

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2020 Том 16 № 1

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения, 05.23.02 – Основания и фундаменты, подземные сооружения, 05.23.17 – Строительная механика.

Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода).

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Акимов П.А., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Галишишникова В.В., д-р техн. наук, доц., РУДН, Москва, Россия

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Азапов В.П., д-р техн. наук, проф., МГСУ, Москва, Россия

Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Баженов В.А., акад., Национальная академия педагогических наук, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина

Буй Суан Нам, доцент, Ханойский университет горного дела и геологии, Ханой, Вьетнам

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., Киевский политехнический университет, Киев, Украина

Заксенхофер Райханд Ф., профессор, Горный университет в Леобене, Австрия

Зверев Е.М., д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

Иванов С.П., д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия
Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

Красич Соня, кандидат технических наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Лисичкин С.Е., д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

Лахович Л.С., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

Магуле Фредерик, профессор, Высшая инженерная школа «Централь Сюлеке», Университет Париж-Сакли, Франция

Мандроне Джузеппе, доцент, Университет Турина, Италия

Обозов В.И., д-р техн. наук, проф., ЦНИИСК, Москва, Россия

Санжаровский Р.С., д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Якутов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

К юбилею Павла Михайловича Саламахина	3
<u>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ</u>	
<i>Саламахин П.М., Луговцев Е.А.</i> Обоснование необходимости и способа модернизации программного обеспечения измерительного комплекса для оценки грузоподъемности балочных пролетных строений автодорожных мостов	5
<i>Саргсян А.Е., Гукова Е.Г.</i> Эффективность реализации свайных фундаментов на примере сооружения реакторного отделения атомной станции с ВВЭР-1000	14
<i>Lamichhane G.P., Giri P.</i> Effect of joint stiffness and flexibility on the design of reinforced cement concrete structure (Влияние жесткости и гибкости соединения при проектировании железобетонных конструкций)	22
<u>ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК</u>	
<i>Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ицанов Т.Р., Андреев А.С., Клочков М.Ю.</i> Учет геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчетах тонкостенных конструкций типа оболочек	31
<i>Иванов В.Н., Шмелева А.А.</i> Геометрические характеристики деформированного состояния оболочек с ортогональной системой координат срединной поверхности	38
<u>ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ</u>	
<i>Rynkovskaya M.I., Elberdov T., Sert E., Öchsner A.</i> Study of modern software capabilities for complex shell analysis (Исследование возможностей современных компьютерных программ для расчета оболочек сложной геометрии)	45
<i>Мануйлов Г.А., Косицын С.В., Грудцына И.Е.</i> Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некратными критическими нагрузками	54
<u>ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ</u>	
<i>Зоненберг А.Л.</i> Новые операционные соотношения и их применение к решению нестационарных задач для стержней на основе теории С.П. Тимошенко	62
<u>СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ</u>	
<i>Абаев З.К., Кодзав М.Ю., Бигулаев А.А.</i> Анализ сейсмостойкости конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий	76

Редактор Ю.А. Заикина

Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова

Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел.: +7 (495) 955-08-28; факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 19.02.2020. Выход в свет 26.02.2020. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 9,76. Тираж 250 экз. Заказ № 24. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов, 2020

© Медоев Д.А., фото на обложке

(Приморский океанариум, о. Русский, Приморский край, Россия), 2020

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2020 VOLUME 16 No. 1

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI (elibrary.ru), Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The Journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the Journal.

The Journal website contains full information about the Journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the Journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

P.A. Akimov, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

V.V. Galishnikova, DSc, RUDN University, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

I.A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

V.P. Agapov, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

V.I. Andreev, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

V.A. Bazhenov, Member of the National Academy of Educational Science of Ukraine, DSc, Professor, Kiev National University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine

Xuan Nam Bui, PhD, Assoc. Professor, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi, Vietnam

S.P. Ivanov, DSc, Professor, Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia

N.I. Karpenko, Member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

V.I. Kolchunov, Member of the RAACS, DSc, Professor, South-West State University, Kursk, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

S.E. Lisichkin, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

L.S. Lyakhovich, Member of the RAACS, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France

Giuseppe Mandrone, PhD, Ass. Prof. in Engineering Geology, University of Torino, Italy

V.I. Obozov, DSc, Professor, Central Research Institute of Building Structures (TzNIISK im. V.V. Kucherenko), Moscow, Russia

Reinhard F. Sachsenhofer, PhD, Professor, Montanuniversität Leoben, Austria

R.S. Sanjarovskiy, DSc, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

V.I. Travush, Member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

V.V. Vanin, DSc, Professor, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine

N.M. Yakupov, Corresponding Member of Russian Engineering Academy, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

E.M. Zveryaev, DSc, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia

CONTENTS

ANNIVERSARY OF PAVEL M. SALAMAKHIN	3
<u>ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES</u>	
<i>Salamakhin P.M., Lugovtsev E.A.</i> Substantiation of the necessity and method of upgrading the software of the measuring complex for assessing the load capacity of girder spans of road bridges	5
<i>Sargsyan A.E., Gukova E.G.</i> The effectiveness of the implementation of pile foundations on the example of the reactor building of a nuclear power plant with VVER-1000	14
<i>Lamichhane G.P., Giri P.</i> Effect of joint stiffness and flexibility on the design of reinforced cement concrete structure	22
<u>THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS</u>	
<i>Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ishchanov T.R., Andreev A.S., Klochkov M.Yu.</i> Accounting for geometric nonlinearity in finite element strength calculations of thin-walled shell-type structures	31
<i>Ivanov V.N., Shmeleva A.A.</i> Geometric characteristics of the deformation state of the shells with orthogonal coordinate system of the middle surfaces	38
<u>NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES</u>	
<i>Rynkovskaya M.I., Elberdov T., Sert E., Öchsner A.</i> Study of modern software capabilities for complex shell analysis	45
<i>Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E.</i> Numerical analysis of stability of the stiffened plates subjected aliquant critical loads	54
<u>DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS</u>	
<i>Zonenberg A.L.</i> New operational ratios and their application to non-stationary tasks for rods based on S.P. Timoshenko theory	62
<u>SEISMIC RESISTANCE</u>	
<i>Abaev Z.K., Kodzaev M.Yu., Bigulaev A.A.</i> Earthquake resistance analysis of structural systems of multi-storey civil buildings	76

Copy Editor Iu.A. Zaikina

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer Iu.A. Zaikina

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation; tel.: +7 (495) 955-08-28; fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University

3 Ordzhonikidze St., Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 2020

© Medoev D.A., photo on the cover of the Journal

(Primorsky Aquarium, Russky Island, Primorsky Krai, Russia), 2020

К ЮБИЛЕЮ ПАВЛА МИХАЙЛОВИЧА САЛАМАХИНА ANNIVERSARY OF PAVEL M. SALAMAKHIN



Доктору технических наук, профессору, академику РАТ, ведущему научному сотруднику Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ) Павлу Михайловичу Саламахину в феврале 2020 года исполняется 90 лет.

В 1956 году он закончил строительный факультет Военно-инженерной академии имени В.В. Куйбышева, после чего проработал на Семипалатинском специальном полигоне три года на инженерных должностях. В 1959 году был введен в состав научно-исследовательской лаборатории мостов и переправ ВИА имени В.В. Куйбышева, в которой работал до 1972 года на должностях старшего научного сотрудника, а затем начальника лаборатории. По результатам своих научных работ защитил в 1963 году кандидатскую, а в 1974 году – докторскую диссертации. Его кандидатская диссертация была посвящена исследованию целесообразности применения стеклопластиков в переправочно-мостовых конструкциях, а докторская – автоматизации проектирования военных мостов. С 1972 по 1974 год работал на Кубе специалистом – консультантом

при заведующим кафедрой конструкций Военно-технического института в Гаване. С 1974 по 1985 год преподавал на кафедре мостов, а затем на кафедре конструкций ВИА имени В.В. Куйбышева.

Под его руководством на кафедре мостов МАДИ велись исследования в области оптимизации и автоматизации проектирования мостовых конструкций, определения возможности безопасного пропуска тяжеловесных транспортных средств по автодорожным мостам с учетом их фактического состояния.

П.М. Саламахин имеет более 200 опубликованных научных работ, среди которых 6 монографий, 5 авторских свидетельств и 2 патента на изобретения.

За время своей научной работы в ВИА имени В.В. Куйбышева и МАДИ он выступал официальным оппонентом по 7 докторским и более 30 кандидатским диссертациям, в МАДИ им подготовлено 24 кандидата технических наук.

Награжден знаками «Почетный дорожник Российской Федерации», «Почетный транспортный строитель Российской Федерации» и «Почет-

ный работник высшего профессионального образования». В 2004 году избран действительным членом Российской академии транспорта.

Прекратив чтение лекций по состоянию здоровья, находясь в должности ведущего научного сотрудника МАДИ, он направил свои усилия на критическую оценку существующих отечественных и зарубежных нормативных временных вертикальных нагрузок на автодорожные мостовые

сооружения, обоснование формата новых физически существующих, статистически обоснованных и экономически целесообразных нормативных временных вертикальных нагрузок на автодорожные мостовые сооружения Российской Федерации и концепции разработки программ автоматизированного проектирования мостовых сооружений по задаваемому критерию их оптимальности.

*Коллектив департамента строительства Инженерной академии РУДН
и редколлегия журнала «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений»
сердечно поздравляют Павла Михайловича Саламахина с 90-летием,
желают ему доброго здоровья и дальнейших успехов в научно-педагогической деятельности!*

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-5-13
УДК 624.21

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Обоснование необходимости и способа модернизации программного обеспечения измерительного комплекса для оценки грузоподъемности балочных пролетных строений автодорожных мостов

П.М. Саламахин^{1*}, Е.А. Луговцев²

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Российская Федерация, 125319, Москва, Ленинградский проспект, 64

²Военный учебно-научный центр Сухопутных войск «Общевойсковая академия Вооруженных Сил Российской Федерации», Российская Федерация, 119121, Москва, проезд Девичьего Поля, 4

*pavel-salamahin@mail.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 11 октября 2019 г.

Доработана: 22 декабря 2019 г.

Принята к публикации: 15 января 2020 г.

Аннотация

В статье отмечено, что программное обеспечение комплекса, используемого в российских войсках для решения в короткие сроки актуальной задачи определения возможности безопасного пропуска сверхтяжелых грузов по балочным автодорожным мостам, имеет следующие недостатки: 1) оно может быть использовано только для разрезных железобетонных мостов; 2) решение о возможности пропуска по мосту сверхтяжелой нагрузки принимается только по значению прогиба в середине пролетного строения без учета возникающих напряжений в пролетных строениях, а также без учета несущей способности опор моста. С целью исключения этих недостатков в статье: 1) получена строгая формула для вычисления прогиба в середине балочных пролетных строений из любых конструкционных материалов от угла поворота их опорных сечений; 2) на основе использования фундаментальной связи между относительными высотами балочных пролетных строений, относительными деформациями кромок их поперечных сечений и относительными их прогибами доказана возможность вычисления значения максимальных напряжений в кромках поперечных сечений балочных пролетных строений из любых конструкционных материалов по значению максимального прогиба в середине их пролетов; 3) установлен способ определения возможности опор балочных мостов обеспечить безопасный пропуск тяжеловесного средства по характеру изменения углов поворота опорных поперечных сечений пролетных строений под воздействием движения макета тяжеловесного средства. Учет трех этих результатов при модернизации программного обеспечения измерительного комплекса обеспечивает достижение цели работы.

Ключевые слова: мост; пролетное строение; прогиб в середине пролета; угол наклона опорного сечения; макет тяжеловесного средства; методика; расчет; напряжение в кромке поперечного сечения

Для цитирования

Саламахин П.М., Луговцев Е.А. Обоснование необходимости и способа модернизации программного обеспечения измерительного комплекса для оценки грузоподъемности балочных пролетных строений автодорожных мостов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 5–13. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-5-13>

Введение

В практике эксплуатации автомобильных дорог РФ иногда возникают и будут возникать сложные

актуальные задачи определения в короткие сроки возможности безопасного пропуска по автодорожным мостам тяжеловесных ценных грузов. Действующие в РФ нормативные документы [1–11] для решения этой задачи непригодны, так как их использование требует длительного времени для выполнения большого объема работ по выявлению фактического состояния мостового сооружения.

В связи с этим в 2000-х годах специалистами ВИА имени В.В. Куйбышева была разработана ме-

Саламахин Павел Михайлович, д. т. н., профессор, ведущий научный сотрудник, академик ПАТ; eLIBRARY SPIN-код: 2596-3649, Scopus ID: 6504210104.

Луговцев Евгений Анатольевич, к. т. н. доцент, докторант кафедры дорог, мостов и переправ. eLIBRARY SPIN-код: 7389-8508.

© Саламахин П.М., Луговцев Е.А., 2019

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

тодика для быстрого определения грузоподъемности балочных мостов по значению угла поворота опорного поперечного сечения пролетного строения от воздействия макета пропускаемого тяжеловесного средства. Эта методика была преобразована специалистами ООО «НТЦ “Техническая диагностика и прецизионные измерения”» в удобную систему измерений СИ-ППМ15Н1955 для оценки возможности безопасного пропуска тяжеловесных средств по железобетонным разрезным пролетным строениям автодорожных мостов.

Использование этой системы измерений позволило значительно уменьшить трудоемкость и время решения задачи по определению возможности безопасного пропуска тяжеловесного средства по железобетонным мостам, что особо актуально для военных инженеров.

В основу создания СИ-ППМ15Н1955 положен расчетно-экспериментальный метод оперативного определения угла поворота опорного сечения железобетонного пролетного строения автодорожных мостов с одновременным вычислением прогиба в середине пролетного строения, по численному значению которого принимается решение о возможности пропуска тяжеловесного груза по мостовому сооружению в предположении, что несущая способность опор моста будет достаточной, что является также существенным недостатком программного обеспечения действующего расчетного комплекса.

Из имеющихся для анализа источников, к сожалению, не представляется возможным определить используемую в действующем программном обеспечении методику вычисления прогиба в середине пролета железобетонных мостов от угла поворота их опорных сечений и установить можно ли ее использовать для решения той же задачи применительно к разрезным и неразрезным пролетным строениям автодорожных мостов из любых конструкционных материалов.

Способы устранения недостатков существующего программного обеспечения расчетного комплекса

Получение строгих формул для определения прогиба в середине пролетного строения по углу поворота его опорного сечения

Чтобы обеспечить возможность решения задачи о безопасном пропуске тяжеловесных транспортных средств по балочным пролетным строениям из любых конструкционных материалов, определим вначале зависимость прогиба в середине их пролетов от угла наклона опорных сече-

ний, от воздействия пропускаемых по ним макетов тяжеловесных нагрузок.

В первую очередь получим ее для случая загрузки разрезного пролетного строения равномерно распределенной нагрузкой.

Учтем, что максимальное значение прогиба f в середине пролета в этом случае вычисляется по известной [12] формуле (1) С.П. Тимошенко:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot J}. \quad (1)$$

Тангенс угла наклона θ опорного сечения для этого случая также определяется во известной формуле (2) С.П. Тимошенко [12]:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot J}. \quad (2)$$

Определим из (2) значение EI и подставим его в (1), получим требуемую зависимость (3):

$$f = \frac{l}{3.2} \cdot \operatorname{tg}\theta. \quad (3)$$

Решая аналогично эту задачу для случая загрузки пролетного строения одним сосредоточенным грузом P с использованием формул С.П. Тимошенко для прогиба (4) в середине пролета и угла наклона (5) опорного сечения, получим искомую зависимость в виде (6)

$$f = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}; \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \frac{P \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J}; \quad (5)$$

$$f = \frac{l}{3} \cdot \operatorname{tg}\theta. \quad (6)$$

Далее получим требуемую зависимость прогиба в середине балочного пролетного строения от угла наклона его опорного поперечного сечения для случая любого балочного пролетного строения из любого конструкционного материала, загруженного какой-то нагрузкой, при которой упругая ось может описываться асинусоидальной формулой (7), а тангенс угла наклона оси к горизонтали соответственно формулой (8):

$$y(x) = a \cdot \sin \frac{\pi x}{l}; \quad (7)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg}\theta(x) = a \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi \cdot x}{l}. \quad (8)$$

Учтем, что для этого случая

$$y\left(x = \frac{l}{2}\right) = f_{\max} = a; \quad (9)$$

$$\operatorname{tg}\theta(x=0) = a \frac{\pi}{l}. \quad (10)$$

Тогда

$$\frac{f_{\max}}{\operatorname{tg}\theta(x=0)} = \frac{a \cdot l}{a \cdot \pi} = \frac{l}{\pi}. \quad (11)$$

Откуда получаем

$$f_{\max} = \frac{l}{\pi} \operatorname{tg}\theta. \quad (12)$$

Анализируя полученные формулы (3), (6) и (12) для существенно различных схем нагружения, замечаем, что они дают практически одинаковые значения, не зависят от жесткости пролетных строений и весьма слабо зависят от схемы нагружения. Отсутствие в этих зависимостях жесткости пролетных строений дает основание считать, что они могут быть применены и для железобетонных пролетных строений, так как прогиб в середине их пролета и угол поворота опорного поперечного сечения пролетного строения определяется при одной и той же жесткости, зависящей от реального трещинообразования.

Использование фундаментальной связи

Для расширения возможностей системы измерений при определении грузоподъемности пролетных строений из любых конструкционных материалов и получения возможности вычислять по выявленным прогибам максимальные напряжения в кромках поперечных сечений пролетных строений получим далее связь между прогибами и напряжениями, возникающими в разрезных балочных пролетных строениях.

Для этого используем фундаментальную связь (13) для разрезных балочных пролетных строений из любых конструкционных материалов, полученную П.М. Саламахиным и приведенную им в работе [13]:

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{\alpha \cdot \rho} \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{l}{h}. \quad (13)$$

Она устанавливает связь между относительными прогибами $\frac{f}{l}$ разрезных балочных пролетных

строений, относительными их высотами $\frac{h}{l}$ и от-

носительными деформациями $\frac{\sigma}{E}$ кромок их поясов. В ней α и ρ – коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения пролетного строения и схемы его нагружения соответственно.

Для определения ρ от любой действующей нагрузки используем эквивалентную равномерно-распределенную нагрузку q , вычисляемую по формуле (14):

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i}{\omega}, \quad (14)$$

где P_i – усилия на i -тую ось от пропускаемой нагрузки; y_i – ордината линии влияния силового фактора под i -той осью нагрузки в критическом ее положении, когда вычисляемое усилие приобретает максимальные значения; ω – площадь линии влияния силового фактора; n – число осей пропускаемой нагрузки.

При этом коэффициент, зависящий от этой схемы нагружения пролетного строения, будет иметь следующий вид (15):

$$\rho = \left(\frac{48}{5} \right) = 9,6. \quad (15)$$

Коэффициент α , зависящий от типа поперечного сечения, вычисляется для каждой формы поперечного сечения по формуле (16):

$$\alpha = \frac{y_{\max}}{h}, \quad (16)$$

где y_{\max} – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной кромки поперечного сечения пролетного строения; h – высота поперечного сечения балочного пролетного строения.

Значения α для различных форм поперечных сечений пролетных строений из различных материалов могут быть получены из [14–21].

Приводим в этой статье их ориентировочные значения в таблице.

С учетом вышеизложенного получим из (13) зависимость максимальных напряжений от временной нагрузки в середине пролета разрезного балочного пролетного строения в следующем виде:

$$\sigma = \alpha \cdot \rho \cdot E \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{h}{l}. \quad (17)$$

Таблица

Значения коэффициентов α для поперечных сечений из различных конструкционных материалов
[Table. Coefficient values α for cross sections made of various structural materials]

№ п/п	Материал пролетного строения [The material of the superstructure]	Значение коэффициента α [Value of coefficient α]
1.	Сталь [Steel]	0,55
2.	Сталежелезобетонное сечение приведено к стали [The steel-reinforced concrete section is reduced to steel]	0,6
3.	Железобетонное сечение приведено к бетону [The reinforced concrete section is reduced to concrete]	0,55
4.	Клееная древесина [Glued wood]	0,5
5.	Деревометалложелезобетонное сечение приведено к дереву [Wood metal reinforced concrete section is brought to the tree]	0,7

Формула (24), полученная при использовании фундаментальной безразмерной связи (23) между максимальными относительными деформациями материала в поясах разрезных балочных пролетных строений, относительными их прогибами и относительными высотами, может быть использована для вычисления напряжений в разрезных балочных пролетных строениях из любых конструкционных материалов от прогиба в середине пролета.

В неразрезных на обеих опорах балочных пролетных строениях из любых конструкционных материалов при прочих равных условиях изгибающий момент и напряжения в середине пролета обычно в два раза меньше, чем в разрезных [22]. Это будем учитывать введением в формулу (17) множителя 0,5, получим при этом формулу (17а):

$$\sigma = 0,5 \cdot \alpha \cdot \rho \cdot E \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{h}{l}. \quad (17a)$$

В неразрезных на одной из опор балочных пролетных строениях из любых конструкционных материалов при прочих равных условиях изгибающий момент и напряжения в середине пролета обычно на 30 % меньше, чем в разрезных [22]. Это будем учитывать введением в формулу (17) множителя 0,7, получим при этом формулу (17б):

$$\sigma = 0,7 \cdot \alpha \cdot \rho \cdot E \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{h}{l}. \quad (17b)$$

Для решения вопроса о возможности пропуска тяжеловесного средства по пролетному строению по формуле (6) вычисляется максимальное значение прогиба f_{\max} и по формулам (17), (17а) или (17б) соответственно максимальные значения напряжений $\sigma_{\max\text{вр}}$ от временной нагрузки в кромках поперечных сечений пролетных строений из соответствующих конструкционных материалов: стальных, сталежелезобетонных, клеендеревянных, деревометалложелезобетонных и железобетонных.

Для определения напряжений в кромках поперечных сечений пролетных строений необходимо вычислить напряжение от собственного веса пролетного строения. С этой целью в методику проведения испытаний моста нужно внести дополнения.

До начала экспериментальной части исследования мостового сооружения:

– по специальной программе определяется максимальное значение изгибающего момента $M_{\max\text{макс}}$ в кНм в середине пролета от макета тяжеловесного средства, что дает в последующем возможность вычисления жесткости пролетного строения и его момента инерции по значению максимального прогиба пролетного строения в середине пролета, вычисляемого по значению максимального угла поворота его опорного сечения;

– для обеспечения возможности вычисления прогибов в середине пролета и напряжений в кромках поперечных сечений пролетных строений из любых материалов от собственного веса необходимо определить величину пролета и размеры элементов поперечного сечения пролетного строения по данным измерения или данным типовых проектов, а далее вычислить его погонный вес q по формуле (18):

$$q = \sum F_i \cdot y_i, \quad (18)$$

где F_i – площадь i -того элемента поперечного сечения пролетного строения в м^2 ; y_i – объемный вес материала i -того элемента поперечного сечения пролетного строения в $\text{кН}/\text{м}^3$.

Одновременно с этим следует вычислить максимальный изгибающий момент в середине пролета от его собственного веса по формуле (19):

$$M_{\max\text{св}} = \frac{q l^2}{8}. \quad (19)$$

– определить модуль упругости материала пролетного строения;

– определить места установки приборов для измерения угла поворота исходного опорного сечения пролетного строения.

Имея значения прогиба из формулы (20)

$$f = \frac{5}{48} \cdot \frac{M_{\max} \cdot l^4}{E \cdot J}, \quad (20)$$

получаем возможность вычисления реальных значений жесткости EJ_p (21) и момента инерции J_p (22) пролетного строения:

$$EJ_p = \frac{5}{48} \cdot \frac{M_{\max} \cdot l^2}{f}, \quad (21)$$

$$J_p = \frac{5}{48} \cdot \frac{M_{\max} \cdot l^2}{E \cdot f}. \quad (22)$$

Имея реальные жесткости и моменты инерции балочного разрезного пролетного строения, зная изгибающий момент от собственного веса, вычисляются напряжения в кромках его поперечного сечения и прогиб в середине его пролета по формулам

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{M_{\max \text{ св}} \cdot \alpha \cdot h}{J_p}, \quad (23)$$

$$f_{\text{св}} = \frac{5}{48} \cdot \frac{M_{\max \text{ св}} \cdot l^2}{E \cdot J_p}, \quad (24)$$

где α – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения пролетного строения.

В неразрезных на обеих опорах балочных пролетных строениях определяем напряжение от собственного веса по формуле (24а):

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{0,5 \cdot M_{\max \text{ св}} \cdot \alpha \cdot h}{J_p}. \quad (24а)$$

В неразрезных на одной из опор балочных пролетных строениях определяем напряжение от собственного веса по формуле (24б):

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{0,7 \cdot M_{\max \text{ св}} \cdot \alpha \cdot h}{J_p}. \quad (24б)$$

Кроме того, для сокращения времени на определение геометрических характеристик балок, имея реальные жесткости и моменты инерции балочного пролетного строения, погонный вес балки можно вычислить по формуле, приведенной в [14], после экспериментального определения частоты собственных колебаний пролетного строения:

$$\lambda_i = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\alpha_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (25)$$

Откуда получаем

$$m = \frac{\alpha_i^4 \cdot E \cdot J}{4 \cdot \lambda_i^2 \cdot \pi^2 \cdot l^4}, \quad (26)$$

$$q = m \cdot g, \quad (27)$$

где λ_i – частота, соответствующая i -той форме колебаний в Гц; m – погонная масса, кг/м; q – погонный вес, Н/м; g – ускорение свободного падения; α_i – корни характеристического уравнения.

Если для стальных, сталежелезобетонных, деревометалложелезобетонных и клеедеревянных пролетных строений

$$f_{\max} < \frac{l}{400} \quad \text{и} \quad \sigma_{\max \text{ вр}} + \sigma_{\max \text{ св}} < R_s, \quad (28)$$

(где R_s – расчетное сопротивление растяжению соответствующего материала), то пропуск транспортного средства по обеим группам предельных состояний пролетных строений возможен.

При невыполнении одного из этих условий пропуск тяжеловесного транспортного средства невозможно.

Для железобетонных пролетных строений с напрягаемой арматурой пропуск возможен при выполнении условий

$$f_{\max} < \frac{l}{400} \quad \text{и} \quad \sigma_{\max \text{ вр}} - \sigma_{\text{пр.напр.бет}} + \sigma_{\max \text{ св}} < R_s, \quad (29)$$

где R_s – расчетное сопротивление растяжению бетона; $\sigma_{\text{пр.напр.бет}}$ – предварительное напряжение бетона, принимаемое равным $0,8 R_s$.

При решении этой задачи применительно к железобетонным пролетным строениям с ненапрягаемой арматурой в процессе вычисления максимального напряжения в кромке поперечного сечения по формуле (24) может случиться, что напряжение в бетоне в нижней кромке балок будет значительно больше расчетного сопротивления бетона на растяжение. Это будет означать, что в бетоне в средней части балки появятся трещины с различным их раскрытием. Однако это не будет означать, что пролетное строение полностью потеряло несущую способность. Минимальную несущую способность пролетного строения в этом случае можно получить на основе следующих соображений. Допустим, что в середине пролета в балках этих пролетных строений трещины появились даже до нижней кромки плиты проезжей части, которая продолжает работать на сжатие равномерно по всей ее толщине $h_{\text{пл}}$. Несущая способность пролетного

строения в этом случае обеспечивается парой сил, состоящих из растягивающего усилия в нижней арматуре и сжимающего усилия в плите проезжей части, связанных между собой уцелевшими хомутами арматуры в стенках балок.

Минимальную (остаточную) несущую способность пролетного строения определим далее в следующей последовательности.

Используя вычисленный прогиб f в середине пролета по первым при движении макета транспортного средства измерениям, зная значение эквивалентной нагрузки q от него, величину пролета l

и значение модуля упругости E бетона из известной для этого случая формулы для прогиба

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot J}, \quad (30)$$

получим реальное значение момента инерции J испытываемого пролетного строения по формуле (31):

$$J_p = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot f}. \quad (31)$$

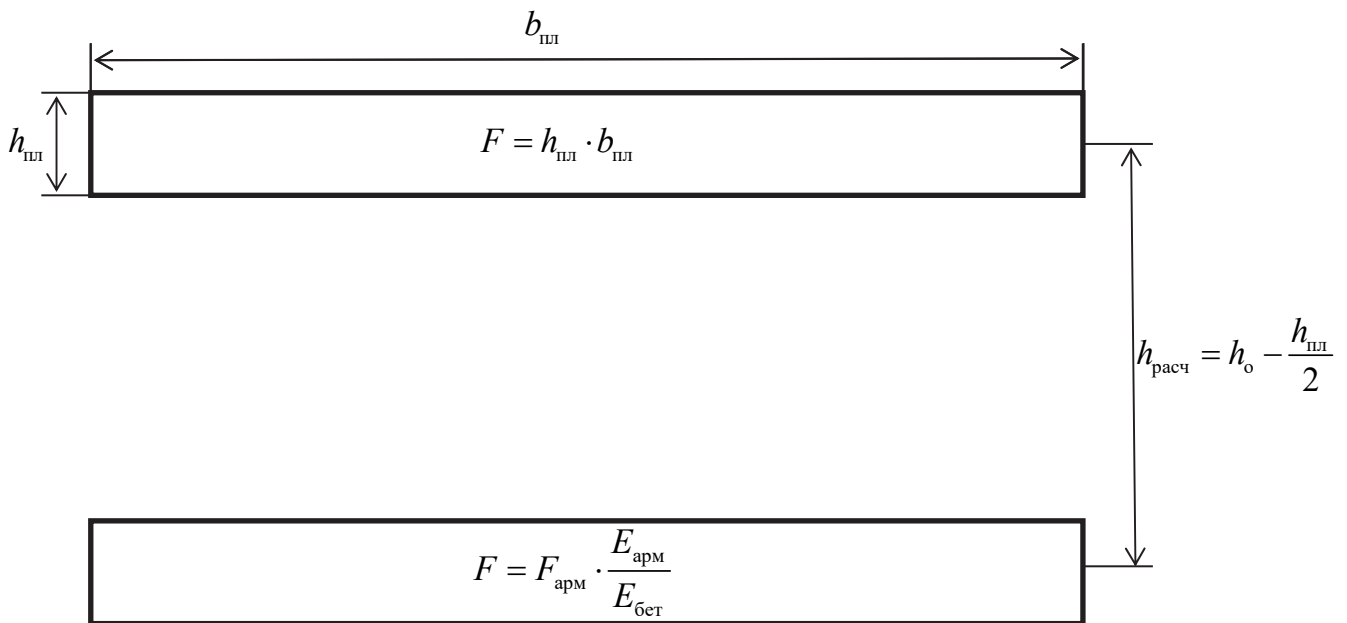


Рисунок. Расчетная схема поперечного сечения пролетного строения с минимальной несущей способностью
 [Figure. Design diagram of the cross section of the span structure with a minimum load capacity]

При принятой расчетной схеме поперечного сечения пролетного строения на рисунке его момент инерции будет равен

$$J = 2 \cdot F_{бет} \cdot \left(\frac{h_{расч}}{2} \right)^2. \quad (32)$$

Из условия равенства выражений (31) и (32) определяем площадь бетона плиты проезжей части, активно вовлекавшейся в работу в рассматриваемом случае, по формуле (33)

$$F_{бет} = \frac{J_p}{2 \cdot \left(\frac{h_{расч}}{2} \right)^2}. \quad (33)$$

Далее по активной площади бетона находим реальную площадь рабочей арматуры в нижнем поясе балки из условия (34):

$$F_{бет} = h_{пл} \cdot b_{пл} = \frac{F_{арм} \cdot E_{арм}}{E_{бет}} \quad (34)$$

по формуле (35)

$$F_{арм} = \frac{F_{бет} \cdot E_{бет}}{E_{арм}}. \quad (35)$$

Зная расчетное сопротивление ненапрягаемой арматуры $R_{арм}$, получаем возможность определить минимальное значение изгибающего момента в середине пролета балочного пролетного строения с ненапрягаемой арматурой по формуле (36):

$$M_{мин} = F_{арм} \cdot R_{арм} \cdot h_{расч}. \quad (36)$$

Исходя из условия $F_{арм} \cdot R_{арм} = F_{бет} \cdot \sigma_{бет}$, определяем для этого случая напряжение в бетоне сжатой зоны по формуле (37):

$$\sigma_{\text{бет}} = \frac{F_{\text{арм}} \cdot R_{\text{арм}}}{F_{\text{бет}}}. \quad (37)$$

Проверка возможности безопасного пропуска транспортного средства по железобетонному пролетному строению с ненапрягаемой арматурой по условиям первого и второго предельных состояний пролетного строения выполняются по условиям (38):

$$f_{\text{max}} < \frac{l}{400} \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{бет}} = \frac{F_{\text{арм}} \cdot R_{\text{арм}}}{F_{\text{бет}}} + \sigma_{\text{maxсв}} < R_b. \quad (38)$$

Способ определения возможностей опор балочных мостов

Оценку способности любых опор пролетных строений мостовых сооружений обеспечить безопасный пропуск по ним тяжеловесных средств с использованием модернизированного измерительного комплекса представляется возможным выполнить с учетом следующих соображений:

1) если при движении макета тяжеловесного средства в пределах первой половины пролетного строения угол наклона опорного сечения непрерывно плавно увеличивается, а при движении в пределах второй половины пролетного строения плавно уменьшается, то это свидетельствует о непросадочности опор под воздействием пропускаемого тяжеловесного средства и является признаком возможности обеспечения его безопасного пропуска по мосту;

2) если при движении макета тяжеловесного средства в пределах первой половины пролетного строения угол наклона опорного сечения вначале увеличивается, а затем начинает уменьшаться, то это свидетельствует о просадочности исходной опоры под воздействием пропускаемого тяжеловесного средства и является признаком невозможности обеспечения его безопасного пропуска по мосту;

3) если при движении макета тяжеловесного средства в пределах первой половины пролетного строения угол наклона опорного сечения непрерывно плавно увеличивается, а при движении в пределах второй половины пролетного строения продолжает увеличиваться, то это свидетельствует о просадочности противоположной опоры под воздействием пропускаемого тяжеловесного средства и является признаком невозможности обеспечения его безопасного пропуска по мосту.

Заключение

Решение вопроса о возможности безопасного пропуска тяжеловесного средства по любым балочным пролетным строениям, принимая во внима-

ние две группы их предельных состояний и поведение опор мостов, возможно после модификации программного обеспечения расчетного комплекса с учетом полученных формул для прогиба f (6) в середине пролетов разрезных и неразрезных пролетных строений из любых конструктивных материалов, напряжений σ в наиболее нагруженных кромках поперечных сечений по формулам (17), (17а) или (17б) соответственно и напряжений $\sigma_{\text{бет}}$ по формуле (37) в сжатой зоне бетона железобетонных пролетных строений с ненапрягаемой арматурой. При этом для любого пролетного строения вычисляются относительный прогиб f/l по значению вычисленного прогиба и величине пролета, максимальные значения в кромках металлических, сталежелезобетонных, железобетонных с напрягаемой арматурой, клееных деревянных пролетных строениях, а также максимальные напряжения $\sigma_{\text{бет}}$ в бетоне сжатой зоны железобетонных пролетных строений с ненапрягаемой арматурой.

Для обеспечения полной автоматизации решения задачи о возможности безопасного пропуска тяжеловесного средства по любым балочным автодорожным мостовым сооружениям вычислительный комплекс необходимо оснастить электронным прибором для измерения расстояния, пройденного по мосту макетом тяжеловесного средства, в метрах, способным непрерывно передавать значение пройденного расстояния компьютеру в ходе пропуска этого средства по мосту.

Список литературы

1. Военные мосты на жестких опорах: руководство. М.: Воениздат, 1982. 430 с.
2. ОДМ 218.4.025-2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Общая часть. М.: РОСАВТОДОР, 2016. 102 с.
3. ОДМ 218.4.026-2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Бетонные и железобетонные конструкции. М.: РОСАВТОДОР, 2016. 355 с.
4. ОДМ 218.4.027-2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Металлические и сталежелезобетонные конструкции. М.: РОСАВТОДОР, 2016. 121 с.
5. ОДМ 218.4.028-2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Опорные части, опоры и фундаменты. М.: РОСАВТОДОР, 2016. 137 с.

6. ОДМ 218.4.029-2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Определение грузоподъемности конструкций деревянных мостов. М.: РОСАВТОДОР, 2016. 26 с.

7. ОДМ 218.2.062-2015. Рекомендации по определению параметров расчетных нагрузок для современных транспортных средств. М.: РОСАВТОДОР, 2015. 48 с.

8. ОДН 218.0.032-2003. Временное руководство по определению грузоподъемности мостовых сооружений на автомобильных дорогах. М.: РОСДОРНИИ; НИЦ «Мосты» ЦНИИС; ЗАО «ЦНИИПСК имени Мельникова», 2003. 42 с.

9. Свод правил СП35.13330.2011. Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84. М.: Министерство регионального развития Российской Федерации, 2011. 341 с.

10. Свод правил СП 79.13330.2012. Мосты и трубы. Правила обследований и испытаний. Актуализированная редакция СНиП 3.06.07-86. М.: Министерство регионального развития Российской Федерации, 2012. 215 с.

11. ВСН 32-89. Инструкция по определению грузоподъемности железобетонных балочных пролетных строений автодорожных мостов. М.: Минавтодор РСФСР, 1990. 245 с.

12. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 379 с.

13. Саламахин П.М. Проектирование мостовых и строительных конструкций: учебное пособие для сту-

дентов высших учебных заведений. М.: КноРус, 2011. 402 с.

14. Нгуен Нам Ха. Автоматизация проектирования и оптимизация сталежелезобетонных пролетных строений автодорожных мостов: дис. ... к. т. н. 2006. 182 с.

15. Нгуен М.Т. Автоматизированное проектирование неразрезных металлических пролетных строений автодорожных мостов с ортотропной плитой проезжей части: дис. ... к. т. н. 2011. 155 с.

16. Зьонг Тхе Ань. Автоматизированное проектирование разрезных железобетонных пролетных строений с напрягаемой арматурой: дис. ... к. т. н. 2011. 150 с.

17. Ле Мань Хан. Автоматизированное проектирование разрезных железобетонных пролетных строений с ненапрягаемой арматурой: дис. ... к. т. н. 2011. 155 с.

18. Решетников И.В. Обоснование рациональных конструктивно-технологических решений деревометалло-железобетонных пролетных строений автодорожных мостов: дис. ... к. т. н. 2015. 139 с.

19. Нгуен М.Т. Оптимизация параметров неразрезных металлических пролетных строений автодорожных мостов с ортотропной плитой проезжей части // Вестник МАДИ. 2011. № 3(26). С. 87–90.

20. Нгуен М.Т. Оптимизация параметров коробчатых металлических пролетных строений // Наука и техника в дорожной отрасли. 2011. № 3(58). С. 29а–31.

21. Саламахин П.М. Инженерные сооружения в транспортном строительстве: учебник: в 2 кн. Кн. 1. М.: Академия, 2007. 345 с.

RESEARCH PAPER

Substantiation of the necessity and method of upgrading the software of the measuring complex for assessing the load capacity of girder spans of road bridges

Pavel M. Salamakhin^{1*}, Evgenii A. Lugovtsev²

¹Moscow Automobile and Road State Technical University, 64 Leningradsky Ave., Moscow, 125319, Russian Federation

²Military Training and Research Center of Land Forces "Combined Arms Academy of the Armed Forces of the Russian Federation",

⁴Devich'ego Polya Passage, Moscow, 119121, Russian Federation

*pavel-salamahin@mail.ru

Article history:

Received: October 11, 2019

Revised: December 22, 2019

Accepted: January 15, 2020

Abstract

The article notes that the software of the complex used in the Russian troops to solve in a short time the actual problem of determining the possibility of safe passage of super heavy loads on girder road bridges has the following disadvantages: 1) it can only be used for split concrete bridges; 2) the decision to pass a large load through the bridge is made only by the value of the deflection in the center of the span, without taking into account the resulting stresses in the bridge span structure structures, and without taking into account the bearing capacity of the supports. In the article, in order to eliminate these shortcomings: 1) a strict formula is obtained for calculating the deflection in the middle of beam spans made of any structural materials from the angle of rotation of their support sections; 2) based on the use of the fundamental relationship between the relative heights of girder spans, the relative deformations of the edges of their cross sections and their relative deflections, it is proved that the maximum stresses in the edges of the cross sections of girder spans from any structural materials can be calculated by the maximum deflection value in the middle of their spans; 3) a method is established for determining the ability of beam bridge supports to ensure safe passage of

For citation

Salamakhin P.M., Lugovtsev E.A. Substantiation of the necessity and method of upgrading the software and method of upgrading the software of the measuring complex for assessing the load capacity of girder spans of road bridges. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):5–13. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-5-13>. (In Russ.)

a heavy vehicle by the nature of changing the rotation angles of the supporting cross sections of the span structures under the influence of the movement of the heavy vehicle layout. Taking these three results into account, when upgrading the software of the measurement system, ensures that the goal of the work is achieved.

Keywords: bridge; span structure; deflection in the middle of the span; the angle of inclination of the reference section; the layout of a heavy vehicle; methodology; calculation; stress in the edge of the cross section

References

1. *Voennye mosty na zhyostkih oporah: rukovodstvo* [Military bridges on rigid supports: handbook]. Moscow: Voenizdat Publ.; 1982. (In Russ.)

2. ODM 218.4.025-2016. *Recommendations for the determination of the carrying capacity of the exploited bridge structures on motor roads of general use. Common part*. Moscow: ROSAVTODOR Publ.; 2016. (In Russ.)

3. ODM 218.4.026-2016. *Recommendations for the determination of the carrying capacity of the exploited bridge structures on motor roads of general use. Concrete and reinforced concrete structures*. Moscow: ROSAVTODOR Publ.; 2016. (In Russ.)

4. ODM 218.4.027-2016. *Recommendations for the determination of the carrying capacity of the exploited bridge structures on motor roads of general use. Metal and steel-reinforced concrete structures*. Moscow: ROSAVTODOR Publ.; 2016. (In Russ.)

5. ODM 218.4.028-2016. *Recommendations for the determination of the carrying capacity of the exploited bridge structures on motor roads of general use. Support parts, supports and foundations*. Moscow: ROSAVTODOR Publ.; 2016. (In Russ.)

6. ODM 218.4.029-2016. *Recommendations for the determination of the carrying capacity of the exploited bridge structures on motor roads of general use. Determination of the load capacity of wooden bridge structures*. Moscow: ROSAVTODOR Publ.; 2016. (In Russ.)

7. ODM 218.2.062-2015. *Recommendations for the determination of the parameters design loads for modern vehicles*. Moscow: ROSAVTODOR Publ.; 2015. (In Russ.)

8. ODN 218.0.032-2003. *Temporary guide to determining the load capacity of bridge structures on highways*. Moscow: ROSDORNII Publ., SIC “Mosty” TsNIIS Publ., JSC “TsNIIPSK imeni Melnikova” Publ.; 2003. (In Russ.)

9. Set of rules SP35.13330.2011. *Bridges and pipes*. Updated version of SNiP 2.05.03-84. Moscow: Ministry of Regional Development of the Russian Federation; 2011. (In Russ.)

10. Code of rules SP 79.13330.2012. *Bridges and pipes. Rules of surveys and tests*. Updated version of SNiP 3.06.07-86.

Pavel M. Salamakhin, leading researcher, Doctor of Technical Sciences, Professor, member of the Russian Academy of Transport; eLIBRARY SPIN-code: 2596-3649, Scopus ID: 6504210104.

Evgenii A. Lugovtsev, Candidate of Technical Sciences, doctoral student of the Department of Roads, Bridges and Crossings; eLIBRARY SPIN-code: 7389-8508.

Moscow: Ministry of Regional Development of the Russian Federation; 2012. (In Russ.)

11. VSN 32-89. *Instructions for determining the load capacity of reinforced concrete girder spans of road bridges*. Moscow: Minavtodor RSFSR Publ.; 1990. (In Russ.)

12. Timoshenko S.P. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Part 1. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1960. (In Russ.)

13. Salamakhin P.M. *Proektirovanie mostovykh i stroitel'nykh konstrukcij* [Design of bridges and building structures]: textbook for students of higher education institutions Moscow: KnoRus Publ.; 2011. (In Russ.)

14. Nguyen N.H. *Avtomatizatsiya proektirovaniya i optimizatsiya stalezhelezobetonnnykh proletnykh stroenij avtodorozhnykh mostov* [Automation of design and optimization of steel-reinforced concrete spans of road bridges] (Thesis of Candidate of Technical Sciences). 2006. (In Russ.)

15. Nguyen M.T. *Avtomatizirovannoe proektirovanie nerazreznnykh metallicheskih proletnykh stroenij avtodorozhnykh mostov s ortotropnoj plitoy proezzhej chasti* [Computer-aided design of continuous metal spans of road bridges with orthotropic roadway plate] (Thesis of Candidate of Technical Sciences). 2011. (In Russ.)

16. Zant Tze An. *Avtomatizirovannoe proektirovanie razreznnykh zhelezobetonnnykh proletnykh stroenij s napryagaemoj armaturoj* [Computer-aided design of split reinforced concrete superstructures with stressed reinforcement] (Thesis of Candidate of Technical Sciences). 2011. (In Russ.)

17. Le Man' Han. *Avtomatizirovannoe proektirovanie razreznnykh zhelezobetonnnykh proletnykh stroenij s nenapryagaemoj armaturoj* [Computer-aided design of split reinforced concrete superstructures with non-stressed reinforcement] (Thesis of Candidate of Technical Sciences). 2011. (In Russ.)

18. Reshetnikov I.V. *Obosnovanie racional'nykh konstruktivno-tehnologicheskikh reshenij derevometallozhelezobetonnnykh proletnykh stroenij avtodorozhnykh mostov* [Substantiation of rational structural and technological solutions of wood-metal-concrete spans of road bridges] (Thesis of Candidate of Technical Sciences). 2015. (In Russ.)

19. Nguyen M.T. Optimization parameter metal spans bridge with ortotropnoy plate drove Chats. *Vestnik MADI* [Bulletin of MADI]. 2011;3(26):87–90. (In Russ.)

20. Nguyen M.T. Optimization of box-shaped metal span parameters. *Science and Engineering for Highways*. 2011;(3):32–33. (In Russ.)

21. Salamakhin P.M. *Inzhenernye sooruzheniya v transportnom stroitel'stve* [Engineering structures in transport construction]: textbook: in 2 books. Book 1. Moscow: Academy Publ.; 2007. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-14-21
УДК 624.154.1

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Эффективность реализации свайных фундаментов на примере сооружения реакторного отделения атомной станции с ВВЭР-1000

А.Е. Саргсян, Е.Г. Гукова*

АО «Атомэнергопроект», Российская Федерация, 105005, Москва, ул. Бакунинская, д. 7, стр. 1
*gukova_eg@aep.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 02 октября 2019 г.
Доработана: 18 декабря 2019 г.
Принята к публикации: 18 января 2020 г.

Аннотация

Цель. В статье представлена разработанная модель свайного фундамента, демонстрируется целесообразность применения свайных фундаментов для повышения устойчивости и несущей способности оснований сооружений АС, на примере сооружения реакторного отделения (РО) обосновывается достоверность результатов натурных наблюдений, приводятся данные натурных наблюдений за осадкой РО. **Методы.** Даны выражения для определения расчетных параметров интегральных статических жесткостей грунтовой среды на контактной поверхности подошвы для естественного основания сооружения, а также для свайного основания с учетом эффектов взаимодействия ростверка и свайного куста с грунтовой средой при общем характере перемещения сваи с круглым поперечным сечением. Разработана пространственная трехмерная конечно-элементная статическая модель РО совместно с основанием. Показаны изополя вертикальных перемещений фундаментной плиты РО для естественного основания, а также для свайного основания при нормальной эксплуатации. Сопоставительный анализ данных натурных наблюдений с результатами расчета позволяет обосновать достоверность разработанной модели свайного фундамента. **Выводы.** Имеющееся расхождение между результатами натурных наблюдений и расчетов обусловлено тем обстоятельством, что по расчету вычисленная осадка основания сооружения соответствует всему периоду эксплуатации, включая период возведения сооружения, а результаты наблюдения относятся только к периоду эксплуатации. Сопоставительный анализ данных натурных наблюдений, а также результатов расчета наглядно подтверждает высокую эффективность реализации свайных фундаментов для возведения массивных сооружений на слабых грунтах.

Ключевые слова: пространственная расчетная модель; свайный фундамент; ростверк; сваи; осадка; сопоставительный анализ; результаты расчетов; натурные наблюдения; естественное основание; сооружение; взаимодействие с грунтовой средой

Для цитирования

Саргсян А.Е., Гукова Е.Г. Эффективность реализации свайных фундаментов на примере сооружения реакторного отделения атомной станции с ВВЭР-1000 // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 14–21. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-14-21>

Введение

Возведение реакторного отделения (РО) АЭС-1 было начато в 1972 году. Наблюдения за осадка-

ми начаты в марте 1981 года по 15 стенным осадочным маркам. В процессе эксплуатации марки уничтожались и восстанавливались. На начало 2009 года существовали все осадочные марки. Средняя осадка сооружения носит стабильный во времени характер. Все данные натурных наблюдений и их анализ подробно приведены в [5; 6]. Данные натурных наблюдений наглядно показывают, что средняя осадка сооружения РО превышает допустимое значение в соответствии с требованиями [4]. С ноября 1987 года на площадке размещения РО АЭС-1 ведутся регулярные наблю-

Саргсян Апол Егисевич, д. т. н., профессор, академик МАИ при ООИ, начальник научно-исследовательского отдела динамики и сейсмостойкости; eLIBRARY AuthorID: 731808.

Гукова Елена Геннадьевна, главный специалист научно-исследовательского отдела динамики и сейсмостойкости; eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484, Scopus ID: 7202396806.

© Саргсян А.Е., Гукова Е.Г., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

дения за кренами и осадками основных зданий и сооружений.

Для сооружения РО блоков 1 и 2 АЭС-2 был реализован свайный фундамент. В [7] выполнены и представлены результаты геодезических натурных наблюдений за осадками зданий и сооружений блоков 1 и 2. Начиная с 1984 года и по настоящее время ведутся натурные наблюдения за осадками и кренами сооружений РО.

Цель настоящей работы – на примере сооружения реакторного отделения на двух площадках (АЭС-1 и АЭС-2) обосновать достоверность разработанной модели свайного фундамента [1–4] по результатам натурных наблюдений, а также продемонстрировать целесообразность применения свайных фундаментов для повышения устойчивости и несущей способности оснований сооружений АС.

Материалы и методы

Схема расположения сооружения РО АЭС-1 в геологической структуре естественного основания представлена на рис. 1.

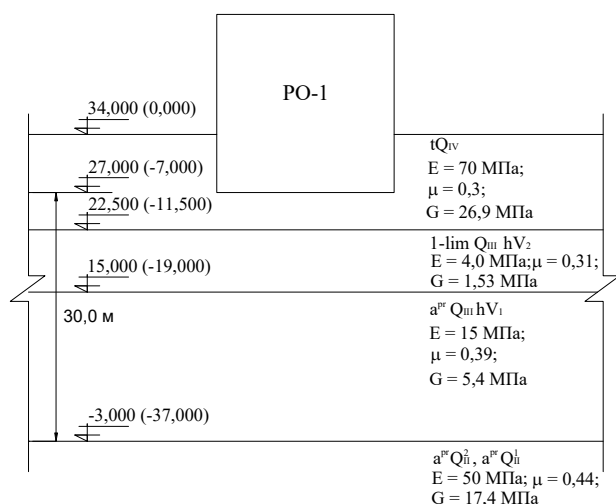


Рис. 1. Схема заглубления сооружения РО АЭС-1 в геологической структуре естественного основания
[Figure 1. The embedding of the reactor building NPP-1 structure of the geological environment of the natural foundation]

На рис. 2 представлено сопоставление результатов натурных наблюдений [7] за осадками сооружений РО блоков 1 и 2 с результатами расчетов, полученных в настоящей работе.

График средних суммарных вертикальных смещений реакторного отделения представлен на рис. 2 [7]. Данные натурных наблюдений наглядно показывают, что средняя осадка сооружения РО АЭС-2 не превышает допустимого значения в соответствии с требованиями [4].

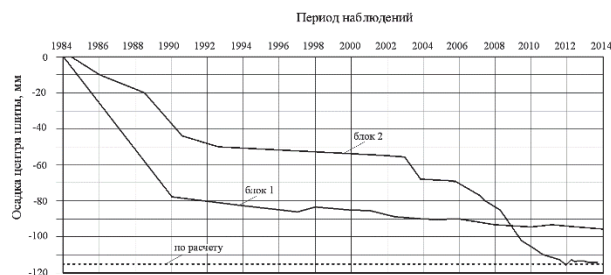


Рис. 2. График средних суммарных вертикальных смещений РО АЭС-2
[Figure 2. Graph of the average total vertical displacements of reactor building NPP-2]

Оценим эффективность применения свайного фундамента для условий площадки размещения АЭС-1 в целях повышения устойчивости и несущей способности оснований сооружений АС.

Расчетные параметры интегральных статических жесткостей грунтовой среды на контактной поверхности подошвы ростверка определяются по выражениям, представленным в табл. 1 [1–4].

Таблица 1

Выражения для определения эквивалентных интегральных статических жесткостей основания для ростверка прямоугольной формы в плане
[Table 1. Equivalent integral static stiffness of a grillage of a rectangular shape in plan]

Вид перемещения [Displacement]	Интегральная жесткость [Integral stiffness]
Горизонтальное, по оси x [Horizontal, along x]	$k_x = \frac{31,1(1-\mu)G\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu)}$
Горизонтальное, по оси y [Horizontal, along y]	$k_y = \frac{31,1(1-\mu)G\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu)}$
Вертикальное, по оси z [Vertical, along z]	$k_z = \frac{4G\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}(1-\mu)}$

В табл. 1 введены следующие обозначения: μ – осредненное значение коэффициента Пуассона грунтов в активной зоне основания ростверка;

$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – осредненное значение модуля сдвига

грунтов в активной зоне основания ростверка; $A = L_x L_y$ – площадь подошвы ростверка прямоугольной формы в плане; $L_x, L_y (L_x \geq L_y)$ – длина и ширина ростверка (фундаментной плиты) в плане по координатным осям x и y соответственно.

Расчетные приведенные статические характеристики грунтов в активной зоне естественного основания:

– модуль деформации $E = \frac{\sum E_i h_i}{H_a} = 38$ МПа;

– коэффициент Пуассона $\mu = \frac{\sum \mu_i h_i}{H_a} = 0,4$;

– модуль сдвига $G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 13,57$ МПа.

Интегральные статические жесткости естественного основания на подошве фундаментной конструкции [1; 2]:

$$k_x = k_y = \frac{31,1 \cdot (1-\mu) G \sqrt{L_x L_y}}{\sqrt{\pi} (7-8\mu)} = 2,58 \cdot 10^6 \text{ кН/м};$$

$$k_z = \frac{4G \sqrt{L_x L_y}}{\sqrt{\pi} (1-\mu)} = 3,64 \cdot 10^6 \text{ кН/м}.$$

Общий вид конечно-элементной модели сооружения РО АЭС-1, АЭС-2 (а), венттруба условно не показана, и фрагмент геометрической модели с вырезом четверти (б) представлены на рис. 3.

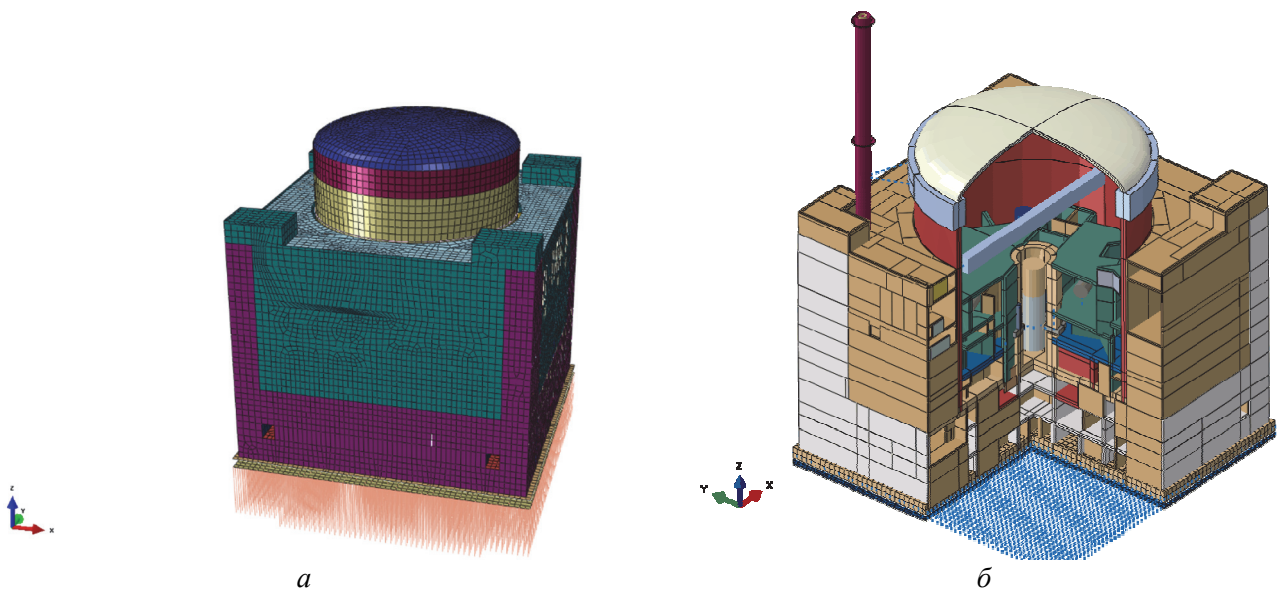


Рис. 3. Конечно-элементная модель сооружения РО АЭС-1 и АЭС-2:
а – общий вид; б – фрагмент геометрической модели с вырезом четверти
[Figure 3. 3D finite element and geometrical models of the reactor building:
а – general view; б – a fragment of geometrical model with a quarter cut]

В пространственной конечно-элементной модели системы сооружения РО с основанием использовались следующие типы конечных элементов:

- четырехузловые оболочечные элементы для моделирования плоских элементов (стен, перекрытий и диафрагм);
- пространственные стержни (стойки и ригели);
- жесткие балки (для обеспечения передачи нагрузки с эксцентриситетом);
- массовые элементы для моделирования нагрузок от оборудования, которые могут быть рассмотрены как сосредоточенные.

Разработка модели системы «сооружение – основание» РО АЭС-1 была выполнена с применением вычислительного комплекса ANSYS, РО АЭС-2 – с применением вычислительного комплекса ABAQUS.

Общий вес сооружения РО с учетом веса технологического оборудования составляет $Q = 26,8 \cdot 10^5$ кН. Масса сооружения РО составляет $M = 2,74 \cdot 10^5$ кН·с²/м.

Размеры фундаментной плиты сооружения в плане $L_x = L_y = 67$ м.

Все соединения между элементами, моделирующими конструкции из монолитного железобетона, приняты жесткими.

Расчетные параметры интегральных статических жесткостей грунтовой среды на контактной боковой поверхности и на подошве свай определяются по выражениям, представленным в табл. 2.

При формировании результирующей реакции грунтовой среды на контактной поверхности свай исходили из следующих предположений:

- на стенках боковой поверхности сваи при формировании растягивающих напряжений на контактной поверхности нарушается условие полного прилипания, основываясь на предположении, что грунт на растяжение не работает;
- при вертикальном перемещении вдоль продольной оси сваи по контуру всей боковой поверхности сваи грунты испытывают чистый сдвиг, а на подошве сваи сжатие;
- при перемещении свай с прямоугольным поперечным сечением в горизонтальном направлении в грунтовой среде в двух противоположных

- боковых поверхностях происходит сдвиг грунтов. В передней стенке боковой поверхности по направлению перемещения свай происходит сжатие, а на противоположной стенке – отрыв грунта от поверхности стенки сваи;
- при перемещении сваи в горизонтальном направлении на подошве сваи грунты испытывают чистый сдвиг.

Эпюры контактных напряжений на боковой поверхности сваи с круглым поперечным сечением при перемещении по направлениям координатных осей x, y, z представлены на рис. 4 [1; 3].

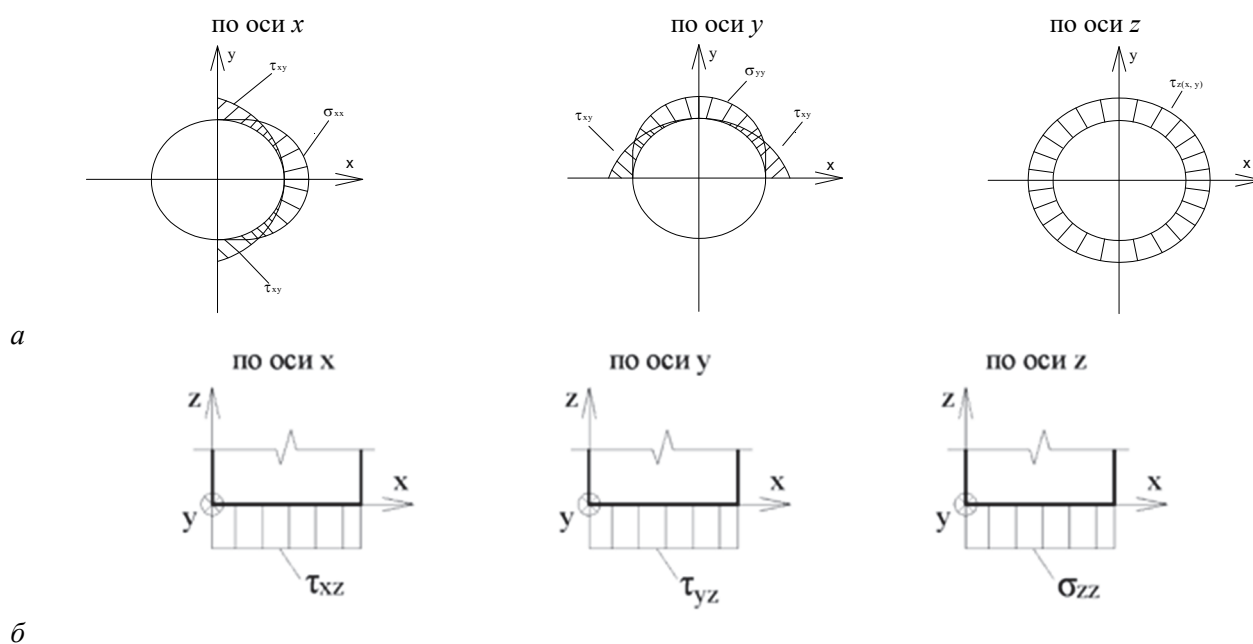


Рис. 4. Характер распределения контактных напряжений на боковой поверхности (а) и подошве (б) сваи с круглым поперечным сечением при перемещении в грунтовой среде по направлениям координатных осей x, y, z [Figure 4. The contact stresses distribution of side surface (a) and bottom (b) of pile with a circular cross-section when moving in a soil medium along the directions of the coordinate axes x, y, z]

Таблица 2

Выражения для определения интегральных статических жесткостей грунтовой среды на контактной поверхности при общем характере перемещения сваи

[Table 2. Integral static stiffness of the soil medium on the contact surface with the general nature of the movement of piles]

Направление перемещения сваи [Displacement]	Интегральная жесткость грунтовой среды [Integral stiffness]	
	На боковой поверхности сваи [On the side surface of pile]	На подошве сваи [On the bottom of pile]
Горизонтальное, по оси x [Horizontal, along x]	$k_x = \frac{31,1(1-\mu)G_s\sqrt{A_{1x}}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu)R_s} + \frac{4G_s\sqrt{A_{2x}}}{\sqrt{\pi}(1-\mu)R_s}$	$k_x = \frac{31,1(1-\mu_{sL})G_{sL}\sqrt{A_L}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu_{sL})R_s}$
Горизонтальное, по оси y [Horizontal, along y]	$k_y = \frac{31,1(1-\mu)G_s\sqrt{A_{1y}}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu)R_s} + \frac{4G_s\sqrt{A_{2y}}}{\sqrt{\pi}(1-\mu)R_s}$	$k_y = \frac{31,1(1-\mu_{sL})G_{sL}\sqrt{A_L}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu_{sL})R_s}$
Вертикальное, по оси z [Vertical, along z]	$k_z = \frac{31,1(1-\mu)G_s\sqrt{A_z}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu)R_s}$	$k_z = \frac{4G_{sL}\sqrt{A_L}}{\sqrt{\pi}(1-\mu_{sL})R_s}$

Выражения для определения интегральных статических жесткостей грунтовой среды на контактной поверхности при общем характере перемещения сваи с круглым поперечным сечением
 [Table 3. Integral static stiffness of the soil medium on the contact surface with the general nature of the movement of pile with a circular cross section]

Направление перемещения сваи [Displacement]	Интегральная жесткость грунтовой среды [Integral stiffness]	
	На боковой поверхности сваи [On the side surface of pile]	На подошве сваи [On the bottom of pile]
Горизонтальное, по осям x, y [Horizontal, along x, y]	$k_x = k_y = \frac{31,1(1-\mu_s)G_s\sqrt{h_c d}}{\sqrt{\pi}(7-8\mu)R_s} + \frac{4G_s\sqrt{h_c d}}{\sqrt{\pi}(1-\mu_s)R_s}$	$k_x = k_y = \frac{15,55(1-\mu_{sL})G_{sL}d}{(7-8\mu_{sL})R_s}$
Вертикальное, по оси z [Vertical, along z]	$k_z = \frac{31,1(1-\mu_s)G_s\sqrt{h_c d}}{(7-8\mu)R_s}$	$k_z = \frac{2G_{sL}d}{(1-\mu_{sL})R_s}$

В табл. 2 введены следующие обозначения в зависимости от геометрической формы поперечных сечений сваи: A_{1x} – площадь контактной боковой поверхности сваи с грунтовой средой, испытывающей сдвиг при перемещении сваи по направлению оси x ; A_{2x} – площадь контактной боковой поверхности сваи с грунтовой средой, испытывающей сжатие при перемещении сваи по направлению оси x ; A_{1y} – площадь контактной боковой поверхности сваи с грунтовой средой, испытывающей сдвиг при перемещении сваи по направлению оси y ; A_{2y} – площадь контактной боковой поверхности сваи с грунтовой средой, испытывающей сжатие при перемещении сваи по направлению оси y ; A_z – площадь контактной боковой поверхности сваи с грунтовой средой или площадь боковой поверхности сваи, испытывающей сдвиг при перемещении сваи в вертикальном направлении; A_L – площадь подошвы сваи.

Выражения для определения интегральных статических жесткостей грунтовой среды на контактной поверхности сваи с круглым поперечным сечением обобщены в табл. 3.

Схема расположения сооружения со свайным фундаментом в геологической структуре основания сооружения РО АЭС-2 представлена на рис. 5.

Суммарные интегральные жесткости основания за счет эффектов взаимодействия свайного куста и ростверка с грунтовой средой принимают следующие значения:

$$k_x = k_y = 3,0794 \cdot 10^7 \text{ кН/м};$$

$$k_z = 2,3322 \cdot 10^7 \text{ кН/м}.$$

Определим характеристики грунтовой среды в случае реализации натурального и свайного основания для площадки размещения РО АЭС-1.

Схема расположения свайного поля РО АЭС-1 в плане представлена на рисунке 6.

Схема расположения сооружения со свайным фундаментом в геологической структуре основания сооружения РО АЭС-1 представлена в [6].

Диаметр свай с круглым поперечным сечением принят равным $d = 0,6$ м, длина свай $h_c = 18,0$ м.

С учетом требований СП 50-102-2003 [8] расстояние между осями забивных свай принято равным $\Delta_{x,y} = 2,0 \text{ м} \geq 3d = 1,8 \text{ м}$, расстояние от осей свай до края фундаментной плиты (ростверка) сооружения равно $\delta_{x,y} = 0,5 \text{ м}$.

При этом общее число свай в свайном кусте составляет 1089 штук.

В табл. 3 введены следующие дополни-

тельные обозначения: $G_s = \frac{\sum_{i=1}^n G_{s,i} h_i}{h_c} = 9,16 \text{ МПа}$,

$$\mu_s = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i h_i}{h_c} = 0,33 \text{ – приведенный статический модуль сдвига и коэффициент Пуассона грунтов основания по высоте зоны расположения свайного поля};$$

$G_{sL} = 5,4 \text{ МПа}$, $\mu_{sL} = 0,39$ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона грунтов на уровне подошвы свай; $R_s = 4,2$ – корректирующий коэффициент, учитывающий эффекты взаимодействия сваи в составе свайного куста [4; 8].

Суммарные интегральные статические жесткости основания РО АЭС-1 с учетом эффектов взаимодействия ростверка и свайного куста с грунтовой средой принимают следующие значения:

$$k_x = k_y = 5,358 \cdot 10^7 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$k_z = 3,764 \cdot 10^7 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

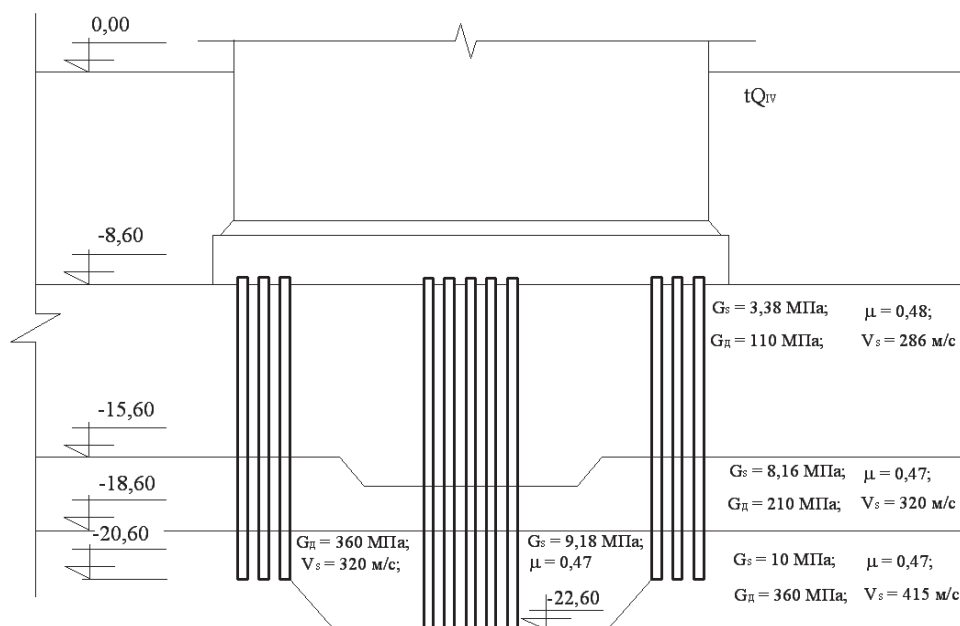


Рис. 5. Схема расположения РО АЭС-2 со свайным фундаментом в геологической структуре основания
[Figure 5. Layout of the reactor building NPP-2 with pile foundation in the geological structure of the base]

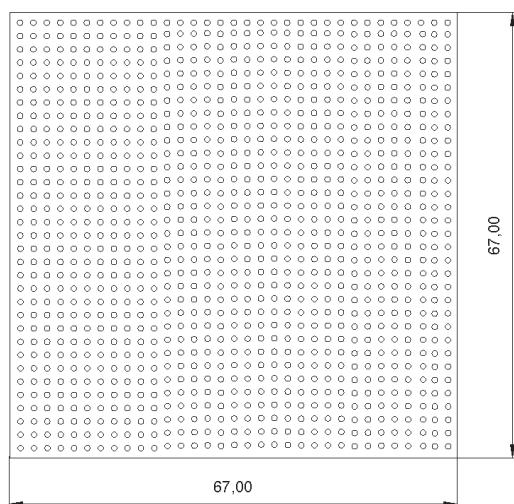


Рис. 6. Схема расположения свайного поля в плане для РО АЭС-1
[Figure 6. Layout of the pile field of reactor building NPP-1]

Интегральные жесткости основания сооружения РО на естественном основании и в случае применения свайного фундамента обобщены в табл. 4. Представленные в ней результаты наглядно демонстрируют, что жесткость основания сооружения при реализации рассматриваемого варианта свайного фундамента более чем на порядок превышает жесткость естественного основания сооружения.

Изополя вертикальных перемещений фундаментной плиты РО АЭС-1 для естественного и свайного основания при нормальной эксплуатации (НЭ) представлены на рис. 7 и 8.

Таблица 4

Численные значения интегральных жесткостей основания сооружения РО на естественном основании и в случае применения свайного фундамента
[Table 4. Numerical values of the integral stiffness of the reactor building structure on a natural foundation and in the case of pile foundation]

Интегральные жесткости основания [Integral stiffness], $10^7 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$			
Естественное основание [Natural foundation]		Свайное основание [Pile foundation]	
$k_x = k_y$	k_z	$k_x = k_y$	k_z
0,258	0,364	5,358	3,764

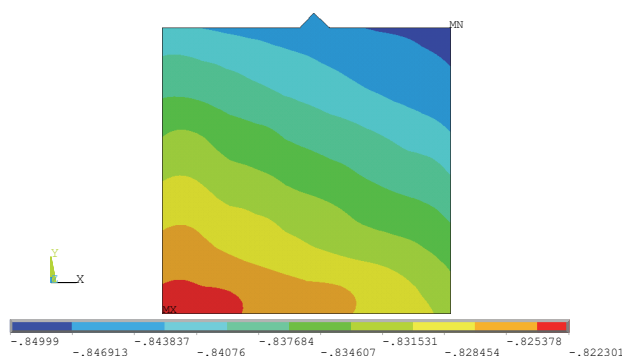


Рис. 7. Изополя вертикальных перемещений (м) фундаментной плиты РО АЭС-1 для естественного основания при НЭ
[Figure 7. Isolines of vertical displacements (m) of the base slab of the reactor building NPP-1 on the natural foundation on normal operation]

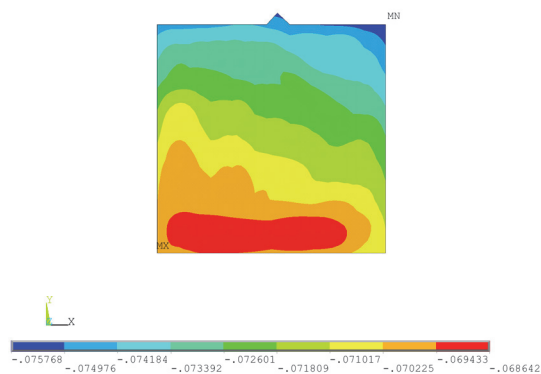


Рис. 8. Изополя вертикальных перемещений (м) фундаментной плиты РО АЭС-1 для свайного основания при НЭ
[Figure 8. Isolines of vertical displacements (m) of the base slab of the reactor building NPP-1 on the pile foundation on normal operation]

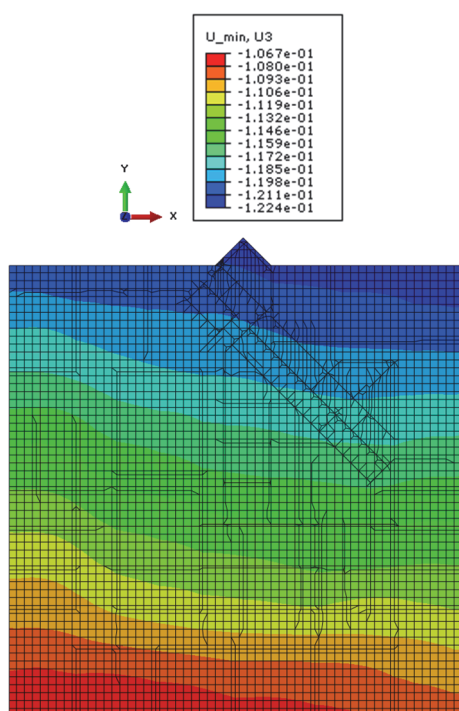


Рис. 9. Изополя расчетных максимальных вертикальных перемещений (м) фундаментной плиты при НЭ
[Figure 9. Isolines of vertical displacements (m) of the base slab of the reactor building NPP-2 on the pile foundation on normal operation]

Расчетные значения осадки (рис. 7) в среднем примерно в 1,9 раза превышают величину осадки, полученную по результатам наблюдений (рис. 2). Данное обстоятельство согласуется с аналогичными результатами, представленными в [5; 6]. Расхождение между результатами натурных наблюдений и расчетов обусловлено тем обстоятельством, что по расчету вычисленная осадка основания сооружения соответствует всему периоду эксплуатации, включая период возведения сооружения, а результаты наблюдения относятся только к периоду эксплуатации, то есть начиная с 1985 года.

Изополя вертикальных перемещений фундаментной плиты РО АЭС-2 для свайного основания при НЭ представлены на рис. 9.

Сопоставление результатов расчетов вертикальных перемещений фундаментной конструкции сооружения РО АЭС-1 на естественном основании (рис. 7) и на свайном основании (рис. 8) показывает, что при реализации рассматриваемой схемы свайного фундамента осадка сооружения уменьшается более чем на порядок. Результаты численного эксперимента по реализации свайного фундамента для АЭС-1 хорошо согласуются с результатами расчетов для существующей реализации свайного основания на примере РО АЭС-2.

Заключение

Полученные результаты свидетельствуют о том, что использование свайного фундамента позволяет существенно повысить устойчивость и несущую способность оснований сооружений АС. Данное обстоятельство подтверждает высокую эффективность реализации свайных фундаментов для возведения массивных сооружений на слабых грунтах.

Список литературы

1. Саргсян А.Е. Динамика и сейсмостойкость сооружений атомных станций. Саров: РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2013. 550 с.
2. Саргсян А.Е., Гукова Е.Г., Гришин А.С. Разработка и обоснование механической и математической модели основания сооружений атомных станций в виде однородного инерционного полупространства // Вестник ЦНИИСК имени В.А. Кучеренко «Исследования по теории сооружений». 2009. № 1. С. 81–95.
3. Саргсян А.Е., Геращенко В.С. Разработка статической и динамической модели свайных фундаментов с учетом эффекта их взаимодействия с грунтовой средой // Вестник НИЦ «Строительство». 2010. № 2. С. 159–166.
4. МР 1.5.2.05.999.0026-2011. Нормы проектирования оснований сооружений атомных станций. М., 2011.
5. Глаговский В.Б., Зализский А.Г., Каган А.А., Кривоногова Н.Ф., Финагенов О.М. Анализ осадок и кренов фундаментов реакторных отделений Балаковской АЭС // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2005. № 4. С. 17–22.
6. Саргсян А.Е., Гришин А.С. Оценка эффективности реализации свайных фундаментов на примере сооружения РО Балаковской АЭС // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2014. № 7 (667). С. 112–121.
7. Технический отчет о результатах геодезических наблюдений за осадками и кренами зданий и сооружений блоков № 1, 2 и общестационарных объектов Ростовской АЭС. ГТБ-2014-Б.06/13-1/14-651 / ООО НПО «Гидротехпроект». Валдай, 2014.
8. СП 50-102-2003. Проектирование и устройство свайных фундаментов. М., 2004.

The effectiveness of the implementation of pile foundations on the example of the reactor building of a nuclear power plant with VVER-1000

Akop E. Sargsyan, Elena G. Gukova*

JSC "Atomenergoproekt", 7 Bakuninskaya St., bldg. 1, Moscow, 105005, Russian Federation

*gukova_eg@aep.ru

Article history:

Received: October 02, 2019

Revised: December 18, 2019

Accepted: January 18, 2020

Abstract

Aims. The purpose of this work is to justify the reliability of the developed models of pile foundations on the data of field observers and to demonstrate the feasibility of using pile foundations to increase the stability and bearing capacity of the NPP structures foundation using the example of reactor building (RB). **Methods.** The data of field observers for the settlement of the RB are presented. The expressions for calculation of the static stiffness of the contact surface of the slab bottom and soil medium, as well as for pile foundations taking into account the effects of interaction of grillage and pile field with the soil media with a general character of displacement of a circular cross section pile are submitted. A spatial three-dimensional finite element static model of RB was developed together with the soil base. Isolines of vertical movements of RB fundamental slabs for natural foundations, as well as for pile foundations for normal operation are shown. A comparative analysis of the data of field observers with the calculation results allows us to justify the reliability of the developed model of the pile foundation. **Results.** The calculations of the foundation yield correspond to all the period of operation including construction, and the results of observations relate only to the period of operation that explain the difference. A comparative analysis of the data of field observers with the calculation results allows us to justify of the strong effectiveness of realization of pile foundation for the massive structures on soft soil bases.

Keywords: spatial model; pile foundation; grillage; piles; yield; comparative analysis; calculation results; field observations; natural base; structure; interaction with the soil environment

For citation

Sargsyan A.E., Gukova E.G. The effectiveness of the implementation of pile foundations on the example of the reactor building of a nuclear power plant with VVER-1000. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):14–21. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-14-21>. (In Russ.)

References

1. Sargsyan A.E. *Dinamika i seismostojkost' sooruzhenij atomnyh stancij [Dynamics and seismic stability of nuclear power plants]*. Sarov: RFNC – VNIIEF Publ.; 2013. (In Russ.)
2. Sargsyan A.E., Gukova E.G., Grishin A.S. Razrabotka i obosnovanie mekhanicheskoy i matematicheskoy modeli osnovaniya sooruzhenij atomnyh stancij v vide odnorodnogo inercionnogo poluprostranstva [Development and justification of a mechanical and mathematical model of the foundation of nuclear power plant structures in the form of a homogeneous inertial half-space]. *The Investigations for Structural Analysis, V.A. Kucherenko Institute Herald*. 2009;(1):81–95. (In Russ.)
3. Sargsyan A.E., Gerashchenko V.S. Razrabotka staticheskoy i dinamicheskoy modeli svajnyh fundamentov s uchetom efekta ih vzaimodejstviya s gruntovoj sredoj [Development of a static and dynamic model of pile foundations taking into account the effect of their

interaction with the soil environment]. *Bulletin of Science and Research Center. Stroytelstvo*. 2010;(2): 159–166. (In Russ.)

4. MR 1.5.2.05.999.0026-2011. *Standards for the design of the foundations of nuclear power plant structures*. Moscow; 2011. (In Russ.)

5. Glagovskii V.B., Zalizskii A.G., Kagan A.A., Krivonogova N.F., Finagenov O.M. Analysis of settlements and tilts of reactor foundations at the Balakovskaya nuclear power plant. *Soil mechanics and foundation engineering*. 2005;42(3):132–138.

6. Sargsyan A.E., Grishin A.S. Ocenka effektivnosti realizacii svajnyh fundamentov na primere sooruzheniya RO Balakovskoj AES [Efficiency Estimation of Pile Foundation by the Example of the Reactor Building of the Balakovo Nuclear Power Plant]. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2014; 7(667):112–121. (In Russ.)

7. LLC NPO "Gidrotehproekt". *Technical report on the results of geodetic observations of yield and tilt of buildings and structures of units No. 1, 2 and general stationary objects of the Rostov NPP*. GTB-2014-B.06/13-1/14-651. Valdai; 2014. (In Russ.)

8. SP 50-102-2003. *Design and construction of pile foundations*. Moscow; 2004. (In Russ.)

Akop E. Sargsyan, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of IAI UN, Head of Research Department of Dynamics and Seismic Stability; eLIBRARY AuthorID: 731808.

Elena G. Gukova, chief specialist of Research Department of Dynamics and Seismic Stability; eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484, Scopus ID: 7202396806.

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-22-30
UDC 624.04

RESEARCH PAPER

Effect of joint stiffness and flexibility on the design of reinforced cement concrete structure

Govind P. Lamichhane*, Prajwal Giri

Pokhara University, Pokhara Metropolitan City-30, Lekhnath, Kaski, Nepal, Post Box: 427

*govindkhec@gmail.com

Article history:

Received: November 12, 2019

Revised: January 17, 2020

Accepted: January 27, 2020

Abstract

Relevance. A beam-column joint is a crucial zone in any frame structure that transmits the forces at the end of the members in the panel zone. The connection between the joints may be assumed as rigid or flexible one and it is not an ideal one to predict the actual behavior of the joint section. **Methods.** The displacement along the joint section is the most critical one that has to be taken care while designing the structure. In this paper, the flexibility of the reinforced concrete joints was studied under two different cases: in first phase, building having 3 storey including ground floor was taken and is analysed using SAP 2000 and secondly third floor shear wall with I hollow concrete mesh of column section was analyzed in same software and the flexibility of the joints was tested in terms of its stress and displacement parameters using different approaches such as link mass property, end length offset zone, panel zone rotational spring stiffness property. **The results** obtained from the two cases were analyzed with consideration of parametric study and variation of the stresses with displacement and are shown with comparative graphic.

Keywords: joint flexibility; end length offsets; rotational spring stiffness; link mass property

For citation

Lamichhane G.P., Giri P. Effect of joint stiffness and flexibility on the design of reinforced cement concrete structure. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 16(1):22–30. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-22-30>. (In Russ.)

Introduction

Beam column is the most critical sections in any structural elements and the actual behavior of joints is difficult to idealize and model in real scenario. Generally, the connections between the joints are assumed either fully rigid or pinned, which is not an actual behavior to predict joints behavior according to previous investigations [1; 2]. Rigid joints does not allow any rotations between the connected members while pinned joints are characterized by the free rotational movement between the connected elements and prevents the transmission of bending moments. The intermediate which is non-zero and non-infinite stiffness is semi-rigid joints [3].

The study conducted by Johnson and Hope [1] found that the pin joints are very unpredictable while the rigid joints are often too stiff in relation to their strength, and are expensive. Therefore, an ideal semi-rigid joint is required to consider for the structural design with a large rotational capacity and a predictable flexural strength. In 2005, Cabrero and Bayo [2] proposed a design method for semi-rigid joints incorporating the design examples for demonstrating the applicability of the proposed method. Their study concluded that the semi-rigid design is the most cost effective solution when it is compared with the traditional pinned and rigid joints.

A considerable amount of past research has studied the load-deformation behaviour of panel zones under both monotonic and cyclic loads, very little past research has studied the attachment of doubler plates to columns in the panel zone regions. Limited studies of doubler plates and attachment details were conducted [4–7]. However, this past research has not resulted in clear conclusions on the most effective

Govind Prasad Lamichhane, PhD, Associate Professor, School of Engineering.

Prajwal Giri, graduate in MSc. in Structural Engineering, School of Engineering.

© Giri P., Prasad L.G., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

methods of welding the doubler plate to the column. So, P.S. Shirsat & M.D. Engelhardt [8], summarizes the results of preliminary analysis of doubler plate attachment details for the steel moment resisting frames using finite element modeling of a simplified representation of beam-to-column joint subjected to monotonic loading. Analysis cases with different doubler plate attachment details were studied.

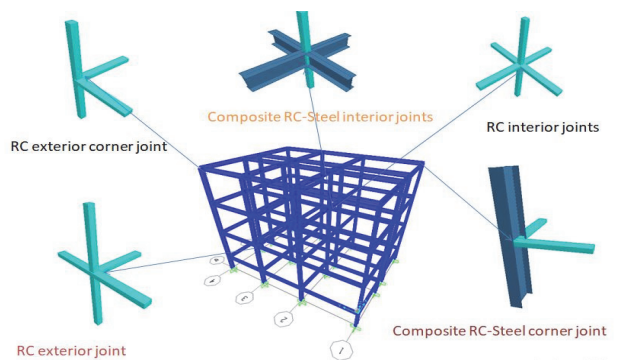


Figure 1. Different types of joint section in a structure (Rigid, semi-rigid, pinned)

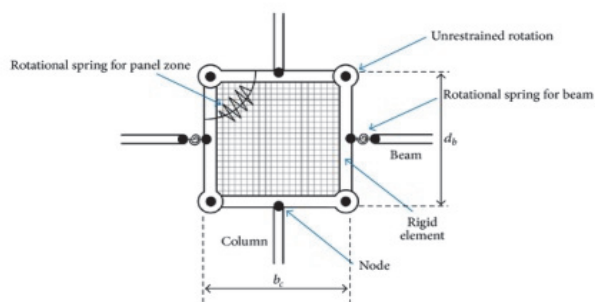


Figure 2. Krawinkler beam column joint flexibility model

Similarly, different types of linear centerline model (suitable for steel moment resisting frame), elastic model with panel zone (beams and columns reconnected via rigid links in a panel zone, and the crossroad hinge is connected via a spring with the stiffness of the panel zone), nonlinear model with panel zone (beam and column are connected by a link mass whose property may be fixed nonlinear to analyze the shear deformation behavior of the joints as proposed in [9], models a panel zone into 8 rigid bodies as shown in Figure 2. Actually, this model shows the least difference between the actual behavior of a structure and the behavior of the analytical model.).

Now different finite element analysis software has been used (SAP 2000, ETABS, STAAD-PRO) to test the joint flexibility using the different codes [11–18] by adopting the different flexural capacity ratio as 1.2, 1.4, and 1.3 respectively. Also IS 13920:1993 [13] draft version adopted 1.1, and IS 800:2007 [19] steel

code adopted 1.2 and recently revised code IS 13920:2016 [13] has been used and this whole revision of code for the seismic joint flexibility of RCC member was reviewed by Pradip Sarkar et al. [20].

The displacement along the beam column connections is the most severe thing that affects mostly while designing and in this modeling different approaches are carried out to test the flexibility of joint section using link property, end length offset zone, panel zone rotational spring stiffness by modeling a frame structure and a shear panel zone consisting of lift section using a finite element software SAP 2000. Among all of these sections displacement and stress behavior of the joints is idealized and a conclusion is drawn out.

1. Modeling approach

To test the flexibility of the joint section SAP 2000 v20.2 is used applying two different frame structures to idealize it differently. In SAP 2000 there is different option to test the rigidity of joint behavior and each of them is explained simultaneously (Figure 3).

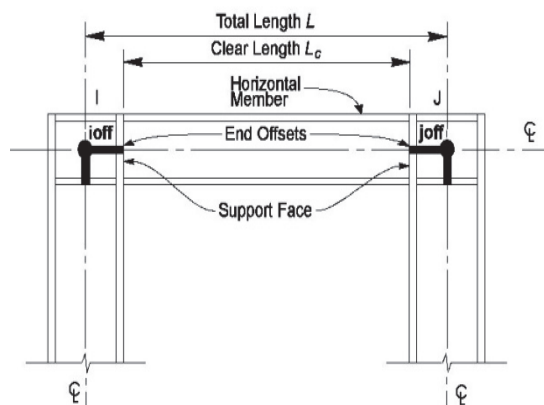


Figure 3. End length offset pane

Source: SAP manual CSI.

1.1. End length offsets

In SAP 2000 when we select all the joints and assign joints to end offsets then we can set according to the software automatically by varying the rigid zone factor or by directly giving the user defined offset value in either section of joints. The end offsets may be non-rigid, partially rigid or fully rigid. The rigidity of the joint is measured by using rigid zone factor. This factor specifies the fraction of the end offset length, measure from the frame element and is infinitely rigid. The remainder of the offset if any is assumed to have same flexibility as the beam. In the adjoining Figure 3: L – total length of the element (inter-axial); L_c – clear length, calculated as difference between total lengths with terminal segments $L_c = L - (ioff + joff)$.

1.2. Doubler plate thickness

In a moment resisting steel or concrete frame subjected to lateral load either due to seismic or wind loads, the region of the column around the beam column joints known as panel zone will be subjected to high shear force. In some cases the region around the panel zone will be subjected to such high force that the column area must be reinforced to increase its strength or stiffness and one of the most common approaches to do so is to weld a plate in the column section known as doubler plate to the column. Welding doubler plate to the column increases the strength around the column section but it is difficult in reality where to apply the plate in column either horizontally or vertically around panel area. SAP 2000 allows the use of the doubler plate to the column by assigning the joints and giving the thickness of plate to such panel joints. However, during the past research it also showed that connecting the doubler plate along the vertical axis can add to the full strength of the joint as it prevents the lateral torsional buckling of the column rather than by adding it in horizontal way which adds to the little amount of stress only.

1.3. Specified spring stiffness

In frame structure when it is subjected to lateral load the resistance of the joint can be increased by assigning it to spring stiffness of certain mass in a panel zone. SAP 2000 allows the use of rotational spring stiffness in a panel zone along its major axis (about the local 3-axis of the column and panel zone) and minor axis (about the local 2-axis of the column and panel zone) of bending by giving the certain stiffness parameter. This allows the joints to be move uniformly when high seismic action is occurred and controls the drifts.

1.4. Link mass property

A link member connects the two objects together or a frame structure from one end to another end. Linear, non-linear and frequency dependent property can be assigned to a different six degree of freedoms which are internal to the link, including axial, shear and torsion element. SAP 2000 allows the use of specified link mass property in a panel zone area where mass and stiffness can be given to it, and it is different type such as linear, multi-linear elastic, plastic, damper etc. and according to the specified property we can change the degree of freedom of the system in it. In general a link mass allows the structure to deform elastically and plastically as specified.

2. Geometry of the structure

To analyze the flexibility of the joint frame structure is analyzed using two cases.

2.1. Case 1

G+3 story building is taken with the following dimensions and load assign as: building type – moment resistant g+3 story building; beam size – 400×300 mm; column size – 300×300 mm; slab thickness – 150 mm; waist slab thickness – 120 mm, column height – 2.8448 m; wall load – 8.5 kn/m.

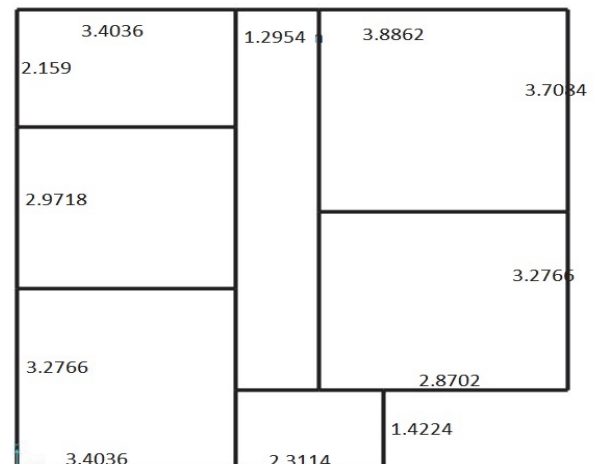
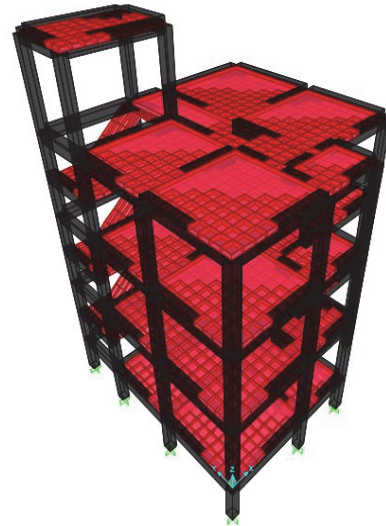


Figure 4. 3D view of the building and its plan view with the dimensions:

Live load – 2.5 KN/m²; floor finish load – 1 KN/m²; partition load – 1 KN/m²; staircase load – 2 KN/m²; EQ-X and EQ-Y applied along X and Y direction as per IS 1893-2002 and the load case is response spectrum load combination as per IS 456-2000.

Results and discussions

Variation of displacement with the increase in rigidity factor (RF). The Table 1 and graph (Figure 5) shows the variation of displacement along the exterior corner joints (joint no. 122, 64, 63, 62, 3) with

the increase in rigidity factor along the X and Y direction. Looking at the table and graph there is the corresponding decrease in displacement with the increase in rigidity factor along X and Y axis as with the increase in rigidity factor the connection of the joints along beam column junction changes from center to end which makes it rigid.

Table 1

Story displacement at exterior corner joint with the RF along the vertical axis along X direction

Story height	Displacement due to RF 0.5	Displacement due to RF 0.75	Displacement due RF 1
0	1.0509	1.0454	1.0399
2.8448	5.2771	5.2517	5.2261
5.6896	9.1231	9.0767	9.0303
8.5344	11.5585	11.5027	11.4468
11.3792	13.5701	13.4965	13.4229

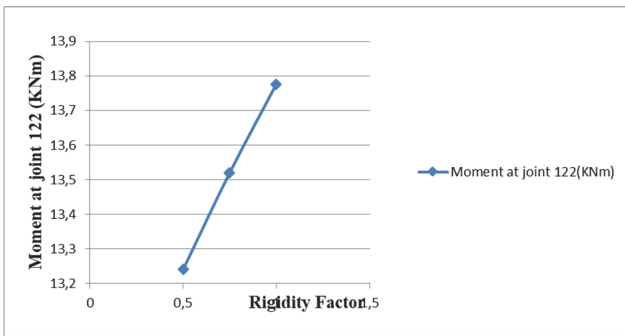


Figure 5. Moment vs. rigidity factor

Similarly the Figure 5 shows the variation of rigidity factor with moment at joint 122 along X direction. It is shown that there is increase in moment with the increase in rigidity factor. In general, at high rigidity there is decrease in displacement but it is very low which is not satisfactory too and also moment is also high and at low rigidity there will be high displacement and low moment which is also not satisfactory, so for designing it is recommended to use a rigidity factor of 0.5 for designing aspect.

Variation of displacement with the thickness of doubler plate. The Figure 6 shows the decreases in displacement at a particular joint (joint no. 122, 64, 63, 62, 3) with the increase in doubler plate thickness when all the rigid joints in panel area are assigned to a thickness of 0, 50, 150, 250 mm respectively. This shows that the more the size of thickness of plate used then there is decreases in displacement but the choose of right amount of size becomes the necessary for the designing aspect.

Variation of drift with the rotational mass spring. Looking at the Table 2 and following graph (Figure 7)

there is corresponding decreases in inter-story drift along the exterior corner joint with the increases in the stiffness of rotational spring of mass in the panel zone area. The drift first increases and moves down and it again increases as shown the graph (Figure 7). It also shows the corresponding decreases in displacement with the increases in spring stiffness when applied along major and minor axis.

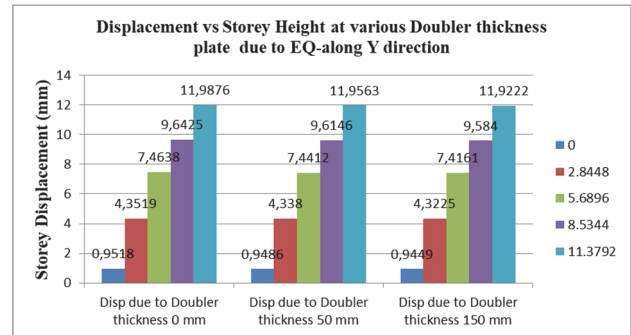


Figure 6. Displacement vs. story height at various doubler plate thicknesses along EQY direction

Table 2

Variations of drift with rotational spring mass

Storey height (m)	Drift due to stiffness 2KN-M/rad	Drift due to stiffness 100KN-M/rad	Drift due to stiffness 1000KN-M/rad	Drift due to stiffness 2000KN-M/rad
0	1.4889	1.4876	1.4764	1.4585
2.8448	5.3344	5.3292	5.2820	5.2074
5.6896	4.8732	4.8682	4.8235	4.7531
8.5344	3.0869	3.0839	3.0567	3.0158
11.3792	4.5694	4.5529	4.4133	4.2176

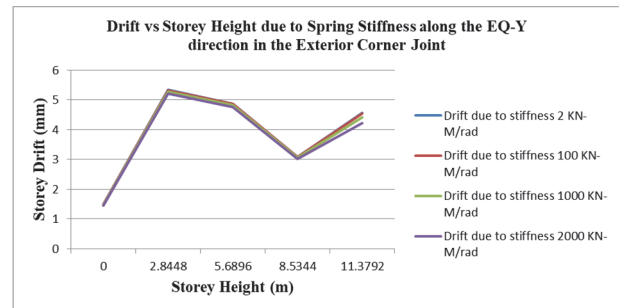


Figure 7. Drift vs. story height due to spring stiffness variation along EQY direction

Variation of displacement and drift due to link mass property in the panel zone. The two graph (Figures 8, 9) – the increase in displacement and inter-story drift with the increase in link mass member used along the panel zone (joint no. 122, 64, 63, 62, 3). The link mass member of different weight were taken and link member is assigned multi-linear elastic member property to check

its deformation and drift making the degree of freedom along X nonlinear. In both case drift and displacement increased as link member allows the joints to deform freely.

Table 3

Displacement variation with story height due to link mass laid along exterior joints in panel zone

Storey height (m)	Displacement due to mass 100 Kg	Displacement due to mass 500 Kg	Displacement due to mass 1000 Kg	Displacement due to mass 1500 Kg
0	5.7956	16.8339	32.6885	48.6399
2.8448	28.0819	83.633	164.3091	245.9528
5.6896	47.6934	144.1691	285.359	426.9281
8.5344	60.7955	184.4732	365.8733	547.4332
11.3792	97.2976	294.3606	581.2367	869.9576

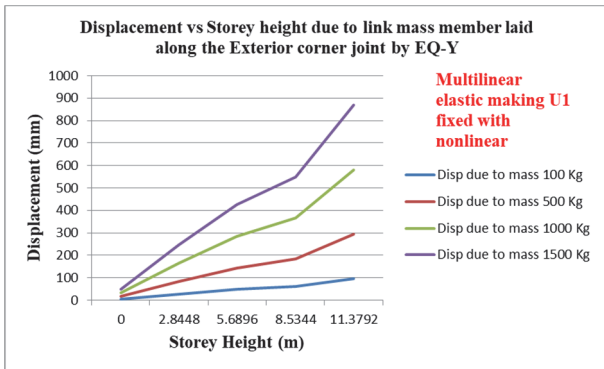


Figure 8. Displacement vs. story height along the exterior joint due to link mass variation at EQY direction

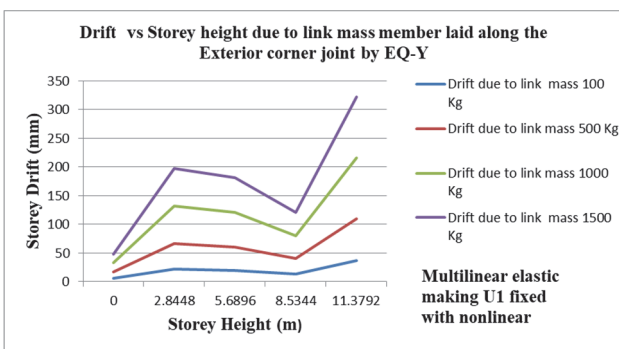


Figure 9. Drift vs. story height along the exterior joint due to link mass variation at EQY direction

Variation of displacement with the variation of placement of bottom tie beam. The graph (Figure 10) – the variation of displacement at top story level at joint no 122 with the variation of the position of tie beam level at the bottom of the footing. The displacement

first increases and then decreases and then increases again. Based on the variation of displacement above, the optimum minimum level of displacement at the top story is found when footing is at 0.1m above its normal level. During the analysis the footing level is kept at 1.5 m below tie beam level.

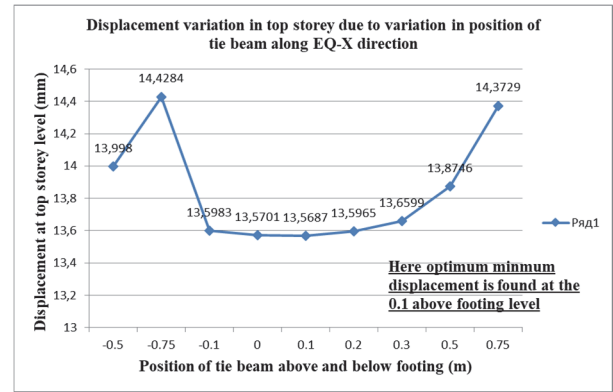


Figure 10. Variation in displacement at top level with the variation in the level of tie beam at bottom

Conclusions

After analyzing the above frame structure with the different supporting member in panel zone area the following conclusions were drawn:

1) the flexibility of the beam column joint connection decreases with the increases in rigid factor from non-rigidity to rigidity (from 0 to 1). So, from designing aspect of view semi-rigid connection is best suitable as both displacement and moment will be within in satisfactory range;

2) the displacement decreases with the increases in doubler plate thickness at a particular joint and the use of this plate can lead to prevention of high shear during high seismic force;

3) the displacement and inter-story decreases with the increase in mass of rotational spring stiffness along the panel zone area as the use of spring having high stiffness makes the joint member rigid and controls drift;

4) the drift and displacement increases with the use of specified link mass member along the panel zone area. Link member was assigned non-linearly to a degree of freedom along X axis and its property is assigned multi linear elastic constant and it showed the increases in drift and displacement. Similarly, we can test the same result by assigning the other property such as multi linear plastic, damper, etc. to test its shear and deformation capacity;

5) the displacement at the top level of building varies with the position of level of tie beam. It generally increases below the footing level and also increases above the footing but becomes at the optimum level a little above footing.

2.2. Case 2

Table 4

A shear wall consisting of lift on either side of column is done in 1m length and a cubic section like a hollow mesh is prepared as shown below (Figure 11). The general property of shear wall structure is: building type – shear wall system consisting of lift element on either side of column; beam size – 400×300 mm; column size – 300×300 mm; live load – 10 KN/m²; floor finish and partition load – 3 KN/m²; slab thickness – M20; EQX and EQY applied along X and Y as per IS 1893-2002 (response spectrum function).

The variation of inter-story drift with the increase in thickness of shear wall

Storey height (m)	Drift due to shear wall thickness 0.4 m	Drift due to shear wall thickness 0.2m	Drift due to shear wall thickness 0.49 m
0	0.02537	0.03338	0.00173
3.5	0.16388	0.22727	0.01576
7	0.15526	0.22077	0.02157
10.5	0.11022	0.15543	0.02235

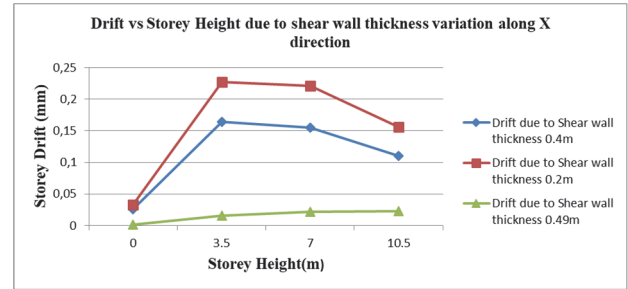
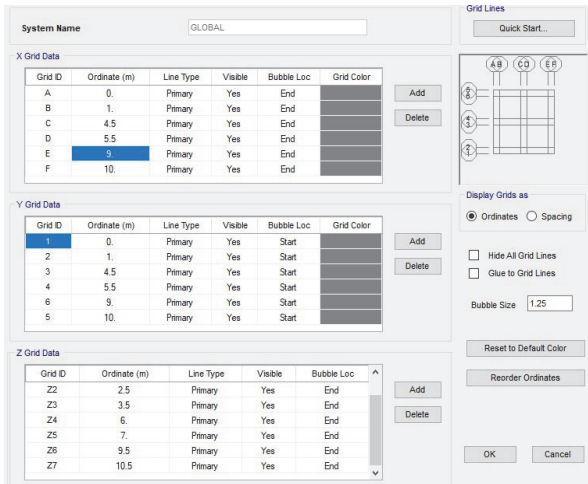


Figure 12. Drift vs. story height with variation of shear wall thickness

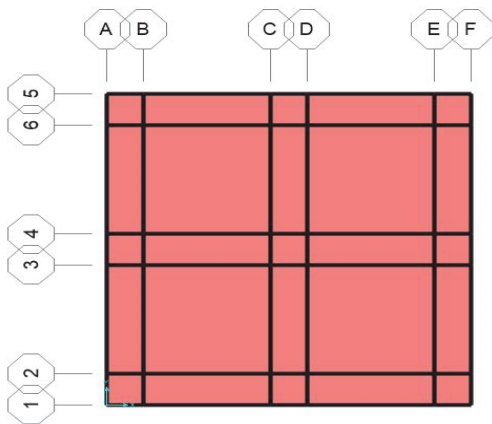
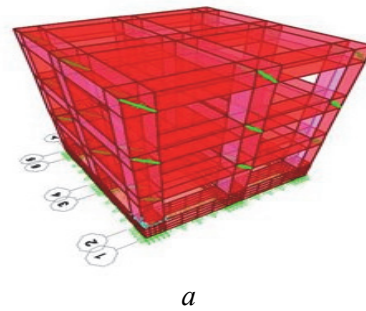


Figure 11. Geometric grid and the plan view of shear wall system

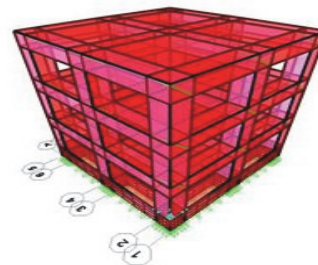
Results and discussions of shear wall system

Variation of inter-story drift with the increase in thickness of shear wall. The graph (Figure 12) – the variation of drift at a joint (joint no. 255, 149, 14, 7) along a vertical axis in exterior corner joints. With the increase in shear wall thickness there is corresponding decrease in drift along the joints. But very high thickness is also not desirable one so thickness should be such which is best applicable from designing aspects too.

Variation of drift when link is drawn face to face diagonally from one corner to other bottom corner. When the link is drawn by specifying its mass and joint property in a shear wall lift system as shown in Figure 13, then there is corresponding increase in drift along the vertical axis of the joint as shown in Figure 14.



a



b

Figure 13. Shear wall system when link is connected diagonally from one corner to opposite end corner (a) and when link is connected face to face along X axis as shown above (b)

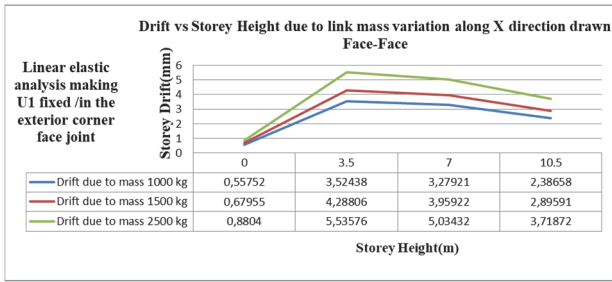


Figure 14. Drift vs. story height when link member is placed face to face diagonally along EQX direction

Link member is applied diagonally and mass is varied (Figure 14). The joint property is assigned making degree of freedom to the X axis as fixed as shown above.

Variation of drift in joints due to link orientation.

When the link is drawn by applying the same mass and property as above but here diagonally from face to the joint section (Figure 15.), then there is also the increase in drift with the increase in link mass stiffness.

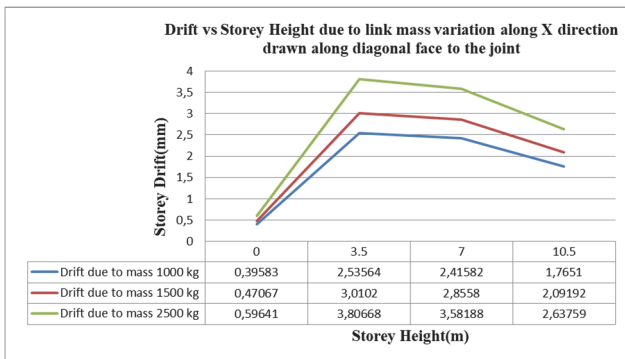


Figure 15. Drift vs. story height when link member is placed face to face diagonally along EQX direction

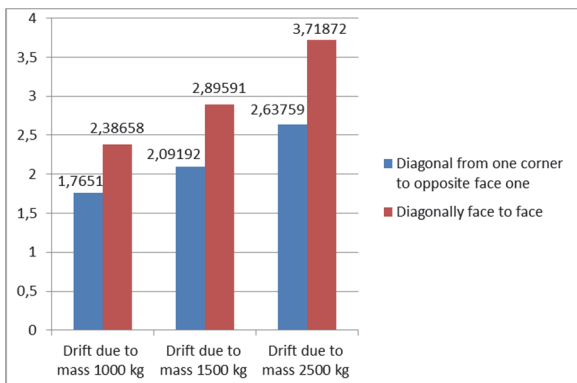


Figure 16. Comparison of drift with link face and without

If a comparison (Figure 16) is done with the link member connecting face to face and diagonally from one corner to opposite corner of the other joint at joint no. 255 of top story then it is found that the drift

is more in case of link member when connected face to face.

Conclusions drawn from case of shear wall system:

1) there is decrease in inter-story drift with the increase in thickness of shear wall. But thickness should of appropriate size so that displacement and stress will be in design limit;

2) there is increase in inter-story drift and displacement with the increase in link mass stiffness when link member is placed face to face along EQ X direction and also when it is placed diagonally from one corner to the opposite corner of the joint;

3) the drift and displacement is more when link is placed face to face rather than placed diagonally.

References

- Johnson R.P., Hope-Gill M. Semi-rigid joints in composite frames. *International Association for Bridge and Structural Engineering*. 1972:133–144.
- Cabrero J.M., Bayo E. Development of practical design methods for steel structures with semi-rigid connections. *Engineering Structures*. 2005;(27):1125–1137.
- Jaspart J.P. General report: session on connections. *Journal of Constructional Steel Research*. 2000;(55):69–89.
- Becker R. Panel Zone Effect on the Strength and Stiffness of Steel Rigid Frames. *Engineering Journal, American Institute of Steel Construction*, 1975;(12):19–29.
- Slutter R.G. Test of panel zone behavior in beam-column-connections. *Report No. 200.81.403.1*. Bethlehem, PA: Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University; 1982.
- Mays T.W. *Application of the finite element method to the seismic design and analysis of large moment end-plate connections* (PhD Dissertation). Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic Institute and State University; 2000.
- Ciutina A.L., Dubina D. Column web stiffening of steel beam-to-column joints subjected to seismic actions. *Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineers*. 2008;134(3):505–510.
- Shirsat P.S., Engelhardt M.D. Preliminary analysis of doubler plate attachment details for steel moment frames. *15th World Conference on Earthquake Engineering*. Lisboa; 2012.
- Krawinkler H. The state of the art report on systems performance of moment resisting steel frames subjected to earthquake ground shaking. *FEMA-355C*. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency; 2000.
- Sun-Min Kim, Myoung-Ho Oh, Myeong-Han Kim, Sang-Dae Kim. Analytical Modeling and Nonlinear Analysis of Beam-Column Connection in Steel Moment Resisting Frame. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*. 2006; 5(2):309–316. <https://doi.org/10.3130/jaabe.5.309>
- Indian Standard Code IS 1893-2002. *Part I. Criteria for earthquake resistant design of structures General provisions and buildings*. New Delhi, India: Bureau of Indian Standards; 2002.

12. Indian Standard Code IS 456-2000. *Practice for plain reinforced concrete*. New Delhi: Bureau of Indian Standards; 2000.

13. Indian Standard Code IS 13920-1993. *Practice for ductile detailing of reinforced concrete structures*. New Delhi: Bureau of Indian Standards; 1993.

14. ACI 318-02. *Building Code Requirements for Structural Concrete*. American Concrete Institute, ACI Committee 318, Farmington Hills, MI; 2002.

15. Concrete Structures Standard NZS 3101. *Part 1. The Design of Concrete Structures*. New Zealand Standard; 1995.

16. Concrete Structures Standard NZS 3101. *Part 2. The Design of Concrete Structures*. New Zealand Standard; 1995.

17. Nepal Building Code NBC-205. *Mandatory rules of thumb: Reinforced concrete buildings without masonry*

infill. Department of Building, Ministry of Physical Planning and Works, Government of Nepal; 1994.

18. Design Provisions for Earthquake Resistant Structures EN 1998-1-3:2003. *Part 1. General Rules, Seismic Actions and Rules for Building*. Brussels; 2003.

19. Indian Standard Code IS 800-2007. *Practice for Steel Structures*. Bureau of Indian standards, New Delhi; 2007.

20. Pradip S., Rajesh A., Menon D. Design of RC Beam Column Joints Under Seismic Loading. *Journal of Structural Engineering*. 2007; 33(6):449–457.

21. Ferdous W. Effect of Beam-Column Joint Stiffness on the Design of Beams. In: Smith S.T. (ed.) *23rd Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials (ACMSM23), Byron Bay, Australia, 9–12 December 2014*.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Влияние жесткости и гибкости соединения при проектировании железобетонных конструкций

Г.П. Ламичхане*, П. Гири

Университет Покхары, Pokhara Metropolitan City-30, Lekhnath, Kaski, Nepal, Post Box: 427

*govindkhec@gmail.com

История статьи:

Поступила в редакцию: 12 ноября 2019 г.

Доработана: 17 января 2020 г.

Принята к публикации: 27 января 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Соединение балки с колонной является критической областью в любой рамной конструкции, которая передает усилия в конце элементов в зоне контакта. Соединение между элементами может быть принято как жесткое, или прикрепленное, и оно не является идеальным для прогнозирования фактического поведения прикрепляемой зоны элемента, о котором необходимо позаботиться при проектировании конструкции. **Методы.** В данной работе гибкость железобетонных соединений была изучена в рамках двух различных случаев: 1) железобетонное здание, состоящее из трех этажей, включая цокольный этаж, было исследовано с использованием программы SAP 2000; 2) обшивка стены третьего этажа из пустотелых бетонных ячеек с секцией колонн была также смоделирована в SAP 2000. Гибкость соединений была протестирована с точки зрения напряжений и перемещений с использованием различных подходов, таких как связь массивов, длина зоны смещения, прочностная жесткость элементов при кручении. **Результаты,** полученные в обоих случаях, были проанализированы, и на их основе построены графики изменения напряжений с перемещениями.

Ключевые слова: гибкость соединения; смещения длины конца; жесткость пружины при вращении; свойство массы соединения

Для цитирования

Lamichhane G.P., Giri P. Effect of joint stiffness and flexibility on the design of reinforced cement concrete structure (Влияние жесткости и гибкости соединения при проектировании железобетонных конструкций) // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 1. С. 22–30. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-22-30>

Список литературы

1. Johnson R.P., Hope-Gill M. Semi-rigid joints in composite frames // International Association for Bridge and Structural Engineering. 1972. Pp. 133–144.

2. Cabrero J.M., Bayo E. Development of practical design methods for steel structures with semi-rigid connections // *Engineering Structures*. 2005. No. 27. Pp. 1125–1137.

Ламичхане Говинд Прасад, кандидат технических наук, доцент департамента инженерной школы.

Гири Прадживал, магистрант департамента инженерной школы.

3. Jaspart J.P. General report: session on connections // *Journal of Constructional Steel Research*. 2000. No. 55. Pp. 69–89.

4. Becker R. Panel Zone Effect on the Strength and Stiffness of Steel Rigid Frames // *Engineering Journal*, American Institute of Steel Construction. 1975. No. 12. Pp. 19–29.

5. Slutter R.G. Test of panel zone behavior in beam-column-connections. Report No. 200.81.403.1. Bethlehem, PA: Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, 1982.

6. Mays T.W. Application of the finite element method to the seismic design and analysis of large moment

end-plate connections: PhD Dissertation. Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2000.

7. *Ciutina A.L., Dubina D.* Column web stiffening of steel beam-to-column joints subjected to seismic actions // *Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineers.* 2008. Vol. 134. No. 3. Pp. 505–510.

8. *Shirsat P.S., Engelhardt M.D.* Preliminary analysis of doubler plate attachment details for steel moment frames // *15th World Conference on Earthquake Engineering.* Lisboa, 2012.

9. *Krawinkler H.* The state of the art report on systems performance of moment resisting steel frames subjected to earthquake ground shaking // *FEMA-355C.* Washington, DC: Federal Emergency Management Agency, 2000.

10. *Sun-Min Kim, Myoung-Ho Oh, Myeong-Han Kim, Sang-Dae Kim.* Analytical Modeling and Nonlinear Analysis of Beam-Column Connection in Steel Moment Resisting Frame // *Journal of Asian Architecture and Building Engineering.* 2006. Vol. 5. No. 2. Pp. 309–316. <https://doi.org/10.3130/jaabe.5.309>

11. Indian Standard Code IS 1893-2002. Part I. Criteria for earthquake resistant design of structures General provisions and buildings. New Delhi: Bureau of Indian Standards, 2002.

12. Indian Standard Code IS 456-2000. Practice for plain reinforced concrete. New Delhi: Bureau of Indian Standards, 2000.

13. Indian Standard Code IS 13920-1993. Practice for ductile detailing of reinforced concrete structures. New Delhi: Bureau of Indian Standards, 1993.

14. ACI 318-02. Building Code Requirements for Structural Concrete. American Concrete Institute, ACI Committee 318, Farmington Hills, MI, 2002.

15. Concrete Structures Standard NZS 3101. Part 1. The Design of Concrete Structures. New Zealand Standard. 1995.

16. Concrete Structures Standard NZS 3101. Part 2. The Design of Concrete Structures. New Zealand Standard, 1995.

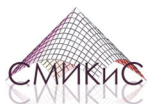
17. Nepal Building Code NBC-205. Mandatory rules of thumb: Reinforced concrete buildings without masonry infill. Department of Building, Ministry of Physical Planning and Works, Government of Nepal, 1994.

18. Design Provisions for Earthquake Resistant Structures EN 1998-1-3:2003. Part 1. General Rules, Seismic Actions and Rules for Building. Brussels, 2003.

19. Indian Standard Code IS 800-2007. Practice for Steel Structures. New Delhi: Bureau of Indian standards, 2007.

20. *Pradip S., Rajesh A., Menon D.* Design of RC Beam Column Joints Under Seismic Loading // *Journal of Structural Engineering.* 2007. Vol. 33. No. 6. Pp. 449–457.

21. *Ferdous W.* Effect of Beam-Column Joint Stiffness on the Design of Beams // *23rd Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials (ACMSM23), Byron Bay, Australia, 9–12 December 2014 /ed. by S.T. Smith.* 2014.



ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Учет геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчетах тонкостенных конструкций типа оболочек

Ю.В. Клочков^{1*}, А.П. Николаев¹, Т.Р. Ищанов¹, А.С. Андреев¹, М.Ю. Клочков²

¹Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр., 26

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
*klotchkov@bk.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 22 ноября 2019 г.
Доработана: 14 января 2020 г.
Принята к публикации: 25 января 2020 г.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-41-343003 p_мол_a.

Для цитирования

Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р., Андреев А.С., Клочков М.Ю. Учет геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчетах тонкостенных конструкций типа оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 31–37. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37>

Аннотация

Актуальность. В настоящее время в связи с все более широким распространением большепролетных тонкостенных конструкций типа оболочек актуальным вопросом является разработка вычислительных алгоритмов по прочностному расчету такого рода объектов в геометрически нелинейной постановке. Несмотря на значительное количество публикаций по данной проблематике достаточно важным аспектом остается необходимость совершенствования конечно-элементных моделей таких оболочек, которые совмещали бы в себе относительную простоту разрешающих уравнений, учет сдвиговых деформаций, компактность формируемой матрицы жесткости, облегченную возможность моделирования и изменения граничных условий и т. д. **Цели.** Целью работы была разработка конечно-элементного алгоритма расчета тонкой оболочки с учетом сдвиговых деформаций в геометрически нелинейной постановке при использовании конечного элемента с ограниченным числом узловых варьируемых параметров. **Методы.** В качестве инструментов исследования выбран численный метод конечных элементов. Основные геометрические соотношения между приращениями деформаций и приращениями компонент вектора перемещения и компонент вектора угла наклона нормали получены в двух вариантах отсчета угла наклона нормали. Матрица жесткости и столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента на шаге нагружения получены минимизацией функционала Лагранжа. **Результаты.** На примере расчета жестко защемленной по краям цилиндрической панели, находящейся под действием сосредоточенной силы, показана эффективность разработанного алгоритма в геометрически нелинейной постановке с учетом деформации поперечного сдвига.

Ключевые слова: геометрическая нелинейность; оболочечная конструкция; шаговое нагружение; узловые неизвестные; четырехугольный конечный элемент; сдвиговые деформации; наклон нормали

Введение

Современный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных кон-

Клочков Юрий Васильевич, д. т. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики; eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693, Scopus ID: 57170472500.

Николаев Анатолий Петрович, д. т. н., профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования; eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484, Scopus ID: 7202396806.

Ищанов Тлек Рахметович, к. т. н., старший преподаватель кафедры высшей математики; eLIBRARY SPIN-код: 1556-1368.

Андреев Александр Сергеевич, старший преподаватель кафедры высшей математики; eLIBRARY SPIN-код: SPIN: 7568-5011, Scopus ID: 57209523986.

Клочков Михаил Юрьевич, студент 4-го курса физического факультета; eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955.

© Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р., Андреев А.С., Клочков М.Ю., 2019

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

струкций предполагает решение задачи в геометрически нелинейной постановке.

При использовании численных методов расчета [1–6], в частности метода конечных элементов (МКЭ) [7–20], в решении нелинейных задач обычно используют шаговую процедуру нагружения [9; 10; 12; 14]. При этом возникает необходимость получения соотношений между приращениями деформаций, приращениями компонент вектора перемещения и приращениями их производных.

В настоящей работе представлен вывод вышеупомянутых геометрических соотношений, включающих в себя деформации поперечного сдвига. Данные соотношения необходимы для формиро-

вания матрицы жесткости используемого конечного элемента на $(j+1)$ -м шаге нагружения.

1. Геометрические соотношения

При получении соотношений Коши на $(j+1)$ -м шаге нагружения последовательно рассматриваются три состояния оболочки: исходное и два деформированных – после j шагов нагружения и на $(j+1)$ -м шаге нагружения. Исходное состояние описывается радиус-векторами \bar{R}^0 для точки M^0 срединной поверхности и $\bar{R}^{0\zeta}$ для точки $M^{0\zeta}$, находящейся на расстоянии ζ от срединной поверхности, причем

$$\bar{R}^{0\zeta} = \bar{R}^0 + \zeta \bar{e}_n^0, \quad (1)$$

где \bar{e}_n^0 – орт нормали к срединной поверхности в точке M^0 .

В процессе шагового нагружения точка $M^{0\zeta}$ последовательно займет новые положения M^ζ и $M^{*\zeta}$, определяемые соответствующими радиус-векторами:

$$\bar{R}^\zeta = \bar{R}^{0\zeta} + \bar{V}; \quad \bar{R}^{*\zeta} = \bar{R}^\zeta + \bar{W}, \quad (2)$$

где \bar{V} и \bar{W} – векторы перемещений точки $M^{0\zeta}$ после j и $(j+1)$ -го шагов нагружения.

При вычислении входящих в (2) векторов \bar{V} и \bar{W} можно воспользоваться одним из двух вариантов. В первом варианте отсчет угла наклона нормали можно осуществить от ее исходного состояния [21]:

$$\bar{V} = \bar{v} + \zeta \bar{G}; \quad \bar{W} = \bar{w} + \zeta \bar{\gamma}, \quad (3)$$

где $\bar{v} = v^\rho \bar{e}_\rho^0 + v \bar{e}_n^0$; $\bar{w} = w^\rho \bar{e}_\rho^0 + w \bar{e}_n^0$ – векторы перемещений точки M^0 после j и $(j+1)$ -го шагов нагружений; $\bar{G} = G^\rho \bar{e}_\rho^0$; $\bar{\gamma} = \gamma^\rho \bar{e}_\rho^0$ – векторы угла наклона нормали после j и $(j+1)$ -го шагов нагружений ($\rho = 1, 2$).

Во втором варианте отчет угла наклона нормали может осуществляться от ее деформированного состояния. В этом случае формулы (3) примут вид

$$\bar{V} = \bar{v} + \zeta (\Delta \bar{e}_n + \bar{G}); \quad \bar{W} = \bar{w} + \zeta (\Delta \bar{e}_n^* + \bar{\gamma}), \quad (4)$$

где $\Delta \bar{e}_n = \bar{e}_n - \bar{e}_n^0$; $\Delta \bar{e}_n^* = \bar{e}_n^* - \bar{e}_n$; \bar{e}_n и \bar{e}_n^* – орты нормали после j и $(j+1)$ -го шагов нагружений.

Ковариантные векторы базиса в трех рассматриваемых состояниях оболочки могут быть определены дифференцированием (1) и (2) по исполь-

зуемым глобальным криволинейным координатам. Например, если рассматривать в качестве рассматриваемой оболочки эллиптический цилиндр, то в качестве таких координат можно использовать осевую координату x и угловую координату θ :

$$\bar{g}_\alpha^0 = \bar{R}_{,\alpha}^{0\zeta}; \quad \bar{g}_\alpha = \bar{R}_{,\alpha}^\zeta; \quad \bar{g}_\alpha^* = \bar{R}_{,\alpha}^{*\zeta}, \quad (5)$$

где α последовательно принимает значения x и θ .

Ковариантные компоненты тензора деформаций и тензора приращений деформаций после j шагов и на $(j+1)$ -м шаге нагружения могут быть получены из соотношений механики сплошной среды [22]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0) / 2; \quad \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta}^* - g_{\alpha\beta}) / 2. \quad (6)$$

Входящие в (6) ковариантные компоненты метрических тензоров в трех рассматриваемых состояниях могут быть определены скалярными произведениями (5):

$$g_{\alpha\beta}^0 = \bar{g}_\alpha^0 \cdot \bar{g}_\beta^0; \quad g_{\alpha\beta} = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_\beta; \quad g_{\alpha\beta}^* = \bar{g}_\alpha^* \cdot \bar{g}_\beta^*. \quad (7)$$

При использовании второго варианта отсчета угла наклона нормали (4) в соотношениях (6), выражающих приращения деформаций в произвольном слое оболочки через компоненты шагового вектора перемещения и компоненты шагового вектора угла наклона нормали, будут фигурировать как первые, так и вторые производные от компонент шагового вектора перемещения, что повлечет усложнение вычислительного алгоритма. Этим рассматриваемый вариант отличается от первого варианта отсчета угла наклона нормали, при использовании которого в соотношениях приращений деформаций фигурируют только первые производные от компонент вектора шагового перемещения.

2. Матрица жесткости на $(j+1)$ -м шаге нагружения

Элементом дискретизации выбирается четырехугольный фрагмент срединной поверхности с узлами в его вершинах. Столбцы шаговых узловых неизвестных в локальной $1 \leq \xi, \eta \leq 1$ и глобальной x, θ системах координат будут иметь следующий вид:

$$\left\{ W_y^{\Pi} \right\}_{1 \times 44}^T = \left\{ \left\{ w_y^{1\Pi} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ w_y^{2\Pi} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ w_y^{\Pi} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \gamma^1 \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \gamma^2 \right\}_{1 \times 4}^T \right\};$$

$$\left\{ W_y^{\Gamma} \right\}_{1 \times 44}^T = \left\{ \left\{ w_y^{1\Gamma} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ w_y^{2\Gamma} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ w_y^{\Gamma} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \gamma^1 \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \gamma^2 \right\}_{1 \times 4}^T \right\}, \quad (8)$$

где

$$\left\{q_{y}^{\Pi}\right\}_{1 \times 12}^{\mathrm{T}}=\left\{q^{i} q^{j} q^{k} q^{l} q_{,\xi}^{i} q_{,\xi}^{j} q_{,\xi}^{k} q_{,\xi}^{l} q_{,\eta}^{i} q_{,\eta}^{j} q_{,\eta}^{k} q_{,\eta}^{l}\right\};$$

$$\left\{q_{y}^{\Gamma}\right\}_{1 \times 12}^{\mathrm{T}}=\left\{q^{i} q^{j} q^{k} q^{l} q_{,x}^{i} q_{,x}^{j} q_{,x}^{k} q_{,x}^{l} q_{,0}^{i} q_{,0}^{j} q_{,0}^{k} q_{,0}^{l}\right\};$$

$$\left\{\gamma^{p}\right\}_{1 \times 4}^{\mathrm{T}}=\left\{\gamma^{p i} \gamma^{p j} \gamma^{p k} \gamma^{p l}\right\};$$

$q = w^1, w^2, w$; i, j, k, l – узлы четырехугольного элемента дискретизации.

Компонента шагового вектора перемещения и ее первые производные по глобальным координатам точки внутренней области конечного элемента аппроксимируются через узловые значения этой же компоненты с помощью интерполяционных выражений вида

$$q = \left\{\varphi\right\}_{1 \times 12}^{\mathrm{T}} \left\{q_{y}^{\Pi}\right\}_{12 \times 1}; \quad q_{,\alpha} = \left(\left\{\varphi_{,\xi}\right\}_{\xi, \alpha}^{\mathrm{T}} + \left\{\varphi_{,\eta}\right\}_{\eta, \alpha}^{\mathrm{T}}\right) \left\{q_{y}^{\Pi}\right\}, \quad (9)$$

где $\left\{\varphi\right\}_{1 \times 12}^{\mathrm{T}} = \left\{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{12}\right\}$ – матрица-строка, элементы

которой представляют собой произведение полиномов Эрмита третьей степени.

Для компонент вектора угла наклона нормали γ^p были использованы интерполяционные зависимости следующего вида:

$$\gamma^p = \left\{\psi\right\}_{1 \times 4}^{\mathrm{T}} \left\{\gamma_y^p\right\}_{4 \times 1}, \quad (10)$$

где $\left\{\psi\right\}_{1 \times 4}^{\mathrm{T}} = \left\{\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4\right\}$ – матрица-строка, элементы

которой представлены билинейными соотношениями локальных координат ξ, η .

Функционал, выражающий равенство работ внешних и внутренних сил на $(j+1)$ -м шаге нагружения, записывается в виде

$$\Pi = \int_V \left\{\Delta \varepsilon_{\alpha \beta}^{\zeta}\right\}_{1 \times 5}^{\mathrm{T}} \left(\left\{\sigma^{\alpha \beta}\right\} + \left\{\Delta \sigma^{\alpha \beta}\right\}\right) dV - \int_F \left\{w\right\}_{1 \times 3}^{\mathrm{T}} \left(\left\{P\right\} + \left\{\Delta P\right\}\right) dF, \quad (11)$$

$$\text{где } \left\{\Delta \varepsilon_{\alpha \beta}^{\zeta}\right\}_{1 \times 5}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta \varepsilon_{11}^{\zeta} 2 \Delta \varepsilon_{12}^{\zeta} 2 \Delta \varepsilon_{13}^{\zeta} \Delta \varepsilon_{22}^{\zeta} 2 \Delta \varepsilon_{23}^{\zeta}\right\};$$

$$\left\{\Delta \sigma^{\alpha \beta}\right\}_{1 \times 5}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta \sigma^{11} \Delta \sigma^{12} \Delta \sigma^{13} \Delta \sigma^{22} \Delta \sigma^{23}\right\} \text{ – приращение дефор-}$$

маций и напряжений на $(j+1)$ -м шаге нагружения; $\left\{\sigma^{\alpha \beta}\right\}_{1 \times 5}^{\mathrm{T}} = \left\{\sigma^{11} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{22} \sigma^{23}\right\}$ – напряжения, накоп-

ленные за j предыдущих шагов нагружения; $\left\{w\right\}_{1 \times 3}^{\mathrm{T}} = \left\{w^1 w^2 w\right\}$ – компоненты шагового вектора

перемещения точки срединной поверхности;

$$\left\{P\right\}_{1 \times 3}^{\mathrm{T}} = \left\{p^1 p^2 p^3\right\}; \quad \left\{\Delta P\right\}_{1 \times 3}^{\mathrm{T}} = \left\{\Delta p^1 \Delta p^2 \Delta p^3\right\} \text{ – внешняя по-}$$

верхностная нагрузка за j шагов нагружения и ее приращения на $(j+1)$ -м шаге.

Входящий в (11) столбец приращений контравариантных компонент тензора напряжений $\left\{\Delta \sigma^{\alpha \beta}\right\}$ на основании закона Гука [22] может быть выражен через столбец приращений ковариантных компонент тензора деформаций $\left\{\Delta \varepsilon_{\alpha \beta}^{\zeta}\right\}$ матричным способом

$$\left\{\Delta \sigma^{\alpha \beta}\right\}_{1 \times 5} = [C]_{5 \times 5} \left\{\Delta \varepsilon_{\alpha \beta}^{\zeta}\right\}_{1 \times 5}, \quad (12)$$

где $[C]_{5 \times 5}$ матрица упругости, при компоновке кото-

рой учтена общепринятая в теории оболочек [23] гипотеза о равенстве нулю нормальных напряжений, перпендикулярных срединной поверхности $\sigma^{33} = 0$.

На основании соотношений (6) и аппроксимирующих выражений (9), (10) столбец приращений ковариантных компонент тензора деформаций $\left\{\Delta \varepsilon_{\alpha \beta}^{\zeta}\right\}$ может быть выражен через столбец узловых неизвестных $\left\{W_y^{\Pi}\right\}$ в виде матричного произведения

$$\left\{\Delta \varepsilon_{\alpha \beta}^{\zeta}\right\}_{5 \times 1} = [B]_{5 \times 44} \left\{W_y^{\Pi}\right\}_{44 \times 1}. \quad (13)$$

С учетом (12), (13) и аппроксимирующих выражений (9), (10) функционал (11) примет следующий вид:

$$\Pi = \left\{W_y^{\Gamma}\right\}^{\mathrm{T}} [PR]^{\mathrm{T}} \int_V [B]^{\mathrm{T}} [C] [B] dV [PR] \left\{W_y^{\Gamma}\right\} + \left\{W_y^{\Gamma}\right\}^{\mathrm{T}} [PR]^{\mathrm{T}} \int_V [B]^{\mathrm{T}} \left\{\sigma^{\alpha \beta}\right\} dV - \left\{W_y^{\Gamma}\right\}^{\mathrm{T}} [PR]^{\mathrm{T}} \int_F [A]^{\mathrm{T}} \left\{\Delta P\right\} dF - \left\{W_y^{\Gamma}\right\}^{\mathrm{T}} [PR]^{\mathrm{T}} \int_F [A]^{\mathrm{T}} \left\{P\right\} dF, \quad (14)$$

где матрица $[A]$ определяется из равенства

$$\left\{w\right\} = [A] \left\{W_y^{\Pi}\right\}.$$

Выполняя над (14) процедуру минимизации по $\left\{W_y^{\Gamma}\right\}^{\mathrm{T}}$, можно получить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left\{PR\right\}^{\mathrm{T}} \int_V [B]^{\mathrm{T}} [C] [B] dV [PR] \left\{W_y^{\Gamma}\right\} = [PR]^{\mathrm{T}} \int_F [A]^{\mathrm{T}} \left\{\Delta P\right\} dF - \left(\left[PR\right]^{\mathrm{T}} \int_V [B]^{\mathrm{T}} \left\{\sigma^{\alpha \beta}\right\} dV - [PR]^{\mathrm{T}} \int_F [A]^{\mathrm{T}} \left\{P\right\} dF\right), \quad (15)$$

которую можно записать в более компактном матричном виде:

$$[MG]\{W_y^T\} = \{f\} - \{NR\}, \quad (16)$$

где $[MG] = [PR]^T \int_V [B]^T [C] [B] dV [PR]$ – матрица жесткости конечного элемента на $(j+1)$ -м шаге нагружения; $\{f\} = [PR]^T \int_F [A]^T \{\Delta P\} dF$ – столбец узловых усилий на $(j+1)$ -м шаге нагружения; $\{NR\}$ – поправка Ньютона – Рафсона.

3. Пример расчета

В качестве примера была решена задача по определению НДС цилиндрической панели, жестко защемленной по образующим и нагруженной сосредоточенной силой P в середине пролета. При формировании матрицы жесткости и столбца узловых усилий конечного элемента использовались соотношения первого варианта отсчета углов наклона нормали как наиболее удобные с точки

зрения организации вычислительной процедуры. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитывалась 1/4 часть оболочки, которая представлялась одной полоской конечных элементов, ориентированных в кольцевом направлении.

Были приняты следующие исходные данные: радиус цилиндра $R = 3,381$ м; толщина оболочки $t = 0,00476$ м; модуль упругости $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$; величина сосредоточенной силы $P = 12,7$ Н; длина образующих – 0,0254 м.

Первоначально решалась задача в линейной постановке с целью установления необходимого числа элементов дискретизации.

Результаты линейного расчета представлены в табл. 1: приведены численные значения нормальных напряжений на внутренней σ^B и наружной σ^H поверхностях оболочки в жесткой заделке, а также напряжения и прогиб в точке приложения сосредоточенной силы P в зависимости от числа элементов дискретизации.

Таблица 1

Значения напряжений и прогиба при решении задачи в линейной постановке
[Table 1. Values of stresses and deflection when solving a problem in a linear formulation]

Координата точки, θ , рад [Point coordinate, θ , radian]	Напряжение σ МПа, прогиб v , см [Voltage σ МПа, deflection v , cm]	Количество элементов дискретизации [Number of sample elements]					Известное решение [Known solution]
		20	30	40	50	60	
0,0, точка приложения силы P [0.0, point of application of force P]	σ_{11}^B	-1,67	-1,30	-1,06	-0,91	-0,8	–
	σ_{11}^H	2,68	2,31	2,07	1,92	1,81	–
	σ_{22}^B	41,17	43,55	44,82	45,63	46,23	–
	σ_{22}^H	-56,34	-58,74	-60,02	-60,85	-61,45	–
	ν	-0,239	-0,240	-0,241	-0,241	-0,234	-0,241
0,128, жесткая заделка [0.128, hard fix]	σ_{11}^B	9,07	9,94	10,46	10,83	11,11	–
	σ_{11}^H	-11,78	-12,58	-13,09	-13,45	-13,74	–
	σ_{22}^B	45,30	49,61	52,21	54,06	55,48	–
	σ_{22}^H	-58,99	-63,03	-65,55	-67,39	-68,82	–

Таблица 2

Значения напряжений и прогиба при решении задачи в нелинейной постановке
[Table 2. Values of stresses and deflection when solving a problem in a nonlinear formulation]

Напряжение σ МПа, прогиб v , см [Voltage σ МПа, deflection v , cm]	Число шагов нагружения [Number of sample elements]						Известное решение [Known solution]
	50	100	150	200	250	300	
σ_{22}^B	63,71	67,32	67,92	68,13	68,23	68,29	–
σ_{22}^H	-85,84	-84,96	-85,19	-85,34	-85,42	-85,48	–
ν	-0,422	-0,429	-0,431	-0,432	-0,432	-0,432	-0,437

Как видно из табл. 1, при увеличении числа элементов дискретизации наблюдается сходимость вычислительного процесса как по напряжениям, так и по прогибу в точке приложения сосредоточенной нагрузки. В крайней правой колонке представлено известное линейное решение [24].

Из анализа данных табл. 1 можно сделать вывод, что разбиение 1/4 части исследуемой оболочки на 50 конечных элементов вполне достаточно, поэтому для решения задачи в нелинейной постановке было выбрано данное число элементов дискретизации.

Результаты расчетов в геометрически нелинейной постановке представлены в табл. 2: приведены «физические» значения нормальных напряжений σ_{22} и величина прогиба в точке приложения сосредоточенной силы в зависимости от числа шагов нагружения. Как видно из данной таблицы, с увеличением числа шагов нагружения наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса, как по напряжениям, так и по прогибу. В крайней правой колонке приведено значение прогиба под сосредоточенной силой P , взятое из [24]. Вычисленное по разработанному в статье алгоритму значение прогиба оказалось заниженным по сравнению с представленным в [24] всего на 1 %.

Кроме того, следует отметить, что при увеличении количества элементов дискретизации и числа шагов нагружения величина прогиба будет монотонно возрастать.

Заключение

На основании анализа табличных данных можно сделать вывод, что разработанный алгоритм позволяет получать приемлемые по точности значения параметров напряженно-деформированного состояния тонких оболочек с учетом деформаций сдвига при расчете их в геометрически нелинейной постановке.

Список литературы

1. *Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L.* Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells // *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2016. Vol. 10. Pp. 3–28.
2. *Крылова Е.Ю., Папкова И.В., Салтыкова О.А., Синичкина А.О., Крысько В.А.* Математическая модель колебаний размерно-зависимых цилиндрических оболочек сетчатой структуры с учетом гипотез Кирхгофа – Лява // *Нелинейный мир*. 2018. Т. 16. № 4. С. 17–28.
3. *Пятикрестовский К.П., Травиш В.И.* О программировании нелинейного метода расчета деревянных конструкций // *Academia*. Архитектура и строительство. 2015. № 2. С. 115–119.

4. *Ким А.Ю., Полников С.В.* Сравнение экспериментального и численного исследования большепролетного пневматического линзообразного сооружения // *Научное обозрение*. 2016. № 15. С. 36–41.

5. *Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М.* Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2016. № 1. С. 36–42.

6. *Козлов В.А.* Напряженно-деформированное состояние многосвязных призматических конструкций, закрепленных по скошенному сечению // *Научный журнал строительства и архитектуры*. 2015. № 4 (40). С. 11–17.

7. *Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Гаврюшин С.С.* Моделирование процесса деформирования и оценка несущей способности системы грунт – тонкостенная конструкция // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2014. № 6. С. 20–24.

8. *Игнатъев А.В., Игнатъев В.А., Гамзатова Е.А.* Расчет тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2018. № 3 (711). С. 5–13.

9. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит. 2006. 392 с.

10. *Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В.* Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно подкрепленных эллиптических цилиндрических композитных оболочек при кручении и внутреннем давлении // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2018. № 2. С. 27–34.

11. *Tyukalov Yu.Ya.* Finite element models in stresses for bending plates // *Инженерно-строительный журнал*. 2018. № 6 (82). С. 170–190.

12. *Аганов В.П., Айдемиров К.Р.* Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // *Промышленное и гражданское строительство*. 2016. № 11. С. 4–7.

13. *Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Аул А.А., Дмитриев Д.С., Дядченко Ю.Н., Нагибович А.И., Островский К.И., Павлов А.С.* Расчетное обоснование механической безопасности стадионов к чемпионату мира по футболу 2018 года // *Academia*. Архитектура и строительство. 2018. № 3. С. 118–129.

14. *Nguyen N., Waas A.M.* Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // *Z. Angew. Math. Phys.* 2016. No. 9(67). Pp. 351–352. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5>

15. *Lei Z., Gillot F., Jezequel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // *Int. J. Mech.* 2015. Vol. 54. Pp. 105–119.

16. *Hanslo P., Larson M.G., Larson F.* Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // *Comput. Mech.* 2015. Vol. 56. No. 1. Pp. 87–95.

17. *Yamashita Hirok, Valkeapaa Antti I., Jayakumar Paramsothy, Syqiyama Hiroyuki.* Continuum mechanics based

bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // *Trans. ASME. J. Comput. and Non-linear Dyn.* 2015. Vol. 10. No. 5. Pp. 051012/1–051012/9.

18. *Ren Hui*. Fast and robust full-guad-rature triangular elements for thin plates/ shells, with large deformations and large rotations // *Trans. ASME. J. Comput. and Non-linear Dyn.* 2015. Vol. 10. No 5. Pp. 051018/1–051018/13.

19. *Sartorato M., Medeiros R., Tita V.* A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation // *Compos. Struct.* 2015. No. 127(1). Pp. 185–198.

20. *Lalin V., Rybakov V., Sergey A.* The finite elements for design of frame of thin-walled beams // *Applied*

Mechanics and Materials. 2014. Vol. 578–579. Pp. 858–863. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>

21. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 248 с.

22. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. 574 с.

23. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с.

24. *Papenhausen J.* Eine energiegrechte, incrementelle for mulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finite Elemente // *Techn. – Wiss. Mitt. Inst. Konstr. Ingenierlau Ruhr. Univ. Bochum.* 1975. No. 13 III. 133 p.

RESEARCH PAPER

Accounting for geometric nonlinearity in finite element strength calculations of thin-walled shell-type structures

Yuriy V. Klochkov^{1*}, Anatoliy P. Nikolaev¹, Tlek R. Ishchanov¹,
Alexandr S. Andreev¹, Mikhail Yu. Klochkov²

¹Volgograd State Agricultural University, 26 Universitetskii Ave., Volgograd, 400002, Russian Federation

²Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gory, Moscow, 119899, Russian Federation

*klochkov@bk.ru

Article history:

Received: November 22, 2019

Revised: January 14, 2020

Accepted: January 25, 2020

Acknowledgements:

The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as part of the research project No. 19-41-343003 p_мол_a.

For citation

Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Ishchanov T.R., Andreev A.S., Klochkov M.Yu. Accounting for geometric nonlinearity in finite element strength calculations of thin-walled shell-type structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2020;16(1): 31–37. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37>. (In Russ.)

Abstract

Relevance. Currently, in connection with the wider spread of large-span thin-walled structures such as shells, an urgent issue is the development of computational algorithms for the strength calculation of such objects in a geometrically nonlinear formulation. Despite a significant number of publications on this issue, a rather important aspect remains the need to improve finite element models of such shells that would combine the relative simplicity of the resolving equations, allowance for shear deformations, compactness of the stiffness matrix being formed, the facilitated possibility of modeling and changing boundary conditions and etc. **The aim of the work** is to develop a finite element algorithm for calculating a thin shell with allowance for shear deformations in a geometrically nonlinear formulation using a finite element with a limited number of variable nodal parameters. **Methods.** As research tools, the numerical finite element method was chosen. The basic geometric relations between the increment of deformations and the increment of the components of the displacement vector and the increment of the components of the normal vector angle are obtained in two versions of the normal angle of the reference. The stiffness matrix and the column of nodal forces of the quadrangular finite element at the loading step were obtained by minimizing the Lagrange functional. **Results.** On the example of calculating a cylindrical panel rigidly clamped at the edges under the action of a concentrated force, the efficiency of the developed algorithm was shown in a geometrically nonlinear setting, taking into account the transverse shear strain.

Keywords: geometric nonlinearity; shell structure; step loading; nodal unknowns; quadrangular finite element; shear deformations, normal inclination

References

1. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications

Yuriy V. Klochkov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics; eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693, Scopus ID: 57170472500.

Anatoliy P. Nikolaev, Doctor of Technical Sciences, Professor; eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484, Scopus ID: 7202396806.

Tlek R. Ishchanov, Candidate of Technical Sciences, senior lecturer of the Department of Higher Mathematics; eLIBRARY SPIN-code: 1556-1368, AuthorID: 864483.

Alexander S. Andreev, senior lecturer of the Department of Higher Mathematics; eLIBRARY SPIN-code: 7568-5011, Scopus ID: 57209523986.

Mikhail Yu. Klochkov, 4th-year student of the Faculty of Physics; eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955, AuthorID: 971170.

to thin elliptic paraboloid shells. *The Open Construction and Building Technology Journal.* 2016;(10):3–28.

2. Krylova Ye.Yu., Papkova I.V., Saltykova O.A., Sinichkina A.O., Krys'ko V.A. Mathematical model of vibrations of the cylindrical shells, which are dimensionally dependent with the net structure, taking into account the Kirchhoff – Love hypotheses. *Nonlinear World.* 2018;16(4): 17–28. (In Russ.)

3. Pyatikrestovskiy K.P., Travush V.I. Nonlinear Method Programming for Calculations of Statically Indeterminate Wooden Structures and Software Systems' Communication to Development of Improved Design Standards. *Academia. Architecture and construction.* 2015;(2): 115–119. (In Russ.)

4. Kim A.Yu., Polnikov S.V. Comparing the experimental and computational investigations of longspan air lentiform structure. *Nauchnoe obozrenie [Scientific review]*. 2016;(15):36–41. (In Russ.)
5. Khayrullin F.S., Sakhibiev O.M. A method of determination of stress-strain state of 3D structures of complex form. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(1):36–42. (In Russ.)
6. Kozlov V.A. Stress and strain of multiply connected prismatic structures, mounted on a skewed cross-section. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2015;4(40):11–17. (In Russ.)
7. Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Gavryushin S.S. Modeling of the deformation process and evaluation of the bearing capacity of a thin-walled structure in the ground. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*. 2014;(6):20–24. (In Russ.)
8. Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Gazmatova E.A. Calculation of thin plates by the method of finite elements in the form of the classical mixed method with the exception of the movement of finite elements as a rigid whole. *News of Higher Educational Institutions. Building*. 2018;3(711):5–13. (In Russ.)
9. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnih elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]*. Moscow: Fizmatlit Publ; 2006. (In Russ.)
10. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nelineynoye deformirovaniye i ustoychivost' diskretno podkreplennykh ellipticheskikh tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri kruchenii i vnutrennem davlenii [Nonlinear Deformation and Stability of Discrete-Reinforced Elliptical Cylindrical Composite Shells under Torsion and Internal Pressure]. *Izv. VUZov. Aviatsionnaya tekhnika*. 2018;(2):27–34. (In Russ.)
11. Tyukalov Yu.Ya. Finite element models in stresses for bending plates. *Magazine of Civil Engineering*. 2018; 6(82):170–190. doi: 10.18720/MCE.82.16.
12. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of Trusses by Finite-Element Method with Due Regard for Geometric Non-Linearity. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and civil engineering]*. 2016;(11):4–7. (In Russ.)
13. Belostotskiy A.M., Akimov P.A., Aul A.A., Dmitriyev D.S., Dyadchenko Yu.N., Nagibovich A.I., Ostrovskiy K.I., Pavlov A.S. Analysis of Mechanical Safety of Stadiums for the World Cup 2018. *Academia. Architecture and construction*. 2018;(3):118–129. (In Russ.)
14. Nguyen N., Waas A. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. *Z. Angew. Math. Phys.* 2016; 9(67):351–352. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5>
15. Lei Z., Gillot F., Jezequel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *Int. J. Mech.* 2015;(54):105–119.
16. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Comput. Mech.* 2015;56(1):87–95.
17. Yamashita H., Valkeapaa A.I., Jayakumar P., Syqiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Trans. ASME. J. Comput. And Nonlinear Dyn.* 2015;10(5):051012,1–051012,9.
18. Ren H. Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations. *Trans. ASME. J. Comput. And Nonlinear Dyn.* 2015;10 (5):051018/1–051018/13.
19. Sartorato M., Medeiros R., Tita V. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Compos. Struct.* 2015;127(1):185–198.
20. Lalin V., Rybakov V., Sergey A. The Finite Elements for Design of Frame of Thin-Walled Beams. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;578–579:858–863. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.858>
21. Rikards R.B. *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin [Finite element method in the theory of shells and plates]*. Riga: Zinatne Publ.; 1988. (In Russ.)
22. Sedov L.I. *Mehanika sploshnoi sredi [Continuum mechanics]*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)
23. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek [Theory of thin shells]*. Saint Petersburg: Publishing House of Saint Petersburg University; 2010. (In Russ.)
24. Papenhausen J. Eine energiegrecchte, incrementelle for mulierung der geometrisch nichtlinearen Theorie elastischer Kontinua und ihre numerische Behandlung mit Hilfe finite Elemente. *Techn. – Wiss. Mitt. Inst. Konstr. Jngenierlau Ruhr. Univ. Bochum*. 1975;13(III):133.

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-38-44
УДК 624

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Геометрические характеристики деформированного состояния оболочек с ортогональной системой координат срединной поверхности

В.Н. Иванов*, **А.А. Шмелева***Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
i.v.ivn@mail.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 12 марта 2019 г.
Доработана: 22 октября 2019 г.
Принята к публикации: 13 декабря 2019 г.

Аннотация

Цель исследования заключается в выводе геометрических уравнений деформаций линейной теории оболочек в ортогональной несопряженной системе координат. В большинстве статей, учебных пособий и монографий по теории и методам расчета тонких оболочек рассматриваются оболочки, координатная система срединных поверхностей которых задается в линиях главных кривизн. Вывод геометрических уравнений деформированного состояния тонких оболочек в линиях кривизны подробно описан в монографиях по теории тонких оболочек В.В. Новожилова, К.Ф. Черных, А.П. Филин и других российских и зарубежных ученых. При выводе используются стандартные методы математического анализа, векторного анализа и дифференциальной геометрии. Для вывода уравнений деформаций в произвольной неортогональной системе координат срединной поверхности тонких оболочек используется метод тензорного анализа. На основе этих уравнений как частный случай приводятся уравнения деформаций оболочек в ортогональной несопряженной системе координат (не в линиях кривизны) срединной поверхности оболочки. В статье представлен вывод геометрических уравнений деформаций тонких оболочек в ортогональной несопряженной системе координат на основе дифференциальной геометрии поверхностей и векторного анализа (без использования методов тензорного анализа). При проведении преобразований применялись векторно-матричные формы уравнений. Такой подход может использоваться в учебных пособиях, так как в большинстве технических вузов основы тензорного анализа не даются.

Ключевые слова: теория тонких оболочек; геометрические уравнения; деформации; векторный анализ

Для цитирования

Иванов В.Н., Шмелева А.А. Геометрические характеристики деформированного состояния оболочек с ортогональной системой координат срединной поверхности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 38–44. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-38-44>

Введение

По теории и методам расчета тонких оболочек имеется обширная литература, начиная с классических трудов Г. Арона [1] и А. Лява [2]. Большой вклад в развитие теории и методов расчета внесли Российские ученые В.З. Власов, В.В. Но-

вожилов, К.Ф. Черных, А.Л. Гольденвейзер [3–8] и др.

Аналитические методы расчета тонких оболочек разработаны в основном для оболочек канонических форм: оболочек вращения, цилиндрических и конических оболочек, пологих оболочек, некоторых видов торсовых оболочек. Для оболочек неканонических (сложных) форм приходится использовать численно-аналитические, а чаще всего численные методы.

Наиболее используемым методом расчета пространственных конструкций в последнее время стал метод конечных элементов (МКЭ) [9–11]. На базе этого метода разработаны программные комплексы. В большинстве программных комплексов МКЭ

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента архитектуры и строительства Инженерной академии; ORCID iD: 0000-0003-4023-156X, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, AuthorID: 634311.

Шмелева Алиса Алексеевна, аспирант департамента строительства Инженерной академии.

© Иванов В.Н., Шмелева А.А., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

геометрия оболочки заменяется системой плоских элементов с узлами на поверхности оболочки, в расчетах не используются геометрические характеристики срединных поверхностей оболочки. Для оболочек сложной формы это может приводить к потере точности расчета НДС конструкции. Альтернативу МКЭ может составить вариационно-разностный метод (ВРМ) [11–13]. Оба метода (МКЭ и ВРМ) основаны на вариационном принципе минимума полной энергии деформаций конструкции в перемещениях [14–16].

В вариационно-разностном методе производные в функционале энергии деформаций заменяются разностными производными с использованием геометрических характеристик (коэффициентов квадратичных форм). Для вычисления геометрических характеристик в программный комплекс включается библиотека кривых и поверхностей, на основе которых формируются срединные поверхности оболочек и вычисляются необходимые геометрические характеристики.

В настоящее время на кафедре сопротивления материалов и расчета на прочность департамента строительства Инженерной академии РУДН разработан программный комплекс ВРМ на базе поверхностей с координатной системой в линиях главных кривизн, и комплекс дорабатывается для расчета оболочек с ортогональной несопряженной системой поверхностных координат.

1. Методика

Рассмотрим оболочки, срединная поверхность которых описывается ортогональной поверхностной системой координат, не являющихся в общем случае линиями кривизны (рис. 1).

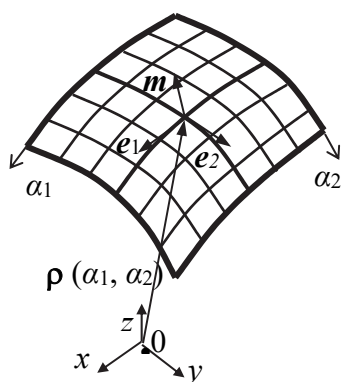


Рис. 1. Ортогональная система [Figure 1. Normal coordinate]

К данному классу поверхностей относятся, в частности, нормальные циклические поверхности – поверхности, образуемые движением окруж-

ности переменного радиуса в нормальной плоскости направляющей кривой (линии центров образующих окружностей) [13; 16–18]. Известно, что все поверхности имеют систему координат – главных линий кривизны. Однако получить уравнение поверхности в линиях кривизны не всегда удается. Для нормальных циклических поверхностей это приведет к более сложным уравнениям и формулам геометрических характеристик поверхности, так как вместо окружностей системой координатных линий будут пространственные кривые.

Единичные векторы касательных координатной сетки поверхности e_1, e_2 определяются формулой $e_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i}$; единичный вектор нормали к

поверхности $m = e_3 = e_1 \times e_2$. Здесь $A_i = \left| \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} \right|$ – коэффициенты 1-й квадратичной формы поверхности;

$\rho(\alpha_1, \alpha_2)$ – радиус-вектор поверхности.

Для системы единичных взаимно ортогональных векторов имеем $(e_i e_i) = 1$; $(e_i e_j) = 0$, и, следовательно, дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i e_j}{\partial \alpha_k} &= \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_k} e_j + \frac{\partial e_j}{\partial \alpha_k} e_i = 0; \\ \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_k} e_j &= -\frac{\partial e_j}{\partial \alpha_k} e_i; \quad \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_k} e_i = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2.$

Так как порядок дифференцирования для смешанных производных по координатам α_j ($j = 1, 2$) не должен влиять на результат, то получаем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha_j} \right)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (A_i e_i) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_j e_j),$$

откуда

$$\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} e_i + A_i \frac{\partial e_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} e_j + A_j \frac{\partial e_j}{\partial \alpha_i}.$$

Умножая полученное равенство скалярно на e_j , e_i с учетом соотношений (1), имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial e_i}{\partial \alpha_j} e_j \right) &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}; \\ \left(\frac{\partial e_i}{\partial \alpha_i} e_j \right) &= -\left(\frac{\partial e_j}{\partial \alpha_i} e_i \right) = -\frac{1}{A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $i, j = 1, 2$. Вторая формула (2) получена с учетом формул (1) при $k = i$.

Далее получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha_j} \mathbf{e}_3 \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha_i} \right) \mathbf{e}_3 = \\ &= \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i} \mathbf{e}_3 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_i} \right) A_i (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_3) = k_{ij} A_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $k_{ij} = \frac{1}{A_i A_j} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i} \mathbf{e}_3 \right)$ – кривизны и кручение координатных линий на поверхности; $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_i} \mathbf{e}_3 \right) = b_{ij}$ – коэффициенты 2-й квадратичной формы поверхности. Эти обозначения соответствуют: $b_{11} = L$, $b_{12} = M$; $b_{22} = N$; $k_{11} = L / A_1^2 = k_1$; $k_{22} = N / A_2^2 = k_2$, $k_{12} = M / AB$.

Коэффициенты квадратичных форм отвечают условиям Гаусса – Кодаци [10]:

$$\begin{aligned} k_i \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial k_j A_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (k_{12} A_i^2), \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \right) &= A_i A_j (k_i k_j + k_{12}^2), \end{aligned} \quad (4)$$

$i, j = 1, 2, i \neq j$.

Для общей ортогональной системы координат $k_{12} \neq 0$ кривизны координатных линий k_1, k_2 не являются главными кривизнами поверхности. Для поверхности в линиях кривизны $k_{12} = 0$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha_j} \mathbf{e}_j \right) &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} = p_i; \\ \left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_j \right) &= - \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_i \right) = -p_j; \\ \left(\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_1} \mathbf{m} \right) &= - \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_1} \mathbf{e}_1 \right) = k_1 A_1 = q_1; \\ \left(\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_2} \mathbf{m} \right) &= - \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_2} \mathbf{e}_1 \right) = k_{12} A_2 = t_1; \\ \left(\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_1} \mathbf{m} \right) &= - \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_1} \mathbf{e}_2 \right) = k_{12} A_1 = t_2; \\ \left(\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \alpha_2} \mathbf{m} \right) &= - \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \alpha_2} \mathbf{e}_2 \right) = k_2 A_2 = q_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, введены обозначения

$$p_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}; \quad q_i = k_i A_i; \quad t_i = k_{12} A_j; \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \quad (6)$$

Введем вектор орт поверхностной системы координат $\{\mathbf{e}\}^* = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; * – транспонирование вектора (матрицы).

С учетом формул (1), (2), (5), (6), получим векторно-матричную формулу дифференцирования орт поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\mathbf{e}\}^*}{\partial \alpha_i} &= [d_i] \{\mathbf{e}\}^*, \quad i = 1, 2; \\ [d_1] &= \begin{bmatrix} 0 & -p_2 & q_1 \\ p_2 & 0 & t_2 \\ -q_1 & -t_2 & 0 \end{bmatrix}; \\ [d_2] &= \begin{bmatrix} 0 & p_1 & t_1 \\ -p_1 & 0 & q_2 \\ -t_1 & -q_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Вывод компонентов деформаций оболочки

Рассмотрим деформированную срединную поверхность оболочки. Обозначим через $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2)$ вектор упругого смещения срединной поверхности оболочки. Развернув его по осям основного триэдра (рис. 2), запишем

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \{u\}^* \{\mathbf{e}\}^*, \quad (8)$$

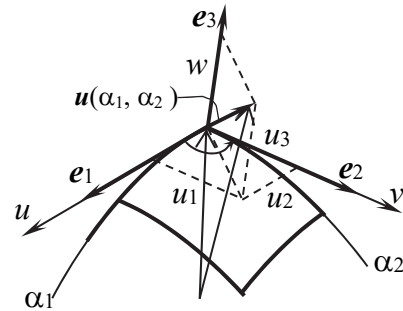


Рис. 2. Перемещения точки срединной поверхности [Figure 2. Development of a point of middle surface]

Радиус-вектор точки деформированной поверхности

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{u}. \quad (9)$$

С учетом формул (1) – (6) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \alpha_i} &= \mathbf{e}_i + \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial \{u\}^*}{\partial \alpha_i} \{\mathbf{e}\}^* + \{u\}^* [d_i] \{\mathbf{e}\}^* \right) = \\ &= \left[1 + \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^i] \right) \right] \mathbf{e}_i + \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^j] \right) \mathbf{e}_j + \\ &+ \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^3] \right) \mathbf{e}_3 = (1 + \varepsilon_i) \mathbf{e}_i + \gamma_i \mathbf{e}_j - \vartheta_i \mathbf{e}_3; \end{aligned} \quad (10)$$

$\bar{\rho}$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^i] \right) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - k_i u_3; \\ \omega_i &= \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^j] \right) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i - k_{12} u_3; \\ \vartheta_i &= -\frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} + \{u\}^* [d_i^k] \right) = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} - k_i u_i - k_{12} u_j;\end{aligned}\quad (11)$$

$$i, j = 1, 2; i \neq j; k = 3,$$

где ε_i – относительные деформации растяжения (сжатия) срединной поверхности оболочки в направлении координаты α_i . Параметр ω_i определяет поворот касательной координатной линии (вектора e_i) деформированной срединной поверхности вокруг нормали по направлению к вектору e_j относительно начального положения (недеформированной поверхности). Параметр ϑ_i определяет вращение векторов e_i, e_3 в нормальной плоскости к вектору e_j .

Суммируя ω_1, ω_2 , получаем деформацию сдвига деформированной срединной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} = \varepsilon_3 = \omega_1 + \omega_2 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 + \\ &+ \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 - 2k_{12} u_3 = \\ &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) - 2k_{12} u_3.\end{aligned}\quad (12)$$

Полуразность параметров ω_1, ω_2 определяет угол поворота орт деформированной срединной поверхности оболочки вокруг нормали e_3 (положительный угол вращения против часовой стрелки):

$$\omega_3 = \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2 A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 u_1}{\partial \alpha_2} \right).\quad (13)$$

По аналогии с вектором перемещений введем вектор углов поворота координатной системы деформированной срединной поверхности оболочки относительно начальной координатной системы срединной поверхности (положительное вращение против часовой стрелки).

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 = \{\theta\}^* \{e\}, \\ \{\theta\}^* &= \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \},\end{aligned}\quad (14)$$

где $\theta_1 = -\vartheta_2; \theta_2 = \vartheta_1$ или $\omega_i = (-1)^i \vartheta_j, i, j = 1, 2; i \neq j; \theta_3 = \omega_3$.

Учитывая параметры вращения векторов исходной координатной системы срединной поверхности при деформировании, получим векторы касательных и нормали к деформированной срединной поверхности:

$$\tilde{e}_i = e_i + \omega_i e_j - \vartheta_i e_3, \quad i, j = 1, 2;$$

$$\tilde{e}_3 = \vartheta_1 e_1 + \vartheta_2 e_2 + e_3.\quad (15)$$

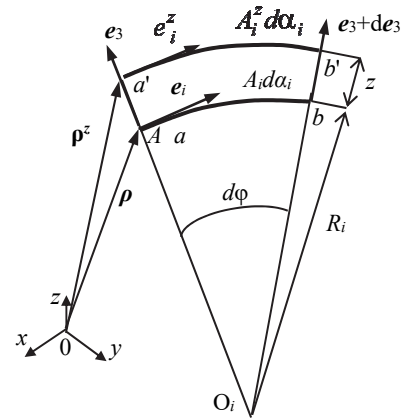


Рис. 3. Геометрия срединной и параллельной поверхностей [Figure 3. Geometry of middle and parallel surfaces]

Формулы (11), (12) определяют деформации срединной поверхности оболочки. Отметим, что формулы деформаций срединной поверхности оболочки с произвольной ортогональной системой координат отличаются от формул оболочки в линиях кривизны только в деформациях сдвига – учитывается влияние кривизны кручения срединной поверхности k_{12} .

Для получения деформаций в произвольной точке оболочки рассмотрим геометрию и перемещения точек поверхности параллельной срединной поверхности оболочки, отстоящей от срединной поверхности на величину z ($z = \{-h/2 \div h/2\}$) (рис. 3).

$$\rho^z(\alpha_1, \alpha_2) = \rho(\alpha_1, \alpha_2) + z \cdot e_3;\quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho^z}{\partial \alpha_i} = A_i e_i - z(q_i e_i + t_j e_j) = A_i [(1 - zk_i) e_i - zk_{12} e_j];$$

$$A_i^z \approx A_i (1 - zk_i);\quad (17)$$

$$F^z = -zk_{12} A_i A_j [(1 - zk_1) + (1 - zk_2)] \approx -2zk_{12} A_i A_j \neq 0;$$

$$e_i^z = \frac{A_i}{A_i^z} [(1 - zk_1) e_i - zk_{12} e_j] \approx e_i - zk_{12} e_j;\quad (18)$$

$(e_i^z e_j^z) = -2zk_{12}^2 \neq 0$ – координатная система поверхности параллельной срединной поверхности оболочки не в линиях кривизны, не ортогональна.

$$e_m^z = e_3^z = (e_i - zk_{12}e_j) \times (e_j - zk_{12}e_i) = e_m.$$

Кривизна параллельной поверхности определяется формулой

$$R_i^z = R_i + z, \quad k_i^z = \frac{1}{R_i^z} = \frac{1}{R_i + z} = \frac{k_i}{1 + k_i z}. \quad (19)$$

Пусть смещение точки параллельной поверхности определяется вектором

$$u^z = u_1^z e_1 + u_2^z e_2 + u_3^z e_3. \quad (20)$$

Согласно теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява, точка оболочки, находящаяся на расстоянии z по нормали от точки a срединной поверхности оболочки, остается на том же расстоянии z от точки перемещения срединной поверхности a_u по направлению нормали к деформированной срединной поверхности (рис. 4).

Из рис. 4 следует $z \cdot e_3 + u^z = u + z \cdot \tilde{e}_3$, откуда $u^z = u + z \cdot (\tilde{e}_3 - e_3)$ или с учетом формулы (15)

$$u^z = u + z \cdot (g_1 e_1 + g_2 e_2). \quad (21)$$

С учетом гипотез Кирхгофа – Лява деформации поверхности параллельной срединной поверхности изменяются по линейному закону:

$$\varepsilon_i^z = \frac{A_i}{A_i^z} (\varepsilon_i + z\chi_i); \quad i = 1, 2;$$

$$\varepsilon_3^z = \omega_1^z + \omega_2^z = \frac{A_1}{A_1^z} (\omega_1 + z\tau_1) + \frac{A_2}{A_2^z} (\omega_2 + z\tau_2). \quad (22)$$

Здесь параметры χ_i характеризуют приращение углов поворота θ_i нормали к деформированной срединной поверхности вдоль координаты, перпендикулярной вектору вращения θ_i , – параметры изменения кривизн координатных линий при деформировании срединной поверхности:

$$\chi_i = (-1)^j \frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i} e_j = (-1)^j \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \omega_i - k_{12} \omega_3 \right) =$$

$$= (-1)^j \left(\frac{(-1)^j}{A_i} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_i} - \frac{(-1)^i}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} g_j - k_{12} \omega_3 \right);$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} g_2 - k_{12} \omega_3;$$

$$\chi_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial g_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} g_1 + k_{12} \omega_3. \quad (23)$$

Параметры τ_1, τ_2 характеризуют кручение ординатных линий при деформировании оболочки. Проводя дифференцирование перемещений параллельной поверхности (21) по аналогии с перемещениями срединной поверхности (10), получим:

$$\tau_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial g_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} g_j, \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (24)$$

Учитывая формулы Гаусса – Кодацци (11), можно показать, что

$$\tau_1 - k_1 \omega_2 + k_{12} \varepsilon_1 = \tau_2 - k_2 \omega_1 + k_{12} \varepsilon_2 = \tau. \quad (25)$$

Выводы

Сравнивая формулы (11) – (13), (23) – (25) функций, характеризующих деформированное состояние тонких оболочек, с сопоставимыми формулами для оболочек с ортогональной несопряженной системой координат, полученными на основе методов тензорного анализа в монографиях [6–8], отмечаем их аналогию. Отличия обнаруживаются только в принятых обозначениях.

Таким образом, в статье получены формулы деформаций тонких оболочек со срединной поверхностью с ортогональной несопряженной системой координат. При выводе уравнений использовались матрично-векторные формы дифференцирования уравнения поверхности (7), что позволяет более компактно и удобно провести необходимые преобразования. Матрично-векторная форма обоснована в работе [19] при выводе уравнений равновесия тонких оболочек со срединными поверхностями в ортогональной несопряженной системе координат. Полученные формулы деформаций срединной поверхности справедливы для оболочек со срединной поверхностью в линиях кривизны – $k_{12} = 0$. Приведенные преобразования могут использоваться в учебных пособиях по теории оболочек.

Список литературы

1. Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dunnen beliebig gekrummten elastischen Schale // J. fur reine und angew, Math. 1874. Bd. 78. Pp. 136–174.
2. Love A. The small free vibrations and deformation of thin elastic shell // Pfill. Transs Roy. Soc. 1888. Vol. 179 (A). Pp. 491–546.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.;Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: ГСИСП, 1962. 432 с.
5. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Общая теория оболочек. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1962. 274 с.

6. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1964. 296 с.
7. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек: монография. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
9. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ицанов Т.Р. Сравнительный анализ скалярной и векторной форм аппроксимации в МКЭ и на примере соотношений В.В. Новожилова для эллиптического цилиндра // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 2. С. 51–57.
10. Клочков Ю.В., Вахнина О.В., Киселева Т.А. Расчет тонких оболочек на основе треугольного конечного элемента с корректирующим множителем Лагранжа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 5. С. 55–59.
11. Иванов В.Н. Основы метода конечных элементов и вариационно-разностного метода: учебное пособие. М.: Изд-во РУДН, 2008. 170 с.
12. Иванов В.Н., Кривошапка С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: монография. М.: Изд-во РУДН, 2010. 542 с.
13. Иванов В.Н., Наср Юнес Аббуши. Расчет оболочек сложной геометрии вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 9. М.: АСВ, 2000. С. 25–34.
14. Абовский А.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
15. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1968. 4512 p.
16. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 752 p.
17. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование нормальных поверхностей с семейством плоских координатных линий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 4. С. 6–14.
18. Иванов В.Н., Шмелева А.А. Геометрия и формообразование тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 3–8.
19. Иванов В.Н. Расчет оболочек неканонической формы: учебно-методический комплекс. М.: РУДН, 2013. 108 с.

RESEARCH PAPER

Geometric characteristics of the deformation state of the shells with orthogonal coordinate system of the middle surfaces

Vyacheslav N. Ivanov*, Alisa A. Shmeleva

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation
*i.v.ivn@mail.ru

Article history:

Received: March 12, 2019

Revised: October 22, 2019

Accepted: December 13, 2019

Abstract

The aim of this work is to receive the geometrical equations of strains of shells at the common orthogonal not conjugated coordinate system. At the most articles, textbooks and monographs on the theory and analysis of the thin shell there are considered the shells the coordinate system of which is given at the lines of main curvatures. Derivation of the geometric equations of the deformed state of the thin shells in the lines of main curvatures is given, specifically, at monographs of the theory of the thin shells of V.V. Novozhilov, K.F. Chernih, A.P. Filin and other Russian and foreign scientists. The standard methods of mathematic analyses, vector analysis and differential geometry are used to receive them. The method of tensor analysis is used for receiving the common equations of deformation of non orthogonal coordinate system of the middle shell surface of thin shell. The equations of deformation of the shells in common orthogonal coordinate system (not in the lines of main curvatures) are received on the base of this equation. Derivation of the geometric equations of deformations of thin shells in orthogonal not conjugated coordinate system on the base of differential geometry and vector analysis (without using of tensor analysis) is given at the article. This access may be used at textbooks as far as at most technical institutes the base of tensor analysis is not given.

Keywords: theory of thin shells; geometric equations; deformations; vector analysis

For citation

Ivanov V.N., Shmeleva A.A. Geometric characteristics of the deformation state of the shells with orthogonal coordinate system of the middle surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1): 38–44. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-38-44>. (In Russ.)

Vyacheslav N. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Civil Engineering, Engineering Academy; ORCID iD: 0000-0003-4023-156X, ELIBRARY SPIN-code: 3110-9909.

Alisa A. Shmeleva, graduate student of Department of Civil Engineering, Engineering Academy.

References

1. Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dunnen beliebig gekrummten elastischen Schale. *J. fur reine und angew, Math.* 1874;78:136–174.
2. Love A. The small free vibrations and deformation of thin elastic shell. *Pfill. Transs Roy. Soc.* 1888;179(A): 491–546.
3. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tekhnike* [General theory of shells and its application at technology]. Moscow; Leningrad: Gostehizdat Publ.; 1949. (In Russ.)
4. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkih obolochek* [Theory of thin shells]. Leningrad: GSIPS Publ.; 1962. (In Russ.)
5. Chernih C.F. *Linejnaya teoriya obolochek. Chast' 1. Obshchaya teoriya obolochek* [Linear theory of shells. Part 1. Total theory of shells]. Leningrad: Leningrad University; 1962. (In Russ.)
6. Chernih C.F. *Linejnaya teoriya obolochek. Chast' 2. Nekotorye voprosy teorii* [Linear theory of shells. Part 2. Some question of theory]. Leningrad: Leningrad University; 1964. (In Russ.)
7. Goldeveizer A.L. *Teoriya uprugih tonkih obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)
8. Novozhilov V.V., Chernih K.F., Michailovskiy E.I. *Linejnaya teoriya tonkih obolochek* [Linear theory of thin shells]; monograph. Leningrad: Politehnika Publ.; 1991. (In Russ.)
9. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.H., Ishchanov T.R. Comparative analysis of scalar and vector forms of approximations in a FEM after the V.V. Novozhilov's relations for elliptic cylinders. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2015;(2):51–57. (In Russ.)
10. Klochkov Yu.V., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Calculation of thin shells on the basis of the triangular final element with the correcting Lagrange's coefficients. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2015;(5):55–59. (In Russ.)
11. Ivanov V.N. *The base of finite element method and variation-difference method*: textbook. Moscow: RUDN University Publ.; 2008. (In Russ.)
12. Ivanov V.N., Krivoshapko S.N. *Analiticheskie metody rascheta obolochek nekanonicheskoy formy* [Analytical methods for calculating shells of non-canonical form]: textbook. Moscow: RUDN Publ.; 2010. (In Russ.)
13. Ivanov V.N., Abbushy N.U. Raschet obolochek slozhnoj geometrii variacionno-raznostnym metodom [Analysis of the complex geometry using the variational-difference method]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings: Intercollegiate collection of scientific papers.* 2000;(9):25–34. (In Russ.)
14. Abovskiy A.P., Andreev N.P., Deruga A.P. *Variacionnye principy teorii uprugosti i teorii obolochek* [Variation principle of the theory of elasticity and theory of the shells]. Moscow: Nauka Publ.; 1978. (In Russ.)
15. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity.* Oxford: Pergamon Press; 1968.
16. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces.* Switzerland: Springer International Publishing; 2015.
17. Ivanov V.N. Geometry and forming of the normal surfaces with system of plane coordinate lines. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2011;(4):6–14. (In Russ.)
18. Ivanov V.N., Shmeleva A.A. Geometry and formation of the thin-walled space shell structures on the base of normal cyclic surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2016;(6):3–8. (In Russ.)
19. Ivanov V.N. *Raschet obolochek nekanonicheskoy formy* [Analyses of the shells of noncanonic forms]: textbook complex. Moscow: RUDN Publ.; 2013. (In Russ.)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-45-53
UDC 69:624.074:624.012.4

RESEARCH PAPER

Study of modern software capabilities for complex shell analysis

Marina I. Rynkovskaya^{1*}, Timur Elberdov¹, Enes Sert², Andreas Öchsner²

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation
Esslingen University of Applied Sciences, 33 Kanalstrasse, Esslingen, 73728, Federal Republic of Germany

*marine_step@mail.ru

Article history:

Received: September 27, 2019

Revised: October 12, 2019

Accepted: December 20, 2019

Acknowledgements:

The reported study was funded by German Academic Exchange Service (DAAD) within the program “Michael Lomonosov” (57447934) and Russian Ministry of Education and Science (7.13408.2019/13.2).

For citation

Rynkovskaya M.I., Elberdov T., Sert E., Öchsner A. Study of modern software capabilities for complex shell analysis. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1): 45–53. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-45-53>. (In Russ.)

Abstract

Relevance. In design and calculation of civil engineering structures, several standard commercial software packages, which are successfully applied to solve everyday engineering problems, are traditionally used. However, when it is necessary to design the models of complex shape shell structures with defining surfaces based on parametric equations, such programs often have certain drawbacks. **The aim of the work** – analysis of existing types of commercial computational software packages in order to check which allow to design finite element models for shell structures with median surfaces of complex geometry given by parametric equations. **Methods.** The analysis of commercial computational software packages is carried out by studying the software manuals, and by building and calculating a model in the shape of a right helicoid as a test example. To evaluate the results of the stress-strain state of a shell with a middle surface in the form of a right helicoid, an analytical calculation method based on the Reissner's equations and Fourier series expansion is used. **Results.** A review of modern commercial computational software packages as applied to models defined by parametric equations is carried out. A model for a shell structure with a median surface in the form of right helicoid is built. The numerical results of stress-strain behavior of the right helicoid are obtained and analyzed in comparison with the analytical solutions obtained using the Reissner's equations with Fourier series expansion. The pros and cons of several popular means of software are presented.

Keywords: parametric form of surface assignment; CAD software Creo Parametric; ANSYS Workbench; SCAD Office; Autodesk Robot Structural Analysis; computer simulation; shell of a complex geometry; right helicoid; Reissner's equations

Introduction

In engineering design of building structures in Russia, commercial computational software packages

such as Structural CAD and Lira-SAPR, which are well studied by designers, are usually used. However, sometimes the designers and researchers need to define the complex geometry of a shell structures by defining them in parametric form (by parametric equations); the importance of the accuracy in defining the geometry of the structures and some examples for differences in stress-strain behavior of the structures with different defining equations are shown in [1–3]. In such a case, especially in the case of carrying out verification calculations for scientific purposes, the above-mentioned commercial software packages have certain disadvantages. At the same

Marina I. Rynkovskaya, PhD, Docent, Associate Professor at the Department of Civil Engineering, Engineering Academy; ORCID iD: 0000-0003-2206-2563, eLIBRARY SPIN-code: 9184-7432.

Timur Elberdov, master student at the Department of Civil Engineering, Engineering Academy.

Enes Sert, Master of Engineering, PhD student at the Faculty of Mechanical Engineering.

Andreas Öchsner, DSc, Professor at the Faculty of Mechanical Engineering; Scopus ID: 57195537634.

© Rynkovskaya M., Elberdov T., Sert E., Öchsner A., 2019

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

time, software systems such as Comsol, Code-Aster, etc. are not well-known to the researchers. Therefore, this article offers a review and analysis of existing design and calculation programs to identify the most convenient ones to use for calculating shell structures of complex geometry. The aim of this work is to review a number of popular commercial software packages as applied to designing the shell structures of a complex geometry which are defined by parametric equations and to test the selected ones by creating models and calculating the stress-strain state of a screw structure in the form of a right helicoid.

The main stages of the task should be formulated as follows: the search for programs that implement modeling shells of complex shape; learning the basic functionality of the programs, reference materials and manuals; selection of programs for complex shells modelling and simulation; modelling and simulation of a test example – a shell in the shape of a right helicoid; results verification by analytical solution.

As a result of the first stage of research, the following software packages have been selected: Code-Aster, Autodesk Robot Structural Analysis 2018, ANSYS Workbench R19.1 along with CAD software Creo Parametric 4.0, SOFiSTiK AG, COMSOL Version 5.5.0.306, SCAD Office 21.1.1.1, Lira-SAPR 2013.

1. Software products for calculating shell structures of complex geometry

Code-Aster is an open software package that is based on the finite element method (FEM), distributed under the GNU General Public License, and certified specifically for the French energy industry (including calculation of building structures, foundations, etc.) [4]. To a large extent, Code Aster is a processor (solver) – a program in which matrices are formed for individual finite elements, global matrices are formed for the model as a whole, systems of resolving equations for the model as a whole are formed, systems of resolving equations are solved, arrays are formed calculation results for individual finite elements and the model as a whole. It also has the basic functions of a preprocessor (defining geometry, external influences, etc.) and a postprocessor (displaying calculation results in graphical form and generating various reports with calculation results). Code-Aster can be considered as a general-purpose processor (solver) for analyzing the stress-strain state of complex solid-state systems [5]. However, the functions of constructing geometry in Code Aster are quite primitive, while the geometry of models in real-life problems can be complex, that lead to the necessity to use special software products (called preprocessors) for preliminary modelling.

Autodesk Robot Structural Analysis Professional is an integrated graphics software designed to calculate and design various types of structures. Autodesk Robot Structural Analysis Professional allows to create a structural model, perform static, dynamic structural calculations, to check the results, perform calculations of individual structural elements according to standards, and also prepare documentation on the results of calculation and design [6]. When working in the program, one can use many types of elements in terms of complexity and material. Slabs and shells are defined using the contours and the purpose of the slab properties. Such elements are used for plates, walls, cylinders, arches, domes or any surface elements [7]. It is also stated in the manual that the software package has the possibility of parametric surface modelling [8].

ANSYS is a universal FEM based software system, existing and developing over the past 30 years, that is quite popular among experts in the field of automated engineering calculations and finite elements for solving linear and nonlinear, stationary and non-stationary problems of deformable solids and structural mechanics (including non-stationary geometrically and physically nonlinear problems of contact interaction of structural elements), problems of fluid and gas mechanics, heat transmission and heat transfer, electrodynamics, acoustics, as well as mechanics of related fields [9]. The main advantages of the ANSYS software products are a high degree of integration of individual applications, an intuitive interface and support for high-performance computing. ANSYS software products can be classified based on the physical disciplines and engineering applications to which they are oriented: computational fluid dynamics, mechanics of a deformable solid, electromagnetism, thermal analysis, multidisciplinary analysis. In addition, ANSYS software products include specialized applications for the preparation of computational models, work with geometry and FE-grids, modeling at the system level, optimization and management of engineering data [10]. The parametric surfaces can also be modelled by the package, however in most cases designing engineers prefer to use preliminary modelling in other software packages such as, for example, CAD software Creo Parametric 4.0 with further import into ANSYS Workbench R19.1.

SOFiSTiK is an integrated software package of FE analysis for civil engineering structures, buildings, bridges, tunnels, and solving geotechnical problems. The software package has a certificate of compliance with the design standards of the Russian Federation, allows to create parametric data sets for its modules in the macro language. It is stated that the software

allows to input graphical interactive geometry in AutoCAD modeling, exporting and importing FE from various preprocessors, modeling, import and export of structural elements from various preprocessors, automatic FE mesh generation, graphic, interactive system for generating 3D arrays of volumetric FE (including tunnels), including an interface to any SOFiSTiK solver [11]. However, this software requires more investigation because, despite the fact that its certification in the Russian Federation is approved, it is difficult to find supporting materials about the program in Russia.

COMSOL Multiphysics is a universal environment for the numerical simulation of systems, devices and processes in all areas of design, production and scientific research. The software includes all stages of modeling: from creating geometry, determining the properties of materials and describing physical phenomena, to customizing the solution and the post-processing process, which allows to get accurate and reliable results [12]. To solve applied engineering problems, Comsol can be supplemented with special expansion modules, for example, Wave Optics, Semiconductors, Heat Transfer, Electrochemistry modules, or modules for solving construction problems, Structural Mechanics and Design.

The “Design” module expands the functionality of geometric modeling of COMSOL Multiphysics software with additional tools for creating geometric elements and importing CAD files in various formats. The basic COMSOL Multiphysics package contains geometric modeling tools for creating geometry elements based on solids, surfaces, curves, and Boolean operations [12]. The program can build surfaces in a parametric way of setting, for which the function “Parametric surface” is used. The ability to specify parametric surfaces is directly approved on the official website of the representative office in the Russian Federation.

Structural CAD Office (SCAD) is a software package designed for the strength analysis of building structures using FEM, as well as their design according to existing building codes [13; 14]. The complex consists of the main program – SCAD, which implements the FE calculation, as well as almost a dozen auxiliary programs that help the engineer at all stages of his/her work. One of the main advantages of SCAD is the ability to construct not only simple shells of revolution, but also shells of complex geometry, while the program allows you to use both analytical and parametric methods for determining the surface.

Currently, Lira-SAPR is one of the most popular commercial software packages in Russia. The popu-

larity of the Lira-SAPR software is explained by an excellent balance of theoretical capabilities and convenient tools necessary in everyday work [15]. Lira-SAPR also implements the FEM, while, unlike SCAD, it is possible to take into account not only geometric, but also physical nonlinearity. On the other hand, there is no convenient possibility to construct shells using surface equations. Meanwhile, one of the main advantages of Lira-SAPR is the ability to export from the SAPPFIR software – a full-fledged architectural system in which even complex architectural objects can be designed. Moreover, from the very beginning it was developed with the expectation of the subsequent transformation of architectural objects into design schemes.

After a review of the well-known computational software packages, ANSYS Workbench R19.1, Structural CAD and Autodesk Robot Structural Analysis have been selected for this paper analysis, and it has been preliminarily concluded that in some cases it is necessary to use specific software tools with model creation functions by setting parametric equations of a complex geometry surface or import the models from parametric software into the software with strong capabilities for simulation.

2. Modelling and simulation of right helicoid in CAD software Creo Parametric 4.0 and ANSYS Workbench R19.1

As a test example for creating a model and calculating the stress-strain state of the corresponding shell of complex geometry defined by parametric equations, a helical structure in the form of a right helicoid (Figure 1) has been chosen. This surface is formed by the translational and rotational motion of a rectilinear generatrix intersecting the axis of the surface at right angle. The parametric equations for a right helicoid can be taken as follows [16]:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) = u \cos v, \\y &= y(u, v) = u \sin v, \\z &= z(v) = cv,\end{aligned}\tag{1}$$

where c is the displacement of the generator AB upon its rotation by 1 radian; u , v are curvilinear coordinates of the point C of the helicoid; u is the distance from point C to axis z ; v is the rotation angle of generator AB from the plane zOx to the point C .

The parameters of a tested model are the following: Young’s modulus $E = 2 \times 10^5$ MPa; Poisson’s ratio $\nu = 0.3$; thickness $h = 0.01$ m; screw pitch $H = 0.628$ m; inner radius $r = 5$ m; outer radius $R = 6.7$ m; half of a screw ($v = 0 \dots \pi$); uniformly distributed load $q = 10^{-2}$ MPa; rigidly clamped

edges. In order to perform a numerical calculation of the right helicoid, a reference curve was first designed with the above equation. The CAD software Creo Parametric 4.0 was used for the design. The simulation was performed with the commercial FE code ANSYS Workbench R19.1. The helicoid was suppor-

ted with a fixed support at the edges and the surface was loaded with a compressive stress of 0.01 MPa. Figure 2 shows the displacements along the z axis in a right helicoid. In order to validate the results, a flat surface (slab) (Figure 3) and a beam (Figure 4) were also considered.

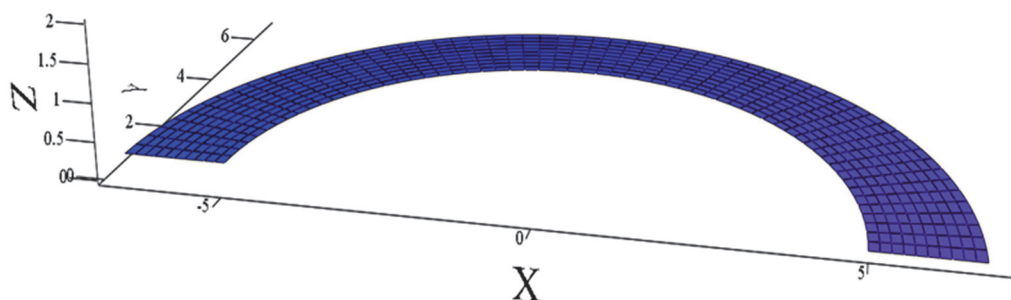


Figure 1. A part of a right helicoid

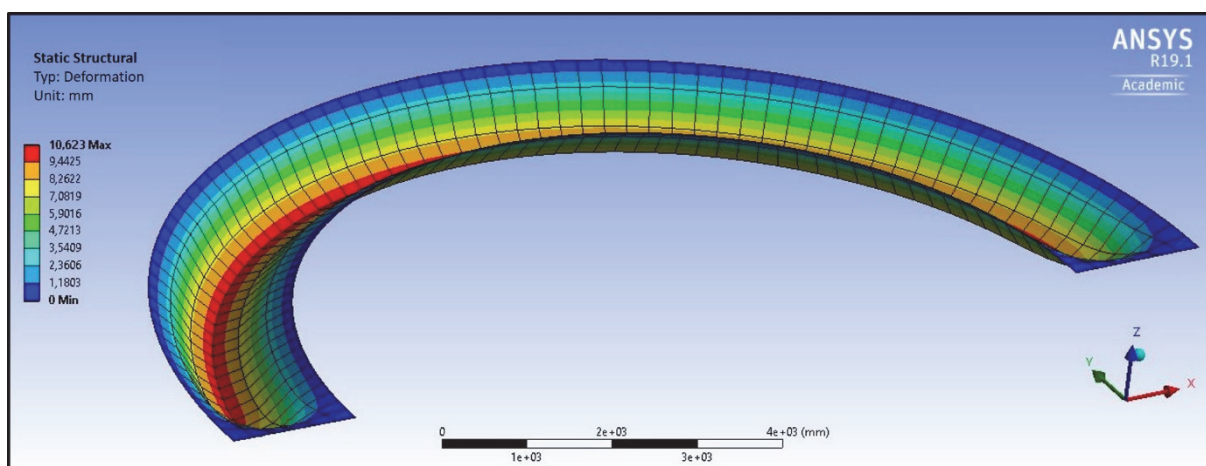


Figure 2. Displacements along z in a helicoid obtained by ANSYS Workbench R19.1 (mm)

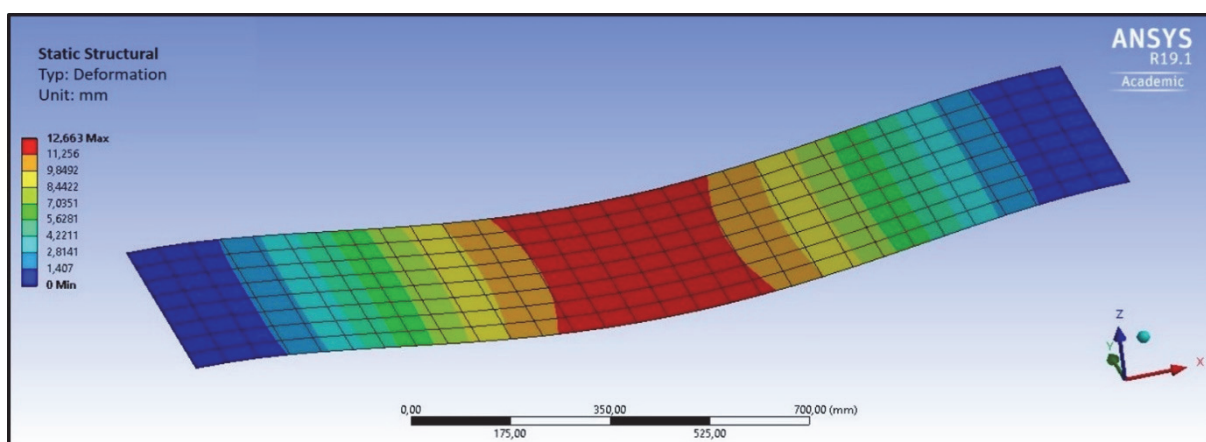


Figure 3. Displacements along z in a plate obtained by ANSYS Workbench R19.1 (mm)

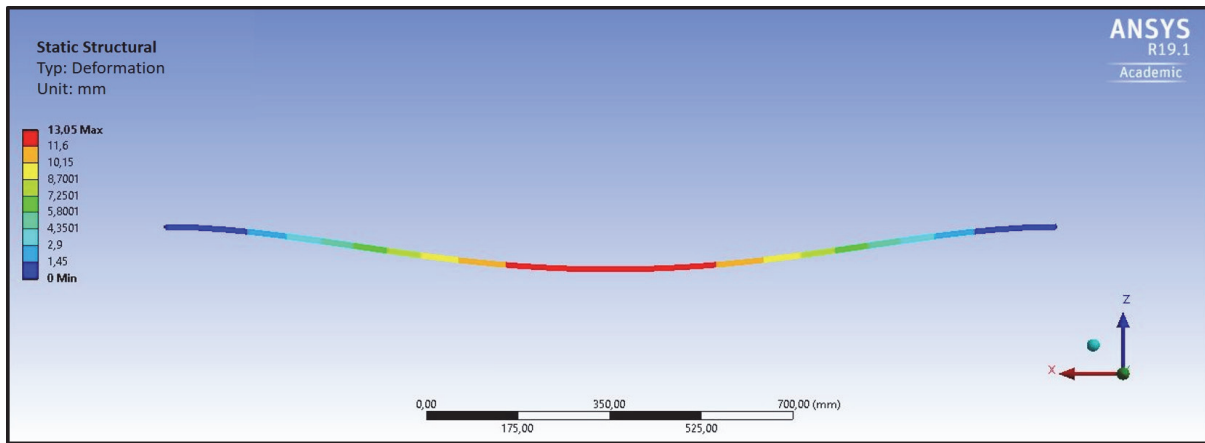


Figure 4. Displacements along z in a beam obtained by ANSYS Workbench R19.1 (mm)

The simplified results show the same tendency (Figures 3 and 4). The differences coincide with engineering logic and structural behavior of these three types of a structure: a beam, a plate, a shell. The reliability of the results can be concluded from the tendency.

3. Modelling and simulation of right helicoid in SCAD

As it has been mentioned above that one of the main advantages of SCAD Office 21.1.1.1 is the ability to construct not only simple shells of revolution, but also shells of complex geometry, and the program allows to use both analytical and parametric methods for specifying the surface.

In order to build a right helicoid, the parametric equations (1) can be used, and the parameters can be defined as follows: $u \in [5 \text{ m}; 6.7 \text{ m}]$, $v \in [0; 180^\circ]$, $c = 0.05$.

To build a shell in the SCAD software the function “Create a surface using a given formula” from the “Scheme” panel is used. There are two tabs in the particular menu: “Surface given by formula” and “Parametric surface”. The first one allows to define the surface analytically using equations of the form $y = f(x, y)$. The second one sets the surface in a parametric way. Both tabs contain fields in which it is allowed to set the stiffness of the created shell, the type of partition of the FE mesh, and its density. For construction of the test model the tab “parametric surface” have been used.

It should be mentioned here that the SCAD software requires specific characteristics for writing a parametric equation, for example, the SCAD takes only the letters s and t as parameters, taking their values in the interval $[0; 1]$, and the variable s sequentially takes the values $0.1 / N_s, 2 / N_s, \dots, 1$, and the variable t – respectively $0, 1 / N_t, 2 / N_t, \dots, 1$, where N_s and N_t are the number of steps for the corresponding va-

riables. Because of this, in cases where the parameters of the equations lie in other intervals (that is, almost always), they must be expressed in terms of the interval $[0; 1]$. Often this creates difficulties and confusion in writing equations, especially in complex surfaces.

It is also necessary to use a dot as a separator of the fractional and integer parts of the number, the arguments of trigonometric functions must be in degrees, even if cylindrical or spherical coordinates are used in the equations. Moreover, in the case of an error in writing equations, sometimes the SCAD does not warn about it – the program can build an incorrect surface even when its own rules for writing are violated (for example, a comma is written instead of a dot). Therefore, it is necessary to carefully set the equations and to check afterwards whether the obtained shell geometry matches the desired one.

Thus, the parametric equations of a right helicoid in the SCAD must be written in the following form:

$$\begin{aligned} x &= (1.7 * t + 5) * \cos(180 * s), \\ y &= (1.7 * t + 5) * \sin(180 * s), \\ z &= 0.05 * (3.14 * s). \end{aligned} \tag{2}$$

It should also be noted that in the equation for z the value of the angle v should be indicated in radians, since the parametric equations are constructed in cylindrical coordinates.

For the test shell, the rectangular mesh has been selected, the number of steps: $N_s = 150$ and $N_t = 30$ consequently. The loading has been set by the “Plate Load” function of the “Load” panel and $Q = 10^{(-2)}$ MPa vertical loading has been applied to the model; and all the edges (along inner and external curve generators as well as the beginning and the end straight generators) have been rigidly fixed to determine Dirichlet boundary conditions. The results for normal displacements are shown in Figure 5 and will be analyzed in section 5.

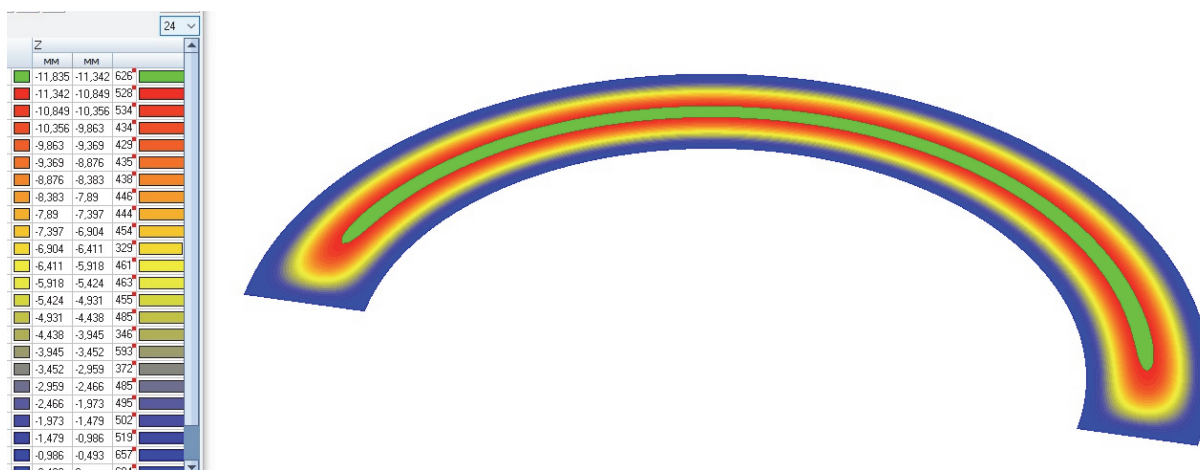


Figure 5. Displacements along z in a helicoid obtained by SCAD Office 21.1.1.1 (mm)

4. Modelling and simulation of right helicoid in Autodesk Robot Structural Analysis

Even though the construction of shells using the parametric equations is normally implemented only in the SCAD, it is also possible to perform structural analysis of complex shells structures in other packages, because almost all modern software simulating packages support import from external parametric software packages. The Autodesk Robot Structural Analysis 2018 software package – foreign software is designed for FE calculation of civil engineering

structures and has design codes and assortments for many countries including Russia.

For import into the Robot, the .dxf format – a universal format responsible for the exchange of information between various design systems – can be used. Unfortunately, this method allows to transfer only information about the geometry (and not always correctly). Theoretically, both the Robot and the SCAD support other import/export formats designed specifically for computational models, however, in practice, transferring the model in these ways did not work in our case.

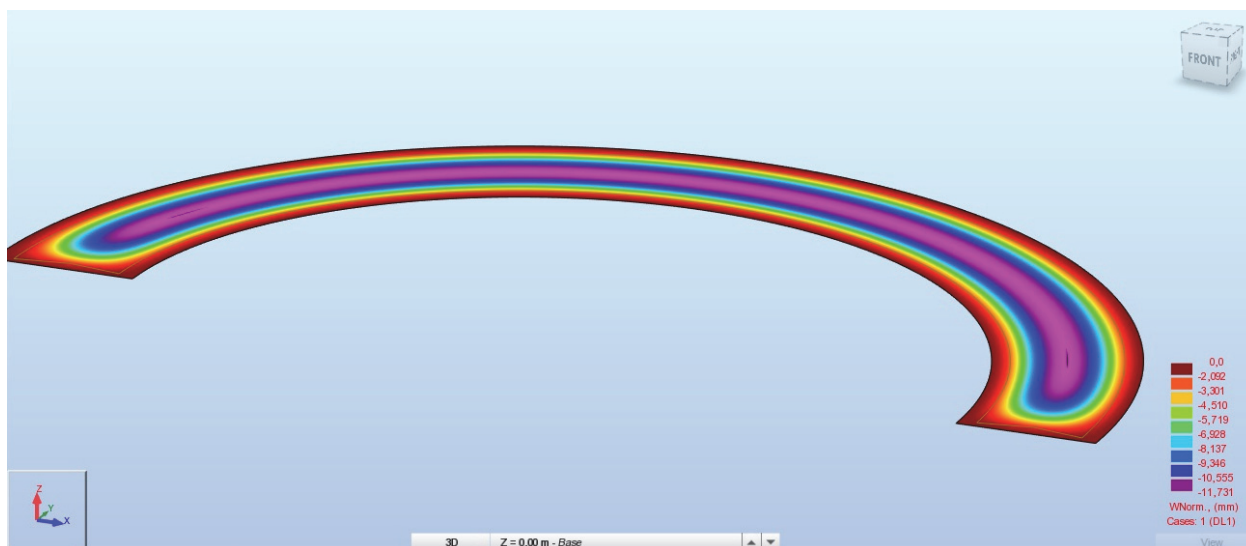


Figure 6. Displacements along z in a helicoid obtained by the Autodesk Robot Structural Analysis 2018 (mm)

After importing the .dxf model into the Robot, the following calculation scheme has been obtained. And, although it seems that the geometry is completely imported, in fact, there are only nodes and lines in the model that the Robot does not perceive, and it also cannot build rods or plates from these nodes and

lines. Thus, in order to build a shell, it is necessary to perform several non-obvious actions: to remove the internal nodes and to leave only the nodes along the perimeter, circle them all using the “Closed Loop” tool, and create a shell based on this closed loop. This method works well with this particular shell, because

in a right helicoid, the perimeter determines the surface geometry. However, in a sphere or, for example, in a paraboloid, it will be necessary to outline each finite element, which is very time-consuming, and is unlikely to be done without errors. Therefore, the applicability of this method of transferring a model from the SCAD to the Robot is quite limited.

After creating the shell, it is also necessary to set the boundary conditions and rigidity. The Robot can create a FE mesh either automatically or in accordance with user-specified parameters, while the configuration options are quite extensive. The Robot has an even more extensive than the SCAD module for graphical analysis of the structure, allowing to display almost any information on the screen in many forms. However, the problem with modelling the surfaces of a complex form prevents this software from using in civil engineering design.

The results for normal displacements are shown in Figure 6 and will be analyzed in section 5.

5. Results verification

In order to verify results, the analytical approach to calculate the shell in the shape of right helicoid using thin shell theory (Reissner’s equations for plates [17] and solution extension into Fourier series [18]) has been used. The results for the test models mentioned in sections 2, 3, 4 are shown in Table.

It can be seen in Table, that the results obtained by different software packages are close and show the logical tendency in comparison with a plate and a beam, but the ANSYS Workbench R19.1 shows lower values of normal displacements than the SCAD Office 21.1.1.1 1, the Autodesk Robot Structural Analysis 2018 and analytical solution. Here, it should be noticed that the analytical solution has been obtained by some simplifications [18] and it requires future investigation to figure out the reasons for the differences in obtained results. Furthermore, the results can be considered as the first step and future research is required to verify results for the different boundary conditions.

Table

Maximal normal displacements of a helicoid obtained by different software tools and analytical solution compared with a plate and a beam

Normal displacements	Helicoid				Plate (mm)	Beam (mm)
	ANSYS Workbench R19.1 (mm)	SCAD Office 21.1.1.1 1 (mm)	Autodesk Robot Structural Analysis 2018 (mm)	Analytical solution (mm)		
u_z	-10.623	-11.835	-11.731	-11.692	-12.663	-13.05

Conclusion

The considered software packages have their advantages and disadvantages, and the final choice of the particular one depends on the purpose of the calculation: for typical civil engineering structures it is convenient to use the Lira-SAPR (at least in Russia, because it has a friendly interface in Russian language) or the Autodesk Robot Structural Analysis (that also has a Russian localization in terms of codes and language for interface), while for more complicated shapes simulation, it is more convenient to use software packages like the Structural CAD (that allows to create models according to parametric equations) and the ANSYS Workbench R19.1 (with preliminary model creation in the CAD software Creo Parametric 4.0).

When it is concerned to more complex simulation tasks it can be stated that, for traditional design of complex shells structures, the Structural CAD, the Autodesk Robot Structural Analysis and the ANSYS Workbench R19.1 (along with the CAD software Creo Parametric 4.0) can be used, but in the case of more complex tasks like the existing holes, nonlinear analysis, dynamic loadings, etc., the model can be crea-

ted in the Structural CAD and exported into the Lira-SAPR for more complex simulation, or simulated from the scratch in the ANSYS Workbench R19.1 (that is more complicated but allows flexibility for design input data and simulation).

It can also be added that for practical engineers in most cases such parameters as the interface language and if the local codes are included in the package play a key role, while most of the software packages mentioned in Introduction section do not have for example Russian localization in terms of interface language and the codes. From this point of view, the ANSYS Workbench R19.1 turned out to be preferable, since some of its satellite programs have the Russian language, and it also provides more opportunities for in-depth calculations considering non-linearities and variable loads.

For future research, it could be reasonable to figure out the reasons for differences in results for different software packages, comparatively check stresses for the presented models, simulate the models in other popular software packages and investigate more complex geometry for modelling and more complicated tasks for simulation.

References

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Simplified selection of optimal shell of revolution. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(6):438–448.
2. Rynkovskaya M. Studying the shape of a helical ramp. *Proceedings IASS Symposium 2019 Form & Force*. 2019:1451–1456.
3. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Raschetnie modeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza [Calculation models of structures and possibility of their analysis]*. Moscow: SCAD SOFT Publ.; 2011. (In Russ.)
4. Website for designers and engineers – DWG.RU. *Code-Aster – general information*. <https://dwg.ru/dnl/3548>
5. Safronov P.I. Ispol'zovanie programmnoy kompleksa "Code Aster" dlya resheniya zadach stroitel'noj mekhaniki i teorii uprugosti [Usage of software Code Aster for solving tasks of structural mechanics and theory of elasticity]. *Bulletin of Pskov State University. Series: Economic and Technical Sciences*. 2013;(3):148–158. (In Russ.)
6. Technical support and education: Autodesk Knowledge Network. *Robot – general information*. <http://docs.autodesk.com/RSA/2012/RUS/files/ROBOT/GUID-E6467BAF-8676-4273-8ED0-4D308F29817-5.htm>
7. TOO "Sklad informacionnykh tekhnologii". *Robot Structural Analysis Professional*. <https://k-2.kz/p55241342-robot-structural-analysis.html>. (In Russ.)
8. Suchorukov V.V. *Autodesk Robot Structural Analysis. Design and computing complex: reference and training manual*. Moscow: Publishing House of the Association of Construction Universities; 2009. (In Russ.)
9. SAS IP, Inc. *ANSYS Fluent Tutorial Guide. Release 18.0*. 2017. <http://users.abo.fi/rzevenho/ansys%20fluent%2018%20tutorial%20guide.pdf>
10. License, implantation, consulting – CADFEM. *Program package ANSYS*.
11. *SOFiSTiK: Information Source*. http://mysofistik.blogspot.com/p/sofistik_18.html
12. *COMSOL: Multiphysics Software for Optimizing Designs*. https://www.comsol.ru/comsol-multiphysics?utm_source=GT_5&utm_campaign=ru_GT_2018&utm_medium=Other&utm_content=1
13. Busygina G.M., Dremova O.V. *Application of the SCAD Office software package for calculation of rod structures: educational and methodical manual for students of construction specialties*. Barnaul; 2015.
14. Karpilovskyy V.S., Kryksunov E.Z., Maliarenko A.A., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A., Fialko S.Y. *SCAD Office. V. 21. System Scad++*. Moscow: SCAD Office Publ.; 2015.
15. Romashkina M.A., Titok V.P. *Software package LIRA-SAPR. Manual. Educational examples*. 2018. https://rflira.ru/files/lira-sapr/Book_LIRA_SAPR_2018.pdf
16. Krivoshapko S.N. Geometry and strength of general helicoidal shells. *Applied Mechanics Reviews*. 1999; 52(5):161–175.
17. Reissner E. Small rotationally symmetric deformations of shallow helicoidal shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1955;22(1):31–34.
18. Rynkovskaya M., Ivanov V.N. Analytical method to analyze right helicoid stress-strain. *Engineering Design Applications. Advanced Structured Materials*. 2019;(92):157–171.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Исследование возможностей современных компьютерных программ для расчета оболочек сложной геометрии

М.И. Рынковская^{1*}, Т. Эльбердов¹, Э. Серт², А. Экснер²

¹Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

²Эсслингенский университет прикладных наук, Федеративная Республика Германия, 73728, Эсслинген, ул. Каналиштрассе, 33
*marine_step@mail.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 27 сентября 2019 г.

Доработана: 12 октября 2019 г.

Принята к публикации: 20 декабря 2019 г.

Благодарности

Исследование финансировалось Германской службой академических обменов (DAAD) в рамках программы «Михаил Ломоносов» (57447934) и Министерством образования и науки РФ (7.13408.2019/13.2).

Аннотация

Актуальность. При проектировании и расчете строительных конструкций традиционно используются несколько стандартных коммерческих пакетов программного обеспечения, которые успешно применяются для решения повседневных инженерных задач. Однако, когда необходимо разработать модели структур оболочек сложной формы с заданием поверхностей с помощью параметрических уравнений, такие программы зачастую имеют определенные недостатки. **Цель** исследования – проанализировать существующие типы коммерческих вычислительных программных пакетов с целью определения позволяющих проектировать конечно-элементные модели для конструкций оболочек со срединными поверхностями сложной геометрии,

Рынковская Марина Игоревна, к. т. н., доцент, доцент департамента строительства Инженерной академии; ORCID iD: 0000-0003-2206-2563, eLIBRARY SPIN-code: 9184-7432.

Тимур Эльбердов, магистрант департамента строительства Инженерной академии.

Энес Серт, магистр, аспирант машиностроительного факультета; Scopus ID: 57202320832.

Андреас Экснер, д. т. н., профессор факультета машиностроения; Scopus ID: 57195537634.

Для цитирования

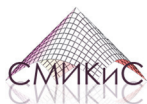
Rynkovskaya M.I., Elberdov T., Sert E., Öchsner A. Study of modern software capabilities for complex shell analysis (Исследование возможностей современных компьютерных программ для расчета оболочек сложной геометрии) // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 45–53. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-45-53>

заданными параметрическими уравнениями. **Методы.** Анализ коммерческих вычислительных программных пакетов выполнялся путем изучения руководств по программному обеспечению, а также построения и расчета модели в форме прямого геликоида в качестве тестового примера. Для оценки результатов напряженно-деформированного состояния оболочки со срединной поверхностью в форме прямого геликоида использовался аналитический метод расчета, основанный на уравнениях Рейсснера и разложении решения в ряды Фурье. **Результаты.** Проведен обзор современных коммерческих вычислительных программных пакетов применительно к моделям, задаваемым параметрическими уравнениями. Построена модель оболочки со срединной поверхностью в форме прямого геликоида. Численные результаты напряженно-деформированного состояния этой оболочки получены и проанализированы в сравнении с аналитическими решениями, вычисленными с использованием уравнений Рейсснера с разложением решения в ряды Фурье. Представлены плюсы и минусы нескольких популярных программных комплексов.

Ключевые слова: параметрическая форма задания поверхности; CAD software Creo Parametric; ANSYS Workbench; SCAD Office; Autodesk Robot Structural Analysis; компьютерная симуляция; оболочка сложной геометрии; прямой геликоид; уравнения Рейсснера

Список литературы

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Simplified selection of optimal shell of revolution // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 438–448.
2. Rynkovskaya M. Studying the shape of a helical ramp // Proceedings IASS Symposium 2019 Form & Force. 2019. Pp. 1451–1456.
3. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. 4-е изд., перераб. М.: СКАД СОФТ, 2011. 736 с.
4. Code-Aster – общая информация // Сайт проектировщиков, инженеров, конструкторов – DWG.RU. URL: <https://dwg.ru/dnl/3548>
5. Сафронов П.И. Использование программного комплекса Code Aster для решения задач строительной механики и теории упругости // Вестник Псковского государственного университета. Серия: Экономические и технические науки. 2013. № 3. С. 148–158.
6. Общее описание Robot // Техническая поддержка и обучение. Autodesk Knowledge Network. URL: <http://docs.autodesk.com/RSA/2012/RUS/files/ROBOT/GUID-E6467BAF-8676-4273-8ED0-4D308F29817-5.htm>
7. Robot Structural Analysis Professional // TOO «Склад информационных технологий». URL: <https://k-2.kz/p55241342-robot-structural-analysis.html>
8. Сухоруков В.В. Autodesk Robot Structural Analysis. Проектно-вычислительный комплекс: справочно-учебное пособие. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. 128 с.
9. ANSYS Fluent Tutorial Guide. Release 18.0. SAS IP, Inc, 2017. 1034 p. URL: <http://users.abo.fi/rzevenho/ansys%20fluent%2018%20tutorial%20guide.pdf>
10. Программные продукты ANSYS // ANSYS, лицензирование, внедрение, консалтинг – CADFEM. URL: <https://www.cadfem-cis.ru/products/ansys>
11. SOFiSTiK // SOFiSTiK: информационный ресурс. URL: http://mysofistik.blogspot.com/p/sofistik_18.html
12. COMSOL: multiphysics software for optimizing designs. URL: https://www.comsol.ru/comsol-multiphysics?utm_source=GT_5&utm_campaign=ru_GT_2018&utm_medium=Other&utm_content=1
13. Бусыгина Г.М., Дремова О.В. Применение программного комплекса SCAD Office для расчета стержневых конструкций: учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей / Алт. госуд. техн. ун-т имени И.И. Ползунова. Барнаул, 2015. 39 с.
14. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Фиалко С.Ю. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++. М.: СКАД СОФТ, 2015. 848 с.
15. Ромашкина М.А., Туток В.П. Программный комплекс «Лира-САПР». Руководство пользователя. Обучающие примеры / под ред. А.С. Городецкого. 2018. 254 с.
16. Krivoshapko S.N. Geometry and strength of general helicoidal shells // Applied Mechanics Reviews. 1999. Vol. 52. No. 5. Pp. 161–175.
17. Reissner E. Small rotationally symmetric deformations of shallow helicoidal shells // Journal of Applied Mechanics. 1955. Vol. 22. No. 1. Pp. 31–34.
18. Rynkovskaya M., Ivanov V.N. Analytical method to analyze right helicoid stress-strain // Engineering Design Applications. Advanced Structured Materials. 2019. Vol. 92. Pp. 157–171.



DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некротными критическими нагрузками

Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, И.Е. Грудцына

Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, 9
*kositsyn-s@mail.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 22 октября 2019 г.
Доработана: 22 января 2020 г.
Принята к публикации: 28 января 2020 г.

Для цитирования

Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некротными критическими нагрузками // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 54–61. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61>

Аннотация

Цели. Исследование докритических и начальных послекритических равновесий подкрепленных продольно сжатых пластин с некротными критическими нагрузками. **Методы.** Для решения поставленных задач использован конечно-элементный комплекс MSC PATRAN – NASTRAN. Подкрепленные пластины смоделированы плоскими четырехузловыми элементами. Проведены расчеты с учетом геометрической нелинейности. Материал считался абсолютно упругим. **Результаты.** Разработана методика исследования устойчивости подкрепленных продольно сжатых пластин, определены критические силы подкрепленных пластин различных толщин. Построены графики зависимостей прогибов от величин сжимающих нагрузок. Исследовано влияние начальных геометрических несовершенств на величины критических сил для подкрепленных пластин.

Ключевые слова: устойчивость; подкрепленная пластина; начальные геометрические несовершенства; критическая сила

Введение

Подкрепленные пластины – важный и достаточно часто встречающийся конструктивный элемент в машиностроении, авиации и строительстве. Задача об устойчивости подкрепленных пластин является актуальной и недостаточно изученной. Полученные на сегодняшний день отдельные решения не создают целостной картины поведения подкрепленных пластин различных геометрических параметров под действием сжимающей нагрузки. В данной работе кривые равновесных состояний строятся в геометрически нелинейной постановке, постоянно учитывается нелинейное взаимодействие собственных форм (локальной формы

волнообразования и формы общего выпучивания подкрепленной пластины как эйлерова стержня), а также влияние начальных геометрических несовершенств, что позволяет получать реальные значения критических нагрузок для подкрепленных пластин.

Влияние начального несовершенства для тонких прямоугольных и круглых пластин по форме выпучивания эйлерова стержня в задачах изгиба и устойчивости оценено впервые в работах Н. Нюландера [6]. Одной из первых по проблеме устойчивости подкрепленных пластин была работа В.Т. Койтера и М. Скалауда [4]. Весьма важные исследования проведены А. Ван дер Нейтом [8; 9] и Ж. Майером [10], а также В. Твергардом [7]. Эти ученые придерживались противоположных точек зрения по поводу чувствительности к начальным геометрическим несовершенствам: по А. Ван дер Нейту, эта чувствительность во многих случаях небольшая, тогда как по В. Твергарду, она может быть значительной. Для описания равновесных состояний вблизи двукратной критической точки Дж. Хант [2] предложил особые диаграммы с дополнительным параметром σ , что использовано в

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики; eLIBRARY AuthorID: 527188.

Косицын Сергей Борисович, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики; eLIBRARY SPIN-код: 9390-7610, ORCID iD: 0000-0002-3241-0683.

Грудцына Ирина Евгеньевна, аспирант кафедры теоретической механики.

© Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е., 2019

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

настоящей статье. Интересные экспериментальные исследования устойчивости сжатых подкрепленных пластин проведены С. Массонье [5]. Особый случай обратного прогиба сжатой подкрепленной пластины исследовал В. Фок [1].

В работах А.И. Маневича [12; 13] рассмотрены задачи связанной потери устойчивости для подкрепленной панели и стержня прямоугольного сечения, изучено влияние вторичной местной формы потери устойчивости на расчетную предельную нагрузку в зависимости от параметров сечений и начальных несовершенств.

1. Постановка задачи

Задача об устойчивости тонких подкрепленных пластин решена методом конечных элементов. Выбраны геометрические параметры подкрепленных пластин:

- длина пластин – 86 см,
- ширина пластин – 36 см,
- $\delta = 0,1$ см; $e = 1,2$ см; $J = 17,283$ см⁴;
- $\delta = 0,13$ см; $e = 1,132$ см; $J = 18,754$ см⁴;
- $\delta = 0,16$ см; $e = 1,071$ см; $J = 20,064$ см⁴;
- $\delta = 0,2$ см; $e = 1$ см; $J = 21,624$ см⁴;
- $\delta = 0,23$ см; $e = 0,952$ см; $J = 22,665$ см⁴;
- $\delta = 0,3$ см; $e = 0,857$ см; $J = 24,765$ см⁴;
- $\delta = 0,4$ см; $e = 0,95$ см; $J = 27,192$ см⁴;
- $\delta = 0,8$ см; $e = 0,9$ см; $J = 33,936$ см⁴,

где δ – толщина пластины; e – эксцентриситет положения главной центральной оси сечения; J – момент инерции относительно главной центральной оси.

Граничные условия: шарнирное опирание вдоль коротких сторон со свободными продольными краями. Пластина имела четыре продольных ребра жесткости. Поперечное сечение подкрепленной пластины представлено на рис. 1. Конечно-элементная модель построена в расчетном комплексе MSC PATRAN – NASTRAN. Использованы четырехузловые плоские конечные элементы типа shell (2378 элементов) (рис. 2). Материал считался абсолютно упругим (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$). Сжимающая нагрузка (четыре силы) приложена в точках пересечения осей симметрии ребер и главной центральной оси сечения.



Рис. 1. Поперечное сечение подкрепленной пластины:

$b = 12$ см; $b_p = 1,2$ см; $h_p = 3$ см

[Figure 1. Cross-section of the stiffened plate:

$b = 12$ cm; $b_p = 1.2$ cm; $h_p = 3$ cm]

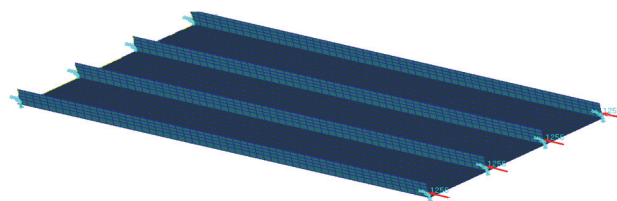


Рис. 2. Конечно-элементная модель подкрепленной пластины [Figure 2. Finite-element model of the stiffened plate]

2. Исследование докритического и начального послекритического равновесий подкрепленных пластин с некротными критическими нагрузками

В данной части исследования изучено докритическое и послекритическое равновесия подкрепленных пластин с некротными критическими нагрузками без учета начальных геометрических несовершенств. Задача решена с учетом геометрической нелинейности. В первую очередь рассмотрены послекритические равновесия тонких пластин, когда толщины пластин значительно меньше, чем толщины ребер.

Решение линейных задач на собственные значения (buckling) в расчетном комплексе позволило получить критические силы и формы потери устойчивости для данных тонких пластин. Эти силы соответствовали критическим точкам, полученным из расчета с учетом геометрической нелинейности. На рис. 3 показана кривая равновесных состояний для пластины толщиной $\delta = 0,1$ см. Данная кривая представляет собой график изменения прогибов в зависимости от величины сжимающей нагрузки, построенный для отдельного узла пластины, расположенного на оси симметрии вблизи нагруженного края.

Как показал расчет, развитие прогиба системы провоцирует начальное волнообразование в пластине (общее количество полуволн равно десяти), происходит первая бифуркация, но система продолжает держать нагрузку сжатия. Далее происходит перестройка волнообразования (последующие формы потери устойчивости имеют одиннадцать полуволн). Послекритическое равновесие для подкрепленной пластины толщиной $\delta = 0,1$ см устойчиво (до $P_{\max} = 34\ 200$ кг).

На рис. 4 показаны деформированные состояния подкрепленных пластин толщиной $\delta = 0,1$ см, соответствующие разным величинам сжимающей нагрузки. Очевидно, что при данных геометрических параметрах наибольшее сопротивление сжатию оказывают ребра жесткости (нагрузка продолжает расти до достижения максимальной – $P_{\max} = 34\ 200$ кг).

На рис. 5 показан график зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки, соответствующий подкрепленной пластине толщиной $\delta = 0,13$ см. Для пластины с данными геометрическими параметрами первая бифуркация являлась устойчивой, тогда как последующая – неустойчивой (скачок перемещений на графике). Максимальное значение нагрузки соответствует нагрузке потери устойчивости в предельной точке.

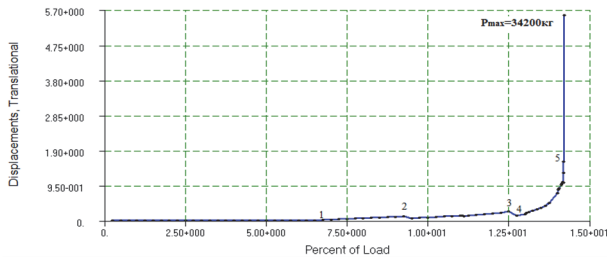


Рис. 3. График зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки при силовом нагружении подкрепленной пластины ($\delta = 0,1$ см)
 [Figure 3. Bend curve vs compression load for the stiffened plate ($\delta = 0.1$ cm)]

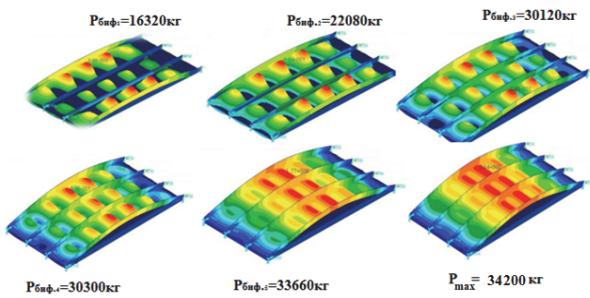


Рис. 4. Развитие волнообразования в пластине ($\delta = 0,1$ см)
 [Figure 4. Undulation effect propagation along a plate ($\delta = 0.1$ cm)]

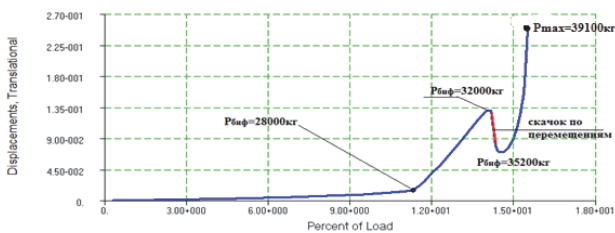


Рис. 5. График зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки при силовом нагружении подкрепленной пластины ($\delta = 0,13$ см)
 [Figure 5. Bend curve vs compression load for the stiffened plate ($\delta = 0.13$ cm)]

На рис. 6 показаны деформированные состояния подкрепленной пластины толщиной $\delta = 0.13$ см до скачка и после скачка перемещений. В точка бифуркации происходит перестройка форм волнообразования. Количество полуволн до скачка – девять, после скачка – одиннадцать.

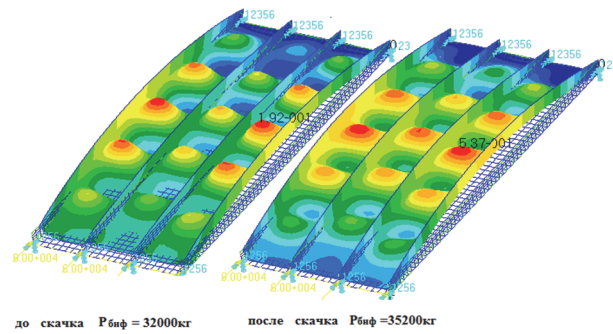


Рис. 6. Деформированные состояния подкрепленной пластины толщиной $\delta = 0,13$ см
 [Figure 6. Strain states of the stiffened plate $\delta = 0.13$ cm]

На рис. 7 показан график зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки для пластины толщиной $\delta = 0,16$ см. Важно отметить, что геометрические параметры этой подкрепленной пластины очень близки к таким геометрическим параметрам, при которых подкрепленная пластина имеет двукратную критическую нагрузку ($\delta = 0,175$ см). Результаты подробного исследования устойчивости подкрепленной пластины с двукратной критической нагрузкой нами приведены в работе [11]. Кривая равновесных состояний подкрепленной пластины толщиной $\delta = 0,16$ см отличается от соответствующих графиков, построенных для пластин меньших толщин. В процессе нагружения прогиб системы монотонно увеличивается и провоцирует волнообразование в средней части пластины. Точка бифуркации соответствует критической нагрузке $P_{биф} = 42\,324$ кг, в след за которой появляется предельная точка $P_{max} = 42\,778$ кг, а дальнейшее равновесие пластины становится неустойчивым (нагрузка падает при растущих прогибах). После прохождения предельной точки волнообразование распространяется по всей поверхности пластины. Следующая бифуркация ($P_{биф} = 42\,246$ кг) возникает уже на неустойчивой ветви кривой равновесных состояний.

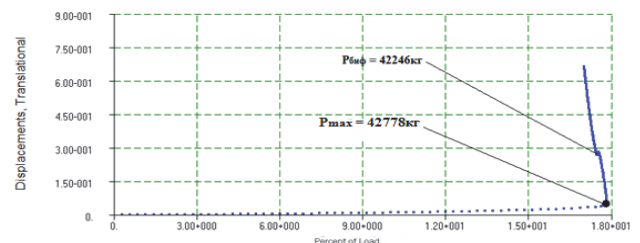


Рис. 7. График зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки при силовом нагружении подкрепленной пластины ($\delta = 0,16$ см)
 [Figure 7. Bend curve vs compression load for a stiffened plate ($\delta = 0.16$ cm)]

Дальнейшие исследования устойчивости подкрепленных пластин посвящены рассмотрению послекритических равновесий пластин с большими толщинами ($\delta = 0,2$ см, $\delta = 0,23$ см и $\delta = 0,3$ см) по сравнению с параметрами аналогичной пластины ($\delta = 0,175$ см), обладающей двукратной критической нагрузкой. Для каждой из таких пластин при $\delta > 0,175$ см первой критической является нагрузка выпучивания пластины как эйлерова стержня. На рис. 8 и 9 представлены графики зависимостей прогибов от величин сжимающей нагрузки для подкрепленных пластин толщинами $\delta = 0,2$ см и $\delta = 0,23$ см.

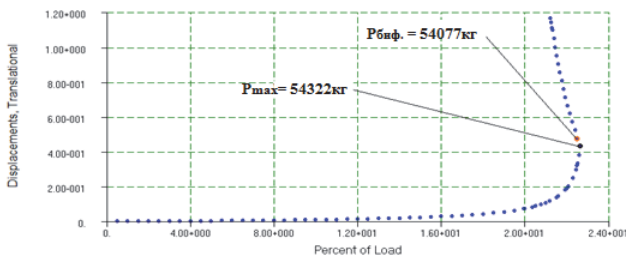


Рис. 8. График зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки при силовом нагружении подкрепленной пластины ($\delta = 0,2$ см)
[Figure 8. Bend curve vs compression load for a stiffened plate ($\delta = 0.2$ cm)]

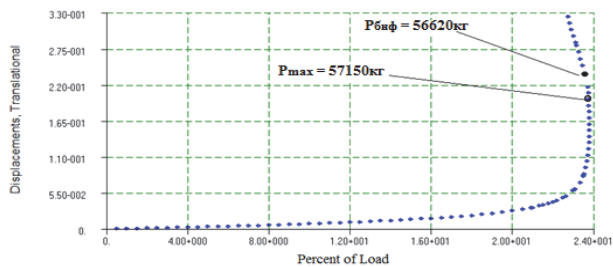


Рис. 9. График зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки при силовом нагружении подкрепленной пластины ($\delta = 0,23$ см)
[Figure 9. Bend curve vs compression load for a stiffened plate ($\delta = 0.23$ cm)]

Исследования показали, что под действием увеличивающейся сжимающей нагрузки растет прогиб в средней части пластин. Однако бифуркации волнообразования появлялись только после прохождения предельных точек на неустойчивых участках кривых равновесных состояний.

На рис. 10 представлен график зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки для подкрепленной пластины толщиной $\delta = 0,3$ см. Анализ послекритического равновесия данной пластины показал, что потеря устойчивости происходит только в предельной точке, без возникновения точек бифуркации волнообразования

($P_{\max} = 62\,294$ кг). Волнообразование сильно уменьшает продольную жесткость, поэтому слабо растущая эlastика Эйлера переходит в слабо падающую кривую после предельной точки. Подкрепленная пластина толщиной $\delta = 0,4$ см также теряет устойчивость в предельной точке ($P_{\max} = 68\,345$ кг). Бифуркации волнообразования здесь не наблюдались.

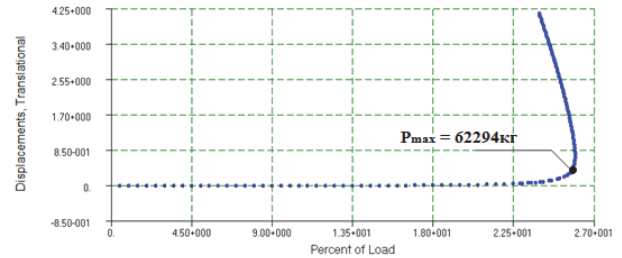


Рис. 10. График зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки при силовом нагружении подкрепленной пластины ($\delta = 0,3$ см)
[Figure 10. Bend curve vs compression load for a stiffened plate ($\delta = 0.3$ cm)]

Полученные особенности поведения подкрепленных пластин для случаев, когда первой критической нагрузкой является нагрузка волнообразования ($\delta < \delta = 0,175$ см) и когда первая критическая нагрузка – эйлерова сила ($\delta > \delta = 0,175$ см), можно объяснить с помощью бифуркационных диаграмм Дж. Ханта [2]. Они построены путем введения в выражение потенциальной энергии двойной полусимметричной точки бифуркации дополнительного члена с параметром σ :

$$V = \frac{1}{6}V_{222}q_2^3 + \frac{1}{2}V_{112}q_1^2q_2 + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_{кр})[V_{11\lambda}q_1^2 + V_{22\lambda}q_2^2] + \frac{1}{2}\sigma V_{11\lambda}q_1^2, \quad (1)$$

где V – потенциальная энергия; цифровые индексы означают дифференцирование по координатам q_1 и q_2 ; индекс с буквой λ – дифференцирование по параметру нагрузки.

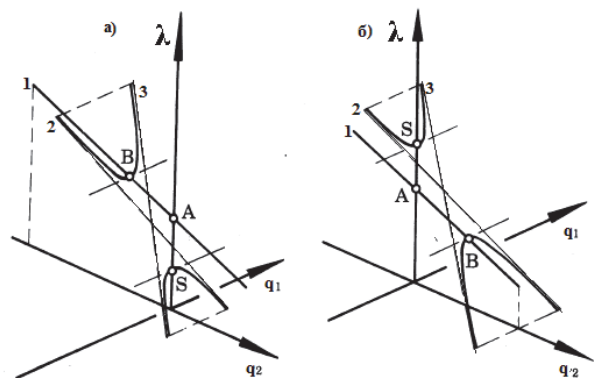


Рис. 11. Бифуркационные диаграммы Дж. Ханта
[Figure 11. J. Hunt's bifurcation diagrams]

При $\sigma > 0$ получим диаграмму на рис. 11, а и при $\sigma < 0$ – диаграмму на рис. 11, б. Первая из этих диаграмм соответствует поведению подкрепленной пластины, когда критическая сила вызывает неустойчивое волнообразование. Вторая диаграмма описывает бифуркации волнообразования на неустойчивой части кривой развития прогибов пластины как эйлера стержня. Все производные потенциальной энергии вычисляются в точке двойной бифуркации, поэтому модификация потенциальной энергии работает локально, вблизи этой точки.

В формуле (1) и на рис. 11 обозначено: q_1 – координата, соответствующая форме волнообразования пластины; q_2 – координата, соответствующая форме выпучивания стержня; λ – параметр нагрузки ($\lambda = P - P_{кр}$); A – точка бифуркации, соответствующая критической силе выпучивания подкрепленной пластины как эйлера стержня ($P_{эл}$); S – точка бифуркации, соответствующая критической силе волнообразования пластины; B – точка вторичной бифуркации, возникающая при развитии прогиба в подкрепленной пластине; l – прямая несвязных равновесий, соответствующая относительной амплитуде по форме выпучивания подкрепленной пластины как эйлера стержня; 2 и 3 – асимптоты, к которым стремятся бифуркационные кривые связанных равновесий с координатами, зависящими как от прогиба по Эйлеру, так и от амплитуды волнообразования.

Согласно бифуркационной диаграмме (рис. 11, а), если при расчете получим первую критическую нагрузку, соответствующую критической нагрузке волнообразования пластины, то точка бифуркации будет неустойчивой и послебифуркационные траектории равновесия окажутся падающими в одном направлении. Данное явление наблюдалось при анализе послекритического равновесия подкрепленных пластин толщиной $\delta = 0,16$ см.

Согласно диаграмме на рис. 11, б, если при расчете получим первую критическую нагрузку, соответствующую критической нагрузке потери устойчивости по Эйлеру, то тогда на падающей

послебифуркационной траектории возникает вторичная неустойчивая бифуркация волнообразования. Это явление наблюдалось для подкрепленных пластин с толщинами $\delta = 0,2$ см и $\delta = 0,23$ см. Данные бифуркационные диаграммы позволяют предсказывать послекритическое поведение подкрепленных пластин с различными геометрическими параметрами.

3. Влияние начальных геометрических несовершенств на критическую нагрузку подкрепленных пластин

Начальные геометрические несовершенства заданы по двум формам потери устойчивости:

- несовершенство по форме выпучивания подкрепленной пластины как эйлера стержня;
- несовершенство по форме волнообразования пластины.

Все амплитуды несовершенства заданы в долях от толщины подкрепленных пластин.

На рис. 12 показаны кривые падения критических нагрузок при задании несовершенств по формам выпучивания стержня и волнообразования пластины, а табл. 3 содержит соответствующую числовую информацию.

Падение критической нагрузки для пластины толщиной $\delta = 0,4$ см, вызванное несовершенством по форме выпучивания эйлера стержня 2δ составило 20 %.

Анализ послекритического равновесия подкрепленной пластины толщиной $\delta = 0,8$ см показал, что для этой пластины послекритическое равновесие неустойчиво, система теряет устойчивость в предельной точке ($P_{max} = 86\ 938$ кг). Однако при задании несовершенства большой амплитуды ($>2\delta$) по форме выпучивания пластины как эйлера стержня система становится достаточно «грубой» и влияние начального несовершенства приводит к возникновению устойчивой ветви равновесия (псевдоэластики Эйлера). На рис. 13 показаны кривые равновесных состояний для пластины толщиной $\delta = 0,8$ см.

Таблица 1

Значения критических нагрузок для пластин ($\delta = 0,1$ см, $\delta = 0,13$ см, $\delta = 0,16$ см)
[Table 1. Critical loads for the stiffened plates ($\delta = 0.1$ cm, $\delta = 0.13$ cm, $\delta = 0.16$ cm)]

$P_{кр}$ (кг)								
$\delta = 0,1$ см, $P_{max} = 34\ 200$ кг			$\delta = 0,13$ см, $P_{max} = 39\ 100$ кг			$\delta = 0,16$ см, $P_{max} = 42\ 778$ кг		
Несовершенство по форме волнообразования пластины [Undulation form imperfection]								
0,1 δ	1 δ	2 δ	0,1 δ	1 δ	2 δ	0,1 δ	1 δ	2 δ
34 143	34 125	34 125	37 368	36 672	36 168	41 749	40 032	38 472
Несовершенство по форме выпучивания стержня [Strut buckling form imperfection]								
0,1 δ	1 δ	2 δ	0,1 δ	1 δ	2 δ	0,1 δ	1 δ	2 δ
3 2887	31 992	31 200	37 200	36 000	35 280	41 650	39 027	37 607

Таблица 2

Значения критических нагрузок для пластин ($\delta = 0,2$ см, $\delta = 0,3$ см, $\delta = 0,3$ см)
 [Table 2. Critical loads for the stiffened plates ($\delta = 0.2$ cm, $\delta = 0.23$ cm, $\delta = 0.3$ cm)]

$P_{кр}$ (кг)								
$\delta = 0,2$ см, $P_{max}=54\ 322$ кг			$\delta = 0,23$ см, $P_{max} = 57\ 150$ кг			$\delta = 0,3$ см, $P_{max} = 62\ 294$ кг		
Несовершенство по форме волнообразования пластины [Undulation form imperfection]								
0,1 δ	1 δ	2 δ	0,1 δ	1 δ	2 δ	0,1 δ	1 δ	2 δ
50 210	42 353	41 110	54 508	45 241	43 859	61 058	55 506	52 039
Несовершенство по форме выпучивания стержня [Strut buckling form imperfection]								
0.1 δ	1 δ	2 δ	0.1 δ	1 δ	2 δ	0.1 δ	1 δ	2 δ
50 186	42 438	40 305	55 643	48 120	43 689	60 542	53 932	49 769

Таблица 3

Падение критической нагрузки (%)
 [Table 3. Declination of the critical load (%)]

Толщина пластины δ [Thickness of plate]	Несовершенство по форме волнообразования пластины [Undulation form imperfection]			Несовершенство по форме выпучивания стержня [Strut buckling form imperfection]		
	0,1 δ	1 δ	2 δ	0,1 δ	1 δ	2 δ
0,1 см	0,167	0,219	0,219	3,839	6,456	8,772
0,13 см	4,43	6,21	7,545	4,859	7,928	9,77
0,16 см	2,405	6,419	10,066	2,637	8,769	12,088
0,2 см	7,57	22,033	24,322	7,614	21,877	25,804
0,23 см	4,623	20,838	23,256	2,637	15,801	23,554
0,3 см	1,984	10,897	16,462	2,235	12,909	19,631

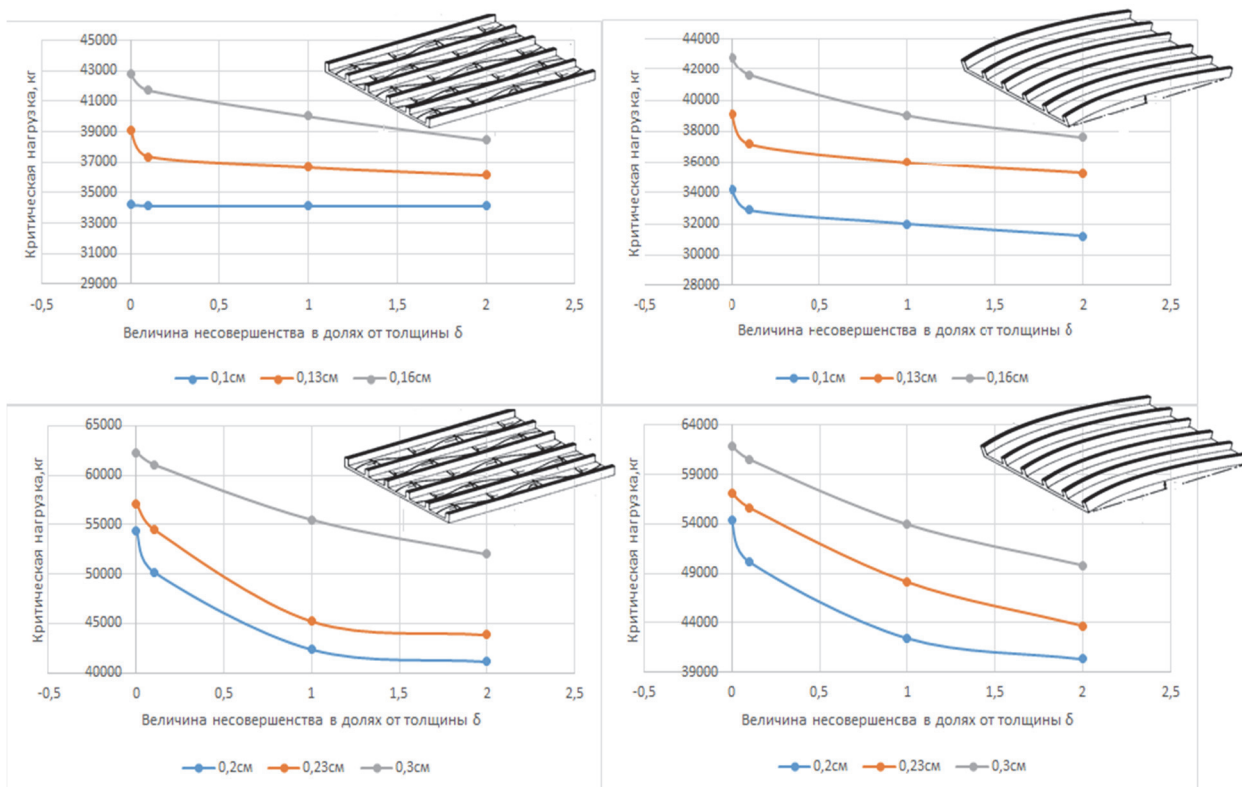


Рис. 12. Кривые падения критических нагрузок:
 $\delta = 0,1$ см; $\delta = 0,13$ см; $\delta = 0,16$ см; $\delta = 0,2$ см; $\delta = 0,23$ см; $\delta = 0,3$ см
 [Figure 12. Decline curves of the critical loads:
 $\delta = 0.1$ cm; $\delta = 0.13$ cm; $\delta = 0.16$ cm; $\delta = 0.2$ cm; $\delta = 0.23$ cm; $\delta = 0.3$ cm]

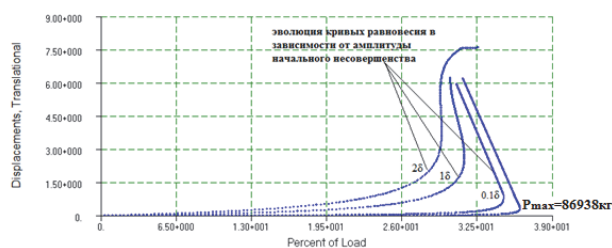


Рис. 13. График зависимости прогибов от величины сжимающей нагрузки (подкрепленная пластина $\delta = 0,8$ см)
[Figure 13. Bend curve vs compression load for a stiffened plate ($\delta = 0.8$ cm)]

Заключение

Наибольшее влияние на критическую нагрузку оказало несовершенство по форме выпучивания подкрепленной пластины как эйлера стержня амплитудой 2δ . Несовершенство такой формы провоцировало возникновение изгибающего момента и развитие волнообразования в пластине, вследствие чего падала изгибная жесткость системы.

Достаточно небольшое падение критической нагрузки подкрепленных пластин с толщинами $\delta = 0,1$ см, $\delta = 0,13$ см, $\delta = 0,16$ см обусловлено значительной толщиной ребер жесткости, поскольку основная нагрузка сжатия воспринималась при данных геометрических параметрах именно ребрами. Падение критической нагрузки подкрепленных пластин, имеющих толщины $\delta = 0,2$ см, $\delta = 0,23$ см, составило более 20 %, несмотря на увеличение толщины пластины. С ростом толщины подкрепленной пластины значение критической нагрузки повышается, но вместе с тем закритическое равновесие становится неустойчивым, и, соответственно, пластина получает чувствительность к начальным геометрическим несовершенствам. Существует мнение: если система теряет устойчивость в предельной точке, то такая система не чувствительна к начальным геометрическим несовершенствам. Но справедливо ли это утверждение для всех систем? Анализ послекритического равновесия подкрепленных пластин показал, что пластины с толщинами $\delta = 0,3$ см, $\delta = 0,4$ см без несовершенств теряли устойчивость в предельной точке без дальнейшего возникновения бифуркаций, однако падение критической нагрузки вследствие влияния несовершенств достигало величины немногим менее 20 %. При задании несовершенств для подкрепленных пластин данных толщин по форме выпучивания пластины как эйлера стержня точки бифуркации появились на неустойчивой ветви равновесных состояний уже после прохождения предельной точки. Для пластины толщиной $\delta = 0,8$ см падение критической нагрузки, вследствие влия-

ния начального несовершенства по форме эйлера стержня амплитудой 1δ , составило 10 %.

Список литературы

1. Fok W.C., Rhodes J., Walker A.C. Local buckling of outstands in stiffened plates // *Aeronaut Q* 27. 1976. Pp. 277–291.
2. Hunt G.W. Imperfections and near-coincidence for semi-symmetric bifurcations // *New York Academy of Sciences. Bifurcation theory and applications in scientific disciplines. Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1977. Vol. 316. Pp. 572–589.
3. Koiter W.T., Pignataro M.A. General theory for the interaction between local and overall buckling of stiffened panels // *Delft WTHD Report* 83. 1976. Pp. 179–222.
4. Koiter W.T., Skaloud M. Interventions // *Comportement post critique des plaques utilisees en construction metallique: colloque intern. a l'Universite de Liege. Memoires de la Societe Royale des Sciences de Liege. 5^{me} serie.* 1962. T. VIII. Fasc. 5. Pp. 64–68, 103, 104.
5. Maquoi R., Massonnet C. Interaction between local plate buckling and overall buckling in thin-walled compression members // *New York Harvard University Theories and Experiments: Proceedings of the IUTAM International Symposium on Buckling of Structures.* 1976. Pp. 365–382.
6. Nylander H. Initially deflected thin plate with initial deflection affine to add // *Deflektion. International vereinigung fur Bruckenbau und Hochbau Abhandlungen.* 1951. Bd. 11.
7. Tvergaard V. Imperfection sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression // *Int. J. Solids Structures.* 1973. Vol. 9. Pp. 177–192.
8. Van Der Neut A. The interaction of local buckling and column failure of imperfect thin-walled compression members // *Delft Technological University Report VTH-149.* 1968. Pp. 391–398.
9. Van Der Neut A. Mode interaction with a stiffened panel // *Harvard Proc. IUTAM Symp., Buckling of Structures.* 1974. Pp. 117–132.
10. Van Der Neut A., Majer J. The interaction of local buckling and column failure of imperfect thin-walled compression members // *Delft University of Technology, Department of Aeronautic Engineering Report VTH-160.* 1970. Pp. 6–18.
11. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ критического равновесия гибкой подкрепленной пластины с учетом влияния начальных геометрических несовершенств // *Строительная механика и расчет сооружений.* 2020. № 1. С. 30–36.
12. Маневич А.И. К теории связанной потери устойчивости подкрепленных тонкостенных конструкций // *Прикл. математика и механика.* 1982. Т. 46. № 2. С. 337–345.
13. Маневич А.И. Взаимодействие форм потери устойчивости, сжатой подкрепленной панели // *Строительная механика и расчет сооружений.* 1981. № 5. С. 24–29.

Numerical analysis of stability of the stiffened plates subjected aliquant critical loads

Gaik A. Manuylov, Sergey B. Kositsyn, Irina E. Grudtsyna

Russian University of Transport, 15 Obraztsova St., Moscow, 127994, Russian Federation

*kositsyn-s@mail.ru

Article history:

Received: October 22, 2019

Revised: January 22, 2020

Accepted: January 28, 2020

Abstract

The aim of the work is to research the precritical and postcritical equilibrium of the stiffened plates subjected aliquant critical loads. **Methods.** The finite-element complex MSC PATRAN – NASTRAN was used in the paper. To simulate the plates, flat four-node elements were used. Calculations taking into account geometric nonlinearity were carried out. The material of the shells was considered absolutely elastic. **Results.** A technique has been developed to study the stability of reinforced longitudinally compressed plates; the critical forces of the stiffened plates of various thicknesses had been calculated. Graphs of deflections dependences on the value of the compressive load had been constructed. The influence of initial geometric imperfections on the value of the critical loads for stiffened plates has been investigated.

Keywords: stability; stiffened plate; initial geometric imperfections; critical load

For citation

Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical analysis of stability of the stiffened plates subjected aliquant critical loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1): 54–61. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61>. (In Russ.)

References

1. Fok W.C., Rhodes J., Walker A.C. Local buckling of outstands in stiffened plates. *Aeronaut Q* 27. 1976:277–291.
2. Hunt G.W. Imperfections and near-coincidence for semi-symmetric bifurcations. New York Academy of Sciences. Bifurcation theory and applications in scientific disciplines. Ann. N. Y. Acad. Sci. 1977;316:572–589.
3. Koiter W.T., Pignataro M.A. General theory for the interaction between local and overall buckling of stiffened panels. *Delft WTHD Report* 83. 1976:179–222.
4. Koiter W.T., Skaloud M. Interventions. *Comportement post critique des plaques utilisees en construction metallique: colloque intern. a l'Universite de Liege. Memoires de la Societe Royale des Sciences de Liege. 5^{me} serie*. 1962;VIII(5):64–68, 103, 104.
5. Maquoi R., Massonnet C. Interaction between local plate buckling and overall buckling in thin-walled compression members. *New York Harvard University Theories and Experiments: Proceedings of the IUTAM International Symposium on Buckling of Structures*. 1976:365–382.
6. Nylander H. Initially deflected thin plate with initial deflection affine to add. *Deflektion. International vereinigung fur Bruckenbau und Hochbau Abhandlungen*. 1951;11.
7. Tvergaard V. Imperfection sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression. *Int. J. Solids Structures*. 1973;9:177–192.
8. Van Der Neut A. The interaction of local buckling and column failure of imperfect thin-walled compression members. *Delft Technological University Report VTH-149*. 1968:391–398.
9. Van Der Neut A. Mode interaction with a stiffened panel. *Harvard Proc. IUTAM Symp., Buckling of Structures*. 1974:117–132.
10. Van Der Neut A., Majer J. The interaction of local buckling and column failure of imperfect thin-walled compression members. *Delft University of Technology, Department of Aeronautic Engineering Report VTH-160*. 1970:6–18.
11. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical analysis of critical equilibrium of flexible supported plate with allowance for influence initial geometrical imperfections. *Structural mechanics and analysis of constructions*. 2020;(1):30–36. (In Russ.)
12. Manevich A.I. K teorii svyazannoj poteri ustojchivosti podkreplennyh tonkostennyh konstrukcij [On the theory of coupled loss of stability in stiffened thin-walled structures]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982;(2):337–345. (In Russ.)
13. Manevich A.I. Vzaimodejstvie form poteri ustojchivosti, szhatoj podkreplenoj paneli [Coupled stability loss of a compressed stiffened panel]. *Structural mechanics and analysis of constructions*. 1981;(5):24–29. (In Russ.)

Gaik A. Manuylov, Ph.D., Associate Professor; eLIBRARY AuthorID: 527188.

Sergey B. Kositsyn, adviser of the RAACS, D.Sc. in Engineering, Professor of the Department of Theoretical Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 9390-7610, ORCID iD: 0000-0002-3241-0683.

Irina E. Grudtsyna, postgraduate student of the Department of Theoretical Mechanics.

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-62-75
УДК 624.04:534.11

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Новые операционные соотношения и их применение к решению нестационарных задач для стержней на основе теории С.П. Тимошенко

А.Л. Зоненберг

АО «ЦНИИЭП жилища – Институт комплексного проектирования жилых и общественных зданий», Российская Федерация, 127434, Москва, Дмитровское шоссе, д. 9, стр. 3
*zonenberg@list.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 16 ноября 2019 г.

Доработана: 24 января 2020 г.

Принята к публикации: 28 января 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Для исследования переходных волновых процессов деформации в стержнях на основе теории С.П. Тимошенко необходимо иметь точные аналитические решения нестационарных задач в общем виде. Каждое точное решение в рамках данной аналитической модели является точным описанием реального процесса и служит критерием при оценке точности приближенных решений. При использовании операционного исчисления для анализа бегущих волн наибольшие трудности представляет именно этап перехода от изображения к начальной функции (оригиналу). Из опубликованных работ следует, что имеющиеся решения некоторых частных задач либо имеют структуру, которая не позволяет судить об основных чертах исследуемого процесса, либо их эффективность при вычислениях достигается только в некоторых довольно ограниченных областях значений координаты и времени. Эта проблема, требующая решения, определила цель настоящей статьи. **Цель.** Статья посвящена разработке новых операционных соотношений и их применению к построению точных аналитических решений нестационарных задач теории С.П. Тимошенко для стержней в общем виде в физически наглядной и удобной для практических расчетов форме. **Методы.** В работе использованы методы теории функций комплексного переменного, операционное исчисление на основе интегрального преобразования Лапласа – Карсона, методы динамики сооружений. **Результаты.** В общем виде сформулированы три типа нестационарных задач для полубесконечного стержня на основе теории Тимошенко. Получены новые операционные соотношения. На основе этих соотношений разработан способ нахождения оригиналов без использования общей формулы обращения. Решения задач записываются в виде интегралов от бесселевых функций и в отличие от решений, имеющихся в литературе, ясно показывают волновой характер изучаемых процессов, имеют наглядный и компактный вид. В статье рассмотрен пример расчета.

Ключевые слова: переходные волновые процессы; теория С.П. Тимошенко; стержни; бегущие волны; операционное соотношение; интегральное преобразование Лапласа – Карсона; бесселевы функции

Для цитирования

Зоненберг А.Л. Новые операционные соотношения и их применение к решению нестационарных задач для стержней на основе теории С.П. Тимошенко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 62–75. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-62-75>

Введение

Одной из задач динамики сооружений является разработка принципов и методов расчета сооруже-

жений при действии на конструкцию сил, приложенных лишь на короткий промежуток времени или быстро изменяющихся. Это явление надо рассматривать с точки зрения распространения волн напряжения [1]. Проблема распространения волн приводит к отысканию решения нестационарной задачи теории волн.

В случае поперечных колебаний стержней при указанных воздействиях классическая теория Бер-

Зоненберг Александр Леонидович, главный специалист-инженер, отдел конструкций жилых и общественных зданий; ORCID iD: 0000-0003-2773-3047.

© Зоненберг А.Л., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

нулли – Эйлера во многих отношениях становится непригодной. Классическое уравнение относится к параболическому типу, что физически означает бесконечную скорость распространения возмущения.

Теория С.П. Тимошенко [2], учитывающая в отличие от классической теории также инерцию вращения поперечных сечений стержня и деформацию сдвига, дает результаты, очень близкие к точным результатам, вытекающим из теории упругости. Уравнение Тимошенко является вполне гиперболическим и описывает распространение двух слабых разрывов (изгибного и сдвигового) с конечными скоростями.

Для исследования переходных волновых процессов деформации в стержнях на основе теории Тимошенко необходимо иметь точные аналитические решения нестационарных задач в общем виде.

Каждое точное аналитическое решение имеет большую значимость, так как в рамках данной аналитической модели является точным описанием реального процесса, служит критерием при оценке точности приближенных решений, позволяет отлаживать и верифицировать программы, в которых реализованы численные методы, является фундаментальным теоретическим фактом.

Наиболее ясное представление о физической сущности нестационарных задач обычно дают решения в бегущих волнах. В общем виде такие решения отсутствуют.

При использовании интегрального преобразования Лапласа по времени для построения решения в виде бегущих волн наибольшие трудности представляет именно этап перехода от изображения к начальной функции (оригиналу).

Анализ работ по теории Тимошенко, в том числе упомянутых в обзоре [3] и современных [4–8], показал, что имеющиеся решения в бегущих волнах некоторых частных задач либо очень громоздки и имеют структуру, которая неясно выражает наиболее существенные черты описываемого процесса, либо их эффективность при вычислениях достигается только в некоторых довольно ограниченных областях значений координаты и времени. Формы представления этих решений не удовлетворяют, например, общим условиям, упомянутым в работе [9], для форм, в которых желательнее всего представить решение.

Исключениями являются исследования [10–12], в которых рассмотрены лишь частные задачи.

Таким образом, построение в общем виде точных аналитических решений нестационарных задач теории С.П. Тимошенко для стержней в физически наглядной и удобной для практических расчетов форме является актуальной проблемой.

В данной работе в общем виде сформулированы три типа нестационарных задач для полубесконечного стержня и описан метод получения указанных решений. Рассматриваются однородные призматические стержни. Решения строятся в виде бегущих волн методами операционного исчисления на основе интегрального преобразования Лапласа – Карсона по времени. Выводятся новые операционные соотношения, на основе которых показан способ нахождения оригиналов в наглядном и компактном виде, без использования общей формулы обращения.

1. Постановка задач и изображение их решений

Для постановки исследуемых задач принимаем следующие условные обозначения: Ox, Oy, Oz – оси прямоугольной системы координат (x – координата вдоль оси стержня); t – время; A_b – площадь поперечного сечения стержня; J_b – момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси Oy ; k' – коэффициент сдвига; ρ – объемная плотность; E – модуль Юнга; G – модуль сдвига; q – интенсивность внешней поперечной нагрузки; w – поперечное перемещение центра тяжести сечения стержня от положения его статического равновесия; ψ – угол поворота поперечного сечения, обусловленный изгибом, относительно нейтральной оси; M – изгибающий момент; Q – поперечная сила.

Уравнения Тимошенко имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k'A_b G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - \rho J_b \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \\ -k'A_b G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \rho A_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В качестве основы для определения и исследования изображений решений нестационарных задач теории Тимошенко могут служить соотношения, полученные при решении в пространстве изображений нестационарной задачи для бесконечного стержня ($-\infty < x < \infty$) при нулевых начальных условиях, находящегося под действием поперечной сосредоточенной импульсной нагрузки, приложенной в момент времени $t = 0$ ($q(x,t) = R\delta_1(x)\delta_1(t)$, где $R = \text{const}$, δ_1 – единичная импульсивная функция). Точку приложения силы примем за начало координат. Вследствие симметрии рассмотрим только часть стержня, расположенную правой точки приложения нагрузки.

Таким образом, математическая формулировка этой задачи следующая: найти решение системы

уравнений (1) ($q(x, t) = 0$) при $0 < x < \infty, t > 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \psi(0, t) = 0 \\ Q(0, t) = -\frac{R}{2} \delta_1(t) \end{aligned} \right\} (t > 0) \quad (2)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} w(x, 0) = 0, \psi(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} (0 < x < \infty). \quad (3)$$

Ищем решение, обращающееся вместе со своими производными по x в нуль при $x \rightarrow \infty$.

Аналогично рассматриваются три типа нестационарных задач для полубесконечного стержня ($0 \leq x < \infty$) при нулевых начальных условиях и следующих условиях закрепления конца $x = 0$ и внешних нестационарных воздействиях, приложенных к концу $x = 0$:

– задача I_0 – конец $x = 0$ свободно оперт, опора смещается по закону $w_0(t)$, на конце $x = 0$ приложен изгибающий момент $M_0(t)$;

– задача II_0 – конец $x = 0$ защемлен, опора смещается по закону $w_0(t)$ и поворачивается по закону $\psi_0(t)$;

– задача III_0 – на свободном конце $x = 0$ приложены изгибающий момент $M_0(t)$ и поперечная сила $Q_0(t)$.

Здесь $w_0(t), \psi_0(t), M_0(t), Q_0(t)$ – заданные функции времени t , причем исходя из физического смысла будем считать функции $w_0(t)$ и $\psi_0(t)$ непрерывными при $t \geq 0$ и равными нулю при $t = 0$.

Математическая формулировка этих задач аналогична формулировке задачи, приведенной выше.

Пусть $F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow f(t)$ представляет

изображение начальной функции (оригинала) $f(t)$, где $p = s + i\omega$ – комплексная переменная (параметр интегрального преобразования Лапласа – Карсона).

К сожалению, объем статьи не позволяет привести здесь все изображения решений сформулированных задач. Но, чтобы получить представление о структуре изображений в этих задачах, рассмотрим, например, изображение функции $\psi(x, t)$ в задаче II_0 при $\psi_0(t) = 0$. Оно записано так, чтобы выделить указанные ниже представители изображений двух типов:

$$\Psi(x, p) = C \frac{1}{p} W_0(p) p \times \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{p}{c_2^2 + r_1 r_2} \left[\frac{p}{r_2^2 - r_1^2} \left(\left(\frac{p^2}{c_2^2} - r_1^2 \right) \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} - \left(\frac{p^2}{c_2^2} - r_2^2 \right) \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \right) \right] \right] - \\ & \left[\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{e^{-r_1 x}}{r_1} - \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \right) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Здесь $r_{1,2}(p)$ – непрерывные однозначные ветви многозначной функции

$$r(p) = A_1 \sqrt{p^2 + A_2} \sqrt{p^2 - A_3^2}, \quad (5)$$

выделенные на плоскости p с разрезами $-A_3 \leq \text{Re } p \leq A_3, -\lambda \leq \text{Im } p \leq \lambda$ и на плоскости p с разрезом $-A_3 \leq \text{Re } p \leq A_3$ соответственно (рис. 1).

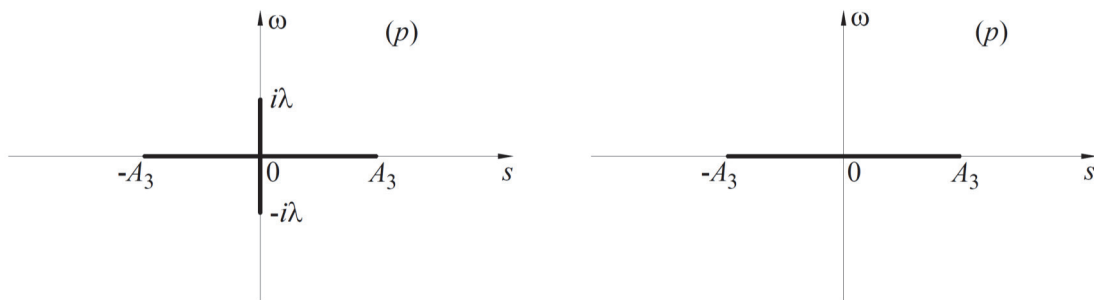


Рис. 1. Области, в которых выделены однозначные ветви $r_1(p), r_2(p)$
 [Figure 1. Define of single-valued functions $r_1(p), r_2(p)$ on the complex plane]

Приведем выражения для постоянных, используемых здесь и далее:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{k'G}{\rho}}, C = \frac{\rho A_b}{E J_b}, v = \frac{c_1}{c_2},$$

$$A_1 = \frac{1}{c_1 c_2} \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{2}}, A_2 = \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2 + c_2^2}, A_3 = \frac{2\sqrt{C}}{\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}},$$

$$A_4 = \frac{1}{2} A_3 (v - 1), \lambda = c_1 c_2 \sqrt{C}. \quad (6)$$

Ветви r_1 и r_2 удовлетворяют на действительной оси следующим асимптотическим формулам:

$$r_1(p) \sim A_1 \sqrt{1 - A_2 p} = \frac{p}{c_1},$$

$$r_2(p) \sim A_1 \sqrt{1 + A_2 p} = \frac{p}{c_2} \quad (\operatorname{Re} p \rightarrow \infty, \operatorname{Im} p = 0).$$

В этом случае $\operatorname{Re}(r_1(p)) > 0$ и $\operatorname{Re}(r_2(p)) > 0$ при $\operatorname{Re} p > A_3$.

Изображения искомым функций содержат два типа функций. В настоящей статье будут рассмотрены основные представители этих типов:

– изображения 1-го типа:

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{p}{c_2^2} - \frac{r_1^2}{p} \right)^n \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} \Rightarrow \Phi_n^{(1)}(x, t),$$

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{p}{c_2^2} - \frac{r_2^2}{p} \right)^n \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \Rightarrow \Phi_n^{(2)}(x, t),$$

где $n = 0, 1$;

2) изображение 2-го типа:

$$\frac{p}{\frac{p^2}{c_2^2} + r_1 r_2} \Rightarrow \kappa(t).$$

Изображения 1-го типа не содержат произведения $r_1 r_2$, то есть не содержат радикал $\sqrt{p^2 + \lambda^2}$, и характеризуются наличием радикала $\sqrt{p^2 - A_3^2}$. Изображения 2-го типа содержат произведения $r_1 r_2$, то есть радикал $\sqrt{p^2 + \lambda^2}$, и не содержат радикал $\sqrt{p^2 - A_3^2}$. Отметим, что из рассмотренных задач изображения 2-го типа имеют место только в задачах Π_0 и Π_0 .

2. Проблема определения начальных функций. Вывод новых операционных соотношений

В практической реализации метода интегральных преобразований наиболее трудным этапом обычно является построение начальной функции (оригинала) по полученному изображению. Для этой цели можно было бы воспользоваться сразу формулой обращения Римана – Меллина [13]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp,$$

где $F(p)$ – изображение начальной функции $f(t)$, L – контур Римана – Меллина в плоскости p , лежащий справа от всех особых точек функции $F(p)/p$.

Однако очевидно, что такого способа определения оригинала следует по возможности избегать и вместо этого пытаться применить теоремы операционного исчисления [13], с помощью которых полученные изображения сводятся к имеющимся в справочниках по операционному исчислению (например, [14]).

Перечислим следующие основные способы определения оригиналов, рассматриваемые в литературе [9; 15; 16]:

1) использование операционных теорем и табличных соотношений;

2) непосредственное использование формулы обращения;

3) представление изображения в виде ряда, допускающего достаточно простой почленный переход от изображения к оригиналу;

4) асимптотические разложения;

5) численное обращение.

Каждый из перечисленных методов обладает достоинствами и недостатками. При этом, как было отмечено во введении, важно, чтобы формы представления оригиналов удовлетворяли некоторым условиям [9]. Это – обозримость результата, позволяющая судить об основных чертах исследуемого процесса, и возможность вычисления значений оригинала с заданной точностью.

Итак, возвратимся к рассматриваемым задачам. В данной статье применяется первый способ.

Следует отметить, что полученные изображения имеют весьма сложную структуру из-за сложности выражения (5). Видимо, поэтому в известных нам работах, в которых уравнения Тимошенко решались с помощью преобразования Лапласа по t (см. введение), не был использован первый способ. Исключениями являются работы [10–12], в которых рассмотрены лишь частные задачи.

Однако нам удалось в общем случае пойти по этому пути – пути построения оригиналов с помощью операционных теорем и соотношений. Но для этого выводятся новые, не имеющиеся в литературе по операционному исчислению, операционные соотношения.

Одно из этих соотношений (назовем его основным) дает выражение начальной функции для изображения следующего вида:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{F(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2})^m (a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}, \quad (7)$$

где $F(p) \Rightarrow f(t)$ – некоторое известное (табличное) соотношение; $a_1 + a_2 \geq 0$ (a_1 и a_2 не равны нулю одновременно); α, m – комплексные числа, $\operatorname{Re} m > -1$.

Таким образом, таблица операционных соотношений [14] будет дополнена новыми соотношениями.

Оригиналы для всех изображений, полученных при решении рассматриваемых задач, можно найти с помощью этой расширенной таблицы и некоторых теорем операционного исчисления. Как будет показано далее, при таком способе нахождения оригиналов решения поставленных задач, полученные в явной аналитической форме, представляются в виде интегралов, но имеют ясно выраженный волновой характер и компактный вид.

Очень важно также, что и для стержней конечной длины с помощью перечисленных средств можно получить в явной аналитической форме оригиналы для изображений прямых и отраженных волн.

Отметим, что при построении оригиналов рассматриваемым способом ограничиться чисто операционными методами не удастся. Связано это с тем, что, хотя операционное решение более коротко, более просто, в нем явно не выражается наличие условий, достаточных для законности той или иной операции. Поэтому в сложных случаях (например, при наличии многозначных функций, как в нашем случае) для того, чтобы аналитический смысл каждой операции был совершенно ясен, подробно исследовано поведение изображений в комплексной плоскости.

Основное операционное соотношение найдем, применяя преобразование А.М. Эфроса (обобщенную теорему Бореля) [17]. Укажем здесь два варианта вывода этого соотношения.

1. Непосредственно используем преобразование Эфроса при

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 0, \\ a_2 > 0. \end{cases}$$

Приводим окончательные результаты.

При

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha^{m-2} p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^{m-1}} F\left[a_2 \left(\sqrt{p^2 - \alpha^2} - p\right)\right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow t^{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} (t + 2\tau)^{-\frac{m}{2}} I_m\left[\alpha \sqrt{t(t + 2\tau)}\right] f\left(\frac{\tau}{a_2}\right) d\tau, \\ & a_2 > 0, \quad \operatorname{Re} m > -1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь I_m – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка m [18].

При $a_2 = 1$ мы получаем имеющийся в литературе по операционному исчислению (например, в [14]) частный случай преобразования Эфроса.

При

$$\begin{cases} a_1 + a_2 > 0, \\ a_2 > 0, \end{cases}$$

обозначив

$$a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad (9)$$

получим

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2) \frac{\alpha^m p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^m} \frac{F\left(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_0^t \left(\frac{t - \tau}{t - a\tau}\right)^{\frac{m}{2}} I_m\left[\alpha \sqrt{(t - \tau)(t - a\tau)}\right] f\left(\frac{\tau}{a_1 + a_2}\right) d\tau, \\ & \operatorname{Re} m > -1, \end{aligned} \quad (10)$$

где a_1 и a_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a_1 + a_2 > 0, \\ a_2 > 0. \end{cases}$$

2. Другой вариант вывода искомого операционного соотношения основан на использовании известных из литературы частных случаев преобразования Эфроса. При этом принимаем, что $-a_1 \leq a_2 < a_1$.

Тем самым будет рассмотрен также случай $-a_1 \leq a_2 \leq 0$ (a_1 и a_2 не равны нулю одновременно), не охваченный в первом варианте вывода.

Данный вариант вывода искомого операционного соотношения рассмотрим подробно.

Допустим сначала, что $-a_1 < a_2 < a_1$. Изображение в левой части соотношения (10) можно представить как результат следующей цепочки преобразований:

$$\begin{aligned} F(p) & \rightarrow F\left(\frac{a_1 - a_2}{2} p\right) \rightarrow \frac{F\left[\frac{a_1 - a_2}{2} \left(p + \frac{\alpha^2}{a} \frac{1}{p}\right)\right]}{p + \frac{\alpha^2}{a} \frac{1}{p}} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{2\alpha}{a} \frac{\alpha^{m-1} p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^m} \times \\ & \times \frac{F\left\{\frac{a_1 - a_2}{2} \left[\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right) + \frac{\frac{\alpha^2}{a}}{p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}}\right]\right\}}{\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right) + \frac{\frac{\alpha^2}{a}}{p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}}} = \end{aligned}$$

$$= (a_1 + a_2) \frac{\alpha^m p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^m} \frac{F\left(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}}.$$

Для получения соответствующей каждому этапу преобразования начальной функции используем известные из литературы следующие частные случаи преобразования Эфроса [14]:

если

$$F(p) \Rightarrow f(t),$$

то

$$F_1(p) \rightarrow F\left(\frac{a_1 - a_2}{2} p\right) \rightarrow f\left(\frac{2}{a_1 - a_2} t\right) = f_1(t), \quad (11)$$

$$F_2(p) = \frac{F_1\left(p + \frac{\alpha^2}{a} \frac{1}{p}\right)}{p + \frac{\alpha^2}{a} \frac{1}{p}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2(t) = \int_0^t J_0\left[2\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1(t - \tau_1)}\right] f_1(\tau_1) d\tau_1, \quad (12)$$

где J_0 – бесселева функция первого рода нулевого порядка,

$$F_3(p) = \alpha^{m-1} \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^m} F_2\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3(t) = t^{-\frac{m+1}{2}} \int_0^{t-2\tau} (t-2\tau)^{-\frac{m+1}{2}} I_{m+1}\left[\alpha\sqrt{t(t-2\tau)}\right] f_2(\tau) d\tau,$$

$$\text{Re } m > -2. \quad (13)$$

Следовательно, для получения искомого оригинала надо найти функцию $\frac{2\alpha}{a} f_3(t)$.

При $-a_1 = a_2 < a_1$ получим соотношение

$$\frac{\alpha^{m-2} p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)^{m-1}} F\left[a_1\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty (t-2\tau)^{-\frac{m}{2}} I_m\left[\alpha\sqrt{t(t-2\tau)}\right] f\left(\frac{\tau}{a_1}\right) d\tau,$$

$$a_1 > 0, \text{ Re } m > -1, \quad (14)$$

которое следует из соотношения (13) при $F_2(p) = F(a_1 p) \Rightarrow f\left(\frac{t}{a_1}\right)$, где вместо m взято $m - 1$.

Соотношение (13) является, таким образом, частным случаем соотношения (14).

Обратимся снова к случаю $-a_1 < a_2 < a_1$. Подставим в (13) выражение для функции $f_2(\tau)$ из (12)

и переменим порядок интегрирования, используя формулу Дирихле для двойных интегралов [19]. Следовательно,

$$f_3(t) = t^{-\frac{m+1}{2}} \int_0^\infty f_1(\tau_1) d\tau_1 \int_{\tau_1}^\infty (t-2\tau)^{-\frac{m+1}{2}} I_{m+1}\left[\alpha\sqrt{t(t-2\tau)}\right] J_0\left[2\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1(\tau-\tau_1)}\right] d\tau,$$

$$\text{Re } m > -2.$$

Преобразуем внутренний интеграл, введя новую переменную $\tau_2 = \sqrt{\tau - \tau_1}$. Получим

$$2 \int_0^\infty (t-2\tau_2^2-2\tau_1)^{-\frac{m+1}{2}} I_{m+1}\left[\alpha\sqrt{t(t-2\tau_2^2-2\tau_1)}\right] J_0\left[2\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1\tau_2}\right] \tau_2 d\tau_2. \quad (15)$$

Перейдем в (15) от модифицированной бесселевой функции первого рода I_{m+1} к бесселевой функции первого рода J_{m+1} . При этом удобней рассматривать не функцию вида $I_m(z)$ (z – комплексная переменная), а функцию $\frac{I_m(z)}{z^m}$. Используя [18], приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{I_m(z)}{z^m} = \frac{J_m(iz)}{(iz)^m}, \quad (16)$$

$$\frac{J_m(z)}{z^m} = \frac{I_m(iz)}{(iz)^m}. \quad (17)$$

Отметим, что функции $\frac{I_m(z)}{z^m}$ и $\frac{J_m(z)}{z^m}$ являются четными.

Тогда выражение (15) согласно (16) преобразуется к виду, содержащему разрывный интеграл Сонина [18]:

$$2^{-\frac{m-1}{2}} \int_0^\infty \frac{J_{m+1}\left\{\alpha\sqrt{2t}\sqrt{\tau_2^2 + \left(\tau_1 - \frac{t}{2}\right)}\right\}}{\left\{\tau_2^2 + \left(\tau_1 - \frac{t}{2}\right)\right\}^{\frac{m+1}{2}}} J_0\left[2\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1\tau_2}\right] \tau_2 d\tau_2 =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 2\frac{1}{a}\tau_1, \\ \frac{1}{\alpha \cdot t^{\frac{m+1}{2}}} \left\{\frac{\sqrt{t-2\frac{1}{a}\tau_1}}{\sqrt{2\tau_1-t}}\right\}^m J_m\left\{\alpha\sqrt{(2\tau_1-t)\left(t-2\frac{1}{a}\tau_1\right)}\right\}, & t > 2\frac{1}{a}\tau_1. \end{cases}$$

Для обеспечения сходимости этого интеграла под величинами $\alpha\sqrt{2t}$ и $\alpha\sqrt{\frac{1}{a}\tau_1}$ подразумеваются положительные величины, то есть $\alpha > 0$, а $\text{Re}(m+1) > 0$ [18].

Ограничение $\alpha > 0$ вызвано только способом вывода, а не существом дела: как сказано выше, основное операционное соотношение, которое будет получено далее, справедливо и для комплексных α .

Далее получим

$$f_3(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{at}{t-2\tau_1}} \left(\frac{t-2\frac{1}{a}\tau_1}{t-2\tau_1} \right)^{\frac{m}{2}} I_m \left\{ \alpha \sqrt{(t-2\tau_1) \left(t-2\frac{1}{a}\tau_1 \right)} \right\} f \left(\frac{2}{a_1-a_2} \tau_1 \right) d\tau_1.$$

Переходя к новой переменной интегрирования $\tau = 2\frac{1}{a}\tau_1$, получим соотношение (10), но при поставленном условии $-a_1 < a_2 < a_1$.

Отметим, что второй вариант вывода основного операционного соотношения послужил нам методической основой при первоначальных попытках нахождения оригиналов для частных видов изображения (7).

Объединяя условия для a_1 и a_2 , поставленные при обоих вариантах вывода, получаем искомое операционное соотношение (основное)

$$S_m^{(2)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = (a_1 + a_2) \alpha^m \times \\ \times \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)^m} \frac{F \left(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^t \left(\frac{t-\tau}{t-\alpha\tau} \right)^{\frac{m}{2}} I_m \left[\alpha \sqrt{(t-\alpha\tau)(t-\tau)} \right] f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau, \quad (18)$$

где, в соответствии с обобщенной теоремой Бореля, $F(p)$ удовлетворяет условиям обратной теоремы относительно формул Римана – Меллина [17] (в дальнейшем об этих условиях для $F(p)$ упоминать не будем; они будут всегда выполнены),

$$a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad a_1 + a_2 > 0, \quad \text{Re } m > -1,$$

а также соотношения (8) и (14) при $a_1 = -a_2 \neq 0$, $\text{Re } m > -1$.

Смысл верхнего индекса в обозначении $S_m^{(2)}$ станет понятен далее.

Из соотношения (18) при $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, а также при $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ следуют имеющиеся в литературе частные случаи преобразования Эфроса [14].

Далее нам потребуются некоторые дополнительные соотношения.

1) Заменяем в соотношении (18) a_2 на $-a_2$ и переходим к новой переменной интегрирования $\tau_1 = \frac{\tau}{a}$ (ниже обозначим ее опять через τ), получим

$$S_m^{(1)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = S_m^{(2)}(a_1, -a_2, \alpha, F(p), p) = \\ = (a_1 + a_2) \alpha^m \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)^m} \frac{F \left(a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)}{a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{t}{a}} \left(\frac{t-\alpha\tau}{t-\tau} \right)^{\frac{m}{2}} I_m \left[\alpha \sqrt{(t-\tau)(t-\alpha\tau)} \right] f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau, \quad (19) \\ a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad a_1 - a_2 > 0, \quad \text{Re } m > -1.$$

2) Получим оригинал для случая, когда $m = -1$ ($S_{-1}^{(2)}(p)$ является изображением):

$$S_{-1}^{(2)}(p) = \frac{1}{\alpha} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) S_0^{(2)}(p) = \\ = \frac{1}{\alpha} \left[2p S_0^{(2)}(p) - \left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) S_0^{(2)}(p) \right].$$

Здесь не перечислены для сокращения записи все параметры, от которых зависит функция $S_m^{(2)}$.

Оригинал найдем из (18): для первого изображения в квадратных скобках – по теореме дифференцирования оригинала [13] (оригинал в правой части соотношения (18) при $t = 0$ равен нулю); для второго изображения – из соотношения

$$\left(p - \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) S_0^{(2)}(p) = \alpha S_1^{(2)}(p).$$

В результате имеем

$$S_{-1}^{(2)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = \\ = (a_1 + a_2) \frac{1}{\alpha} \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) \frac{F \left(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^t f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) \left(\frac{t-\alpha\tau}{t-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} I_1 \left[\alpha \sqrt{(t-\alpha\tau)(t-\tau)} \right] d\tau + \frac{2}{\alpha} f \left(\frac{t}{a_1 + a_2} \right), \\ a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad a_1 + a_2 > 0. \quad (20)$$

Заменяя здесь a_2 на $-a_2$ и переходя к новой переменной интегрирования, получим

$$S_{-1}^{(1)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = \\ = (a_1 + a_2) \frac{1}{\alpha} \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) \frac{F \left(a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)}{a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{t}{a}} f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) \left(\frac{t-\tau}{t-\alpha\tau} \right)^{\frac{1}{2}} I_1 \left[\alpha \sqrt{(t-\alpha\tau)(t-\tau)} \right] d\tau + \frac{2}{\alpha a} f \left(\frac{t}{a_1 - a_2} \right), \\ a = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad a_1 - a_2 > 0. \quad (21)$$

3) Сравнивая (18) и (19) при $m = 0$, а также (18) при $m = 1$ и (21), отметим, что соответствующие интегралы отличаются только верхним пределом интегрирования. Тогда напишем в обобщенном виде очень полезное соотношение:

$$\begin{aligned}
 S_n(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) &= S_{-n}^{(1)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) - \\
 -S_n^{(2)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) &= (a_1 + a_2) \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \times \\
 \times \left[\frac{1}{\alpha^n} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)^n \frac{F(a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} - \right. \\
 \left. - \alpha^n \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right)^n} \frac{F(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow (-1)^n \int_t^{\frac{t}{\alpha}} \left(\frac{\tau - t}{t - \alpha \tau} \right)^n J_n \left[\alpha \sqrt{(t - \alpha \tau)(\tau - t)} \right] \times \\
 \times f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau + n \frac{2}{\alpha \alpha} f \left(\frac{t}{a_1 - a_2} \right). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Здесь должно быть $a_1 - a_2 > 0$ и $a_1 + a_2 > 0$, то есть $a_1 > |a_2|$; $n = 0, 1$.

Используя (19) при $m = 1$ и (20), получим

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_1(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) &= S_1^{(1)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) - \\
 -S_{-1}^{(2)}(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) &= (a_1 + a_2) \frac{p}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \times \\
 \times \left[\alpha \frac{1}{p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \frac{F(a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{a_1 p - a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} - \right. \\
 \left. - \frac{1}{\alpha} \left(p + \sqrt{p^2 - \alpha^2} \right) \frac{F(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2})}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int_t^{\frac{t}{\alpha}} \left(\frac{t - \alpha \tau}{\tau - t} \right)^{\frac{1}{2}} J_1 \left[\alpha \sqrt{(\tau - t)(t - \alpha \tau)} \right] f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau - \\
 - \frac{2}{\alpha} f \left(\frac{t}{a_1 + a_2} \right), \quad a_1 > |a_2|. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Легко заметить, что $\tilde{S}_1(a_1, a_2, \alpha, F(p), p) = -\frac{1}{\alpha} S_1(a_1, -a_2, \alpha, F(p), p)$.

4) Заменяя в соотношении (18) α на $i\alpha$ и используя (17), получим

$$\begin{aligned}
 (a_1 + a_2) \alpha^m \frac{p}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} \frac{1}{\left(p + \sqrt{p^2 + \alpha^2} \right)^m} \times \\
 \times \frac{F(a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 + \alpha^2})}{a_1 p + a_2 \sqrt{p^2 + \alpha^2}} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \left(\frac{t - \tau}{t - \alpha \tau} \right)^{\frac{m}{2}} J_m \left[\alpha \sqrt{(t - \alpha \tau)(t - \tau)} \right] f \left(\frac{\tau}{a_1 + a_2} \right) d\tau,$$

$$a_1 + a_2 > 0, \quad \operatorname{Re} m > -1. \quad (24)$$

При $a_1 = 0, a_2 = 1$ из (24) следует имеющийся, например, в [14], частный случай преобразования Эфроса.

Заменяя α на $i\alpha$ в соотношениях (8) и (14), получим новые операционные соотношения, которые при $a_2 = 1$ и $a_1 = 1$ соответственно сводятся к имеющимся в [14].

Таким образом, найден ряд новых операционных соотношений, с помощью которых будут определены начальные функции в рассматриваемых задачах теории Тимошенко.

3. Определение начальных функций с помощью новых операционных соотношений

Возвратимся к нестационарным задачам теории Тимошенко для бесконечного и полубесконечного стержней. Изображения решений этих задач необходимо представить в таком виде, чтобы применить новые операционные соотношения и некоторые известные теоремы операционного исчисления к отдельным составляющим изображений (см., например, формулу (4)). Если эти составляющие относятся к разным типам (1-му или 2-му), то применяются разные новые операционные соотношения.

Покажем, как определить начальные функции с помощью новых операционных соотношений.

1) *Начальные функции для изображений 1-го типа.* Легко доказать, что r_1 и r_2 получаются из выражения

$$\frac{1}{2c_2} \sqrt{p^2 + A_3^2 \left(1 - \frac{1}{v} \right)^2}$$

при замене p на

$$\left(1 + \frac{1}{v} \right) p - \left(1 - \frac{1}{v} \right) \sqrt{p^2 - A_3^2}$$

$$\text{и} \quad \left(1 + \frac{1}{v} \right) p + \left(1 - \frac{1}{v} \right) \sqrt{p^2 - A_3^2}$$

соответственно.

Отсюда следует, что при использовании соотношений (19), (21) и (18), (20) соответственно надо принять

$$a_1 = 1 + \frac{1}{v}, \quad a_2 = 1 - \frac{1}{v}, \quad \alpha = A_3.$$

Тогда, согласно (9),

$$a = \frac{1}{v}.$$

При этом за исходное соотношение $F(p) \Rightarrow f(t)$ будем принимать следующее табличное соотношение [14]:

$$F(p) = 2c_2 \frac{pe^{-\frac{x}{2c_2} \sqrt{p^2 + A_3^2 \left(1 - \frac{1}{v}\right)^2}}}{\sqrt{p^2 + A_3^2 \left(1 - \frac{1}{v}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{2c_2}, \\ 2c_2 J_0 \left[A_3 \left(1 - \frac{1}{v}\right) \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{2c_2}\right)^2} \right], & t > \frac{x}{2c_2}. \end{cases} \quad (25)$$

Допустим, требуется найти оригинал для изображения $\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1}$. Используя соотношение (19), получим

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} = \frac{1}{2A_1^2 A_2} \frac{p}{\sqrt{p^2 - A_3^2}} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} =$$

$$= \frac{1}{4A_1^2 A_2} S_0^{(1)} \left(1 + \frac{1}{v}, 1 - \frac{1}{v}, A_3, F(p), p \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_0^{(1)}(x, t) = \frac{1}{4A_1^2 A_2} \int_0^t I_0 \left[A_3 \sqrt{(t - \tau) \left(t - \frac{\tau}{v}\right)} \right] f\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau,$$

где $f\left(\frac{\tau}{2}\right)$ принимается согласно (25).

В результате получим

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} \Rightarrow \varphi_0^{(1)}(x, t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1}, \\ \frac{A_3 c_1}{2\sqrt{C}} \int_0^t J_0 \left[A_4 \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2} \right] I_0 \left[A_3 \sqrt{(t - \nu\tau)(t - \tau)} \right] d\tau, & t > \frac{x}{c_1}. \end{cases} \quad (26)$$

При $t > \frac{x}{c_1}$ имеем $\frac{x}{c_1} < \tau < t$, таким образом, выражение $t - \nu\tau$ может быть больше, меньше или равно нулю. В зависимости от знака этого выражения имеем или функцию $I_0 \left[A_3 \sqrt{(t - \tau)(t - \nu\tau)} \right]$, или функцию $J_0 \left[A_3 \sqrt{(\nu\tau - t)(t - \tau)} \right]$ (от действительного аргу-

мента). Следовательно, рассмотрим два случая, определяемые соотношением $\frac{x}{c_1}$ и $\frac{t}{v}$:

а) $\frac{t}{v} < \frac{x}{c_1} < t$, или $\frac{x}{c_1} < t < \frac{x}{c_2}$; тогда на всем интервале интегрирования $\tau > \frac{t}{v}$;

б) $\frac{x}{c_1} < \frac{t}{v} < t$, или $t > \frac{x}{c_2} > \frac{x}{c_1}$; тогда интервал интегрирования следует разбить на две части: $\frac{x}{c_1} < \tau < \frac{t}{v}$ и $\frac{t}{v} < \tau < t$.

Оригинал для изображения $\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2}$ можно получить, применяя соотношение (18), так как

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} = \frac{1}{2A_1^2 A_2} \frac{p}{\sqrt{p^2 - A_3^2}} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} =$$

$$= \frac{1}{4A_1^2 A_2} S_0^{(2)} \left(1 + \frac{1}{v}, 1 - \frac{1}{v}, A_3, F(p), p \right).$$

Тогда

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \Rightarrow \varphi_0^{(2)}(x, t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_2}, \\ \frac{A_3 c_2}{2\sqrt{C}} \int_0^t J_0 \left[\frac{A_4}{v} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c_2}\right)^2} \right] I_0 \left[A_3 \sqrt{\left(t - \frac{\tau}{v}\right)(t - \tau)} \right] d\tau, & t > \frac{x}{c_2}. \end{cases} \quad (27)$$

Теперь становится понятен смысл верхнего индекса в обозначениях $S_m^{(1)}$ и $S_m^{(2)}$: изображения рассматриваемого типа, содержащие множитель $\frac{e^{-r_1 x}}{r_1}$, приводятся к изображению $S_m^{(1)}$, а изображения, содержащие множитель $\frac{e^{-r_2 x}}{r_2}$, приводятся к изображению $S_m^{(2)}$, где по-прежнему $F(p)$ принимается согласно (25).

Для сравнения приведем теперь в наших обозначениях оригинал, например, для изображения $\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1}$, найденный в работе [20] с использованием общей формулы обращения для преобразования Лапласа:

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} \Rightarrow \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1}, \\ \frac{1}{\pi A_1 \sqrt{C}} \int_0^1 \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} + \rho_1}{2}} \cos \left\{ A_1 A_3 x \sqrt{\frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} - \rho_1 \right]} \right\} \times \right. \\ \times sh \left\{ A_3 \rho_1 t - A_1 A_3 x \sqrt{\frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} + \rho_1 \right]} \right\} - \\ \left. - \sqrt{\frac{\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} - \rho_1}{2}} \sin \left\{ A_1 A_3 x \sqrt{\frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} - \rho_1 \right]} \right\} \times \right. \\ \left. \times ch \left\{ A_3 \rho_1 t - A_1 A_3 x \sqrt{\frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} + \rho_1 \right]} \right\} \right\} \frac{d\rho_1}{\sqrt{(1-A_2^2)\rho_1^2 + A_2^2} \sqrt{\rho_1(1-\rho_1^2)}} + \\ + \frac{1}{\pi A_1 \sqrt{C}} \int_0^{\frac{A_2}{\sqrt{1-A_2^2}}} \frac{\sin A_3 \rho_1 t \cdot ch \left(A_1 A_3 x \sqrt{A_2 \rho_1 \sqrt{\rho_1^2 + 1} - \rho_1^2} \right)}{\sqrt{A_2 \rho_1 \sqrt{\rho_1^2 + 1} - \rho_1^2} \sqrt{\rho_1^2 + 1}} d\rho_1, & t > \frac{x}{c_1}. \end{cases} \quad (28)$$

Сравнение при $t > x/c_1$ (26) с (28) показывает, что оригинал в соотношении (26), в отличие от оригинала в соотношении (28), имеет компактный, наглядный вид, что способствует более простому анализу оригинала. Мы не имеем еще полного решения конкретной задачи, однако вид оригиналов в соотношениях (26) и (27) подтверждает известный факт: теория Тимошенко описывает распространение двух волн со скоростями фронтов c_1 и c_2 ; структура указанных оригиналов (нижний и верхний пределы интегралов, вид аргумента функции типа $J_0 \left[A_4 \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2} \right]$) имеет ясно выраженный волновой характер, что нельзя сказать об оригинале в соотношении (28).

Характерным обстоятельством является то, что в изображениях, полученных при решении задач для бесконечного и полубесконечного стержней, одна половина слагаемых (при $e^{-r_2 x}$) получается из другой (при $e^{-r_1 x}$) заменой r_1 на r_2 , и наоборот. В формуле (4) это изображения в квадратных скобках. Например, следующие два изображения всегда находятся вместе в такой комбинации:

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} - \frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{e^{-r_2 x}}{r_2}. \quad (29)$$

Если при $t > \frac{x}{c_2}$ в первом слагаемом оригинала $\varphi_0^{(1)}(x, t)$ перейти к новой переменной интегрирования $\tau_1 = v\tau$, то видно, что это слагаемое взаимно уничтожается при $t > \frac{x}{c_2}$ с оригиналом $\varphi_0^{(2)}(x, t)$.

В связи с этим лучше сразу использовать совместные соотношения (22) и (23) при нахождении оригиналов для изображений типа (29). Например, из (22) в обобщенном виде получим

$$\frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{p}{c_2^2} - \frac{r_1^2}{p} \right) \frac{e^{-r_1 x}}{r_1} - \frac{p^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{p}{c_2^2} - \frac{r_2^2}{p} \right) \frac{e^{-r_2 x}}{r_2} \Rightarrow \varphi_n(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1}, \\ -\frac{c_1 A_3 (-\sqrt{C})^{n-1}}{2} \int_0^t \frac{(v\tau - t)^{\frac{n}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{n}{2}}} J_0 \left[A_4 \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2} \right] J_n \left[A_3 \sqrt{(t - \tau)(v\tau - t)} \right] d\tau + \\ + n c_1 v J_0 \left[A_4 \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2} \right], & t > \frac{x}{c_1}, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$t^* = \begin{cases} \frac{x}{c_1}, & \frac{x}{c_1} < t < \frac{x}{c_2}, \\ \frac{t}{v}, & t > \frac{x}{c_2}, \end{cases}$$

$n = 0, 1$.

2) Начальные функции для изображений 2-го типа. Допустим, требуется найти оригинал для

изображения $\frac{p}{\frac{p^2}{c_2^2} + r_1 r_2}$. Так как

$$\frac{p}{\frac{p^2}{c_2^2} + r_1 r_2} = -c_1^2 \frac{p}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \frac{1}{vp + \sqrt{p^2 + \lambda^2}} + \frac{c_1 c_2}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}},$$

то оригинал для первого слагаемого найдем, применяя соотношение (24) для

$$F(p) = -\frac{c_1^2 c_2}{c_1 + c_2} \Rightarrow f(t) = -\frac{c_1^2 c_2}{c_1 + c_2}$$

при

$$a_1 = v, a_2 = 1, \alpha = \lambda, m = 0;$$

оригинал для второго слагаемого находим по [14]; тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\frac{p^2}{c_2^2} + \eta_1 \eta_2} &\Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{c_1^2 c_2}{c_1 + c_2} \int_0^t J_0 \left[\lambda \sqrt{\left(t - \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \tau \right) (t - \tau)} \right] dt + c_1 c_2 \int_0^t J_0(\lambda \tau) dt &= \\ = \kappa(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Итак, оригиналы для изображений рассмотренных типов представляются в виде интегралов от бесселевых функций и определяются практически с помощью двух операционных соотношений (18) и (25).

Аналогично определяются все оригиналы в рассматриваемых задачах.

Точные аналитические выражения для перемещений и усилий в бесконечном и полубесконечном стержнях сведены в таблицы. Ограничение объема статьи позволяет привести здесь только выражения для угла поворота и изгибающего момента в рассмотренной далее тестовой задаче.

4. Решение тестовой задачи для полубесконечного стержня

Рассмотрим на основе теории Тимошенко частную нестационарную задачу о действии на защемленный полубесконечный стержень ($x \geq 0$) равномерно распределенной поперечной импульсной нагрузки, приложенной в момент времени $t = 0$; начальные условия – нулевые. Решение этой задачи, найденное с использованием общей формулы обращения для преобразования Лапласа, имеется в работе [21] (решение дано без вывода).

Поставим перед собой целью сравнить числовые результаты, полученные по формулам данной работы и в работе [21]. При решении этой задачи была отработана методика вычисления значений искомого функций на ЭВМ.

Математическая формулировка этой задачи следующая: найти решение системы уравнений (1) при $q(x, t) = R \delta_0(x) \delta_1(t)$

($R = \text{const}$; $\delta_0(x), \delta_1(t)$ – единичная функция Хевисайда и единичная импульсивная функция), $0 < x < \infty, t > 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$w(0, t) = 0, \psi(0, t) = 0 \quad (t > 0)$$

и начальным условиям (3). Ищем решение, ограниченное при $x \rightarrow \infty$.

Будем искать функцию $w(x, t)$ в виде

$$w(x, t) = w_1(x, t) + \frac{R}{\rho A_b} t. \quad (32)$$

В результате приходим к задаче Π_0 относительно функций $w_1(x, t)$ и $\psi(x, t)$ при

$$w_0(t) = -\frac{R}{\rho A_b} t, \psi_0(t) = 0.$$

В работе [21] дано выражение для безразмерного изгибающего момента $\frac{\sqrt{C}}{R} M(x, t)$. Чтобы получить выражение для этой функции, используя новые операционные соотношения, удобнее найти сначала оригинал для изображения $\Psi(x, p)$ (4), а затем – изгибающий момент из соотношения $M = -EJ_b \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

Используя (30), (31) и теорему свертывания [13], получим

$$\begin{aligned} -\frac{EJ_b}{R} \Psi(x, p) &\Rightarrow -\frac{EJ_b}{R} \psi(x, t) = \\ = \int_0^t \varphi_1(x, \tau) \kappa(t - \tau) dt - \int_0^t \varphi_0(x, \tau) dt. \end{aligned} \quad (33)$$

В зависимости от соотношения $t, \frac{x}{c_1}, \frac{x}{c_2}$ интервалы

интегрирования в (33) можно разбить на интервалы, в которых подынтегральная функция имеет конкретное аналитическое выражение. Доказав, что эти интегралы имеют частную производную по x в соответствующих областях, получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{C} M(x, t)}{R} &= -\frac{EJ_b \sqrt{C}}{R} \psi'(x, t) = \\ &= \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{c_1}, \\ \sqrt{C} \left[\int_{\frac{x}{c_1}}^t \tilde{f}'(x, t, \tau) dt - \kappa(t - \frac{x}{c_1}) \right], & \frac{x}{c_1} < t < \frac{x}{c_2}, \\ \sqrt{C} \left[\int_{\frac{x}{c_1}}^{\frac{x}{c_2}} \tilde{f}'(x, t, \tau) dt + \int_{\frac{x}{c_2}}^t \tilde{f}'(x, t, \tau) dt - \kappa(t - \frac{x}{c_1}) \right], & t > \frac{x}{c_2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\tilde{f}'(x, t, \tau) = \varphi_1'(x, \tau)\kappa(t - \tau) - \varphi_0'(x, \tau).$$

На защемленной опоре:

$$\sqrt{C} \frac{M(0, t)}{R} = -\sqrt{C}\kappa(t).$$

В сравниваемой работе [21] безразмерные изгибающие моменты $\frac{\sqrt{CM}}{R}$ вычислялись для стержня с прямоугольным поперечным сечением высотой h .

Введем, как и в [21], безразмерную координату точки оси стержня и безразмерное время:

$$\eta = \frac{x}{h}, \quad T = \frac{ct}{h}.$$

Анализ работы [21] показал, что значение ν было принято равным 1,9.

Построенный по результатам вычислений график функции $\frac{\sqrt{CM}}{R}$ (рис. 2) при $\eta = 2$ совпадает с графиком, приведенным в работе [21].

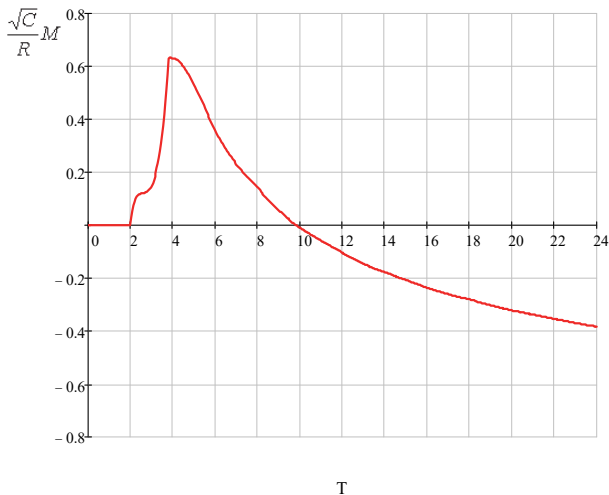


Рис. 2. Действие на защемленный полубесконечный стержень ($x \geq 0$) равномерно распределенной поперечной импульсной нагрузки $q(x, t) = R\delta_0(x)\delta_1(t)$.

Изгибающий момент в сечении $\eta = 2$ при $\nu = 1,9$

[Figure 2. A clamped semi-infinite beam ($x \geq 0$)

which is subjected to a uniform lateral impulse $q(x, t) = R\delta_0(x)\delta_1(t)$.

Bending moment at $\eta = 2, \nu = 1,9$

Выводы

Итак, в ходе исследования показан метод получения точных аналитических решений задач о распространении упругих волн в однородных призматических стержнях при поперечных кратковременных и быстроизменяющихся воздействиях на основе теории Тимошенко.

В общем виде сформулированы три типа нестационарных задач для полубесконечного стержня. Рассмотрены бегущие волны. Использовано операционное исчисление. Отмечено, что полученные изображения имеют очень сложную структуру. Изучена проблема определения начальных функций (оригиналов) при решении нестационарных задач теории Тимошенко.

Выводятся новые, не имеющиеся в литературе по операционному исчислению, операционные соотношения, на основе которых показан способ нахождения оригиналов без использования общей формулы обращения. Решения задач записываются в виде интегралов от бесселевых функций и, в отличие от решений, имеющих в литературе, ясно показывают волновой характер изучаемых процессов, имеют компактный вид и удобны для практических вычислений.

Ограничение объема статьи позволило привести здесь только некоторые точные аналитические выражения для различных функций. В общем виде такие выражения для различных типов стержней получены и сведены в таблицы, которые могут быть представлены автором статьи.

Полученные новые операционные соотношения позволяют дополнить таблицы формул операционного исчисления и могут быть использованы в дальнейшем при решении различных проблем.

Список литературы

1. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 192 с.
2. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 508 с.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Серия: Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
4. Селезов И.Т. О развитии теории Тимошенко поперечных колебаний упругих стержней // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 1. С. 16–23.
5. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Theoretical analysis of transient waves in a simply-supported Timoshenko beam by ray and normal mode methods // International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 48. No. 3–4. Pp. 535–552.
6. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. No. 9. Pp. 1158–1176.
7. Wang X.Q., So R.M.C. Timoshenko beam theory: a perspective based on the wave-mechanics approach // Wave Motion. 2015. Vol. 57. Pp. 64–87.

8. Абрамян А.К., Индейцев Д.А., Постнов В.А. Бегущие и стоячие волны балки Тимошенко // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 101–109.
9. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
10. Leonard R.W., Budiansky B. On traveling waves in beams // NASA Repts. 1954. No. 1173. Pp. 389–415.
11. Dengler M.A. Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung // Österr. Ing.-Arch. 1956. Vol. 10. No. 1. Pp. 39–66.
12. Flügge W., Zajac E.E. Bending impact waves in beams // Ingenieur-Archiv. 1959. Vol. 28. Issue 1. Pp. 59–70.
13. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М. – Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 432 с.
14. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 468 с.
15. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966. 408 с.
16. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 288 с.
17. Эфрос А.М., Данилевский А.М. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во, 1937. 383 с.
18. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 799 с.
19. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. II. М.: Наука, 1964. 464 с.
20. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. № 3. С. 287–300.
21. Sagartz M.J., Forrestal M.J. Bending stresses propagating from the clamped support of an impulsively loaded beam // AIAA Journal. 1972. Vol 10. No 10. Pp. 1373–1374. (Publ. online 17 May 2012). <https://doi.org/10.2514/3.6628>

RESEARCH PAPER

New operational ratios and their application to non-stationary tasks for rods based on S.P. Timoshenko theory

Alexander L. Zonenberg

Joint Stock Company “TSNIEP zhilishcha – Institute for Complex Design of Residential and Public Buildings”, 9 Dmitrovskoe highway, bldg. 3, Moscow, 127434, Russian Federation
zonenberg@list.ru

Article history:

Received: November 16, 2019

Revised: January 24, 2020

Accepted: January 28, 2020

Abstract

Relevance. In order to study transient wave processes of deformation in rods on the basis of S.P. Timoshenko theory, it is necessary to have accurate analytical solutions to non-stationary problems in general form. Each accurate solution within this analytical model is an accurate description of the real process, serves as a criterion in assessing the accuracy of approximate solutions. When using operational calculus to analyze traveling waves, it is the inverse Laplace – Carson transformation that poses the greatest difficulty. It follows from the published works that the available solutions to some private problems either have a structure that does not allow to judge the main features of the investigated process, or their efficiency in calculations is achieved only in some rather limited areas of coordinate and time. This problem, which requires resolution, determined the purpose of this article. **The aim of the work.** The article is devoted to the development of new operational ratios and their application to the construction of accurate analytical solutions to the non-stationary problems of S.P. Timoshenko's theory for rods in a general form, in a physically visible and convenient form for practical calculations. **Methods.** The work uses methods of function theory of complex variable, operational calculus based on the integral Laplace – Carson transformation, methods of structure dynamics. **Results.** In general form three types of non-stationary tasks for semi-infinite rod based on Timoshenko theory are formulated. New operational ratios have been obtained. Based on these ratios, a method of inverse transformation without using a general conversion formula has been developed. Solutions of problems are recorded in the form of integrals from Bessel functions and, unlike solutions available in the literature, clearly show the wave nature of the studied processes, have a visual and compact appearance. An example of calculation is reviewed.

Keywords: transient wave process; S.P. Timoshenko theory; rods; traveling waves; operational ratio; Laplace – Carson integral transformation; Bessel functions

For citation

Zonenberg A.L. New operational ratios and their application to non-stationary tasks for rods based on S.P. Timoshenko theory. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1): 62–75. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-62-75>. (In Russ.)

Alexander L. Zonenberg, chief specialist engineer, Residential and Public Buildings Construction Department; ORCID iD: 0000-0003-2773-3047.

References

1. Kolsky H. *Volny napryazheniya v tverdyh telah* [*Stress waves in solids*]. Moscow: Izd-vo inostrannoi literatury Publ.; 1955. (In Russ.)
2. Timoshenko S.P. *Kurs teorii uprugosti* [*Course in the Theory of Elasticity*]. Kiev: Naukova dumka Publ.; 1972. (In Russ.)
3. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek [Nonclassical Theories of Vibrations of Bars, Plates and Shells]. *Advances in Sciences and Engineering. Mechanics of Deforming Solids*. Moscow: VINITI Publ.; 1973. (In Russ.)
4. Selezov I.T. O razvitii teorii Timoshenko poperechnyh kolebanij uprugih sterzhnej [On the development of the Timoshenko theory of transversal oscillations of elastic rods]. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016;45(1):13–20.
5. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Theoretical analysis of transient waves in a simply-supported Timoshenko beam by ray and normal mode methods. *International Journal of Solids and Structures*. 2001;48(3–4):535–552.
6. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods. *International Journal of Solids and Structures*. 2012;49(9):1158–1176.
7. Wang X.Q., So R.M.C. Timoshenko beam theory: A perspective based on the wave-mechanics approach. *Wave Motion*. 2015;57:64–87.
8. Abramyan A.K., Indeitsev D.A., Postnov V.A. Running and Standing Waves of Timoshenko Beam. *Mechanics of Solids*. 2018;53(2):203–210.
9. Slepyan L.I., Yakovlev Yu.S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestacionarnykh zadachakh mekhaniki* [*Integral Transformations in Non-Stationary Problems of Mechanics*]. Leningrad: Sudostroenie Publ.; 1980. (In Russ.)
10. Leonard R.W., Budiansky B. On traveling waves in beams. *NACA Repts*. 1954;(1173):389–415.
11. Dengler M.A. Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. *Österr. Ing.-Arch*. 1956;10(1):39–66.
12. Flügge W., Zajac E.E. Bending impact waves in beams. *Ingenieur-Archiv*. 1959;28(1):59–70.
13. Lurie A.I. *Operacionnoe ischislenie i ego prilozheniya k zadacham mekhaniki* [*Operational Calculus and its Application to the Problems in Mechanics*]. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat Publ.; 1950. (In Russ.)
14. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu* [*Handbook of operational calculations*]. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1965. (In Russ.)
15. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operacionnoe ischislenie* [*Operational calculus*]. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1966. (In Russ.)
16. Doetsch G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeniyu preobrazovaniya Laplasa* [*Guide to the Applications of Laplace Transforms*]. Moscow: Nauka Publ.; 1965. (In Russ.)
17. Efros A.M., Danilevsky A.M. *Operacionnoe ischislenie i konturnye integraly* [*Operational Calculus and Contour Integrals*]. Kharkiv: Gos. nauch.-tekhn. izd-vo Publ.; 1937. (In Russ.)
18. Watson G.N. *Teoriya besselevykh funkcij* [*A treatise on the theory of Bessel functions*]. Part 1. Moscow: Izd-vo inostrannoi literatury; 1949. (In Russ.)
19. Fikhtengol'ts G.M. *Osnovy matematicheskogo analiza* [*Foundations of mathematical analysis*]. Vol. 2. Moscow: Nauka Publ.; 1964. (In Russ.)
20. Uflyand Ya.S. Rasprostranenie voln pri poperechnyh kolebaniyakh sterzhnej i plastin [Wave propagation in rods and plates undergoing transverse vibrations]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*J. Appl. Math. Mech.*]. 1948; 12(3):287–300. (In Russ.)
21. Sagartz M.J., Forrestal M.J. Bending stresses propagating from the clamped support of an impulsively loaded beam. *AIAA Journal*. 1972;10(10):1373–1374. (Publ. online 17 May 2012). <https://doi.org/10.2514/3.6628>

СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ SEISMIC RESISTANCE

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-1-76-82
УДК 699.841

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Анализ сейсмостойкости конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий

З.К. Абаев*, М.Ю. Кодзаев, А.А. Бигулаев

Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет),
Российская Федерация, 362021, Республика Северная Осетия — Алания, Владикавказ, ул. Николаева, 44
*abaich@yandex.ru

История статьи:

Поступила в редакцию: 07 октября 2019 г.
Доработана: 28 декабря 2019 г.
Принята к публикации: 23 января 2020 г.

Аннотация

Актуальность. Увеличение плотности городского населения требует применения оптимальных конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий, однако, несмотря на большое количество исследований о рациональности их применения, вопрос о выборе оценки сейсмостойкости конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий остается открытым. **Цель** исследования – определение преимуществ и недостатков конструктивных систем многоэтажных зданий в сейсмических районах. **Методы.** В статье представлены результаты сравнительного анализа сейсмостойкости пяти различных конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий (сетка колонн – 6×6 м, высота этажа – 3 м, количество этажей – 20): каркасно-стеновой, каркасно-ствольной, ствольной-стеновой, каркасно-ствольно-диафрагмовой, каркасно-ствольно-оболочковой. Для реализации поставленной задачи использовался программный комплекс SCAD Office. Расчет был произведен в соответствии с СП 14.13330.2018 для расчетного землетрясения интенсивностью 8 баллов по шкале MSK-64. Сумма эффективных модальных масс, учтенных в расчете, составила не менее 90 % общей массы системы, возбуждаемой по направлению действия сейсмического воздействия для горизонтальных воздействий, и не менее 75 % – для вертикального воздействия. **Результаты.** Сравнение проводилось по следующим критериям: максимальные перемещения, максимальные сжимающие и растягивающие напряжения, максимальные периоды собственных колебаний, максимальные ускорения.

Ключевые слова: сейсмостойкость; землетрясения; многоэтажные здания; высотные здания; конструктивные системы

Для цитирования

Абаев З.К., Кодзаев М.Ю., Бигулаев А.А.
Анализ сейсмостойкости конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 76–82. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-76-82>

Введение

Многоэтажное строительство развивается с ростом численности городского населения. В 2010 г. городское население составляло 3,6 млрд. чел.,

или 51 % от общей численности населения мира. По сравнению с 1950 г. оно увеличилось в 4–5 раз и продолжит расти. Ожидается, что к 2050 г. более 75 % жителей Земли будут жить в городских условиях [1].

Повышение этажности зданий из-за обостряющегося дефицита земли городских территорий и ее удорожания, изменение карт сейсмозонирования территории России в сторону увеличения прогнозируемой интенсивности сейсмических воздействий и количества сейсмоопасных регионов перевели расчеты зданий и сооружений на сейсмические воздействия в разряд часто использу-

Абаев Заурбек Камболатович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций; eLIBRARY SPIN-код: 2843-1586.
Кодзаев Марат Юрьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики; eLIBRARY SPIN-код: 7389-8508.
Бигулаев Александр Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики; eLIBRARY SPIN-код: 8764-6513.

© Абаев З.К., Кодзаев М.Ю., Бигулаев А.А., 2019

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

емых [2]. Большое количество исследований о рациональности применения различных конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий направлено, как правило, на оценку одного или нескольких конструктивных параметров (количество этажей, площадь, форма и т. п.) и обоснование оптимальных пределов их использования [1], не рассматривая вопросы их сейсмостойкости, в связи с чем оценка сейсмостойкости различных конструктивных систем многоэтажных зданий становится все более актуальной [3–8]. Тем не менее вопрос о выборе критерия оптимальности и самой методологии исследования остается открытым [9–13].

1. Методы и материалы

Объект исследования – комбинированные конструктивные системы многоэтажных высотных зданий (рис. 1) [1; 14; 15]:

– *каркасно-стенная (Frame & Tube)* – сочетание несущих стен и каркаса, воспринимающих все вертикальные и горизонтальные нагрузки. Проектируется, как правило, с безригельным каркасом или с нежестким сопряжением ригелей и колонн;

– *каркасно-ствольная (Frame & Core)* – вместо диафрагм жесткости применяются пространственные элементы замкнутой формы в плане, называемые стволами, благодаря чему происходит распределение статической работы и все вертикальные нагрузки воспринимаются каркасом, а горизонтальные – стволом. Следует также отметить, что для обеспечения совместных перемещений каркаса и ствола через каждые 18–20 этажей предусматриваются горизонтальные аутригеры;

– *ствольно-стенная (Core & Walls)* – сочетает в себе несущие стены и ствол. Распределение вертикальных и горизонтальных нагрузок происходит в различных соотношениях в зависимости от жесткости и расположения элементов;

– *каркасно-ствольно-диафрагмовая (Framed Core & Walls)* – сочетает в себе преимущества каркасно-ствольной системы с включением дополнительных диафрагм жесткости для более эффективного восприятия горизонтальных нагрузок;

– *каркасно-ствольно-оболочковая (Framed Core & Tube)* – система с несущей оболочкой здания и внутренним каркасом. При этом оболочка работает на все виды нагрузок и воздействий, а каркас – преимущественно на вертикальные нагрузки.

Общие параметры конструктивных систем: сетка колонн – 6×6 м; сечение колонн – 40×40 см; толщина плит перекрытия – 20 см; толщина стен – 40 см; высота этажа – 3 м; количество этажей –

20; материал несущих конструкций – бетон В25, арматура А500.

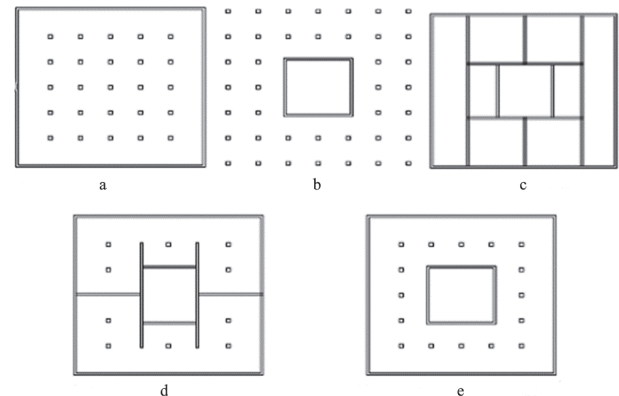


Рис. 1. Комбинированные конструктивные системы многоэтажных высотных зданий:

a – каркасно-стенная; *b* – каркасно-ствольная; *c* – ствольно-стенная; *d* – каркасно-ствольно-диафрагмовая; *e* – каркасно-ствольно-оболочковая

[Figure 1. Combined structural systems of high-rise multi-storey buildings:

a – frame & tube; *b* – frame & core; *c* – core & walls; *d* – framed core & walls; *e* – framed core & tube]

Методика расчета. Для реализации поставленной задачи использовался программный комплекс SCAD Office (рис. 2).

Расчет был произведен в соответствии с СП 14.13330.2018 для расчетного землетрясения интенсивностью 8 баллов по шкале MSK-64. Автоматически было определено количество форм колебаний для всех рассмотренных конструктивных систем. Для каждой из форм колебаний были определены собственные значения, периоды и модальные массы. Сумма эффективных модальных масс, учтенных в расчете, составила не менее 90 % общей массы системы, возбуждаемой по направлению действия сейсмического воздействия для горизонтальных воздействий? и не менее 75 % – для вертикального воздействия. Для автоматического определения необходимого количества форм собственных колебаний используется метод Ланцоша совместно с многофронтальным методом. Были рассчитаны максимальные перемещения, напряжения, ускорения.

Ограничения области исследования. Все расчеты выполнены для I категории грунта.

Поскольку основными целями исследования были оценка работы собственных элементов конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий и анализ их напряженно-деформированного состояния, в настоящем исследовании не учитывался эффект взаимодействия здания с грунтом основания.

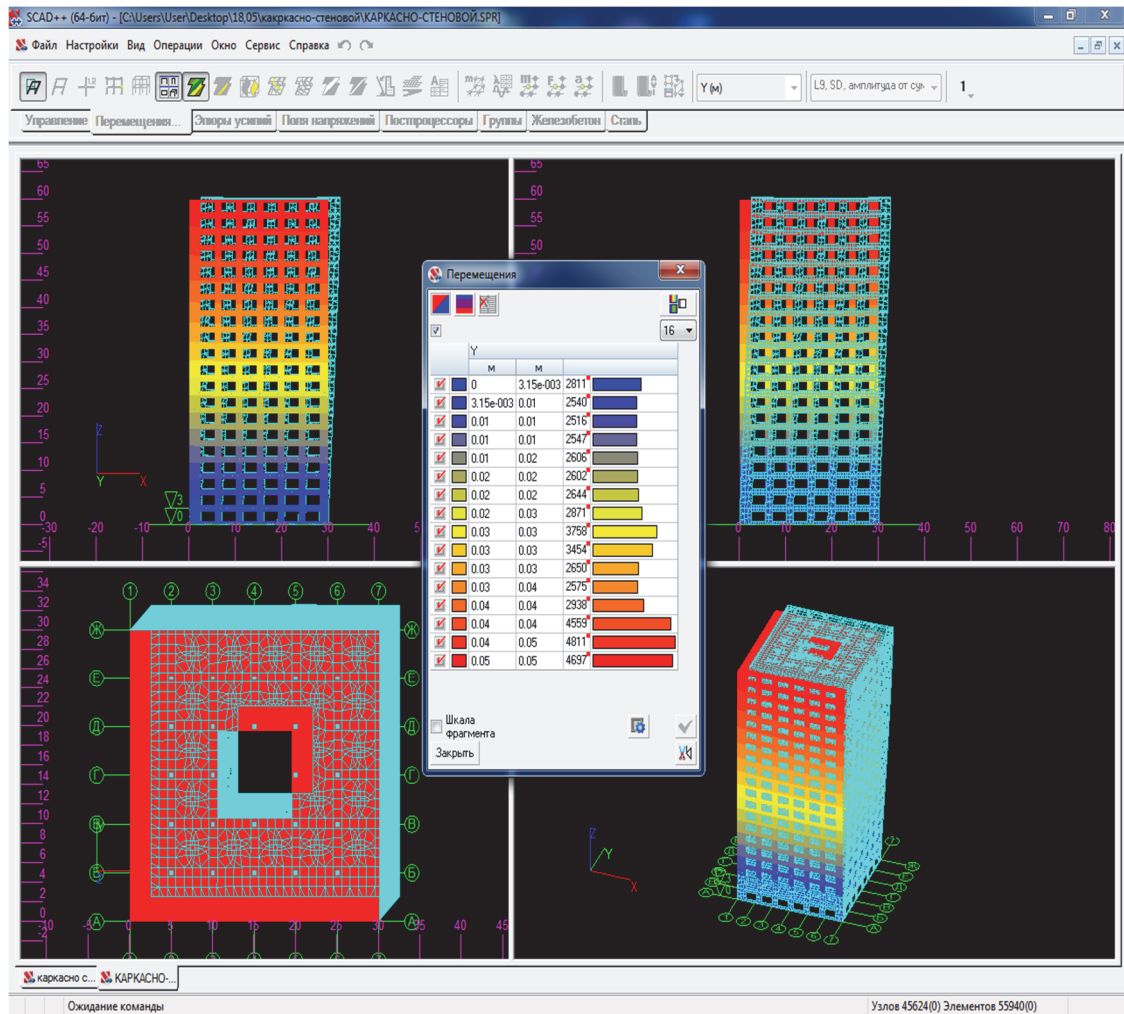


Рис. 2. Результат моделирования в ПК SCAD Office
 [Figure 2. Calculation results on SCAD Office]

Таблица

Результаты расчета каркасно-стеновой конструктивной системы
 [Table. Results of calculation of frame & tube structural system]

Номер формы [Mode]	Собственное значение [Value]	Частоты [Frequency]		Период [Period]	Модальные массы, % [Modal masses, %]		
		рад/сек [rad/sec]	Гц [Hz]		X	Y	Z
1	0,12	8,65	1,38	0,73	42,59	33,8	0
2	0,12	8,66	1,38	0,73	33,8	42,59	0
3	0,06	15,57	2,48	0,4	0	0	0
4	0,04	26,6	4,23	0,24	6,64	6,09	0
5	0,04	26,61	4,24	0,24	6,09	6,65	0
6	0,03	30,98	4,93	0,2	0	0	48,82
7	0,03	32,64	5,19	0,19	0,03	0	0
8	0,03	32,64	5,2	0,19	0	0,03	0
9	0,03	35,99	5,73	0,17	0	0	0
10	0,03	38,28	6,09	0,16	0	0	0

Окончание табл. [Table, ending]

Номер формы [Mode]	Собственное значение [Value]	Частоты [Frequency]		Период [Period]	Модальные массы, % [Modal masses, %]		
		рад/сек. [rad/sec.]	Гц [Hz]		X	Y	Z
11	0,02	43,3	6,89	0,15	0,02	0	0
12	0,02	43,32	6,89	0,15	0	0,02	0
13	0,02	44,14	7,03	0,14	0	0	11,82
14	0,02	46,92	7,47	0,13	0,03	0,03	0
15	0,02	47,09	7,49	0,13	1,78	1,74	0
16	0,02	47,11	7,5	0,13	1,71	1,74	0
17	0,02	49,9	7,94	0,13	0,02	0,17	0
18	0,02	49,92	7,95	0,13	0,17	0,02	0
19	0,02	53,83	8,57	0,12	0	0	0,23
20	0,02	53,94	8,58	0,12	0	0	5,59
21	0,02	54,35	8,65	0,12	0	0	0
22	0,02	58,57	9,32	0,11	0	0	0
23	0,02	62,74	9,99	0,1	0	0	12,6
24	0,02	63,7	10,14	0,1	0	0,12	0
25	0,02	63,73	10,14	0,1	0,13	0	0
26	0,02	64,3	10,23	0,1	0,05	0,4	0
27	0,02	64,31	10,23	0,1	0,39	0,05	0,01
28	0,02	65,49	10,42	0,1	1,07	0,06	0
29	0,02	65,51	10,43	0,1	0,05	1,11	0
30	0,02	65,8	10,47	0,1	0	0	1,04
31	0,02	65,84	10,48	0,1	0,18	0,01	0
32	0,02	65,9	10,49	0,1	0	0,12	0
Сумма модальных масс [The sum of the modal masses]					94,77	94,77	80,14

2. Результаты

В таблице показаны все динамические загрузки для *каркасно-стеновой конструктивной системы (Frame & Tube)*. Для всех форм колебаний определены собственные значения, частоты, периоды и проценты модальных масс. В рассмотренной каркасно-стеновой конструктивной системе были определены 32 формы колебаний. При сейсмическом воздействии по оси *X* максимальный период колебаний составил 0,73 сек., суммы модальных масс составили 94,77, 94,77 и 80,14 % по осям *X*, *Y* и *Z* соответственно.

Аналогично рассчитывались значения для других конструктивных систем.

Ниже представлено графическое сравнение различных факторов для всех объектов исследо-

вания (конструктивных схем *a*, *b*, *c*, *d*, *e* в соответствии с рис. 1).

На рис. 3 показаны максимальные горизонтальные перемещения каждой конструктивной системы.

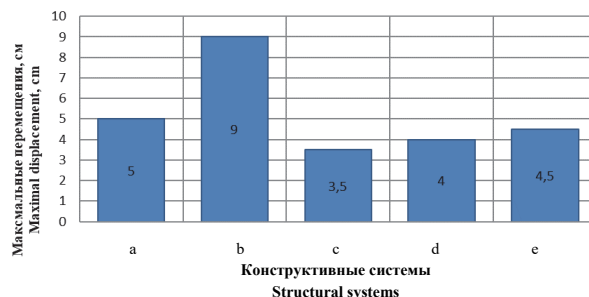


Рис. 3. Сравнение максимальных перемещений [Figure 3. Maximal displacement comparison]

Как видно из рис. 3, ствольно-стенная и каркасно-ствольно-диафрагмовая конструктивная системы обладают наибольшей жесткостью. Каркасно-ствольная схема обладает наименьшей жесткостью из всех сравниваемых конструктивных систем. По результатам расчета максимальные горизонтальные перемещения в каркасно-ствольной конструктивной системе оказались на 257 % больше, чем в ствольно-стенной системе. Системы с несущими конструкциями, расположенными по периметру здания, существенно увеличивают жесткость сооружения. Направления векторов сейсмического воздействия по X , Y и под 45° к осям X и Y .

На рис. 4 и 5 показано сравнение максимальных сжимающих и растягивающих напряжений от действия сейсмической нагрузки для каждой конструктивной системы.

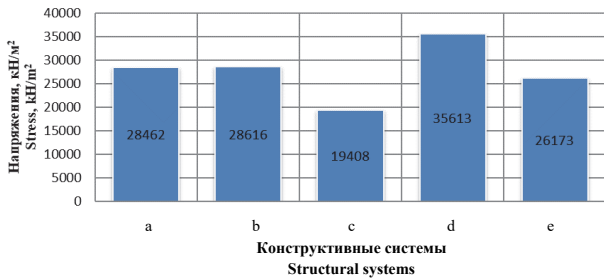


Рис. 4. Сравнение максимальных сжимающих напряжений [Figure 4. Compression stress comparison]



Рис. 5. Сравнение максимальных растягивающих напряжений [Figure 5. Tension stress comparison]

Максимальные сжимающие и растягивающие напряжения при сейсмическом воздействии наблюдаются в каркасно-ствольно-диафрагмовой конструктивной системе. Самые большие напряжения возникают в элементах первого этажа здания в местах заделки стен в основание. В ствольно-стенной конструктивной системе возникают наименьшие в сравнении с другими рассматриваемыми системами напряжения. Напряжения составляют 19 408 кН/м², что на 83 % меньше, чем в каркасно-ствольно-диафрагмовой системе. Результаты расчета показывают, что увеличение количества несущих стен помогает снизить значения максимальных напряжений.

На рис. 6 показаны максимальные периоды колебаний в секундах от действия для каждой конструктивной системы.

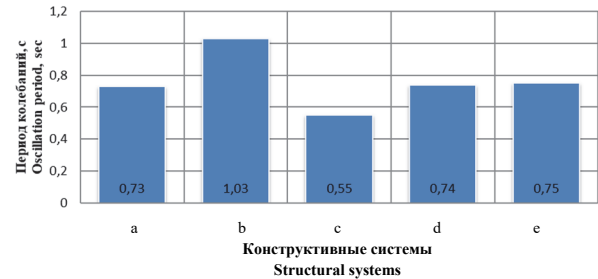


Рис. 6. Сравнение максимальных периодов колебаний [Figure 6. Oscillation period comparison]

Сравнительный анализ показывает, что каркасно-ствольная система имеет значительно больший период собственных колебаний (1,03 сек.), чем системы с несущими стенами (0,55 сек.), что снижает динамический эффект воздействия на здание. В качестве недостатка можно отметить повышенную деформативность каркасных систем.

На рис. 7 показаны максимальные ускорения грунта для каждой конструктивной системы.

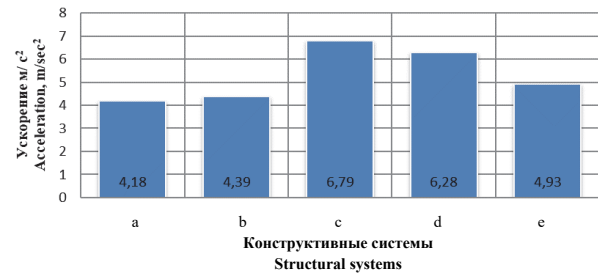


Рис. 7. Сравнение максимальных ускорений [Figure 7. Maximal acceleration comparison]

Результаты расчета показывают, что в системах с большим количеством несущих стен развиваются большие ускорения. В каркасно-ствольной и каркасно-стенной системах ускорения в среднем на 43 % ниже, чем в трех других системах с большим количеством несущих стен.

Выводы

По результатам исследования был выполнен сравнительный анализ пяти различных комбинированных конструктивных систем многоэтажных гражданских зданий. Расчет был произведен в соответствии с СП 14.13330.2018 для расчетного землетрясения интенсивностью 8 баллов по шкале MSK-64. Для автоматического определения необходимого количества форм собственных колебаний использовался метод Ланцоша совместно с многофронтальным методом.

Сравнительный анализ перемещений показал, что применение внутренних и в особенности наружных стен в качестве основных несущих конструкций позволяет снизить максимальные перемещения при сейсмическом воздействии.

По результатам расчета напряжений можно увидеть, что максимальные сжимающие и растягивающие напряжения в несущих конструкциях возникают при сейсмическом воздействии, направленном под 45° к осям X и Y . Максимальные сжимающие и растягивающие напряжения при сейсмическом воздействии наблюдаются в каркасно-ствольно-диафрагмовой конструктивной системе.

Сравнительный анализ периодов колебаний показал, что каркасно-ствольная система имеет значительно больший период собственных колебаний (1,03 сек.), чем системы с несущими стенами (0,55 сек.).

Большой период колебаний снижает динамический эффект воздействия на здание. По результатам расчета ускорений можно увидеть, что в системах с малым количеством несущих стен развиваются наименьшие ускорения.

В каркасно-ствольной и каркасно-стеновой системах максимальные ускорения в среднем на 43 % ниже, чем в трех других системах с большим количеством несущих стен.

Список литературы

1. *Сенин Н.И.* Рациональное применение конструктивных систем многоэтажных зданий // Вестник МГСУ. 2013. № 11. С. 76–83.
2. *Джинчвелашвили Г.А., Будушев С.В.* Расчетное обоснование заданного уровня сейсмостойкости сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 1. С. 70–79. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-1-70-79>.
3. *Aly A.M., Abburu S.* On the Design of High-Rise Buildings for Multihazard: Fundamental Differences between Wind and Earthquake Demand // Shock and Vibration. 2015. Vol. 2015. doi: 10.1155/2015/148681.
4. *Liang S., Zou L., Wang D., Huang G.* Analysis of three-dimensional equivalent static wind loads of symmetric high-rise buildings based on wind tunnel tests // Wind and Structures. 2014. Vol. 19. No. 5. Pp. 565–583. doi: 10.12989/was.2014.19.5.565.
5. *Iacovino C., Ditommaso R., Ponzo F., Limongelli M.* The Interpolation Evolution Method for damage localization in structures under seismic excitation // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. 2018. Vol. 47. No. 10. Pp. 2117–2136. doi: 10.1002/eqe.3062.
6. *Laghi V., Palermo M., Trombetti T., Schildkamp M.* Seismic-Proof Buildings in Developing Countries // Front. Built Environ. 2017. Vol. 3. Article 49. DOI: 10.3389/fbuilt.2017.00049.
7. *Bai Y., Shi Y., Deng K.* Collapse analysis of high-rise steel moment frames incorporating deterioration effects of column axial force – bending moment interaction // Engineering Structures. 2016. Vol. 127. Pp. 402–415. doi: 10.1016/j.engstruct.2016.09.005.
8. *Lu X., Wang D., Wang S.* Investigation of the seismic response of high-rise buildings supported on tension-resistant elastomeric isolation bearings // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. 2016. Vol. 45. No. 13. Pp. 2207–2228. doi: 10.1002/eqe.2755.
9. *Chapain S., Aly A.M.* Vibration attenuation in high-rise buildings to achieve system-level performance under multiple hazards // Engineering Structures. 2019. Vol. 197. Pp. 1–20. doi: 10.1016/j.engstruct.2019.109352.
10. *Mohaiminul H., Sourav R., Amit Ch., Elias Md., Iftekharul A.* Seismic Performance Analysis of RCC Multi-Storied Buildings with Plan Irregularity // American Journal of Civil Engineering. 2016. Vol. 4. No. 3. Pp. 68–73. doi: 10.11648/j.ajce.20160403.11.
11. *Moon K.* Optimal structural configurations for tall buildings // Proceedings of the 13th East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, EASEC 2013. Pp. 354–355.
12. *Aydinoğlu M.N.* Challenges and Problems in Performance-Based Design of Tall Buildings // Geotechnical, Geological and Earthquake Engineering. 2014. Vol. 32. Pp. 279–300.
13. *Jiang H.J., Lu X.L., Liu X.J., He L.S.* Performance-Based Seismic Design Principles and Structural Analysis of Shanghai Tower // Advances in Structural Engineering. 2014. Vol. 17. No. 4. Pp. 513–527. doi: 10.1260/1369-4332.17.4.513.
14. *Schueller W.* High-rise Building Structures. New York – London – Sydney – Toronto: John Wiley & Sons, Inc, 1977. P. 248.
15. *Willford M., Whittaker A., Klemencic R.* Recommendations for the Seismic Design of High-Rise Buildings // Council for Tall Buildings and Urban Habitat. 2008. Pp. 1–28. doi: 10.13140/RG.2.1.2798.8085.

Earthquake resistance analysis of structural systems of multi-storey civil buildings

Zaurbek K. Abaev*, Marat Yu. Kodzaev, Aleksandr A. Bigulaev

North Caucasian Institute of Mining and Metallurgy, 44 Nikolaeva St., Vladikavkaz, 362021, Republic of North Ossetia – Alania, Russian Federation
*abaich@yandex.ru

Article history:

Received: October 07, 2019

Revised: December 28, 2019

Accepted: January 23, 2020

Abstract

Relevance. Increasing the density of urban population requires the use of optimal structural systems of multi-storey civil buildings, however, despite a large number of studies on the rationality of their application, the question of choosing an assessment of seismic resistance of structural systems of multi-storey civil buildings is still open. **The aim of the study.** This study aims to determine advantages and disadvantages of structural systems of multi-storey buildings in seismic areas. **Methods.** The results of comparison analysis of five structural systems (columns grid – 6×6 m, storey height – 3 m, number of storeys – 20) are presented in this article. The structural systems are: frame & tube, frame & core, core & walls, framed core & walls, framed core & tube. The calculation were done according to Building Code 14.13330.2018 for an earthquake of 8 points intensity of MSK-64 intensity scale. The SCAD Office software package was used for modeling and analyzing. The sum of the effective modal masses taken in the calculation was at least 90% of the total mass of the system excited in the direction of the seismic action for horizontal impacts and at least 75% – for vertical impacts. **Results.** The comparison was carried out according to the following criteria: maximum displacements, maximum compressive and tensile stresses, maximum periods of natural oscillations, maximum accelerations.

Keywords: seismic resistance; earthquake; multi-storey buildings; high-rise buildings; structural systems

For citation

Abaev Z.K., Kodzaev M.Yu., Bigulaev A.A. Earthquake resistance analysis of structural systems of multi-storey civil buildings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):76–82. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-76-82>. (In Russ.)

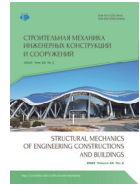
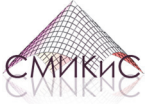
References

1. Senin N.I. Ratsional'noe primeneniye konstruktivnykh sistem mnogoetazhnykh zdaniy [Rational Usage of Structural Systems of Multi-Storey Buildings]. *Vestnik MGSU*. 2013;(11):76–83.
2. Dzinchvelashvili G.A., Bulushev, S.V. Feasibility evaluation for a predefined seismic resistance of structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2018;14(1):70–79. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-1-70-79>. (In Russ.)
3. Aly A.M., Abburu S. On the Design of High-Rise Buildings for Multihazard: Fundamental Differences between Wind and Earthquake Demand. *Shock and Vibration*. 2015. doi: 10.1155/2015/148681.
4. Liang S., Zou L., Wang D., Huang G. Analysis of three-dimensional equivalent static wind loads of symmetric high-rise buildings based on wind tunnel tests. *Wind and Structures*. 2014;19(5):565–583. doi: 10.12989/was.2014.19.5.565.
5. Iacovino C., Ditommaso R., Ponzo F., Limongelli M. The Interpolation Evolution Method for damage localization in structures under seismic excitation. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 2018;47(10):2117–2136. doi: 10.1002/eqe.3062.
6. Laghi V., Palermo M., Trombetti T., Schildkamp M. Seismic-Proof Buildings in Developing Countries. *Front. Built Environ*. 2017;(3). doi: 10.3389/fbuil.2017.00049.
7. Bai Y., Shi Y., Deng K. Collapse analysis of high-rise steel moment frames incorporating deterioration effects of column axial force – bending moment interaction. *Engineering Structures*. 2016;(127):402–415. doi: 10.1016/j.engstruct.2016.09.005.
8. Lu X., Wang D., Wang S. Investigation of the seismic response of high-rise buildings supported on tension-resistant elastomeric isolation bearings. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 2016;45(13):2207–2228. DOI:10.1002/eqe.2755.
9. Chapain S., Aly A.M. Vibration attenuation in high-rise buildings to achieve system-level performance under multiple hazards. *Engineering Structures*. 2019;(197):1–20. doi: 10.1016/j.engstruct.2019.109352.
10. Mohaiminul H., Sourav R., Amit Ch., Elias Md., Iftekharul A. Seismic performance analysis of RCC with plan multistoried buildings irregularity. *American Journal of Civil Engineering*. 2016;4(3):68–73. doi: 10.11648/j.ajce.20160403.11.
11. Moon K. Optimal structural configurations for tall buildings. *Proceedings of the 13th East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*, EASEC. 2013:354–355.
12. Aydinoglu M.N. Challenges and Problems in Performance-Based Design of Tall Buildings. *Geotechnical, Geological and Earthquake Engineering*. 2014;(32):279–300.
13. Jiang H.J., Lu X.L., Liu X.J., He L.S. Performance-Based Seismic Design Principles and Structural Analysis of Shanghai Tower. *Advances in Structural Engineering*. 2014;17(4):513–527. doi: 10.1260/1369-4332.17.4.513.
14. Schueller W. *High-Rise Building Structures*. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons, Inc; 1977.
15. Willford M., Whittaker A., Klemencic R. Recommendations for the Seismic Design of High-Rise Buildings. *Council for Tall Buildings and Urban Habitat*. 2008:1–28. doi: 10.13140/RG.2.1.2798.8085.

Zaurbek K. Abaev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Civil Engineering Department; eLIBRARY SPIN-code: 2843-1586.

Marat Yu. Kodzaev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 7389-8508.

Aleksandr A. Bigulaev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 8764-6513.



Уважаемые коллеги!

Российский университет дружбы народов

приглашает вас принять участие в Международной конференции

«ИНЖЕНЕРНЫЕ СИСТЕМЫ – 2020»,

посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов, которая состоится

20–22 мая 2020 года в Москве.

НАУЧНЫЕ СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

- Материаловедение, металлургия и нанотехнологии
- Машиностроение, энергетика и транспорт
- Авиационные и космические системы
- Геология, горное и нефтегазовое дело
- Гражданское, промышленное и гидротехническое строительство
- Архитектура и промышленный дизайн
- Инновационный менеджмент в промышленности

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ КОНФЕРЕНЦИИ

Русский, английский

СРОКИ ПРЕДОСТАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Прием заявок на участие и полных текстов статей – до 15 марта 2020 года.

ПУБЛИКАЦИЯ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИИ

Статьи будут опубликованы в сборнике трудов конференции, индексируемом в БД РИНЦ, или в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Статьи должны быть посвящены описанию результатов оригинальных исследований. Подробная информация по оформлению статей представлена на странице конференции.

УСЛОВИЯ УЧАСТИЯ В КОНФЕРЕНЦИИ

Для участия в конференции необходимо направить регистрационную форму докладчика вместе со статьей в адрес контактных лиц:

– для публикации в сборнике трудов конференции, индексируемом в БД РИНЦ, – по адресу malkova-myu@rudn.ru

– для публикации в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science, – по адресу admin@enggsys.ru

Организационный взнос для участников конференции составляет 1800 руб.

Публикация в журнале, индексируемом в БД Scopus и Web of Science, оплачивается дополнительно. Размер оплаты указан на странице конференции.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Организатор конференции: Российский университет дружбы народов (РУДН).

Адрес страницы конференции на портале РУДН: <http://enr.rudn.ru/?p=14247>

Место проведения конференции:

Инженерная академия РУДН: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.

Заседание секции «Машиностроение, энергетика и транспорт» состоится по адресу:

г. Москва, Подольское ш., д. 8, корп. 5.

Председатель Оргкомитета:

Малькова Марианна Юрьевна, профессор департамента строительства Инженерной академии РУДН.

E-mail: malkova-myu@rudn.ru