutions of different domes are given and various classifications are presented. Some types of domes presented in this manuscript can be reckoned among umbrella shells, for example, *wave-and-folded domes* with folds of arched form and *segment domes*.

The results of investigation

A review of researches on geometry of umbrella-type surfaces

Firstly, umbrella-type surfaces were introduced into practice in papers [10; 11] where fourteen surfaces were proposed, their analytical formulas were given, and Gaussian quantities of the first and second orders in the theory of surfaces were obtained. Later, a part of these surfaces was investigated with the help of the MathCAD computer program in a work [12] where changes of the surface form were examined depending on constant parameters containing in analytical equations of surfaces of umbrella type.

Two surfaces from fourteen surfaces presented in works [10; 11] were offered by other authors. These are the Skidan’s ruled surface [13] and the crossed trough [14. P. 286]. V.N. Ivanov [15] offered a method of forming of the umbrella-type surface in the shape of Joachimsthal canal surface with a director circular sinusoid. This surface is formed by the rotation of the circle of variable radius with the common chord [16] (Figure 2). The generatrix circles of canal surfaces are lines of principal curvature. Cutting out from the common surface the fragment with radii r_1 and R , one can obtain an umbrella-type shell with the opening at the vertex.

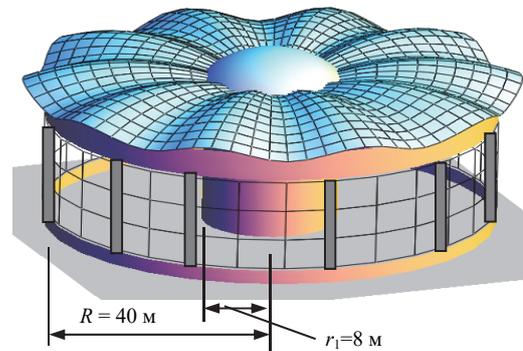


Figure 2. A surface of umbrella type on the base of the canal surface of Joachimsthal [15]

Following after V.N. Ivanov’s method [16], his post-graduate student Nasr Younis A. Abboushi [17] made several models of Joachimsthal canal surfaces defining three methods of their formation:

1) a surface is formed by the rotation of the circle of variable radius $R(u)$ so that a distance from the axis of rotation till the point of contact with the generatrix circle $c = (r^2 - R^2)^{1/2}$ remains constant;

2) a surface is formed by the rotation of the circle of variable radius $R(u)$ around the common chord;

3) a surface is formed by the rotation of the circle of variable radius $R(u)$ around the common tangent, i.e. $c = 0$, $r = R$. Here, $r(u)$ is a distance from the axis of rotation till the center of the generatrix circle.

The methods 2 ($r < R$) and 3 ($r = R$) give the opportunity to obtain umbrella-type surfaces.

A computer program in the AutoCAD system for tracing of umbrella-type surfaces with parabolic generatrices and with a circular opening at the vertex is presented in a paper [18]. It gives the possibility to consider a process of forming umbrella-type surfaces in dynamic conditions by means of making mini-film. Analogous program for another surface of umbrella type is given in a paper [19] (Figure 3).

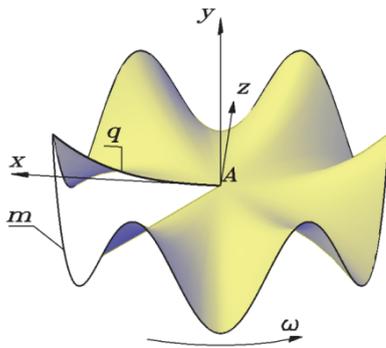


Figure 3. A forming surface with radial sinusoidal waves damping in the central point and formed by the cubic parabolas

Umbrella-type surfaces with elliptic contour surfaces and with the circular sinusoidal equator were taken as a base of research of waving domes in a paper [20]. A vector equation of the waving ellipsoidal surface may taken in the form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= a \{ [1 + \mu \cos(pu)] \cos v \cdot \mathbf{h}(u) + \gamma \sin v \mathbf{k} \}, \\ \mathbf{h}(u) &= i \cos u + j \sin u, \quad \gamma = b/a, \end{aligned} \quad (1)$$

where a , b are the semi-axes of the ellipsoid of revolution; u , v are the parameters at the interval $[0, \pi]$; i , j , k are the unit vectors; μ is a ratio of the amplitude of the sinusoid to the radius a of the circle; p is a number of waves of the sinusoid. The waving ellipsoidal surfaces were modeled under different parameters γ , μ , p .

Umbrella shells and umbrella-type shells in architecture and technics in the 20th and 21st centuries

It should be noted, that umbrella shells are presented in architecture of the 20th century very widely [4; 21]. Real erections in the form of umbrella-type surfaces were not found. But outward examination of some shells

showed that their middle surfaces can be quite given by analytical formulae, i.e. these shells can be number among umbrella-type shells. For example, a covering of a restaurant attached to a hotel “La Concha Hotel”, San Juan, Puerto Rico [22], arch. Jose R. Marchand, 2009 [Available from: <http://www.architecturaldigest.com/homes/hotels/2009>], can be approximated by a paraboloid of revolution with four radial waves [5. P. 388] or by a surface with astroidal level lines that is generated by biquadratic parabolas [5. P. 392].

A wave-shaped surface of the Marché Royan, France, consisting of 13 reinforced sinusoidal parabolic fragments is well simulated by a paraboloid of revolution with radial waves [5. P. 388], that has a parametrical form of definition:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = cu \cos v, \\ y &= y(u, v) = cu \sin v, \\ z &= z(u, v) = [a \sin(nv) + b]u^2, \end{aligned} \quad (2)$$

where v is the angle read from the axis Ox in the direction to the axis Oy ; $a = \text{const}$ is an amplitude of a wave; n is a number of the vertexes of the waves; b is a constant parameter of the datum paraboloid of revolution, $c = \text{const}$. W

When $a = 0$, a paraboloid of revolution with radial waves degenerates into a paraboloid of revolution. The real shell has a 100 mm thickness and a 50 m span. It supports at 13 points along the outward perimeter (Figure 4). A market was built in 1956 and now it is architectural and historical possessions of the town.

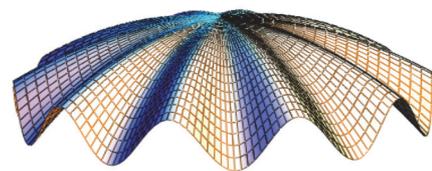


Figure 4. Marché Royan, France, and its possible computer model

The three-tiered many-waved umbrella church in the suburb of St. Louis (USA) designed by G. Obata with participation of P.L. Nervi apparently was arranged from fragments of cylindrical parabolic shells [22; 23]. Middle surfaces of these three tiers can be easily approximated by a paraboloid of revolution with radial waves (Figure 5), i.e. by a surface of umbrella type (2) $a = b$.

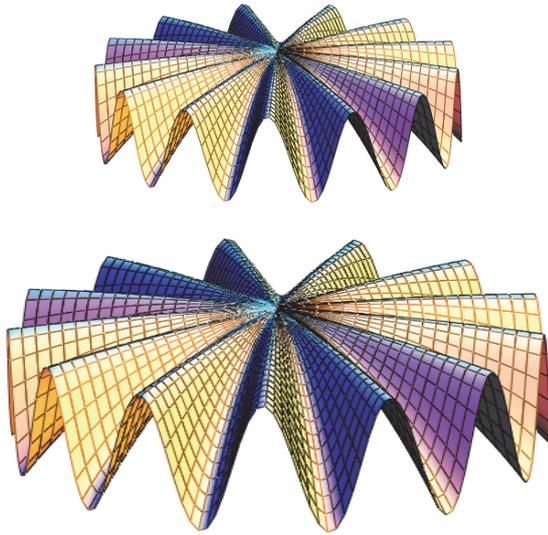


Figure 5. Approximated two lower tiers in the suburb of St. Louis, USA, 1966

Umbrella glass-fibre plastic dome of radar installation consist of fragments of the same type united between themselves by bolted joints (Figure 6, *a*) [24]. The joints are sealed by glass fabric on elastic special mastic. Airports Domodedovo, Vnukovo, Sheremetyevo, and other airports of Russia exploit the shells of this type. The form of these domes is rather like surface of a sphere with external cycloidal crimps (Figure 6, *b*) which may be given by parametrical equations:

$$\begin{aligned} x &= x(u, \varphi) = [(R+r) \cos \varphi - r \cos(n+1)\varphi] \cos u, \\ y &= y(u, \varphi) = [(R+r) \sin \varphi - r \sin(n+1)\varphi] \cos u, \\ z &= z(u) = R \sin u, \end{aligned}$$

where u is the angle read from the plane xOy in the direction of the axis Oz ; $0 \leq z \leq R$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq u \leq \pi/2$. In the cross section of the surface in question by the planes $z = \text{const}$, i.e., when $u = u_0 = \text{const}$, we have the epicycloids:

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi) = [(R+r) \cos \varphi - r \cos(n+1)\varphi] \cos u_0, \\ y &= y(\varphi) = [(R+r) \sin \varphi - r \sin(n+1)\varphi] \cos u_0 \end{aligned}$$

with $n = \text{const}$, n is a number of the vertexes of the epicycloid on the circular plane; $n = R/r$, $2r$ is the maximum amplitude of the crimps at the base of the surface; R is a radius of the equator of the sphere; φ is the angle read from the axis Ox in the direction of the axis Oy .

In case of need, domes of radar installation can be designed in the form of corrugated paraboloid of revolution with external crimps (Figure 6, *c*) with a circular waving curve at the foot with the vertexes directed out of the center of the circular base:

$$\begin{aligned} x &= (R+a|\cos n\varphi|) \cos \varphi, \\ y &= (R+a|\cos n\varphi|) \sin \varphi, \quad z = 0, \end{aligned}$$

where n is a number of the vertexes of the sinusoid on a circular plan; a is an amplitude of the crimps at the foot of the surface; R is a radius of the base circle of the corrugated paraboloid in the foot relative to which, the circular sinusoid is constructed.

Parametrical of the definition of the corrugated paraboloid of revolution with the external crimps:

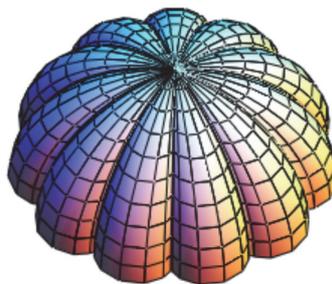
$$\begin{aligned} x &= x(r, \varphi) = r \left(1 + \frac{ar|\cos n\varphi|}{R^2} \right) \cos \varphi, \\ y &= y(r, \varphi) = r \left(1 + \frac{ar|\cos n\varphi|}{R^2} \right) \sin \varphi, \\ z &= z(r) = h \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \end{aligned}$$

where h is the height of a corrugated paraboloid of revolution, $0 \leq z \leq h$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq r \leq R$.

a



b



c

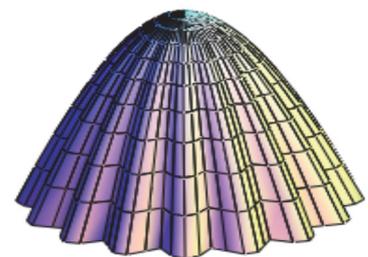


Figure 6. An umbrella dome (*a*) and computer models of the umbrella-type shells (*b*, *c*):
a – the composite shell of radar installation (OAO “Avangard”); *b* – a sphere with external cycloidal crimps ($n = 12$);
c – a corrugated paraboloid of revolution with external crimps

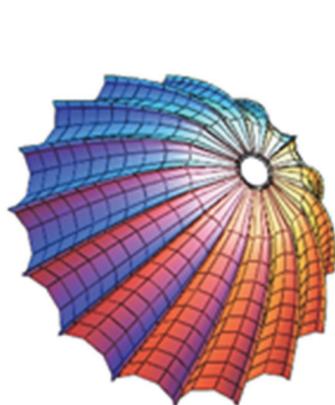


Figure 7. A form of a parabolic reflector of umbrella type

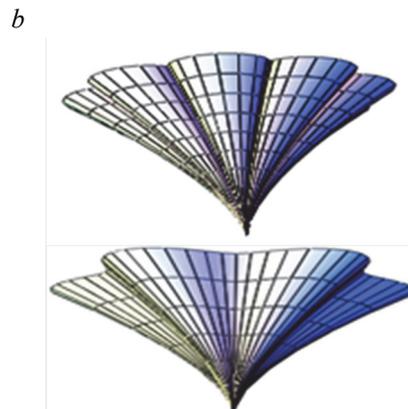


Figure 8. The tent umbrella structure and its proposed computer models

One can find several works devoted to design of parabolic reflectors of antennas of space apparatus of umbrella type. In a paper [25], a review of results of modeling of parabolic reflectors the structure of which consist of parabolic spokes and a form of the reflecting surface is created by metal mesh cloth. The initial form of the spokes coincides with contour curves on a theoretical paraboloid. Having assumed an edge of a reflector in the form of a hypocycloid one may create a surface of umbrella type with the parabolic generatrices and the round opening at the vertex [5. P. 389] (Figure 7). In any cross section of the surface by a plane passing through the central axis, the parabola would be placed. Suitableness of the proposed surface for the reflectors with taking into account distortion of the reflecting surface one can corroborate only by experimental measurements.

Designers offer enormous choice of tent umbrella structures for sheltering from the sun and rain. For these purposes, it is possible to use existing surfaces of umbrella type. For example, architectural street umbrellas “Edelveis” designed by specialists of the firm “TeniRadi” are unique durable umbrella structures for using at the grounds with large wind loads (Figure 8, *a*). They have built-in drainage system. In Figure 8, *b*, two possible forms for approximation of a surface of an umbrella shown in Figure 8, *a* are presented. The upper surface is a surface of umbrella type on the cycloidal plan formed by semi-cubic parabolas, the lower surface is a waving surface formed by semi-cubic parabolas with the waving foot line [10; 11].

The works on strength analysis of umbrella-type shells

At the middle of the 20th century, some principles of forming surfaces of umbrella and umbrella-type domes and methods of their strength analysis were absent and that is why architectural and technical conceptions were bound [26]. But attempts of building of

umbrella domes were undertaken by different architects and builders. Simplified methods of strength analysis were offered. For example, every fragment of the covering of the market in Royan (Figure 4) was considered as a beam on two hinges: at the foot and at the vertex of the dome. Taking into account that the covering works already 60 years, an analysis circuit was chosen successfully and can be recommended for preliminary calculation of umbrella-type shells at present time.

As it was noted before, middle surfaces of umbrella-type shells are defined by one analytical equation and it gives the opportunity to use the standard computer programs and to derive author’s programs for static and dynamic analysis of considered shells on diverse types of loading.

For example, a thin shell shown in Figure 2 was examined on action of dead load with the help of finite difference energy method [15]. This method was used also for strength analysis of two types of umbrella-type shells with middle surfaces in the form of Joachimsthal canal surfaces. They were subjected to action of their own weight [27].

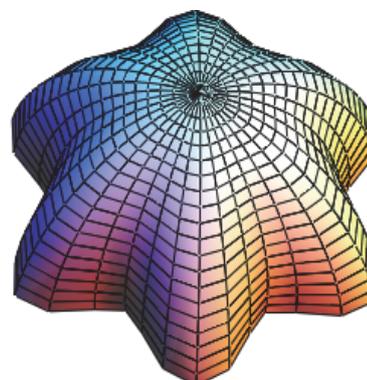


Figure 9. A corrugated sphere

A finite element analysis of stress-strain state of a reinforced concrete shell of umbrella type with an el-

liptic contour surface (1) was realized in a work [20]. The analysis was fulfilled on action of the own weight when $\gamma = 1$ and the shell has the hinged supports. A program complex LIRA SAPR 2013 was applied. It was established on the example of a shell with the sphere contour surface (Figure 9) that a waving shell has more rigidity but in the comparison with the smooth shell, torque internal moments appear. Considerable reduction of strength characteristics when a spherical contour middle surface of the shell is substituted for the elliptic surface is not observed. We can increase rigidity of the shell if we shall increase the vertical semi-axis of the ellipse.

Conclusion

Builders began to erect umbrella stone domes several hundred years ago but thin-walled umbrella shells appeared only in the middle of the 20th century. At that time, geometrical science could not give a strict definition of umbrella surface. A shell divided into identical segments and analysis fulfilled for one fragment but the results applied to all shell.

At the beginning of 21st century, analytical umbrella-type surfaces were singled out of a class of umbrella surfaces into the separate class. More than two tens of new surfaces were introduced into practice. Scientific papers devoted to the determination of stress-strain state of umbrella-type shells and suggestions on their application began to appear. At present, only numerical methods of analysis are applied.

Real umbrella-type shells were not used else. But the author agrees with V.A. Lebedev [26] that “revival of highly artistic umbrella form in modern dome building is possible only in the shape of thin-walled structures. <...> These forms undoubtedly must find the wide application in building”.

References

1. Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P. Special structures. Past, present, and future. *Journal of Structural Engineering*. 2002;691–701.
2. Krivoshapko S.N. On opportunity of shell structures in modern architecture and building. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013;(1):51–56. (In Russ.)
3. Krivoshapko S.N. Shells and rod structures in the form of analytically non-given surfaces in modern architecture. *Building and Reconstruction*. 2020;(3):20–30. (In Russ.)
4. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. *Analiticheskie poverkhnosti v arhitekture zdaniy, konstruktivnyy i izdeliy* [Analytical Surfaces in Architecture of Buildings, Structures, and Products]: monography. Moscow: LIBROCOM Publ.; 2012. (In Russ.)
5. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostey* [Encyclopedia of analytical surfaces]. Moscow: LIBROKOM Publ.; 2010. (In Russ.)

6. Ivanov V.N., Krivoshapko S.N. Design of umbrella shells from the fragments of cyclic translation shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2011;(1): 3–7. (In Russ.)
7. Bock Hyeng Ch.A., Krivoshapko S.N. Umbrella-Type Surfaces in Architecture of Spatial Structures. *IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN)*. 2013;3(3):43–53.
8. Draper P., Garlock M.E.M., Billington D.P. Structural optimization of Félix Candela’s hyper umbrella shells. *Journal of the International Association for Shells and Spatial Structures*. 2012;51(1):59–66.
9. Tsvingman G.A. Types principaux des domes, leur construction et l’architecture. In: Alexandrov A.J. (redacteur) *Problèmes D’Architecture: Recueil des Matériaux* (vol. 1, livre 2). Academie D’Architecture De L’Union des R.S.S.; 1936. p. 25–385. (In Russ.)
10. Krivoshapko S.N. Geometrical investigations of surfaces of umbrella type. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2005;(1):11–17. (In Russ.)
11. Krivoshapko S.N. New examples of surfaces of umbrella type and their coefficients of fundamental forms of surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2005;(2):6–14. (In Russ.)
12. Ariarskyi O., Shagalova I., Kravchenko T., Kulakova E. Umbrella surfaces morphology and their application in the architecture and design. *Pratzi TDATU*. 2011; 4(49):178–190. (In Russ.)
13. Skidan I. General analytical theory of applied formation. *The 10th International Conference on Geometry and Graphics (July 28 – August 2, 2002, Kyiv, Ukraine)*. 2002; 1:104–107.
14. Von Seggern D.H. *CRC Standard Curves and Surfaces*. Boca Raton, FL: CRC Press; 1993.
15. Ivanov V.N. Analyses of stress-strain state of roofing of trade center in the form of umbrella shell by difference variation method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2008;(4):86–89. (In Russ.)
16. Ivanov V.N. Kanalovye poverkhnosti loakhimstalya s ploskoi liniei tsevtrov [Canal Joachimsthal surfaces with plane line of the centers]. *Issledovaniya prostranstvennykh sistem* [Research of spatial systems]: materials of the seminar of the Department of Resistance of Materials of RUDN University]. Moscow: RUDN University Publ.; 1996. p. 32–36. (In Russ.)
17. Abboushi N.Y.A. Volnoobraznye kupola [Wave-shaped domes]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktivnykh i sooruzhenii* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]: interuniversity collection of scientific papers. 2002;(11):49–58. (In Russ.)
18. Romanova V.A. Features of the image of process of formation of surfaces in AutoCad system. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;(3):19–22. (In Russ.)
19. Romanova V.A. Visualization of forming of umbrella-type and umbrella surfaces with radial damping waves in the central point. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015;(3):4–8. (In Russ.)
20. Chepurnenko A.S., Kochura V.G., Saybel A.V. Finite elemental analysis of the stress deformed condition of waveform shells. *Construction and Industrial Safety*. 2018;11(63):27–31. (In Russ.)

21. Krivoshapko S.N., Alborova L.A. *Unikalnye sooruzheniya v forme lineichatykh, zontichnykh poverkhnostei, poverkhnostei vrashcheniya i perenosa [Unique Erections in the Form of Ruled, Umbrella Surfaces, Surfaces of Revolution and Translation]*. Moscow: VNIINTPI Publ.; 2008. (In Russ.)

22. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. Umbrella surfaces and surfaces of umbrella type in the architecture. *Prom. i grazhdansk. stroitelstvo*. 2011;7(1):27–31. (In Russ.)

23. Maan H. Jawad. *Design of Plate & Shell Structures*. ASME PRESS, NY; 2004.

24. Krivoshapko S.N. The perspectives of application of thin-walled plastic and composite polymer shells in civil and industrial architecture. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2018;37(4):217–229. doi: 10.1177/0731684417740770.

25. Ponomarev S.V. Transformed reflectors of antennas of space apparatus. *Vestnik Tomskogo Gos. Universiteta*. 2011;4(16):110–119. (In Russ.)

26. Lebedev V.A. *Tonkostennye zontichnye obolochki [Thin-Walled Umbrella Shells]*. Leningrad: Gosstroyizdat Publ.; 1958. (In Russ.)

27. Abboushi N.Y.A. Chislennyi analiz kanalovykh poverkhnostei Ioakhimstalya na sobstvennyi ves variatsionno-raznostnym metodom [Numerical analysis of Joachimsthal's canal surfaces on a gravity load by variation-difference method]. *Arkhitektura obolochek i prochnostnoi raschet tonkostennykh stroitelnykh i mashinostroitelnykh konstruktivnykh slozhnoi formy [Shells in Architecture and Strength Analysis of Thin-Walled Civil-Engineering and Machine-Building Constructions of Complex Forms]*: Proc. of Int. Scientific Conference (Moscow, June 4–8, 2001). Moscow: RUDN University Publ.; 2001. p. 297–306. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-271-278

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Возможности оболочек зонтичного типа

С.Н. Кривошапко

Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, Москва, 117198, ул. Миклухо-Маклая, 6
krivoshapko-sn@rudn.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 19 марта 2020 г.

Доработана: 23 мая 2020 г.

Принята к публикации: 29 июня 2020 г.

Аннотация

В статье объясняется **актуальность** разделения зонтичных поверхностей и поверхностей зонтичного типа на два разных класса. Ранее зонтичные поверхности и поверхности зонтичного типа входили в один класс поверхностей, так как состоят из тождественных фрагментов, лежащих на поверхности вращения. Учитывая способ построения этих поверхностей, а именно то, что зонтичные поверхности – составные поверхности на базовой поверхности вращения, а поверхности зонтичного типа – кинематические поверхности, образованные непрерывным движением изменяющейся кривой, они были разделены на два отдельных класса. **Цель статьи** – собрать воедино основные публикации по всем разделам исследований оболочек зонтичного типа. **Методы.** Для получения основных результатов исследований оболочек зонтичного типа были изучены сведения о дифференциальной геометрии поверхностей, строительной механике оболочек и подходах, используемых в архитектуре пространственных структур. **Результаты.** Представлены основные научные работы по геометрии, расчету и предложениям по применению тонкостенных оболочек зонтичного типа в строительстве и для рефлекторов зонтичного типа космических аппаратов. Приведены уточненные параметрические уравнения некоторых рассматриваемых поверхностей. Продемонстрированы аппроксимационные компьютерные модели срединных поверхностей существующих зонтичных оболочек, но в форме поверхностей зонтичного типа. Показаны примеры определения напряженно-деформируемого состояния тонкостенных оболочек зонтичного типа без разбиения целой оболочки на тождественные фрагменты. Полученные новые и уже известные сведения об оболочках зонтичного типа дают основания предполагать, что оболочки этого типа будут востребованы инженерами и архитекторами.

Ключевые слова: зонтичная оболочка, оболочка зонтичного типа, волнистый купол, рефлекторы зонтичного типа космических аппаратов, оболочка радиолокационной станции, вариационно-разностный метод расчета

Для цитирования

Krivoshapko S.N. The opportunities of umbrella-type shells // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 4. С. 271–278. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-271-278>

Кривошапко Сергей Николаевич, профессор департамента строительства Инженерной академии, доктор технических наук, eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9385-3699>

Список литературы

1. Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P. Special structures. Past, present, and future // Journal of Structural Engineering. 2002, June. Pp. 691–701.
2. Кривошапко С.Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 1. С. 51–56.
3. Кривошапко С.Н. Оболочки и стержневые структуры в форме аналитически задаваемых поверхностей в современной архитектуре // Строительство и реконструкция. 2020. № 3. С. 20–30.
4. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий: монография. М.: ЛИБРОКОМ, 2012. 328 с.
5. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 560 с.
6. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Конструирование зонтичных оболочек из отсеков циклических оболочек переноса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 1. С. 3–7.
7. Bock Hyeng Ch.A., Krivoshapko S.N. Umbrella-Type Surfaces in Architecture of Spatial Structures // IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN). 2013. Vol. 3. Issue 3. Pp. 43–53.
8. Draper P., Garlock M.E.M., Billington D.P. Structural optimization of Félix Candela's hyper umbrella shells // Journal of the International Association for Shells and Spatial Structures. 2012. Vol. 51. No. 1. Pp. 59–66.
9. Цвингман Г.А. Основные типы куполов, их конструкция и архитектура // Проблемы архитектуры: сб. материалов: в 2 т. Т. 1. Кн. 2 / под ред. А.Я. Александрова. М.: Изд-во Всесоюзной Академии архитектуры, 1936. С. 25–385.
10. Кривошапко С.Н. Геометрические исследования поверхностей зонтичного типа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2005. № 1. С. 11–17.
11. Кривошапко С.Н. Новые примеры поверхностей зонтичного типа и их коэффициенты основных квадратных форм // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2005. № 2. С. 6–14.
12. Ариарский О.Е., Шагалова И.В., Кравченко Т.В., Кулакова Е.А. Формообразование зонтичных оболочек и их применение в архитектуре и дизайне // Праці ТДАТУ. 2011. Т. 49. Вип. 4. С. 178–190.
13. Skidan I. General analytical theory of applied formation // The 10th International Conference on Geometry and Graphics (July 28 –August 2, 2002, Kyiv, Ukraine): in 2 vols. Vol. 1. Kyiv, 2002. Pp. 104–107.
14. Von Seggern D.H. CRC Standard Curves and Surfaces. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993. 388 p.
15. Иванов В.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния покрытия торгового центра в форме оболочки зонтичного типа вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2008. № 4. С. 86–89.
16. Иванов В.Н. Каналовые поверхности Иоахимсталля с плоской линией центров // Исследования пространственных систем: материалы семинара кафедры сопротивления материалов РУДН. М.: Изд-во РУДН, 1996. С. 32–36.
17. Амбуши Н.Ю.А. Волнообразные купола // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: межвуз. сб. науч. трудов. Вып. 11. М.: Изд-во АСВ, 2002. С. 49–58.
18. Романова В.А. Визуализация образования поверхностей зонтичного типа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 3. С. 19–22.
19. Романова В.А. Визуализация образования зонтичных поверхностей и поверхностей зонтичного типа с радиальными волнами, затухающими в центральной точке // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 4–8.
20. Чепурненко А.С., Кочура В.Г., Сайбель А.В. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния волнистых оболочек // Строительство и технологическая безопасность. 2018. № 11 (63). С. 27–31.
21. Кривошапко С.Н., Алборова Л.А. Уникальные сооружения в форме линейчатых, зонтичных поверхностей, поверхностей вращения и переноса. М.: ВНИИТПИ, 2008. 42 с. (Строительство и архитектура. Вып. 2. Строительные конструкции и материалы).
22. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Зонтичные поверхности и поверхности зонтичного типа в архитектуре // Промышленное и гражданское строительство. 2011. № 7 (1). С. 27–31.
23. Maan H. Jawad. Design of Plate & Shell Structures. ASME PRESS, NY, 2004. 476 p.
24. Krivoshapko S.N. The perspectives of application of thin-walled plastic and composite polymer shells in civil and industrial architecture // Journal of Reinforced Plastics and Composites. 2018. Vol. 37. Issue 4. Pp. 217–229. doi: 10.1177/0731684417740770.
25. Пономарев С.В. Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестник Томского государственного университета. 2011. № 4 (16). С. 110–119.
26. Лебедев В.А. Тонкостенные зонтичные оболочки. Л.: Госстройиздат, 1958. 172 с.
27. Амбуши Н.Ю.А. Численный анализ каналовых поверхностей Иоахимсталля на собственный вес вариационно-разностным методом // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: труды Международной научной конференции (Москва, 4–8 июня 2001 г.). М.: Изд-во РУДН, 2001. С. 297–306.

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-279-289
УДК 004.925.83

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Визуализация образования поверхности полуправильных многогранников Архимеда

В.А. Романова*Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
v.a.r-victoryna@mail.ru*

История статьи:

Поступила в редакцию: 19 марта 2020 г.
Доработана: 23 мая 2020 г.
Принята к публикации: 29 июня 2020 г.

Аннотация

Наиболее распространенный способ образования полуправильных многогранников состоит в отсечении плоскостями углов и ребер правильных многогранников. **Цель** данной работы – рассмотреть автоматизированное образование на базе додекаэдра ряда поверхностей полуправильных многогранников Архимеда. К ним относятся усеченный додекаэдр, икосододекаэдр, ромбоикосододекаэдр и усеченный икосододекаэдр. **Методы.** Формирование поверхностей осуществляется кинематическим методом в среде AutoCAD с использованием программ, составленных на языке AutoLISP. Методика образования указанных многогранников предусматривает усечение углов и ребер додекаэдра. Это требует расчета ряда геометрических параметров данных многогранников и додекаэдра, таких как величина усечения ребер додекаэдра, размер ребер усеченных многогранников, центры граней, двугранные углы и др. С целью генерирования указанных поверхностей строится их каркас, поскольку каркасные линии используются в качестве направляющих для образования поверхностей кинематическим способом. Электронная модель каждого многогранника строится в виде набора отсеков поверхностей всех его граней, причем каждый отсек закрепляется за определенным слоем чертежа. Каркас и электронная модель исследуемых многогранников формируются посредством пользовательских программ, составленных на функциональном языке AutoLISP. Процесс образования поверхностей выбранных многогранников в среде AutoCAD обеспечивают специальные программы, составленные также на языке AutoLISP. **Результаты.** Создано программное обеспечение для демонстрации на экране монитора процесса образования ряда многогранников Архимеда.

Ключевые слова: полуправильный многогранник, усеченный додекаэдр, икосододекаэдр, ромбоикосододекаэдр, усеченный икосододекаэдр, электронная модель, образование многогранников, направляющая линия, образующая линия, AutoCAD, AutoLISP

Для цитирования

Романова В.А. Визуализация образования поверхности полуправильных многогранников Архимеда // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 279–289. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-279-289>

Введение

Полуправильные многогранники, или тела Архимеда, – это тринадцать выпуклых многогранников, которые имеют следующие признаки многогранников Платона (правильных многогранников): все ребра равны, все грани – правильные многоугольники [1].

Романова Викторина Анатольевна, доцент департамента строительства Инженерной академии, eLIBRARY SPIN-код: 3869-5969.

© Романова В.А., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Однако, в отличие от тел Платона, полуправильные многогранники имеют грани двух или трех форм [2; 3].

Для образования полуправильных многогранников обычно используют метод усечения плоскостью углов правильных многогранников, при этом происходит также усечение ребер, исходящих из этих углов. Для усечения тетраэдра, октаэдра икосаэдра, кубооктаэдра и икосододекаэдра величина усечения ребер известна [4]. Для образования усеченного додекаэдра и усеченного куба эта величина рассчитывается. Ромбокубододекаэдр и усе-

ченный икосододекаэдр формируются отсечением ребер с одновременным усечением углов [5].

Известно построение ромбоикосододекаэдра и усеченного икосододекаэдра с использованием прямоугольников, в которых отношение сторон соответствует пропорции золотого сечения [6].

Вопросы визуализации архитектурных и инженерных тел в трехмерном пространстве посредством использования различных видов программного обеспечения отражены в работах [7–12].

Использование системы AutoCAD и языка AutoLISP для образования различных поверхностей опубликовано в работах [13–18]. Визуализация образования поверхностей тел Платона кинематическим способом в динамическом режиме в системе AutoCAD рассмотрена в работе [19].

Предложенная статья является продолжением исследований в области визуализации процессов образования многогранников Архимеда [20].

Далее рассмотрена задача о визуализации образования на базе додекаэдра четырех полуправильных многогранников: усеченного додекаэдра, икосододекаэдра, ромбоикосододекаэдра и усеченного икосододекаэдра.

1. Образование поверхности усеченного додекаэдра

Усеченный додекаэдр (рис. 2) образуется усечением вершин додекаэдра (рис. 1) и, следовательно, углов у пятиугольников. Он имеет 20 треугольных и 12 десятиугольных граней. Конфигурация вершины: 3, 10, 10.

Для образования усеченного додекаэдра кинематическим способом строится его каркас усечением каркасных линий додекаэдра.

Величины сторон десятиугольников, треугольников и отсекаемых отрезков определяются из соотношений (рис. 3)

$$a = b + 2c, \quad (1)$$

$$a = r * 2 * \sin \vartheta, \quad (2)$$

$$b = 2 * c * \cos \vartheta, \quad (3)$$

$$c = r * \sin \vartheta / (1 + \cos \vartheta), \quad (4)$$

где a – длина стороны пятиугольника додекаэдра; r – радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника; $\vartheta = 36^\circ$ – угол при вершине в треугольнике AOB ; b – величина граней десятиугольника; c – величина отрезков, отсеченных от сторон пятиугольников.

Каркас усеченного додекаэдра строится на базе каркаса додекаэдра. В пятиугольных ячейках додекаэдра образуются десятиугольные ячейки усеченного додекаэдра. В образовавшемся между ними пространстве появляются ячейки треугольной формы.

В образовавшемся между ними пространстве появляются ячейки треугольной формы.

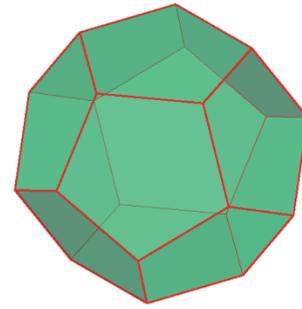


Рис. 1. Додекаэдр
[Figure 1. Dodecahedron]

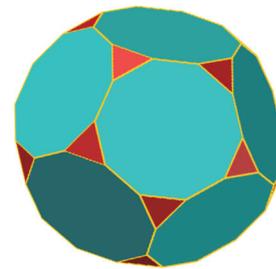


Рис. 2. Усеченный додекаэдр
[Figure 2. Truncated dodecahedron]

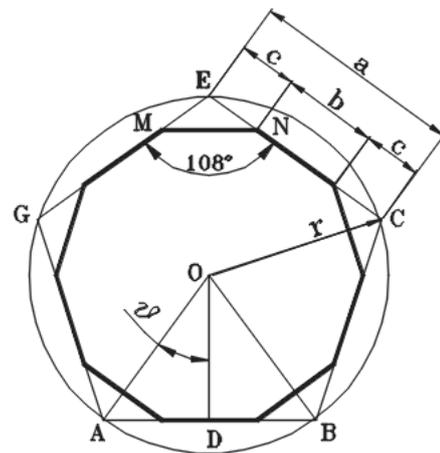


Рис. 3. Определение размеров ребер
[Figure 3. Definition of the size of the ribs]

Полученный каркас используется для построения отсеков поверхностей десятиугольных и треугольных граней. Образование отсеков выполняется отдельно двумя пользовательскими функциями в виде двух конструктивных форм.

Формирование конструктивной формы 1

Набор отсеков поверхности десятиугольной грани строится в ячейке каркаса усеченного додекаэдра. Система координат $xOuz$ устанавливается в середине нижнего основания десятиугольника и поворачивается вокруг оси x на величину двугранного угла, при этом система $xOuz$ преобразуется в систему координат $x_1O_1y_1z_1$, расположенную в плоскости ячейки (рис. 4).

Образование набора отсеков поверхности десятиугольника выполняется в цикле с использованием функции Loft и ее опции «По сечениям».

Конструктивная форма 1 изображена на рис. 5. Она состоит из отсеков двух рядов десятиугольников и двух оснований такой же формы.

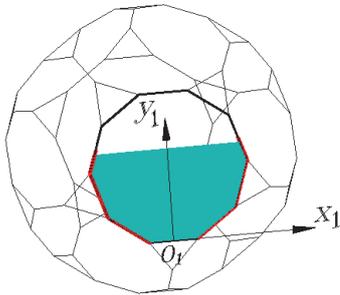


Рис. 4. Образование отсеков в десятиугольнике
[Figure 4. Formation of compartments in the decagon]

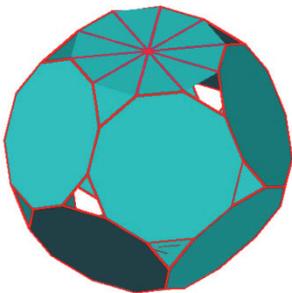


Рис. 5. Конструктивная форма 1 с направляющими линиями
[Figure 5. Constructive form 1 with guide lines]

Формирование отсеков поверхности треугольной грани также выполняется в ячейке каркаса. Ее положение определяется двумя углами α и τ (рис. 6).

Треугольные ячейки расположены в 4 ряда. Ячейка 1-го ряда изображена на рис. 6, где B_1C_1 – сторона десятиугольника; A_1M_1 , B_1M_1 и C_1M_1 – отрезки, отсеженные от сторон пятиугольников.

Сторона десятиугольника равна

$$B_1C_1 = 2 * C_1M_1 * \cos \varphi, \quad (5)$$

при этом $\varphi = \vartheta$.

Сторона пятиугольника a равна

$$a = 2 * C_1M_1 + B_1C_1. \quad (6)$$

С учетом равенства углов φ и ϑ формулы (2), (5) и (6) позволяют получить выражения для определения величин стороны десятиугольника и отсеженных отрезков и имеют вид

$$C_1M_1 = \frac{r * \sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)}, \quad B_1C_1 = \frac{r * \sin 2\varphi}{(1 + \cos \varphi)}.$$

Углы α и τ определяют положение треугольной ячейки и вычисляются по формулам

$$\alpha = \arctg M_1T_1/A_1T_1, \quad \tau = \arctg M_1T_1/D_1T_1,$$

где M_1T_1 – высота правильной пирамиды $MA_1B_1C_1$; T_1 – центр треугольника $A_1B_1C_1$, являющегося основанием пирамиды.

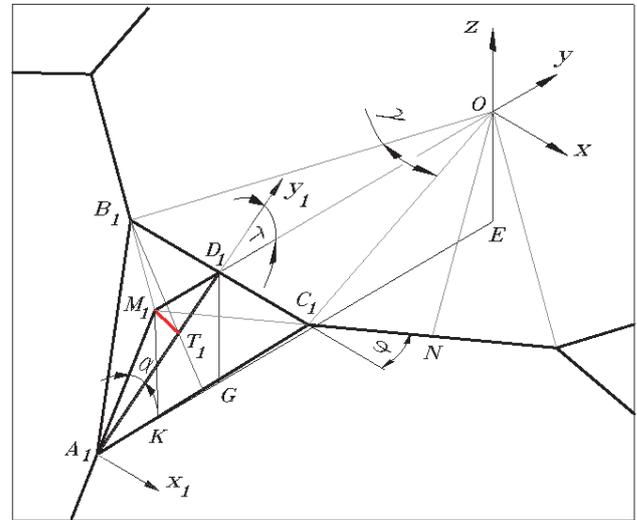


Рис. 6. Треугольная ячейка 1-го ряда
[Figure 6. 1st row triangular cell]

Для образования отсеков поверхности треугольника первого ряда систему координат переносим в точку A_1 и совмещаем ось y с высотой A_1D_1 , выполнив следующие операции:

- поворот системы координат $xOuz$ вокруг оси z с тем, чтобы ось y стала перпендикулярной стороне B_1C_1 ;
- перенос системы $xOuz$ в точку D_1 ;
- поворот системы $xOuz$ вокруг стороны B_1C_1 на угол τ ;
- перенос системы $xOuz$ из точки D_1 в точку A_1 .

Для образования отсеков поверхности треугольника второго ряда систему координат переносим в точку D_2 и совмещаем с высотой A_2D_2 (рис. 7), выполнив следующие операции:

- поворот системы координат $x_1A_1y_1$ вокруг оси x_1 на угол α – ось y_1 по ребру A_1A_2 ;

- перенос системы $x_1A_1y_1$ по каркасной линии A_1A_2 в точку A_2 ;
- поворот системы координат вокруг оси x_1 на угол α – ось y по A_2D_2 ;
- перенос системы координат в точку D_2 .

Формирование отсеков грани десятиугольной формы выполняется в цикле с шагом $dy1$.

Конструктивная форма 1 формируется из отсеков поверхностей 12 десятиугольных граней. Она представлена на рис. 5.

Формирование отсеков треугольной формы выполняется в цикле с шагом $dy2$, который зависит от шага $dy1$.

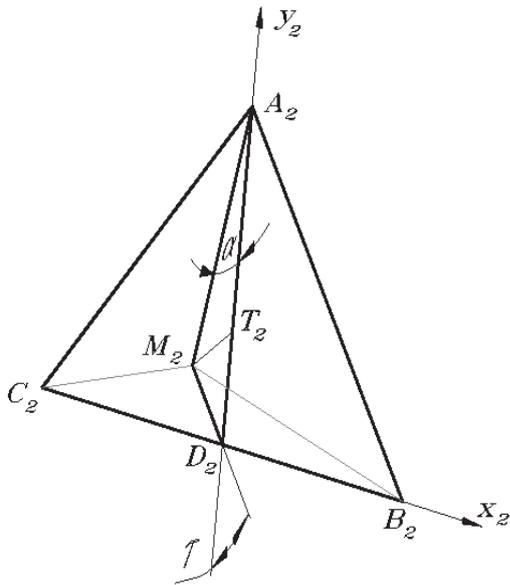


Рис. 7. Формирование системы координат $x_2D_2y_2$
[Figure 7. Formation of the coordinate system $x_2D_2y_2$]

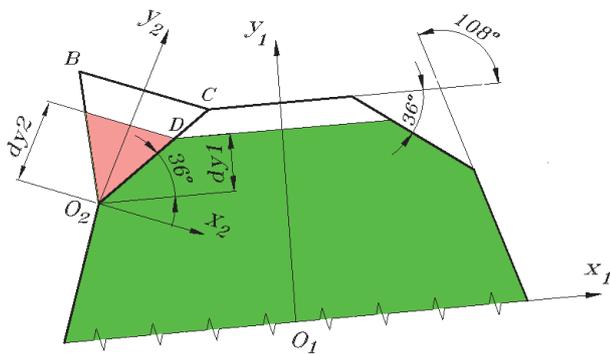


Рис. 8. Определение шага $dy2$ для ряда 1
[Figure 8. Definition of a $dy2$ step for rank 1]

На рис. 8 продемонстрировано образование отсеков поверхности треугольника 1-го ряда сверху.

Если шаг образования поверхности десятиугольной грани – $dy1$, а треугольной грани – $dy2$, то их проекции на ребро CO_2 – отрезок DO_2 . Следовательно,

$$dy1/\sin 36^\circ = dy2/\cos 30^\circ,$$

$$dy2 = dy1 * \cos 30^\circ / \sin 36^\circ.$$

На рис. 9 представлено образование отсеков поверхности треугольника 2-го ряда сверху. Если шаг образования поверхности десятиугольной грани – $dy1$, а треугольной грани – $dy2$, то их проекции на ребро BC – отрезок CD . Следовательно,

$$dy2 = dy1 * \cos 30^\circ / \cos 18^\circ.$$

Вычисление шага образования отсеков поверхности треугольных граней, расположенных в других рядах, выполняется по такому же алгоритму.

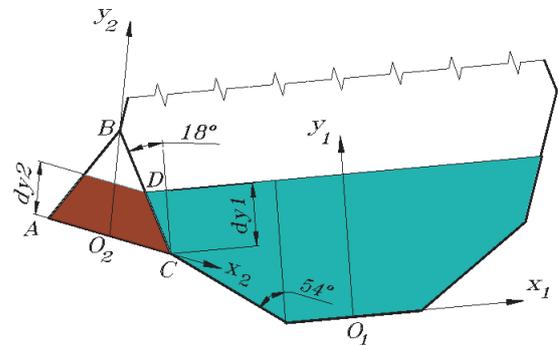


Рис. 9. Определение шага $dy2$ для ряда 1
[Figure 9. Definition of a $dy2$ step for rank 1]

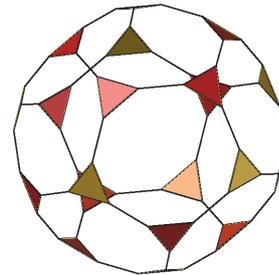


Рис. 10. Конструктивная форма 2
[Figure 10. Constructive form 2]

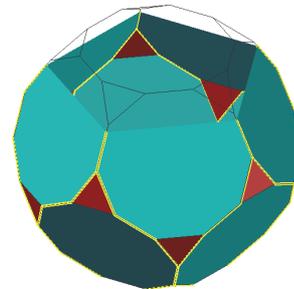


Рис. 11. Образование поверхности усеченного додекаэдра
[Figure 11. Formation of truncated dodecahedron]

Конструктивная форма 2, составленная из отсеков поверхностей 20 треугольных граней, изображена на рис. 10.

Визуализация образования поверхности усеченного додекаэдра в динамическом режиме осуществляется потребительской функцией, в которой в качестве блоков задействованы конструктивные формы 1 и 2. Фрагмент образования усеченного додекаэдра представлен на рис. 11.

2. Образование поверхности икосододекаэдра

Икосододекаэдр имеет 32 грани, среди них – 12 правильных пятиугольников и 20 правильных треугольников [рис. 12]. Все грани являются правильными многоугольниками двух типов – пятиугольник и треугольник. В каждой вершине сходятся два пятиугольника и два треугольника. Конфигурация вершины: 3, 3, 5, 5.

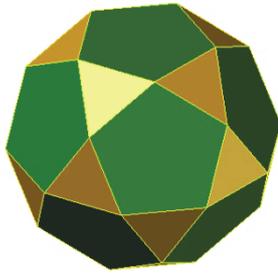


Рис. 12. Икосододекаэдр
[Figure 12. Icosododecahedron]

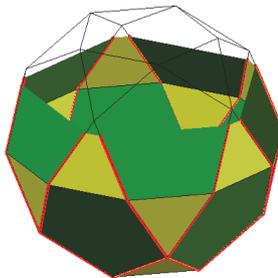


Рис. 13. Образование поверхности икосододекаэдра
[Figure 13. Formation of icosododecahedron surface formation]

Многогранник получается при срезании вершин додекаэдра плоскостями, проходящими через середины ребер додекаэдра. В результате такого усечения пятиугольные грани изменяются в размере и между ними образуются грани треугольной формы.

Усечение пятиугольников показано на рис. 14. Секущие линии l_i ($i = 1, \dots, 5$), проходят через середины сторон пятиугольника $MNKFQ$. Результат усечения – пятиугольник $ABCEG$.

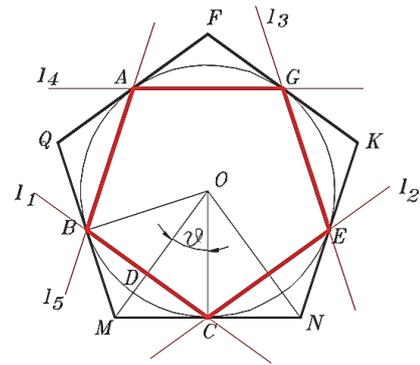


Рис. 14. Усечение пятиугольника $MNKFQ$ додекаэдра
[Figure 14. Truncation of the dodecahedron pentagon $MNKFQ$]

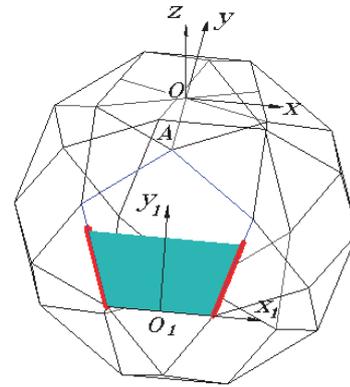


Рис. 15. Образование отсеков одной грани икосододекаэдра.
[Figure 15. Formation of compartments of a face of the icosododecahedron]

Окружность, описанная вокруг пятиугольника $ABCEG$, является вписанной в пятиугольник $MNKFQ$, радиус которой равен

$$OC = r * \cos \vartheta,$$

где r – радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника $MNKFQ$.

Сторона пятиугольника $ABCEG$ равна

$$BC = 2 * OC * \sin \vartheta.$$

Каркас икосододекаэдра содержит ячейки пятиугольной и треугольной форм (рис. 15). Образование отсеков пятиугольной грани показано на том же рисунке.

Отсеки поверхности треугольных граней расположены в четыре ряда.

Если шаг образования поверхности пятиугольной грани – $dy1$, то шаг $dy2$ образования отсеков треугольной грани равен:

$$dy2 = dy1 * \cos 30^\circ / \cos 36^\circ - \text{ряды 1, 4;}$$

$$dy2 = dy1 * \sin 60^\circ / \sin 72^\circ - \text{ряды 2, 3.}$$

С целью выполнения визуализации процесса образования икосододекаэдра создаются две конструктивных формы. Первая форма – набор отсеков поверхности пятиугольных граней, вторая – набор отсеков поверхности треугольных граней (рис. 16). Для использования в программе формирования поверхности икосододекаэдра конструктивные формы представляются в виде блоков.

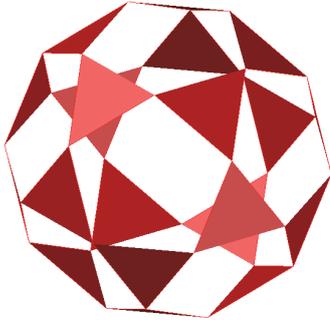


Рис. 16. Набор отсеков треугольных граней
[Figure 16. Set of compartments of triangular faces]

Икосододекаэдр в процессе образования показан на рис. 13.

3. Образование поверхности ромбоикосододекаэдра

Ромбоикосододекаэдр состоит из 12 правильных пятиугольников, 30 квадратов и 20 правильных треугольников [рис. 17]. В каждой из вершин сходятся треугольник, пятиугольник и два квадрата.

Ромбоикосододекаэдр формируется усечением ребер и вершин додекаэдра или икосаэдра. При усечении додекаэдра его 12 конгруэнтных правильных пятиугольников трансформируются в 12 уменьшенных правильных пятиугольников ромбоикосододекаэдра, расположенных в тех же плоскостях. В образовавшемся пространстве формируются 30 конгруэнтных квадратов и 20 конгруэнтных равносторонних треугольников.

Усечение ребра AC додекаэдра представлено на рис. 19. Для того чтобы стороны пятиугольников и образовавшегося между ними прямоугольника были равны между собой, необходимо выполнить условие подобия пятиугольников $ACQFE$ и $A_1C_1Q_1F_1E_1$:

$$\frac{BT}{BD} = \frac{A_1C_1}{AC}, \quad (7)$$

$$AC = 2 * r * \sin \vartheta \quad BD = r * \cos \vartheta, \quad (8)$$

где r – радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника додекаэдра (задан).

Если фигура $A_1C_1C_2A_2$ – квадрат, то $A_1C_1 = MT$.

$$A_1C_1 = 2 * (BD - BT) * \cos \beta, \quad (9)$$

где $\beta = \frac{180 - \psi_1}{2}$, $\psi_1 = 116,565^\circ$ – двугранный угол додекаэдра.

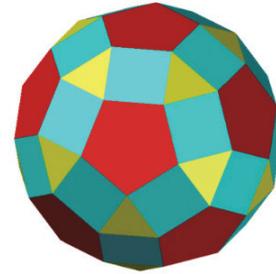


Рис. 17. Ромбоикосододекаэдр
[Figure 17. Romboicosododecahedron]

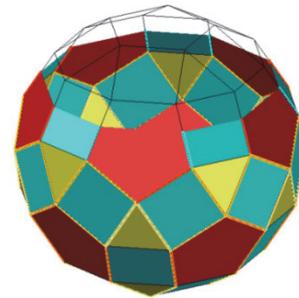


Рис. 18. Образование поверхности ромбоикосододекаэдра
[Figure 18. Formation of romboicosododecahedron surface]

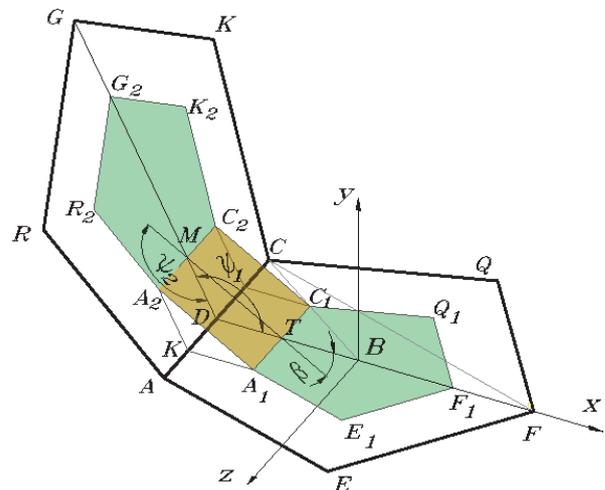


Рис. 19. Усечение ребра додекаэдра
[Figure 19. Truncation of the dodecahedron edge]

Выражения (7), (8), (9) позволяют найти величину стороны A_1C_1 , принадлежащей пятиугольнику ромбоикосододекаэдра, и прямоугольнику.

$$A_1C_1 = \frac{2 * r * \sin \vartheta}{1 + \frac{\tan \vartheta}{\cos \beta}}$$

Двугранный угол между пятиугольниками и квадратами равен

$$\psi_2 = \psi_1 + \beta \psi_2 = 148,283^\circ.$$

Таким образом, при усечении ребер додекаэдра образуются пятиугольники, центры которых совпадают с центрами прямоугольников додекаэдра, между пятиугольниками формируются квадраты, а между квадратами – конгруэнтные треугольники, стороны которых равны сторонам квадрата. Усеченные пятиугольники, квадраты и треугольники составляют каркас ромбоикосодекаэдра.

В ромбоикосодекаэдре имеется еще один двугранный угол ψ_3 между квадратом и треугольником (рис. 20).

$$\psi_3 = 180 - (\delta - \gamma),$$

где δ – угол между осью x и осью y_2 ; γ – угол между осью x и осью y_1 ; $\delta = \arcsin[(\cos \frac{\theta}{2}) * (\sin \psi_1)]$; $\gamma = \frac{\sin \beta}{\cos (\frac{\pi}{6})}$.

Конструктивная форма 1 образуется посредством функции Аггау для набора отсеков граней, представленных на рис. 21. По существу это участки двух меридианов, к первому меридиану относятся квадрат и пятиугольник (ряд слева), ко второму – два треугольника и квадрат (ряд справа). Между меридианами находятся половинки квадратов. Отсеки поверхности этих граней строятся в ячейках каркаса ромбоикосодекаэдра. Система координат соответствует SEIsometric.

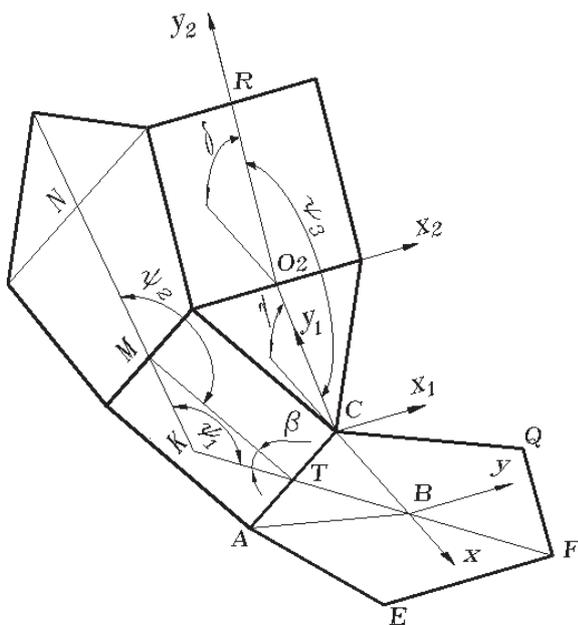


Рис. 20. Углы ромбоикосодекаэдра
[Figure 20. Angles of the rhombicuboctahedron]

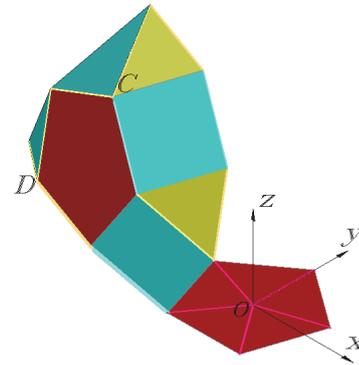


Рис. 21. Набор отсеков для формирования конструктивной формы 1
[Figure 21. Set of compartments for forming a structural form 1]

Алгоритм образования отсеков поверхности в ячейках 1-го меридиана:

- поворот системы координат вокруг оси z на 108° ;
- перенос системы координат в середину основания квадрата;
- поворот системы координат вокруг оси x на угол $(180 - \psi_1)$;
- формирование отсеков поверхности квадрата;
- перенос системы координат в основание пятиугольника;
- поворот системы координат вокруг оси x на угол $(180 - \psi_2)$;
- формирование отсеков поверхности пятиугольника;
- установка системы координат в положение World.

Алгоритм образования отсеков поверхности в ячейках 2-го меридиана:

- поворот системы координат вокруг оси z на 72° ;
- перенос системы координат в вершину нижнего треугольника;
- поворот системы координат на угол γ вокруг оси x ;
- формирование отсеков поверхности нижнего треугольника;
- перенос системы координат в основание квадрата;
- поворот системы координат вокруг оси x на угол $(180 - \psi_3)$;
- формирование отсеков поверхности квадрата;
- перенос системы координат в середину основания верхнего треугольника;
- поворот системы координат вокруг оси x на угол $(180 - \psi_3)$;
- формирование отсеков поверхности верхнего треугольника;
- установка системы координат в положение World.

Алгоритм образования отсеков поверхности в ячейках квадратов между меридианами 1 и 2:

- перенос системы координат в точку *C* или *D* и установка оси *u* перпендикулярно основанию любого треугольника;
- формирование отсеков поверхности треугольников;
- установка системы координат в положение World.

Конструктивная форма 2 формируется из отсеков граней, представленных на рис. 22.

Конструктивные формы 1 и 2 представлены на рис. 23 и 24.

Образование поверхности ромбоикосододекаэдра продемонстрировано на рис. 18.

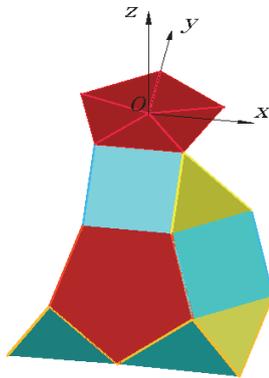


Рис. 22. Набор отсеков для формирования конструктивной формы 2
[Figure 22. Set of compartments for forming a structural form]

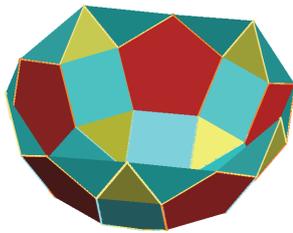


Рис. 23. Конструктивная форма 1
[Figure 23. Constructive form 1]

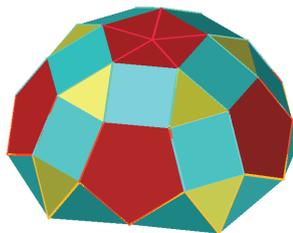


Рис. 24. Конструктивная форма 2
[Figure 24. Constructive form 1]

4. Образование поверхности усеченного икосододекаэдра

Усеченный икосододекаэдр формируется отсечением ребер и вершин додекаэдра.

При усечении додекаэдра необходимо его 12 конгруэнтных правильных пятиугольников трансформировать в 12 конгруэнтных правильных десятиугольников, а также образовать 30 конгруэнтных квадратов и 20 конгруэнтных равносторонних шестиугольников.

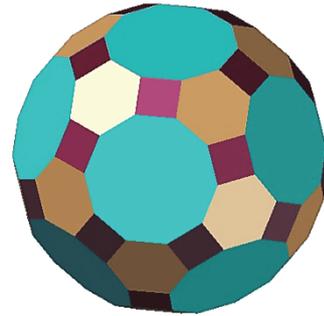


Рис. 25. Усеченный икосододекаэдр
[Figure 25. Truncated icosododecahedron]

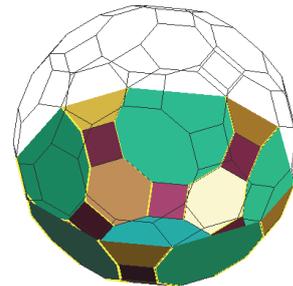


Рис. 26. Фрагмент формирования усеченного икосододекаэдра
[Figure 26. A fragment of the formation of a truncated icosododecahedron]

Стороны квадрата принадлежат и десятиугольнику, и шестиугольнику (рис. 25). Поэтому стороны всех многоугольников, составляющих усеченный икосододекаэдр, будут равны друг другу, если при усечении будет выполнено условие равенства стороны десятиугольника стороне квадрата:

$$A_1A_2 = A_1C_1. \quad (10)$$

На рис. 27 изображены два десятиугольника и квадрат после усечения ребра *AC* додекаэдра.

Расстояние между основанием десятиугольника и ребром додекаэдра равно

$$DT = DM = r * \cos 36^\circ - r_1 * \cos 18^\circ, \quad (11)$$

где *r* – радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника (задано), $r = AB = AC$; r_1 – радиус

окружности, описанной вокруг десятиугольника,

$$r_1 = BC_1.$$

$$r_1 = \frac{A_1C_1}{2 \cdot \sin 18^\circ}.$$

$$DT = r \cdot \cos 36^\circ - \frac{A_1C_1}{2 \cdot \tan 18^\circ}. \quad (12)$$

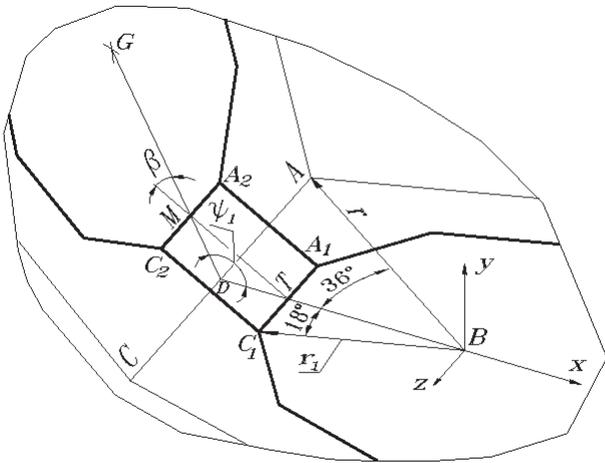


Рис. 27. Усечение ребра додекаэдра
[Figure 27. Truncation of the dodecahedron edge]

Величину стороны квадрата можно определить из выражения

$$A_1A_2 = MT = 2 \cdot DT \cdot \cos \beta. \quad (13)$$

Принимая во внимание, что $A_1A_2 = A_1C_1$, а также выражения (11), (12) и (13), получим

$$A_1A_2 = \frac{2 \cdot \cos \beta \cdot r \cdot \cos 36^\circ}{1 + \frac{\cos \beta}{\tan 18^\circ}}.$$

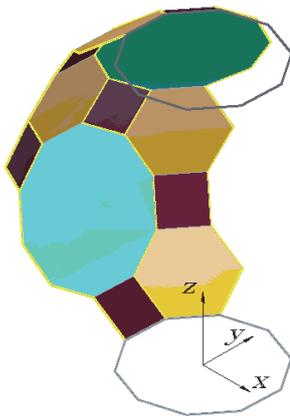


Рис. 28. Отсеки граней для формирования конструктивной формы
[Figure 28. Compartments of faces for the formation of a structural form]

Итак, стороны всех многоугольников равны по величине стороне квадрата A_1A_2 .

Полученные данные позволяют построить каркас усеченного икосододекаэдра на базе додекаэдра Платона. Двугранный угол между квадратом и десятиугольником равен двугранному углу между квадратом и пятиугольником в ромбоикосододекаэдре, двугранный угол между квадратом и шестиугольником равен двугранному углу между квадратом и пятиугольником в ромбоикосододекаэдре.

Для визуализации процесса образования усеченного додекаэдра строится конструктивная форма из отсеков граней рассматриваемого многогранника. Форма образуется формированием полярного массива из заранее сформированных отсеков двух меридианов (рис. 28). Алгоритм образования отсеков меридианов аналогичен алгоритму, приведенному для ромбоикосододекаэдра.

Образование поверхности показано на рис. 26.

Заключение

Результатом проведенной работы является создание алгоритмов и программного обеспечения на языке AutoLISP для образования электронных моделей и визуализации формирования кинематическим способом поверхностей следующих полуправильных многогранников Архимеда:

- усеченного додекаэдра;
- икосододекаэдра;
- ромбоикосододекаэдра;
- усеченного икосододекаэдра.

Список литературы

1. Савченко В. Полуправильные многогранники // Квант. 1976. № 1. С. 3.
2. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. М.: МЦНМО, 2010. 136 с.
3. Шишова А.Б. Полуправильные многогранники // Концепт. 2015. Т. 25. С. 191–195. URL: <http://e-koncept.ru/2015/65341.htm>. (дата обращения: 14.01.2020).
4. Геометрия многогранных поверхностей и их проекций. URL: <https://studfile.net/preview/5185316/page:13/> (дата обращения: 14.01.2020).
5. Полуправильные и звездчатые многогранники. URL: <http://www.vasmirnov.ru/Lecture/SemRegPol/SemRegPol.htm> (дата обращения: 14.01.2020).
6. Васильева В.Н. Золотое сечение и золотые прямоугольники при построении икосаэдра, додекаэдра и тел Архимеда, основанных на них // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. Вып. 2. С. 47–55.
7. Ерикина Е.Б., Королькова Н.Н. Геометрическое моделирование в автоматизированном проектировании архитектурных объектов // Геометрия и графика. 2016. Т. 4. № 2. С. 48–54. doi: 10.12737/19833.

8. *Schroeder W., Martin K., Lorensen B.* The Visualization Toolkit. Kitware, Inc., 2003.
9. *Haber R.B.* Visualization Techniques for Engineering Mechanics // Computing Systems in Engineering. 1990. Vol. 1. No. 1. Pp. 37–50.
10. *Dupac M., Popirlan C.-I.* Web Technologies for Modelling and Visualization in Mechanical Engineering. 2010, April 1. doi: 10.5772/9037.
11. *Gallagher R.S., Press S.* Computer Visualization: Graphics Techniques for Engineering and Scientific Analysis. CRC Press, 1994. 336 p.
12. *Caha J., Vondrakova A.* Fuzzy surface visualization using HSL colour model // Electronic Journal. 2017. Vol. 2. No. 2. Pp. 26–42.
13. *Иванов В.Н., Кривошапко С.Н.* Основы разработки и визуализации объектов аналитических поверхностей и перспективы их использования в архитектуре и строительстве // Геометрия и графика. 2017. Т. 5. № 4. С. 3–14.
14. *Иванов В.Н., Романова В.А.* Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCad, AutoCad: монография. М.: АСВ, 2016. 412 с.
15. *Кухарчук А.И., Романова В.А.* Визуализация решения графических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2014. № 1. С. 23–28.
16. *Romanova V.A., Rynkovskaya M., Ivanov V.* Automatic Modeling of Surfaces with Identical Slopes // Advanced Structured Materials. Vol. 92. Springer Verlag, 2019. Pp. 143–156. doi: 10.1007/978-3-319-79005-3_10.
17. *Хейфец А.Л., Логиновский А.Н., Буторина И.В., Васильева В.Н.* Инженерная 3D-компьютерная графика: учебник и практикум для академического бакалавриата / под ред. А.Л. Хейфеца. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2015. 602 с.
18. *Романова В.А.* Особенности изображения процесса образования поверхностей в системе AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 3–5.
19. *Романова В.А.* Визуализация правильных многогранников в процессе их образования. // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. Вып. 1. С. 55–67. doi: 10.12737/article5c91ff d0916d52/90296375.
20. *Романова В.А.* Визуализация образования поверхностей полуправильных многогранников в среде AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 449–457. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-449-457>

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-279-289

RESEARCH PAPER

Visualizing surface formation of semi-regular polyhedra of Archimedes

Viktoryna A. Romanova

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation
v.a.r-viktoryna@mail.ru

Article history:

Received: May 17, 2020

Revised: July 02, 2020

Accepted: July 12, 2020

Abstract

The most common method of forming semi-control polyhedra consists in cutting off angles and ribs of regular polyhedra by planes. **The aim of the work** – to consider the automated formation of a number of surfaces of semi-regular Archimedean polyhedra based on the dodecahedron. These include the truncated dodecahedron, the icosododecahedron, the romboicosododecahedron and the truncated icosododecahedron. The formation of surfaces is carried out by the kinematic method in AutoCAD using programs compiled in the AutoLISP language. **Methods.** The methodology for the formation of these polyhedra provides for truncation of the angles and edges of the dodecahedron. This requires the calculation of a number of geometric parameters of these polyhedra and dodecahedron, such as the value of the truncation of the dodecahedron edges, the size of the edges of truncated polyhedra, the centers of faces, dihedral angles, etc. In order to generate these surfaces, a frame is constructed because the frame lines are used as guides to form surfaces in a kinematic way. The electronic model of each polyhedron is constructed as a set of compartments of surfaces of all its faces, and each compartment is assigned to a certain layer of the drawing. The frame and electronic model of the polyhedra under study are formed by means of user programs composed in the functional language AutoLISP. The process of forming surfaces of selected polyhedra in the AutoCAD environment is provided by special programs that are also compiled in the AutoLISP language. **Results.** Software was created to demonstrate the process of formation of a number of Archimedes polyhedra on the monitor screen.

Keywords: semi-regular polyhedron, truncated dodecahedron, icosododecahedron, romboicosododecahedron, truncated icosododecahedron, electronic model, polyhedron formation, guide line, forming line, AutoCAD, AutoLISP

For citation

Romanova V.A. Visualizing surface formation of semi-regular polyhedra of Archimedes. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4): 279–289. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-279-289> (In Russ.)

Viktoryna A. Romanova, Associate Professor of the Department of Civil Engineering of Academy of Engineering, eLIBRARY SPIN-code: 3869-5969.

References

1. Savchenko V. Polupravilnye mnogogranniki [Semi-controlled polyhedral]. *Quant.* 1979;(1):3. (In Russ.)
2. Smirnova I.M., Smirnov V.A. *Pravilnye, polupravilnye i zvezdchatye mnogogranniki [Correct, Semi-Control and Star Polyhedra]*. Moscow: MCNMO Publ.; 2010. (In Russ.)
3. Shishova A.B. Polupravilnye mnogogranniki [Semi-controlled polyhedral]. *Concept.* 2015;(25):191–195. Available from: <http://e-koncept.ru/2015/65341.htm> (accessed: January 14, 2020). (In Russ.)
4. Geometriya mnogogrannykh poverkhnostei i ikh proektsii [Geometry of polyhedral surfaces and their projections]. Available from: <https://studfile.net/preview/5185316/page:13/> (accessed: January 14, 2020).
5. Polupravilnye i zvezdchatye mnogogranniki [Semi-regular and stellate polyhedral]. Available from: <http://www.vasmirnov.ru/Lecture/SemRegPol/SemRegPol.htm> (accessed: January 14, 2020).
6. Vasilieva V.N. Golden Section and Golden Rectangles When Building Icosahedron, Dodecahedron and Archimedean Solids Based On Them. *Geometry and graphics.* 2019;7(2):47–55. doi: 10.12737/article_5d2c1ceb9f91b1.21353054. (In Russ.)
7. Ertskina E.B., Korolkova N.N. Geometric Modeling in Automated Design of Architectural Objects. *Geometry and Graphic.* 2016;4(2):48–54. doi: 10.12737/19833. (In Russ.)
8. Schroeder W., Martin K., Lorensen B. *The Visualization Toolkit*. Kitware, Inc.; 2003.
9. Haber R.B. Visualization Techniques for Engineering Mechanics. *Computing Systems in Engineering*, 1990; 1(1):37–50.
10. Dupac M., Popirlan C.-I. *Web Technologies for Modelling and Visualization in Mechanical Engineering*. April 1, 2010. doi: 10.5772/9037.
11. Gallagher R.S., Press S. *Computer Visualization: Graphics Techniques for Engineering and Scientific Analysis*. CRC Press; 1994.
12. Gallagher R.S., Press S. Fuzzy surface visualization using HSL colour model. *Electronic Journal.* 2017;2(2):26–42.
13. Ivanov V.N., Krivoschapko S.N., Romanova V.A. Bases of development and visualization of objects of analytical surfaces and the prospect of their use in architecture and construction. *Geometry and graphics.* 2017;5(4):3–14. (In Russ.)
14. Ivanov V.N., Romanova V.A. *Konstruktivnyye formy prostranstvennykh konstruksii. Vizualizatsiya poverkhnostei v sistemakh MathCad, AutoCad [Constructive forms of space constructions. Visualization of the surfaces at systems MathCad, AutoCad]*: monograph. Moscow: ASV Publ.; 2016. (In Russ.)
15. Kukharchuk A.I., Romanova V.A. Visualization of the Solution of Graphic Problems. *RUDN Journal of Engineering Researches.* 2014;(1):23–28. (In Russ.)
16. Romanova V.A., Rynkovskaya M., Ivanov V. Automatic Modeling of Surfaces with Identical Slopes. *Advanced Structured Materials.* 2019;(92):143–156. doi: 10.1007/978-3-319-79005-3_10. (In Russ.)
17. Heifetz A.L., Loginovsky A.N., Butorina I.V., Vasilyev V.N. *Inzhenernaya 3D-kompyuternaya grafika [Engineering 3D computer graphics]*: textbook and workshop for academic baccalaureate. Moscow: Yurayt Publ.; 2015. (In Russ.)
18. Romanova V.A. Features of the image of the process of surface formation in the AutoCAD system. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2012; (4):3–5. (In Russ.)
19. Romanova V.A. Visualization of regular polyhedrons in the process of their formation. *Geometry and graphics.* 2019;7(1):55–67. doi: 10.12737/article5c91ff d0916d52/90296375. (In Russ.)
20. Romanova V.A. Vizualizing of semi-regular polyhedrons in AutoCAD environment. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2019;15(6): 449–457. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-449-457> (In Russ.)



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ EXPERIMENTAL RESEARCHES

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297
UDC 624.012.45

RESEARCH PAPER

Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion

Vladimir I. Travush¹, Nikolay I. Karpenko², Vladimir I. Kolchunov^{3*}, Semen S. Kaprielov⁴, Alexey I. Demyanov³, Sergei A. Bulkin⁵, Violetta S. Moskovtseva³

¹Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 24 Bolshaya Dmitrovka St, bldg. 1, Moscow, 107031, Russian Federation

²Building Physics Research Institute of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 21 Lokomotivnyi Passage, Moscow, 127238, Russian Federation

³South-West State University, 94 50 let Oktyabrya St, Kursk, 305040, Russian Federation

⁴Research, Design and Technological Institute of Concrete and Reinforced Concrete named after A.A. Gvozdev, 6 2-ya Institutskaya St, bldg. 5, Moscow, 109428, Russian Federation

⁵GORPROJECT, 5 Nizhnii Susal'nyi Lane, Moscow, 105064, Russian Federation

*vlik52@mail.ru

Article history:

Received: April 07, 2020

Revised: June 24, 2020

Accepted: July 10, 2020

Abstract

The aim of the work – experimental investigation on crack propagation and deformation in high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion for the development of practical methods of crack resistance, deformation and strength analysis of such structures, and also for the accumulation of new experimental data on resistance under combined loading. **Method** is experimental-theoretical. **Results.** Deflection plots and force-deformation relationships for high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion are determined experimentally. Principal deformations in terms of elongation and compression of concrete for the experimental beam structures with high torsion to bending moment ratio are determined. It is established that for high-strength fiber reinforced concrete structures of circular cross-section, generally, development of one-two discrete cracks is observed, therefore the circular shape of the cross-section slightly reduces the concentration defined by the material structure of high-strength concrete. On the basis of the conducted investigation on high-strength fiber reinforced concrete structures with circular sections, new experimental data on the combined stress-strain state in the studied areas of resistance is obtained, such as: values of generalized cracking, and failure, load, its level relative to the ultimate load; distance between the cracks at different stages of crack propagation; crack widths at principal reinforcement axis level, at a double diameter distance from the principal rebar axes and also along the entire crack profile at various stages of loading; coordinates of nonplanar crack formations; patterns of crack formation, development and opening in reinforced concrete structures under combined bending and torsion.

Keywords: reinforced concrete structures, high-strength concrete, fiber reinforced concrete, combined bending and torsion, experimental results

For citation

Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S. Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):290–297. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297>

Vladimir I. Travush, Vice President, Doctor of Technical Sciences, Professor, eLIBRARY SPIN-code: 6462-2331, Scopus Author ID: 6602647191.

Nikolay I. Karpenko, Head of Laboratory “Problems of Strength and Quality in Building”, Doctor of Technical Sciences, Professor, eLIBRARY SPIN-code: 3027-2197, Scopus Author ID: 56966400200.

Vladimir I. Kolchunov, Professor at the Department of Unique Buildings and Structures, Doctor of Technical Sciences, Professor, SPIN-code: 3990-0345, Scopus Author ID: 0000-0001-5383-0831, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5290-3429>

Semen S. Kaprielov, Head of Laboratory, Doctor of Technical Sciences, AuthorID: 601541, Scopus Author ID: 780-163-23-23.

Alexey I. Demyanov, Associate Professor at the Department of Unique Buildings and Structures, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, eLIBRARY SPIN-code: 1447-1505, Scopus Author ID: 57202804437.

Sergei A. Bulkin, chief designer.

Violetta S. Moskovtseva, engineer at the Department of Unique Buildings and Structures.

© Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Comparing the obtained crack pattern with the pattern in regular reinforced concrete structures in the acting region of bending and torsional moments [11; 18; 22] it can be stated that such structures form an entire network of cracks. In addition to that, with increasing load new cracks are being formed, and correspondingly the distances between them and the intensity of development of the already formed cracks change. Therefore, the deformation concentration in the reinforcement due to crack propagation is decreasing in the structures from regular concrete.

The obtained experimental results on the features and physical process of crack propagation in high-strength fiber reinforced concrete structures allow to conclude that the traditionally applied theoretical model of reinforced concrete deformation for service limit state, which is based on the hypothesis of averaging deformations after crack formation (coefficient ψ_s), needs correction in regards to the reinforced concrete in consideration.

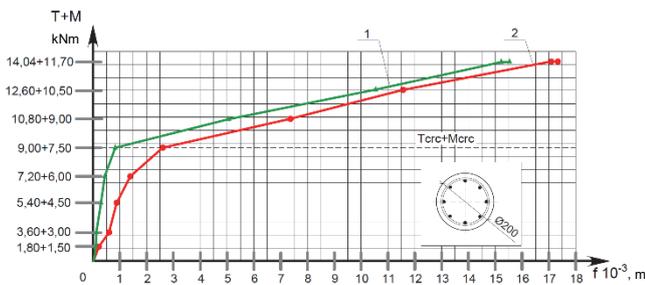


Figure 2. Deflections of test sample structure from high-strength fiber reinforced concrete FB-CR-720 (1):
 1 – deflection according to indicator I2;
 2 – deflection according to indicator I3

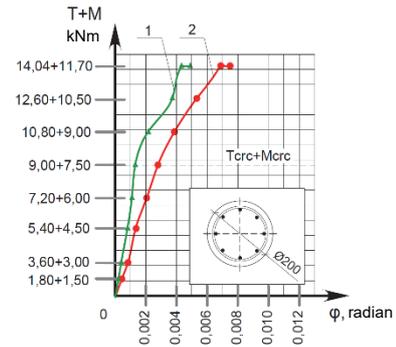


Figure 3. Angles of deflection of test sample structure from high-strength fiber reinforced concrete FB-CR-720 (1):
 1 – angle of deflection according to indicators I1–I2;
 2 – angle of deflection according to indicators I3–I4

From the analysis of experimental deflections and angles of deflection of tested structures (Figures 2 and 3) it can be noted that the relative cracking load level in fiber reinforced concrete beams $(T+M)/(T_u+M_u)$ is significantly higher than in structures from regular concrete. For all FB-CR-720 beam test samples the mentioned ratio comprised 0,55–0,64. This implies that the presence of fiber in structures from high-strength reinforced concrete under the considered stress state substantially increases the second stage of the stress-strain state, and this feature should be accounted for in the design.

The obtained experimental graphs of concrete compressive strains in the test samples from strain gauge measurements are of interest as well (Figures 4 and 5). Strain gauge rosettes were processed after the gauge measurements according to the know formulas for determination of the principal tensile (compressive) deformations of concrete.

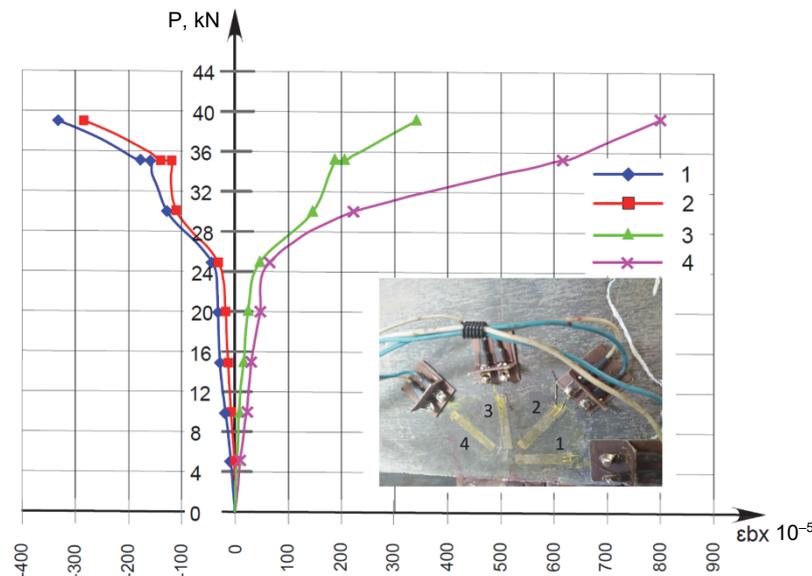


Figure 4. Loading force to concrete deformation relationship for test sample structure from high-strength fiber reinforced concrete FB-CR-720 (1), side A

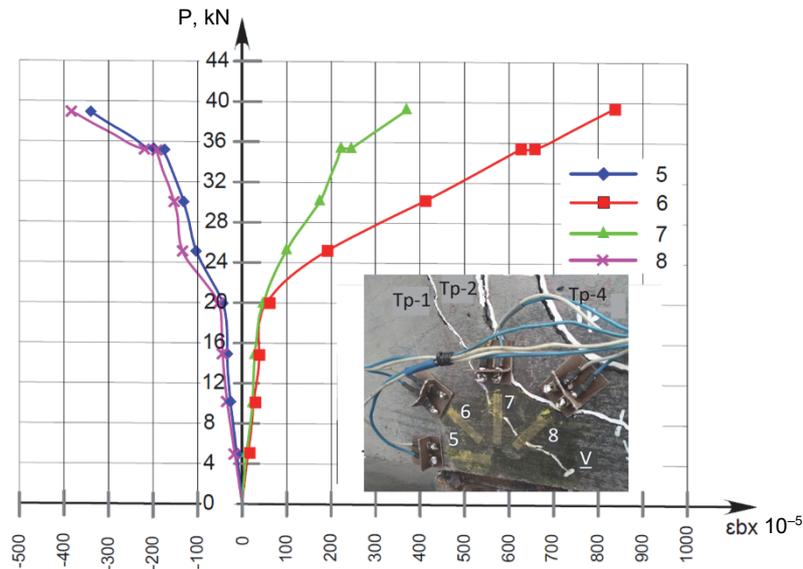


Figure 5. Loading force to concrete deformation relationship for test sample structure from high-strength fiber reinforced concrete FB-CR-720 (1), side B

So, with regard to FB-CR-720 (1) beam side A (Figure 4) the following is obtained:

$$\text{– load step } \frac{P_i}{P_{\max}} = 1,0,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-231 + 340}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-231) - (-183))^2}{+((-183) - 340)^2}} = 427.5, \quad (1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-231 + 340}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-231) - (-183))^2}{+((-183) - 340)^2}} = -318.5, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(-183) - ((-231) + 340)}{-231 - 340} = 0,83(20^\circ); \quad (3)$$

$$\text{– load step } \frac{P_i}{P_{\max}} = 0,8,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-130 + 245}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-130) - (-112))^2}{+((-112) - 245)^2}} = 261, \quad (4)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-130 + 245}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-130) - (-112))^2}{+((-112) - 245)^2}} = -311, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(-112) - ((-130) + 245)}{-130 - 245} = 0,29(8^\circ); \quad (6)$$

$$\text{– load step } \frac{P_i}{P_{\max}} = 0,6,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-116 + 98}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-116) - (-96))^2}{+((-96) - 98)^2}} = 129.5, \quad (7)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-116 + 98}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-116) - (-96))^2}{+((-96) - 98)^2}} = -147.5, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(-96) - ((-116) + 98)}{-116 - 98} = 0,81(20^\circ). \quad (9)$$

With regard to FB-CR-720 (1) beam side B (Figure 5) the following is obtained:

$$\text{– load step } \frac{P_i}{P_{\max}} = 1,0,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-345 + 370}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-345) - 840)^2}{+(840 - 370)^2}} = 917.5, \quad (10)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-345 + 370}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-345) - 840)^2}{+(840 - 370)^2}} = -892.5, \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot 840 - ((-345) + 370)}{-345 - 370} = -2,31(33^\circ); \quad (12)$$

$$\text{– load step } \frac{P_i}{P_{\max}} = 0,8,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-234 + 273}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-234) - 612)^2}{+(612 - 273)^2}} = 666,5, \quad (13)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-234 + 273}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-234) - 612)^2}{+(612 - 273)^2}} = -627,5, \quad (14)$$

$$\text{tg}2\varphi = \frac{2 \cdot 612 - ((-234) + 273)}{-234 - 273} = -2,34(33^\circ); \quad (15)$$

$$\text{– load step } \frac{P_i}{P_{\max}} = 0,6,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-203 + 220}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-203) - 329)^2}{+(329 - 220)^2}} = 394, \quad (16)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-203 + 220}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{((-203) - 329)^2}{+(329 - 220)^2}} = -377, \quad (17)$$

$$\text{tg}2\varphi = \frac{2 \cdot 329 - ((-203) + 220)}{-203 - 220} = -1,52(28^\circ). \quad (18)$$

Experimental investigation of the considered beam structures from high-strength reinforced concrete produces a number of important parameters for the evaluation of resistance of reinforced concrete structures to combined loading – bending with torsion, given in Table. They include the following: coordinates of nonplanar crack formation, generalized cracking load $R_{\text{sup},crc}$; failure load $R_{\text{sup},u}$; width of nonplanar crack which governed failure on the level of longitudinal and transverse reinforcement axes, at a double diameter distance from reinforcement axes and along the entire crack profile; changes in the distance between cracks l_{crc} with increasing load.

Table

Experimental parameters of resistance of fiber reinforced concrete structures under combined bending and torsion

Structure notation	$R_{\text{sup},crc}$, kN	$R_{\text{sup},\max}$, kN	P_{\max} , kN	Load step, P_i/P_{\max}	Nonplanar crack, which governed failure			Actual height of the compression zone, x_{fact} , mm	Coordinates of nonplanar crack formation	
					$a_{crc,1}$, mm	$a_{crc,2}$, mm	$l_{crc,\max}$, mm		x_{exp} , mm	y_{exp} , mm
FB-CR-720 (1) Side A	12.5	17.5	35.0	0.57	–	–	368	–	–35.3	–22.5
				0.85	0.2	0.3		50		
				1	1.8	4.8		0		
FB-CR-720 (1) Side B	12.5	17.5	35.0	0.57	–	–	368	–	–154.7	43.9
				0.85	0.1	0.2		70		
				1	1.2	1.6		20		
FB-CR-720 (2) Side A	15.0	19.5	39.0	0.64	–	–	377	–	–44.8	–18.0
				0.77	0.1	0.2		40		
				1	0.5	1.8		0		
FB-CR-720 (2) Side B	15.0	19.5	39.0	0.64	–	–	377	–	–168.1	35.6
				0.77	–	–		95		
				1	0.1	1		15		
FB-CR-720 (3) Side A	17.5	260	52.0	0.67	–	–	224	–	122.5	–93.4
				0.76	0.1	0.17		102		
				1	3.5	4		10		
FB-CR-720 (3) Side B	17.5	260	52.0	0.67	–	–	224	–	–116.8	–36.4
				0.62	0.1	0.11		30		
				0.82	0.1	0.16		0		

The actual height of compression zone x_{fact} and the height of compressed concrete above the inclined crack x_B in the effective section 1–1 (going through the end of the nonplanar crack), deflections and angles of deflection, values of nonplanar cracks projections onto the horizontal were also determined.

As a result, the obtained experimental data allow to verify the accuracy of the analytical model of resistance of fiber reinforced concrete structures to combined bending and torsion, and will be useful for the accumulation of new experimental information on the stress-strain state of reinforced concrete structures under combined loading.

Conclusion

Experimental investigation of beams from high-strength fiber reinforced concrete with circular cross-section produced new data on the stress-strain state parameters of such structures under combined bending and torsion. They include the values of generalized cracking load and failure load, concrete deformation in the region of the reference section, structure deflections and angles of deflection, nonplanar crack patterns and the distance between cracks at different loading stages, crack widths on the level of principal reinforcement axis and at a double diameter distance from this axis, and also along the entire crack profile at different loading stages, coordinates of nonplanar crack formation at the considered stress state.

It is established that for beams from high-strength fiber reinforced concrete with circular cross-section during cracking several discrete cracks propagate, from which one stands out with increasing load and which then governs the failure. At the stages close to failure this crack becomes predominant over the other and has the maximum width. It was also established that the relative cracking load in fiber reinforced concrete structures is high and it comprised 0.55–0.64 from the failure load for the tested structures.

The obtained and previously undetermined experimental parameters on the stress-strain state of fiber reinforced concrete structures are relevant for the analysis and verification of the developing analytical model, evaluation of resistance of such structures under combined bending and torsional moments.

Список литературы

1. Travush V.I., Kolchunov V.I., Klyueva N.V. Some directions of development of survivability theory of structural systems of buildings and structures. *Industrial and civil engineering*. 2015;(3):4–11. (In Russ.)
2. Nazarov Yu.P., Gorodetskiy A.S., Simbirkin V.N. К проблеме обеспечения живучести строителных конструкций при аварийных воздействиях [About a problem

of survivability support of building structures subjected to emergency actions]. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2009;(4):5–9. (In Russ.)

3. Kodysh E.N. Designing the protection of buildings and structures against progressive collapse in view of the emergence of a special limiting state. *Industrial and civil engineering*. 2018;(10):95–101. (In Russ.)

4. Travush V.I., Shapiro G.I., Kolchunov V.I., Leontyev Ye.V., Fedorova N.V. Design of protection of large-panel buildings against progressive collapse. *Housing construction*. 2019;(3):40–46. (In Russ.)

5. Bondarenko V.M. *Raschetnye modeli silovogo soprotyvleniya zhelezobetona [Analytical models reinforced concrete resistance]*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.)

6. Shan S. et al. Experimental study on the progressive collapse performance of RC frames with infill walls. *Eng. Struct.* 2016;(111):80–92.

7. Jariwalaa V.H., Patel P.V., Purohit S.P. Strengthening of RC beams subjected to combined torsion and bending with GFRP composites. *Procedia Engineering*. 2013;(51):282–289.

8. Golyshev A.B. *Soprotivlenie zhelezobetona [The resistance of reinforced concrete]*. Kiev: Osnova Publ.; 2009. (In Russ.)

9. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Kontseptsiya i napravleniya razvitiya teorii konstruktivnoy bezopasnosti zdaniy i sooruzheniy pri silovykh i sredovykh vozdeystviyakh [The concept and directions of development of the theory of structural safety of buildings and structures under the influence of force and environmental factors]. *Industrial and civil engineering*. 2013;(2):28–31. (In Russ.)

10. Morozov V.I., Bakhotsky I.V. Calculation fibre-reinforced structures subject to joint effect of torsion of the bend. *Modern problems of science and education*. 2013;(5):109. (In Russ.)

11. Bakhotsky I.V. Experimental investigations of fibre-reinforced concrete elements exposed to bending with torsion. *Modern problems of science and education*. 2013;(5):99. (In Russ.)

12. Mostofinejad D., Talaeitaba S.B. Nonlinear modeling of RC beams subjected to torsion using the smeared crack model. *Procedia Engineering*. 2011;(14):1447–1454.

13. Hii A.K.Y., Al-Mahaidi R. An experimental and numerical investigation on torsional strengthening of solid and boxsection RC beams using CFRP laminates. *Composite Structures*. 2006;75(1):213–221.

14. Ghobarah A., Ghorbel M.N., Chidiak S.E. Upgrading torsional resistance of reinforced concrete beams using fiber-reinforced polymer. *Journal of Composites for Construction (ASCE)*. 2002;6(4):257–263.

15. Demyanov A., Kolchunov V.I. The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017;15(3):381–386. doi: 10.5937/jaes15-14663.

16. Lin K. et al. Experimental study of a novel multi-hazard resistant prefabricated concrete frame structure. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2019;(119):390–407.

17. Ogawa Y., Kawasaki Y., Okamoto T. Fracture behavior of RC members subjected to bending shear and torsion using acoustic emission method. *Construction and Build-*

ding Materials. 2014;67:165–169. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2014.05.100.

18. Awadh E.A. Torsion plus bending and shear on reinforced concrete beams. *Journal of Engineering and Sustainable Development*. 2016;(4):277–288.

19. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Konorev A.V. Main results of experimental studies of reinforced concrete structures of high-strength concrete B100 round and circular cross sections in torsion with bending. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(1):51–61. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-1-51-61> (In Russ.)

20. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Konorev A.V. The results

of experimental studies of structures square and box sections in torsion with bending. *Buildings and Reconstruction*. 2018; 6(80):32–43. (In Russ.)

21. Kolchunov V.I., Demyanov A.I., Naumov N.V. The program and methodology of experimental studies of composite reinforced concrete structures under the action torsion with bending. *Buildings and Reconstruction*. 2018; 1(75):22–30. (In Russ.)

22. Kolchunov V.I., Salnikov A.S. Eksperimental'nyye issledovaniya treshchinoobrazovaniya zhelezobetonnyye konstruktivnyy pri kruchenii s izgibom [Experimental studies of crack formation reinforced concrete constructions in torsion with bending]. *Buildings and Reconstruction*. 2016;3(65): 24–32. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-290-297

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Результаты экспериментальных исследований сложнонапряженных балок круглого поперечного сечения из высокопрочного фиброжелезобетона

В.И. Травуш¹, Н.И. Карпенко², В.И. Колчунов^{3*}, С.С. Каприелов⁴,
А.И. Демьянов³, С.А. Булкин⁵, В.С. Московцева³

¹Российская академия архитектуры и строительных наук, Российская Федерация, 107031, Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24, стр. 1

²Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Российская Федерация, 127238, Москва, Локомотивный пр-д, 21

³Юго-Западный государственный университет, Российская Федерация, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94

⁴Научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический институт бетона и железобетона имени А.А. Гвоздева, Российская Федерация, 109428, Москва, ул. 2-я Институтская, д. 6, корп. 5

⁵ЗАО «Горпроект», Российская Федерация, 105064, Москва, Нижний Сусальный пер., д. 5, стр. 5А

*vlik52@mail.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 7 апреля 2020 г.

Доработана: 24 июня 2020 г.

Принята к публикации: 10 июля 2020 г.

Аннотация

Цель исследования – экспериментальное изучение особенностей трещинообразования и деформирования сложно напряженных балок круглого поперечного сечения из высокопрочного фиброжелезобетона для развития практических методов расчета трещиностойкости, жесткости и прочности таких конструкций при кручении с изгибом, а также для накопления новых опытных данных о сложном силовом сопротивлении. **Метод исследования** – экспериментально-теоретический. **Результаты.** Экспериментально определены опытные значения и построены графики прогибов и углов поворота, зависимостей деформаций бетона от нагрузки для сложнонапряженных балок круглого поперечного сечения из высокопрочного фиброжелезобетона. Определены главные деформации удлинения и укорочения бетона для опытных конструкций балок с высоким уровнем соотношения крутящего и изгибающего моментов. Установлено, что для железобетонных конструкций из высокопрочного фиброжелезобетона круглого сечения, как правило, наблюдается развитие дискретных одной-двух трещин, следовательно, круглая форма поперечного сечения несколько снижает концентрацию, обусловленную структурой высокопрочного бетона. На основании проведенных испытаний железобетонных конструкций из высокопрочного фиброжелезобетона круглого сечения получены новые экспериментальные данные о сложном напря-

Травуш Владимир Ильич, вице-президент, доктор технических наук, профессор, eLIBRARY SPIN-код: 6462-2331, Scopus Author ID: 6602647191.

Карпенко Николай Иванович, заведующий лабораторией «Проблемы прочности и качества в строительстве», доктор технических наук, профессор, eLIBRARY SPIN-код: 3027-2197, Scopus Author ID: 56966400200.

Колчунов Владимир Иванович, профессор кафедры уникальных зданий и сооружений, доктор технических наук, профессор, eLIBRARY SPIN-код: 3990-0345, Scopus Author ID: 0000-0001-5383-0831.

Каприелов Семен Суменович, заведующий лабораторией, доктор технических наук, Author ID: 601541, Scopus Author ID: 780-163-23-23.

Демьянов Алексей Иванович, доцент кафедры уникальных зданий и сооружений, кандидат технических наук, доцент, eLIBRARY SPIN-код: 1447-1505, Scopus Author ID: 57202804437.

Булкин Сергей Александрович, главный специалист-конструктор.

Московцева Виолетта Сергеевна, инженер кафедры уникальных зданий и сооружений.

Для цитирования

Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S. Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 4. С. 290–297. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297>

женно-деформированном состоянии в исследуемых областях сопротивления, такие как: значения обобщенной нагрузки трещинообразования и разрушения, ее уровень относительно предельной нагрузки; расстояние между трещинами на разных уровнях трещинообразования; ширина раскрытия трещин на уровне оси рабочей арматуры и на удалении двух диаметров от осей арматуры, а также вдоль всего профиля трещины на различных ступенях нагружения; координаты точек образования пространственных трещин; схемы образования, развития и раскрытия трещин железобетонных конструкций при рассматриваемом сложном напряженном состоянии – кручении с изгибом.

Ключевые слова: железобетонные конструкции, высокопрочный бетон, фибро-железобетон, кручение с изгибом, результаты эксперимента

References

1. Травуш В.И., Колчунов В.И., Ключева Н.В. Некоторые направления развития теории живучести конструктивных систем зданий и сооружений // *Промышленное и гражданское строительство*. 2015. № 3. С. 4–11.
2. Назаров Ю.П., Городецкий А.С., Симбиркин В.Н. К проблеме обеспечения живучести строительных конструкций при аварийных воздействиях // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2009. № 4. С. 5–9.
3. Кодыш Э.Н. Проектирование защиты зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения с учетом возникновения особого предельного состояния // *Промышленное и гражданское строительство*. 2018. № 10. С. 95–101.
4. Травуш В.И., Шатино Г.И., Колчунов В.И., Леонтьев Е.В., Федорова Н.В. Проектирование защиты крупнопанельных зданий от прогрессирующего обрушения // *Жилищное строительство*. 2019. № 3. С. 40–46.
5. Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Концепция и направления развития теории конструктивной безопасности зданий и сооружений при силовых и средовых воздействиях // *Промышленное и гражданское строительство*. 2013. № 2. С. 28–31.
6. Shan S. et al. Experimental study on the progressive collapse performance of RC frames with infill walls // *Eng. Struct.* 2016. Vol. 111. Pp. 80–92.
7. Jariwalaa V.H., Patel P.V., Purohit S.P. Strengthening of RC beams subjected to combined torsion and bending with GFRP composites // *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 51. Pp. 282–289.
8. Гольшиев А.Б., Колчунов В.И. Соппротивление железобетона. К.: Основа, 2009. 432 с.
9. Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: АСВ, 2004. 472 с.
10. Морозов В.И., Бахотский И.В. К расчету фибро-железобетонных конструкций, подверженных совместно воздействию кручения с изгибом // *Современные проблемы науки и образования*. 2013. № 5. С. 109.
11. Бахотский И.В. Экспериментальные исследования фибро-железобетонных конструкций, подверженных совместно воздействию кручения с изгибом // *Современные проблемы науки и образования*. 2013. № 5. С. 99.
12. Mostofinejad D., Taleaitaba S.B. Nonlinear modeling of RC beams subjected to torsion using the smeared crack model // *Procedia Engineering*. 2011. No. 14. Pp. 1447–1454.
13. Hii A.K.Y., Al-Mahaidi R. An experimental and numerical investigation on torsional strengthening of solid and boxsection RC beams using CFRP laminates // *Composite Structures*. 2006. No. 75 (1). Pp. 213–221.
14. Ghobarah A., Ghorbel M.N., Chidiak S.E. Upgrading torsional resistance of reinforced concrete beams using fiber-reinforced polymer // *Journal of Composites for Construction (ASCE)*. 2002. No. 6 (4). Pp. 257–263.
15. Demyanov A., Kolchunov V.I. The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending // *Journal of Applied Engineering Science*. 2017. Vol. 15. Pp. 377–382.
16. Lin K. et al. Experimental study of a novel multi-hazard resistant prefabricated concrete frame structure // *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2019. Vol. 119. Pp. 390–407.
17. Ogawa Y., Kawasaki Y., Okamoto T. Fracture behavior of RC members subjected to bending shear and torsion using acoustic emission method // *Construction and Building Materials*. 2014. Vol. 67. Pp. 165–169.
18. Awadh E.A. Torsion plus bending and shear on reinforced concrete beams // *Journal of Engineering and Sustainable Development*. 2016. No. 4. Pp. 277–288.
19. Травуш В.И., Карпенко Н.И., Колчунов В.И., Каприелов С.С., Демьянов А.И., Конорев А.В. Основные результаты экспериментальных исследований железобетонных конструкций из высокопрочного бетона В100 круглого и кольцевого сечений при кручении с изгибом // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 1. С. 51–61. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-1-51-61>
20. Травуш В.И., Карпенко Н.И., Колчунов В.И., Каприелов С.С., Демьянов А.И., Конорев А.В. Результаты экспериментальных исследований конструкций квадратного и коробчатого сечений из высокопрочного бетона при кручении с изгибом // *Строительство и реконструкция*. 2018. № 6 (80). С. 32–43.
21. Колчунов В.И., Демьянов А.И., Наумов Н.В. Программа и методика экспериментальных исследований составных железобетонных конструкций при кручении с изгибом // *Строительство и реконструкция*. 2018. № 1 (75). С. 22–30.
22. Колчунов В.И., Сальников А.С. Экспериментальные исследования трещинообразования железобетонных конструкций при кручении с изгибом // *Строительство и реконструкция*. 2016. № 3 (65). С. 24–32.

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-298-310
УДК 624.04+699.841

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Влияние жесткости основания на динамические характеристики здания как многомассового консольного стержня

В.А. Пшеничкина, В.В. Дроздов*, С.И. Строк

Волгоградский государственный технический университет, Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр-кт имени В.И. Ленина, 28
*drozdov_jm@mail.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 14 апреля 2020 г.

Доработана: 30 июня 2020 г.

Принята к публикации: 12 июля 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Исследование особенностей взаимодействия зданий и сооружений с основанием при землетрясении является одной из наиболее важных задач теории сейсмостойкости. Реакция сооружения на сейсмическое воздействие в значительной степени зависит от соотношения жесткостных характеристик грунта, фундамента и надфундаментного строения. При этом, учитывая достаточно высокую степень статистической изменчивости характеристик грунтового основания, обеспечить необходимый уровень безопасности сооружения можно только на основе применения вероятностных моделей и количественной оценки надежности системы «сооружение – основание» в целом. В настоящее время для расчета системы «сооружение – основание» на сейсмические нагрузки преимущественно применяются детерминированные дискретные модели метода конечных элементов. Но эти модели плохо приспособлены для вероятностных расчетов и требуют обширных статистических данных, которых сегодня недостаточно. Поэтому в задачах оценки надежности целесообразно применение упрощенных аналитических моделей, позволяющих при сравнительно небольшой исходной информации о системе получить величину статистической изменчивости ее реакции. **Цель статьи** – на основе известного решения для одномассовой модели представить аналитическое решение в матричной форме задачи свободных горизонтальных колебаний многомассового консольного стержня на основании, заданном моделью упругого полупространства. **Методы.** Проведено исследование влияния податливости грунтового основания на частоты и формы горизонтальных колебаний сооружения. Дано сравнение результатов с расчетом, выполненным методом конечных элементов. **Результаты.** Полученное решение предназначено для проведения вероятностного расчета системы «сооружение – основание» при сейсмических нагрузках и оценки ее надежности.

Ключевые слова: система «сооружение – основание», жесткость основания, динамические характеристики, горизонтальные колебания, частоты колебаний, формы колебаний, многомассовый консольный стержень

Для цитирования

Пшеничкина В.А., Дроздов В.В., Строк С.И. Влияние жесткости основания на динамические характеристики здания как многомассового консольного стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 298–310. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-298-310>

Введение

Одной из актуальных задач теории сейсмостойкости является учет взаимодействия зданий и

сооружений с грунтом основания при землетрясении. Реакция сооружения на сейсмическое движение грунта неоднозначна и зависит от соотношения масс и жесткостных характеристик грунта, фундамента и надфундаментного строения [1; 2].

Для расчета системы «сооружение – основание» на сейсмические нагрузки преимущественно применяются дискретные модели грунтового основания и сооружения на основе метода конечных элементов [1; 3–5]. При этом используются стандартные вычислительные комплексы, позволяющие на данном этапе развития техники производить рас-

Пшеничкина Валерия Александровна, заведующая кафедрой строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, доктор технических наук, профессор, eLIBRARY SPIN-код: 3399-0668.

Дроздов Вячеслав Вячеславович, доцент кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, кандидат технических наук, eLIBRARY SPIN-код: 3403-5982.

Строк Сергей Иванович, аспирант кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, eLIBRARY SPIN-код: 6209-1218.

© Пшеничкина В.А., Дроздов В.В., Строк С.И., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

четы любой сложности, в том числе и нелинейные. Вместе с тем дискретные модели приводят к необходимости обоснования размеров зоны основания, которую следует включать в анализ. Число степеней свободы для моделирования грунта может существенно превышать число степеней свободы для сооружения, что снижает эффективность модели системы в целом.

С другой стороны, существует проблема оценки надежности сейсмостойких зданий. Действующие нормативные документы [6] учитывают их надежность с помощью полувероятностных методов, содержащих условные детерминированные коэффициенты для расчетных характеристик системы «сооружение – основание». Однако грунты основания представляют собой случайные поля с изменяющимися в пространстве и времени физико-механическими характеристиками. Сейсмическое движение грунта также является ярко выраженным случайным процессом. Детерминированный подход к оценке надежности сейсмостойких зданий не обеспечивает их необходимую безопасность [7; 8], так как риск повреждения или разрушения здания при реализации проектного землетрясения остается неопределенным. Следовательно, расчет сейсмостойких зданий должен проводиться на основе вероятностной концепции с использованием методов теории надежности.

Переход на вероятностные методы расчета сейсмостойких зданий с использованием дискретных моделей требует обширной статистической информации, которой в настоящее время недостаточно. В этом случае целесообразно применение упрощенных аналитических моделей, позволяющих при сравнительно небольшой исходной информации о системе получить качественные закономерности взаимодействия сооружений с основанием, оценить влияние физико-механических свойств оснований на реакцию сооружения.

Если грунт основания однороден, а фундамент сооружения может рассматриваться как жесткая плита, то для расчета системы «сооружение – основание» применима модель грунта в виде упругого полупространства. Во время землетрясения плита фундамента перемещается по шести степеням свободы, включающим по три компоненты поступательного движения и вращения [9–12]. Данная модель используется для расчета специальных инженерных сооружений (атомных станций, плотин и др.), представляющих собой массивные объекты. Тем не менее характер взаимодействия с грунтом в процессе землетрясения различен для массивных сооружений и сравнительно гибких зданий массовой застройки [13; 14]. Так, в работе [15] уста-

новлено, что при изменении соотношения жесткостей сооружения и основания происходит не только изменение частот свободных колебаний системы, но и возможна перемена мест между формами.

В настоящей работе представлено аналитическое решение задачи свободных горизонтальных колебаний многомассового консольного стержня на основании, заданном моделью упругого полупространства, и проведен анализ влияния жесткости основания на динамические характеристики сооружения.

Задача свободных колебаний консольного многомассового стержня на упругом основании

Рассмотрим свободные горизонтальные колебания с учетом демпфирования невесомой консольной стойки на упругом основании в предположении, что на ее уровнях $k = 1, 2, \dots, n$ расположены сосредоточенные массы m_1, m_2, \dots, m_n (рис. 1). Данные колебания в форме метода перемещений будут описываться системой n дифференциальных уравнений [16; 17]:

$$m_k \ddot{y}_k(t) + 2\varepsilon m_k \dot{y}_k(t) + \sum_{j=1}^n k_{k,j} y_j(t) = 0; \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n);$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

Где $\ddot{y}_k(t), \dot{y}_k(t), y_j(t)$ – функции ускорений, скоростей и перемещений в уровнях масс k и j соответственно; ε – коэффициент демпфирования (затухания); $k_{k,j}$ – реакция в связи номер k при смещении связи j на единицу.

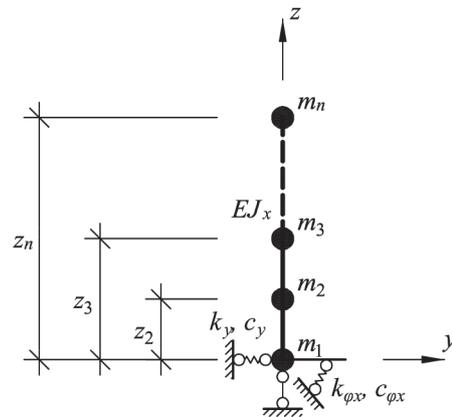


Рис. 1. Расчетная схема многомассового консольного стержня с учетом податливости основания
 [Figure 1. Design model of a multi-mass cantilever bar with due account for foundation bed ductility]

Поделив левую и правую части уравнения на m_k , получим

$$\ddot{y}_k(t) + 2\varepsilon\dot{y}_k(t) + \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^n k_{k,j} y_j(t) = 0. \quad (2)$$

Решением (2) будет система уравнений вида

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^n y_{k,i}(t) = \sum_{i=1}^n X_{k,i} \Phi_i(t), \quad (3)$$

где $X_{k,i}$ – величина, не зависящая от времени t , определяющаяся местоположением k и номером члена i суммы ($i=1, 2, \dots, n$).

Функция $\Phi_i(t)$ зависит от времени t . Соответственно

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_k(t) &= \sum_{i=1}^n \dot{y}_{k,i}(t) = \sum_{i=1}^n X_{k,i} \dot{\Phi}_i(t); \\ \ddot{y}_k(t) &= \sum_{i=1}^n \ddot{y}_{k,i}(t) = \sum_{i=1}^n X_{k,i} \ddot{\Phi}_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (3^*)$$

С учетом (3) и (3*) система уравнений (2) примет вид

$$\sum_{i=1}^n X_{k,i} \ddot{\Phi}_i(t) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^n X_{k,i} \dot{\Phi}_i(t) + \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^n \left(k_{k,j} \sum_{i=1}^n X_{j,i} \Phi_i(t) \right) = 0. \quad (4)$$

Введем обозначение

$$-\varphi_i^2 = \frac{\ddot{\Phi}_i(t)}{\Phi_i(t)}, \quad (5)$$

тогда система уравнений (4) после некоторых преобразований будет выглядеть

$$\ddot{\Phi}_i(t) + 2\varepsilon\dot{\Phi}_i(t) + \varphi_i^2\Phi_i(t) = 0. \quad (6)$$

Если принять, что $2\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,i} \varphi_{\varepsilon,i}$, то данное уравнение будет аналогично уравнению модели упруго-вязкого сопротивления А.И. Цейтлина [18], учитывающей различную степень демпфирования при различных формах собственных колебаний:

$$\ddot{\Phi}_i(t) + \gamma_{\varepsilon,i} \varphi_{\varepsilon,i} \dot{\Phi}_i(t) + \varphi_{\varepsilon,i}^2 \Phi_i(t) = 0, \quad (7)$$

где $\gamma_{\varepsilon,i}$ – коэффициент потерь или неупругого сопротивления при i -й форме колебаний; $\varphi_{\varepsilon,i}$ – угловая частота i -й формы колебаний с учетом демпфирования.

$$\gamma_{\varepsilon,i} = \frac{\delta_{\varepsilon,i}}{\pi} = \frac{\varepsilon T_{\varepsilon,i}}{\pi}; \quad T_{\varepsilon,i} = \frac{2\pi}{\varphi_{\varepsilon,i}}; \quad \varphi_{\varepsilon,i} = \varphi_i \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varphi_i} \right)^2}. \quad (8)$$

Величина $\delta_{\varepsilon,i}$ является логарифмическим декрементом i -й формы колебаний. Из формул (8) следует, что коэффициент демпфирования постоянен ($\varepsilon = \text{const}$), а логарифмический декремент колебаний $\delta_{\varepsilon,i}$ зависит от частоты $\varphi_{\varepsilon,i}$ (согласно гипотезе Фойгта). Однако эксперименты показывают, что такой зависимости нет [16] и в качестве константы правильной принять величину δ_{ε} . Тогда $T_{\varepsilon,i} \approx T_i$ и из (8) следует:

$$\gamma_{\varepsilon} = \frac{\delta_{\varepsilon}}{\pi} = \text{const}; \quad \varepsilon_i = \frac{\delta_{\varepsilon}}{T_{\varepsilon,i}} \approx \frac{\delta_{\varepsilon}}{T_i}; \quad \varphi_{\varepsilon,i} = \varphi_i \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_i}{\varphi_i} \right)^2}. \quad (9)$$

С учетом (9) уравнения (7) примут вид

$$\ddot{\Phi}_i(t) + \gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i} \dot{\Phi}_i(t) + \varphi_{\varepsilon,i}^2 \Phi_i(t) = 0. \quad (10)$$

Решением системы дифференциальных уравнений (10) будут функции

$$\Phi_i(t) = A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \sin(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}). \quad (11)$$

Соответственно

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_i(t) &= A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \varphi_{\varepsilon,i} \cos(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}); \\ \ddot{\Phi}_i(t) &= -A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \varphi_{\varepsilon,i}^2 \sin(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}). \end{aligned} \right\} \quad (11^*)$$

Запишем выражения для полных перемещений $y_k(t)$, скоростей $v_k(t)$ и ускорений $a_k(t)$ масс в уровне k с учетом демпфирования:

$$\left. \begin{aligned} y_k(t) &= \sum_{i=1}^n X_{k,i} A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \sin(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}); \\ v_k(t) &= \sum_{i=1}^n X_{k,i} A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \varphi_{\varepsilon,i} \cos(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}); \\ a_k(t) &= -\sum_{i=1}^n X_{k,i} A_{\varepsilon,i} \exp\left(-\frac{\gamma_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,i}}{2} t\right) \varphi_{\varepsilon,i}^2 \sin(\varphi_{\varepsilon,i} t + v_{\varepsilon,i}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Постоянные $A_{\varepsilon,i}$ и $v_{\varepsilon,i}$ определяются из граничных условий при $t=0$ (начальных перемещений $y_k(0)$ и скоростей $v_k(0)$ в уровне k -й массы):

оси x ; z_k – ордината рассматриваемой точки k (за $z = 0$ принят уровень фундамента); z_j – ордината точки приложения единичной силы j .

Есть множество теорий по определению коэффициентов квазистатической жесткости грунта основания [9; 19]. Так, согласно [10] данные коэффициенты для сооружений с фундаментом прямоугольной формы в плане определяются по формулам

$$k_y = \frac{31,1(1-\mu)G_d\sqrt{L_xL_y}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu)}; k_{\varphi x} = \frac{8,52G_d}{\sqrt{\pi}(1-\mu)} \frac{J_{A,x}}{\sqrt{A}}, \quad (21)$$

где μ – коэффициент Пуассона грунта основания; G_d – динамический модуль сдвига грунта основания; L_x и L_y – размеры фундаментной плиты по осям x и y соответственно; $J_{A,x}$ – момент инерции подошвы фундаментной плиты относительно оси x ; A – площадь подошвы фундаментной плиты.

Между модулями сдвига G_d и деформаций E_d грунта основания имеется взаимосвязь:

$$G_d = \frac{E_d}{2(1+\mu)}. \quad (22)$$

Из уравнения (17) в матричной форме определяются частоты собственных колебаний без учета демпфирования стойки и основания $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$:

$$\det(\varphi_i^2 \mathbf{DM} - \mathbf{E}) = 0, \quad (23)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица.

Далее из уравнений (16) определяются амплитудные коэффициенты $X_{k,i}$ для i -й формы колебаний:

$$(\varphi_i^2 \mathbf{DM} - \mathbf{E}) \vec{X}_i = 0, \quad (24)$$

где \vec{X}_i – вектор амплитудных коэффициентов для i -й формы ($i = 1, 2, \dots, n$).

$$\vec{X}_i = \begin{pmatrix} X_{1,i} \\ X_{2,i} \\ \vdots \\ X_{n,i} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, результатом последовательного решения (23) и (24) будет получение вектора частот собственных колебаний $\vec{\Phi}$ и матрицы амплитудных коэффициентов \mathbf{X} :

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & X_{n,2} & \dots & X_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Далее при известных частотах собственных колебаний предварительно определяем коэффициенты затухания ε_i с учетом демпфирования стойки и грунта основания:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{1,i}} + \frac{1}{\varepsilon_{II}} + \frac{1}{\varepsilon_{III}}}, \quad (26)$$

где $\varepsilon_{1,i}$ – коэффициент затухания, обусловленный демпфированием самой стойки и определяемый по формуле (9) в зависимости от i -й частоты собственных колебаний; ε_{II} и ε_{III} – коэффициенты затухания, обусловленные демпфированием грунта при смещении и повороте фундамента соответственно.

$$\varepsilon_{1,i} = \frac{\delta_\varepsilon \varphi_i}{2\pi}; \varepsilon_{II} = \sum_{k=1}^n \frac{c_y}{2m_k}; \varepsilon_{III} = \sum_{k=1}^n \frac{c_{\varphi x}}{m_k z_k^2}, \quad (27)$$

где c_y – мгновенная жесткость основания при горизонтальном поступательном движении по оси y ; $c_{\varphi x}$ – мгновенная жесткость основания при повороте относительно горизонтальной оси x .

Согласно [10] коэффициенты мгновенной жесткости основания для прямоугольного в плане фундамента определяются по формулам

$$c_y = \frac{18,24(1-\mu)G_d A}{\pi(7-8\mu)} \sqrt{\frac{\rho}{G_d}}; c_{\varphi x} = \frac{2,86G_d J_{A,x}}{\pi(1-\mu)} \sqrt{\frac{\rho}{G_d}}, \quad (28)$$

где ρ – плотность грунта основания.

В матричной форме формулы (27):

$$\vec{\varepsilon}_I = \frac{\delta_\varepsilon}{2\pi} \vec{\Phi}; \vec{\varepsilon}_{II} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{c_y}{2} \vec{M}_k^{-1} \right] \vec{E}; \vec{\varepsilon}_{III} = \sum_{k=1}^n \left[c_{\varphi x} \mathbf{M}_k^{-1} (\mathbf{z}_k^{-1})^2 \right] \vec{E}, \quad (29)$$

где \vec{M} – вектор масс; \vec{E} – единичный вектор размерности n ; \vec{z} – вектор ординат масс.

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{z}} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix}.$$

Полученные из (29) векторы подставляем в (26) в матричной форме и получаем вектор коэффициентов затухания с учетом демпфирования стойки и грунта основания:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_I^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^{-1} \right]^{-1}. \quad (30)$$

Далее по формуле (9) уточняем частоты с учетом демпфирования:

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi} \sqrt{1 - (\boldsymbol{\varepsilon} \bar{\boldsymbol{\varphi}}^{-1})^2}, \quad (31)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – диагональные матрицы, образованные из элементов векторов $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ и $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ соответственно.

По формулам (29) и (30) можно уточнить коэффициенты демпфирования, подставляя $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon$ вместо $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$.

Из граничных условий (13) определяем постоянные $A_{\varepsilon,i}$ и $v_{\varepsilon,i}$ для функций $\Phi_i(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \sin \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon &= \bar{\mathbf{y}}_0; \\ \mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \cos \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon &= \bar{\mathbf{v}}_0, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где \mathbf{A}_ε и $\bar{\mathbf{v}}_\varepsilon$ – диагональная матрица и вектор из постоянных коэффициентов $A_{\varepsilon,i}$ и $v_{\varepsilon,i}$ соответственно; $\bar{\mathbf{y}}_0$ и $\bar{\mathbf{v}}_0$ – векторы начальных перемещений и скоростей (граничные условия) соответственно; $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ – диагональная матрица, образованная из элементов вектора угловых частот с учетом демпфирования $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon$.

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{Bmatrix} A_{\varepsilon,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\varepsilon,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{\varepsilon,n} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon = \begin{Bmatrix} v_{\varepsilon,1} \\ v_{\varepsilon,2} \\ \vdots \\ v_{\varepsilon,n} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{y}}_0 = \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{Bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{v}}_0 = \begin{Bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ \vdots \\ v_n(0) \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varphi_{\varepsilon,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{\varepsilon,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{\varepsilon,n} \end{Bmatrix}.$$

Теперь можно задать выражения для полных перемещений $y_k(t)$, скоростей $v_k(t)$ и ускорений $a_k(t)$ (12) в матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \exp\left(-\frac{\gamma_\varepsilon}{2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon t\right) \sin(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon t + \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon); \\ \bar{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \exp\left(-\frac{\gamma_\varepsilon}{2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon t\right) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \cos(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon t + \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon); \\ \bar{\mathbf{a}}(t) &= -\mathbf{X} \mathbf{A}_\varepsilon \exp\left(-\frac{\gamma_\varepsilon}{2} \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon t\right) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^2 \sin(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon t + \bar{\mathbf{v}}_\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Используя формулы (18)–(31), рассмотрены собственные колебания симметричного в плане условного пятиэтажного здания (рис. 2). Размер здания в плане составляет 6×6 м при шаге осей 2 м, высота этажа – 3 м. Фундамент условного сооружения представляет собой монолитную железобетонную плиту с подошвой 8×8 м и толщиной 60 см. Вертикальные конструкции представлены колоннами сечением 40×40 см, расположенными по углам здания, и ядром жесткости в центре из стен толщиной 20 см, образующими в плане коробчатое сечение размером в осях 2×2 м. Горизонтальные конструкции – плиты перекрытий толщиной 16 см. Материал всех конструкций – бетон класса В30 (модуль деформации E равен 32,5 ГПа). К плитам перекрытий приложена постоянная нагрузка от веса пола.

Условное сооружение приведено к пятиэлементному консольному стержню с шестью массами (рис. 3). Первая масса ($m_1 = 133,12$ т) приложена в уровне фундаментной плиты (в заделке стержня при $z_1 \approx 0$), остальные ($m_2 = m_3 = \dots = m_6 = 52,08$ т) – в уровне плит перекрытий. Задание массы фундаментной плиты в заделке обусловлено необходимостью более точного учета податливости основания при горизонтальных колебаниях. В заделке стержня приложены связи k_z с бесконечной жесткостью, запрещающая перемещения по вертикали, k_y , характеризующая квазистатическую жесткость основания при поступательном движении по оси y (по горизонтали) и $k_{\varphi x}$, характеризующая квазистатическую жесткость основания при повороте относительно оси x . Момент инерции сечения стержня J_x составляет 6,85 м⁴, а изгибная жесткость $EJ_x = 222,49 \times 10^9$ Н·м². Логарифмический декремент колебаний δ_ε принят равным 0,30 – как для железобетонных сооружений.

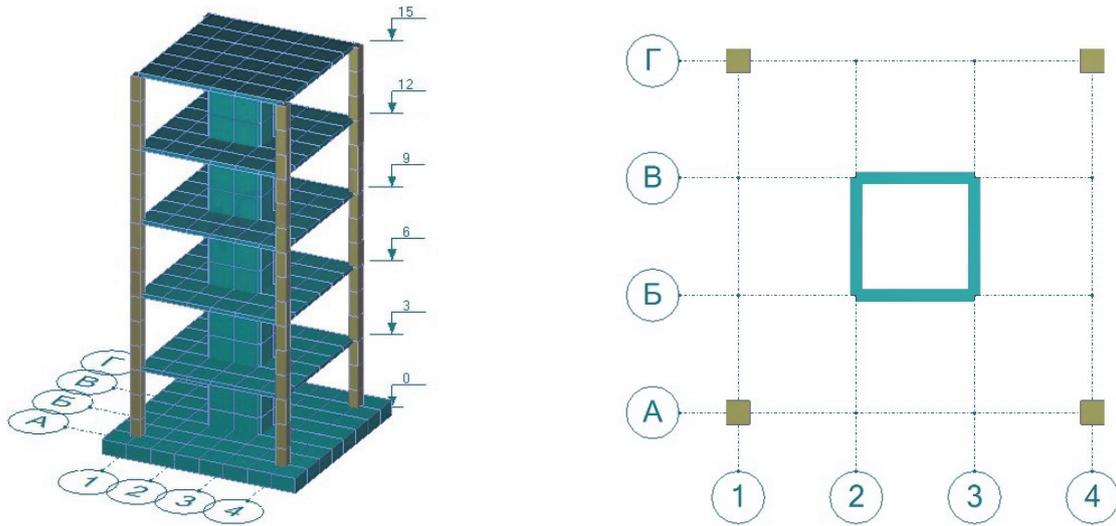


Рис. 2. Общий вид и план условного здания
 [Figure 2. General appearance and the plan of the conventional building]

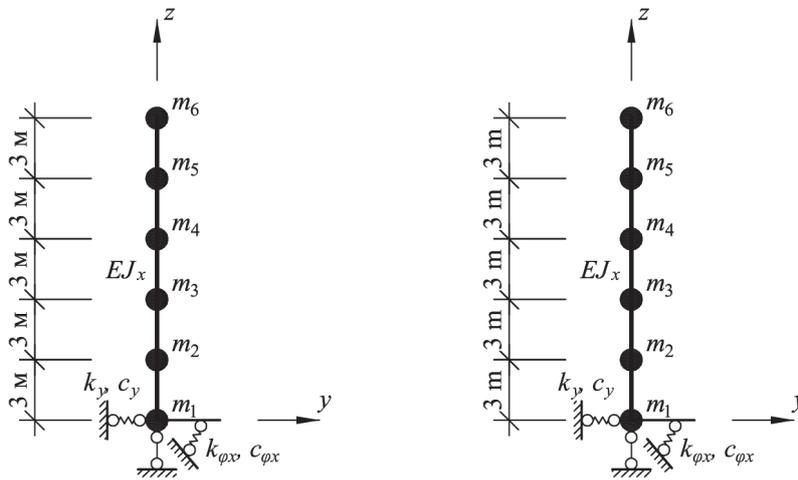


Рис. 3. Расчетная схема условного здания с учетом податливости основания
 [Figure 3. Design model of the conventional building with due account for the ductility of the foundation bed]

Таблица 1

Жесткостные характеристики основания
 [Table 1. Stiffness properties of the foundation bed]

Вариант [Variant]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_d , МПа [MPa]	9,86	12,35	15,47	19,37	24,25	30,37	38,03	47,62	59,63	74,67
G_d , МПа [MPa]	3,65	4,57	5,73	7,17	8,98	11,25	14,09	17,64	22,09	27,66
ρ , т/м ³ [t/m ³]	1,75	1,80	1,86	1,92	1,99	2,07	2,16	2,26	2,38	2,53
k_y , кН/м [kN/m]	79 333	99 367	124 470	155 849	195 114	244 355	305 986	383 147	479 778	600 789
$k_{\phi x}$, кН·м [kN·m]	1 152 267	1 443 255	1 807 867	2 263 632	2 833 923	3 549 123	4 444 292	5 565 006	6 968 528	8 726 145
c_y , кН·с/м [kN·s/m]	4597	5218	5937	6749	7688	8775	10 031	11 481	13 184	15 211
$c_{\phi x}$, кН·с·м [kN·s·m]	38 217	43 378	49 352	56 107	63 912	72 947	83 385	95 444	109 603	126 454

Таблица 2

Частоты собственных колебаний, Гц, по формам (аналитический расчет)
 [Table 2. Natural vibration frequencies, Hz, according to vibration mode shapes (analytical analysis)]

Вариант [Variant]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Форма 1 [Mode shape 1]	0,99	1,11	1,23	1,38	1,53	1,71	1,90	2,11	2,34	2,58
Форма 2 [Mode shape 2]	3,53	3,95	4,41	4,93	5,50	6,14	6,85	7,64	8,51	9,47
Форма 3 [Mode shape 3]	37,07	37,14	37,22	37,33	37,46	37,63	37,83	38,08	38,39	38,77
Форма 4 [Mode shape 4]	110,77	110,82	110,89	110,97	111,08	111,22	111,38	111,59	111,85	112,17
Форма 5 [Mode shape 5]	237,97	238,01	238,07	238,15	238,25	238,37	238,53	238,73	238,98	239,29
Форма 6 [Mode shape 6]	448,20	448,19	448,18	448,18	448,19	448,20	448,22	448,24	448,28	448,34

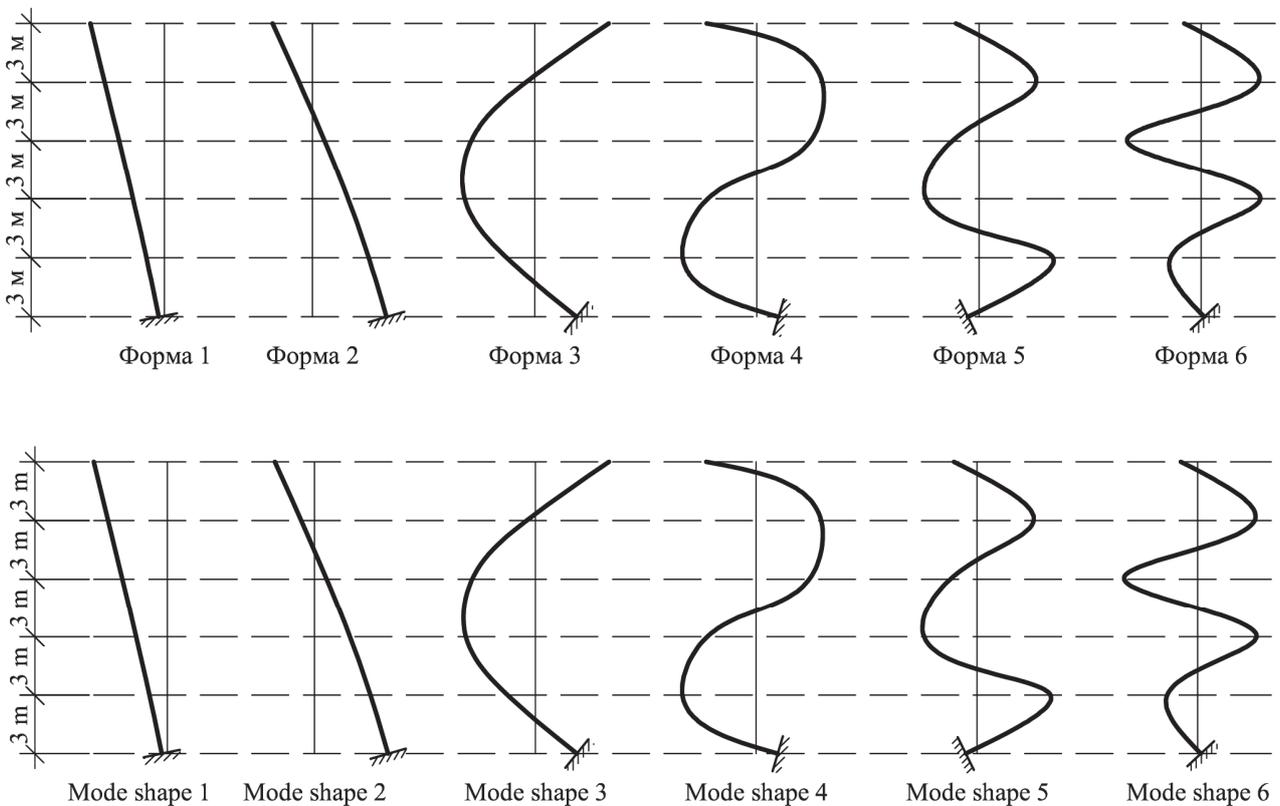


Рис. 4. Формы колебаний условного здания с учетом податливости основания
 [Figure 4. Vibration mode shapes of the conventional building with due account for the foundation bed ductility]

Были рассмотрены собственные колебания шести-массового консольного стержня при десяти вариантах жесткости основания [15]. Характеристики основания представлены в табл. 1 (коэффициент Пуассона грунта μ во всех случаях принят равным 0,35).

По результатам расчета получены формы и частоты собственных колебаний. Для каждого варианта учтено по шесть форм. Частоты свободных колебаний системы для различных вариантов жесткости основания и форм колебаний представ-

лены в табл. 2, а сами формы (идентичные для всех вариантов жесткости основания) – на рис. 4.

Для контроля расчет пятиэлементного шести-массового консольного стержня был произведен методом конечных элементов в программном комплексе «ЛИРА 10.8» (рис. 5). Сооружение задавалось стержнем пользовательского сечения, в узлах прикладывались массы, а опора моделировалась упругой связью с коэффициентами квазистатической жесткости. Для исследования только горизон-

тальных колебаний перемещения по вертикали (вдоль оси z) для всех узлов запрещались. После проведения модального анализа конечно-элементной модели были рассмотрены также по шесть форм соб-

ственных колебаний. Результаты расчета в программном комплексе «ЛИРА 10.8» представлены в табл. 3. Формы колебаний идентичны формам, представленным на рис. 4.

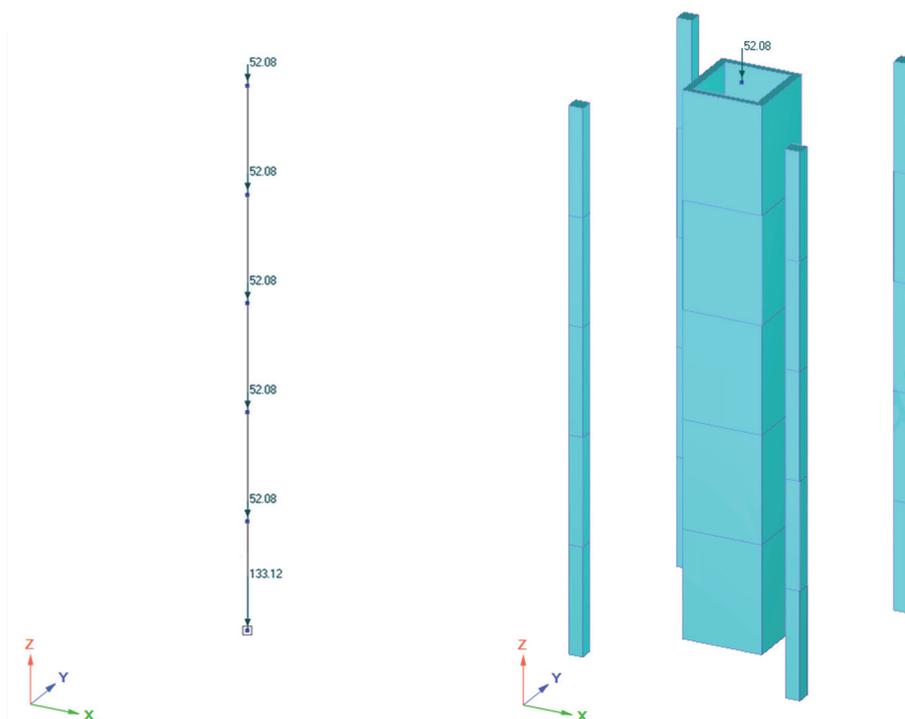


Рис. 5. Расчетная схема условного здания в ПК «ЛИРА 10.8»
[Figure 5. Design model of the conventional building in the software package “LIRA 10.8”]

Таблица 3

Частоты собственных колебаний, Гц, по формам (расчет конечно-элементной модели в ПК «ЛИРА 10.8»)
[Table 3. Natural vibration frequencies, Hz, according to vibration mode shapes
(analysis of finite element model in the software package “LIRA 10.8”)]

Вариант [Variant]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Форма 1 [Mode shape 1]	0,99	1,11	1,24	1,38	1,54	1,71	1,90	2,11	2,34	2,59
Форма 2 [Mode shape 2]	3,54	3,95	4,42	4,93	5,51	6,15	6,86	7,65	8,52	9,48
Форма 3 [Mode shape 3]	37,11	37,18	37,27	37,37	37,51	37,67	37,88	38,13	38,44	38,82
Форма 4 [Mode shape 4]	112,08	112,14	112,21	112,30	112,41	112,55	112,72	112,93	113,20	113,52
Форма 5 [Mode shape 5]	229,09	229,14	229,19	229,26	229,35	229,46	229,60	229,77	229,98	230,24
Форма 6 [Mode shape 6]	366,35	366,37	366,40	366,43	366,47	366,52	366,58	366,66	366,75	366,87

Также были рассмотрены колебания данного консольного стержня на абсолютно жестком основании (рис. 6). В этом случае необходимость учета податливости основания и массы фундамента отсутствуют и система становится пятимассовой ($m_1 = m_2 = \dots = m_5 =$

$= 52,08$ т). Очевидно, в результате расчета будет выявлено лишь пять форм колебаний. Результаты данного расчета аналитически в матричной форме и модального анализа конечно-элементной модели представлены в табл. 4, формы колебаний – на рис. 7.

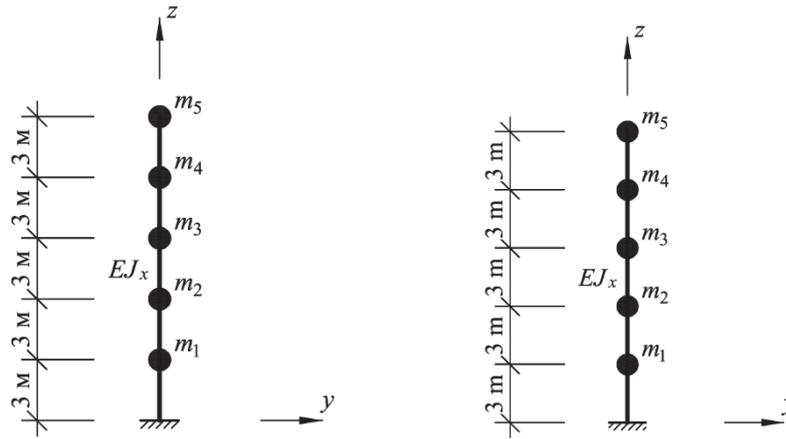


Рис. 6. Расчетная схема условного здания на абсолютно жестком основании
[Figure 6. Design model of the conventional building on absolutely stiff foundation bed]

Таблица 4

Частоты собственных колебаний, Гц, по формам при расчете на абсолютно жестком основании
[Table 4. Natural vibration frequencies, Hz, according to vibration mode shapes in the analysis for absolutely stiff foundation bed]

Метод расчета [Method of analysis]	Форма 1 [Mode shape 1]	Форма 2 [Mode shape 2]	Форма 3 [Mode shape 3]	Форма 4 [Mode shape 4]	Форма 5 [Mode shape 5]
В матричной форме [In the matrix form]	7,41	47,24	132,50	277,03	459,38
Конечно-элементный [Through finite element method]	7,41	47,35	134,15	259,24	386,08

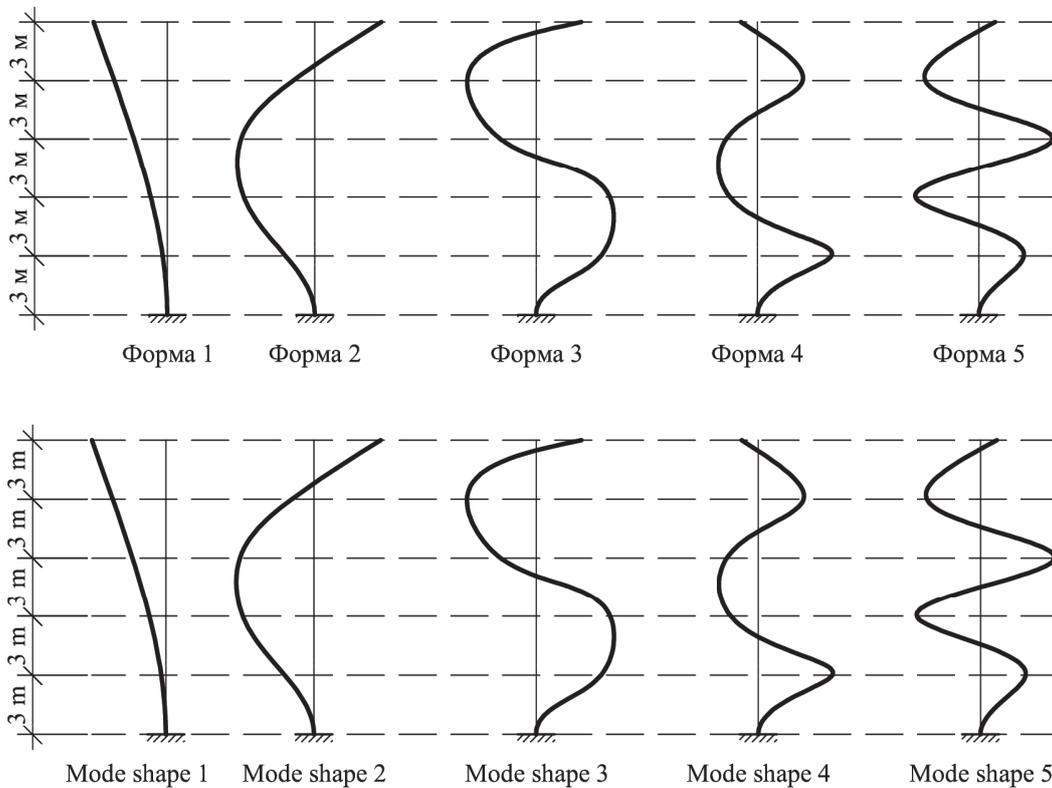


Рис. 7. Формы колебаний условного здания на абсолютно жестком основании
[Figure 7. Vibration mode shapes of the conventional building on absolutely stiff foundation bed]

Заключение

Результаты модального анализа конечно-элементной модели в программном комплексе «LIRA 10.8» достаточно хорошо сходятся с аналитическим расчетом в матричной форме. Расхождения значений частот для первых трех форм колебаний составляют менее 1 %, для формы 4 – 1,2 %, для формы 5 – от 3,7 до 6,4 %, для формы 6 – от 16,0 до 18,3 %.

Идентичны и формы колебаний при податливом и жестком основании с тем отличием, что во втором случае исчезает форма, обусловленная преимущественно смещением и поворотом фундамента (рис. 4, форма 2). Таким образом, форма 2 при жестком основании аналогична форме 3 при податливом, форма 3 – форме 4.

Установлено, что низшие формы более чувствительны к жесткости основания. При увеличении модуля деформации грунта основания в 7,57 раза частота колебаний формы 1 увеличилась в 2,61 раза (0,99 до 2,58 Гц), формы 2 – в 2,68 раза, формы 3 – в 1,05 раза. Частоты остальных форм при увеличении жесткости основания изменились незначительно. Теоретически при стремлении жесткости основания к бесконечности частота колебаний формы 1 может увеличиться еще в 2,87 раза (с 2,58 до 7,41 Гц), формы 3 – в 1,22 раза (став формой 2), формы 4 – в 1,18 раза, формы 5 – в 1,16 раза, формы 6 – в 1,02 раза. Ожидается, что частота колебаний формы 2, обусловленной преимущественно перемещениями фундамента, наиболее чувствительна к податливости основания. Тем не менее для рассматриваемого сооружения при заданном интервале модуля деформации грунта перемена мест между формами не выявлена, так как для этого требуется большая степень свободы исследуемой системы для учета не только изгибных, но и крутильных и поступательных форм колебаний [20].

Полученное решение может быть эффективно использовано для вероятностного анализа системы «сооружение – основание» при сейсмических нагрузках.

Список литературы

1. Clough Ray W., Penzien Joseph. Dynamics of structures. 3rd ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 2003.
2. Уздин А.М., Сандович Т.А., Аль-Насер-Мохомад Самих Амин. Основы теории сейсмостойкого строительства зданий и сооружений. СПб.: Изд-во ВНИИГ имени Б.Е. Веденеева, 1993.
3. Datta T.K. Seismic analysis of structures. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd., 2010.
4. Newmark N.M., Rosenblueth E. Fundamentals of earthquake engineering. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1971.
5. Мкртычев О.В., Реушков А.А. Сейсмические нагрузки при расчете зданий и сооружений. М.: АСВ, 2017.

6. СП 14.13330.2018. Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция СНиП II-7-81*. М.: Стандартинформ, 2018.

7. Пиеничкина В.А. Надежность зданий как пространственных составных систем при сейсмических воздействиях: монография. Волгоград: ВолгГАСУ, 2010.

8. Дроздов В.В., Пиеничкина В.А., Евтушенко С.И. Инженерная методика оценки сейсмической надежности зданий по предельно допустимому риску // Вестник ВолгГАСУ. 2013. № 2 (27). С. 10.

9. Саргсян А.Е. Оценка интенсивности сейсмического воздействия на сооружение с учетом податливости его основания // Строительная механика и расчет сооружений. 1986. № 4. С. 55–59.

10. Саргсян А.Е., Гукова Е.Г., Шапошников Н.Н. Динамическая механическая модель основания сооружения с учетом инерционных свойств грунтов // Вестник МГСУ. 2012. № 2. С. 66–69.

11. Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I., Sukhina K.N., Alkneume M.H. Converging of analytical solution of pile under horizontal static load with analysis through finite element method // Advances in engineering research: conference proceedings. Vol. 157. Amsterdam: Atlantis Press, 2018. Pp. 520–523.

12. Pshenichkina V.A., Shchitov D.V., Sidyakin P.A. Problems of forecasting the resource of buildings of the historical construction of the resort region of the Caucasian Mineral Waters // IOP conference series: materials science and engineering. Vol. 463. Part 2. Issue 3. London: Institute of Physics Publishing, 2018. 032027.

13. Волгин Г.А., Рожков А.Ф., Инжутов И.С., Гончаров Ю.М. Численно-экспериментальное исследование динамических параметров крупнопанельного здания // Вестник ТГАСУ. 2016. № 3. С. 111–120.

14. Галиуллин Р.Р., Изотов В.С., Нуриева Д.М. Численные исследования динамических характеристик зданий с железобетонным каркасом // Известия КазГАСУ. 2011. № 2 (16). С. 81–85.

15. Пиеничкина В.А., Дроздов В.В., Строк С.И. Сравнительный анализ влияния жесткости основания на динамические характеристики зданий // Механика грунтов в геотехнике и фундаментостроении: материалы международной научно-технической конференции (Новочеркасск, 29–31 мая 2018 г.) / Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова. Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ), 2018. С. 733–744.

16. Поляков С.В. Сейсмостойкие конструкции зданий: учебное пособие для вузов. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1983.

17. Киселев В.А. Строительная механика: специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов. 3-е изд., испр. и доп. М.: Стройиздат, 1980.

18. Цейтлин А.И., Гусева Н.И. Статистические методы расчета сооружений на групповые динамические воздействия. М.: Стройиздат, 1979.

19. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб.: Наука, 1998.

20. Строк С.И., Пиеничкина В.А., Дроздов В.В. Анализ влияния жесткости грунтового основания на частоты и формы колебаний сооружений // Строительство и архитектура. 2018. № 2. С. 13–21.

Influence of the foundation bed stiffness on the dynamic properties of the building as of a multi-mass cantilever bar

Valeriya A. Pshenichkina, Vyacheslav V. Drozdov*, Sergey I. Strok

Volgograd State Technical University, 28 Lenina Ave, Volgograd, 400005, Russian Federation

*drozdov_jm@mail.ru

Article history:

Received: April 14, 2020

Revised: June 30, 2020

Accepted: July 12, 2020

Abstract

Relevance. The study of the interaction of buildings and structures with the base during an earthquake is one of the most important tasks of the theory of earthquake resistance. The response of the structure to seismic impact depends to a large extent on the ratio of the stiffness characteristics of the soil, foundation, and foundation structure. Moreover, taking into account a rather high degree of statistical variability of the characteristics of the soil foundation, it is possible to ensure the required level of safety of a structure only through the use of probabilistic models and a quantitative assessment of the reliability of the construction-base system as a whole. At present, for the calculation of the “construction – base” system for seismic loads, deterministic discrete models of the finite element method are mainly used. But these models are poorly adapted for probabilistic calculations and require extensive statistical data, which are currently insufficient. Therefore, in problems of reliability assessment, it is advisable to use simplified analytical models, which make it possible to derive the value of the statistical variability of its reaction with relatively small initial information about the system. **The aim of the work** – based on the well-known solution for the single-mass model to present an analytical solution in the matrix form of the problem of free horizontal vibrations of a multi-mass cantilever rod on the foundation specified by the elastic half-space model. **Methods.** A study was made of the effect of the compliance of the soil foundation on the frequencies and forms of horizontal vibrations of the structure. A comparison of the results with the calculation performed by the finite element method is given. **Results.** The obtained solution is intended to conduct a probabilistic calculation of the construction-base system under seismic loads and evaluate its reliability.

Keywords: “structure – foundation bed” system, foundation bed stiffness, dynamic properties, horizontal vibrations, vibration frequencies, vibration mode shapes, multi-mass cantilever bar

For citation

Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I. Influence of the foundation bed stiffness on the dynamic properties of the building as of a multi-mass cantilever bar. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(4):298–310. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-298-310> (In Russ.)

References

1. Clough Ray W., Penzien Joseph. *Dynamics of structures*. 3rd ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc.; 2003.
2. Uzdin A.M., Sandovich T.A., Al'-Naser-Mohomad Samih Amin. *Osnovy teorii seismostojkogo stroitel'stva zdaniy i sooruzhenij* [Fundamentals of the theory of earthquake-resistant construction of buildings and structures]. Saint Petersburg: VNIIG imeni B.E. Vedeneva Publ.; 1993. (In Russ.)
3. Datta T.K. *Seismic analysis of structures*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd.; 2010.
4. Newmark N.M., Rosenblueth E. *Fundamentals of earthquake engineering*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.; 1971.
5. Mkrtychev O.V., Reshetov A.A. *Seismicheskie nagruzki pri raschete zdaniy i sooruzhenij* [Seismic loads when calculating buildings and structures]. Moscow: ASV Publ.; 2017. (In Russ.)
6. SP 14.13330.2018. *Stroitel'stvo v seismicheskikh raionakh* [Seismic building design code]. Updated version of SNiP II-7-81*. Moscow: Standartinform Publ.; 2018. (In Russ.)
7. Pshenichkina V.A. *Nadezhnost zdaniy kak prostranstvennyh sostavnyh sistem pri seismicheskikh vozdeystviyah* [Reliability of buildings as spatial composite systems in case of seismic impacts]: monograph. Volgograd: VolgGASU Publ.; 2010. (In Russ.)
8. Drozdov V.V., Pshenichkina V.A., Evtushenko S.I. *Inzhenernaya metodika ocenki seismicheskoy nadezhnosti zdaniy po predel'no dopustimomu risku* [Engineering methodology for assessing the seismic reliability of buildings based on the maximum allowable risk]. *Vestnik VolgGASU*. 2013; 2(27):10. (In Russ.)
9. Sargsjan A.E. *Ocenka intensivnosti seismicheskogo vozdeystviya na sooruzhenie s uchetom podatlivosti ego osnovaniya* [Assessment of the intensity of seismic impact on

Valeriya A. Pshenichkina, Head of Engineering Structures, Foundations and Safety of Constructions Department, Doctor of Technical Sciences, Professor, eLIBRARY SPIN-code: 3399-0668.

Vyacheslav V. Drozdov, Associate Professor of Engineering Structures, Foundations and Safety of Constructions Department, Candidate of Technical Sciences, eLIBRARY SPIN-code: 3403-5982.

Sergey I. Strok, postgraduate student of Engineering Structures, Foundations and Safety of Constructions Department, eLIBRARY SPIN-code: 6209-1218.

the structure, taking into account the pliability of its base]. *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij*. 1986;(4):55–59. (In Russ.)

10. Sargsjan A.E., Gukova E.G., Shaposhnikov N.N. Dinamicheskaja mehanicheskaja model osnovanija sooruzhenija s uchetom inercionnyh svojstv gruntov [Dynamic mechanical model of bases of structures that takes account of inertial properties of soils]. *Vestnik MGSU*. 2012;(2):66–69. (In Russ.)

11. Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I., Sukhina K.N., Alkneume M.H. Converging of analytical solution of pile under horizontal static load with analysis through finite element method. *Advances in engineering research conference proceedings*. 2018;157:520–523.

12. Pshenichkina V.A., Shchitov D.V., Sidyakin P.A. Problems of forecasting the resource of buildings of the historical construction of the resort region of the Caucasian Mineral Waters. *IOP conference series: materials science and engineering*. 2018;463(3):032027.

13. Volgin G.A., Rozhkov A.F., Inzhutov I.S., Goncharov Ju.M. Chislenno-jeksperimental'noe issledovanie dinamicheskikh parametrov krupnopanel'nogo zdanija [Experimental and Numerical Analysis of Dynamic Parameters of Large-Panel Building]. *Vestnik TGASU*. 2016;(3):111–120. (In Russ.)

14. Galiullin R.R., Izotov V.S., Nurieva D.M. Chislennye issledovanija dinamicheskikh harakteristik zdaniy s zhelezobetonnyim karkasom [Numerical researches of dynamic characteristics of buildings with the ferro-concrete skeleton]. *Izvestija KazGASU*. 2011;2(16):81–85. (In Russ.)

15. Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I. Sravnitel'nyj analiz vlijanija zhestkosti osnovanija na dinamicheskie harakteristiki zdaniy [Contrastive analysis of influence of soil bases stiffness on dynamic characteristics of buildings]. *Mehanika gruntov v geotekhnike i fundamentostroenii: materialy mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii (Novocherkassk, May 29–31, 2018)*. Novocherkassk: JuRGPU (NPI) Publ.; 2018. p. 733–744. (In Russ.)

16. Poljakov S.V. *Sejmostojkie konstrukcii zdaniy* [Earthquake-resistant building structures]: textbook for universities. 2nd ed. Moscow: Vysshaja shkola Publ.; 1983. (In Russ.)

17. Kiselev V.A. *Stroitel'naja mehanika: special'nyj kurs. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij* [Construction mechanics: special course. Dynamics and stability of structures]: textbook for universities. 3rd ed., rev. and exp. Moscow: Strojizdat Publ.; 1980. (In Russ.)

18. Cejtin A.I., Guseva N.I. *Statisticheskie metody rascheta sooruzhenij na gruppovye dinamicheskie vozdeystvija* [Statistical methods of calculating of structures for group dynamic impacts]. Moscow: Strojizdat Publ.; 1979. (In Russ.)

19. Birbraer A.N. *Raschet konstrukcij na sejmostojkost* [Seismic analysis of structures]. Saint Petersburg: Nauka Publ.; 1998. (In Russ.)

20. Strok S.I., Pshenichkina V.A., Drozdov V.V. Analiz vlijanija zhestkosti gruntovogo osnovanija na chastoty i formy kolebanij sooruzhenij [Analysis of the influence of subgrade stiffness on the frequencies and mode shapes of structures]. *Stroitel'stvo i arhitektura*. 2018;(2):13–21. (In Russ.)



ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ THEORY OF ELASTICITY

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-311-319
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Напряженное состояние двухслойной полосы при взаимодействии с жестким основанием

Ю.М. Булдакова, С.Г. Кудрявцев*

Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, Республика Марий Эл, Йошкар-Ола, площадь Ленина, 3

*KudryavcevSG@volgatech.net

История статьи:

Поступила в редакцию: 25 февраля 2020 г.

Доработана: 27 апреля 2020 г.

Принята к публикации: 22 июня 2020 г.

Аннотация

Актуальность. При расчете многослойных оснований, когда материал одного слоя или нескольких имеет выраженную анизотропию, характер распределения перемещений и напряжений в основании зависит от направления осей анизотропии в каждом слое. Поэтому при проектировании и анализе работы многослойных сред необходимо иметь оценку влияния данного фактора. **Цель** – исследовать напряженное состояние в полосе, составленной из двух с разными физическими характеристиками анизотропных плоскопараллельных слоев, лежащей без трения на жестком основании. **Методы.** Интегрирование уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела проводится символическим методом в сочетании с методом начальных функций. Начальные функции на линии контакта полосы и основания определяются из условий жесткого сцепления между слоями, условий плотного контакта и отсутствия трения между полосой и основанием, характера нагрузки, приложенной к верхней плоскости полосы. После преобразований функции перемещений и напряжений в каждом слое записываются через нормальную поверхностную нагрузку в виде несобственных интегралов. **Результаты.** Представлены графики изменения напряжений в полосе от значений характеристик анизотропных материалов, толщины слоев. Максимальные значения напряжений на линии сопряжения слоев и на линии контакта с основанием, в зависимости от направления осей анизотропии в каждом слое, приведены в таблицах и показаны в виде графиков. Дана оценка влияния модулей упругости материалов на характер распределения напряжений в полосе, составленной из двух изотропных материалов.

Ключевые слова: перемещение, напряжение, анизотропия, упругость, полоса, слой

Для цитирования

Булдакова Ю.М., Кудрявцев С.Г. Напряженное состояние двухслойной полосы при взаимодействии с жестким основанием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 4. С. 311–319. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-311-319>

Введение

При проектировании многослойных покрытий из изотропных или анизотропных материалов, кон-

тактирующих с жесткими или упругими основаниями, необходимо при заданных внешних нагрузках обеспечить оптимальное соотношение между толщиной и упругими характеристиками материала каждого слоя. Задачи, связанные с определением напряженно-деформированного состояния в многослойных упругих средах под действием поверхностных нагрузок, возникают при расчете несущих покрытий от воздействия транспортного оборудования, в механике грунтов (расчет оснований фундаментов), геомеханике, при анализе работы деталей машин с покрытиями и т. д. Для многослойных сред из изо-

Булдакова Юлия Михайловна, старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и прикладной механики, eLIBRARY SPIN-код: 5677-6126.

Кудрявцев Сергей Геннадьевич, доцент кафедры сопротивления материалов и прикладной механики, кандидат технических наук, eLIBRARY SPIN-код: 9756-6211.

© Булдакова Ю.М., Кудрявцев С.Г., 2020

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

тропных материалов данный класс задач рассматривался в ряде работ, например [1–10], для трансверсально-изотропного материала в работах [11–20].

1. Постановка задачи

На основе уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела исследуется напряженное состояние двухслойной полосы, лежащей без трения на жестком основании (рис. 1). Полоса составлена из двух анизотропных плоскопараллельных слоев с разными упругими характеристиками. Нумерацию слоев выбираем снизу вверх. Перемещения, напряжения, физические и геометрические

характеристики в каждом слое обозначим нижним индексом k ($k = 1, 2$), высота полосы $h = h_1 + h_2$ по длине не меняется. Положительные направления перемещений и напряжений показаны на рис. 1. Статическая нормальная поверхностная нагрузка $q(x)$ прикладывается к верхней плоскости полосы, ось x направим по нижней плоскости полосы, ось y – перпендикулярно границе основания. На рис. 1 нормальное давление между полосой и жестким основанием обозначено $q_{o1}(x)$, а нормальные и касательные усилия на линии контакта слоев $q_{o2}(x)$ и $\tau_{o2}(x)$.

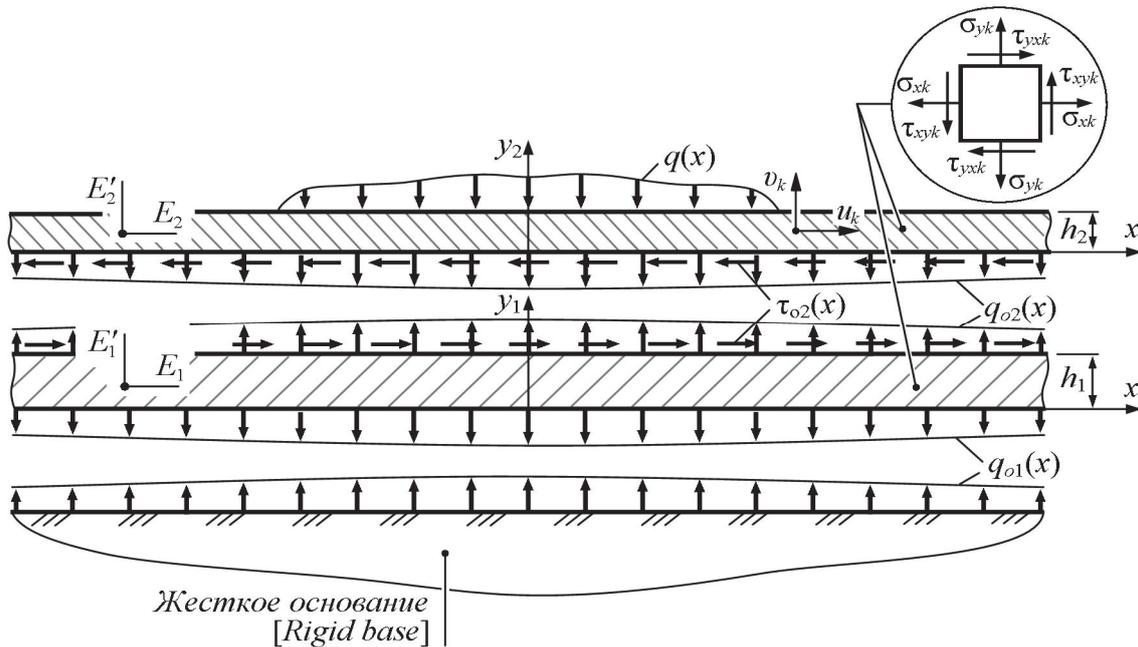


Рис. 1. Схема взаимодействия между слоями полосы и жестким основанием
[Figure 1. Scheme of interaction between strip layers and rigid base]

2. Метод расчета

При решении исходим из уравнений, полученных в [16]. Перемещения и напряжения в произвольной точке каждого слоя записываются через функции перемещений и усилий на нижней плоскости полосы. Неизвестные функции перемещений и усилий на нижней плоскости определяются из условий отсутствия трения и плотного контакта между полосой и основанием, условий жесткого сцепления между слоями, характера нагрузки, приложенной к верхней плоскости полосы. Данные граничные условия имеют вид:

$$\tau_{y1}(x, y_1 = 0) = \tau_{o1} = 0,$$

$$v_1(x, y_1 = 0) = v_{o1}(x) = 0,$$

$$u_1(x, y_1 = h_1) = u_2(x, y_2 = 0) = u_{o2}(x),$$

$$v_1(x, y_1 = h_1) = v_2(x, y_2 = 0) = v_{o2}(x),$$

$$\sigma_{y1}(x, y_1 = h_1) = \sigma_{y2}(x, y_2 = 0) = q_{o2}(x),$$

$$\tau_{xy1}(x, y_1 = h_1) = \tau_{xy2}(x, y_2 = 0) = \tau_{o2}(x),$$

$$\sigma_{y2}(x, y_2 = h_2) = -q(x).$$

После преобразований перемещения и напряжения в произвольной точке каждого слоя выражаются, используя интегральное преобразование Фурье [5], через заданную поверхностную нагрузку в виде несобственных интегралов, которые имеют сложную структуру и не приводятся.

3. Результаты

Рассмотрим вариант, когда в сечении $x = 0$ приложена сила интенсивностью F , равномерно распределенная вдоль оси перпендикулярной плоскости (рис. 2). В общем случае имеем неограниченное количество комбинаций между упругими характеристиками материалов слоев полосы. Для примера проведем анализ напряженного состояния по-

лосы, когда верхний слой выполнен из тканевого стеклопластика горячего прессования (СТЭТ), нижний – стеклопластика на основе стеклоткани марки АСТТ(б)-С₂-О и полиэфирной смолы марки ПН-3. Упругие характеристики материалов приведены в [21] и указаны на рис. 2. Направления осей анизотропии материала в каждом слое определяются углом φ_k .

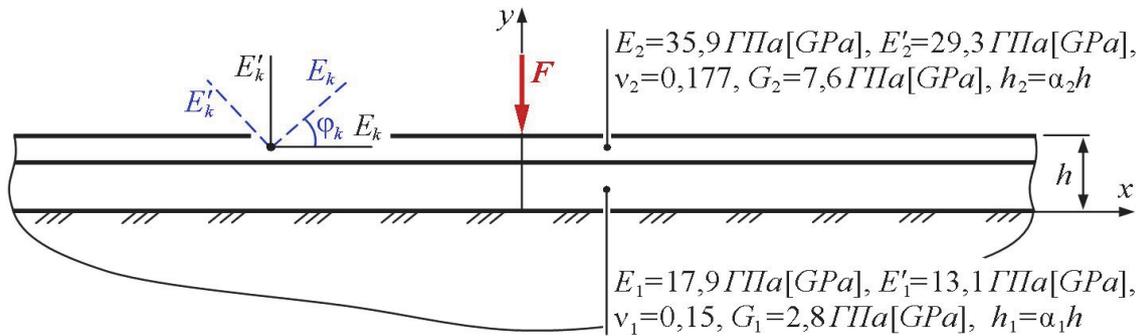


Рис. 2. Схема нагружения двухслойной полосы
[Figure 2. Loading scheme for a two-layer strip]

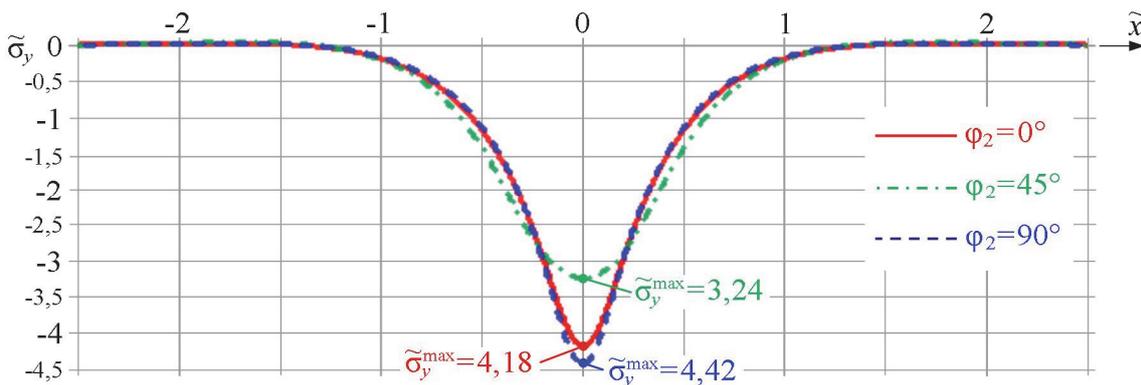


Рис. 3. Распределение параметра $\tilde{\sigma}_y$ по линии контакта слоев полосы в зависимости от φ_2 при $\varphi_1 = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$

[Figure 3. Distribution of the parameter $\tilde{\sigma}_y$ along the contact line of the strip layers depending on φ_2 when $\varphi_1 = 0$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$]

Результаты численного анализа приводятся для плоского напряженного состояния (ширина полосы равна единице) в безразмерных параметрах:

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{\sigma_x \pi h}{F}, \quad \tilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y \pi h}{F}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} \pi h}{F},$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{h}, \quad \alpha_1 = \frac{h_1}{h}, \quad \alpha_2 = \frac{h_2}{h}.$$

Рассмотрим влияние направления осей анизотропии материала в каждом слое на напряженное состояние двухслойного покрытия. При проведении расчетов коэффициенты деформации, кото-

рые входят в функции перемещений и напряжений, выражены через технические постоянные по формулам преобразования упругих постоянных при повороте осей анизотропии на некоторый угол φ_k [21].

Распределение параметра напряжения $\tilde{\sigma}_y$ по линии контакта слоев полосы в зависимости от φ_2 показано на рис. 3. Видно, что для варианта $\varphi_1 = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$ максимальное значение $\tilde{\sigma}_y$ возникает при $\varphi_2 = 90^\circ$.

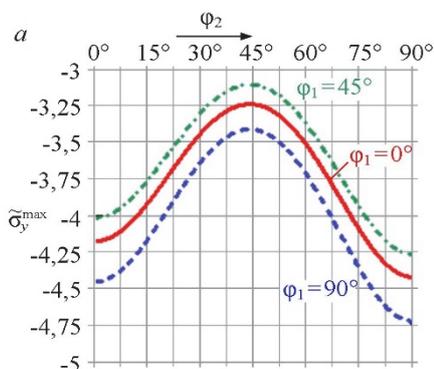
В табл. 1 приведены на линии контакта слоев значения $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ в зависимости от направления осей анизотропии в каждом слое при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$, в табл. 2 – на линии контакта полосы и основания.

Таблица 1

Значения $|\tilde{\sigma}_y^{\max}|$ на линии контакта слоев полосы
в зависимости от Φ_k
[Table 1. Values $|\tilde{\sigma}_y^{\max}|$ on the contact line of the strip layers
depending on Φ_k]

$\Phi_1 \backslash \Phi_2$	0°	30°	45°	60°	90°
0°	4,18	3,43	3,24	3,52	4,42
30°	4,00	3,30	3,11	3,38	4,25
45°	4,01	3,29	3,10	3,37	4,27
60°	4,08	3,36	3,16	3,44	4,33
90°	4,45	3,63	3,41	3,72	4,73

На рис. 4 представлены графики результатов расчета параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ в зависимости от направления осей анизотропии в каждом слое. Из сопоставления кривых видно, что максимальные значения возникают для варианта, когда наименьшее значе-



ние модуля упругости материала обоих слоев полосы направлено параллельно границе основания.

Влияние параметра высоты и направления осей анизотропии в верхнем слое на значения $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ при $\Phi_1 = 0^\circ$ показано на рис. 5. Результаты расчетов $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ на линии контакта слоев представлены на рис. 5, а, на рис. 5, б – на линии контакта полосы и основания. Из анализа графиков следует, что с увеличением параметра α_2 значения $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ убывают более заметно при значении $\Phi_2 = 45^\circ$.

Таблица 2

Значения $|\tilde{\sigma}_y^{\max}|$ на линии контакта полосы с основанием
в зависимости от Φ_k
[Table 2. Values $|\tilde{\sigma}_y^{\max}|$ on the contact line of the strip with the base
depending on Φ_k]

$\Phi_1 \backslash \Phi_2$	0°	30°	45°	60°	90°
0°	3,13	2,75	2,63	2,79	3,23
30°	2,63	2,36	2,28	2,39	2,67
45°	2,48	2,24	2,17	2,26	2,51
60°	2,73	2,45	2,36	2,48	2,78
90°	3,48	3,00	2,86	3,05	3,60

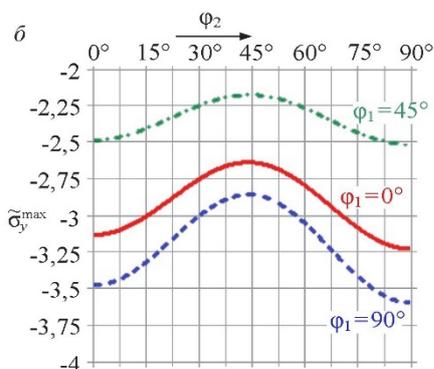


Рис. 4. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ в зависимости от Φ_k при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$:

а – на линии контакта слоев полосы; б – на линии контакта полосы с жестким основанием

[Figure 4. Change the parameter $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ depending on Φ_k when $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$:

а – on the contact line of the strip layers; б – on the contact line of the strip with a rigid base]

Графики на рис. 6 иллюстрируют влияние отношения модулей упругости материалов и параметра α_2 на значения $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ для варианта, когда полоса составлена из двух изотропных материалов ($\nu_1 = \nu_2 = 0,25$).

Расчетные формулы получены путем перехода от анизотропного материала к изотропному [19]. Штриховой линией показаны кривые при $\alpha_2 = 0,25$, сплошной – линии, соответствующие значению

$\alpha_2 = 0,5$, штрихпунктирной – $\alpha_2 = 0,75$. Из анализа кривых следует, что при увеличении отношения E_2 / E_1 значения параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ убывают.

На рис. 7 показано распределение параметра напряжения $\tilde{\tau}_{xy}$ по линии контакта слоев полосы.

Видно, что параметр напряжения на некотором расстоянии от линии действия силы достигает максимума, а затем затухает. Сравнивая кривые заключаем, что значения $\tilde{\tau}_{xy}$ и размер области распространения по оси \tilde{x} больше при $\varphi_2 = 45^\circ$.

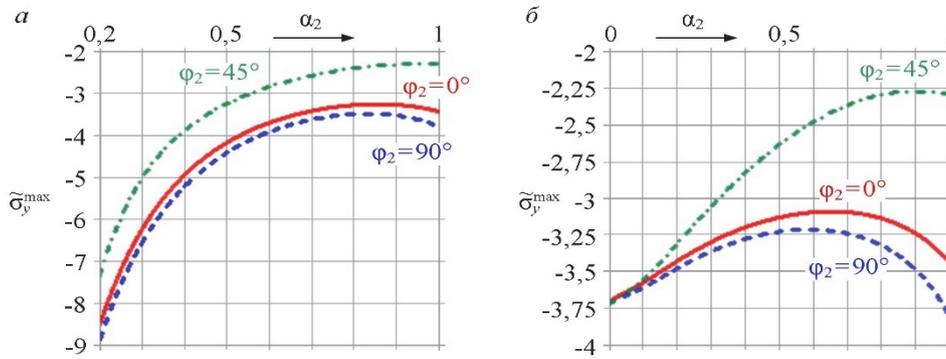


Рис. 5. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ в зависимости от α_2 при $\varphi_1 = 0^\circ$

a – на линии контакта слоев полосы; *b* – на линии контакта полосы с жестким основанием

[Figure 5. Change the parameter $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ depending on α_2 when $\varphi_1 = 0^\circ$

a – on the contact line of the strip layers; *b* – on the contact line of the strip with a rigid foundation]

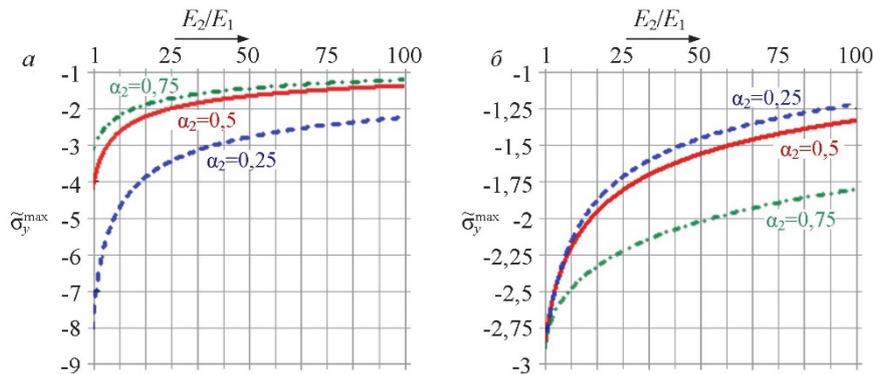


Рис. 6. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ в зависимости от E_2 / E_1 и α_2 :

a – на линии контакта слоев полосы; *b* – на линии контакта полосы с жестким основанием

[Figure 6. Change the parameter $\tilde{\sigma}_y^{\max}$ depending on E_2 / E_1 and α_2 :

a – on the contact line of the strip layers; *b* – on the contact line of the strip with a rigid foundation]

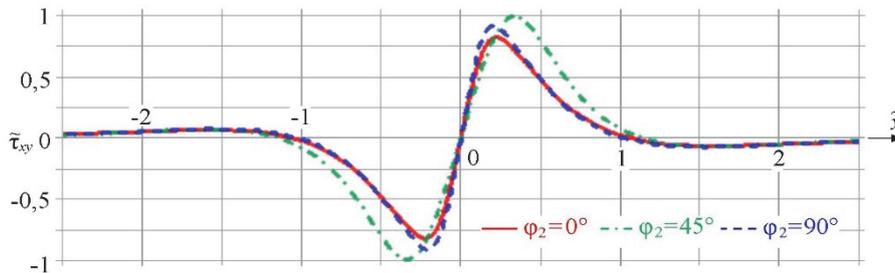


Рис. 7. Распределение параметра $\tilde{\tau}_{xy}$ по длине контакта слоев полосы в зависимости от φ_2 при $\varphi_1 = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$

[Figure 7. Distribution of the parameter $\tilde{\tau}_{xy}$ along the contact line of the strip layers depending on φ_2 when $\varphi_1 = 0$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$]

Результаты вычислений параметра $|\tilde{\tau}_{xy}^{\max}|$ на линии контакта слоев полосы в зависимости от направлений углов φ_k представлены в табл. 3. В числителе указана максимальная величина $\tilde{\tau}_{xy}$, в знаменателе – координата $|\tilde{x}|$, в которой возникает $|\tilde{\tau}_{xy}^{\max}|$.

Таблица 3

Значения $|\tilde{\tau}_{xy}^{\max}|$ на линии контакта слоев полосы в зависимости от φ_k

[Table 3. Values $|\tilde{\tau}_{xy}^{\max}|$ on the contact line of the strip layers depending on φ_k]

$\varphi_1 \backslash \varphi_2$	0°	30°	45°	60°	90°
0°	$\frac{0,816}{0,226}$	$\frac{0,927}{0,313}$	$\frac{0,992}{0,340}$	$\frac{0,963}{0,304}$	$\frac{0,903}{0,209}$
30°	$\frac{0,773}{0,223}$	$\frac{0,879}{0,309}$	$\frac{0,943}{0,336}$	$\frac{0,918}{0,301}$	$\frac{0,867}{0,209}$
45°	$\frac{0,786}{0,223}$	$\frac{0,889}{0,308}$	$\frac{0,953}{0,335}$	$\frac{0,930}{0,300}$	$\frac{0,882}{0,209}$
60°	$\frac{0,729}{0,219}$	$\frac{0,829}{0,306}$	$\frac{0,890}{0,333}$	$\frac{0,867}{0,297}$	$\frac{0,821}{0,205}$
90°	$\frac{0,689}{0,217}$	$\frac{0,786}{0,306}$	$\frac{0,846}{0,334}$	$\frac{0,819}{0,297}$	$\frac{0,770}{0,200}$

Распределение параметра $\tilde{\sigma}_x$ по линии контакта слоев полосы приведено на рис. 8. Серия кривых на рис. 8, *a* показывает изменение значений $\tilde{\sigma}_x$ на нижней плоскости верхней полосы, на рис. 8, *b* – на верхней плоскости нижней полосы. Из анализа графиков видно, что в области, примыкающей к линии действия силы, параметр $\tilde{\sigma}_x$ положительный, а при некотором значении параметра \tilde{x} меняет знак и далее становится равным нулю.

На рис. 9 показан характер изменения параметра $\tilde{\sigma}_x$ по линии контакта слоев, когда каждый слой полосы выполнен из изотропного материала ($\nu_1 = \nu_2 = 0,25$). Кривые на рис. 9, *a* построены по результатам вычислений $\tilde{\sigma}_x$ на нижней плоскости верхней полосы, на рис. 9, *b* – на верхней плоскости нижней полосы. Из сопоставления кривых заключаем, что при отношении $\frac{E_2}{E_1} \geq 1$ на

границе контакта слоев в верхнем и нижнем слоях полосы возникают положительные значения $\tilde{\sigma}_x$.

При отношении $\frac{E_2}{E_1} = 0,5$ на нижней границе

верхнего слоя значения параметра $\tilde{\sigma}_x$ отрицательные, на верхней границе нижнего слоя – положительные.

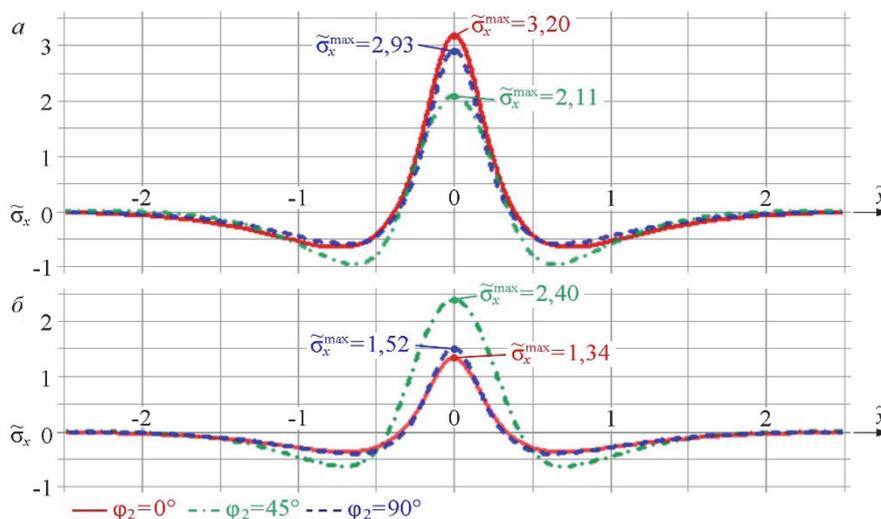


Рис. 8. Распределение параметра $\tilde{\sigma}_x$ по линии контакта слоев полосы в зависимости от φ_2 при $\varphi_1 = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$: *a* – на нижней плоскости верхней полосы; *b* – на верхней плоскости нижней полосы

[Figure 8. Distribution of the parameter $\tilde{\sigma}_x$ along the contact line of the strip layers depending on φ_2 when $\varphi_1 = 0$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$: *a* – on the bottom plane of the top strip; *b* – on the top plane of the bottom strip]

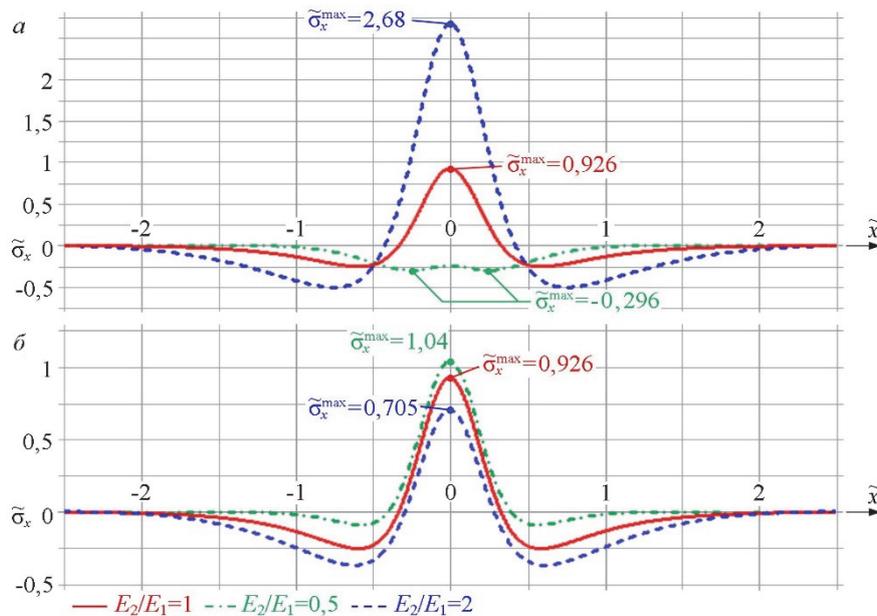


Рис. 9. Изменение параметра $\tilde{\sigma}_x$ на линии контакта слоев из изотропных материалов при отношении $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$:
 a – на нижней плоскости верхней полосы; b – на верхней плоскости нижней полосы

[Figure 9. Change the parameter $\tilde{\sigma}_x$ on the contact line of layers made of isotropic materials at $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$:
 a – on the bottom plane of the top strip; b – on the top plane of the bottom strip]

Заключение

Приведена качественная и количественная оценка напряженного состояния в двухслойной полосе, лежащей без трения на жестком основании, в зависимости от направления осей анизотропии материала в каждом слое. Расчеты проведены для варианта нагружения полосы сосредоточенной силой. Показано, что максимальные нормальные напряжения, действующие в направлении, перпендикулярном границе основания, возникают, когда наименьшие значения модулей упругости материала в слоях полосы направлены параллельно границе основания, минимальные – при направлении осей анизотропии в каждом слое под углом 45° к границе основания. Касательные напряжения при расположении осей под углом 45° принимают наибольшие значения в сечениях, более удаленных от линии действия силы, в сравнении с другими вариантами направления осей анизотропии. Наименьшие отклонения в результатах вычислений продольных нормальных напряжений при заданных физических характеристиках материалов на линии раздела сред возникают при направлении осей анизотропии под углом 45° . Для полосы, составленной из двух изотропных материалов с разными физическими характеристиками, нормальные напряжения в продольном направлении полосы при уменьшении модуля упругости мате-

риала нижнего слоя возрастают на нижней границе верхнего слоя и уменьшаются на верхней границе нижнего слоя.

Список литературы

1. Шехтер О.Я. Расчет бесконечной фундаментальной плиты, лежащей на упругом основании конечной и бесконечной мощности и нагруженной сосредоточенной силой // Сборник трудов Научно-исследовательского сектора Треста глубинных работ. М. – Л.: Стройиздат Наркомстроя, 1939. С. 133–139.
2. Раппопорт Р.М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства // Труды Ленинградского политехнического института. 1948. № 5. С. 3–18.
3. Коган Б.И. Напряжения и деформации многослойных покрытий // Труды ХАДИ. 1953. Вып. 14. С. 33–46.
4. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. 492 с.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 368 с.
6. Garg N.R., Singh S.J. Residual response of a multilayered half-space to two-dimensional surface loads // Bull. Ind. Soc. Earthq. Tech. 1985. No. 22. Pp. 39–52.
7. Pan E. Static Green's functions in multilayered half-spaces // Applied Mathematical Modelling. 1997. Vol. 21. No. 8. Pp. 509–521.
8. Торская Е.В., Лушников Н.А., Лушников П.А. Анализ напряженно-деформированного состояния многослой-

ных дорожных одежд // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 2. С. 204–210.

9. *Ширунов Г.Н.* Метод начальных функций в модели упругого многослойного основания под действием нормальной локальной нагрузки // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 91–96.

10. *Tarntira K., Senjuntichai T., Keawsawasvong S.* Multilayered Elastic Medium under Axisymmetric Loading and Surface Energy // Advanced Materials and Engineering Materials VIII. 2019. Vol. 814. Pp. 320–326.

11. *Лехницкий С.Г.* Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты // Прикладная механика и математика. 1962. Т. 26. № 4. С. 687–696.

12. *Pan E.* Static response of transversely isotropic and layered half-space to general surface loads // Phys. Earth Planet Inter. 1989. Vol. 54. Pp. 353–363.

13. *Garg N.R., Sharma R.K.* Displacements and stresses at any point of a transversely isotropic multilayered half-space due to strip loading // Indian. J. Pure Appl. Math. 1991. No. 22 (10). Pp. 859–877.

14. *Garg N.R., Singh S.J., Manchanda S.* Static deformation of an orthotropic multilayered elastic half-space by two-dimensional surface loads // Proceedings of the Indian Academy of Sciences – Earth and Planetary Sciences. 1991. Vol. 100. Issue 2. Pp. 205–218.

15. *Круподеров А.В.* Фундаментальные решения для многослойных трансверсально изотропных оснований // Известия ТулГУ. Науки о Земле. 2011. № 1. С. 137–146.

16. *Кудрявцев С.Г., Булдакова Ю.М.* Взаимодействие анизотропной полосы и жесткого основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 29–35.

17. *Ai Z.Y., Cang N.R., Han J.* Analytical layer-element solutions for a multi-layered transversely isotropic elastic medium subjected to axisymmetric loading // Journal of Zhejiang University Science A. 2012. Vol. 13. No. 1. Pp. 9–17.

18. *Lin C.* Green's function for a transversely isotropic multilayered half-space: an application of the precise integration method // Acta Mechanica. 2015. Vol. 226. No. 11. Pp. 3881–3904.

19. *Кудрявцев С.Г., Булдакова Ю.М.* Напряженное и деформированное состояние двухслойного анизотропного основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 5. С. 9–20.

20. *Liu J., Zhang P., Lin G., Li C., Lu S.* Elastostatic solutions of a multilayered transversely isotropic piezoelectric system under axisymmetric loading // Acta Mechanica. 2017. Vol. 228. Issue 1. Pp. 107–128.

21. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-4-311-319

RESEARCH PAPER

Stressed state of two-layer strip when interacting with rigid base

Julia M. Buldakova, Sergey G. Kudryavtsev*

Volga State University of Technology, 3 Lenina Sq, Yoshkar-Ola, 424000, Mari El Republic, Russian Federation

*KudryavcevSG@volgatech.net

Article history:

Received: February 25, 2020

Revised: April 27, 2020

Accepted: June 22, 2020

Abstract

Relevance. In the calculation of multilayer bases, when the material of one or several layers has a pronounced anisotropy, the nature of the distribution of displacements and stresses depends on the direction of the anisotropy axes in each layer. Therefore, it is necessary to have an evaluation of the influence of this factor in the design and analysis of the operation of multilayer media. **The aim of the work** – to research the stress state in a strip composed of two anisotropic plane-parallel layers with different physical characteristics, lying without friction on a rigid base. **Methods.** The integration of the equations of the plane problem of the theory of elasticity of an anisotropic body is carried out by the symbolic method in combination with the method of initial functions. The initial functions on the contact line of the strip and the base are determined from the conditions of tight adhesion between the layers, the conditions of tight contact and the absence of friction between the strip and the base, the nature of the load applied to the upper plane of the strip. After transformations, the functions of displacements and stresses in each layer are written through the normal surface load in the form of improper integrals. **Results.** Plots of changes in stresses in the strip from the values of the characteristics of anisotropic materials, layer thicknesses are given. The maximum stresses on the interface line of the layers and on the line of contact with the base, depending on the direction of the anisotropy axes in each layer, are presented in the tables and shown in graphs. The effect of the elastic modules of materials on the nature of the stress distribution in a strip composed of two isotropic materials is estimated.

Keywords: displacement stress, anisotropy, elasticity, band, layer

For citation

Buldakova J.M., Kudryavtsev S.G. Stressed state of two-layer strip when interacting with rigid base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020; 16(4):311–319. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-311-319> (In Russ.)

Julia M. Buldakova, senior lecturer of the Department of Resistance of Materials and Applied Mechanics, eLIBRARY SPIN-code: 5677-6126.

Sergey G. Kudryavtsev, Associate Professor of the Department of Resistance of Materials and Applied Mechanics, Candidate of Technical Sciences, eLIBRARY SPIN-code: 9756-6211.

References

1. Shehter O.Y. Raschet beskonechnoi fundamentalnoi pliti, lejaschei na uprugom osnovanii konechnoi i beskonechnoi moschnosti i nagrujennoi sosredotochennoi siloi [Calculation of an infinite fundamental plate lying on an elastic base of finite and infinite power and loaded with a concentrated force]. *Sbornik trudov Nauchno-issledovatel'skogo sektora Tresta glubinnih rabot* [Collected Works of the Research Sector of the Trust of Deep Works]. Moscow, Leningrad: Stroizdat Narkomstroya Publ.; 1939. p. 133–139. (In Russ.)
2. Rappoport R.M. Zadacha Bussineska dlya sloistogo uprugogo poluprostranstva [The Boussinesq problem for a layered elastic half-space]. *Trudi Leningradskogo politehnicheskogo instituta* [Proceedings of the Leningrad Polytechnic Institute]. 1948;(5):3–18. (In Russ.)
3. Kogan B.I. Napryajeniya i deformacii mnogosloinnykh pokrytii [Stresses and deformations of multilayer coatings]. *Trudi HADI* [Proceedings of HADI]. 1953;(14):33–46. (In Russ.)
4. Vlasov V.Z., Leontev N.N. *Balki, pliti i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on an elastic base]. Moscow: Gos. izd. fiz.-mat. lit.-ry. Publ.; 1960. (In Russ.)
5. Uflyand Ya.S. *Integralnie preobrazovaniya v zadachah teorii uprugosti* [Integrated transformations in tasks of the theory of elasticity]. Moscow, Leningrad: AN SSSR Publ.; 1963. (In Russ.)
6. Garg N.R., Singh S.J. Residual response of a multilayered half-space to two-dimensional surface loads. *Bull. Ind. Soc. Earthq. Tech.* 1985;(22):39–52.
7. Pan E. Static Green's functions in multilayered half-spaces. *Applied Mathematical Modelling*. 1997;21(8):509–521.
8. Torskaya E.V., Lushnikov N.A., Lushnikov P.A. Analysis of stress-strain state of multi-layer pavements. *Journal of Friction and Wear*. 2008;29(2):204–210. (In Russ.)
9. Shirunov G.N. Method of initial functions in model of compression linearly deformable layered foundation under normal local load. *Magazine of civil engineering*. 2015;1(53): 91–96. (In Russ.)
10. Tarntira K., Senjuntichai T., Keawsawasvong S. Multilayered Elastic Medium under Axisymmetric Loading and Surface Energy. *Advanced Materials and Engineering Materials VIII*. 2019;814:320–326.
11. Lehnickii S.G. Uprugoe ravnovesie transversalno-izotropnogo sloya i tolstoi pliti [The elastic equilibrium of a transversely isotropic layer and a thick plate]. *Prikladnaya mehanika i matematika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1962;26(4):687–696. (In Russ.)
12. Pan E. Static response of transversely isotropic and layered half-space to general surface loads. *Phys. Earth Planet Inter.* 1989;(54):353–363.
13. Garg N.R., Sharma R.K. Displacements and stresses at any point of a transversely isotropic multilayered half-space due to strip loading. *Indian. J. Pure Appl. Math.* 1991; 22(10):859–877.
14. Garg N.R., Singh S.J., Manchanda S. Static deformation of an orthotropic multilayered elastic half-space by two-dimensional surface loads. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences – Earth and Planetary Sciences*. 1991;100(2):205–218.
15. Krupoderov A.V. Fundamental solutions for transversely isotropic multilayered. *News of the Tula State University. Sciences of Earth*. 2011;(1):137–146. (In Russ.)
16. Kudryavtsev S.G., Buldakova J.M. Interaction of anisotropic band and rigid base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012;(4):29–35. (In Russ.)
17. Ai Z.Y., Cang N.R., Han J. Analytical layer-element solutions for a multi-layered transversely isotropic elastic medium subjected to axisymmetric loading. *Journal of Zhejiang University Science A*. 2012;13(1):9–17.
18. Lin C. Green's function for a transversely isotropic multilayered half-space: an application of the precise integration method. *Acta Mechanica*. 2015;226(11):3881–3904.
19. Kudryavtsev S.G., Buldakova J.M. Stress-strain state of two-layered anisotropic foundation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015;(5):9–20. (In Russ.)
20. Liu J., Zhang P., Lin G., Li C., Lu S. Elastostatic solutions of a multilayered transversely isotropic piezoelectric system under axisymmetric loading. *Acta Mechanica*. 2017;228(1):107–128.
21. Lehnickii S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka Publ.; 1977. (In Russ.)

Уважаемые коллеги!

Российский университет дружбы народов
приглашает вас принять участие в Международной конференции
«ИНЖЕНЕРНЫЕ СИСТЕМЫ – 2020»,
посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов, которая состоится
14–16 октября 2020 в Москве.

НАУЧНЫЕ СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

- Материаловедение, металлургия и нанотехнологии
- Машиностроение, энергетика и транспорт
- Авиационные и космические системы
- Геология, горное и нефтегазовое дело
- Гражданское, промышленное и гидротехническое строительство
- Архитектура и промышленный дизайн
- Инновационный менеджмент в промышленности

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИИ

Русский, английский

СРОКИ ПРЕДОСТАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Прием заявок на участие и полных текстов статей – до 15 августа 2020 года.

ПУБЛИКАЦИЯ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИИ

Статьи будут опубликованы в сборнике трудов конференции, индексируемом в БД РИНЦ, или в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Статьи должны быть посвящены описанию результатов оригинальных исследований. Подробная информация по оформлению статей представлена на странице конференции.

УСЛОВИЯ УЧАСТИЯ В КОНФЕРЕНЦИИ

Для участия в конференции необходимо направить регистрационную форму докладчика вместе со статьей в адрес контактных лиц:

– для публикации в сборнике трудов конференции, индексируемом в БД РИНЦ, – по адресу malkova-myu@rudn.ru– для публикации в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science, – по адресу admin@enggsys.ru

Организационный взнос для участников конференции составляет 1800 руб.

Публикация в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science, оплачивается дополнительно.

Размер оплаты указан на странице конференции.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ**Организатор конференции:** Российский университет дружбы народов (РУДН).**Адрес страницы конференции** на портале РУДН: <http://engr.rudn.ru/?p=14247>**Место проведения конференции:**

Инженерная академия РУДН: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.

Заседание секции «Машиностроение, энергетика и транспорт» состоится по адресу:

г. Москва, Подольское ш., д. 8, корп. 5.

Председатель Оргкомитета:

Малькова Марианна Юрьевна, профессор департамента строительства Инженерной академии РУДН.

E-mail: malkova-myu@rudn.ru