

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2019 Том 15 № 6

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал  
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия  
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения, 05.23.02 – Основания и фундаменты, подземные сооружения, 05.23.17 – Строительная механика.

Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода).

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Акимов П.А.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

### ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*Галишиникова В.В.*, д-р техн. наук, доц., РУДН, Москва, Россия

### ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РЕДАКТОР

*Мамиева И.А.*, РУДН, Москва, Россия

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

*Агапов В.П.*, д-р техн. наук, проф., МГСУ, Москва, Россия

*Андреев В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

*Баженов В.А.*, акад., Национальная академия педагогических наук, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина

*Буй Суан Нам*, доцент, Ханойский университет горного дела и геологии, Ханой, Вьетнам

*Ванин В.В.*, д-р техн. наук, проф., Киевский политехнический университет, Киев, Украина

*Заксенхофер Райханд Ф.*, профессор, Горный университет в Леобене, Австрия

*Зверев Е.М.*, д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

*Иванов С.П.*, д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

*Карпенко Н.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

*Колчунов В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

*Красич Соня*, кандидат технических наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

*Лисичкин С.Е.*, д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

*Ляхович Л.С.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

*Магуле Фредерик*, профессор, Высшая инженерная школа «Централь Сюделек», Университет Париж-Сакли, Франция

*Мандроне Джузеппе*, доцент, Университет Турина, Италия

*Обозов В.И.*, д-р техн. наук, проф., ЦНИИСК, Москва, Россия

*Санжаровский Р.С.*, д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

*Травуш В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

*Якутов Н.М.*, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

## СОДЕРЖАНИЕ

### РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

- Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., Тиньгаев А.В.* Эффективные модули двухфазных строительных композитов с зернистым наполнителем ..... 407
- Марутян А.С.* Сравнительный расчет оптимальных параметров швеллерных гнутых и гнutoзамкнутых профилей ..... 415
- Мкртычев О.В., Андреев М.И.* Численные исследования прочности бетонных цилиндров на сжатие ..... 433

### ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

- Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Simplified selection of optimal shell of revolution (Упрощенный выбор оптимальной оболочки вращения) ..... 438
- Романова В.А.* Визуализация образования поверхностей полуправильных многогранников в среде AutoCAD ..... 449

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

- Lyapichev Yu.P., Mazza G., Mateu E., Zenz G., Carrère A.J.* Reliability and applicability of modern numerical analyses of dams (Достоверность и применимость современных численных расчетов плотин) ..... 458

### ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

- Гаджиев В.Дж., Мирзоева Г.Р., Агаярлов М.Г.* Свободные колебания анизотропной прямоугольной пластинки на неоднородно вязкоупругом основании ..... 470
- Мусаев В.К.* Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений в консоли с основанием (полуплоскость) при фундаментальном сейсмическом воздействии ..... 477

### ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

- Ларионов Е.А., Римшин В.И., Жданова Т.В.* Принцип наложения деформаций в теории ползучести ..... 483

Редактор Ю.А. Заикина  
Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова  
Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

#### Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел.: +7 (495) 955-08-28; факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru; i\_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 23.12.2019. Выход в свет 30.12.2019. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 10,69. Тираж 250 экз. Заказ № 2199. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН  
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов, 2019  
© Мамиева И.А., фото на обложке  
(Зарамагская ГЭС-1, бассейн суточного регулирования воды, Россия), 2019

# STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2019 VOLUME 15 No. 6

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI (elibrary.ru), Cyberleninka, DOAJ, EBSCOhost, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The Journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the Journal.

The Journal website contains full information about the Journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the Journal since 2008 (Open Access).

## EDITORIAL BOARD

### EDITOR-IN-CHIEF

*P.A. Akinov*, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

### ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

*V.V. Galishnikova*, DSc, RUDN University, Moscow, Russia

### MANAGING EDITOR

*I.A. Mamieva*, RUDN University, Moscow, Russia

### MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

*V.P. Agapov*, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

*V.I. Andreev*, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

*V.A. Bazhenov*, Member of the National Academy of Educational Science of Ukraine, DSc, Professor, Kiev National University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine

*Xuan Nam Bui*, PhD, Assoc. Professor, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi, Vietnam

*S.P. Ivanov*, DSc, Professor, Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia

*N.I. Karpenko*, Member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

*V.I. Kolchunov*, Member of the RAACS, DSc, Professor, South-West State University, Kursk, Russia

*Sonja Krasic*, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

*S.E. Lisichkin*, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

*L.S. Lyakhovich*, Member of the RAACS, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk, Russia

*Fredéric Magouès*, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France

*Giuseppe Mandrone*, PhD, Ass. Prof. in Engineering Geology, University of Torino, Italy

*V.I. Obozov*, DSc, Professor, Central Research Institute of Building Structures (TzNIISK im. V.V. Kucherenko), Moscow, Russia

*Reinhard F. Sachsenhofer*, PhD, Professor, Montanuniversität Leoben, Austria

*R.S. Sanjarovskiy*, DSc, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

*V.I. Travush*, Member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

*V.V. Vanin*, DSc, Professor, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine

*N.M. Yakupov*, Corresponding Member of Russian Engineering Academy, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

*E.M. Zveryaev*, DSc, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia

## CONTENTS

### ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

*Erofeev V.T., Tyuryahin A.S., Tyuryahina T.P., Tingaev A.V.* Effective modules of two-phase construction composites with grain filler .... 407

*Marutyan A.S.* Comparative calculation of optimal parameters of channel bent and bent closed profiles ..... 415

*Mkrtychev O.V., Andreev M.I.* Numerical studies of strength of concrete cylinders for compression ..... 433

### THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

*Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Simplified selection of optimal shell of revolution ..... 438

*Romanova V.A.* Vizualizing of semiregular polyhedrons in AutoCAD environment ..... 449

### NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

*Lyapichev Yu.P., Mazza G., Mateu E., Zenz G., Carrère A.J.* Reliability and applicability of modern numerical analyses of dams ..... 458

### DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

*Haciye V.C., Mirzoeva G.R., Agayarov M.G.* Free vibrations of anisotropic rectangular plate laying on a heterogeneous viscoelastic basis ..... 470

*Musayev V.K.* Mathematical modeling of unsteady elastic stress waves in a console with a base (half-plane) under fundamental seismic action ..... 477

### THEORY OF PLASTICITY

*Larionov E.A., Rimshin V.I., Zhdanova T.V.* Principle of the overlay deformations in the theory of creep ..... 483

Copy Editor Iu.A. Zaikina  
Graphic Designer Iu.N. Efremova  
Layout Designer Iu.A. Zaikina

### Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation; tel.: +7 (495) 955-08-28; fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: [stmj@rudn.ru](mailto:stmj@rudn.ru); [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University  
3 Ordzhonikidze St., Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 2019

© Mamieva I.A., photo on the cover of the journal  
(Zaramagskaya Hydroelectric Power Station – 1,  
reservoir for daily water regulation, Russia), 2019

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURESDOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414  
УДК 691.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Эффективные модули двухфазных строительных композитов  
с зернистым наполнителем

В.Т. Ерофеев, А.С. Тюряхин, Т.П. Тюряхина, А.В. Тиньгаев\*

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, Российская Федерация,  
430005, Саранск, ул. Большевикская, 68  
\*tingaev.s1@gmail.com

## История статьи:

Поступила в редакцию: 19 октября 2019 г.  
Доработана: 02 декабря 2019 г.  
Принята к публикации: 06 декабря 2019 г.

## Аннотация

В книге Р.М. Кристенсена «Введение в механику композитов» (1982) приведена расчетная формула для объемного модуля полидисперсных композитов со сферическими включениями. Эта формула известна русскоязычному читателю почти 40 лет, но, к сожалению, не используется в практике строительного материаловедения. Для выявления прикладных возможностей формула Р.М. Кристенсена видоизменяется и сводится к безразмерной функции  $k = k(w, \eta, \theta)$ , зависящей от трех безразмерных параметров, то есть зависимой от трех величин:  $w$  – объемной доли включения,  $\eta$  – отношения модуля сдвига материала матрицы к величине объемного модуля той же матрицы,  $\theta$  – отношения объемных модулей материалов матрицы и включения. Численные исследования этой функции выявляют, что в двухфазных зернистых композитах существенно сужается область значений эффективных модулей по сравнению с областью, ограничиваемой оценками Фойгта и Рейсса (в смысле верхней и нижней границ реальных значений). При этом нижняя оценка по Кристенсену совпадает с оценкой по Рейссу. Приведены численные и графически оформленные результаты на примерах исследования двух характерных групп композиционных материалов. Кроме того, безразмерная форма эффективного модуля позволяет построить в плоском пространстве  $k - w$  систему наглядных графических зависимостей функций  $k(w)$ . При разных значениях  $\theta$  функцией  $k = k(w, \eta)$  отображаются пучок криволинейных отрезков, которым задается положение плоской фигуры в плоском пространстве. Приведены примеры построения фигур для характерных областей значений функции  $k(\eta, \theta, w)$ .

**Ключевые слова:** двухфазная модель зернистого композита; сферическая форма фаз матрицы и наполнителя; эффективный объемный модуль упругости композита; вилка Фойгта – Рейсса для эффективного модуля

## Для цитирования

Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., Тиньгаев А.В. Эффективные модули двухфазных строительных композитов с зернистым наполнителем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 407–414. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414>

## Введение

Интенсивное развитие строительных композиционных материалов (СКМ) стимулирует их теоретическое исследование. При этом развивается и углубляется теория СКМ, направленная на рост числа прикладных задач механики композитов [2–4; 6–17,]. В данном исследовании решается одна из таких задач.

Ерофеев Владимир Трофимович, д. т. н., профессор, заведующий кафедрой строительных материалов и технологий; академик Российской академии архитектуры и строительных наук; Scopus Author ID: 57080123300, eLIBRARY SPIN-код: 4425-5045.

Тюряхин Алексей Сергеевич, к. т. н., доцент кафедры прикладной механики.

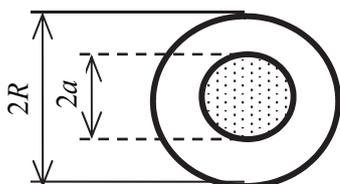
Тюряхина Татьяна Павловна, аспирант кафедры строительных материалов и технологий.

Тиньгаев Александр Васильевич, магистрант кафедры строительных материалов и технологий.

© Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., Тиньгаев А.В., 2019  
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

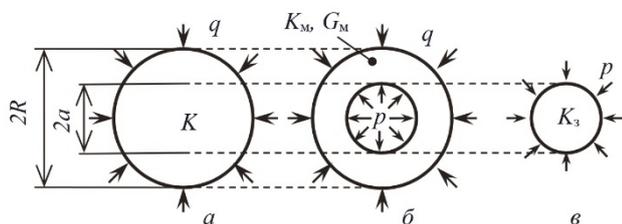


В механике СКМ модель представительного объема (модель ПО) для зернистого композита достаточно часто имеет вид двухфазной модели, в которой в матрицу (толстостенную сферу) включен шарообразный наполнитель (рис. 1). Материал каждой из фаз представлен упругим твердым телом (сплошным однородным и изотропным).



**Рис. 1.** Диаметральное сечение модели ПО зернистого композита  
 [Figure 1. The diametrical section of the model software granular composite]

Под действием равномерного наружного давления  $q$  модель ПО деформируется, в результате чего в точках раздела фаз возникает контактное давление  $p$ . Равновесное состояние такой неоднородной гетерогенной модели ПО (рис. 1) можно описать совокупностью однородных моделей, составленной из трех расчетных схем (рис. 2).



**Рис. 2.** Расчетные схемы модели ПО, представленные:  
 а – эффективной однородной моделью (сплошной шар);  
 б – моделью однородной матрицы (пустотелый шар);  
 в – моделью однородного заполнителя (сплошной шар)  
 [Figure 2. The design schemes of the software model, presented:  
 а – effective homogeneous model (solid ball);  
 б – a model of a homogeneous matrix (hollow ball);  
 в – a model of a homogeneous filler (solid ball)]

Контактное давление  $p$  можно найти из условия равенства радиальных перемещений в смежных точках матрицы и заполнителя (рис. 2, б и в). Такая задача решается в элементарных алгебраических выражениях, если воспользоваться применительно к матрице (рис. 2, б) решением задачи Ламе для толстостенной сферы [1; 18]. Не приводя выкладок, в результате получим следующее выражение:

$$p = q \frac{1 + 2\eta_m}{(1 + 2\eta_m w) + 2\eta_m \theta V}, \quad (1)$$

где  $w$  – объемная доля материала заполнителя,  $w = a^3/R^3$  (рис. 1);  $V$  – объемная доля материала матрицы,  $V = 1 - w$ .

Кроме того, в формуле (1) приняты обозначения, использованные авторами работ [5] и [18]:

$$\eta_m = \frac{g_m}{e_m} = \frac{1 - 2\nu_m}{1 + \nu_m} = \frac{2G_m}{3K_m}, \quad \theta = \frac{e_m}{e_3} = \frac{K_m}{K_3}, \quad (2)$$

$$e_m = \frac{E_m}{1 - 2\nu_m} = 3K_m, \quad g_m = \frac{E_m}{1 + \nu_m} = 2G_m, \quad (3)$$

где  $E_m$  и  $\nu_m$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала матрицы соответственно;  $K_m$  – объемный модуль;  $G_m$  – модуль сдвига матрицы;  $e_m$  – шаровой модуль объемных деформаций;  $g_m$  – девиаторный модуль сдвига матрицы;  $\eta_m$  – отношение модулей матрицы;  $K_3$  и  $e_3$  – объемный и шаровой модули материала заполнителя соответственно;  $\theta$  – отношение объемных модулей материалов матрицы и заполнителя.

Если теперь с учетом (1) приравняем радиальные перемещения в наружных точках эффективной модели (рис. 2, а) и модели матрицы (рис. 2, б), то в результате получим (снова без выкладок) формулу для вычисления величины безразмерного эффективного модуля двухфазного композита:

$$k = \frac{K}{K_m} = \frac{(1 + 2\eta_m w) + 2\eta_m \theta V}{V + \theta(2\eta_m + w)}, \quad (4)$$

где  $k$  – объемный модуль композита ( $K$ ), выраженный в долях от модуля матрицы ( $K_m$ ).

При этом обратная формула для вычисления эффективного объемного модуля  $K$  примет вид

$$K = K_m k = K_m \frac{(1 + 2\eta_m w) + 2\eta_m \theta V}{V + \theta(2\eta_m + w)}. \quad (5)$$

Ранее в работе Р.М. Кристенсена [17] была получена формула, аналогичная формуле (5), которая в наших обозначениях имеет вид

$$\frac{K - K_m}{K_3 - K_m} = \frac{w}{1 + \frac{(1 - w)(K_3 - K_m)}{K_m + \frac{4}{3}G_m}}. \quad (6)$$

В такой форме Кристенсеном с учетом парадигмы Хашина [19] получена формула для вычисления величины объемного модуля упругости ( $K$ ) в полидисперсных композитах со сферическим включением (заполнителем). Простые преобразования формулы (6) с учетом обозначений (1) – (3) приводят нас снова к формулам (4) и (5). Следовательно, формулы (4), (5) и (6) идентичны друг другу. Способ получения формулы (4) посредством использования решения задачи Ламе менее трудоемок, так как требует выполнения только элементарных алгебраических преобразований. Кристенсен же получил формулу (6) более сложным образом, непосредственно используя уравнения линейной теории упругости.

### 1. Расчетные формулы эффективного модуля ( $k$ ) композитов

В формулах (4) – (6) зафиксирован факт того, что материал моделей на расчетных схемах, имеющих форму шара (рис. 2, *a* и *в*), представлен только одной упругой константой (модулем  $K$  или  $K_3$ ), а материал матрицы, имеющей форму толстостенной сферы (рис. 2, *б*) – двумя константами (модулями  $K_M$  и  $G_M$ ). Этот факт с точки зрения упругих свойств служит признаком особенностей определения эффективного модуля  $K$ , присущих только двухфазным композитам, в отличие от эффективного модуля других (многофазных) композитов.

Исследуя формулу (4), заметим, что параметры  $\eta_M$  и  $w$  имеют одинаковый и удобный интервал (0, 1) их значений. Однако значения модуля  $k$  и параметра  $\theta$  изменяются в другом интервале (0,  $\infty$ ) чисел. Поэтому интервал (0,  $\infty$ ) расчленим на 2 интервала: интервал малых (0, 1] и интервал больших [1,  $\infty$ ) чисел. В таком случае получим два рабочих варианта формулы (4):

– вариант 1 – для чисел модуля ( $k_1 \geq 1$ ) при значениях  $\theta = \theta_1 \leq 1$ :

$$k_1 = \frac{K_1}{K_M} = \frac{(1 + 2\eta_M w) + 2\eta_M \theta_1 V}{V + \theta_1 (2\eta_M + w)}; \quad (7)$$

– вариант 2 – для чисел модуля ( $k_2 \leq 1$ ) при значениях  $\theta = \theta_2 \geq 1$ :

$$k_2 = \frac{K_2}{K_M} = \frac{(1 + 2\eta_M w) + 2\eta_M \theta_2 V}{V + \theta_2 (2\eta_M + w)}. \quad (8)$$

Особо отметим, что в формулах (7) и (8) параметры  $\theta_1$  и  $\theta_2$  имеют инверсивную связь (с коэффициентом инверсии, равным единице), так как их произведение  $\theta_1 \cdot \theta_2 = 1$ . Это свойство облегчает анализ расчетных формул. Но предварительно вспомним гипотезы Фойгта [21] и Рейса [20].

### 2. Плоское пространство значений модулей $k$

Применяя правило смеси, сначала определим, согласно [21], эффективный объемный модуль ( $K$ ) композита (рис. 1, 2). В результате получим зависимость по Фойгту:

$$K_\Phi = K_M V + K_3 w. \quad (9)$$

Затем, применив то же правило, определим, согласно [20], эффективную объемную податливость ( $1/K$ ) материала и получим зависимость по Рейссу:

$$\frac{1}{K_P} = \frac{V}{K_M} + \frac{w}{K_3}. \quad (10)$$

В отличие от формул (4) и (6) в зависимостях (9) и (10) влияние модуля сдвига матрицы ( $G_M$ ) не учитывается. Именно в этом и заключается главным образом приближенность оценок по Фойгту и по Рейссу.

Величины модулей  $K_\Phi$  и  $K_P$  соответственно служат, как правило, верхней и нижней границей значений реальных модулей  $K$  композита. Однако, анализ решения Кристенсена (6), представленного формулами (4), (7) и (8), позволяет уточнить данное правило (в смысле верхней и нижней оценки вилки Фойгта – Рейсса) применительно к двухфазной структуре зернистых СКМ. Но сначала выразим модули  $K_\Phi$  и  $K_P$  в долях от модуля  $K_M$  (матрицы) и получим формулы для безразмерных величин тех же модулей:

$$k_\Phi = \frac{K_\Phi}{K_M} = V + \frac{w}{\theta}, \quad k_P = \frac{K_P}{K_M} = \frac{1}{V + \theta w}. \quad (11)$$

Применительно к расчетным формулам (7) и (8) выражения (11) примут соответствующий вид:

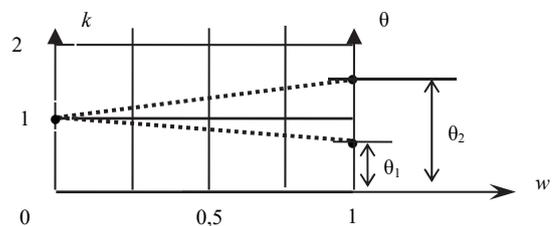
– вариант 1 (при  $\theta \leq 1$ ):

$$k_{\Phi 1} = (1 - w) + \frac{w}{\theta_1}, \quad k_{P 1} = \frac{1}{(1 - w) + \theta_1 w}; \quad (12)$$

– вариант 2 (при  $\theta \geq 1$ ):

$$k_{\Phi 2} = (1 - w) + \frac{w}{\theta_2}, \quad k_{P 2} = \frac{1}{(1 - w) + \theta_2 w}. \quad (13)$$

В случаях, когда величина отношения  $\theta$  неизменна ( $\theta = \text{const}$ ), выражения (12) и (13) становятся функциями одного аргумента:  $k_\Phi = k_\Phi(w)$  и  $k_P = k_P(w)$ . Следовательно, эти функции могут быть представлены графически в плоском пространстве осей  $k$  и  $w$  (рис. 3). О наглядности такого пространства, использованного при анализе формул (4) – (6), свидетельствует содержание работы [6].



**Рис. 3.** Область плоского пространства  $k - w$ , ограниченная осями  $k$ ,  $\theta$  и  $w$ . Пунктиром выделены 2 отрезка функции  $k_\Phi = k_\Phi(\theta, w)$  при значениях  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$   
**[Figure 3.]** The region of flat space  $k - w$  bounded by the axes  $k$ ,  $\theta$  and  $w$ . The dashed line marks 2 segments of the function  $k_\Phi = k_\Phi(\theta, w)$  for the values  $\theta = \theta_1$  and  $\theta = \theta_2$

В обозначенной области пространства  $k - w$  функции модулей по Фойгту, например, аналогично формулам (12) и (13), примут вид

$$k_{\Phi 1} = (1 - w) + \frac{w}{\theta_1}, \quad k_{\Phi 2} = (1 - w) + \frac{w}{\theta_2}.$$

Эти функции отображаются двумя семействами прямолинейных отрезков, исходящих из их общей точки с координатами (0, 1). На рис. 3 пунктирными линиями изображены два таких отрезка, по одному из каждого семейства. Правые концы выбранных отрезков имеют координаты (1,  $\theta_2$ ) и (1,  $\theta_1$ ) (на рис. 3 выделены жирными точками).

Функции модулей по Рейсу и по Кристенсену (в той же области пространства  $k - w$ ) имеют криволинейное очертание; их графики расположены ниже отрезков по Фойгту и непосредственно примыкают к этим отрезкам своими концами в точках (0, 1), (1,  $\theta_2$ ) или (1,  $\theta_1$ ) (рис. 3). Для более четкого описания этих функций рассмотрим два численных примера.

### 3. Сравнительный анализ оценок по Фойгту, Рейсу и Кристенсену

Проведем анализ расчетных формул (7), (8) и формул (12) и (13) для сравнения верхней и ниж-

ней оценок величины эффективного модуля упругости в двухфазных композитах. С этой целью выделим две группы композитов. В первой из них отношение объемных модулей компонентов  $\theta$  прием равным 0,25, то есть меньше единицы; во второй – больше единицы ( $\theta = 4$ ).

Задав шаг  $\Delta w = 0,125$ , вычислим модули  $k_{\Phi}$  и  $k_R$  по формулам (12), (13) как для первой, так и для второй группы композитов. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Затем для этих же групп вычислим модули  $k$  по формулам (7) и (8) при значениях отношения  $\eta_m$ , равных 1, 1/2 и 0, которым соответствуют значения коэффициента Пуассона  $\nu_m$ , равные 0, 0,2 и 0,5. Результаты отображены в табл. 2.

Сопоставив таблицы, отметим, что значения строки 3 в табл. 2 совпали со значениями строки 2 в табл. 1. Значения же строки 6 в табл. 2 в свою очередь повторяют значения строки 4 в табл. 1. Таким образом, нижняя граница значений эффективных модулей  $k$ , вычисляемых по Кристенсену (табл. 2) точно совпала с оценкой модулей  $k_R$  по Рейсу (табл. 1). Однако оценки по Фойгту и по Кристенсену различны. Это следует из сопоставления других строк тех же таблиц.

Таблица 1

Значения модулей по Фойгту ( $k_{\Phi}$ ) и по Рейсу ( $k_R$ ) для двух групп композитов  
[Table 1. The values of the modules according to Voigt ( $k_{\Phi}$ ) and Reuss ( $k_R$ ) for two groups of composites]

Группа [Group]	Модуль [Module]	Объемная доля заполнителя ( $w$ ) [Volume fraction of aggregate ( $w$ )]								
		0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
1	по Фойгту [according to Voigt]	1	1,375	1,75	2,125	2,5	2,875	3,25	3,625	4
	по Рейсу [according to Reuss]	1	1,103	1,231	1,391	1,6	1,882	2,286	2,909	4
2	по Фойгту [according to Voigt]	1	0,906	0,813	0,719	0,625	0,531	0,438	0,344	0,25
	по Рейсу [according to Reuss]	1	0,727	0,571	0,471	0,4	0,348	0,308	0,276	0,25

Таблица 2

Значения модулей  $k$  (по Кристенсену) в двух группах композитов ( $\theta = 1/4$  и  $\theta = 4$ ) при трех значениях параметра  $\eta_m$   
[Table 2. The values of the modules  $k$  (according to Christensen) in two groups of composites ( $\theta = 1/4$  and  $\theta = 4$ ) for three values of the parameter  $\eta_m$ ]

Параметры [Options]		Объемная доля заполнителя ( $w$ ) [Volume fraction of aggregate ( $w$ )]								
$\theta$	$\eta_m$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	$w \rightarrow 1$
0,25	1	1	1,2	1,429	1,692	2	2,364	2,8	3,333	4
0,25	0,5	1	1,162	1,353	1,581	1,857	2,2	2,636	3,211	4
0,25	0	1	1,103	1,231	1,391	1,6	1,882	2,286	2,909	4
4	1	1	0,88	0,769	0,667	0,571	0,483	0,4	0,323	0,25
4	0,5	1	0,86	0,739	0,633	0,538	0,455	0,379	0,311	0,25
4	0	1	0,727	0,571	0,471	0,4	0,348	0,308	0,276	0,25

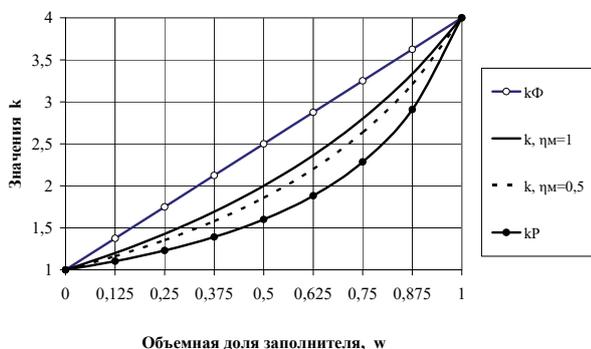
Для большей наглядности рассмотрим два графических примера.

*Пример 1.* Совместим в одном рисунке графические зависимости, построенные по данным табл. 1 и 2 для первой группы выбранных материалов

(рис. 4). При этом все значения эффективных модулей лежат в интервале чисел  $1 < k < 4$ .

Концевые точки всех криволинейных графиков (рис. 4) совмещены с концевыми точками прямолинейного отрезка по Фойгту. Нижний график зна-

чений модулей по Рейсу дает нижнюю оценку значений эффективных модулей реальных композитов. Область плоского пространства, ограниченная верхним и нижним графиками, наглядно демонстрирует так называемую вилку Фойгта – Рейсса.



**Рис. 4.** Зависимости модулей  $k_{Ф1}$ ,  $k_{P1}$  и  $k_1$  от величины объемной доли  $w$ . Значения  $k_1$  соответствуют значениям  $\eta_m$ , равным 1,  $\frac{1}{2}$  и 0 [Figure 4. Dependences of the modules  $k_{Ф1}$ ,  $k_{P1}$  and  $k_1$  on the volume fraction  $w$ . The values of  $k_1$  correspond to the values of  $\eta_m$  equal to 1,  $\frac{1}{2}$ , and 0]

На рис. 4 также отображены зависимости значений модулей  $k_1$  по Кристенсену – три криволинейных графика, соответствующих значениям коэффициента Пуассона  $\nu_m = 0, 0,2$  и  $0,5$ . При этом нижний график (со значением  $\nu_m = 0,5$ ) точно совпал с графиком модулей  $k_{P1}$  (по Рейсу). Следовательно, нижняя оценка по Рейсу, определяемая второй из формул (12), является и частным случаем формулы (7) при значении  $\eta_m = 0$  (или  $\nu_m = 0,5$ , что то же самое).

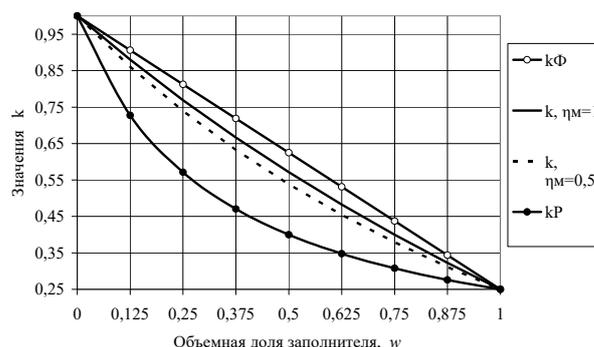
Оценка по Фойгту (верхний график) не совпадает с верхней оценкой по Кристенсену (2-й график сверху) (рис. 4), которая, согласно выражению (7), при значении  $\eta_m = 1$  определяется формулой

$$k_{1\max} = \frac{(1 + 2w) + 2\theta_1 V}{V + \theta_1(2 + w)}. \quad (14)$$

Значениям  $k_{1\max}$  отвечают материалы матрицы, коэффициент Пуассона которых  $\nu_m = 0$ . Такие материалы лучше других материалов (со значениями  $\nu_m > 0$ ) сопротивляются деформациям сдвига. Другими словами, чем меньше величина коэффициента  $\nu_m$ , тем выше жесткость (и прочность) композита.

*Пример 2.* Аналогично поступим и со второй группой выбранных композитов. Совместив в одном рисунке зависимости, построенные по данным табл. 1 и 2, получим графики, подобные графикам первой

группы материалов (рис. 5), но со значениями модулей  $k \leq 1$ .



**Рис. 5.** Зависимости модулей  $k_{Ф2}$ ,  $k_{P2}$  и  $k_2$  от величины объемной доли  $w$ . Значения  $k_2$  соответствуют значениям параметра  $\eta_m$ , равным 1,  $\frac{1}{2}$  и 0 [Figure 5. Dependences of the modules  $k_{Ф2}$ ,  $k_{P2}$  and  $k_2$  on the volume fraction  $w$ . The values of  $k_2$  correspond to the values of the parameter  $\eta_m$  equal to 1,  $\frac{1}{2}$  and 0]

Последовательность в расположении графиков на рис. 5 сохраняется такой же, как и на рис. 4. Основные различия рисунков заключаются в том, что: 1) прямолинейный отрезок на рис. 4 изображен восходящим, а на рис. 5 аналогичный отрезок – нисходящим; 2) рис. 4 характеризует композиты первой группы (при  $\theta < 1$ ), рис. 5 – композиты второй группы (при  $\theta > 1$ ).

Зависимости по Кристенсену (2-й и 4-й графики на рис. 5), определяемые формулой (8), при значениях  $\eta_m = 1$  и  $\eta_m = 0$  принимают вид функций

$$k_{2\max} = \frac{(1 + 2w) + 2\theta_2 V}{V + \theta_2(2 + w)}, \quad (15)$$

$$k_{2\min} = \frac{1}{V + \theta_2 w}. \quad (16)$$

Таким образом, зависимость (16) как частный случай формулы Кристенсена (8) совпадает с формулой Рейса (13).

### Заключение

Расчетная формула (6) Р.М. Кристенсена [17] для величины эффективного объемного модуля полидисперсных композитов существует уже почти 40 лет и имеет достаточно широкую известность. Тем не менее, к сожалению, она фактически не используется в строительном материаловедении. Вышеизложенные численные исследования этой формулы позволили выявить и графически проиллюстрировать ряд несомненных ее достоинств.

Во-первых, относительно верхних и нижних оценок величины объемных модулей реальных композитов формула выявляет суженную вилку оценок по Кристенсену, по сравнению с общеизвестной вилкой Фойгта – Рейсса».

Во-вторых, нижние оценки по Рейссу (13) и по Кристенсену (16) совпадают. Это уточняет положение вилки по Кристенсену в рамках вилки Фойгта – Рейсса.

В-третьих, наши интерпретации формулы Кристенсена имеют вид элементарных алгебраических функций трех безразмерных параметров ( $\eta_m = 2G_m/3K_m$ ,  $\theta = K_m/K_3$  и  $w = a^3/R^3$ ). Это существенно облегчает их численный анализ и практическое пользование ими.

И, наконец, в-четвертых, безразмерная форма представления величины эффективного модуля зернистого композита ( $k = K/K_m$ ) позволяет построить в плоском пространстве  $k - w$  систему бесконечного множества графических зависимостей модуля  $k$  от количественного содержания объемной доли заполнителя. Это дает возможность в каждом конкретном композите вычислить место его эффективного модуля в плоском пространстве модулей, определяемых формулой Кристенсена, и в случае необходимости усилить (или ослабить) те или иные механические свойства композита.

### Список литературы

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа 1968. 512 с.
2. Бобрышев А.Н., Ерофеев В.Т., Козомазов В.М. Физика и синергетика дисперсно-неупорядоченных конденсированных композитных систем. СПб.: Наука, 2012. 176 с.
3. Васильев В.В., Протасов В.В., Болотин В.В. и др. Композитные материалы: справочник. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
4. Гусев Б.В., Кондрашенко В.И., Маслов Б.П., Файсович А.С. Формирование структуры композиционных материалов и их свойства. М.: Научный мир, 2006. 566 с.
5. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Ерофеева И.В. О связях параметров несущей фазы с эффективными параметрами в моделях зернистых композитов // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 3. С. 7–17.
6. Erofeev V., Tyuryakhin A., Tyuryakhina T. Flat space of values of volume module of grain composite with spherical fill-lem // International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET). 2019. Issue 8. Pp. 333–342.

7. Берлин А.А., Вольфсон С.А., Оимян В.Г., Ениколопов Н.С. Принципы создания композитных полимерных материалов. М.: Химия, 1990. 240 с.

8. Аскадский А.А., Голенева Л.М., Бычко К.А., Казанцева В.В., Константинов К.В., Алмаева Е.С., Клиских А.Ф., Коврига О.В. Градиентные полимерные материалы // Российский химический журнал. 2001. Т. 45. № 3. С. 123–128.

9. Duan K., Hu Xiao, Wittmann F.H. Boundary effect on concrete fracture and non-constant fracture energy distribution // Engineering Fracture Mechanics. 2003. No. 70. Pp. 2257–2268.

10. Carpinteri A., Chiaia B., Cornetti P. On the mechanics of quasi-brittle materials with a fractal microstructure // Engineering Fracture Mechanics. 2003. No. 70. Pp. 2321–2349.

11. Ayatollahi M.R., Akbaridoost J. Size effects on fracture toughness of quasi-brittle materials-A new approach // Engineering Fracture Mechanics. 2012. No. 92. Pp. 89–100.

12. Hu X., Guan J., Wang Y., Keating A., Yang S. Comparison of boundary and size effect models based on new developments // Engineering Fracture Mechanics. 2017. No. 22. Pp. 146–167.

13. Muralidhara S., Raghu Prasad B.K., Eskandari H., Karihaloo B.L. Fracture process zone size and true fracture energy of concrete using acoustic emission // Construction and Building Materials. 2010. No. 24. Pp. 479–486.

14. Muralidhara S., Raghu Prasad B.K., Karihaloo B.L., Singh R.K. Size-independent fracture energy in plain concrete beams using tri-linear model // Construction and Building Materials. 2011. № 25. Pp. 3051-3058.

15. Shafiqullin L.N., Bobrishev A.A., Erofeev V.T., Treshchev A.A., Shafiqullina A.N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts // International Journal of Applied Engineering Reserch. 2015. Vol. 10. No. 23. Pp. 43758–43762.

16. Shafiqullin L.N., Treshchev A.A., Hodorovich P.Y., Erofeev V.T. The Stress-Strain State Of Layered Orthotropic Conditional Half-Space Taking Into Account Different Resistance // Revista Publicando. 2017. Vol. 4. No. 13(2). Pp. 109–127.

17. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.

18. Черкасов В.Д., Тюряхин А.С. Теория двухсвязных моделей микромеханики композитов: монография. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2009. 108 с.

19. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials // J. Appl. Mech. 1962. Vol. 29. No. 1. Pp. 143–150.

20. Reuss A. Berechnung der Fliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung // Z. Angew. Math. und Mech. 1929. Vol. 9. No. 1. Pp. 49–58.

21. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin: Teubner, 1928. 962 p.

## Effective modules of two-phase construction composites with grain filler

Vladimir T. Erofeev, Aleksej S. Tyuryahin, Tatyana P. Tyuryahina, Aleksandr V. Tingaev\*

National Research Ogarev Mordovia State University (National Research University), 68 Bolshevistskaya St., Saransk, 430005, Russian Federation  
\*tingaev.sl@gmail.com

### Article history:

Received: October 19, 2019

Revised: December 02, 2019

Accepted: December 06, 2019

### Abstract

In the book of R.M. Christensen, "Introduction to the Mechanics of Composites" (1982), a calculation formula is given for the bulk module of polydisperse composites with spherical inclusions. This formula has been known to the Russian-speaking reader for almost 40 years, but unfortunately, it is not used in the practice of building materials science. To identify applied possibilities, R.M. Christensen's formula is modified and reduced to a dimensionless function  $k = k(w, \eta, \theta)$ , which depends on three dimensionless parameters, i.e., it depends on three quantities:  $w$  is the volume fraction of the inclusion,  $\eta$  – the ratio of the shear modulus of the matrix material to the volume modulus of the same matrix,  $\theta$  is the ratio of the volume moduli of the matrix materials and inclusion. Numerical studies of this function reveal that in two-phase granular composites, the range of effective moduli is significantly narrowed compared to the region limited by Voigt and Reuss estimates (in the sense of the upper and lower bounds of real values). At the same time, the lower Christensen score is the same as the Reuss score. Numerical and graphically presented results are given on the examples of the study of two characteristic groups of composite materials. In addition, the dimensionless form of the effective module allows to construct a system of visual graphic dependencies of the functions  $k(w)$  in a flat space  $k - w$ . For different values of  $\theta$ , the function  $k = k(w, \eta)$  displays a bunch of curved segments, which sets the position of the plane figure in flat space. Examples of constructing figures for characteristic regions of the values of the function  $k(\eta, \theta, w)$  are given.

**Keywords:** two-phase model of granular composite; spherical shape of the phases of the matrix and aggregate; effective bulk modulus of elasticity of the composite; Voigt – Reuss plug for an effective module

### For citation

Erofeev V.T., Tyuryahin A.S., Tyuryahina T.P., Tingaev A.V. (2019). Effective modules of two-phase construction composites with grain filler. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 407–414. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-407-414>. (In Russ.)

### References

1. Bezukhov N.I. (1968). *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. (In Russ.)
2. Bobryshev A.N., Erofeev V.T., Kozomazov V.M. (2012). *Fizika i sinergetika dispersno-neuporyadochennykh kondensirovannykh kompozitnykh sistem [Physics and synergetics of dispersively disordered condensed composite systems]*. Saint Petersburg, Nauka Publ. (In Russ.)
3. Vasil'ev V.V., Protasov V.V., Bolotin V.V. (1990). *Kompozitnye materialy [Composite materials]: reference book*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (In Russ.)
4. Gusev B.V., Kondrashenko V.I., Maslov B.P., Faysovich A.S. (2006). *Formirovanie struktury kompozitsionnykh materialov i ih svoystva [Formation of the structure of*

*composite materials and their properties]*. Moscow, Nauchnyj mir Publ. (In Russ.)

5. Erofeev V.T., Tyuryahin A.S., Erofeeva I.V. (2018). On the connections of the carrier parameters with effective parameters in models of grain composites. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (3), 7–17. (In Russ.)

6. Erofeev V., Tyuryahin A., Tyuryahina T. (2019). Flat space of values of volume module of grain composite with spherical fill-lem. *International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET)*, (8), 333–342.

7. Berlin A.A., Vol'fson S.A., Oshmyan V.G., Enikolopov N.S. (1990). *Principy sozdaniya kompozitnykh polimernykh materialov [Principles of creating composite polymer materials]*. Moscow, Himiya Publ. (In Russ.)

8. Askadskij A.A., Goleneva L.M., Bychko K.A., Kazanceva V.V., Konstantinov K.V., Almaeva E.S., Kliniskih A.F., Kovriga O.V. (2001). Gradientnye polimernye materialy [Gradient materials]. *Russian Chemical Journal*, 45(3), 123–128. (In Russ.)

9. Duan K., Hu Xiao, Wittmann F.H. (2003). Boundary effect on concrete fracture and non-constant fracture energy distribution. *Fracture Mechanics*, (70), 2257–2268.

10. Carpinteri A., Chiaia B., Cornetti P. (2003). On the mechanics of quasi-brittle materials with a fractal microstructure. *Engineering Fracture Mechanics*, (70), 2321–2349.

**Vladimir T. Erofeev**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Architecture and Construction; Academician of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Scopus Author ID: 57080123300, eLIBRARY SPIN-code: 4425-5045.

**Aleksej S. Tyuryahin**, Doctor of Engineering, Associate Professor of Department of Applied Mechanics.

**Tatyana P. Tyuryahina**, graduate student of Faculty of Architecture and Civil Engineering.

**Aleksandr V. Tingaev**, undergraduate of Faculty of Architecture and Civil Engineering.

11. Ayatollahi M.R., Akbaridoost J. (2012). Size effects on fracture toughness of quasi-brittle materials – a new approach. *Engineering Fracture Mechanics*, (92), 89–100.
12. Hu X., Guan J., Wang Y., Keating A., Yang S. (2017). Comparison of boundary and size effect models based on new developments. *Engineering Fracture Mechanics*, (22), 146–167.
13. Muralidhara S., Raghu Prasad B.K., Eskandari H., Karihaloo B.L. (2010). Fracture process zone size and true fracture energy of concrete using acoustic emission. *Construction and Building Materials*, (24), 479–486.
14. Muralidhara S., Raghu Prasad B.K., Karihaloo B.L., Singh R.K. (2011). Size-independent fracture energy in plain concrete beams using tri-linear model. *Construction and Building Materials*, (25), 3051–3058.
15. Shafigullin L.N., Bobrishev A.A., Erofeev V.T., Treshchev A.A., Shafigullina A.N. (2015). Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts. *International Journal of Applied Engineering Research*, 210(23), 43758–43762.
16. Shafigullin L.N., Treshchev A.A., Hodorovich P.Y., Erofeev V.T. (2017). The Stress-Strain State of Layered Orthotropic Conditional Half-Space Taking into Account Different Resistance. *Revista Publicando*, 4 (13–2), 109–127.
17. Christensen R.M. (1982). *Vvedenie v mekhaniku kompozitov [Introduction to the mechanics of composites]*. Moscow, Mir Publ. (In Russ.)
18. Cherkasov V.D., Tyuryakhin A.S. (2009). *Teoriya dvuhsyaznyh modelej mikromekhaniki kompozitov [The theory of biconnected models of micromechanics of composites]: monograph*. Saransk, Publishing House of Mordovia University. (In Russ.)
19. Hashin Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29(1), 143–150.
20. Reuss A., *Angew. Z.* (1929) Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung. *Math. und Mech.*, 9(1), 49–58.
21. Voigt W. (1928). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Berlin, Teubner.

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-415-432  
УДК 624.072.2.014

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Сравнительный расчет оптимальных параметров швеллерных гнутых и гнутозамкнутых профилей

**А.С. Марутян**

Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал Северо-Кавказского федерального университета) в г. Пятигорске, Российская Федерация, 357500, Пятигорск, пр-кт 40 лет Октября, 56  
al\_marut@mail.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 24 октября 2019 г.  
Доработана: 29 ноября 2019 г.  
Принята к публикации: 03 декабря 2019 г.

### Аннотация

**Актуальность.** Представлено новое техническое решение швеллерных гнутозамкнутых профилей (ГЗП), выделяющихся составным сечением и относящихся к легким стальным тонкостенным конструкциям (ЛСТК), которые отличаются высокими технико-экономическими показателями и массовым спросом в промышленно-гражданском строительстве. Приведены также основные итоги сравнительного расчета оптимальных параметров гнутых швеллеров и швеллерных ГЗП на изгиб. **Цель** исследования – показать, что характеристики ЛСТК можно дополнительно улучшить при помощи формообразования модификации профилей, сочетающей в своем составном сечении прямые и круглые очертания замкнутых и открытых контуров. **Методы.** Посредством опытно-конструкторских проработок и оптимизационно-проектных расчетов швеллерных профилей разработано их новое техническое решение, оригинальность которого подтверждена патентной экспертизой. **Результаты.** Швеллерный ГЗП состоит из двух трубчатых полок и одной стенки двойной толщины. Для его изготовления без сварных, болтовых или заклепочных соединений наружная и внутренняя заготовки выполняются по всей длине с зубчатыми продольными кромками, зубцы которых расположены относительно друг друга в шахматном порядке и взаимно загнуты в пазах между собой после замыкания гнутого профиля по его полкам. Загибы зубчатых креплений увеличивают толщину смятия, обеспечивают рост местной устойчивости и прочности соединений тонкостенных элементов на сдвиг, а также позволяют не редуцировать расчетные сечения. Сравнительный расчет оптимальных параметров гнутых швеллеров и швеллерных ГЗП на изгиб показал, что у первых из них прочность максимальна при отношении габаритов ширины и высоты сечения  $1/6$ , а у вторых –  $1/5,68$ .

**Ключевые слова:** стержневые конструкции; тонкостенные конструкции; гнутозамкнутые профили; зубчатые крепления; оптимизация сечений; расчет оптимальных параметров

### Для цитирования

Марутян А.С. Сравнительный расчет оптимальных параметров швеллерных гнутых и гнутозамкнутых профилей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 415–432. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-415-432>

## Введение

Гнутые и прокатные швеллеры относятся к сортовым и фасонным профилям стального проката, имеющим повышенный спрос в промышленно-

гражданском строительстве. Швеллерный гнутый профиль по определению образован стенкой и двумя полками, расположенными по одну сторону от стенки под прямым углом (рис. 1, а) [45. С. 7]. Область его рационального применения заметно расширилась за счет легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) различных зданий и сооружений [1–3], где в качестве основного конструкционного материала используется тонколистовая оцинкованная сталь. В эту область входят карка-

Марутян Александр Суменович, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник отдела организации проектно-грантовой деятельности, преподаватель колледжа

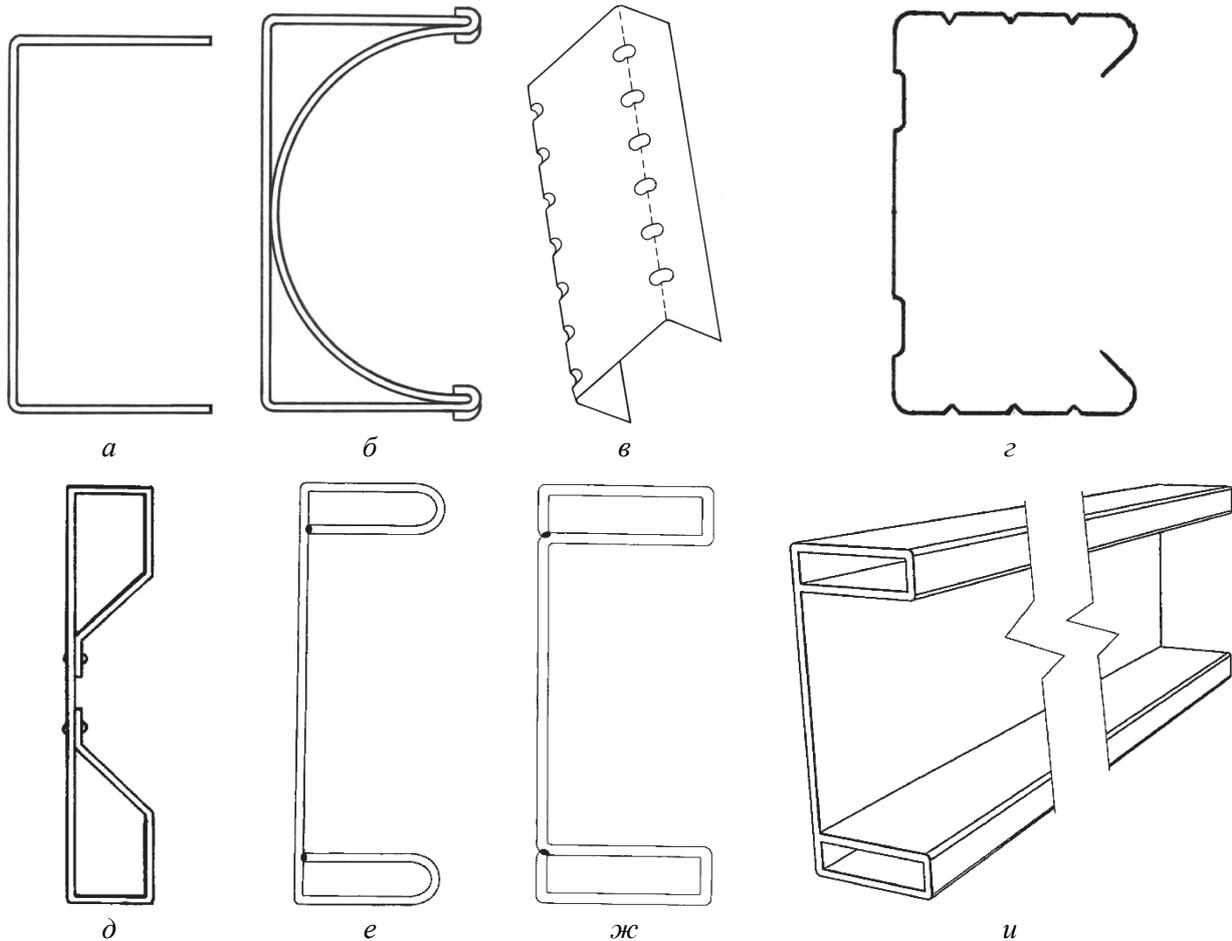
© Марутян А.С., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

сы стеновых и кровельных панелей, балки перекрытий и покрытий, надстройки и мансарды, стропила и стеллажи, ригели и витражи, рамно-стержневые и ферменные системы, а также другие несущие и ограждающие конструкции [4–13]. Швеллерный гнутозамкнутый профиль (ГЗП) отличается от гнутого швеллера составным сечением, в котором стенка и трубчатые полки сопряжены друг с другом посредством зубчатых замыканий продольных кромок и взаимного опирания в зоне контакта двух его листовых заготовок. Из них на-

ружная по своему очертанию ничем не отличается от гнутого швеллера, а внутренняя в поперечном сечении имеет форму круглого полукольца диаметром, равным высоте стенки (рис. 1, б) [14]. Предлагаемое (новое) техническое решение гнутозамкнутого швеллера также относится к области строительства и может быть использовано в качестве стержневых и балочных элементов при разработке строительных конструкций. В частности, это могут быть стержневые элементы ферм покрытий, стеновые ригели или кровельные прогоны.



**Рис. 1.** Схемы швеллерных профилей:

*a* – гнутого; *б* – гнутозамкнутого; *в* – гнутого с цилиндрическими впадинами; *г* – гнутого с продольными гофрами;  
*д* – гнутоклепаного с трубчатыми полками; *е, ж, и* – гнутосварного с трубчатыми полками

[Figure 1. Scheme channel profiles:

*a* – bent; *б* – bent closed; *в* – bent with cylindrical hollows; *г* – bent with longitudinal corrugations;  
*д* – bent riveted with tubular shelves; *е, ж, и* – bent welded with tubular shelves]

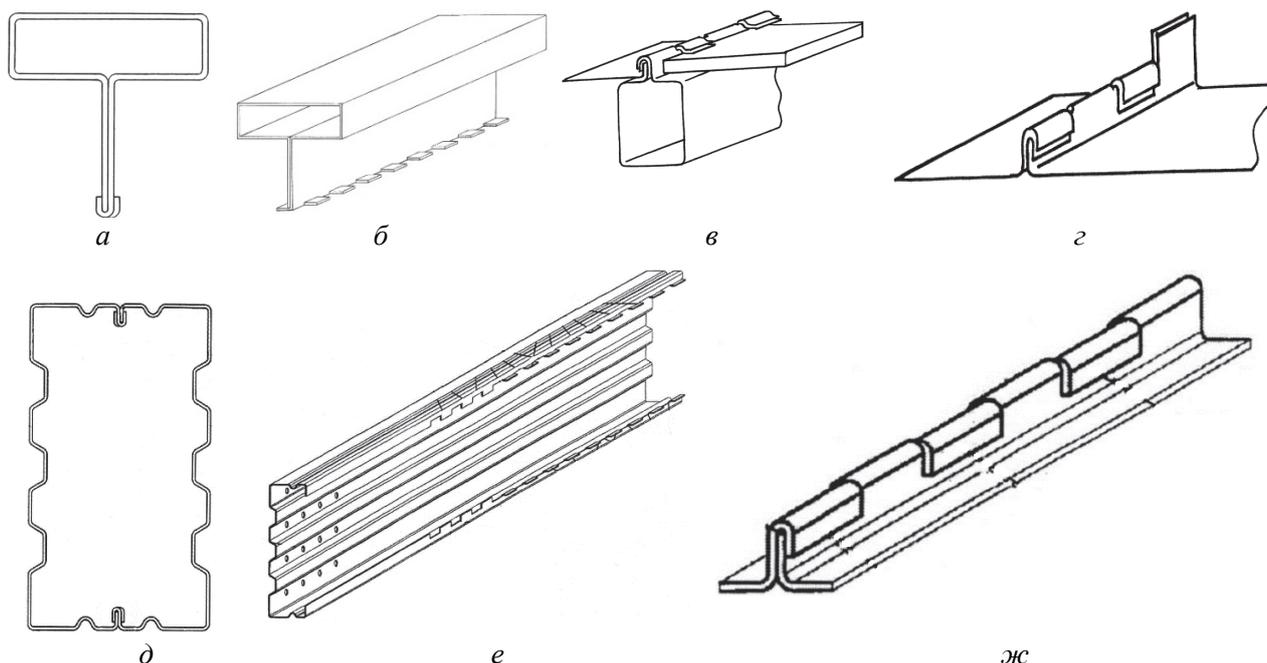
К известному техническому решению можно отнести гнутый швеллерный профиль толщиной 0,8...3,5 мм, стенка которого сопряжена с полками посредством участков изгиба с радиусной внутренней поверхностью и внешней поверхностью с впадинами в форме цилиндров определенных размеров (рис. 1, в) [15]. Такие впадины способствуют росту местной (локальной) устойчивости тонкостен-

ного профиля и, как следствие, увеличению его несущей способности. Однако их выполнение сопровождается дополнительными затратами, а при использовании сталей повышенной и высокой прочности может привести к образованию трещин. Другим техническим решением является гнутый профиль швеллерного типа из оцинкованной стали толщиной 0,5...1,0 мм, содержащий полки и гофри-

рованную стенку с заданной величиной радиуса изгиба между ними. Профиль дополнительно содержит продольные гофры на полках и отбортовки по их кромкам определенных размеров (рис. 1, з) [16]. Гофрирование увеличивает ресурсы местной (локальной) устойчивости и формы тонкостенного сечения, несущая способность которого, однако, ограничена из-за незначительной толщины открытого (незамкнутого) профиля. Трубчатые (замкнутые) полками, имеющими в поперечном сечении форму прямоугольной трапеции, отличается техническое решение швеллерного гнукотлепаного профиля (рис. 1, д) [17]. Оно позволяет использовать тонколистовую оцинкованную сталь, но применение в нем заклепочных соединений вызывает дополнительные затраты.

Наиболее близким к предлагаемому (принятым в качестве прототипа) является техническое решение в виде швеллерного гнутосварного профиля (ГСП), стенка которого сопряжена с трубчатыми полками полуэллипсовальными или прямоугольного сечения определенных размеров (рис. 1, е, ж, и) [18; 19]. Параметры стенки и полок соразмерны толщине такого профиля и подобраны весьма рационально. При этом наличие в его составе двух свар-

ных швов является ограничением минимальной толщины свариваемых элементов и препятствием для использования оцинкованной стали. Еще одно техническое решение (принятое за аналог) представляет собой ГЗП прямоугольного сечения со стыком по середине одной из длинных граней, где каждая часть состыкованной грани имеет продолжение в форме ребра. Листовая заготовка такого профиля выполнена по всей длине с зубчатыми продольными кромками, зубцы которых расположены относительно друг друга в шахматном порядке и взаимно загнуты в пазах между собой после замыкания гнутого профиля по ребру (рис. 2, а, б) [20]. Зубчатое замыкание формирует профиль без сварки, что позволяет применять оцинкованную тонколистовую сталь. Поперечное сечение аналога оптимизировано по критерию равноустойчивости, рациональной для стержневых элементов, оказывающих силовое сопротивление продольным нагрузкам, но требует определенной доработки для балочных элементов. Патентная экспертиза предлагаемого профиля выявила еще два технических решения, похожих на принятый аналог. Первое из них можно отнести к воздуховодам и вентиляционным системам, а второе – к профильным трубам повышенной тонкостенности.



**Рис. 2.** Схемы гнутозамкнутых профилей (ГЗП):

*а, б* – оптимизированных по критерию равноустойчивости; *в, г* – с креплением фальцевого типа; *д, е, ж* – из двух С-образных заготовок

**[Figure 2.** Schemes of curved closed profiles (CCP):

*а, б* – optimized by the criterion of equilibrium; *в, г* – with fastening seam type; *д, е, ж* – from two C-shaped blanks]

Гнутозамкнутым креплением фальцевого типа отличается способ изготовления и соединения коробчатого элемента из тонколистовой заготовки, кромки которой отгибают, совмещают, разрезают

и загибают в противоположные стороны по линии, соединяющей основания разрезов (рис. 2, в, г) [21]. Зубчатые крепления замкового типа использованы в способе изготовления замкнутого металлическо-

го профиля и технологическом комплексе для его осуществления из двух С-образных заготовок (рис. 2, *д, е, ж*) [22]. Для увеличения несущей способности стенки и полки С-образных заготовок усилены продольными гофрами, а зубчатые крепления после их замыкания остаются внутри замкнутого профиля. Сравнивая такой профиль с гнutoзамкнутым швеллером, можно заметить, что несущая способность последнего обеспечена замкнутыми контурами его полок без продольных гофров, а зубчатые крепления более доступны и, как следствие, более технологичны.

В приведенных технических решениях, исключая аналог, несущая способность профилей обеспечена из условия их силового сопротивления поперечным нагрузкам и воздействиям, свойственным балочным конструкциям. Этим профилям можно придать замкнутую, но достаточно компактную форму поперечного сечения с отношением габаритов по ширине и высоте  $1/2$ , довольно устойчивую из плоскости и в плоскости несущей конструкции, что применимо и для таких стержневых элементов, как пояса ферм. Подобная проработка швеллерных ГЗП, включающая замыкания зубчатых креплений по конструктивно-компоновочному решению из аналога, может увеличить ресурсы несущей способности, а дополнительный расчет оптимальных параметров – повысить их основные характеристики.

### 1. Швеллерный ГЗП и его расчет

Техническим результатом предлагаемого решения является достаточная местная (локальная) и общая устойчивость профилей из плоскости и в плоскости несущей конструкции, расширение области рационального применения, а также уменьшение дополнительных затрат. Указанный результат дости-

гается тем, что в швеллерном ГЗП стенка и зубчатые полки сопряжены друг с другом посредством зубчатых замыканий продольных кромок и взаимного опирания в зоне контакта двух его листовых заготовок, где внутренняя грань стенки и полок в поперечном сечении имеет форму круглого полукольца диаметром, равным высоте стенки [14]. Швеллерный ГЗП обладает достаточно универсальным техническим решением, с реализацией которого для его изготовления можно использовать не только зубчатые замыкания, но и сварные, болтовые или заклепочные соединения. При изготовлении гнutoзамкнутых профилей с зубчатыми замыканиями параметры зубцов продольных кромок их листовых заготовок целесообразно подобрать так, чтобы одним зигзагообразным резом формировать кромки сразу двух заготовок (рис. 3, *а*). Тогда издержки производства будут минимальными, что обеспечит уменьшение дополнительных затрат. Загибы зубчатых креплений ГЗП увеличивают толщину смятия, что может способствовать определённому росту несущей способности соединений тонкостенных элементов, работающих в основном на сдвиг [23–30]. Также они способствуют сохранению местной (локальной) устойчивости и формы сечения тонкостенных элементов до достижения предельного состояния, что позволяет рассчитывать не редуцированные сечения, а сечения нетто [31–36]. Кроме того, загибы зубчатых креплений, распределённые равномерно по всей длине швеллерного ГЗП, обеспечивают его монолитность в большей степени, чем зоны контакта с трением соединения фальцевого типа в прямоугольном профиле балки с креплениями торцов к зацепам, что позволило считать поперечное сечение балки монолитным [37–40].

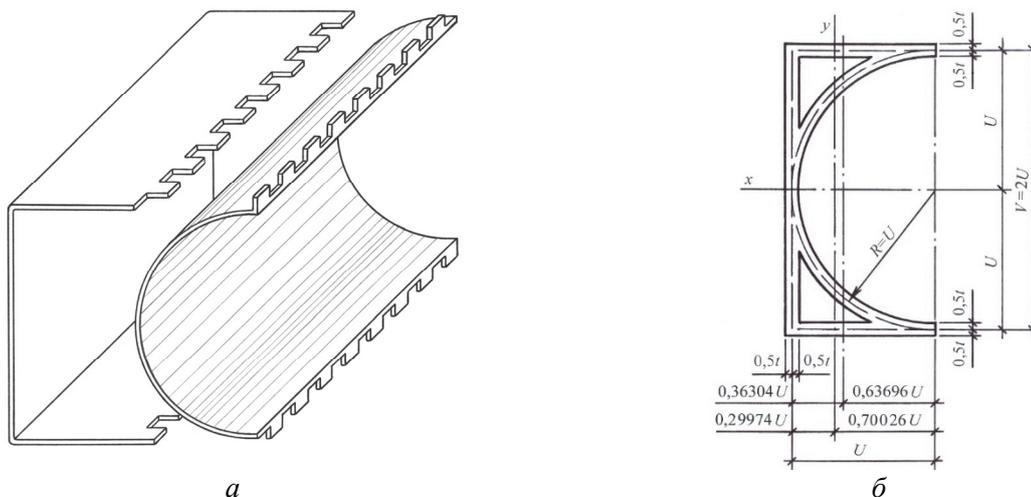


Рис. 3. Аксонометрия листовых заготовок швеллерного ГЗП (*а*) и расчетная схема его поперечного сечения нетто (*б*)  
[Figure 3. Axonometry of the sheet blanks of channel CCP (*a*) and design diagram of its net cross section (*b*)]

Для количественной оценки ресурсов несущей способности швеллерного ГЗП целесообразно рассчитать площадь  $A$ , а также моменты инерции его сечения  $I_x$  и  $I_y$  относительно главных центральных осей. Сечение такого профиля можно считать составной фигурой, включающей круглое полукольцо толщиной  $t$  и радиусом  $U$ , пару прямоугольников размерами  $t \times U$ , а также прямоугольник размерами  $t \times V$ , где  $U$  – габарит ГЗП по ширине;  $V$  – габарит того же профиля по высоте,  $V = 2U$  (рис. 3, б). Расчетные выкладки при этом допустимо выполнять по средней линии тонкостенного сечения без учета его угловых закруглений и численных величин, содержащих значения толщины, возведенной во вторую и третью степени ( $t^2$ ,  $t^3$ ) [41].

Поперечное сечение внутренней грани швеллерного ГЗП представляет собой круглое полукольцо, к которому вполне применимы расчетные формулы, протестированные при оптимизации параметров полуплоскоовальных труб для ферменных и балочных конструкций [42]:

$$x_{0,пк} = 0,36304U; I_{x,пк} = 1,57tU^3;$$

$$I_{y,пк} = 0,2961146tU; A_{пк} = 3,14tU,$$

где  $x_{0,пк}$ ,  $I_{x,пк}$ ,  $I_{y,пк}$ ,  $A_{пк}$  – абсцисса центра тяжести, моменты инерции относительно осей  $x-x$  и  $y-y$ , площадь сечения полукольца соответственно;  $U$  – ширина полки, равная радиусу полукольца по средней линии его сечения;  $t$  – толщина полукольца, равная толщине грани.

Расчетная площадь сечения нетто швеллерного ГЗП складывается из расчетных площадей сечений нетто одного полукольца и трех прямоугольных участков стенки и полок:

$$A = tU(3,14 + 2 + 2 \times 1) = 7,14tU.$$

Абсцисса центра тяжести сечения швеллерного ГЗП относительно средней линии его стенки составляет:

$$x_0 = (3,14tU \times 0,36304U + 2tU \times 0,5U) / (7,14tU) = 0,2997386U \approx 0,29974U.$$

Моменты инерции расчетного сечения нетто швеллерного ГЗП относительно центральных осей:

$$I_x = tU^3(1,57 + 2,0^3 / 12 + 2 \times 1,0 \times 1,0^2) = 4,2366666tU^3;$$

$$I_y = tU^3(0,296114 + 3,14(0,36304 - 0,29974)^2 + 2 \times 0,29974^2 + 2(1^3 / 12 + 1(0,5 - 0,29974)^2)) = 0,7352826tU^3.$$

Момент сопротивления расчетного сечения нетто швеллерного ГЗП в плоскости конструкции:

$$W_x = 2I_x / V = 2 \times 4,2366666tU^3 / (2U) = 4,2366666tU^2.$$

Если принять, что площадь сечения и толщина исходной заготовки являются постоянными величинами ( $A = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$ ), а отношение габаритов по ширине и высоте в общем случае не является постоянным ( $n = U / V \neq \text{const}$ ), то расчетные параметры швеллерного ГЗП при  $n = U / V = 0,5 = 1/2$  можно переписать следующим образом:

$$U = A / (7,14t) = 0,140056A / t;$$

$$V = 0,280112A / t;$$

$$x_0 = 0,29974(0,140056A / t) = 0,0419803A / t;$$

$$I_x = 4,2366666tU^3 = 4,2366666t(0,140056A / t)^3 = 0,0116389A^3 / t^2;$$

$$I_y = 0,7352826tU^3 = 0,7352826t(0,140056A / t)^3 = 0,0020199A^3 / t^2;$$

$$W_x = 2(0,0116389A^3 / t^2) / (0,280112A / t) = 0,0831017A^2 / t,$$

где исходная заготовка подлежит зигзагообразному резу на две части (наружную и внутреннюю).

Практическое значение имеет дальнейшее уточнение расчетных параметров с добавлением зубчатых креплений. Для этого в рассмотренном профиле необходимо подобрать размеры элементов зубчатого крепления (зубцов), которые должны быть не меньше 1/10 габаритного размера сечения [46]. В данном случае этот размер составляет  $0,1U$ , где  $U$  – габарит гнutoзамкнутого профиля по ширине.

В расчетных выкладках параметр зубчатых креплений (размер зубцов) отразится 4-кратным образом, так как швеллерный ГЗП имеет составное сечение из двух листовых заготовок с продольными кромками зубчатой формы:



$$I_x = 4,2366666 \times 0,09 \times 9,0^3 = 277,96769 \text{ см}^4 (154,9 \%);$$

$$I_y = 0,7352826 \times 0,09 \times 9,0^3 = 48,241891 \text{ см}^4 (86,02 \%).$$

Сравнительный расчет показывает, что замена профиля базового объекта на швеллерный ГЗП сопровождается при прочих равных условиях уменьшением расхода конструкционного материала, увеличением геометрических (статических) характеристик в силовой плоскости несущей конструкции и сокращением таких характеристик из плоскости. Выявленное сокращение можно объяснить тем, что полукруглый желоб с усиленными полками представляет собой профиль не столько швеллерного, сколько корытного типа. Корытный профиль образован, согласно определению, тремя стенками, две из которых одинакового размера направ-

лены в одну сторону, и двумя полками, направленными наружу профиля [45. С. 8].

Тем не менее, вполне очевидно, что швеллерный ГЗП по предлагаемому техническому решению достаточно перспективен для дальнейшей проработки и оптимизации. Поэтому пример его реализации можно продолжить, если в качестве базового объекта для сравнения во втором приближении выбрать профили повышенной жесткости марок ПГС100Ш (профили гнутые стальные, номинальной высоты 100 мм, швеллерного типа) с отношением габаритных размеров ширины и высоты  $n = V/U = 49/102 = 0,4803921 = 1/2,0816326 \approx 1/2$  (рис. 4, б) [47]. Расчетные выкладки более наглядны в табличной форме (табл. 1), где за эталонные (100-процентные) значения приняты параметры гнутых профилей, а выбранные толщины ГЗП ( $t = 0,40$  мм,  $t = 0,45$  мм и  $t = 0,50$  мм) отвечают требованиям [48], что снижает дополнительные затраты до минимума.

Таблица 1

 Расчетные параметры гнутых и гнутозамкнутых профилей  
 [Table 1. Design parameters of bent and curved closed profiles]

Профили [Profiles]	ПГС100Ш	ГЗП [ССР]	ПГС100Ш	ГЗП [ССР]	ПГС100Ш	ГЗП [ССР]	
	$t = 0,8$ мм [mm]	100×50 $t = 0,4$ мм [mm]	$t = 0,9$ мм [mm]	100×50 $t = 0,45$ мм [mm]	$t = 1,0$ мм [mm]	100×50 $t = 0,50$ мм [mm]	
Характеристики сечений [Cross section characteristics]	$A$ , см <sup>2</sup> [sm <sup>2</sup> ]	1,33	1,433	1,52	1,612	1,72	1,791
	%	100	107,7	100	106,1	100	104,1
	$A_{\text{брутто}}$ , см <sup>2</sup> [sm <sup>2</sup> ]	1,60	1,508	1,80	1,697	2,0	1,885
	%	100	94,25	100	94,28	100	94,25
	$A/A_{\text{брутто}}$	0,83	0,95	0,84	0,95	0,86	0,95
	$I_x$ , см <sup>4</sup> [sm <sup>4</sup> ]	20,0	21,183	22,5	23,831	25,0	26,479
	%	100	105,9	100	105,9	100	105,9
	$I_y$ , см <sup>4</sup> [sm <sup>4</sup> ]	3,54	3,676	3,98	4,136	4,44	4,596
	%	100	103,8	100	103,9	100	103,5
	$W_x$ , см <sup>3</sup> [sm <sup>3</sup> ]	3,08	4,236	3,46	4,766	3,85	5,296
	%	100	137,5	100	137,7	100	137,6

Как видно, расчетный переход от гнутых профилей швеллерного типа к швеллерным ГЗП при прочих равных условиях сопровождается, с одной стороны, уменьшением расхода конструкционного материала, а с другой стороны – увеличением геометрических (статических) характеристик как из плоскости конструкции, так и в ее плоскости, что можно признать достаточно корректным обоснованием перспективности предлагаемого профиля для его дальнейшей оптимизации и применения в несущих конструкциях зданий и сооружений.

### 3. Оптимизация швеллерного ГЗП на изгиб

Все приведенные выше расчетные выкладки относятся к швеллерным ГЗП со строго фиксированными параметрами, включая отношение габаритных размеров ширины и высоты, равное 1/2 (рис. 5).

При увеличении значений этого отношения можно заметить некоторые подвижки в контуре профилей, когда их наружные грани меняют свои швеллерные очертания на П-образные, а внутренние грани – полукольцевые – на U-образные. В таком случае для продолжения оптимизацион-

ного расчета швеллерных ГЗП более предпочтительны те из них, у которых отношения габаритных размеров по ширине и высоте не превышают 1/2. Тогда увеличивается внешнее сходство швел-

лерных ГЗП с гнутыми и прокатными швеллерами, а приведенная методика приближенного расчета тонкостенного сечения по его средней линии не нуждается в корректировке.

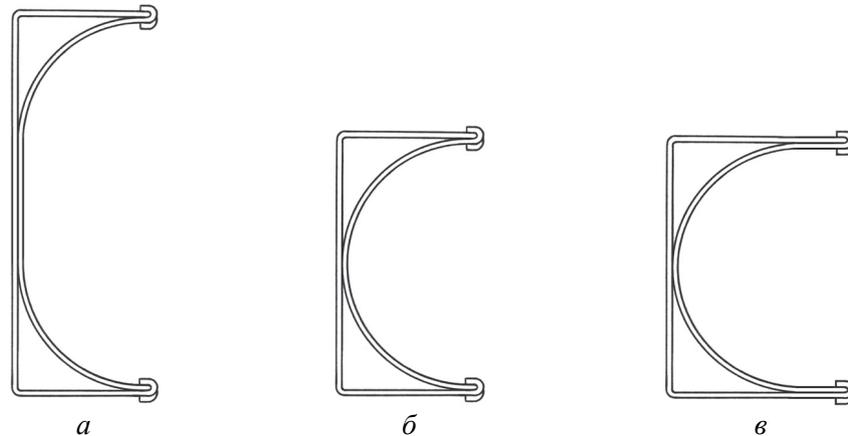


Рис. 5. Схемы швеллерных ГЗП:

*a* – при  $n = U/V = 1/2$ ; *б* – при  $n = U/V > 1/2$ ; *в* – при  $n = U/V < 1/2$

[Figure 5. Schemes of channel hot water supply:

*a* – with  $n = U/V = 1/2$ ; *б* – with  $n = U/V > 1/2$ ; *в* – with  $n = U/V < 1/2$ ]

Сечение швеллерного ГЗП при  $n = U/V < 1/2$  можно считать составной фигурой из пары замкнутых (полых) частей треугольного очертания и вертикального прямоугольника между ними. В свою очередь каждая из замкнутых частей в отдельности также представима составной фигурой из половины круглого полукольца ( $R = U$ ) и горизонтального прямоугольника ( $t \times U$ ). Замкнутые части соединены по вертикали разновысокими прямоугольниками (рис. 6, *a*):  $t \times V = tU/n$  и  $t \times (V - 2U) = tU((1/n) - 2)$ .

За составную часть в виде половины полукольца можно принять фрагмент тонкостенного кольца с угловым параметром  $\alpha = 45^\circ = \pi/4 = 0,785$  (рис. 6, *б*) [44]:

$$A_{\text{шнк}} = 2\alpha tR = 2 \times 0,785 tR = 1,57 tR ;$$

$$y_{0,\text{шнк}} = R \sin \alpha / \alpha = R \times 0,7071 / 0,785 = 0,9008R ;$$

$$I_{x,\text{шнк}} = (2\alpha + \sin \alpha - 4 \sin^2 \alpha / \alpha) tR^3 / 2 = (2 \times 0,785 + 1 - 4 \times 0,7071^2 / 0,785) tR^3 / 2 = 0,011115 tR^3 ;$$

$$I_{y,\text{шнк}} = (2\alpha - \sin 2\alpha) tR^3 / 2 = (2 \times 0,785 - 1) tR^3 / 2 = 0,2850 tR^3 ,$$

где  $y_{0,\text{шнк}}$ ,  $I_{x,\text{шнк}}$ ,  $I_{y,\text{шнк}}$ ,  $A_{\text{шнк}}$ ,  $R$  – ордината центра тяжести сечения, момент инерции сечения отно-

сительно оси  $x - x$ , момент инерции сечения относительно оси  $y - y$ , площадь сечения половины полукольца и радиус половины полукольца по ее средней линии соответственно.

Расчетная площадь сечения нетто швеллерного ГЗП складывается из расчетных площадей сечений нетто двух половин полуколец и трех прямоугольных участков стенки и полок:

$$A = tU(2 \times 1,57 + (1/n) + 2 \times 1 + (1/n) - 2) = tU(2/n + 3,14).$$

Абсцисса центра тяжести сечения швеллерного ГЗП относительно средней линии его стенки составляет

$$x_0 = U(2 \times 1,57 \times 0,36304 + 2 \times 1 \times 0,5) / (2/n + 3,14) = 2,13982U / (2/n + 3,14).$$

Моменты инерции расчетного сечения нетто швеллерного ГЗП относительно центральных осей:

$$I_x = tU^3((1/n)^3 / 12 + 2 \times 1 \times (0,5/n)^2 + 2(0,011115 \times 0,5 + 0,2850 \times 0,5 + 1,57(0,5/n - 0,36304)^2) - 2 \times 1(0,5/n - 0,5)^2 - 2 \times 1^3 / 12) = tU^3(0,1666666/n^3 + 0,785/n^2 - 0,13982/n + 0,043203);$$

$$I_y = tU^3(2(1/n-1)(2,13982/(2/n+3,14))^2 + 2 \times 1^3/12 + 2(0,5 - 2,13982/(2/n+3,14))^2 + (0,2850 \times 0,5 + 1,57 \times 2(0,36304 - 2,13982/(2/n+3,14))^2) = tU^3(5,506145/n^2 + 8,131636/n - 0,8054282)/(2/n+3,14)^2.$$

Момент сопротивления расчетного сечения нетто швеллерного ГЗП в плоскости конструкции:

$$W_x = 2I_x/V = 2tU^3(0,1666666/n^3 + 0,785/n^2 - 0,13982/n + 0,043203)/(U/n) = tU^2(0,3333332/n^2 + 1,57/n - 0,27964 + 0,086406n).$$

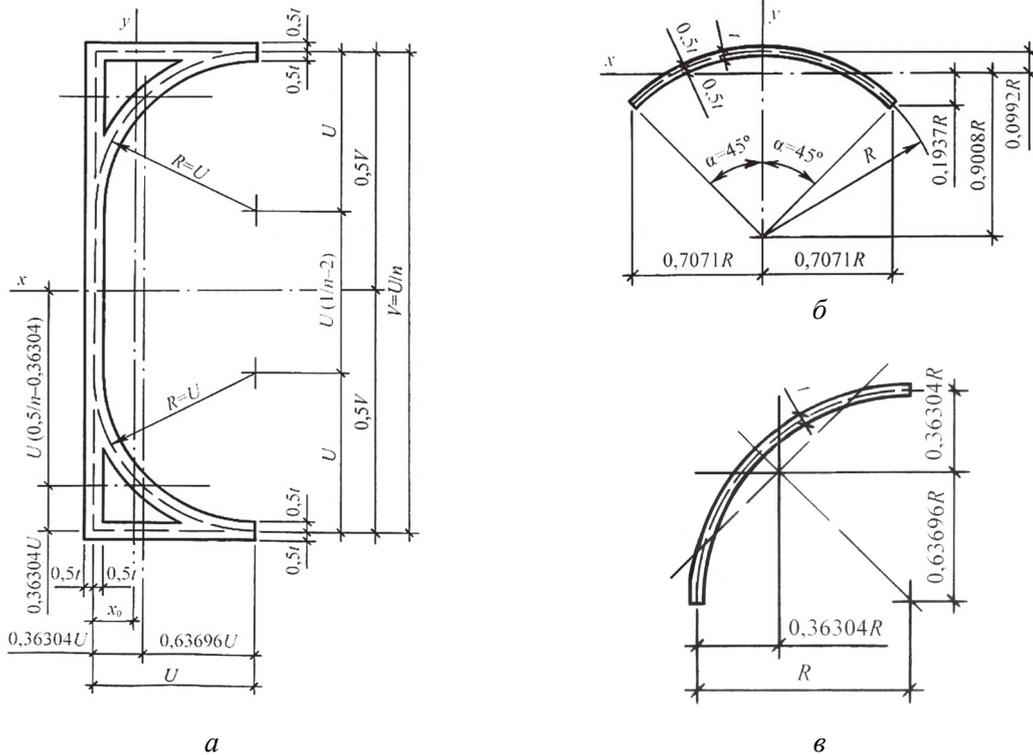


Рис. 6. Расчетные схемы сечения швеллерного ГЗП (а) и его составных частей (б, в)  
 [Figure 6. The design scheme of the cross section of the channel CCP (a) and its components (б, в)]

Если в полученные формулы подставить  $n = U/V = 1/2 = 0,5$ , то итоги численных выкладок совпадут с уже найденными значениями, что условно можно принять за положительный тест.

В качестве критерия оптимизации для продолжения расчета швеллерного ГЗП целесообразно использовать максимум момента сопротивления его сечения в силовой плоскости несущей конструкции, который обеспечивает наибольший запас прочности при изгибе:

$$W_x = (A^2/t)(0,3333332/n^2 + 1,57/n - 0,27964 + 0,086406n)/(4/n^2 + 12,56/n + 9,8596),$$

где  $U^2 = (A^2/t^2)/(2/n+3,14)^2$ ,  $A = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$ .

Чтобы найти экстремальное значение момента сопротивления  $W_x$ , его выражение необходимо продифференцировать по переменной  $n$  и, приравняв к нулю производную ( $dW_x/dn = 0$ ), получить уравнение четвертой степени

$$0,8519285n^4 + 2,1705186n^3 - 17,954978n^2 + 2,093335 = 0$$

с корнями

$$n_1 = -5,8407069; n_2 = -0,6369427;$$

$$n_3 = 0,1759477; n_4 = 3,7539311.$$

Из найденных корней практический интерес представляет третий, значение которого можно округлить до  $n = 0,1759477 = 1/5,683507 \approx 1/5,68$ .

Тогда расчетные параметры оптимизированного профиля составят:

$$A = tU(2/n + 3,14) = tU(2/0,1759477 + 3,14) = 14,507014tU;$$

$$U = 0,0689321A/t; V = 0,3911776A/t;$$

$$x_0 = 2,13982U / (2/n + 3,14) = 2,13982(0,0689321A/t) / 14,507014 = 0,0101676A/t;$$

$$I_x = tU^3(0,1666666/n^3 + 0,785/n^2 - 0,13982/n + 0,043203) = tU^3(0,1666666/0,1759477^3 + 0,758/0,1759477^2 - 0,13982/0,1759477 + 0,043203) = 55,204988tU^3 = 55,204988t(0,0689321A/t)^3 = 0,0180818A^3/t^2;$$

$$I_y = tU^3(5,506145/n^2 + 8,131636/n + 0,8054282)/(2/n + 3,14)^2 = tU^3(5,506145/0,1759477^2 + 8,131636/0,1759477 - 0,8054282)/14,507014^2 = 1,0609075tU^3 = 1,0609075t(0,0689321A/t)^3 = 0,0003474A^3/t^2;$$

$$W_x = W_{x,\max} = 2(0,0180818A^3/t^2) / (0,3911776A/t) = 0,092448A^2/t.$$

Сравнивая расчетные параметры швеллерного ГЗП, полученные до и после оптимизации, можно убедиться в ее эффективности, поскольку с увеличением габарита по высоте в  $0,3911776/0,280112 = 1,4$  раза момент инерции сечения в плоскости конструкции возрос в  $0,0180818/0,0116389 = 1,6$  раза, а момент сопротивления – в  $0,092448/0,0831017 = 1,1$  раза.

К выявленной эффективности оптимизации швеллерного ГЗП на изгиб следует добавить снижение ослабления расчетного сечения нетто, что является следствием сужения оптимизированного профиля по ширине:

$$A_{\text{брутто}} = A + \Delta A = 14,507014tU + 2 \times 2 \times 0,1tU = 14,907014tU;$$

$$A / A_{\text{брутто}} = 14,507014 / 14,907014 = 0,9731669 \approx 0,97.$$

#### 4. Оптимизация гнутого швеллера на изгиб

Для более корректного сравнения оптимальных параметров швеллерного ГЗП и гнутого швеллера необходимо гнутый профиль оптимизировать на изгиб, применив в качестве критерия оптимизации максимум момента сопротивления его сечения в силовой плоскости несущей конструкции. В таком случае вполне допустимо воспользоваться расчетной схемой поперечного сечения нетто ГЗП, исключив из него закругления внутренней грани (рис. 6, а).

Расчетная площадь сечения гнутого швеллера складывается из расчетных площадей сечений трех прямоугольных участков стенки и полок:

$$A = tU(2 + 1/n).$$

Абсцисса центра тяжести сечения гнутого швеллера относительно средней линии его стенки составляет:

$$x_0 = U(2 + 1/n - 1 - 1/n) / (2 + 1/n) = U / (2 + 1/n).$$

Моменты инерции расчетного сечения гнутого швеллера относительно центральных осей:

$$I_x = tU^3((1/n)^3 / 12 + 2 \times 1(0,5/n)^2) = tU^3(0,0833333/n + 0,5) / n^2;$$

$$I_y = tU^3(2(1^3/12 + 1(0,5 - 1/(2 + 1/n))^2) + 1/n(1/(2 + 1/n))^2) = tU^3(0,6666666/n^2 + 1,6666666/n + 0,6666666) / (2 + 1/n)^2.$$

Момент сопротивления расчетного сечения гнутого швеллера в плоскости конструкции:

$$W_x = 2I_x / V = 2nI_x / U = tU^2(0,1666666/n + 1) / n.$$

Полученные формулы целесообразно протестировать с использованием расчетных параметров самых крупнокалиберных гнутых швеллеров из стандартных сортаментов отечественных и зарубежных изготовителей стальных профилей. Как видно из основных результатов тестирования (табл. 2), расчет гнутых швеллеров по приближенной методике достаточно корректен для практического использования в вариантном проектировании и решении оптимизационных задач.

Расчетные параметры швеллерных гнутых профилей  
[Table 2. Design parameters of channel bent profiles]

Обоснование [Rationale]	По расчету [According to the calculation]			ТУ 112000-001-12586100-2009 [49]			Украинский стандарт [50] [Ukrainian standard [50]]			
	Сечение, мм [Cross-section, mm]	400×100×2	400×100×3	400×100×4	400×100×2	400×100×3	400×100×4	400×100×2	400×100×3	400×100×4
Характеристики сечений [Cross section characteristics]	$A, \text{см}^2 [\text{cm}^2]$	11,92	17,82	23,68	11,83	17,68	23,4	11,85	17,66	23,4
	%	100	100	100	99,24	99,21	98,82	99,41	99,10	98,82
	$x_0, \text{см} [\text{cm}]$	1,644	1,633	1,622	1,66	1,65	1,64	1,80	1,80	1,80
	%	100	100	100	101,0	101,04	101,1	109,8	110,2	111,0
	$I_x, \text{см}^4 [\text{cm}^4]$	2618,9	3892,9	5143,6	2584,5	3836,40	5034,2	2591,1	3830,5	5033,0
	%	100	100	100	98,69	98,55	97,88	98,94	98,40	97,85
	$I_y, \text{см}^4 [\text{cm}^4]$	97,138	143,59	188,66	96,91	143,26	188,03	96,96	143,2	188,1
	%	100	100	100	99,77	99,77	99,66	99,82	99,73	99,70
	$W_x, \text{см}^3 [\text{cm}^3]$	130,95	194,65	257,18	129,87	193,27	254,56	129,6	191,5	251,65
	%	100	100	100	99,17	99,29	98,98	98,99	98,38	97,85

Если принять, что площадь сечения и толщина листовой заготовки являются постоянными величинами ( $A = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$ ), а отношение габаритов по ширине и высоте в общем случае не является постоянным ( $n = U/V \neq \text{const}$ ), то протестированные формулы гнутого швеллера можно переписать следующим образом:

$$U = (A/t)/(2 + 1/n); V = (A/t)/(1 + 2n);$$

$$x_0 = ((A/t)/(2 + 1/n))/(2 + 1/n) = (A/t)/(2 + 1/n)^2;$$

$$I_x = tU^3(0,0833333/n + 0,5)/n^2 = t((A/t)/(2 + 1/n))^3(0,0833333/n + 0,5)/n^2 = (A^3/t^2)(0,0833333/n + 0,5)/(n^2(2 + 1/n)^3);$$

$$I_y = tU^3(0,6666666/n^2 + 1,6666666/n + 0,6666666)/(2 + 1/n)^2 = t((A/t)/(2 + 1/n))^3(0,6666666/n^2 + 1,6666666/n + 0,6666666)/(2 + 1/n)^2 = (A^3/t^2)(0,6666666/n^2 + 1,6666666/n + 0,6666666)/(2 + 1/n)^5;$$

$$W_x = tU^2(0,1666666/n + 1)/n = t((A/t)/(2 + 1/n))^2(0,1666666/n + 1)/n = (A^2/t)(0,1666666/n + 1)/(n(2 + 1/n)^2).$$

Чтобы найти экстремальное значение момента сопротивления  $W_x$ , его выражение необходимо продифференцировать по переменной  $n$  и, прирав-

няв к нулю производную ( $dW_x/dn = 0$ ), получить уравнение второй степени

$$n^2 + 0,3333332n - 0,0833334 = 0$$

с корнями

$$n_1 = -0,5; n_2 = 0,1666666.$$

Из найденных корней практический интерес представляет второй, значение которого можно округлить до  $n = 0,1666666 \approx 1/6,0$ .

Тогда расчетные параметры оптимизированного профиля составят:

$$U = (A/t)/(2 + 6) = 0,125A/t;$$

$$V = (A/t)/(1 + 2/6) = 0,75A/t;$$

$$x_0 = (A/t)/(2 + 6)^2 = 0,015625A/t;$$

$$I_x = (A^3/t^2)(2 + 6)^3(0,0833333 \times 6 + 0,5)6^2 = 0,0703125A^3/t;$$

$$I_y = (A^3/t^2)(0,6666666/n^2 + 1,6666666/n + 0,6666666)/(2 + 1/n)^5 = (A^3/t^2)(0,6666666 \times 6^2 + 1,6666666 \times 6 + 0,6666666)/(2 + 6)^5 = 0,0018807A^3/t^2;$$

$$W_x = W_{x,\text{max}} = 2(0,0703125A^3/t^2)/(0,75A/t) = 0,1875A^2/t.$$

Из сравнения расчетных параметров гнутого швеллера, полученных до и после оптимизации, ее эффективность очевидна, так как с увеличением габарита по высоте в  $0,75/0,5 = 1,5$  раза момент инерции сечения в плоскости конструкции возрос в  $0,0703125/0,0416666 = 1,7$  раза, а момент сопротивления – в  $0,1875/0,1666666 = 1,1$  раза, где  $V = 0,5A/t$ ;  $I_x = 0,0416666A^3/t^2$ ;  $W_x = 0,1666666A^2/t$  при  $n = U/V = 0,5 = 1/2$ . Здесь также можно заметить, что в швеллерном ГЗП аналогичная эффективность достижима в результате меньшего увеличения габарита по высоте, а в случае одинакового роста высотного параметра он более предпочтителен.

### Заключение

Отношения габаритных размеров по средним линиям расчетных сечений гнутого швеллера и швеллерного ГЗП, оптимизированных на изгиб, разнятся между собой на  $100(6-5,68)/(6...5,68) = 5,3...5,6$  %. Поэтому для сравнительного анализа оптимальных параметров, когда моменты сопротивления их сечений максимальны, представляется целесообразным рассмотреть в первом приближении двух расчетных случаев. Для одного из них оба сопоставимых профиля имеют отношение  $n = U/V = 1/6$  (рис. 7, а), а для другого –  $n = U/V = 1/5,68$  (рис. 7, б).

При  $n = U/V = 1/6$ :

– для гнутого швеллера

$$A = 8t_l U; I_{x,l} = 36,0t_l U^3 (100\%);$$

$$I_{y,l} = 0,4074073t_l U^3 (100\%);$$

$$W_{x,l} = 12,0t_l U^2 (100\%);$$

– для швеллерного ГЗП

$$A = 15,14t_{ГЗП} U;$$

$$t_{ГЗП} = 8t_l / 15,14 = 0,5284015t_l;$$

$$I_{x,ГЗП} = 63,464283t_{ГЗП} U^3 = \\ = 33,534622t_l U^3 (93,15\%);$$

$$I_{y,ГЗП} = 1,0741035t_{ГЗП} U^3 = \\ = 0,5675579t_l U^3 (139,3\%);$$

$$W_{x,ГЗП} = 21,154761t_{ГЗП} U^2 = \\ = 11,178207t_l U^2 (93,15\%).$$

При  $n = U/V = 1/5,68$ :

– для швеллерного ГЗП

$$A = 14,507014t_{ГЗП} U;$$

$$I_{x,ГЗП} = 55,204988t_{ГЗП} U^3 (100\%);$$

$$I_{y,ГЗП} = 1,0609075t_{ГЗП} U^3 (100\%);$$

$$W_{x,ГЗП} = 19,438375t_{ГЗП} U^2 (100\%);$$

– для гнутого швеллера

$$A = 7,683507t_l U; t_l = 1,8880719t_{ГЗП};$$

$$I_{x,l} = 31,450293t_l U^3 = \\ = 59,380414t_{ГЗП} U^3 (107,6\%);$$

$$I_{y,l} = 0,5365177t_l U^3 = \\ = 1,0129839t_{ГЗП} U^3 (95,48\%);$$

$$W_{x,l} = 11,067213t_l U^2 = \\ = 20,895693t_{ГЗП} U^2 (107,5\%).$$

Как видно по результатам первого приближения, при одинаковых значениях расчетной площади сечения без учета ее ослаблений в силовой плоскости несущей конструкции более предпочтительны гнутые швеллеры, а из плоскости – швеллерные ГЗП.

Продолжить сравнительный анализ во втором приближении можно, если полученные результаты уточнить с использованием ослаблений сечений, выявленных в приведенных расчетных выкладках:  $A/A_{орутто} = 0,86$  для гнутых швеллеров и

$A/A_{орутто} = 0,95$  для швеллерных ГЗП.

При  $n = U/V = 1/6$ :

– для гнутого швеллера

$$I_{x,l} = 31,32t_l U^3 (100\%);$$

$$I_{y,l} = 0,3544443t_l U^3 (100\%);$$

$$W_{x,l} = 10,44t_l U^2 (100\%);$$

– для швеллерного ГЗП

$$I_{x,ГЗП} = 31,8579t_l U^3 (101,7\%);$$

$$I_{y,ГЗП} = 0,53918t_l U^3 (152,1 \ %);$$

$$W_{x,l} = 18,1793t_{ГЗП} U^3 (98,44 \ %).$$

$$W_{x,ГЗП} = 10,6193t_l U^3 (101,7 \ %).$$

При  $n = U/V = 1/5,68$ :

– для швеллерного ГЗП

$$I_{x,ГЗП} = 52,4447t_{ГЗП} U^3 (100 \ %);$$

$$I_{y,ГЗП} = 1,007862t_{ГЗП} U^3 (100 \ %);$$

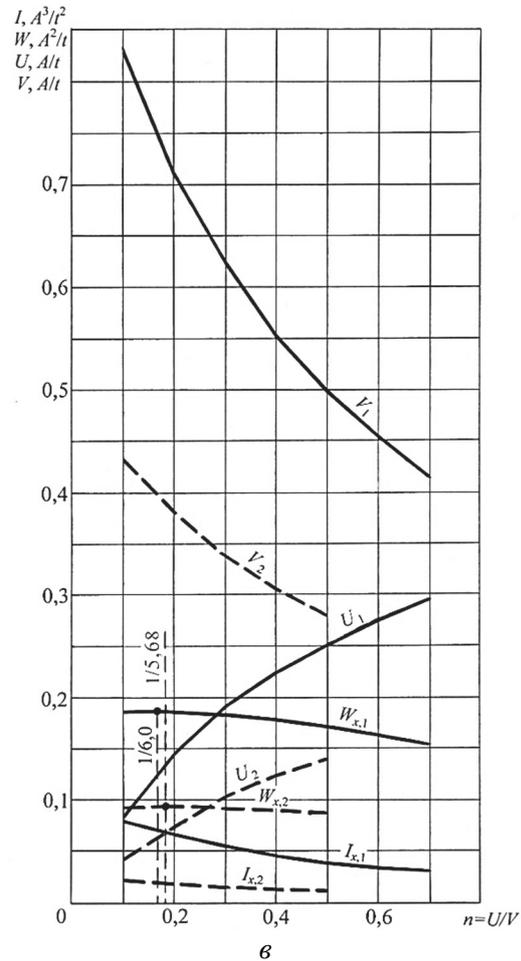
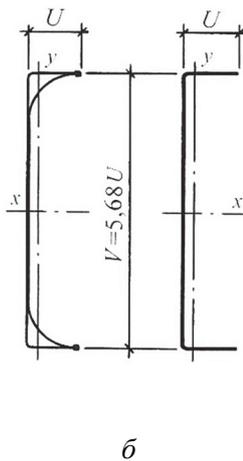
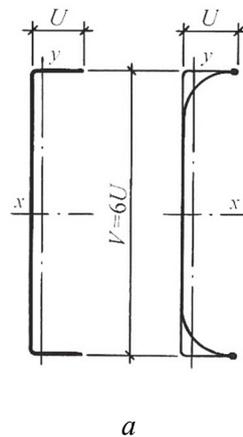
$$W_{x,ГЗП} = 18,4668t_{ГЗП} U^2 (100 \ %);$$

– для гнутого швеллера

$$I_{x,l} = 51,66098t_{ГЗП} U^3 (98,51 \ %);$$

$$I_{y,l} = 0,881296t_{ГЗП} U^3 (87,44 \ %);$$

Из итогов второго приближения следует, что при тех же значениях расчетной площади, но уже с учетом ее ослаблений в силовой плоскости несущей конструкции, а также из этой плоскости более предпочтительны швеллерные ГЗП. Здесь следует добавить, что с приближением к оптимальным параметрам  $n = U/V = 1/6...1/5,68$  ослабления расчетной площади сечения гнутых швеллеров из-за ее редуцирования увеличиваются еще больше, в то время как ослабления расчетной площади нетто швеллерных ГЗП уменьшаются. Так, применительно к гнутым швеллерам сечением  $250 \times 50 \times 1,5...2,0$  мм ( $n = U/V = 1/5$ )  $A/A_{\text{брутто}} = 0,389...0,503$ . Поэтому предпочтение швеллерных ГЗП становится еще более обоснованным.



**Рис. 7.** Сравнительные схемы оптимизированных профилей (а, б) и графики изменений расчетных параметров гнутых швеллеров (сплошные линии) и швеллерных ГЗП (пунктирные линии) в зависимости от роста отношения их габаритных размеров (в)  
**[Figure 7.** Comparative schemes of optimized profiles (a, б) and graphs of changes in the design parameters of bent channels (solid lines) and channel water distribution channels (dashed lines) in depending on the growth ratio of their overall dimensions (в)]

Расчетные параметры гнутых швеллеров и швеллерных ГЗП по новому техническому решению, а также основные результаты их оптимизации более наглядны на графиках в зависимости от отношения габаритных размеров ширины и высоты (рис. 7, в). На приведенных графиках обозначения с единицей в индексе относятся к параметрам гнутых швеллеров, имеющих одиночные стенки и такие же полки, а обозначения с двойкой в индексе – к параметрам швеллерных ГЗП, отличающихся двойными стенками и трубчатыми полками. При этом в единицах измерений по оси ординат использованы обозначения площади сечения и толщина листовой заготовки гнутых швеллеров, которая условно принята исходной заготовкой и для швеллерных ГЗП ( $A = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$ ).

Итоговые графики позволяют сделать некоторые выводы и обобщения.

1. Швеллерные гнутые профили с одиночной стенкой и двумя такими же полками характеризуются сравнительно узким, но высоким поперечным сечением с максимальным моментом сопротивления, когда отношение габаритных размеров ширины и высоты по средней линии расчетного сечения составляет 1/6.

2. Швеллерные ГЗП с двойной стенкой и двумя трубчатыми полками имеют более компактное поперечное сечение, момент сопротивления которого максимален при отношении габаритных размеров ширины и высоты, равном 1/5,68 по средней линии расчетного сечения.

3. Когда отношение габаритных размеров ширины и высоты швеллерного ГЗП составляет 1/2 по средней линии расчетного сечения, внутренняя грань его стенки и полка имеет в разрезе форму круглого полукольца. Расчетные параметры такого профиля обладают фиксированными значениями, при которых его ширина равна радиусу, а высота – диаметру полукольцевой грани. Если развить профиль в ширину при постоянной высоте, равной диаметру, то его наружная грань изменит швеллерное очертание на П-образное, а внутренняя грань – полукольцевое на U-образное. В случае развития профиля по высоте при постоянной ширине, равной радиусу, увеличивается его сходство с гнутыми и прокатными швеллерами.

4. Швеллерные ГЗП по новому техническому решению достаточно эффективны для использования в несущих конструкциях зданий и сооружений. В частности, прослеживается определенная перспективность их дальнейших проработок применительно к балкам с гофрированными и перфорированными стенками.

## Список литературы

1. Таран В.В., Селищев К.Э. Возведение зданий из легких стальных тонкостенных конструкций // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. 2018. № 6. С. 18–23.
2. Черноиван В.Н., Черноиван Н.В., Хоровец В.В., Черноиван А.В. Возведение и реконструкция жилых зданий с применением легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) // Вестник Брестского государственного технического университета. 2018. № 1. С. 115–118.
3. Советников Д.О., Виденков Н.В., Трубина Д.А. Легкие стальные тонкостенные конструкции в многоэтажном строительстве // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 3 (30). С. 152–165. DOI: 10.18720/CUBS.30.11
4. Решетников А.А., Корнет В.Ю., Леонова Д.А. Анализ экономического преимущества перекрытия из ЛСТК перед деревянным // Инженерный вестник Дона. 2018. № 3. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n31y2018/5125>
5. Рыбаков В.А., Маслак Т.В., Федотова К.А., Смирнов А.В., Ананьева И.А. Реконструкция скатных крыш с использованием легких стальных тонкостенных конструкций // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2017. № 12 (63). С. 20–48. DOI: 10.18720/CUBS.63.2
6. Устименко Е.Е., Скачков С.В. Экспериментальное исследование рамно-стержневых конструкций с элементами из тонкостенных стальных профилей // Инженерный вестник Дона. 2019. № 5. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2019/5972>
7. Атавин И.В., Казаков Ю.Д., Мельников Б.Е., Семенов А.С., Шерстнев В.А. Влияние жесткости узлового соединения на механические характеристики стеллажа // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 8. С. 1–12.
8. Кремнев А.П., Кремнева Е.Г., Радкевич Р.А. Экспериментально-теоретическое исследование плит из пенобетона и тонкостенного стального холоднодеформированного оцинкованного профиля // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Ф. Строительство. 2018. № 16. С. 37–42.
9. Дубатовка А.И. Огневые испытания стеновых панелей с каркасом из тонкостенных холоднодеформированных профилей со сборной обшивкой из стекломагнезового листа // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Ф. Строительство. 2015. № 8. С. 57–61.
10. Yea J., Becquea J., Hajirasouliha I., Mojtabaieia S.M., Limb J.B.P. Development of optimum cold-formed steel sections for maximum energy dissipation in uniaxial bending // Engineering structures. 2018. No. 161. Pp. 55–67.
11. Yousefi A.M., Lim J.B.P., Clifton G.C. Web crippling design of cold-formed ferritic stainless steel unlipped channels with fastened flanges under end-two-flange loading condition // Journal of constructional steel research. 2019. No. 152. Pp. 12–28.
12. Yea J., Hajirasouliha I., Becquea J. Experimental investigation of local-flexural interactive buckling of cold-formed steel channel columns // Twin-walled structures. 2018. No. 125. Pp. 245–258.

13. *Servaraj S., Madhavan M.* Investigation on sheathing effect and failure modes of gypsum sheathed cold-formed steel wall panel subjected to bending // *Structures*. 2019. No. 17. Pp. 87–101.
14. Патент РФ № 2685013. Швеллерный гнутозамкнутый профиль / А.С. Марутян. 2019. Бюл. № 11. URL: <https://www1.fips.ru/ofpstorage/Doc/IZPM/RUNWC1/000/000/002/013/%D0%98%D0%97-02685013-00001/document.pdf>
15. Патент РФ № 2113306. Гнутый швеллерный профиль / В.Г. Антипов, М.Ф. Сафронов, С.А. Тулупов, В.Ф. Афанасьев, С.В. Кривонос. 1998. Бюл. № 17. URL: <https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fipsservlet?DB=RUPAT&DocNumber=2113306&TypeFile=html>
16. Патент РФ № 2118579. Гнутый профиль швеллерного типа / В.Г. Антипов, М.Ф. Сафронов, В.Ф. Афанасьев, С.В. Кривонос. 1998. Бюл. № 25. URL: <https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fipsservlet?DB=RUPAT&DocNumber=2118579&TypeFile=html>
17. United States Patent No. US 6131362 A. Sheet metal beam / R.V. Buecker. 2000, Oct. 17.
18. United States Patent Application Publication No. US 2008/0028720 A1. An improved beam / R.J. Bartlett, R.I. Dempsey, R.L. Watkins, A. Noller, K. Yokoyama. 2008, Feb. 7.
19. Патент РФ № 2340744. Улучшенная балка / Р.Д. Бартлетт, Р.Я. Демпси, Р.Л. Уоткинз, А. Ноллер, К. Йокояма. 2008. Бюл. № 34. URL: <https://www1.fips.ru/Archive/PAT/2008.12.10/DOC/RUNWC2/000/000/002/340/744/DOCUMENT.PDF>
20. *Марутян А.С.* Гнутозамкнутые профили и расчет их оптимальных параметров // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 1. С. 33–43. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-1-33-43>
21. Патент РФ № 2189506. Способ изготовления и соединения конструктивных элементов из тонколистовых металлов / П.Н. Савенко. Бюл. № 26. URL: <https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fipsservlet?DB=REPAT&DocNumber=2189506&TypeFile=html>
22. Патент РФ № 2581687. Способ изготовления замкнутого металлического профиля и технологический комплекс для его осуществления / А.Н. Дмитриев, В.В. Катюшин, П.Е. Цемент. 2016. Бюл. № 11. URL: <https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fipsservlet?DB=RUPAT&DocNumber=2581687&TypeFile=html>
23. *Просьяников Б.Д.* Болтовое соединение с взаимным продавливанием соединяемых тонкостенных профилей // *Вестник ТГАСУ*. 2016. № 2. С. 130–138.
24. *Кузнецов И.Л., Фахрутдинов А.Ф., Рамазанов Р.Р.* Результаты экспериментальных исследований работы соединений тонкостенных элементов на сдвиг // *Вестник МГСУ*. 2016. № 12. С. 34–43.
25. *Кузнецов И.Л., Гимранов Л.Р., Салахутдинов М.А., Фахрутдинов А.Э.* Совершенствование узлов стальных ферм с поясами из многогранных труб // *Известия КГАСУ*. 2017. № 3. С. 116–123.
26. *Кузнецов И.Л., Салахутдинов М.А., Гайнетдинов Р.Г.* Стенд и результаты испытания фермы пролетом 24 м со стержнями из оцинкованных холодногнутых профилей // *Известия КГАСУ*. 2018. № 4. С. 193–199.
27. *Elliot M.D., Teh L.N., Ahmed A.* Behaviour and strength of bolted connections failing in shear // *Journal of constructional steel research*. 2019. No. 153. Pp. 320–329.
28. *Кузнецов И.Л., Гайнетдинов Р.Г.* Центральный узел верхнего пояса стропильной фермы из стержней холодногнутого профиля // *Известия КГАСУ*. 2019. № 1. С. 140–146.
29. *Кузнецов И.Л., Салахутдинов М.А., Гайнетдинов Р.Г.* Исследование напряженно-деформированного состояния болтового узла соединения из холодногнутых тонкостенных профилей // *Вестник МГСУ*. 2019. Т. 14. Вып. 7. № 4. С. 831–843. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.7.831-843
30. *Солодов Н.В., Водяхин Н.В., Ицук Я.Л.* Повышение несущей способности нахлесточного соединения тонколистовых деталей // *Вестник БГТУ имени В.Г. Шухова*. 2019. № 9. С. 30–37. DOI: 10.34031/article\_5da44cc0ad5700.29474015
31. *Белый Г.И.* К определению редуцированных сечений стержневых элементов легких стальных тонкостенных конструкций // *Вестник гражданских инженеров*. 2017. № 6. С. 33–37.
32. *Надольский В.В., Дергачев М.Г.* Метод эффективной ширины для тонкостенных холодноформованных элементов согласно требованиям Еврокода 3 // *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Ф. Строительство*. 2017. № 8. С. 105–111.
33. *Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю.* Определение ширины в условиях изгиба с растяжением штампуемой детали // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 2. С. 83–89. DOI: <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-83-89>
34. *Yea J., Hajirasouliha I., Becque J., Pilakoutas K.* Development of more efficient cold-formed steel channel sections in bending // *Twin-walled structures*. 2016. No. 101. Pp. 1–13.
35. *Yea J., Hajirasouliha I., Becque J., Eslami A.* Optimum design of cold-formed steel beams using Particle Swarm Optimisation method // *Journal of constructional steel research*. 2016. No. 122. Pp. 80–93.
36. *Yea J., Mojtabaei S.M., Hajirasouliha I.* Local-flexural interactive buckling of optimised cold-formed steel columns // *Journal of constructional steel research*. 2018. No. 144. Pp. 106–118.
37. *Урмацких А.В., Шемигурова Н.Г.* Совершенствование конструкции и развитие технологии производства гнутых профилей повышенной жесткости // *Вестник МГТУ имени Г.И. Носова*. 2007. № 1. С. 67–70.
38. *Жданов Д.А., Уласевич В.П., Зинкевич И.В.* Экспериментальные исследования фрагмента полого арочного покрытия из тонколистового холодногнутого профиля типа МС-120 с поперечными гофрами // *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия Ф. Строительство*. 2015. № 8. С. 33–39.
39. *Яковлева Е.Л., Атавин И.В., Казакова Ю.Д., Максудов И.Х.* Прочностные характеристики тонкостенных элементов // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2017. № 12. С. 125–139. DOI: 10.18720/CUBS.63.7

40. Xuhong Zhou, Yu Shi, Lei Xu, Ximmei Yao, Weiyong Wang. A simplified method to evaluate the flexural capacity of lightweight cold-formed steel floor system with oriented strand board subfloor // *Twin-walled structures*. 2019. No. 134. Pp. 40–51.
41. Марутян А.С. Оптимизация конструкций из трубчатых (гнуто сварных) профилей квадратных (прямоугольных) и ромбических сечений // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 1. С. 30–38.
42. Марутян А.С. Расчет оптимальных параметров полуплоскоовальных труб для ферменных и балочных конструкций // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 2. С. 68–74.
43. Брудка Я., Лубиньски М. Легкие стальные конструкции. М.: Стройиздат, 1974. С. 129–131.
44. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1988. С. 68–69.
45. ГОСТ 14350-80. Профили проката гнутые. Термины и определения. М.: Издательство стандартов, 1980.
46. СП 260.132555800.2016. Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутого оцинкованного профиля и гофрированных листов. Правила проектирования. М., 2016. С. 16.
47. Рекомендации по проектированию, изготовлению монтажу ограждающих и несущих конструкций из стальных гнутых профилей повышенной жесткости. М.: ЦНИИПСК имени Н.П. Мельникова, 1999. С. 8–11.
48. ГОСТ 19904-90. Прокат листовой холоднокатаный. Сортамент. М.: Стандартинформ, 2012.
49. ТУ 112000-001-12586100-2009. Профили стальные гнутые для легких стальных конструкций. Челябинск, 2009. С. 10.
50. Сортамент холодноформованных профилей ЛСТК производителей Украины / Н.А. Беляев. Киев, 2015. С. 47.
51. Рекомендации по проектированию, изготовлению, монтажу конструкций малоэтажных зданий и мансард из холодногнутого стального оцинкованного профиля ООО «БалтПрофиль» / Э.Л. Айрумян. М., 2004. С. 14.

RESEARCH PAPER

## Comparative calculation of optimal parameters of channel bent and bent closed profiles

Alexander S. Marutyán

*Institute of Service, Tourism and Design (branch of North Caucasus Federal University) in Pyatigorsk, 56 40 Let Oktyabrya prospekt, Pyatigorsk, 357500, Russian Federation*  
al\_marut@mail.ru

### Article history:

Received: October 24, 2019  
Revised: November 29, 2019  
Accepted: December 03, 2019

### Abstract

**Relevance.** A new technical solution for channel bent closed profiles (BCP), distinguished by a composite section and related to light steel thin-walled structures (LSTWS), which are distinguished by high technical and economic indicators and massive demand in industrial and civil construction, is presented. The main results of the comparative calculation of the optimal parameters of bent channels and channel horizontal bending sections are also given. **Aim of the research.** The purpose of the study is to show that the characteristics of LSTWS can be further improved by shaping modification profiles, combining in its composite section straight and round outlines of closed and open loops. **Methods.** Through experimental design and optimization and design calculations of channel profiles, their new technical solution has been developed, the originality of which is confirmed by patent examination. **Results.** Channel BCP consists of two tubular shelves and one wall of double thickness. For its manufacture without welded, bolted or riveted joints, the outer and inner blanks are made along the entire length with serrated longitudinal edges, the teeth of which are staggered relative to each other and mutually bent in grooves after closing a bent profile along its shelves. The bends of the gear mounts increase the collapse thickness, provide an increase in local stability and shear strength of the thin-walled elements, and also allow not to reduce the design sections. A comparative calculation of the optimal parameters of bent channels and channel bending sections for bending showed that in the first of them the strength is maximum when the ratio of the width and height of the cross section is 1/6, and in the second – 1/5.68.

**Keywords:** core constructions; thin-walled constructions; curved closed profiles; toothed fastenings; optimization of sections; calculation of optimal parameters

### For citation

Marutyán A.S. (2019). Comparative calculation of optimal parameters of channel bent and bent closed profiles. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 415–432. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-415-432>. (In Russ.)

Alexander S. Marutyán, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher of the Department of Project Grant Organization, College teacher.

## References

1. Taran V.V., Selishchev K.E. (2018). Vozvedenie zdaniy iz legkih stal'nyh tonkostennykh konstruktsiy [Construction of low rise buildings of light steel thin-walled structures]. *Bulletin of the Donbass National Academy of Construction and Architecture*, (6), 18–23. (In Russ.)
2. Chernoiivan V.N., Chernoiivan N.V., Horovets V.V., Chernoiivan A.V. (2018). The construction and renovation of residential buildings with the use of light-gauge steel constructions (LGSC). *Bulletin of the Brest State Technical University*, (1), 115–118. (In Russ.)
3. Sovetnikov D.O., Videnkov N.V., Trubina D.A. (2015). Light gauge steel framing in construction of multi-storey buildings. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 3(30), 152–165. DOI: 10.18720/CUBS.30.11. (In Russ.)
4. Reshetnikov A.A., Kornet V.Yu., Leonova D.A. (2018). Analiz ekonomicheskogo preimushchestva perekrytiya iz LSTK pered derevyannym [Analysis of the economic benefits of flooring from LSTK over wooden]. *Engineering Herald of the Don*, (3). <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n31y2018/5125>. (In Russ.)
5. Rybakov V.A., Maslak T.V., Fedotova K.A., Smirnov A.V., Ananiev I.A. (2017). Reconstruction of Pitched Roofs Using Steel Thin-Walled Structures. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 12(63), 20–48. DOI: 10.18720/CUBS.63.2. (In Russ.)
6. Ustimenko E.E., Skachkov S.V. (2019). Eksperimental'noe issledovanie ramno-sterzhnevyykh konstruktsiy s elementami iz tonkostennykh stal'nykh profilej [An experimental study of frame-rod structures with elements of thin-walled steel profiles]. *Engineering Journal of the Don*, (5). <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2019/5972>. (In Russ.)
7. Atavin I.V., Kazakov Yu.D., Melnikov B.E., Semenov A.S., Sherstnev V.A. (2018). Vliyanie zhestkosti uzlovogo soedineniya na mekhanicheskie karakteristiki stellazha [The influence of the rigidity of the nodal connection on the mechanical characteristics of the rack]. *Construction of unique buildings and structures*, (8), 1–12. (In Russ.)
8. Kremnev A.P., Kremneva E.G., Radkevich R.A. (2018). Eksperimental'no-teoreticheskoe issledovanie plit iz penobetona i tonkostennogo stal'nogo holodnodeformirovannogo ocinkovannogo profilya [Experimental-theoretical study of foam concrete slabs and thin-walled steel cold-deformed galvanized profiles]. *Bulletin of Polotsk State University. Series F. Construction*, (16), 37–42. (In Russ.)
9. Dubatovka A.I. (2015). Ognevye ispytaniya stenovykh panelej s karkasom iz tonkostennykh holodnodeformirovannykh profilej so sbornoj obshivkoj iz steklomagnievykh listov [Fire tests of wall panels with a framework of thin-walled cold-deformed profiles with prefabricated cladding of glass-magnesium sheet]. *Bulletin of Polotsk State University. Series F. Construction*, (8), 57–61. (In Russ.)
10. Yea J., Becquea J., Hajirasouliha I., Mojtabaie S.M., Limb J.B.P. (2018). Development of optimum cold-formed steel sections for maximum energy dissipation in uniaxial bending. *Engineering structures*, (161), 55–67.
11. Yousefi A.M., Lim J.B.P., Clifton G.C. (2019). Web crippling design of cold-formed ferritic stainless steel unflipped channels with fastened flanges under end-two-flange loading condition. *Journal of constructional steel research*, (152), 12–28.
12. Yea J., Hajirasouliha I., Becquea J. (2018). Experimental investigation of local-flexural interactive buckling of cold-formed steel channel columns. *Twin-walled structures*, (125), 245–258.
13. Servaraj S., Madhavan M. (2019). Investigation on sheathing effect and failure modes of gypsum sheathed cold-formed steel wall panel completed to bending. *Structures*, (17), 87–101.
14. Marutyan A.S. (2019). *Shvellernyy gnutozamknutyj profil' [Channel bent closed profile]*. Patent RUS No. 2685013. Bul. No. 11. <https://www1.fips.ru/ofpstorage/Doc/IZPM/RUNWC1/000/000/002/013/%D0%98%D0%997-02685013-00001/docment.pdf>. (In Russ.)
15. Antipov V.G., Safronov M.F., Tulupov S.A., Afanasyev V.F., Krivonosov S.V. (1998). *Gnutyy shvellernyy profil' [Bent channel profile]*. Patent RUS No. 2113306. Bul. No. 17. <https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fipsservlet?DB=RUPAT&DocNumber=2113306&TypeFile=html>. (In Russ.)
16. Antipov V.G., Safronov M.F., Afanasyev V.F., Krivonosov S.V. (1998). *Gnutyy profil' shvellernogo tipa [Bent channel profile type]*. Patent RUS No. 21118579. Bul. No. 25. <https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fipsservlet?DB=RUPAT&DocNumber=21118579&TypeFile=html>. (In Russ.)
17. Buecker R.V. (2000, Oct. 17). *Sheet metal beam*. United States Patent No. US 6131362 A.
18. Bartlett R.D., Dempsey R.Ya., Watkins R.L., Noller A., Yokoyama K. (2008, Feb. 7). *An improved beam*. United States Patent Application Publication No. US 2008/0028720 A1.
19. Bartlett R.D., Dempsey R.Ya., Watkins R.L., Noller A., Yokoyama K. (2008). *Improved beam*. Patent RUS No. 2340744. Bul. No. 34. <https://www1.fips.ru/Archive/PAT/2008.12.10/DOC/RUNWC2/000/000/002/340/744/DOCUMENT.PDF>. (In Russ.)
20. Marutyan A.S. (2019). Curved closed profiles and calculation of their optimal parameters. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(1), 33–43. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-1-33-43>. (In Russ.)
21. Savenko P.N. (2002). *Sposob izgotovleniya i soedineniya konstrukcionnykh elementov iz tonkolistovykh metallov [A method of manufacturing and connecting structural elements from sheet metals]*. Patent RUS No. 2189506. Bul. No. 26. <https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fipsservlet?DB=REPAT&DocNumber=2189506&TypeFile=html>. (In Russ.)
22. Dmitriev A.N., Katyushin V.V., Cement P.E. (2016). *Sposob izgotovleniya zamknutogo metallicheskogo profilya i tekhnologicheskij kompleks dlya ego osushchestvleniya [A method of manufacturing a closed metal profile and a technological complex for its implementation]*. Patent RUS No. 2581687. Bul. No. 11. <https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fipsservlet?DB=RUPAT&DocNumber=2581687&TypeFile=html>. (In Russ.)
23. Prosyaniikov B.D. (2016). Bolted Joint With Reciprocal Punch of Connected Slender Sections. *Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building*, (2), 130–138. (In Russ.)
24. Kuznetsov I.L., Fakhrutdinov A.F., Ramazanov R.R. (2016). Results of experimental research for shear strain of connections of thin-walled elements. *Vestnik MGSU*, (12), 34–43. DOI: 10.22227/1997-0935.2016.12.34-43. (In Russ.)

25. Kuznetsov I.L., Gimranov L.R., Salakhutdinov M.A., Fakhrutdinov A.E. (2017). Sovershenstvovanie uzlov stal'nykh ferm s poyasami iz mnogogrannykh trub [Improving the nodes of steel trusses with belts from multifaceted pipes]. *Bulletin of KGASU*, (3), 116–123. (In Russ.)
26. Kuznetsov I.L., Salakhutdinov M.A., Gaynetdinov R.G. (2018). Stend i rezul'taty ispytaniya fermy proletoy 24 m so sterzhnyami iz ocinkovannykh holodnognutykh profilej [Bench and test results of a farm with a span of 24 m with rods of galvanized cold-formed profiles]. *Bulletin of KGASU*, (4), 193–199. (In Russ.)
27. Elliot M.D., Teh L.N., Ahmed A. (2019). Behavior and strength of bolted connections failing in shear. *Journal of constructional steel research*, (153), 320–329.
28. Kuznetsov I.L., Gaynetdinov R.G. (2019). Central'nyj uzel verhnego poyasa stropil'noj fermy iz sterzhnej holodnognutogo profilya [The central node of the upper zone of the truss from rods of a cold-formed profile]. *Bulletin of KGASU*, (1), 140–146. (In Russ.)
29. Kuznetsov I.L., Salakhutdinov M.A., Gaynetdinov R.G. (2019). Investigation of the stress-deformation state of a bolt-joint assembly of cold-bent thin-walled profiles. *Vestnik MGSU*, (4), 831–843. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.7.831-843. (In Russ.)
30. Solodov N.V., Vodyakhin N.V., Ischuk Ya.L. (2019). Improving the strength of harnessing connection of thin-sheet plates. *Bulletin of BGTU named after V.G. Shukhov*, (9), 30–37. DOI: 10.34031/article\_5da44cc0ad5700.29474015. (In Russ.)
31. Bely G.I. (2017). K opredeleniyu reducirovannykh sechenij sterzhnykh elementov legkikh stal'nykh tonkostennykh konstrukcij [To the determination of reduced sections of the core elements of light steel thin-walled structures]. *Bulletin of civil engineers*, (6), 33–37. (In Russ.)
32. Nadolsky V.V., Dergachev M.G. (2017). Metod effektivnoj shiriny dlya tonkostennykh holodnoformovannykh elementov soglasno trebovaniyam Evrokoda 3 [The effective width method for thin-walled cold-formed elements according to the requirements of Eurocode 3]. *Bulletin of Polotsk State University. Series F. Construction*, (8), 105–111. (In Russ.)
33. Morozov Yu.A., Verkhov E.Yu. (2019). Determination of the width under bending conditions with stretching of the stamped part. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 83–89. DOI: <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-83-89> (In Russ.)
34. Yea J., Hajirasouliha I., Becque J., Pilakoutas K. (2016). Development of more efficient cold-formed steel channel sections in bending. *Twin-walled structures*, (101), 1–13.
35. Yea J., Hajirasouliha I., Becque J., Eslami A. (2016). Optimum design of cold-formed steel beams using Particle Swarm Optimization method. *Journal of constructional steel research*, (122), 80–93.
36. Yea J., Mojtabaei S.M., Hajirasouliha I. (2018). Local-flexural interactive buckling of optimized cold-formed steel columns. *Journal of constructional steel research*, (144), 106–118.
37. Urmatskikh A.V., Shemshurova N.G. (2007). Sovershenstvovanie konstrukcii i razvitie tekhnologii proizvodstva gnutykh profilej povyshennoj zhestkosti [Improving the design and development of the technology for the production of bent profiles with increased stiffness]. *Vestnik of Nosov Magnitogorsk State Technical University*, (1), 67–70. (In Russ.)
38. Zhdanov D.A., Ulasevich V.P., Zinkevich I.V. (2015). Eksperimental'nye issledovaniya fragmenta pologo arochnogo pokrytiya iz tonkolistovogo holodnognutogo profilya tipa MIC-120 s poperechnymi goframi [Experimental studies of a fragment of a hollow arched coating from a cold-rolled thin-sheet profile type MIC-120 with transverse corrugations]. *Bulletin of Polotsk State University. Series F. Construction*, (8), 33–39. (In Russ.)
39. Yakovleva E.L., Atavin I.V., Kazakova Yu.D., Maksudov I.Kh. (2017). Strength characteristics of thin-walled elements. *Construction of Unique Buildings and Structures*, (12), 125–139. DOI: 10.18720/CUBS.63.7. (In Russ.)
40. Xuhong Zhou, Yu Shi, Lei Xu, Ximmei Yao, Weiyong Wang. (2019). A simplified method to evaluate the flexural capacity of lightweight cold-formed steel floor system with oriented strand board subfloor. *Twin-walled structures*, (134), 40–51.
41. Marutyan A.S. (2016). Optimization of structures made of tubular (notovanykh) profiles square (rectangular) and rhombic cross sections. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (1), 30–38. (In Russ.)
42. Marutyan A.S. (2019). Calculation of optimal parameters of semiplanar pipes for truss and beam structures. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (2), 68–74. (In Russ.)
43. Brudka J., Lubinsky M. (1974). *Legkie stal'nye konstrukcii [Lightweight steel structures]* (pp. 129–131). Moscow: Stroyizdat Publ. (In Russ.)
44. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. (1988). *Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Reference book of resistance of materials]* (pp. 68–69). Kiev: Naukova Dumka Publ. (In Russ.)
45. GOST 14350-80. (1980). *Profili prokata gnutye. Terminy i opredeleniya [Bent Profiles. Terms and Definitions]*. Moscow, Izdatelstvo standartov Publ. (In Russ.)
46. SP 260.132555800.2016. (2016). *Konstrukcii stalnye tonkostennyye iz xolodnognutykh ocinkovannykh profilej i gofirovannykh listov. Pravila proektirovaniya [Thin-walled steel structures made of cold-formed galvanized profiles and corrugated sheets. Design rules]*. Moscow. (In Russ.)
47. TsNIIPSK imeni N.P. Melnikova. (1999). *Rekomendacii po proektirovaniyu, izgotovleniyu montazhu ograzhdazhnykh i nesushhix konstrukcij iz stalnykh gnutykh profilej povyshennoj zhestkosti [Recommendations for the design, manufacture of installation of enclosing and supporting structures from steel bent profiles of increased rigidity]* (pp. 8–11). Moscow. (In Russ.)
48. GOST 19904-90. (2012). *Prokat listovoj xolodnokatanyj. Sortament [Cold-rolled sheet metal. Assortment]*. Moscow, Standartinform Publ. (In Russ.)
49. TU 112000-001-12586100-2009. (2009). *Profili stalnye gnutye dlya legkix stalnykh konstrukcij [Bent steel profiles for light steel structures]*. Chelyabinsk. (In Russ.)
50. Belyaev N.A. (2015). *Sortament xolodnoformovannykh profilej LSTK proizvoditelej Ukrainy [Assortment of cold-formed profiles of LSTK producers of Ukraine]*. Kiev. (In Russ.)
51. Hayrumyan E.L. (2004). *Rekomendacii po proektirovaniyu, izgotovleniyu i montazhu konstrukcij maloetazhnykh zdaniy i mansard iz xolodnognutykh stalnykh ocinkovannykh profilej proizvodstva OOO "BaltProfil" [Recommendations for the design, manufacture and installation of structures of low-rise buildings and attics from cold-formed steel galvanized profiles manufactured by "BaltProfil" LLC]*. Moscow, TsNIIPSK imeni N.P. Melnikova. (In Russ.)

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-433-437  
УДК 624.01

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Численные исследования прочности бетонных цилиндров на сжатие

**О.В. Мкртычев, М.И. Андреев\***

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26  
\*misha-andreev\_93@mail.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 12 октября 2019 г.  
Доработана: 22 ноября 2019 г.  
Принята к публикации: 04 декабря 2019 г.

### Аннотация

**Актуальность.** При проведении расчетов конструкций в нелинейной постановке большое значение имеет выбор адекватных моделей материалов и диаграмм деформирования. Поскольку отсутствуют указания, как использовать диаграммы деформирования бетона и арматуры при их совместной работе, приведенные в СП 63.13330.2018, для моделирования железобетонных конструкций конечными элементами одного типа необходимо вводить допущения. **Целью** работы является проведение численных экспериментов по испытанию бетонных цилиндров на одноосное сжатие и верификация полученных результатов с нормативными данными. **Методы.** Численные эксперименты выполнялись в программном комплексе LS-DYNA. Данный программный комплекс позволяет моделировать совместную работу бетона и арматуры с помощью объемных (для бетона) и стержневых (для арматуры) конечных элементов. В качестве модели принят цилиндр диаметром 150 мм, высотой 300 мм. Образцы смоделированы объемными конечными элементами. Для моделирования бетона используется нелинейный материал CSCM (Continuous Surface Cap Model). Испытания проводились с образцами следующих классов бетона по цилиндрической прочности на сжатие: C12, C16, C20, C25, C30, C35, C40, C45, C50, C55. Это соответствует следующим классам по кубиковой прочности на сжатие: B15, B20, B25, B30, B37, B45, B50, B55, B60, B67. **Результаты.** Проведенные исследования показали, что характер разрушения образцов при численном эксперименте соответствует характеру разрушения при испытаниях. Исследуемая модель бетона CSCM может использоваться при расчетах бетонных и железобетонных конструкций для основных классов бетона при учете дополнительных поправочных коэффициентов к цилиндрической прочности.

**Ключевые слова:** верификация; модель бетона; численный эксперимент; нелинейный материал; бетонный цилиндр; одноосное сжатие; объемные конечные элементы; цилиндрическая прочность

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант № 7.1524.2017/ПЧ.

### Для цитирования

Мкртычев О.В., Андреев М.И. Численные исследования прочности бетонных цилиндров на сжатие // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 433–437. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-433-437>

## Введение

Расчет конструкций в нелинейной постановке подразумевает повышенное внимание к выбору адекватных моделей материалов и диаграмм дефор-

мирования. В СП 63.13330.2018 [1] приведены диаграммы деформирования бетона и арматуры. Однако отсутствуют указания, как использовать эти диаграммы при совместной работе бетона и арматуры. Таким образом, для моделирования железобетонных конструкций конечными элементами одного типа необходимо вводить допущения. Современные программные комплексы, такие как LS-DYNA, ANSYS и другие, позволяют моделировать совместную работу бетона и арматуры с помощью объемных (для бетона) и стержневых (для арма-

**Мкртычев Олег Вартанович**, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов; eLIBRARY SPIN-код: 9676-4986.  
**Андреев Михаил Иванович**, аспирант кафедры сопротивления материалов; eLIBRARY SPIN-код: 1820-3744.

© Мкртычев О.В., Андреев М.И., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

туры) конечных элементов. В такой постановке для стержневых конечных элементов можно использовать диаграммы, представленные в [1]. Работа бетона в случае трехосного напряженного состояния не может быть в полной мере описана диаграммой деформирования бетона, полученной при одноосном сжатии. Необходимо использовать более сложные модели бетона.

## 1. Методика расчета

Реализованная в программном комплексе LS-DYNA нелинейная модель бетона Continuous Surface Cap Model (CSCM) [3; 4] позволяет преодолеть существующие недостатки диаграмм работы бетона. Она дает возможность учитывать совместную работу бетона и арматуры.

Из названия Continuous Surface Cap Model следует, что математическая модель будет представлена замкнутой поверхностью с наличием так называемого колпака (рис. 1).

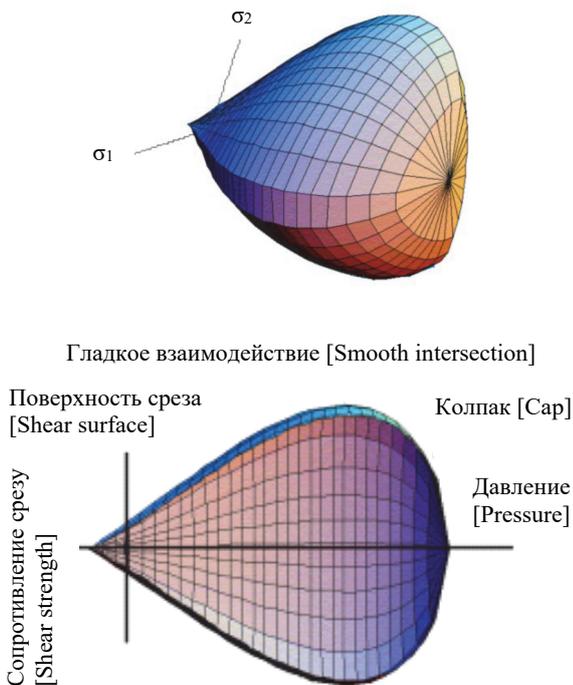


Рис. 1. Математическая модель бетона CSCM  
[Figure 1. Mathematical model of concrete CSCM]

Модель CSCM использует большой набор многочисленных стандартизированных свойств материала с основными входными параметрами – прочность на сжатие, размер характерной фракции крупного заполнителя. Набор свойств материала для данной модели соответствует положениям норм СЕВ-FIP (СЕВ, 1993) [5; 6; 7]. Параметры соответствуют прочности на сжатие от около 20 до 58 МПа, в дан-

ном диапазоне между 28 и 48 МПа материал работает более корректно.

## 2. Постановка задачи

Цель данного исследования заключается в проведении численных экспериментов по испытанию бетонных цилиндров на одноосное сжатие и последующем сравнении полученных результатов с экспериментальными и нормативными данными. Ранее в [8] были проведены численные исследования образцов бетонных кубов и призм. Сравнение результатов показывает хорошую сходимость.

Численные эксперименты реализовываются в программном комплексе LS-DYNA [9; 10]. В качестве образца в соответствии с [2] принят цилиндр диаметром 150 мм, высотой 300 мм. Образец смоделирован объемными конечными элементами. Нижняя и верхняя плиты испытательной машины также выполнены из объемных конечных элементов (рис. 2). Нижняя плита закреплена от всех возможных перемещений, верхняя – может перемещаться только в вертикальном направлении.

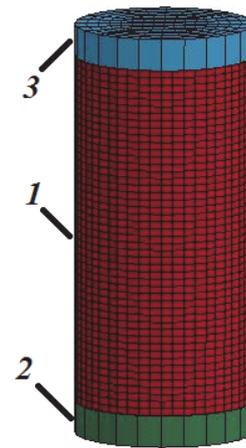


Рис. 2. Модель испытаний:

1 – образец испытаний; 2 – нижняя опорная плита испытательной машины; 3 – верхняя плита испытательной машины (пресс)

[Figure 2. Testing model:

1 – test sample; 2 – lower support plate of a testing machine; 3 – upper support plate of a testing machine (press)]

Материал плит – сталь. Для моделирования бетона используется нелинейный материал CSCM [4–7].

В ходе эксперимента к верхней плите прикладывалась постепенно увеличивающаяся нагрузка, и образец доводится до разрушения.

Испытания проводились с образцами следующих классов бетона по цилиндрической прочности на сжатие – С12, С16, С20, С25, С30, С35, С40, С45, С50, С55, что соответствует следующим классам по кубиковой прочности на сжатие – В15, В20, В25, В30, В37, В45, В50, В55, В60, В67 [5–7].

В процессе испытаний учитывалось трение между плитами испытательной машины и образца.

### 3. Результаты расчета

Проведенные исследования показали, что характер разрушения образцов при численном эксперименте соответствует характеру разрушения при реальных испытаниях. Разрушение цилиндра с учетом трения приведено на рис. 3.

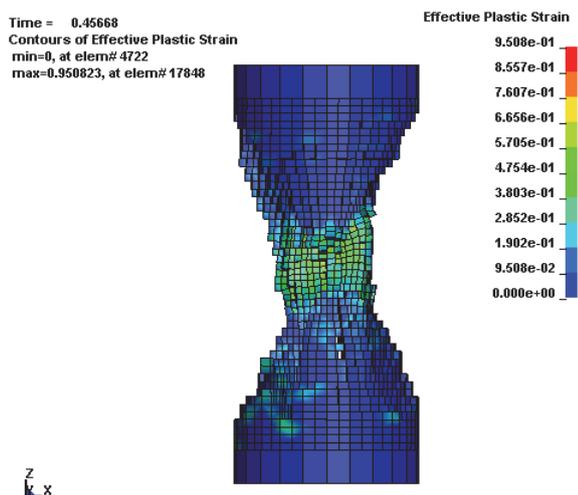


Рис. 3. Картина разрушения бетонного цилиндра с интенсивностью пластических деформаций.

Численный эксперимент

[Figure 3. Pattern of the concrete cylinder destruction with intensity of plastic deformations. Numerical experiment]

На рис. 4 приведены удовлетворительные разрушения образцов-цилиндров в соответствии с ГОСТ 10180-2012 [2].

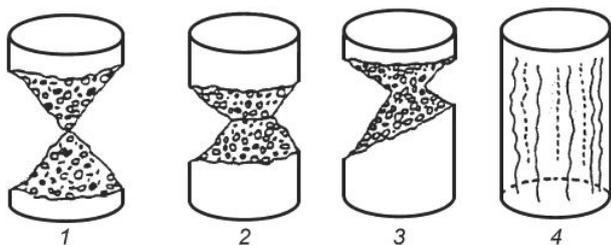


Рис. 4. Картина разрушения бетонного цилиндра. Экспериментальные данные

[Figure 4. Pattern of the concrete cylinder destruction. Experimental data]

Как показывает анализ результатов, картина разрушения при численном эксперименте соответствует имеющимся экспериментальным данным.

В ходе проведения численных экспериментов фиксировались значения разрушающей нагрузки для цилиндров. Эти значения соответствуют средней цилиндрической прочности. Полученные данные

сравнивались с нормативными значениями [5–7]. Результаты для разных классов бетона приведены в таблице.

Таблица

Основные результаты расчета [Table. Main results of calculation]

Класс бетона [Concrete class]	$f_{cm}$ (средняя цилиндрическая), МПа [ $f_{cm}$ (mean cylindrical), MPa]		$\Delta$
	Нормативное значение [Normative value]	Численный эксперимент [Numerical experiment]	
B15 (C12)	20	20,3	1,5%
B20 (C16)	24	26,99	12,5%
B25 (C20)	28	33,2	18,6%
B30 (C25)	33	39,7	20,3%
B37 (C30)	38	45,6	20%
B45 (C35)	43	50,7	17,9%
B50 (C40)	48	55,5	15,6%
B55 (C45)	53	60,3	13,8%
B60 (C50)	58	64,95	12,0%
B67 (C55)	63	69,5	10,3%

Нормативные значения средней цилиндрической прочности и их соотношение к классу бетона по средней кубической прочности взяты из [5–7].

На рис. 5 полученные результаты представлены в виде графиков.

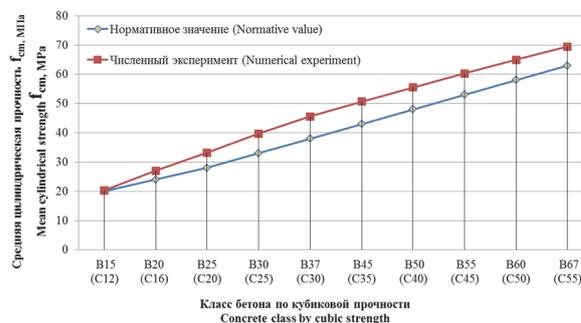


Рис. 5. Средняя цилиндрическая прочность в зависимости от класса бетона при численном эксперименте и нормативных значениях [Figure 5. The mean cylindrical strength, depending on the class of concrete in the numerical experiment and the normative values]

### Заключение

Проведенные исследования показывают, что полученный в численных исследованиях характер разрушения бетонных цилиндров соответствует экспериментальным данным.

Верификационный анализ демонстрирует, что в результатах, приведенных в таблице, расхождение между заданной прочностью бетона для исследуемых классов и фактической прочностью бетона, полученной в ходе испытания, составляют от 1,5 до 20,3 %.

Исследуемая модель бетона CSCM наиболее адекватно характеризует работу бетона. Расхождения до 20,3 % между заданной прочностью и фактической прочностью разрушения можно считать приемлемыми, что также подтверждается результатами, полученными в [11; 12]. Однако результаты, полученные в [8], показывают хорошую сходимость численных экспериментов с нормативными данными для призменной прочности. Следует отметить, что при проектировании несущих элементов зданий и сооружений используется призменная прочность бетона. Таким образом, предлагаемая модель бетона CSCM может использоваться при расчетах бетонных и железобетонных конструкций для основных классов бетона с учетом перехода от кубиковой к призменной прочности и дополнительных поправочных коэффициентов к цилиндрической прочности.

#### Список литературы

1. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. СНиП 52-101-2003. М., 2018. 143 с.
2. ГОСТ 10180-2012. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам. М., 2012. 36 с.
3. US Department of Transportation. Federal Highway Administration. Evaluation of LS-DYNA Concrete Material Model 159. FHWA-HRT-05-063, 190. 2007.
4. Murray Y.D. Users Manual for LS-DYNA Concrete Material Model 159, FHWA-HRT-05-062. 2007.
5. EN 1992-1-1 Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1–1. General rules and rules for buildings. 2004.
6. Telford T. Designers' guides to the Eurocodes. Designers' guides to Eurocode 2: Design of concrete structures designers' guide to EN1992-1-1 and EN1992-1-2 Eurocode 2: Design of concrete structures general rules and rules for buildings and structural fire design. 2005.
7. Telford T. Comite Euro-International du Beton CEB-FIP Model Code 1990. Design code. 1993.
8. Mkrtychev O.V., Sidorov D.S., Bulushev S.V. Comparative analysis of results from experimental and numerical studies on concrete strength // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 117. 00123.
9. Mkrtychev O.V., Andreev M.I. Verification of the reinforced concrete beam model based on the results of a full-scale experimental study // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 196. 01029.
10. Andreev M.I., Bulushev S.V., Dudareva M.S. Verification of the eccentrically compressed reinforced concrete column calculation model based on the results of a full-scale experimental study // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251. 04013.
11. Hua Jiang, Jidong Zhao. Calibration of the continuous surface cap model for concrete // Finite Elements in Analysis and Design. 2015. Vol. 97. Pp. 1–19.
12. Salamon J., Harris D.W. Evaluation of Nonlinear Material Models in Concrete Dam Finite Element Analysis // Report DSO-2014-08. Colorado, 2014. P. 89.

RESEARCH PAPER

## Numerical studies of strength of concrete cylinders for compression

Oleg V. Mkrtychev, Mikhail I. Andreev\*

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation  
\*misha-andreev\_93@mail.ru

#### Article history:

Received: October 12, 2019  
Revised: November 22, 2019  
Accepted: December 04, 2019

#### Acknowledgements

This study was performed with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Grant No. 7.1524.2017/Project Part.

#### Abstract

**Relevance.** The choice of adequate models of materials and deformation diagrams is of great importance when performing structural calculations in a nonlinear setting. Since there are no instructions on how to use the deformation diagrams of concrete and reinforcement when working together, given in SP 63.13330.2018, it is necessary to introduce assumptions for modeling reinforced concrete structures with finite elements of the same type. **The aims of the work** are to conduct numerical experiments on testing concrete cylinders for uniaxial compression and to verify the results with normative data. **Methods.** Numerical experiments were performed in the LS-DYNA software package. This program complex allows to simulate the joint work of concrete and reinforcement with the help of volume (for concrete) and rod (for reinforcement) finite elements. A cylinder with a diameter of 150 mm and a height of 300 mm was taken as model. Samples were modeled by volumetric finite elements. The CSCM – Continuous Surface Cap Model is a nonlinear material used to model concrete. Tests were carried out with samples of the

Oleg V. Mkrtychev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Strength of Materials Department; eLIBRARY SPIN-code: 9676-4986.  
Mikhail I. Andreev, post-graduate student of the Strength of Materials Department; eLIBRARY SPIN-code: 1820-3744.

*For citation*

Mkrtychev O.V., Andreev M.I. (2019). Numerical studies of strength of concrete cylinders for compression. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 433–437. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-433-437>. (In Russ.)

following classes of concrete for cylindrical compressive strength: C12, C16, C20, C25, C30, C35, C40, C45, C50, C55. This corresponds to the following classes of cubic compressive strength: B15, B20, B25, B30, B37, B45, B50, B55, B60, B67.

**Results.** The conducted researches have shown that the character of destruction of samples at numerical experiment corresponds to the character of destruction at tests. The investigated concrete model CSCM can be used in the calculation of concrete and reinforced concrete structures for the main classes of concrete, when taking into account the transition from cubic to prismatic strength and additional correction factors to cylindrical strength.

**Keywords:** verification; concrete model; numerical experiment; nonlinear material; concrete cylinder; uniaxial compression; volumetric finite elements; cylindrical strength

**References**

1. SP 63.13330.2018. (2018). *Betonnnye i zhelezo-betonnnye konstrukcii. Osnovnye polozheniya [Concrete and Reinforced Concrete Structures. General provisions]*. SNIP 52-101-2003. Moscow. (In Russ.)
2. GOST 10180-2012. (2012). *Betony. Metody opredeleniya prochnosti po kontrol'nyh obrazcam [State Standard 10180-2012. Concrete. Methods for determining the strength of control samples]*. Moscow. (In Russ.)
3. US Department of Transportation. Federal Highway Administration. (2007). *Evaluation of LS-DYNA Concrete Material Model 159. FHWA-HRT-05-063, 190*.
4. Murray Y.D. (2007). *Users Manual for LS-DYNA Concrete Material Model 159, FHWA-HRT-05-062*.
5. EN 1992-1-1 Eurocode 2 (2004). *Design of concrete structures. Part 1–1: General rules and rules for buildings*.
6. Telford T. (2005). *Designers' guides to the Eurocodes. Designers' guides to Eurocode 2: Design of concrete structures designers' guide to EN1992-1-1 and EN1992-1-2 Eurocode 2: Design of concrete structures general rules and rules for buildings and structural fire design*.

7. Telford T. (1993). *Comite Euro-International du Beton CEB-FIP Model Code 1990. Design code*.

8. Mkrtychev O.V., Sidorov D.S., Bulushev S.V. (2017). Comparative analysis of results from experimental and numerical studies on concrete strength. *MATEC Web of Conferences*, 117, 00123.

9. Mkrtychev O.V., Andreev M.I. (2018). Verification of the reinforced concrete beam model based on the results of a full-scale experimental study. *MATEC Web of Conferences*, 196, 01029.

10. Andreev M.I., Bulushev S.V., Dudareva M.S. (2018). Verification of the eccentrically compressed reinforced concrete column calculation model based on the results of a full-scale experimental study. *MATEC Web of Conference*, 251, 04013.

11. Hua Jiang, Jidong Zhao. (2015). Calibration of the continuous surface cap model for concrete. *Finite Elements in Analysis and Design*, 97, 1–19.

12. Salamon J., Harris D.W. (2014). *Evaluation of Nonlinear Material Models in Concrete Dam Finite Element Analysis* (p. 89). Report DSO-2014-08. Colorado.

## ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-438-448  
UDC 539.3:624.04

RESEARCH PAPER

### Simplified selection of optimal shell of revolution

Sergey N. Krivoshapko\*, Vyacheslav N. Ivanov

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklucho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

\*sn\_krivoshapko@mail.ru

#### Article history:

Received: September 02, 2019

Revised: November 12, 2019

Accepted: December 06, 2019

#### Conflict of interest

The authors confirm that this article content has no conflict of interest.

#### For citation

Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2019). Simplified selection of optimal shell of revolution. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 438–448. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-438-448>

#### Abstract

**Relevance.** Architects and engineers, designing shells of revolution, use in their projects, as a rule, spherical shells, paraboloids, hyperboloids, and ellipsoids of revolution well proved themselves. But near hundreds of other surfaces of revolution, which can be applied with success in building and in machine-building, are known. **Methods.** Optimization problem of design of axisymmetric shell subjected to given external load is under consideration. As usual, the solution of this problem consists in the finding of shape of the meridian and in the distribution of the shell thickness along the meridian. In the paper, the narrower problem is considered. That is a selection of the shell shape from several known types, the middle surfaces of which can be given by parametrical equations. The results of static strength analyses of the domes of different Gaussian curvature with the same overall dimensions subjected to the uniformly distributed surface load are presented. Variational-difference energy method of analysis is used. **Results.** Comparison of results of strength analyses of six selected domes showed that a paraboloid of revolution and a dome with a middle surface in the form of the surface of rotation of the  $z = -\text{acosh}(x/b)$  curve around the  $Oz$  axis have the better indices of stress-strain state. These domes work almost in the momentless state and it is very well for thin-walled shell structures. New criterion of optimality can be called “minimum normal stresses in shells of revolution with the same overall dimensions, boundary conditions, and external load”.

**Keywords:** dome; shell of revolution; paraboloid of revolution; the fourth order paraboloid of revolution; catenary line; variational-difference energy method of analysis; linear shell theory; geometrical modeling; optimal design

### Introduction

V.V. Novozhilov [1] was one of the first scientists who began to seek for a shell of revolution with the most advantageous indices of stress-strain state. In particular, examining four different domes (spher-

ical, parabolic, half-elliptical, and the lesser part of elliptical domes), he determined that a dome in the form of the lesser part of ellipsoid of revolution was the most advantageous one because it can work as momentless shell with comparatively slight rigidity of the support contour. Membrane strength theory of shells subjected to dead load was used.

Now, the protection of erections from the terrorist attacks and, thus, search of effective structural shapes to mitigate the blast energy is very important problem. The influence of inside blast pressure was studied for six shapes of domes of the same weight and thickness in a paper [2]. The study shows that the parabolic

**Sergey N. Krivoshapko**, DSc, Professor, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering; ORCID iD: 0000-0002-9385-3699, eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966.

**Vyacheslav N. Ivanov**, DSc, Professor, Professor of the Department of Civil Engineering, Academy of Engineering; ORCID iD: 0000-0003-4023-156X, eLIBRARY SPIN-code: 3110-9909.

© Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

and bowl shape of domes could withstand the blast load with the least top displacement.

It is necessary to pay attention to the investigation [3], carried out with five types of shells that are spherical, elliptical, parabolic, and hyperbolic shells of revolution as well as combined shells consisting of two shell fragments with middle hyperbolic and parabolic surfaces of revolution. The combined dome, put together from the lower hyperbolic dome and the upper paraboloid of revolution, recommended itself best of other four types of shells.

The determination of optimal geometrical parameters of a reinforced concrete elliptical shell, used as a covering of the round building with the diameter of the base equal to 27 m, is a purpose of a paper [4]. In general, well known domes of revolution are studied in great number of published works. Considerably less number of researches is devoted to shells of revolution of untypical forms, for instance, to egg-shaped shells [5] or to toroidal domes with elliptic cross section [6]. In papers [7; 8], stress-strain state of the well-known shells as well as the shells of negative Gaussian curvature with the opening at the top, that did not find application else, is examined with the help of finite difference energy method. Several shells of revolution of untypical forms are offered for the application in a manuscript [9] and a monography [10]. Thus, choosing the geometry of dome covering, it is necessary to take into account architectural, technological, technical, and economic demands.

Diversity of opinion of famous architects and civil engineers on the rank of shell structures in modern architecture is very broad, beginning from enthusiastic reviews and optimistic expectations in the 50–60<sup>th</sup> years of the last century until negation of progressive role of these structures at the end of the 20<sup>th</sup> century [11]. The well-known Portuguese architect Eduardo Elísio Machado Souto de Moura said: “I don’t think that any global new forms will appear but new technologies and materials will be arisen”. R. Buckminster Fuller answered about his architectural creations in such style: “Let architects tell about aesthetics... I shall prefer dome where stresses and strains are going away”.

In a paper, the illustration of the simplified selection of optimal shell of revolution is carried out for domes of untypical forms. It should be noted that 24 criteria of optimality are known now [12]. The investigation of several untypical domes of revolution of positive and alternating Gaussian curvatures which did not find else the wide-spread application in architecture, construction, and machine-building is an aim of the presented paper too. Simplified selection of optimal shell of revolution begins with geometrical modelling of a necessary shell.

## 1. Geometrical modelling of shells with similar overall dimensions

In figure 1, six types of shells of revolution are shown:

- a paraboloid of revolution (figure 1, *a*);
- a shell in the form of the fourth order paraboloid of revolution with a  $x^4 = cz$  meridian (figure 1, *b*);
- a shell with the middle surface called “Soucoupoid” which can be traced by a curve  $z = (b/a^3)(a^2 - x^2)^{3/2}$  in the process of its rotation about an axis  $Oz$  (figure 1, *c*);
- a shell with a middle surface of rotation of a curve  $z = be^{-(ax)^2}$  about an axis  $Oz$  (figure 1, *d*);
- a shell in the form of a surface of rotation of a curve  $z = -acosh(x/b)$  (figure 1, *e*);
- a shell in the form of “fairing of cycloidal type” (figure 1, *f*).

Let these shells with middle surfaces of revolution have three identical overall dimensions  $R$ ,  $f$ , and  $h$ , where  $R$  is the radius of a base,  $f$  is a shell rise (figure 2),  $h$  is the constant shell thickness.

All surfaces taken for consideration can be given by parametric equations

$$x = x(r, \beta) = r \cos \beta, \quad y = y(r, \beta) = r \sin \beta, \quad z = z(r), \quad (1)$$

where the coordinate lines  $r$  and  $\beta$  (parallels and meridians) are the lines of principal curvatures,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq R$ . Hence, for paraboloid of revolution (figure 2, *a*),

$$z = z(r) = f(1 - r^2/R^2),$$

for the fourth order paraboloid of revolution (figure 2, *b*)

$$z = z(r) = f(1 - r^4/R^4),$$

for a surface of revolution “Soucoupoid” (figure 2, *c*)

$$z = z(r) = f(1 - r^2/R^2)^{3/2},$$

for a surface of rotation of a curve  $z = be^{-(ax)^2}$  about an axis  $Oz$  (figure 2, *d*)

$$z = z(r) = b/\exp\{(r^2/R^2)\ln[b/(b-f)]\}, \quad b > f,$$

for a surface of rotation of a curve

$$z = -acosh(r/b) \quad (2)$$

about an axis  $Oz$  (figure 2, *e*)

$$z = z(r) = -acosh(r/b),$$

where  $b = R/\text{Arcosh}(1 + f/a)$ ,  $a$  is an arbitrary number.

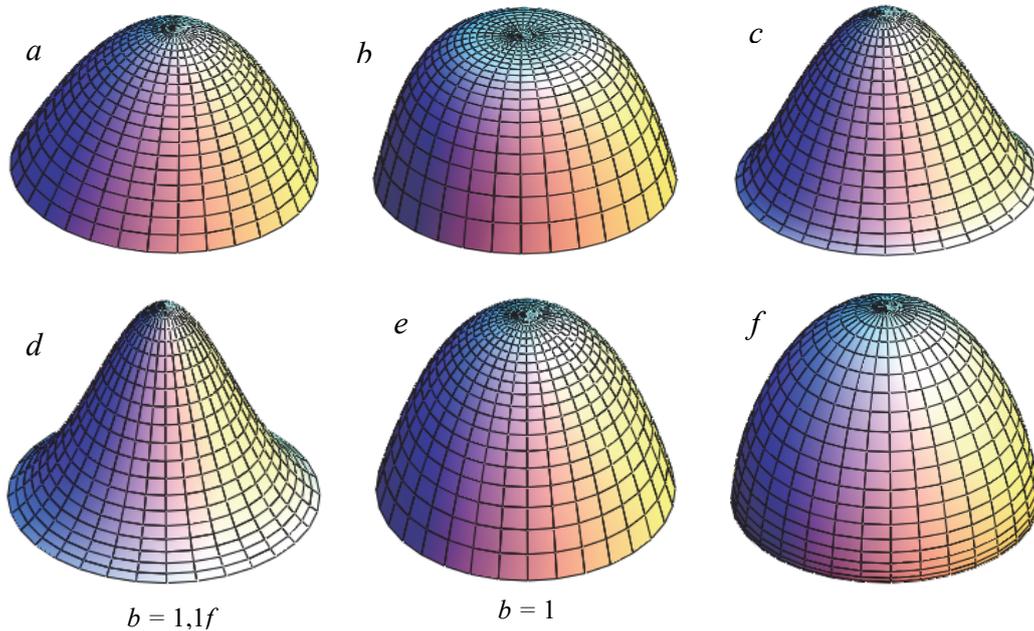
A surface of revolution shown in figure 1, *f* can be expressed by parametric equations as [13]

$$\begin{aligned} x &= x(t, \gamma) = a(t + \sin t) \cos \gamma, \\ y &= y(t, \gamma) = a(t + \sin t) \sin \gamma, \\ z &= z(t) = c(1 + \cos t), \end{aligned} \quad (3)$$

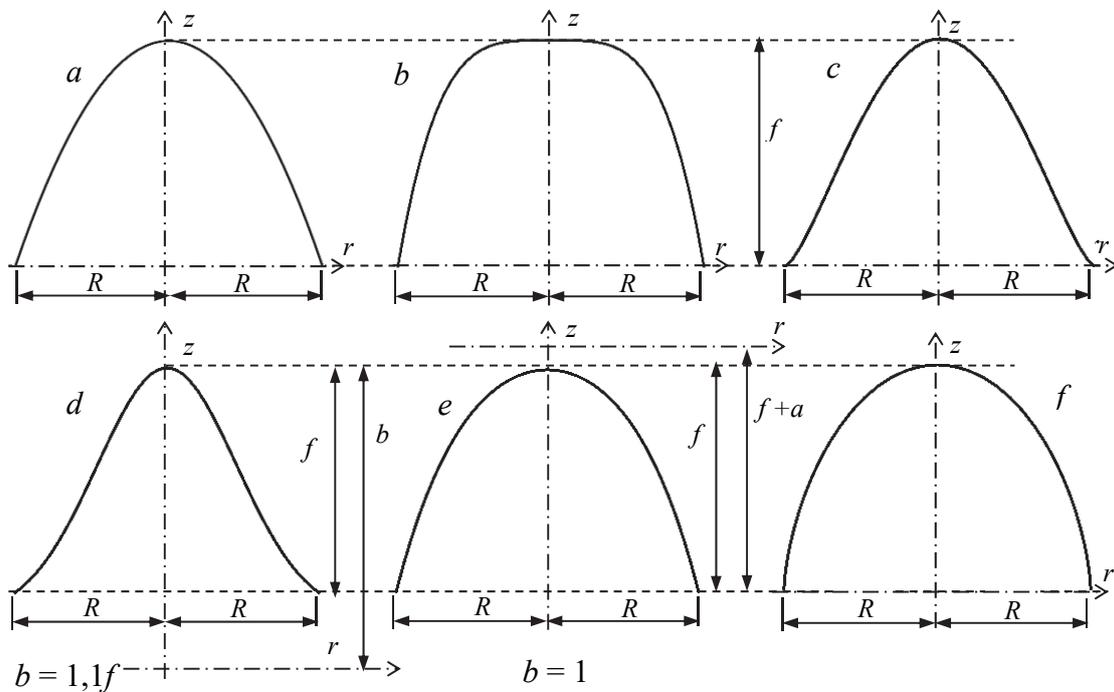
where  $\gamma$  is the angle taken from the coordinate axis  $Ox$  into the direction of the  $Oy$  axis,  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ ;  $0 \leq t \leq \pi$ .  
 The surface “fairing of cycloidal type” (figure 1,  $f$ ; figure 2,  $f$ ) must have a given  $R$  radius of a base and

a given shell rise  $f$ , that is why it is necessary to take in formulas (3)

$$c = f/2, \quad a = R/\pi.$$



**Figure 1.** Six types of surfaces of revolution:  
 $a$  – paraboloid of revolution;  $b$  – the fourth order paraboloid of revolution;  $c$  – a surface of revolution “Soucoupoid”;  
 $d$  – a surface of rotation of a curve  $z = b \exp(-a^2x^2)$  about an axis  $Oz$ ;  $e$  – a surface of rotation of a curve  $z = -a \cosh(x/b)$  about an axis  $Oz$ ;  
 $f$  – “fairing of cycloidal type”



**Figure 2.** Meridians of six surfaces of revolution with the same overall dimensions  $R = 2$  m and  $f = 3$  m:  
 $a$  – paraboloid of revolution;  $b$  – the fourth order paraboloid of revolution;  $c$  – a surface of revolution “Soucoupoid”;  
 $d$  – a surface of rotation of a curve  $z = b \exp(-a^2x^2)$  about an axis  $Oz$ ;  $e$  – a surface of rotation of a curve  $z = -a \cosh(x/b)$  about an axis  $Oz$ ;  
 $f$  – “fairing of cycloidal type”

The determination of stress-strain state of chosen shells of revolution is the next stage of simplified selection of an optimal shell of revolution.

## 2. Stress-strain state of shells of revolution with similar geometrical parameters

Find the parameters of stress-strain state of the selected shells (figure 2) subjected to a constant uniform over the surface load  $q = 1000 \text{ N/m}^2$  directed along the  $Oz$  axis. Let  $f = 3 \text{ m}$ ,  $R = 2 \text{ m}$ ,  $0 \leq \beta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq R$  (figure 3). The shells have a thickness equal to  $0.05 \text{ m}$  and the radius of the top opening equal to  $0.25 \text{ m}$ . Taking into account that the shells have the top opening, we can determine that the heights  $f$  of the shells will change slightly (figure 3).

If shells of revolution are subjected to axisymmetric loading, then the surface uniform load  $Y = 0$ , normal (membrane) forces  $N_r$ ,  $N_\beta$ , shearing forces  $Q_r$ , bending moments  $M_r$ ,  $M_\beta$ , strains  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\beta$ ,  $\kappa_r$ ,  $\kappa_\beta$ , and displacements  $W = u_z$ ,  $u_r$  are axisymmetric, i.e. they do not depend on an angle of longitude  $\beta$  and

$$S = Q_\beta = M_{r\beta} = 0, \quad u_\beta = \varepsilon_{r\beta} = \kappa_{r\beta} = 0.$$

In figure 3 the results of calculation of the given shells of revolution by a finite difference energy method are presented. Let the shells have the hinged immovable supports along the round lower edges  $r = R$  but the edges of the upper openings are free. Assume the modulus of elasticity of the shell material  $E = 3.5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ , Poisson's ratio  $\nu = 0.17$ . The special computer program was written by V.N. Ivanov for a finite difference energy method of calculation.

A finite difference energy method and a finite element method (FEM) are based on the Lagrange's principle. A principle of minimum of the total strain energy was assumed by Lagrange as a basis. In FEM, a shell is divided into the finite elements and displacements are approximated by the shape functions. In finite difference energy method, a difference lattice is marked on a shell structure and the derivatives in the total strain energy functional are substituted for difference relations. The functional of total strain energy becomes a function of node displacements. Having minimized this functional, one can derive a system of algebraic equations and after that the displacements in the nodes of the difference lattice. For the determination of strains and internal forces in the lattice nodes, difference derivatives are used again. In a program complex of a finite difference energy method worked out in the RUDN University, a library of curves and surfaces is used for the determination of geometrical characteristics of thin-walled shell. It gives the pos-

sibility to take into account a real geometry of thin-walled shells in a process of analysis of their stress-strain state.

A finite difference energy method demands the obligatory accurate satisfaction of kinematical boundary conditions only.

The total strain energy expression can be given by

$$F = U - T,$$

where  $U$  is internal work,  $T$  is external work,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int (N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + 2S \varepsilon_{12}) d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int (M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + 2H \chi_{12}) d\Omega, \\ T = \int_V \int (Xu + Yv + Zw) dV + \\ + \int_{\Omega} \int (q_1 u + q_2 v + q_3 w) d\Omega,$$

where  $\Omega$  is an area of the middle surface of a shell;  $d\Omega = A_1 A_2 dr d\beta$ ;  $A_1$ ,  $A_2$  is the coefficients of the first fundamental form of the surface;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  are volume external forces;  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  are external surface loads;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  are displacements in the direction of curvilinear coordinate  $r$  and  $\beta$ , and in the direction of the normal  $z$ ;  $V$  is a volume of the body.

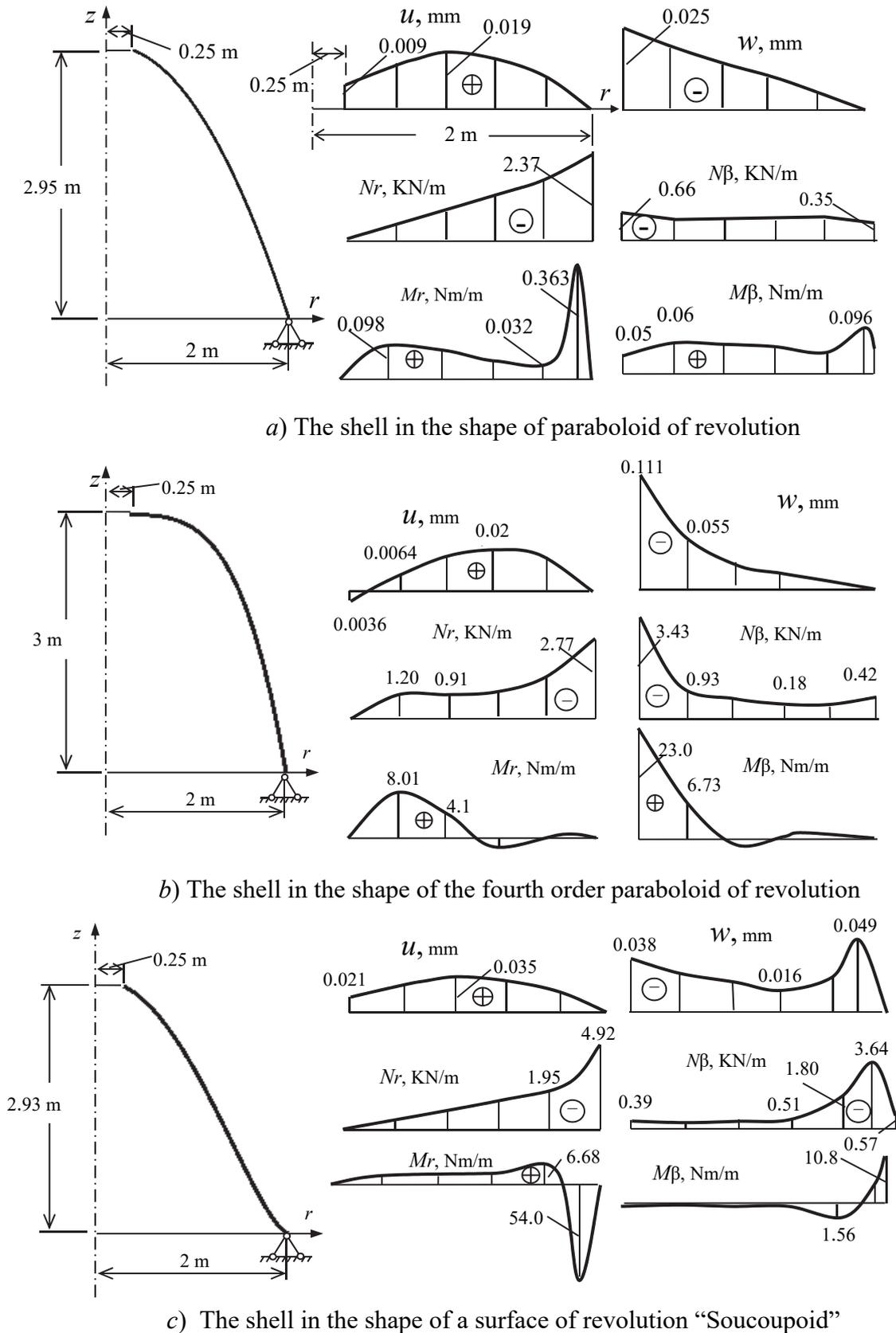
In our case,  $X = Y = Z = 0$ .

The geometrical and physical equations of a shell theory in the principal curvatures are well known and can be taken in [1].

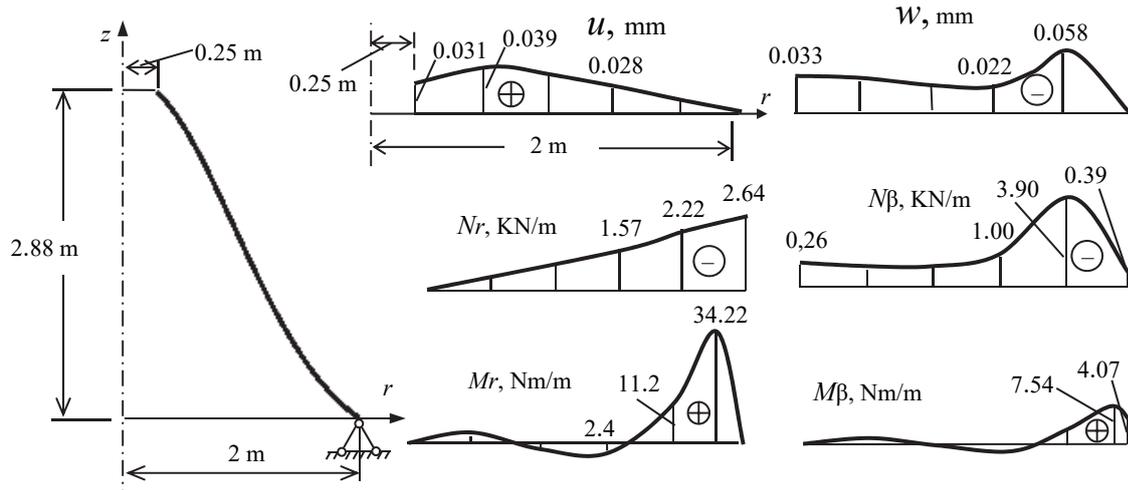
Compile a table (see table) of maximum values of displacements  $u_r = u$ ,  $u_z = w$ , bending moments  $M_r$ ,  $M_\beta$  and normal stresses  $\sigma_{Mr}$ ,  $\sigma_{M\beta}$  coming into existence from these moments, and normal (membrane) forces  $N_r$ ,  $N_\beta$  and normal stresses  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\beta$  coming into existence from these forces.

It is obvious that almost all calculated parameters of stress-strain state of shells in the form of paraboloid of revolution and in the form of surface of rotation of a curve  $z = -a \cosh(x/b)$  about an axis  $Oz$  are nearly equal and they assume minimal values in comparison with other shapes of the shells with the same geometrical parameters. This can be by the final stage of selection of an optimal shell of revolution.

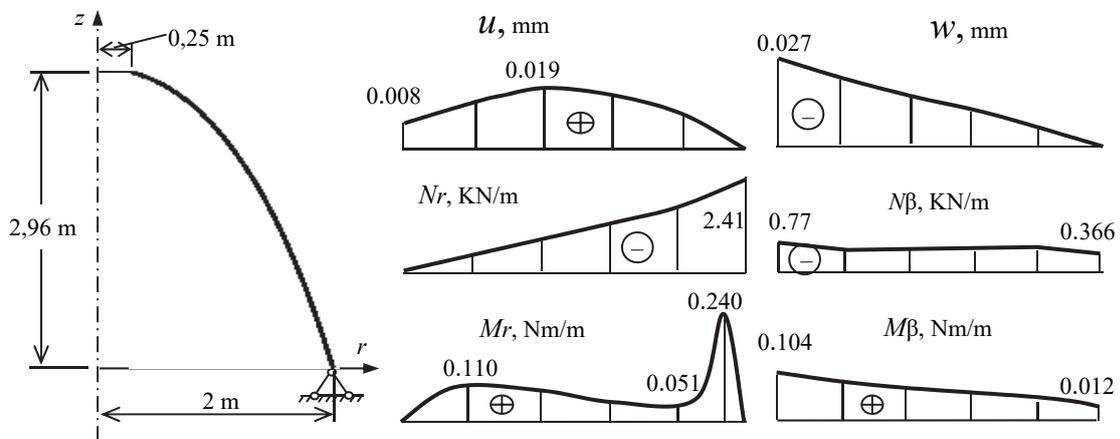
After the determination of the stress-strain state of chosen shells of revolution and selection of the shell with minimal normal stresses in comparison with other shapes of the shells with the same geometrical parameters, it would be useful to get to know about application and researches of the selected domes described in other published works. This can have an influence on final decision.



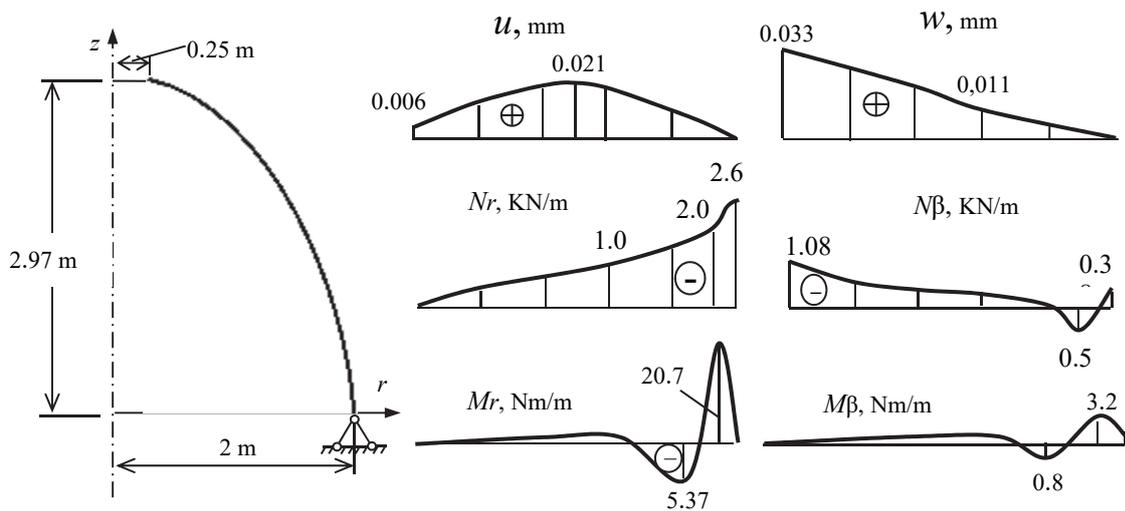
**Figure 3.** Orthographic representation of displacements and internal force factors of the shells of revolution



d) The shell in the shape of a surface of rotation of a curve  $z = b\exp(-a^2x^2)$  about an axis  $Oz$



e) The shell in the shape of a surface of rotation of a curve  $z = -a\cosh(x/b)$  about an axis  $Oz$



f) The shell in the shape of a surface “fairing of cycloidal type”

Figure 3. Orthographic representation of displacements and internal force factors of the shells of revolution (continuation)

**The comparison of maximum results obtained by the calculation with the help of a variational-difference energy method**

Figure 3	$u_r = u,$ mm	$u_z = w,$ mm	$N_r,$ KN/m	$\sigma_r,$ KPa	$N_\beta,$ KN/m	$\sigma_\beta,$ KPa	$M_r,$ KN·m/m	$\sigma_{M_r},$ KPa	$M_\beta,$ KN·m/m	$\sigma_{M_\beta},$ KPa
a	0.019	0.025	-2.37	-47.4	-0.66	-13.2	0.363	0.87	0.096	0.23
b	0.024	<b>0.111</b>	-2.77	-55.4	-3.43	-68.6	8.01	1.92	<b>23.0</b>	<b>55.2</b>
c	0.035	0.049	<b>-4.92</b>	<b>-98.4</b>	-3.64	-72.8	<b>-54</b>	<b>-129.6</b>	10.8	25.92
d	<b>0.039</b>	0.058	-2.64	-52.8	<b>-3.90</b>	<b>-78</b>	34.22	82.13	7.54	18.1
e	0.019	0.027	-2.41	-48.2	-0.77	-15.4	0.24	0.58	0.104	0.25
f	0.021	0.033	-2.6	-52	-1.08	-21.6	20.76	49.8	3.2	7.68

### 3. Recommendations for the application of six types of the selected domes of revolution in construction and machine-building

In this paper, six types of the shells of revolution are submitted for consideration and only paraboloids of revolution obtained a widespread recognition [14]. A surface “fairing of cycloidal type” which found application in machine-building, in particular, in aircraft industry [13] is known much less. Z.V. Belyaeva [15] offers to use catenary line  $z = -a \cosh(r/a)$  as a generatrix curve of the surface of revolution (1) with an  $Oz$  axis. She noted that it is not possible to connect a rise and a diameter of the dome in explicit form and that is why it is necessary to introduce the additional parameter  $b$  into a formula (2). Firstly, Antonio Gaudi used catenary line in his projects, in particular, for the design of the form of the church dome [16].

The rest of the surfaces of revolution (figure 1,  $b, c, d$ ) are known to mathematicians only [17]. For example, geometrical modeling being one of direction of mathematical modeling is used for solution of complex problems of design of different objects and processes by the descriptive geometry methods. In a work [18], the 4<sup>th</sup> order paraboloid of revolution is employed for these aims (figure 1,  $b$ ).

### 4. Results and discussions

In this paper, parametrical equations of the middle surfaces of shells of revolution containing two constant geometrical parameters  $f$  and  $R$  are presented. So, designers can realize six shapes for one object and can choose the most attractive shape for their object (figure 1).

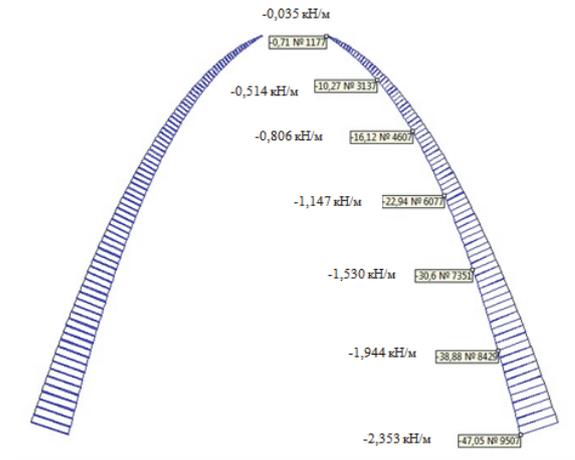
The domes on round plan, shown in figure 1,  $c, d$ , the upper part of the middle surface of which is the surface of positive Gaussian curvature ( $K > 0$ ) but the lower part is the surface of negative Gaussian curvature ( $K < 0$ ), are studied in this paper for the first time.

The behavior of the shell in the shape of the fourth order paraboloid of revolution (figure 3,  $b$ ) under loading can be explained by a low stiffness of its middle surface [19]. The upper part of this shell is very similar to a plate rested upon an elastic support of large rigidity

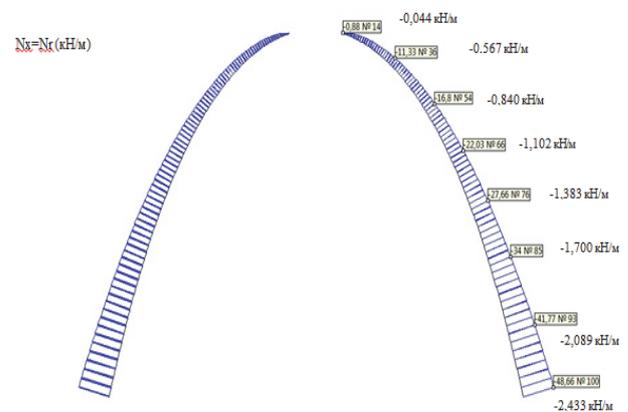
and that is why we have significant bending moment  $M_r$  quite far from the upper edge of the shell.

The emergence of circular tensile normal forces  $N_\beta$  near the lower support in the shell “fairing of cycloidal type” compels to use designed reinforcement in reinforced concrete shells.

If to change geometrical parameters  $f, R, h$  in proportion to each other, then the character of the diagrams shown in figure 3 will not change. Hence, conclusions and recommendations remain valid.



**Figure 4.** The paraboloid of revolution (the normal stresses  $\sigma_r$  and the normal forces  $N_r$ )



**Figure 5.** The shell in the shape of a surface of rotation of a curve  $z = -ach(x/b)$  about an axis  $Oz$  (the normal stresses  $\sigma_r$  and the normal forces  $N_r$ )

Designers can use the results of static strength analysis of six types of the shells of revolution in question, given in this paper, and can choose the suitable shape for their objects with point of view of a shell stress-state state. The normal stresses  $\sigma_r$  and normal forces  $N_r$  for two types of the shells is shown in figures 4 and 5.

It should be noted that comparison of results of strength analyses of six domes showed that a paraboloid of revolution (figure 1, *a*) and a dome with a middle surface in the form of the surface of revolution of the  $z = -a \cosh(x/b)$  curve about the  $Oz$  axis (figure 1, *e*) have the better indices of the stress-strain state. These domes work almost in the momentless state and it is very well for thin-walled shell structures.

For control of the obtained results of calculation, test analyses of the shells, presented in figure 1, *a*, *e*, were fulfilled with the help of the standard computer program SCAD that uses a FEM. Practically identical results were derived. For instance, the orthographic representation of normal stresses  $\sigma_r$  and normal forces  $N_r$  for two types of the shells is shown in figures 4 and 5.

The additional information on other twelve shapes of domes of revolution is given in the papers [7; 8]. Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution on design of unique structures was studied in a paper [20].

### Conclusion

A great quantity of published works was devoted to geometrical modeling of surfaces of revolution, to determination of stress-strain state of shells of revolution subjected to static and dynamic loads, to investigation of buckling problems but in spite of it, in recent years, these shells attract attention of geometers [15], architects [21], civil engineers [22], and machine builder [23].

Designers continue to search for optimal forms of meridians for given load using both the membrane theory [21] and the moment shell theory of the analysis [24]. They search for a meridian shape that secures the constant meridional and circular normal forces in the shell [22]. Domes on round, elliptical, oval, and rectangular plans are studied. In general, numerical methods are used for the determination of stress-strain state of the shells. For instance, in a paper [25], a finite element analysis is applied for the examination of a shell in the form of paraboloid of revolution.

The famous architect and engineer E. Torroja has told that the best erection is such one the reliability of which is ensured, mainly, by its shape but not at the expense of strength of its material [12]. Agreeing with this conclusion, the authors go on with the search of the most optimal shape of a shell of revolution the

middle surface of which should be given by analytical formulae, because form finding and optimization presents contemporary design methods for shell and grid-shell structures [26]. The simplified method of selection of optimal dome can be called “minimum normal stresses in shells of revolution with the same overall dimensions, boundary conditions, and external load”.

It should be repeated that under results of this new research the shape of a paraboloid of revolution (figure 1, *a*) and a dome with a middle surface in the form of the surface of revolution of the  $z = -a \cosh(x/b)$  curve about the  $Oz$  axis (figure 1, *e*) have the most optimal shape from six selected domes with the given geometrical parameters which subjected to axisymmetric uniformly distributed constant surface load acting in the direction of an axis of rotation of the meridians. These two types of meridians have the rather like form. Probably, these meridians are the most rational curves with rational distribution of curvatures.

The obtained results of calculations show the conflicting properties of shells of alternating total curvature (figure 1, *c*, *d*). Being geometrically invariable structures, they show features peculiar to geometrically variable shells [27], i.e. they have low rigidity (a small flexible stiffness) and heightened part of factors of bending (figure 3, *c*, *d*; the curves of  $M_r$ ). A momentless shell theory is unacceptable for such shells.

Another approach was used in a work [28] where a dome is analyzed for different external loads and for different supports. As a result, optimal type of loading of a considered dome is chosen.

### References

1. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhaylovskiy E.I. (1991). *Lineynaya Teoriya Tonkich obolochek [Linear Theory of Thin Shells]*. Leningrad, Politehnika Publ. (In Russ.)
2. Ram Ranjan Sahu, Pramod Kumar Gupta. (2015). Blast diffusion by different shapes of domes. *Defense Science Journal*, 65(1), 77–82.
3. Nick B. (2017). Search for dome. *3D Warehouse*. Trimble Inc., Nederland.
4. Gmirach K.M., Kozlov A.V., Proskurov R.A. (2017). Selection of optimal parameters of elliptical reinforced concrete shell of revolution. *International Research Journal*, (2(56)–3), 100–104. <https://doi.org/10.23670/IRJ.2017.56.049>. (In Russ.)
5. Zingoni A. (2002). Parametric stress distribution in shell-of-revolution sludge digesters of parabolic ogival form. *Thin-Walled Structures*, 40, 691–702.
6. Zingoni A., Enoma N. (2018). Strength and stability of toroidal domes of prolate elliptic section. *Proc. of the IASS Annual Symposia, IASS 2018 Boston Symposium: Shell Structures*, 1–8.
7. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2018). Pseudo-spherical shells in building industry. *Building and Reconstruction*, 2(76), 32–40. (In Russ.)

8. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. (2018). Catenoidal shells. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*, (12), 7–13. (In Russ.)
9. Krivoschapko S.N. (2018). Shells of revolution of non-canonical forms. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo*, 7(715), 66–79. (In Russ.)
10. Zingoni A. (2018). *Shell Structures in Civil and Mechanical Engineering: Theory and Analysis*. ICE Publishing, London.
11. Krivoschapko S.N. (2015). *History of Development of Architecture of Spatial Structures and Shells with the Bases of Strength Analysis*. Moscow: RUDN University. (In Russ.)
12. Krivoschapko S.N. (2019). Optimal shells of revolution and main optimizations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(3), 201–209. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-201-209>
13. Krutov A.V. (2002). Forming curves of fairing. *Izv. vuzov. Mashinostroenie*, (5), 78–80. (In Russ.)
14. Krivoschapko S.N. (2017). On application of parabolic shells of revolution in civil engineering in 2000–2017. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (4), 4–14. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2017-4-4-14>. (In Russ.)
15. Belyaeva Z.V. (2015). *Geometrical Modeling of Spatial Structures* (PhD Diss.). Ekaterinburg. (In Russ.)
16. Belyaeva Z.V., Mityushov E.A. (2008). Mathematical modeling of vaults and domes. *Building and Education*, 11. Ekaterinburg: UGTU-UPI Publ. (In Russ.)
17. Encyclopédie Des Formes Mathématiques Remarquables Surfaces. <http://mathcurve.com/surfaces/surfaces.shtml>
18. Vertinskaya N.D. (2009). The bases of geometric modeling technological processes. *Uspehi sovremennogo estestvoznaniya*, (5), 84–87. <http://www.natural-sciences.ru/ru/article/view?id=15691>. (In Russ.)
19. Sabitov I.H. (1986). The research of stiffness and non-bending of analytical surfaces of revolution with a flattening at the pole. *Vestnik MGU. Matematika. Mehanika*, (5), 29–36. (In Russ.)
20. Gbaguidi Aïssè G.L. (2019). Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(4), 308–314. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314>
21. Diaz-Severiano J.A., Gomez-Jauregui V., Machado C., Otero C. (2018). Symmetry in Regular Polyhedra Seen as 2D Möbius Transformations: Geodesic and Panel Domes Arising from 2D Diagrams. *Symmetry*, (10), 356. DOI: 0.3390/sym10090356
22. Rabello F.T., Marcellino N.A., Loriggio D.D. (2016). Automatic procedure for analysis and geometry definition of axisymmetric domes by the membrane theory with constant normal stress. *Rev. IBRACON Estrut. Mater.*, 9(4), São Paulo, July/Aug.
23. Abdessalem J., Fakhreddine D., Said A., Mohamed H. (2014). Shape optimization for a hyperelastic axisymmetric structure. *Journal of Engineering, Design and Technology*, 12(2), 177–194. <https://doi.org/10.1108/JEDT-10-2011-0072>.
24. Jasion P., Magnucki K. (2016). Buckling and post-buckling analysis of untypical shells of revolution. *Insights and Innovations in Structural Engineering, Mechanics and Computation: Proc. of the 6<sup>th</sup> International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, SEMC 2016*, 766–771. DOI: 10.1201/9781315641645-125
25. Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. (2011). Analysis of shells of revolution on the base of a mixed FEM with using of tensor approximation of design variables. *Fundamentalnie issledovaniya*, (8–2), 356–362. <http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=27962>. (In Russ.)
26. Adriaenssens S., Veenendaal D., Williams Chris J.K. (2014). *Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization*. Routledge, 323.
27. Bulygin A.V. (1977). On one class of shells of alternating total curvature. *Mehanika tyvordogo tela (MTT)*, 5, 97–104. (In Russ.)
28. Ramm E. (1992). Shape finding methods of shells. In F.G. Rammerstorfer (ed.), *Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements*. Springer – Verlag, Wien. DOI: 10.1007/978-3-7091-2604-2

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Упрощенный выбор оптимальной оболочки вращения

С.Н. Кривошапко\*, В.Н. Иванов

Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
\*krivoschapko\_sn@mail.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 02 сентября 2019 г.

Доработана: 12 ноября 2019 г.

Принята к публикации: 06 декабря 2019 г.

### Аннотация

**Актуальность.** Архитекторы и инженеры, работающие с оболочками вращения, используют в своих проектах в основном хорошо зарекомендовавшие себя сферические оболочки, параболоиды, гиперболоиды и эллипсоиды вращения, хотя известны около сотни поверхностей вращения, которые могут быть с успехом применены в строительстве и машиностроении.

**Кривошапко Сергей Николаевич**, доктор технических наук, профессор департамента строительства Инженерной академии; ORCID iD: 0000-0002-9385-3699, eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966.

**Иванов Вячеслав Николаевич**, доктор технических наук, профессор департамента строительства Инженерной академии; ORCID iD: 0000-0003-4023-156X, eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909.

**Конфликт интересов**

Авторы подтверждают, что данная статья не содержит конфликта интересов.

**Для цитирования**

Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Simplified selection of optimal shell of revolution (Упрощенный выбор оптимальной оболочки вращения) // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 438–448. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-438-448>

**Методы.** Рассматривается оптимизационная задача в проектировании осесимметричной оболочки, подверженной действию внешней нагрузки. Обычно решение этой проблемы заключается в нахождении формы меридиана и в распределении толщины оболочки вдоль меридиана. В статье исследуется более узкая задача, которая заключается в выборе формы оболочки вращения из нескольких известных подклассов, срединные поверхности которых могут быть заданы параметрическими уравнениями. Приводятся результаты статических расчетов куполов различной гауссовой кривизны с одинаковыми габаритными размерами на осесимметричную поперечную распределенную нагрузку типа собственного веса. Используется вариационно-разностный метод. **Результаты.** Сравнительный анализ результатов расчета шести куполов показал, что с точки зрения напряженно-деформированного состояния лучшие результаты у параболоида вращения и у оболочки вращения кривой  $z = -ach(x/b)$  вокруг оси  $Oz$ . Эти оболочки работают почти в безмоментном состоянии, к чему стремятся проектировщики тонкостенных оболочечных структур. Предложенный критерий оптимальности предлагается назвать «минимальные нормальные напряжения в оболочках вращения с одинаковыми базовыми размерами, граничными условиями и внешними нагрузками».

**Ключевые слова:** купол; оболочка вращения; параболоид вращения; параболоид вращения четвертого порядка; цепная линия; вариационно-разностный метод расчета; линейная теория оболочек; геометрическое моделирование; оптимальное проектирование

**Список литературы**

1. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Ленинград: Политехника, 1991. 656 с.
2. Ram Ranjan Sahu, Pramod Kumar Gupta. Blast Diffusion by Different Shapes of Domes // Defense Science Journal. 2015. Vol. 65. No. 1. Pp. 77–82.
3. Nick B. Search for dome // 3D Warehouse. Nederland: Trimble Inc., 2017.
4. Гмиряч К.М., Козлов А.В., Проскуров Р.А. Подбор оптимальных параметров эллипсоидной железобетонной оболочки вращения // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. Вып. № 2 (56). Ч. 3. С. 100–104.
5. Zingoni A. Parametric stress distribution in shell-of-revolution sludge digesters of parabolic ogival form // Thin-Walled Structures. 2002. Vol. 40. Pp. 691–702.
6. Zingoni A., Enoma N. Strength and stability of toroidal domes of prolate elliptic section // Proc. of the IASS Annual Symposia, IASS 2018 Boston Symposium: Shell Structures. 2018. Pp. 1–8.
7. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Псевдосферические оболочки в строительной индустрии // Строительство и реконструкция. 2018. № 2 (76). С. 32–40.
8. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Катеноидные оболочки // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 12. С. 7–13.
9. Кривошапко С.Н. Оболочки вращения неканонических форм // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 7 (715). С. 66–79.
10. Zingoni A. Shell Structures in Civil and Mechanical Engineering: Theory and Analysis. London: ICE Publishing, 2018.
11. Кривошапко С.Н. История развития архитектуры пространственных структур и оболочек с элементами расчета: учебно-методический комплекс. М.: РУДН, 2015. 156 с.
12. Krivoshapko S.N. Optimal shells of revolution and main optimizations // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 3. С. 201–209. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-201-209>
13. Крутов А.В. Формообразующие кривые обтекателей // Известия вузов. Машиностроение. 2002. № 5. С. 78–80.
14. Кривошапко С.Н. К вопросу о применении параболических оболочек вращения в строительстве в 2000–2017 годах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 4–14.
15. Беляева З.В. Геометрическое моделирование пространственных конструкций: дис. ... к. т. н. Екатеринбург, 2015. 175 с.
16. Беляева З.В., Мутюшов Е.А. Математическое моделирование сводов и куполов // Строительство и образование: сб. науч. тр. № 11. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. 235 с.
17. Encyclopédie Des Formes Mathématiques Remarquables Surfaces. URL: <http://mathcurve.com/surfaces/surfaces.shtml>
18. Вертинская Н.Д. Основания геометрического моделирования технологических процессов // Успехи современного естествознания. 2009. № 5. С. 84–87.
19. Сабитов И.Х. Исследование жесткости и неизгибаемости аналитических поверхностей вращения // Вестник МГУ. Математика. Механика. 1986. № 5. С. 29–36.
20. Gbaguidi Aïssè G.L. Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 308–314. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314>

21. *Diaz-Severiano J.A., Gomez-Jauregui V., Manchado C., Otero C.* Symmetry in Regular Polyhedra Seen as 2D Möbius Transformations: Geodesic and Panel Domes Arising from 2D Diagrams // *Symmetry*. 2018. № 10. С. 356. DOI: 10.3390/sym10090356

22. *Rabello F.T., Marcellino N.A., Loriggio D.D.* Automatic procedure for analysis and geometry definition of axisymmetric domes by the membrane theory with constant normal stress // *Rev. IBRACON Estrut. Mater.* 2016, July/Aug. Vol. 9. No. 4. São Paulo.

23. *Abdessalem J., Fakhreddine D., Said A., Mohamed H.* Shape optimization for a hyperelastic axisymmetric structure // *Journal of Engineering, Design and Technology*. 2014. Vol. 12. No. 2. Pp. 177–194.

24. *Jasion P., Magnucki K.* Buckling and post-buckling analysis of untypical shells of revolution // *Insights and Innovations in Structural Engineering, Mechanics and Com-*

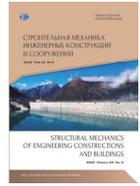
*putation: Proc. of the 6<sup>th</sup> International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, SEMC 2016.* 2016. Pp. 766–771.

25. *Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П.* Расчет оболочек вращения на основе смешанного МКЭ при тензорной аппроксимации расчетных величин // *Фундаментальные исследования*. 2011. № 8–2. С. 356–362.

26. *Adriaenssens S., Veenendaal D., Williams C.J.K.* *Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization.* Routledge, 2014. 323 p.

27. *Булыгин А.В.* Об одном классе оболочек переменной полной кривизны // *Механика твердого тела (МТТ)*. 1977. № 5. С. 97–104.

28. *Ramm E.* *Shape finding methods of shells // Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements / ed. by F.G. Rammerstorfer.* Wien: Springer – Verlag, 1992. DOI: 10.1007/978-3-7091-2604-2

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-449-457  
УДК 004.925.83

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Визуализация образования поверхностей полуправильных многогранников в среде AutoCAD

**В.А. Романова***Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
v.a.r-victoryna@mail.ru*

### История статьи:

Поступила в редакцию: 07 августа 2019 г.  
Доработана: 22 ноября 2019 г.  
Принята к публикации: 29 ноября 2019 г.

### Аннотация

В статье рассматривается автоматизированное образование кинематическим методом поверхностей полуправильных многогранников Архимеда трех форм: усеченного тетраэдра, усеченного октаэдра и усеченного икосаэдра. Для решения поставленной задачи использовались AutoCAD и встроенный в него язык программирования AutoLISP. Каждый из указанных трех полуправильных многогранников Архимеда имеет грани двух видов. В связи с этим поверхность отдельного многогранника рассматривается состоящей из двух конструктивных форм. Каждая конструктивная форма образуется в среде AutoCAD из отсеков поверхностей граней многогранника одного вида, причем каждый отсек закрепляется за определенным слоем чертежа. Образование конструктивных форм обеспечивают пользовательские функции, разработанные на функциональном языке программирования AutoLISP. Пользовательские функции не только формируют образы поверхностей, но и выполняют все необходимые расчеты. Электронная модель каждого многогранника формируется объединением его конструктивных форм. Из нее создается блок. Образование поверхности каждого многогранника выполняют пользовательские функции, обеспечивающие «замораживание» слоев чертежа, предназначенных для отсеков поверхности, вставку блока с электронной моделью многогранника и последовательное «размораживание» слоев чертежа. Когда происходит «размораживание» слоев чертежа, процесс образования многогранника демонстрируется на экране монитора. Результатом проведенного исследования стало создание программного обеспечения, включающего пользовательские функции для формирования электронной модели выбранных многогранников и визуализации процесса образования их поверхностей в динамическом режиме.

**Ключевые слова:** полуправильный многогранник; электронная модель; конструктивная форма; формообразование; усеченный тетраэдр; усеченный октаэдр; усеченный икосаэдр

### Для цитирования

Романова В.А. Визуализация образования поверхностей полуправильных многогранников в среде AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 449–457. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-449-457>

### Введение

Интерес к многогранникам не пропадает с момента их описания древнегреческим ученым Платоном (427–347 г. до н. э.) [1–3]. Полуправильные многогранники открыты Архимедом (287–212 г.

до н. э.). Их всего тринадцать. В честь великого ученого их называют телами Архимеда. Пять Архимедовых тел можно получить усечением вершин пяти Платоновых тел, при этом грани Платоновых тел преобразуются в правильные многоугольники другой формы. Так образованы следующие тела Архимеда: усеченный тетраэдр, усеченный октаэдр, усеченный куб, усеченный додекаэдр и усеченный икосаэдр. Эти многогранники выпуклые, многогранные углы у них равны, а их грани – правильные многоугольники двух типов. Два тела Архимеда – кубо-

Романова Викторина Анатольевна, доцент департамента строительства Инженерной академии.

© Романова В.А., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

октаэдр и икосододекаэдр – получают пересечением двух тел Платона. При усечении этой пары многогранников образуются ромбокубооктаэдр и ромбоикосододекаэдр. Остальные тела Архимеда образуются дальнейшим преобразованием полученных тел [4; 5].

С древних времен известны применение золотой пропорции для построения правильных многогранников и создание с их использованием знаменитых художественных произведений [6; 7].

В настоящее время использование Архимедовых тел в архитектуре позволяет создавать оригинальные здания в стиле постмодернизма. К ним в первую очередь можно отнести Национальную библиотеку Республики Беларусь. Форма этого здания – ромбокубооктаэдр. Другой пример – здание Международного экономического комитета в Киеве, в котором купол конференц-зала – икосододекаэдр [8–10].

Вопросам визуализации научных данных (архитектурных, инженерных, геологических и др.) в трехмерном пространстве посредством использования различных видов программного обеспечения посвящены работы [11–17]. Использование системы AutoCAD и языка AutoLISP для образования различных поверхностей освещено в работах [18–25]. Визуализация образования поверхностей тел Платона кинематическим способом в динамическом режиме в системе AutoCAD рассмотрена в работе [26].

В данной работе изучается возможность образования поверхностей полуправильных многогранников Архимеда в системе AutoCAD и визуализации процесса их формирования с использованием программного обеспечения на языке AutoLISP.

Поскольку рассматриваемые многогранники содержат грани двух геометрических форм, для каждого многогранника создаются пользовательские функции с целью образования двух конструктивных форм. Конструктивные формы образуются кинематическим способом, при этом в качестве направляющих линий используются ребра многогранников, а в качестве образующих – линии переменной длины, скользящие по ребрам многогранников. Поскольку образующие линии изменяются по длине, между ними образуются отсеки поверхности переменной длины.

Алгоритм программного обеспечения для каждого многогранника включает:

- формирование конструктивной формы 1;
- формирование конструктивной формы 2;
- образование электронной модели многогранника;
- образование поверхности многогранника в динамическом режиме.

## 1. Образование поверхности усеченного тетраэдра

Усеченный тетраэдр изображен на рис. 1 в двух вариантах: непрозрачный и прозрачность 60%. Его грани: 4 треугольника и 4 шестиугольника. Конфигурация вершины: 3,6,6.

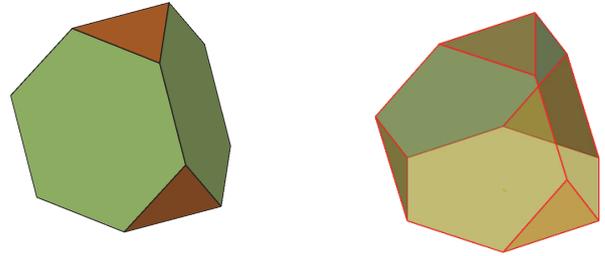


Рис. 1. Усеченный тетраэдр  
[Figure 1. Truncated tetrahedron]

Образование каркаса усеченного тетраэдра выполняется обрезкой каркасных линий тетраэдра на  $1/3$  их длины с обоих концов. На рис. 2 изображены каркасные линии тетраэдра  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ . Результат обрезки – каркас усеченного тетраэдра (рис. 2).

Образование набора отсеков поверхности шестиугольников выполняется в ячейке каркаса усеченного тетраэдра, в плоскости которой установлена система координат  $x_1 O_1 y_1$  посредством переноса системы координат  $xOy$  в точку  $O_1$  и поворотом на угол  $(180 - \vartheta)$  вокруг ребра  $AB$  (рис. 2).

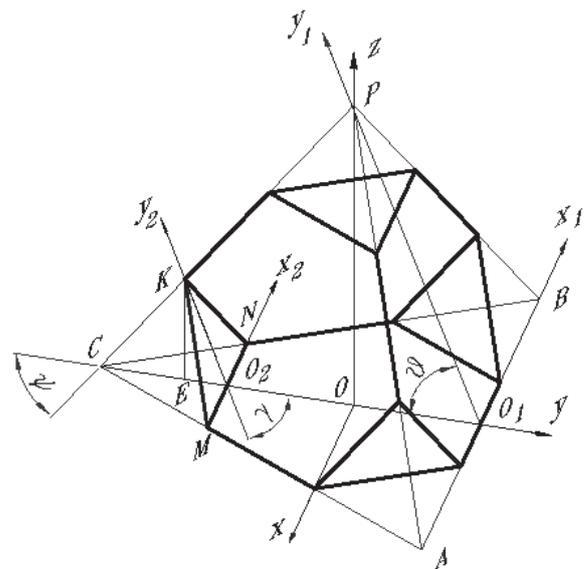


Рис. 2. Схема к расчету положения треугольной ячейки  
[Figure 2. Scheme to calculate the position of a triangular cell]

Образование отеков новой треугольной поверхности выполняется в ячейке  $MKN$  каркаса усеченного тетраэдра. Система координат  $x_2O_2y_2$  устанавливается в плоскости треугольной ячейки  $MKN$  переносом системы координат  $xOy$  в точку  $O_2$  и поворотом на угол  $(180 - \gamma)$  вокруг ребра  $MN$ . Направляющими являются отрезки  $KM$  и  $KN$  (рис. 2).

Углы  $\vartheta$  и  $\psi$  принадлежат тетраэдру. Угол  $\gamma$  вычисляется, при этом принимается во внимание, что  $CM = CN = CK = MN$ . Тогда для определения угла  $\gamma$  имеем следующие соотношения:

$$CO_2 = KO_2 = CN * \cos 30^\circ,$$

$$CE = CK * \cos \psi, \quad KE = CK * \sin \psi,$$

$$\gamma = a \tan \frac{KE}{CO_2 - CE}.$$

Конструктивная форма 1 – набор отсеков поверхности четырех шестиугольников. Данная форма имеет треугольные отверстия (рис. 3).

Конструктивная форма 2 – набор отсеков поверхности четырех треугольников (рис. 4).

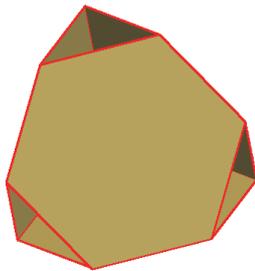


Рис. 3. Конструктивная форма 1  
[Figure 3. Constructive form 1]

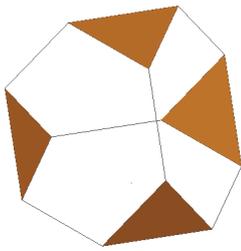


Рис. 4. Конструктивная форма 2  
[Figure 4. Constructive form 2]

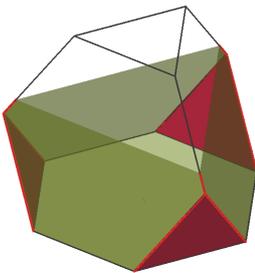


Рис. 5. Образование поверхности усеченного тетраэдра  
[Figure 5. Formation of a truncated tetrahedron surface]

Объединением конструктивных форм образует электронная модель усеченного тетраэдра, которая используется для образования его поверхности в динамическом режиме (рис. 5).

## 2. Образование поверхности усеченного октаэдра

Усеченный октаэдр представлен на рис. 6 в двух вариантах: непрозрачный и прозрачность 60 %. Имеет 6 квадратов и 8 шестиугольников. Конфигурация вершины: 4,6,6.

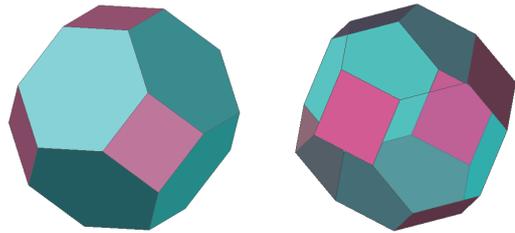


Рис. 6. Усеченный октаэдр  
[Figure 6. Truncated octahedron]

Образование каркаса усеченного октаэдра выполняется обрезкой каркасных линий октаэдра на 1/3 их длины с обоих концов. Каркас усеченного октаэдра изображен на рис. 7.

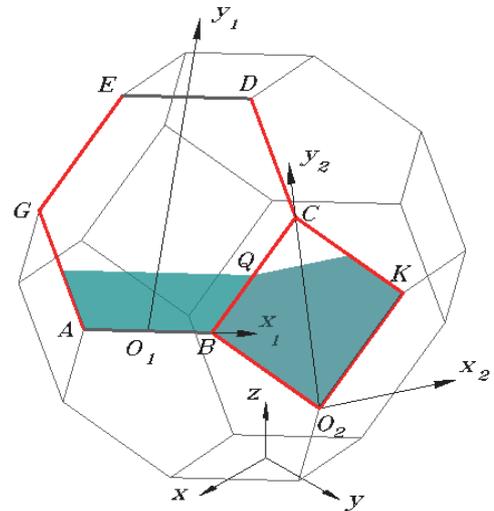


Рис. 7. Формирование отсеков поверхностей граней двух типов  
[Figure 7. Formation of compartments of surfaces of faces of two types]

Формирование набора отеков поверхности шестиугольников выполняется в ячейке  $ABCDE$  каркаса усеченного тетраэдра, в которой установлена система координат  $x_1O_1y_1$ . Направляющими приняты стороны ячейки  $AG, EG$  с левой стороны и  $BC, DC$  с правой стороны.

Образование отеков поверхности квадрата выполняется в ячейке  $BCKO_2$  каркаса. В плоскости ячейки установлена система координат  $x_2O_2y_2$  посредством переноса системы координат  $xOy$  в точку  $O_2$  и поворотом на угол  $90^\circ$  вокруг осей  $x$  и  $y$ . В качестве направляющих приняты стороны ячейки  $BO_2$ ,  $BC$  с одной стороны и  $KO_2$ ,  $KC$  с другой стороны.

Поскольку образование поверхности выполняется функцией Loft и ее опцией «по сечениям», необходимо обеспечить вывод на экран сечений квадратов и шестиугольников одного уровня одновременно. Это условие выполняется, если шаг формирования отсеков поверхностей шестиугольника и квадрата по смежному ребру одинаков:

$$\frac{dy_1}{\cos\pi/6} = \frac{dy_2}{\cos\pi/4},$$

где  $dy_1$  – шаг формирования отсеков поверхности шестиугольника;  $dy_2$  – шаг формирования отсеков поверхности квадрата.

Величина  $dy_1$  задается, а величина  $dy_2$  вычисляется:

$$dy_2 = \frac{dy_1 \cdot \cos\pi/4}{\cos\pi/6}.$$

Конструктивная форма 1 – набор отсеков поверхности восьми шестиугольников. Эта форма имеет квадратные отверстия (рис. 8).

Конструктивная форма 2 – набор отсеков поверхности шести квадратов (рис. 9).

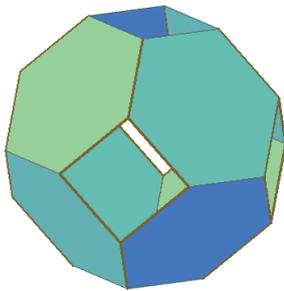


Рис. 8. Конструктивная форма 1  
[Figure 8. Constructive form 1]

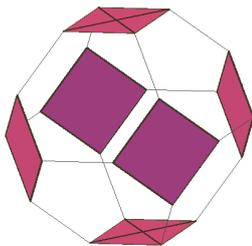


Рис. 9. Конструктивная форма 2  
[Figure 9. Constructive form 2]

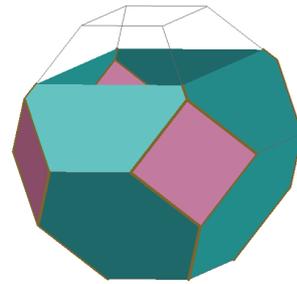


Рис. 10. Образование поверхности усеченного октаэдра  
[Figure 10. Formation of a truncated octahedron surface]

Объединением конструктивных форм образуется электронная модель усеченного октаэдра. Она используется для образования поверхности усеченного октаэдра в динамическом режиме (рис. 10).

### 3. Образование поверхности усеченного икосаэдра

Усеченный икосаэдр – полуправильный многогранник, имеющий 12 граней в форме правильного пятиугольника и 20 граней в форме правильного шестиугольника (рис. 11). В каждой из вершин сходятся 2 шестиугольника и пятиугольник. Конфигурация вершины: 5,6,6.

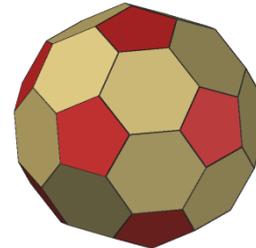


Рис. 11. Усеченный икосаэдр  
[Figure 11. Truncate icosahedron]

Усеченный икосаэдр можно получить, срезав вершины у икосаэдра или углы у всех треугольников икосаэдра.

Для образования усеченного икосаэдра кинематическим способом строится его каркас усечением каркасных линий икосаэдра на  $1/3$  длины треугольников с обеих сторон.

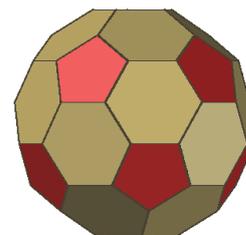


Рис. 12. Вид спереди  
[Figure 12. Front view]

Образование отсеков пятиугольной и шестиугольной форм выполняется раздельно. Выделяются четыре ряда отсеков шестиугольной формы, два ряда отсеков пятиугольной формы и два основания пятиугольной формы (рис. 12). Формирование идет по рядам.

#### 4. Формирование отсеков поверхности шестиугольников

Основным аргументом в организации процесса формирования отсеков является положение ячейки каркаса – угол между ней и осями координат. Поскольку в программном обеспечении AutoCAD систему координат можно перемещать и вращать, имеется возможность установки ее в плоскостях ячеек каркаса в нужном положении.

Для образования отсеков в ячейке первого ряда необходимо повернуть систему координат  $xOyz$  вокруг оси  $z$  на угол  $36^\circ$ , затем перенести ее в точку  $O_1$  и повернуть на угол  $\tau$  между осью  $y_1$  шестиугольника и осью  $y$ . Этот угол известен из конструкции икосаэдра, в программе он вычисляется.

Отсеки формируются функцией Loft между образующими  $q_1$  и  $q_2$ , скользящими по направляющим – сторонам шестиугольной каркасной ячейки. Отсек поверхности первого ряда показан на рис. 13.

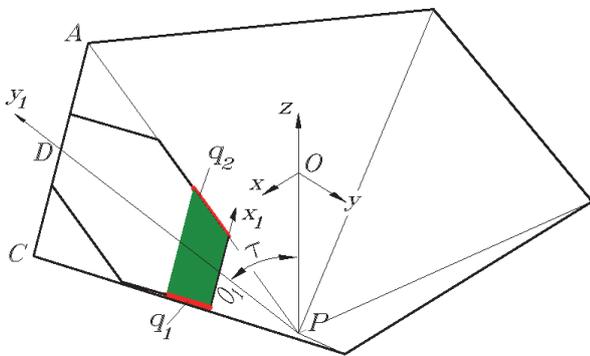


Рис. 13. Усеченный треугольник и отсек поверхности в нем [Figure 13. The truncated triangle and the surface compartment in it]

При установке системы координат в плоскости шестиугольника второго ряда (рис. 14) система координат  $xOyz$  поворачивается вокруг оси  $z$  на  $36^\circ$ , переносится в точку  $D$  и поворачивается вокруг оси  $x_2$  на угол  $\tau$ .

Угол  $\tau$  равен:

$$\tau = 90^\circ + \delta, \quad \delta = r * (1 - \cos 36^\circ) / h_3,$$

где  $r$  – радиус окружности, описанной вокруг пятиугольника;  $h_3$  – высота усеченного икосаэдра.

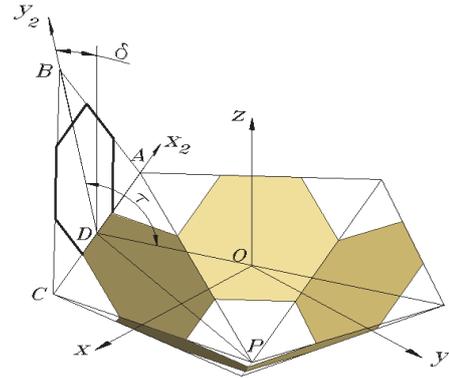


Рис. 14. Система координат 2-го ряда [Figure 14. 2<sup>nd</sup> row coordinate system]



Рис. 15. Конструктивная форма 1 [Figure 15. Constructive form 1]

В рядах три и четыре алгоритм переноса системы координат на плоскости шестиугольных ячеек аналогичен.

Отсеки шестиугольников составляют конструктивную форму 1 (рис. 15).

#### 5. Формирование отсеков поверхности пятиугольников

Пятиугольные ячейки боковой поверхности усеченного икосаэдра расположены в два ряда. На рис. 16 показана одна ячейка верхнего ряда.

Угол наклона ребра икосаэдра с осью  $y$  –  $\varphi$ . Угол между плоскостью пятиугольника и осью  $y$  –  $\tau$ .

Для выполнения образования отсеков поверхности пятиугольника необходимо преобразовать начальную систему координат  $xOyz$  в систему  $x_6Ny_6$ , расположенную в плоскости пятиугольной ячейки  $ABCDE$ , выполнив следующие операции:

- перенос системы  $xOyz$  в точку  $M$ ;
- поворот системы  $xOyz$  вокруг диагонали  $AC$  на угол  $\varphi$ ;
- перенос системы  $xOyz$  в точку  $N$ .

По построению имеем:

$$AB = BC = AQ = CQ = AE = ED = DC = a.$$

Треугольник  $ABC$  равен треугольнику  $AQC \rightarrow QM = BM$ .

Треугольник  $BQM$  – равнобедренный,  $KM$  – высота  $\rightarrow BK = QK$ .

Угол  $\varphi$  определяется из следующих соотношений:

$$BM = QM = a * \sin 36,$$

$$KM = \sqrt{BM^2 - BK^2}, \quad \tau = 2 * \varphi.$$

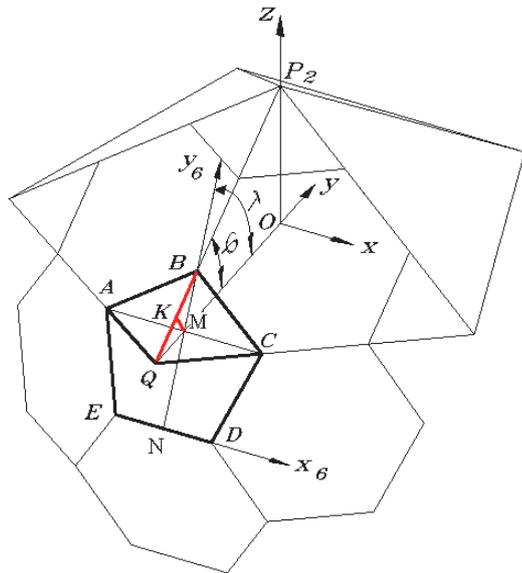


Рис. 16. Определение угла  $\tau$  между осями  $y$  и  $y_6$   
[Figure 16. Determination of the angle  $\tau$  between the  $y$  and  $y_6$  axes]

Формирование отсеков поверхности происходит в ячейке каркаса  $ABCDE$  между двумя образующими, движущимися сначала по направляющим  $AE$  и  $DC$ , а затем по направляющим  $AB$  и  $CB$ .

Поскольку усеченный икосаэдр имеет грани пятиугольной и шестиугольной форм, при этом пятиугольные грани со всех сторон соприкасаются с шестиугольными гранями, в некоторые горизонтальные сечения попадают два отсека: один пятиугольной формы, а другой – шестиугольной.

Пятиугольник имеет две области: треугольной и трапецидальной формы. Для построения отсеков поверхности необходимо определить и шаг  $dyp1$  для треугольной формы, и шаг  $dyp2$  для трапецидальной. Шаг  $dys$  для шестиугольника задается. Для определения неизвестных величин  $dyp1$  и  $dyp2$  используются чертежи (рис. 17 и 18):

$$dyp1 = dys * \sin 36 / \sin 60,$$

$$dyp2 = dys * \sin 72 / \sin 60.$$

Набор отсеков поверхности пятиугольников верхнего ряда создается функцией Аггау языка AutoLISP. Алгоритм для образования набора отсеков пятиугольников нижнего ряда подобен приведенному алгоритму для верхнего ряда.

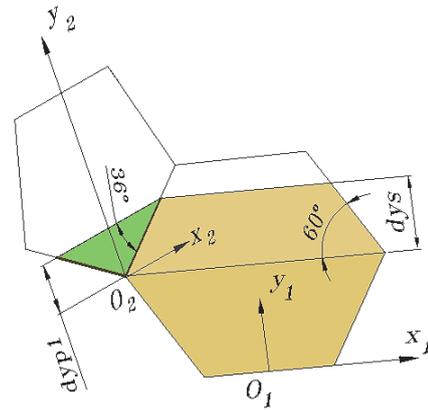


Рис. 17. Определение шага  $dyp1$   
[Figure 17. Definition of  $dyp1$  step]

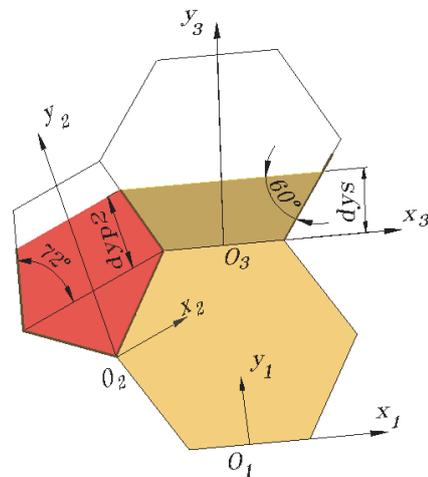


Рис. 18. Определение шага  $dyp2$   
[Figure 18. Definition of  $dyp2$  step]

Наборы из отсеков пятиугольной формы составляют конструктивную форму 2 (рис. 19).

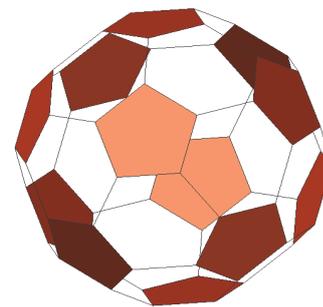
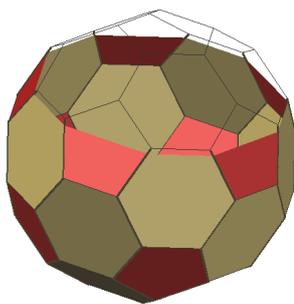


Рис. 19. Конструктивная форма 2  
[Figure 19. Constructive form 2]

Образование отсеков пятиугольников в основаниях каркаса усеченного икосаэдра выполняется так же, как и в основаниях додекаэдра – по треугольникам, на которые разбиваются пятиугольники оснований [28; 29].



**Рис. 20.** Образование усеченного икосаэдра  
[Figure 20. Formation of truncated icosahedron]

Электронная модель усеченного икосаэдра получена объединением его конструктивных форм и отсеков оснований. Образование поверхности представлено на рис. 20.

### Заключение

Результатом проведенной работы является создание алгоритмов и программного обеспечения на языке AutoLISP для образования электронных моделей и формирования кинематическим способом поверхностей следующих полуправильных многогранников Архимеда:

- усеченного тетраэдра;
- усеченного октаэдра;
- усеченного икосаэдра.

### Список литературы

1. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М. – Л.: Гостехиздат, 1950. 428 с.
2. Короев Ю.И. Начертательная геометрия. М.: КноРус, 2015. 422 с.
3. Ашкингузе В.Г. О числе полуправильных многогранников // Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 1. 1957. С. 107–118.
4. Савченко В. Полуправильные многогранники // Квант. 1979. № 1. С. 3.
5. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. М.: Изд-во МЦНМО, 2010. 136 с.
6. Щетников А.И. Лука Пачоли и его трактат “О божественной пропорции” // Математическое образование. 2007. № 1 (41). С. 33–44.
7. Васильева В.Н. Золотое сечение и золотые многоугольники при построении икосаэдра, додекаэдра и тел Архимеда, основанных на них // Геометрия и графика. 2019. Т. 8. № 2. С. 47–55. DOI: 10.12737/article\_5d2c1ceb9f91b1.21353054
8. Альсина К. Тысяча граней геометрической красоты. Многогранники. М.: Де Агостини, 2014. 144 с.
9. Мотульский Р.С. Национальная библиотека Беларуси: новое здание – новая концепция развития / Национальная библиотека Беларуси. Минск, 2007. 322 с.
10. Шишова А.Б. Полуправильные многогранники // Концепт. 2015. Т. 25. С. 191–195. URL: <http://e-koncept.ru/2015/65341.htm>
11. Ерцкина Е.Б., Королькова Н.Н. Геометрическое моделирование в автоматизированном проектировании архитектурных объектов // Геометрия и графика. 2016. Т. 4. № 2. С. 48–54. DOI: 10.12737/19833
12. Schroeder W., Martin K., Lorensen B. The Visualization Toolkit. Kitware, Inc, 2003
13. Haber R.B. Visualization Techniques for Engineering Mechanics // Computing Systems in Engineering. 1990, Jan. Vol. 1. No. 1. Pp. 37–50.
14. Mihai Dupac, Claudiu-Ionut Popirlan. Web Technologies for Modelling and Visualization in Mechanical Engineering. 2010, April 1. DOI: 10.5772/9037
15. Gallagher R.S. Computer Visualization: Graphics Techniques for Engineering and Scientific Analysis. CRC Press, Solomon Press, 1994. 336 p.
16. Caha J., Vondráková A. Fuzzy Surface Visualization Using HSL Colour Model // Electronic Journal. 2017. Vol. 2. No. 2. Pp. 26–42.
17. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н., Романова В.А. Основы разработки и визуализации объектов аналитических поверхностей и перспективы их использования в архитектуре и строительстве // Геометрия и графика. 2017. Т. 5. № 4. С. 3–14.
18. Хейфец А.Л., Логиновский А.Н., Буторина И.В., Васильева В.Н. Инженерная 3D-компьютерная графика: учебник и практикум для академического бакалавриата. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2015. 602 с.
19. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCAD, AutoCAD. М.: АСВ, 2016. 412 с.
20. Кухарчук А.И., Романова В.А. Визуализация решения графических задач // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. 2014. № 1. С. 23–28.
21. Романова В.А. Визуализация образования поверхностей зонтичного типа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 3. С. 19–22.
22. Романова В.А. Формирование циклических поверхностей с образующей окружностью переменного радиуса в АВТОКАДЕ // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 3. С. 20–24.
23. Романова В.А. Особенности изображения процесса образования поверхностей в системе AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 3–5.
24. Романова В.А. Образование поверхностей Монжа кинематическим способом в среде AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 106–116. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-106-116>
25. Romanova V.A., Rynkovskaya M., Ivanov V. Automatic Modeling of Surfaces with Identical Slopes // Advanced Structured Materials. 2019. Vol. 92. Pp. 143–156. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-79005-3\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-79005-3_10)
26. Романова В.А. Визуализация правильных многогранников в процессе их образования // Геометрия и графика. 2019. Т. 7. № 1. С. 55–67. DOI: 10.12737/article\_5c91ff d0916d52/90296375

## Vizualizing of semi-regular polyhedrons in AutoCAD environment

Viktoryna A. Romanova

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation  
v.a.r-victoryna@mail.ru

### Article history:

Received: August 07, 2019

Revised: November 22, 2019

Accepted: November 29, 2019

### Abstract

The paper examines the automated formation by the kinematic method of the surfaces of Archimedes' semi-regular polyhedra of three forms: truncated tetrahedron, truncated octahedron and truncated icosahedron. To solve this problem, AutoCAD and the built-in programming language AutoLISP were used. Each of these five semi-regular polyhedra of Archimedes has faces of two kinds. In this regard, the surface of a separate polyhedron is considered to consist of two structural forms. Each structural shape is formed in the AutoCAD environment from the compartments of the surfaces of the faces of the polyhedron of the same type, and each compartment is assigned to a specific layer of the drawing. The formation of constructive forms is provided by user-defined functions developed in the functional programming language AutoLISP. User-defined functions not only form images of surfaces, but also perform all the necessary calculations. The electronic model of each polyhedron is formed by the union of its structural forms. A block is formed from it. The surface formation of each polyhedron performs user-defined functions that provide “freezing” of drawing layers intended for surface compartments, insertion of a block with an electronic model of the polyhedron, and sequential “defrosting” of drawing layers. When there is a “thawing” of the layers of the drawing, the process of forming a polyhedron is shown on the monitor screen. As a result of research software that includes user-defined functions for the formation of an electronic model of selected polyhedrons and visualization of the process of formation of their surfaces in a dynamic mode was created.

**Keywords:** semi-regular polyhedron; electronic model; design form; formation; truncated tetrahedron; truncated octahedron; truncated icosahedron

### For citation

Romanova V.A. (2019). Vizualizing of semi-regular polyhedrons in AutoCAD environment. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 449–457. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-449-457>. (In Russ.)

### References

- Alexandrov A.D. (2005). Convex polyhedra. Berlin, Springer. <https://www.springer.com/us/book/9783540231585>
- Koroyev Yu.I. (2015). *Nachertatel'naya geometriya [Drawing Geometry]*. Moscow, KnoRus Publ. (In Russ.)
- Ashkinuz V.G. (1957). O chisle polupravil'nyh mnogogrannikov [On the Number of Semi-Control Polyhedra]. *Mathematical Education*, 2(1), 107–118. (In Russ.)
- Savchenko V. (1979). Polupravil'nye mnogogranniki [Semi-controlled polyhedral]. *Quant*, (1), 3. (In Russ.)
- Smirnova I.M., Smirnov V.A. (2010). *Pravil'nye, polupravil'nye i zvezdchatye mnogogranniki [Correct, Semi-Control and Star Polyhedra]*. Moscow, MCNMO Publ. (In Russ.)
- Shchetnikov A.I. (2007). Luka Pacholi i ego traktat “O bozhestvennoj proporcii” [Luca Pacholi and his “On Divine Proportion”]. *Mathematical Education*, 1(41), 33–44. (In Russ.)
- Vasilyeva V.N. (2019). Gold section and gold polygons in the construction of icosahedron, dodecahedron and bodies of Archimedes based on them. *Geometry and graphics*, 8(2), 47–55. DOI: 10.12737/article\_5d2c1ceb9f91b1.21353054. (In Russ.)
- Alsina K. (2014). *Tysyacha granej geometricheskoy krasoty. Mnogogranniki [Thousand facets of geometric beauty. Polyhedra]*. Moscow, DeAgostini Publ. (In Russ.)
- Motulsky R.S. (2007). *Nacional'naya biblioteka Belarusi: novoe zdanie – novaya koncepciya razvitiya [National Library of Belarus: New Building – New Development Concept]*. Minsk. (In Russ.)
- Shishova A.B. (2015). Polupravil'nye mnogogranniki [Semi-controlled polyhedral]. *Concept*, (25), 191–195. <http://e-koncept.ru/2015/65341.htm>. (In Russ.)
- Ertskina E.B., Korolkova N.N. (2016). Geometric Modeling in Automated Design of Architectural Objects. *Geometry and Graphic*, 4(2), 48–54. DOI: 10.12737/19833. (In Russ.)
- Schroeder W., Martin K., Lorensen B. (2003). *The Visualization Toolkit*. Kitware, Inc.
- Haber R.B. (1990). Visualization Techniques for Engineering Mechanics. *Computing Systems in Engineering*, 1(1), 37–50.
- Mihai Dupac, Claudiu-Ionut Popirlan. (2010, April 1). *Web Technologies for Modelling and Visualization in Mechanical Engineering*. DOI: 10.5772/9037
- Gallagher R.S. (1994). *Computer Visualization: Graphics Techniques for Engineering and Scientific Analysis*. CRC Press, Solomon Press.

Viktoryna A. Romanova, Associate Professor of Department of Civil Engineering, Academy of Engineering.

16. Čaha J., Vondráková A. (2017). Fuzzy Surface Visualization Using HSL Colour Model. *Electronic Journal*, 2(2), 26–42.
17. Ivanov V.N., Krivoschapko S.N., Romanova V.A. (2017). Bases of development and visualization of objects of analytical surfaces and the prospect of their use in architecture and construction. *Geometry and graphics*, 5(4), 3–14. (In Russ.)
18. Heifetz A.L., Loginovsky A.N., Butorina I.V., Vasilyev V.N. Vasil'eva V.N. (2015). *Inzhenernaya 3D-kompyuternaya grafika: uchebnik i praktikum dlya akademicheskogo bakalavriata [Engineering 3D computer graphics: textbook and workshop for academic baccalaureate]*. Moscow, YuRAYT Publ. (In Russ.)
19. Ivanov V.N., Romanova V.A. (2016). *Konstrukcionnye formy prostranstvennykh konstrukcij. Vizualizaciya poverhnostej v sistemah MathCad, AutoCad [Constructive forms of space constructions. Visualization of the surfaces at systems MathCAD, AutoCAD]*. Moscow, ASV Publ. (In Russ.)
20. Kukharchuk A.I., Romanova V.A. (2014). Visualization of the Solution of Graphic Problems. *RUDN Journal of Engineering Researches*, (1), 23–28. (In Russ.)
21. Romanova V.A. (2014). Visualization of surface formation of umbrella type. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (3), 19–22. (In Russ.)
22. Romanova V.A. (2016). Generation of cyclic surfaces with generating circle of variable radius in AUTOCAD. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (3), 20–24. (In Russ.)
23. Romanova V.A. (2012). Features of the image of the process of surface formation in the AutoCAD system. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (4), 3–5. (In Russ.)
24. Romanova V.A. (2019). Formation of Monja surfaces by kinematic way in the environment AutoCAD. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 106–116. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-106-116>. (In Russ.)
25. Romanova V.A., Rynkovskaya M., Ivanov V. (2019). Automatic Modeling of Surfaces with Identical Slopes. *Advanced Structured Materials*, 92, 143–156. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-79005-3\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-79005-3_10)
26. Romanova V.A. (2019). Visualization of regular polyhedrons in the process of their formation. *Geometry and graphics*, 7(1), 55–67. DOI: 10.12737/article\_5c91ffd0916d52/90296375. (In Russ.)

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-458-469  
UDC 626.624.04

RESEARCH PAPER

### Reliability and applicability of modern numerical analyses of dams

Yury P. Lyapichev<sup>1\*</sup>, Guido Mazza<sup>1,2</sup>, Enrique Mateu<sup>1</sup>, Gerald Zenz<sup>1,3</sup>, Alain J. Carrère<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup>International Commission on Large Dams, 61 Avenue Kleber, Paris, 75016, French Republic

<sup>2</sup>Politecnico di Milano, 32 Piazza Leonardo da Vinci, Milano, 20133, Italian Republic

<sup>3</sup>Graz University of Technology, 12 Rechbauerstraße, Graz, 8010, Republic of Austria

<sup>4</sup>Tractebel Engineering SA, Le Delage, 5 rue du 19 mars 1962, Gennevilliers Cedex, 92622, French Republic

\*lyapichev@mail.ru

#### Article history:

Received: August 12, 2019

Revised: October 17, 2019

Accepted: November 24, 2019

#### Abstract

**Relevance.** At present the application of numerical analyses to real problems of dam engineering has suffered at times from the gaps between the specialists of mathematical modeling and dam engineers and managers. The first group usually includes information system specialists because they are able to develop the computer models to their full potential. The professionals belonging to the second group often prefer to revert to traditional methods of calculation and empirical methods based on their proven experience. **The aim of the work** – based on recommendations of International workshops seminars, organized by the ICOLD Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design, help dam engineers to interact with mathematical modeling specialists and to work with them without language barriers or gaps in knowledge. In this relation the assessment of reliability and applicability of numerical analyses of dams allows engineers to develop the optimal dam design. **Methods.** Assessment of the reliability of numerical methods of analyses of dam behavior was based on data of 10 International benchmark-workshop seminars, organized by the Committee in Italy (1991 and 1992), France (1994 and 2009), Spain (1996), USA (1999), Austria (2001), Romania (2003), China (2005), Russia (2007), in which specialists of these countries also took part.

**Keywords:** reliability index; numerical models and analyses; static, seismic and hydraulic behavior of the dam

#### For citation

Lyapichev Yu.P., Mazza G., Mateu E., Zenz G., Carrère A.J. (2019). Reliability and applicability of modern numerical analyses of dams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 458–469. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-458-469>

### Introduction

ICOLD Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design published in 2013 Bulletin

**Yury P. Lyapichev**, Doctor of Technical Sciences, member of ICOLD Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design Professor; Expert of JSC “Hydroproject Institute” for foreign projects; eLIBRARY SPIN-code: 372720.

**Guido Mazza**, Doctor of Philosophy, Chairman of ICOLD Committee on Computational aspects of Dam Analysis and Design; Expert of Italian Center on Dam Safety; Scopus ID: 7102002973.

**Enrique Mateu**, Doctor of Philosophy, member of ICOLD Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design; Expert of U.S. Department of Homeland Security.

**Gerald Zenz**, Doctor of Philosophy, Vice-Chairman of ICOLD Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design; Head of Department of Management, Institute of Hydraulic Engineering and Water Resources Management.

**Alain J. Carrère**, Doctor of Philosophy, member of ICOLD Committee on Selection of Dam Type; Director (Science and Technology) of Coyne et Bellier (now – Tractebel Engineering); Scopus ID: 6603411275.

© Lyapichev Yu.P., Mazza G., Mateu E., Zenz G., Carrère A., 2019  
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



155 “Guidelines for use of numerical models in dam engineering” [1]. This Bulletin is a continuation of Bulletin 122 “Reliability and applicability of computational procedures for dam engineering” [2], published in 2001.

Assessment of the reliability of numerical methods of analyses of dam behavior was based on data of 10 International benchmark-workshop seminars, organized by this Committee in Italy (1991, 1992), France (1994, 2009), Spain (1996), USA (1999), Austria (2001), Romania (2003), China (2005), Russia (2007) [3], in which 5 authors and some other Committee members took part [4–12].

Each seminar bore working character: specialists from many countries could check and compare their software programs of numerical analyses (mainly by finite element method) and models of materials in four

different themes of important aspects of static and seismic behavior of dams (by two themes for embankment and concrete dams). Results of many analyses were compared with the monitoring data of behavior of real dams. The same numerical model, used for the simulation of given aspects of dam behavior, can be relatively reliable for different periods of its service: construction, initial filling of reservoir and operation and for different types of dams.

### ***Reliability and applicability of modern numerical analyses of dams***

Numerical modeling of main aspects of behavior of concrete and embankment dams under action of static, seismic and hydrodynamic loads is analyzed. On the basis of 10 International seminars on numerical analysis for dams the assessment of computer programs of numerical analysis (by the finite elements method) concrete and embankment dams and recommendations for choice of mathematic models for their materials are given. The classification and recommendations are given for the choice of mathematic models of soils and concrete for the numerical analyses of the stress-strain state of embankment and concrete dams and their foundations. These recommendations are included in Bulletin 122 of the International Commission on Large Dams (ICOLD) “Reliability and applicability of computational procedures for dam engineering”, prepared for dam professionals throughout the world.

In the following paragraph with reference to dam typology and to different periods of dam life, the capability of numerical modelling to analyze phenomena related to dam safety is shown. In fact, the same model used to analyze a definite phenomenon can be reliable during the various periods of life of a dam (construction, first fillings, operation) or for the various dam types. Four numerical indices (1, 2, 3, 4), defined Reliability Indices (RI), are adopted whose meaning is as follows:

RI = 1 – the phenomena related to dam safety can be confidently analyzed by numerical models;

RI = 2 – the phenomena related to dam safety can be analyzed by means of numerical models but:

– with some limitations and/or difficulties (simplifications in the computational hypotheses;

– lack or difficulty to get fully reliable experimental data, relevant cost of the analyses, etc.);

RI = 3 – the phenomena related to dam safety can be analyzed by means of numerical models, whose results can give only qualitative or comparative indications, e.g. because of the strong simplifications needed, etc.;

RI = 4 – the phenomena related to dam safety cannot be analyzed by means of numerical models.

In general, only one index is used for each item *phenomenon-dam life period*. In some cases, more indices are used if the reliability of numerical modelling is considered different for various dam types.

In the following paragraph capital letters have been used in this way: C – Concrete; E – Embankment; S – Static; D – Dynamic; H – Hydraulic.

For various dam types and their behavior aspects (CS, CD, CH, ES, ED) matrices are given  $[i, j]$ , where  $i$  – number of the given aspect of dam behavior (in the order of its significance for dam safety) in the given its life period:  $j = 1$  (construction),  $j = 2$  (first filling of reservoir),  $j = 3$  (operation).

## **1. Concrete dams – static behavior**

### ***1.1. Stress-strain state***

CS [1,1], RI = 2. *Construction phase*

Numerical methods and procedures are available for simulation of the construction phases for all dam typologies. Difficulties arise from:

a) complexity of the phenomena occurring during these phases, such as concrete setting, hardening and shrinkage (consequent stresses produce cracks and affect the stress-strain-state);

b) deformability of rock foundation, which is influenced by non-homogeneities of massive rock and by presence of potential sliding faults whose parameters of mathematical model is a very difficult task;

c) the prediction of temperature changes in early age concrete due to the heat of hydration. The influence of many variables, i.e. amount and type of cement used for the concrete mix, thickness of lifts, time interval between lifts, different height of blocks, external temperature condition, should be more deeply known. Therefore, the early age volumetric changes and crack-producing tendencies cannot be analyzed in a completely reliable way with available numerical models;

d) lack of information about construction joints grouting. Contraction joints can be grouted for arch dams to form monolithic structure. In this case grouting causes pre-loading condition, that is unknown.

Reliable numerical analyses (i.e. software codes and adequate experimental-numerical validation researches) of stress-strain state in the construction phases have been set up recently.

In most cases the evaluation of the aspects mentioned under points *a* and *c* is still based on practical experience which however has shown to be not sufficient to avoid the cracking problems. The monitoring practice of placing many thermometers and thermoextensometers in the concrete mass during casting has been in use for many decades; unfortunately, in most cases, the relevant measurement data (besides being

too local in the case of thermo-extensometers) are not complemented with the detailed additional information about construction history.

CS [1,2], RI = 2. *First filling of reservoir*

The approximation level of numerical simulation for the first filling is due to lack of information on permeability of rock foundation and concrete, which could affect foundation deformability parameters.

Difficulties also arise from non-linear phenomena induced in the dam-foundation system by the progressive increase of the hydraulic loading (settlements, creep, joints displacements). In particular:

a) consolidation, whose parameters are in general not completely known, should be taken into account to predict settlements during construction and causing stresses in dam and foundation;

b) under applied loadings the rock continues to deform (creep). The deformation characteristics of foundations are significantly influenced by the density, orientation, width and contact condition of joints and cracks of loaded rock surfaces. All this quantity is generally not known in complete way;

c) permeability of the foundation rock can affect significantly the stress-strain state, particularly in gravity dams. The permeability of the foundation including joints, fault zones and cavities is needed to determine pore pressures for analyses of stresses and stability. If foundation grouting, drainage or other treatments are involved, their effect on pore pressure distribution should be included.

The above described features affecting the approximation level of the computations are taken into account in the design phase, on the basis of the experience and of qualitative evaluations, mainly in the design of the foundation treatments, in the definition of the first filling program and in the design of the monitoring network. Usually an extensive and careful monitoring is also carried out to check the dam and foundation behavior in this delicate phase; many monitoring instruments are installed for this purpose only, and are abandoned after the successful completion of the first filling phase.

CS [1,3], RI = 1. *Operation phase*

Numerical models can be considered completely reliable because the data obtained by means of the monitoring of the dam can allow to establish good identification of dam-foundation-reservoir system.

### 1.2. Local and global stability related to cracking state

CS [2,1] = CS [2,2], RI = 3. *Construction and first fillings phases*

The approximation level is due to the combination of what described in notes 1.1 together with the difficulties for a fair characterization of the crack formation and propagation process.

CS [2,3], RI = 2. *Operation phase*

The numerical simulation of the dam behavior during operation could be facilitated by the knowledge of the observed performances during the previous phases of its life, allowing to remove some of the uncertainties affecting the construction and the first filling phases. The main difficulties arise from inadequacy of numerical models and lack of experimental evidences. In particular:

a) in analyzing concrete structures with realistic constitutive models, difficulties lie in the fact that uniqueness and stability of the solutions are guaranteed only below certain load levels. This means that the numerical algorithms should be very accurate otherwise numerical errors may easily trigger potential instabilities leading to an underestimation of the failure loads;

b) further difficulties are connected with fracture testing. The most important problem is the uncertainty of the reproducibility for the crack propagation phenomenon varying the shape and/or the size of the cracked structure. It is still not completely clear how far it is possible to extrapolate the laboratory results to the structure of large sizes and complex shapes. Consequently, the available mathematical models have not been sufficiently validated.

Significant cracks are usually checked in the surveillance. In addition to periodic visual inspections, instruments are installed to monitor the crack opening displacement of the main cracks. The direct monitoring of crack is necessary, because often crack propagation has little influence on measured integral quantities (crest displacements), unless cracking has not reached very significant extension.

### 1.3. Sliding and overturning

CS [3,1] = CS [3,2] = CS [3,3], RI = 1. *Construction, first fillings and operation phases*

In spite of the simplicity of the methods usually adopted (limit equilibrium analyses with reference to rigid body formulation) they have been proved generally reliable. Nowadays numerical methods can also be adopted; such methods are able to overcome the limitations of a rigid body formulation that cannot give any information about strains and displacements at a state close to failure.

### 1.4. Instability of slopes or blocks

CS [4,1] = CS [4,2] = CS [4,3], RI = 2. *Construction, first fillings and operation phases*

In this case material properties and geotechnical data can be of difficult (or expensive) evaluation.

### 1.5. Seepage

CS [5,2] = CS [5,3], RI = 2. *First fillings and operation phases*

The approximation level is mainly due to the non-homogeneity of the rock mass and to the difficulties in defining a computational scheme for a reliable evaluation of the phenomenon. The difficulty to model the foundation treatments (grouting, drains, etc.) and the strong coupling between permeability and stress state in jointed rock mass can reduce the reliability of numerical results.

Anyway, even for dams on sound rock foundations, grout curtains and drainage systems are built as preventive measures apt to limit the seepage and relevant pore water pressures. The check of the proper functioning of drainage and water-tightness systems is usually included in the surveillance activities. The complexity of the analyses still remains mainly because of the difficulty to define material properties (permeability as a function of the stress-strain state).

### **1.6. Ageing, alkali-aggregates reactions and similar phenomena**

CS [6,3], RI = 3. *Operation phase*

For such phenomena, numerical analyses can be used only for qualitative evaluations, or to estimate the order of magnitude of some effects. For dams under design, the current knowledge allows to prevent the onset of such problems by means of proper choice and control of aggregates and cement type.

For existing dams alkali-aggregate reactions and ageing of materials can be detected through in situ and laboratory tests. No direct numerical modelling of the phenomena are available. However the effects due to alkali-aggregates reactions can be, for instance, evaluated by means of equivalent thermal analyses whereas the ageing can be simulated assuming a suitable progressive variation of physical-mechanical parameters (stiffness, permeability, etc.); also the effects of remedial measures, such as diamond wire cutting, can be evaluated by means of suitable numerical models.

## **2. Concrete dams – dynamic behavior**

### **2.1. Stress-strain state**

CD [1,1] = CD [1,2] = CD [1,3], RI = 2. *Construction, first fillings and operation phases*

The modelling of the dynamic loads introduces additional approximations compared to static analysis. In fact, for dynamic analysis some aspects need to be better highlighted. In particular:

a) the effect on strength and elastic properties of materials under dynamic loads, which alternate between tension and compression, have not been fully investigated. The elastic modulus of concrete, as well as the yield limit, varies with the rate of application of loads (e.g., the instantaneous modulus of elasticity and the strength of concrete can be more than 1.5 times the static modulus);

b) in concrete, stress-strain relationship exhibits a softening behavior when the tensile strength is exceeded. The capability of concrete to dissipate additional energy before complete failure may play an important role with regard to seismic action where the dam structure has to absorb energy arising from ground motion. Appropriate models of these aspects have not yet completely been attained;

c) In the mathematical reproduction of dynamic behavior of dams a difficulty is originated by the need of a suitable modelling of the energy dissipation mechanism through dam-rock-reservoir system;

d) the incidence of floating debris on structural stability during floods and the ice-structure interaction (pseudo-static thrust and dynamic impact) have to be also taken into account in particular situations. Consequently, the approximation index 2 has been assigned to the dynamic analyses independently from the phase of life of the dam. However, for dams in operation, when data related to the seismic behavior are available (e.g. when a seismic monitoring system is installed on the structure or when forced vibration tests have been carried out), a Reliability Index RI = 1 could be assumed.

### **2.2. Local and global stability related to cracking state**

CD[2,1] = CD[2,2] = CD [2,3], RI = 3. *Construction, first fillings and operation phases*

Experiments under simulated seismic action should be performed to investigate fracture properties under dynamic loadings. The literature indicates that both tensile and compressive strength of concrete increases with increased strain rate; but tensile strength is more rate sensitive. The safety assessment of concrete dams when subjected to earthquakes strongly depends on the tensile and cracking behavior of the material. The assumptions regarding the incidence of water-crack interaction on the transient evolution of uplift pressures acting in cracks during earthquakes, that vary widely among dam safety guidelines (from zero, to the full reservoir crack mouth pressure), still remain an open problem even for static behavior. See, also, for applicable part, note relevant to 2.1.

### **2.3. Sliding and overturning**

CD [3,1] = CD [3,2] = CD [3,3], RI = 2. *Construction, first fillings and operation phases*

See also for applicable part notes relevant to 1.3 and 2.1.

### **2.4. Instability of slopes or blocks**

CD [4,1] = CD [4,2] = CD [4,3], RI = 3. *Construction, first fillings and operation phases*

See for applicable part notes relevant to 1.4 and 2.1.

### 3. Concrete dams – hydraulic behavior

#### 3.1. Cavitation

CH [1,1] = CH [1,2] = CH [1,3], RI = 2. *Construction, first fillings and operation phases*

Numerical models for simulation of free surface flow over spillways are currently available. They can give sufficient information about pressures distribution on dam downstream face. Some limitations occur in presence of pressure pulsations due to development of turbulent boundary layer. In this case more advanced numerical models should be used. Small physical models are used for the problem.

#### 3.2. Erosion

CH [2,1] = CH [2,2] = CH [2,3], RI = 3. *Construction, first fillings and operation phases*

With reference to analysis of flow velocities on dam face and to solid material content (incidence of floating debris on hydraulic response of dams and spillways) numerical models can supply useful information. For assessment of erosion it is necessary to resort to correlations with experimental data.

#### 3.3. Dislocation of paving slabs of spillways

CH [3,2] = CH [3,3], RI = 4. *First fillings and operation phases*

Presently such phenomena, due to pressures pulsation when the spillway is in operation, can not be modeled mathematically, but reduced scale physical models can be used.

#### 3.4. Extreme flood

CH [4,1] = CH [4,2] = CH [4,3], RI = 1. *Construction, first fillings and operation phases*

The evaluation of extreme floods is a classical problem in hydrology and several methods are currently applied which can vary from country to country because of the different traditions and type of data available. It can be said that the methods are generally simple to apply and the accuracy of results mainly depends on the availability and reliability of long sets of historical data on past extreme events. At any rate this is a topic of interest of the Committee on Dams and Floods. Once the extreme flood has been evaluated, the numerical simulation of discharge is considered fully reliable (RI = 1).

#### 3.5. Downstream heel erosion

CH [5,2] = CH [5,3], RI = 4. *First fillings and operation phases*

In general this kind of problem, which can be included in local scour phenomena, is dealt with by means of reduced scale physical models.

### 3.6. Siltation

CH [6,3] = 2, RI = 2 (for coarse sediments), RI = 3 (for fine sediments). *Operation phase*

The sediments are subdivided in different classes and appropriate equations are applied to each class. A distinction is made between very fine sediments, such as silt and clay which constitute and coarser sediments, such as sand and gravel which form the bed load and suspended load. Mathematical models of coarse sediments have been extensively applied and the experience developed in their use have reached sufficient degree of reliability for practical purposes. It is strongly advisable to collect as many field data on the past evolution as possible in order to best calibrate the model parameters on the particular case under study. Therefore RI given to the first set of models of coarse sediments evolution is 2. Referring to dynamics of very fine sediments the different processes that can occur are more complicated and not fully understood. The available mathematical models have not been extensively applied so that there is little experience in their use and little knowledge on their degree of reliability.

### 4. Embankment dams – static behavior

#### 4.1. Stress-strain state

Currently the most frequently used mathematical models for the analysis of embankment dams are essentially numerical ones of finite element method type. Usually the applied models depend on the type of embankment dam. An analysis in total stresses is satisfactory for rockfill dams with cement or bituminous concrete face. For clay core rockfill dams or permeable earth dams the analysis in effective stresses is strictly recommended. In the last years advanced computer codes have become available, which allow to perform coupled solid-fluid analyses. In the latter case the analysis is always performed in effective stresses and excess pore pressure is one of the field variables (this being a transient type analysis based on integration in the time domain short term response becomes a result of computation).

The constitutive models that are usually adopted to model the behavior of both the solid skeleton and the interstitial pore fluid differ depending on whether an uncoupled or a coupled analysis is performed. In the following a list of the more frequently used models is reported.

The detailed classification and selection of constitutive models of soils for embankment dam analysis was given in Appendix 2 [4] in ICOLD Bulletin 122. This classification is meant to help the practising engineer to identify those models which are of relevance in a particular situation. The brief description of principal models is given below.

*Hyperbolic Duncan – Chang model* [13]. This model provides quite often acceptable results as it allows to follow in satisfactory way the non-linear behavior of the material. The main characteristic of this model is that the deformation modulus is a function of both the isotropic and deviatoric stresses during monotonic loadings, like those occurring during the construction phases of an earth dam.

*Elastic perfectly-plastic models* (Von Mises, Mohr – Coulomb, Drucker – Prager, etc.). Usually it is necessary to use these models with a non-associated flow rule, since they would otherwise produce quite unrealistic dilatant effects.

*Hardening elasto-plastic models.* Isotropic, kinematic, isotropic-kinematic hardening rules with hardening due to plastic volumetric and shear strains give rise to these models of varying complexity. The Critical State (CS) model [14], models of Lade [15], Prevost [16] and Zaretsky [17] are a few examples in this category. The well-established CS model (modified Cam Clay model) is the basis of 30 models proposed for monotonic and cyclic loads. The use of such models is the conceptually correct.

*Elasto-viscoplastic models.* Post-constructional settlements of earth and, especially, rockfill dams are controlled by creep or time-dependent plastic strains of soils and rockfill. Due to the wet clay cores delayed consolidation is observed and the post-constructional performance of these dams is controlled more by creep than by primary consolidation. Neither the assessment of cracking in the clay cores nor the safe design of the concrete upstream facing can be carried out without taking creep into account.

ES [1,1], RI = 2. *Dam body – construction phase*

In most of the cases the excess pore pressure could be neglected in this phase; according to this, analyses of uncoupled type give acceptable results. However, it should be considered the possibility of saturation of the core during the construction phase for zoned embankment dams. In these cases it is necessary to analyze the consolidation phenomenon through a coupled analysis.

ES [1,2] = 1, RI = 2, RI = 1. *Dam body – first filling of reservoir*

The partial reliability (RI = 2) of this analysis arises from difficulty of predicting propagation of the saturation line and wetting collapse phenomena which take place during first saturation of materials; the difficulty of determination of reliable parameters makes the analysis not completely satisfactory. Only for embankment dams with the upstream facing these aspects could be not so important (RI = 1).

ES [1,3], RI = 1. *Dam body – operation phase*

The analysis of the operation phase conditions is more complex in the case of types *a, b, d*, embankment

dams. This is due to the importance of transient hydraulic effects during rapid drawdown of the reservoir which are difficult to be modelled and also to the difficulty to define representative parameters to be included in uncoupled analyses. It is then necessary to perform coupled type analyses for a proper modelling of the operation phase. For any type of embankment dam a better reliability in the predictions could be obtained through back-analysis of the dam behavior in the preceding phases.

ES [2,1] = ES [2,2] = ES [2,3], RI = 2. *Foundation – construction, first filling and operation phases*

See for applicable parts ES [1,1], ES [1,2] and ES [1,3].

#### 4.2. Stability

ES [3,1] = ES [3,2] = ES [3,3], RI = 1. *Dam body – construction, first filling and operation phases*

Global stability analyses are usually performed using both the limit analysis and limit equilibrium methods with the soil modelled as rigid, ideally plastic medium. Such methods provide measure of the distance among the stress states present in the operating life and those which correspond to different hypothetical failure mechanisms. In this case the observation of the dam behavior does not allow the validation of the results of analyses, but the professional practice has brought to adoption of safety coefficients for various failure mechanisms which are considered suitable to guarantee the safety.

For application to dams, a two-dimensional model is often sufficient to give acceptable results. In some cases, it is necessary to perform three-dimensional analyses; also in this case specific computer codes are available. A correct analysis should take into consideration, especially for the case of rockfill materials, the non-linearity of the shear strength curve as a function of the normal stress.

In some situations, the analysis of embankment dams could be integrated with stress-strain analyses (elastic-plastic) of assumed failure: such analyses could highlight phenomena of stress redistribution among the different zones of embankment as well as mechanisms of progressive failure. The analysis of embankment dams stability developed with the above mentioned techniques requires the evaluation of the pore pressure distribution through the fill; in the conditions of rapid draw-down the evaluation of pore pressures could be less reliable with respect to those evaluated in the steady state conditions.

ES [4,1] = ES [4,2] = ES [4,3], RI = 2. *Foundation, abutments, slopes – construction, first filling of reservoir and operation phases*

The analyses concerning the dam foundation or the slopes in the reservoir zone present greater uncer-

tainties (with respect to analyses of dam body) because of the difficulty to ascertain in complete way the mechanical properties of the soils and hydraulic conditions in the subsoil.

As far as the hydraulic conditions are concerned, the models for the forecasting of the piezometric level changes in the shells or banks, in consequence of the precipitations and of the oscillations of the level of the reservoir, are still not completely reliable (particularly in conditions of rapid draw-down).

As for the dam body the global stability analysis involves in general the use of the limit equilibrium methods. In many cases the problem must be treated as three-dimensional ones. It could be sometimes necessary to extend the limit equilibrium analysis with more complete stress-strain analysis: for example when the conditions of flow through the rock/soil mass have been altered by the stress state induced by the dam or if the possibility of phenomena of progressive failure exists.

#### 4.3. Seepage

Seepage analyses are usually of uncoupled type that is they do not take into consideration the stress-strain aspects (consolidation, compaction of materials, modification of permeability characteristics). Depending on the problem to be solved, both steady state or transient type analyses can be performed.

ES [5,2] = 2, ES [5,3], RI = 1. *Dam body – first filling of reservoir and operation phases*

The seepage analysis should not be all-important for embankment dams with facing. As already said analysis of situation during the first impounding presents greater complexity due to phenomena of saturation of materials. In operating life, the greater difficulty concerns conditions of rapid draw-down.

ES [6,1] = ES [6,2] = ES [6,3], RI = 2. *Foundation – construction, first fillings and operation phases*

The lesser reliability of results of the analyses is due to the difficulty in determining representative values and distribution of permeability by means of in situ tests; a particular case is represented by the Karst-formations. In some particular situations (permeability related to presence of joint systems) the influence on permeability of the stress state changes induced by construction of the dam is remarkable, but very difficult to be assessed quantitatively. Further uncertainties are introduced when a diaphragm wall or a grout cut off (with their possible defects) and the presence of the drains is to be modelled.

#### 4.4. Internal erosion

ES [7,2] = ES [7,3] = ES [8,1] = ES [8,2] = ES [8,3], RI = 4. *Dam body and foundation – construction, first filling of reservoir and operation phases*

The problem is very important for zoned embankment dams, but it could be of some relevance also for the homogeneous earth dams; it seems that it can be excluded for the dams with facing, unless the consequences of a break of the facing are to be analyzed. At present, during the design phase of an embankment dam, the available procedures to prevent internal erosion are based on filter criteria. In recent years many different criteria have been established for filter design: ICOLD Bulletin 95 [9].

During construction, segregation of graded materials should be avoided, since it may itself create conditions susceptible to internal erosion in the core. Particular care is needed to guarantee continuity of junctions and homogeneity within the embankment and as much as possible in the foundation soils.

Since the leakage development and erosion cannot be prevented consequences of leakage has to be handled in order to maintain sufficient safety. In order to fulfil this requirement, the strict monitoring and investigation systems for localizing deteriorated or potentially weak zones is recommended. Quantities as water losses, turbidity of water losses, pore pressures, deformations, etc. should be monitored.

#### 4.5. Hydraulic fracturing

ES [9,2] = ES [9,3] = ES [10,1] = ES [10,2] = ES [10,3], RI = 3. *Dam body, foundation – construction, first filling of reservoir and operation phases*

The phenomenon has been conventionally related to the event that in one or more zones of dam the minor principal stress becomes lower than pore pressure. Back-analyses carried out on embankment dams that experienced big problems of concentrated seepage have pointed out cause of such seepage in the hydraulic fracturing developed in the upper portions of the fill. In fact, due to the arching effect, in the upper part of the dam total vertical stresses can become lower than the pore pressure induced by the reservoir. The phenomenon of hydraulic fracturing cannot be *a priori* excluded for homogeneous earth dams, but probability of occurrence is higher for zoned embankment dams or in dams which present strong differences of deformability or permeability characteristics in different parts of dam.

### 5. Embankment dams – dynamic behavior

The level of difficulty of dynamic analyses for the forecasting of the embankment dams behavior under seismic conditions is higher with respect to the correspondent static analyses.

The reduced reliability can be attributed to greater difficulty in defining load conditions in analysis and to major uncertainties about a series of factors among which the most important are the following:

a) the difficulty to define, isolate and also to model the reflecting/absorbing boundaries of analysis domain (this is also valid for concrete dams);

b) the interaction of dam with foundation soil; in case the relatively soft subsoil it modifies greatly the seismic dam response with respect to the case of relatively rigid subsoil. It is of the importance to detect within saturated alluvium foundation the event of low density and low mechanical characteristic layers, but it remains really difficult to achieve the determination of those parameters. The incidental uncertainties on definition of foundation soils properties affect predictions of dynamic dam behavior;

c) the dependence of mechanical properties that determine the seismic response from static stress-strain state existing at the time of seismic action. These conditions are defined through preceding static analysis with consequence that uncertainties are reflected directly on reliability of dynamic analysis.

For the evaluation of the response of embankment dam to earthquake excitation, during and after the seismic action, the analysis of the stress-strain state constitutes the basis of any prediction. The global stability, liquefaction potential, the behavior after seismic action, the phenomena of concentrated seepage, the hydraulic fracturing, etc. can in fact be faced with pseudo-dynamic approaches, taking adequately into account the results of the seismic analysis of the embankment dam and its foundation.

On the other hand, it should be emphasized that, even if widely used conventional pseudo-static methods are not capable to take into consideration some important phenomena such as amplification effects, residual excess pore water pressures after seismic actions, liquefaction, stress redistribution. However, the interaction of dam with reservoir does not significantly modify frequency response of embankment. The following considerations are restricted to evaluation of stress-strain state.

### 5.1. Stress-strain state

ED [1,1] = ED [1,2] = ED [1,3], RI = 3. *Dam body and foundation – construction, first filling of reservoir and operation phases*

*Modelling typologies.* It is well known that analyses carried out by means of a linear constitutive model are incomplete, unless low intensity seismic events are considered. It is thus taken for granted that uncoupled, or better, coupled time-history analyses must be used, but in any case with non-linear constitutive models using step integration or, at least, the equivalent linear approach; the latter in fact shows itself to be sufficiently adequate for maximum acceleration, stresses and strains evaluation, but evidently inadequate to estimate permanent stress-strain phenomena. In dynamic analyses, both uncoupled and coupled with non-linear constitutive models, the main difficulty lies in introducing constitutive models which

are capable to reproduce satisfactorily, under dynamic cyclic loads, the following aspects:

a) the stress-strain response corresponding to load pattern inversions, many models tend to amplify the hysteresis, compared to what is found experimentally;

b) the dissipative behavior of dam-foundation system arising from plastic deformations and viscous phenomena (this has been confirmed from experiments and workshop seminars of our Committee);

c) phenomena of cyclic degradation (variability of stress-strain law with growth of cycles number);

d) phase coupling effects (a correct prediction of excess pore pressures build up is fundamental not only for maximum acceleration forecast, but also to evaluate post seismic effects).

For all the above mentioned reasons, it is not to be taken for granted that the coupled analyses, with the use of elasto-plastic models, are more reliable than the uncoupled ones in terms of total stresses, given that the latter are provided with criteria for excess induced pore pressures predictions.

The border-line of present modelling is represented by three-phase medium to simulate behavior of partially saturated soils. It has been recently demonstrated that effect of variability of core material saturation degree shows great influence on stress-strain response under cyclic loads. However, it is right not to cross border-line of two-phase medium, provided that constitutive parameters are correctly evaluated. Difficulties in modelling mechanical behavior under seismic loads are greater for homogeneous and zoned dam but they are also highly sly for rockfill dam, the more for loose material is loose.

*Parameters definition and assumption.* If the dam is in highly seismic area, material properties are determined by experiments, which are: dynamic in situ tests, laboratory tests (on core materials and if it is important, on foundation materials).

These tests supply deformability parameters with the accuracy requested by the methods of analysis. Less reliable is forecast of deformability parameters to be introduced in static analyses. These are in fact hardly deducible from in situ geotechnical tests, and show themselves to be of poor reliability when obtained from conventional laboratory tests (triaxial ones), not suited to the characterization of behavior at different deformation levels relevant to various life conditions of the dam. As concerns the damping ratio to be introduced both in linear equivalent and non-linear analyses, it is now widely demonstrated that gross estimations of this parameter induce high result dispersions. This is further complicated by the remarkable variability of damping capabilities of cores in connection with excitation frequencies and confining stresses.

*Heterogeneities, boundary conditions, geometrical factors.* These factors appear relatively less important in amplifying intensity of seismic event. For strong-motion events physical-mechanical factors connected to non-linearity of the materials constitutive law are of great importance. On the contrary, when the analysis can be carried out with linear models (weak-motion events), factors such as geometrical variability of properties, subsoil stiffness, the valley morphology, the height/length ratio of the embankment, gain a decisive role in response evaluation.

**5.2. Post seismic internal erosion**

ED [8,2] = ED [8,3] = ED [9,1] = ED [9,2] = ED [9,3], RI = 4. *Dam body and foundation – first filling of reservoir and operation phases*

Since the post seismic internal erosion cannot be prevented or anticipated, in order to maintain a sufficient level of safety the installation of an appropriate monitoring system is strongly recommended. Quantities such as deformations, pore pressures, water losses and its turbidity should be measured.

**6. Embankment dams – hydraulic behavior**

Hydraulic phenomena considered in embankment dams are practically the same as those in concrete dams

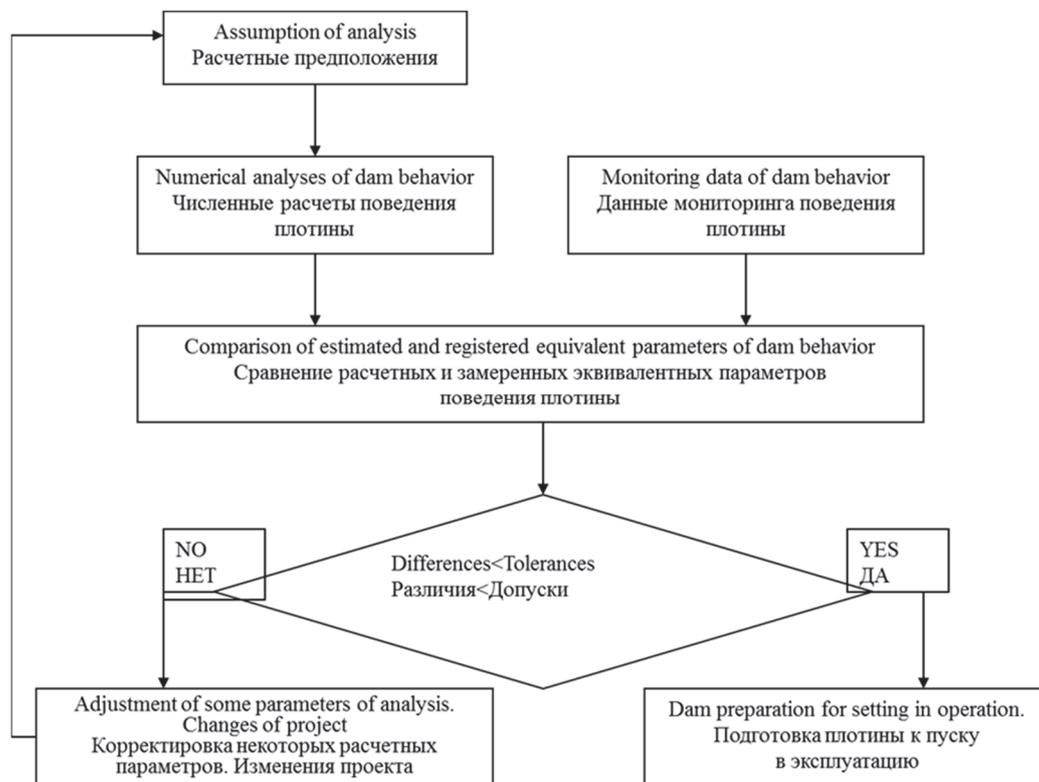
(also the relevant indices are the same for the same phenomena). See notes of paragraph 4.3.

**Conclusions**

It appears useful here to briefly summarize problems related to safety that do not seem at present approachable in a reliable manner by means of mathematical models (RI 3 and 4).

*Concrete dams:*

- local and global stability related to cracking state in construction, first filling (static and dynamic behavior, RI = 3) and in operation (dynamic behavior, RI = 3);
- damage due to ageing, alkali-aggregate reactions (only static behavior, RI = 3) and dissolution due to seepage (only static behavior, RI = 4);
- instability of slopes or blocks in construction, first filling, operation (dynamic behavior, RI = 3);
- erosion of outlets during construction, first filling and operation (hydraulic phenomena, RI = 3);
- dislocation of spillway paving slabs in first filling and operation (hydraulic phenomena, RI = 4);
- downstream heel erosion of dam in first filling and operation (hydraulic phenomena, RI = 4).



**Figure 1.** Interaction between monitoring data and numerical modelling of dam behavior before the first reservoir filling

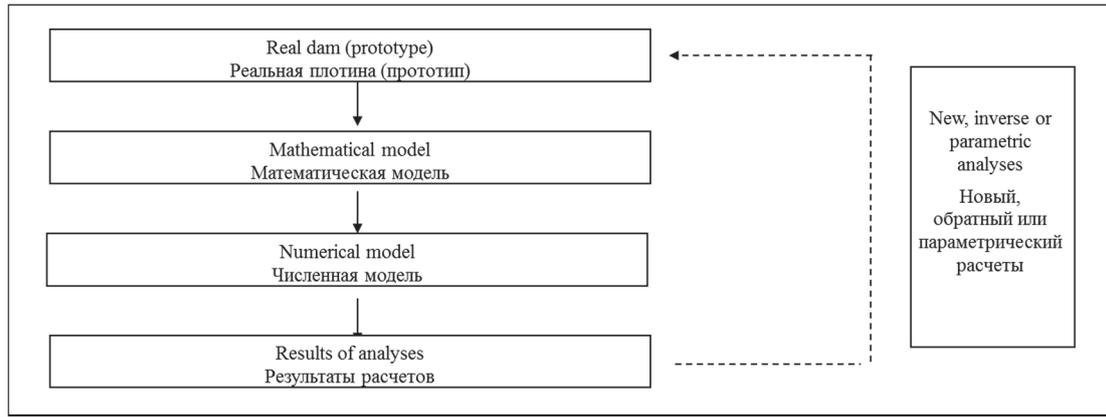


Figure 2. Four stages of numerical modelling of dam behavior during its construction

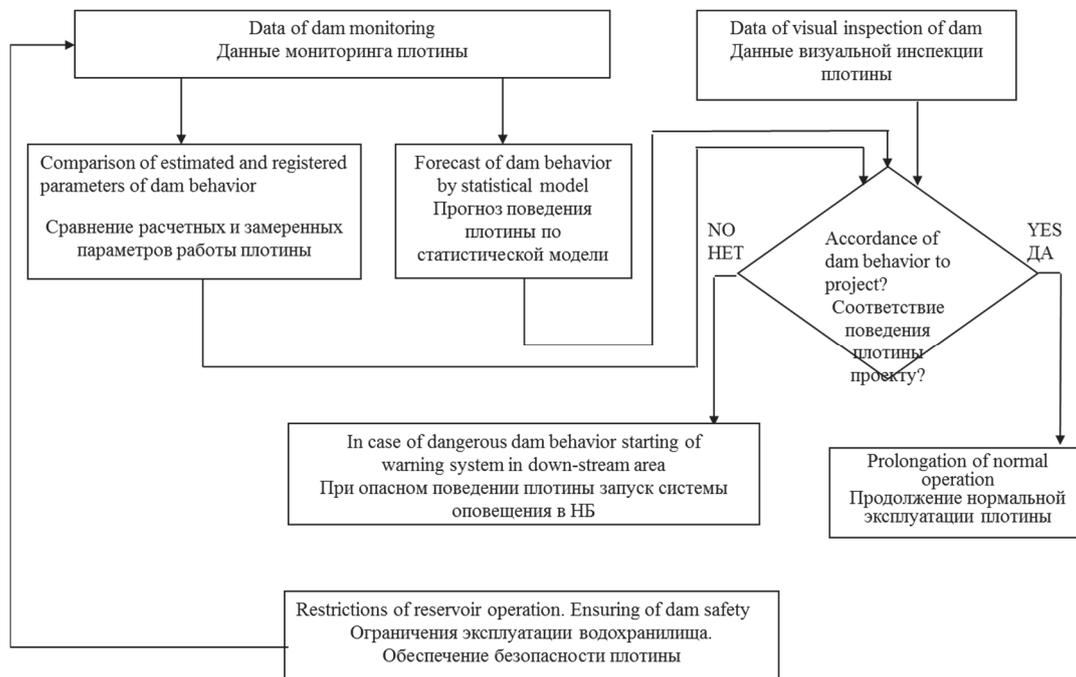


Figure 3. Interaction between monitoring data and numerical modelling of dam behavior in its operation

*Embankment dams:*

- internal erosion in construction, first filling and operation (static, post-seismic behavior, RI = 4);
- hydraulic fracturing in construction, first filling, operation (static, post-seismic behavior, RI = 3);
- physical-chemical deterioration phenomena (including dissolution and dispersive clays) during construction, first filling and operation (only static behavior, RI = 4);
- evaluation of stress-strain state in construction, first filling, operation (dynamic behavior, RI = 3);
- evaluation of the global stability of abutments and slopes during construction, first filling and operation (dynamic behavior, RI = 3);

- liquefaction of foundation in construction, first filling, operation (dynamic behavior, RI = 3);
- post-seismic seepage during construction, first filling and operation (dynamic behavior, RI = 3);
- erosion of outlets during construction, first filling and operation (hydraulic phenomena, RI = 3);
- downstream heel and facing erosion of dam during construction, first filling and operation (hydraulic phenomena, RI = 4).

The safety related problems listed above are, hence, those that deserve the efforts of researchers to promote the implementation of adequate tools for the advancements of the state-of-the-art in the field of dam engineering. These tools in numerical modelling of dam behavior are shown in figures 1–3.

## References

1. ICOLD Bulletin 155. (2013). *Guidelines for use of numerical models in dam engineering*. Paris.
2. ICOLD Bulletin 122. (2001). *Reliability and applicability of computational procedures for dam engineering*. Paris.
3. ICOLD Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design. (1994–2009). *3–10<sup>th</sup> Intern. Workshop Seminars on Numerical Analysis for Dams: France-1994, Spain-1996, USA-1999, Austria-2001, Romania-2003, China-2005, Russia-2007, France-2009*. Balkema Publ., Holland.
4. Lyapichev Yu. (2001). Classification and selection of constitutive models of soils for embankment dam analysis. Appendix 2. *ICOLD Bulletin 122* (pp. 135–138). Paris (France).
5. Lyapichev Yu. (1994). Extensions of the modified Cam Clay models for modelling of compacted soil and rock-fill materials of embankment dams. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]: interuniversity collection of scientific papers*, 4, 86–110. (In Russ.)
6. Carrere A., Mazza G. (2007). The Contribution in ICOLD Bull. 155 for Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design. *5<sup>th</sup> Intern. Conference on Dam Engineering, Lisbon (Portugal)*.
7. Carrere A., Zenz G., Mazza G. (2010). The contribution in ICOLD Bull. 155 for Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design to the diffusion of the knowledge in the numerical modelling and to the transfer of know-how between generations. *Symposium on dam safety – sustainability in a changing environment, 8<sup>th</sup> IECSS2010, Innsbruck (Austria)*.
8. Carrere A., Anthinac P., Develay D. (2002). The contribution of numerical analysis to the design of CFRD. *Hydropower and Dams*, 9(4).
9. Mazza G., Marcello A. (2003). Rehabilitation design of Molato dam. *Proceedings of 21<sup>st</sup> International Congress on Large Dams Congress, Montreal (Canada)*. Q. 82, R. 3.
10. Zenz G., Escuder I., Lombillo A. (2009). Risk analysis and probability of failure of gravity dam. *Proceedings of 23<sup>rd</sup> International Congress on Large Dams, Saint Petersburg (Russia)*. Q. 91, R. 49.
11. Mateu E., Tinawi, R. (2003). Transient damping and uplift pressure responses of cracked concrete gravity dams subjected to earthquakes. *Proc. of 21<sup>st</sup> Intern. Congress on Large Dams, Montreal (Canada)*. Q. 83.
12. Mateu E., Tinawi R., Leclerc M. (2000). Seismic safety of gravity dams: from shake table experiments to numerical analyses. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 124(12), 518–529.
13. Duncan M., Chang Y.Y. (1970, September). Non-linear analysis of stress and strain in soils. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, 96(SM5), 1629–1653.
14. Roscoe K.H., Burland J.B. (1968). On the generalized stress-strain behavior of wet clay. In J. Heyman (ed.), *Engineering Plasticity* (pp. 535–609). Cambridge University Press.
15. Lade P.V. (1977). Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *Intern. Journal of Solids and Structures*, 13, 1019–1035.
16. Prevost J.H. (1978). Plasticity theory for soil stress-strain behaviour. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 104, 1174–1194.
17. Zaretsky Yu. (1996). *Soil viscoplasticity and design of structures*. Balkema Publ., Holland.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Достоверность и применимость современных численных расчетов плотин

Ю.П. Ляпичев<sup>1\*</sup>, Г. Маза<sup>1,2</sup>, Э. Матеу<sup>1</sup>, Г. Зенз<sup>1,3</sup>, А. Каррере<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup>Международная комиссия по большим плотинам (СИГБ), Французская Республика, 75016, Париж, Avenue Kleber, 61

<sup>2</sup>Politecnico di Milano, Итальянская Республика, 20133, Милан, Piazza Leonardo da Vinci, 32

<sup>3</sup>Graz University of Technology, Австрийская Республика, 8010, Грац, Rechbauerstraße, 12

<sup>4</sup>Tractebel Engineering SA, Le Delage, Французская Республика, 92622, Gennevilliers cedex, rue du 19 mars 1962, 5

\*lyapichev@mail.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 12 август 2019 г.

Доработана: 17 октябрь 2019 г.

Принята к публикации: 24 ноябрь 2019 г.

### Аннотация

**Актуальность.** В настоящее время применение численных расчетов к реальным проблемам плотиностроения часто страдает от расхождений между специалистами по математическому моделированию и инженерами и менеджерами по плотинам. Первая группа обычно включает в себя специалистов по информационным технологиям, так как они способны разработать

**Ляпичев Юрий Петрович**, доктор технических наук, профессор, член Комитета СИГБ по компьютерным аспектам расчета и проектирования плотин; эксперт АО «Институт Гидропроект» по зарубежным проектам; eLIBRARY SPIN-код: 372720.

**Маза Гвидо**, доктор философии, председатель Комитета СИГБ по компьютерным аспектам расчета и проектирования плотин; эксперт Центра по безопасности плотин Италии; Scopus ID: 7102002973.

**Матеу Энрике**, доктор философии, член Комитета СИГБ по компьютерным аспектам расчета и проектирования плотин; эксперт Департамента США по безопасности плотин.

**Зенз Геральд**, доктор философии, заместитель председателя Комитета СИГБ по компьютерным аспектам расчета и проектирования плотин; глава департамента менеджмента Института управления гидротехникой и водными ресурсами.

**Каррере Алан**, доктор философии, член Комитета СИГБ по выбору типа плотин; директор по науке и технологиям проектной фирмы Coyne et Bellier (сейчас – Tractebel Engineering); Scopus ID: 6603411275.

Для цитирования

Lyapichev Yu.P., Mazza G., Mateu E., Zenz G., Carrère A.J. Reliability and applicability of modern numerical analyses of dams (Достоверность и применимость современных численных расчетов плотин) // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 458–469. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-458-469>

эффективные компьютерные модели для численных расчетов плотин. Специалисты второй группы часто предпочитают обращаться к обычным методам расчета и эмпирическим методам, основанным на их проверенном опыте. **Цель** – на основе рекомендаций Международных рабочих семинаров, организованных Комитетом СИГБ по компьютерным аспектам расчета и проектирования плотин, помочь инженерам по плотинам взаимодействовать со специалистами по математическому моделированию и работать с ними без языковых барьеров или расхождений в знаниях. В этой связи оценка достоверности и применимости численных расчетов плотин позволяет инженерам разработать оптимальный проект плотины. **Методы.** Оценка достоверности численных методов расчетов поведения плотин основана на данных десяти Международных рабочих семинаров, организованных Комитетом СИГБ в Италии (1991 и 1992), Франции (1994 и 2009), Испании (1996), США (1999), Австрии (2001), Румынии (2003), Китае (2005), России (2007), в которых специалисты этих стран также принимали участие.

**Ключевые слова:** индекс достоверности; численные модели и расчеты; статическое, сейсмическое и гидродинамическое поведение плотин

### Список литературы

1. ICOLD Bulletin 155. Guidelines for use of numerical models in dam engineering. Paris, 2013. 201 p.
2. ICOLD Bulletin 122. Reliability and applicability of computational procedures for dam engineering. Paris, 2001. 250 p.
3. 3–10<sup>th</sup> Intern. Workshop Seminars on Numerical Analysis for Dams: France-1994, Spain-1996, USA-1999, Austria-2001, Romania-2003, China-2005, Russia-2007, France-2009 / ICOLD Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design. Holland: Balkema Publ., 1994–2009.
4. Lyapichev Yu. Classification and selection of constitutive models of soils for embankment dam analysis // ICOLD Bulletin 122. Appendix 2. France, Paris. Pp. 135–138.
5. Ляпичев Ю.П. Модификация упругопластической модели Кэм-Клей для описания поведения грунтовых материалов плотин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: межвуз. сб. научн. тр. 1994. Т. 4. С. 86–110.
6. Carrere A., Mazza G. The Contribution in ICOLD Bull. 155 for Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design // 5<sup>th</sup> Intern. Conference on Dam Engineering Lisbon (Portugal). 2007.
7. Carrere A., Zenz G., Mazza G. The contribution in ICOLD Bull. 155 for Committee on Computational Aspects of Dam Analysis and Design to the diffusion of the knowledge in the numerical modelling and to the transfer of know-how between generations // Symposium on Dam Safety – sustainability in a changing environment, 8<sup>th</sup> IECS2010, Innsbruck (Austria). 2010.
8. Carrere A., Anthinac P., Develay D. The contribution of numerical analysis to the design of CFRD // Hydropower and Dams. 2002. Vol. 9. Issue 4.
9. Mazza G., Marcello A. Rehabilitation design of Molato dam // Proceedings of 21<sup>st</sup> International Congress on Large Dams Congress, Montreal (Canada). Q. 82, R. 3. 2003.
10. Zenz G., Escuder I., Lombillo A. Risk analysis and probability of failure of gravity dam // Proceedings of 23<sup>rd</sup> International Congress on Large Dams, Saint Petersburg (Russia). Q. 91, R. 49. 2009.
11. Mateu E., Tinawi R. Transient damping and uplift pressure responses of cracked concrete gravity dams subjected to earthquakes // Proc. of 21<sup>st</sup> Intern. Congress on Large Dams, Montreal (Canada). Q. 83. 2003.
12. Mateu E., Tinawi R., Leclerc M. (2000). Seismic safety of gravity dams: from shake table experiments to numerical analyses // ASCE Journal of Structural Engineering. Vol. 124. No. 12. Pp. 518–529.
13. Duncan M., Chang Y.Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils // Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE. 1970, September. Vol. 96. No. SM5. Pp. 1629–1653.
14. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behavior of wet clay // Engineering Plasticity / ed. by J. Heyman. Cambridge University Press, 1968. Pp. 535–609.
15. Lade P.V. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces // Intern. Journal of Solids and Structures. 1977. Vol. 13. Pp. 1019–1035.
16. Prevost J.H. Plasticity theory for soil stress-strain behavior // Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE. 1978. Vol. 104. Pp. 1174–1194.
17. Zaretsky Yu. Soil viscoplasticity and design of structures. Holland: Balkema Publ., 1996. 512 p.

## ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-470-476  
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Свободные колебания анизотропной прямоугольной пластинки на неоднородно вязкоупругом основании

В.Дж. Гаджиев<sup>1</sup>, Г.Р. Мирзоева<sup>1\*</sup>, М.Г. Агаяров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальная академия наук Азербайджана, Азербайджанская Республика, AZ1143, Баку, ул. Б. Вагабаде, 9

<sup>2</sup>Сумгаитский государственный университет, Азербайджанская Республика, AZ 50008, Сумгаит, 43 квартал  
\*gulnar.mirzayeva@gmail.com

#### История статьи:

Поступила в редакцию: 17 сентября 2019 г.

Доработана: 20 ноября 2019 г.

Принята к публикации: 01 декабря 2019 г.

#### Благодарности

Соавторы благодарны научному руководителю Вагифу Гаджиеву за ценные советы при планировании исследования.

#### Для цитирования

Гаджиев В.Дж., Мирзоева Г.Р., Агаяров М.Г. Свободные колебания анизотропной прямоугольной пластинки на неоднородно вязкоупругом основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 470–476. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-470-476>

#### Аннотация

В рамках поставленной *цели* рассмотрены свободные и поперечные колебания, неоднородные по трем пространственным координатам прямоугольных пластин, лежащих на неоднородно вязкоупругом основании. Предполагается, что краевые условия являются однородными. В исследовании разработано замкнутое решение для задачи о свободной вибрации неоднородной прямоугольной ортотропной пластины, опирающейся на неоднородный вязкоупругий фундамент. Модули Юнга и плотность ортотропной пластины непрерывно изменяются относительно трех пространственных координат, в то время как характеристики вязкоупругого основания изменяются в зависимости от координат в плоскости. **Методы.** Соответствующее уравнение движения получено с использованием классической теории пластин. В решении задачи применялись метод разделения переменных и метод Бубнова – Галеркина. **Выводы.** Определены явные формулы основного тона частоты поперечного колебания анизотропной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Детально изучено влияние неоднородности ортотропных материалов, неоднородности вязкости неупругих и упругих оснований на безразмерных частотах пластин.

**Ключевые слова:** пластинка; непрерывность; неоднородность; анизотропность; плотность; основания; частота; прогиб; уравнения движения

## Введение

В настоящее время при строительстве крупных инженерных комплексов, мостов, эстакад, а также в машиностроении широко используются прямо-

угольные пластинки, изготовленные из различных естественных и искусственных анизотропных материалов.

При расчете на устойчивость, определении частотно-амплитудных характеристик появляется необходимость учета влияния сопротивления окружающей среды при эксплуатации. Одновременный учет неоднородности, анизотропности и сопротивления внешней среды значительно осложняет математическое решение задачи. Неучет же этих факторов может привести к существенной ошибке (особенно в динамических задачах). Принимая во внимание, что в строительстве и в ряде других областей широко применяются непрерывно-неоднородные анизотропные прямоугольные пластинки, в данной

Гаджиев Вагиф Джамал Оглы, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом теории упругости и пластичности Института математики и механики.

Мирзоева Гюльнар Ровшан Кызы, доктор философии по механике, старший научный сотрудник отдела теории упругости и пластичности Института математики и механики.

Агаяров Матлаб Гусейнгулу Оглы, доктор философии по математике и механике, доцент, директор Центра дополнительного образования.

© Гаджиев В.Дж., Мирзоева Г.Р., Агаяров М.Г., 2019

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

работе изучаются поперечные колебания этой же конструкции, но с учетом неоднородно вязкоупругого сопротивления.

Фундаментальная монография В.А. Ломакина посвящена теоретическим вопросам линейно неоднородных упругих тел. Здесь на основе построенной теории упругости непрерывно линейно-упругих тел решен ряд теоретических вопросов, связанных с изучением напряженно-деформированного состояния элементов конструкций [1].

Монография Г.С. Лехницкого [2], посвящена теории однородных линейно-упругих анизотропных пластин и решению конкретных задач.

Исследование ряда теоретико-экспериментальных вопросов полимерных и композиционных материалов проведено в [3], где указано, что при изготовлении полосы-пластины после определенно технологического процесса модуль упругости и плотность являются периодической функцией координаты длины, коэффициент Пуассона остается постоянной величиной.

Колебание анизотропных пластин, лежащих на основании типа Винклера – Пастернака, описано в работе [4].

В [5] исследована приближенная методика расчета на устойчивость непрерывно-неоднородных прямоугольных пластин. обстоятельно были изучены вопросы определения критических параметров оболочек с учетом сопротивления двухконстантного основания типа Пастернака [6].

В.А. Баженов [7] изложил теорию расчета прямоугольных пластин и круговых цилиндрических оболочек на изгиб и устойчивость, находящихся в упругой среде. Исследование вопросов колебания ортотропных неоднородных пластин с учетом сопротивления различного ряда упругой и вязкоупругой сред проведено в [8–11]. В качестве примера рассмотрены конкретные случаи характерных параметров, выполнены численные расчеты, результаты представлены в зависимости от параметра основания в виде таблиц и графиков.

В [12] проведены анализы колебаний прямоугольных пластин с учетом сопротивления неоднородной внешней среды.

В работе [13] – рассматривается задача свободного колебания упругой оболочки, лежащей на однородно вязкоупругом основании.

## 1. Постановка задачи

Как известно, при проектировании крупных инженерных сооружений, таких как мост, эстакада и других, широко используются прямоугольные пластинки, изготовленные из естественных и искусственных непрерывно-неоднородных анизотропных материалов.

Во многих случаях причинами появления неоднородности материалов являются технология изготовления (композитных, стеклопластиковых, армированных материалов), механическая и термическая обработка, сварка, неоднородность составов. В результате чего возможен случай, когда характеристики материала и его плотность одновременно могут быть функцией трех пространственных координат [1; 3].

Учет вышеуказанных свойств и сопротивление вязкоупругой среды осложняют математическое решение задачи. Анализ полученных результатов, а не учет, может привести к существенным погрешностям [8; 13].

В данной работе исследуется задача свободного колебания непрерывно-неоднородной анизотропной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Реакция основания  $R$  с прогибом связаны следующим образом [8; 13]:

$$R = \left( K_1(x, y) + K_2(x, y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w(x, y), \quad (1)$$

где  $w$  – прогиб;  $t$  – время,  $K_1(x, y)$  и  $K_2(x, y)$  – непрерывные функции, которые характеризуют свойство основания.

Координатная система выбрана так, что оси  $X$  и  $Y$  находятся в срединной плоскости,  $Z$  – перпендикулярно к ней.

Характеристики материала и плотность являются функциями трех пространственных координат:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}^0 f_1(x, y) f_2(z); \\ \rho &= \rho_0 \psi_1(x, y) \psi_2(z), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a_{ij}^0$  и  $\rho_0$  – соответствует однородному анизотропному материалу;  $f_1(x, y)$  со своими производными до второго порядка  $f_2(z)$ ,  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(z)$  сами являются непрерывными функциями.

Связь между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  записывается в следующем виде [1; 2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f_1(x, y) f_2(z) (a_{11}^0 \varepsilon_{11} + a_{12}^0 \varepsilon_{22} + a_{13}^0 \varepsilon_{12}), \\ \sigma_{22} &= f_1(x, y) f_2(z) (a_{21}^0 \varepsilon_{11} + a_{22}^0 \varepsilon_{22} + a_{23}^0 \varepsilon_{12}), \\ \sigma_{12} &= f_1(x, y) f_2(z) (a_{31}^0 \varepsilon_{11} + a_{32}^0 \varepsilon_{22} + a_{33}^0 \varepsilon_{12}). \end{aligned} \quad (3)$$

Полагая, что и для непрерывно-анизотропной пластинки гипотеза Кирхгофа – Лява остается в силе, имеет место

$$\varepsilon_{11} = e_{11} - z\chi_{11}, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} - z\chi_{22}, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} - z\chi_{12}, \quad (4)$$

где  $e_{11}, e_{22}, e_{12}$  – малые деформации и  $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$  – кривизны и кручения срединной поверхности с компонентами вектора перемещений  $(u, v, w)$  связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{22} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad e_{12} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \chi_{11} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая (4) в (2) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f_1(x, y) f_2(z) \left[ \begin{aligned} &(a_{11}^0 e_{11} + a_{12}^0 e_{22} + a_{13}^0 e_{12}) - \\ &-z(a_{11}^0 \chi_{11} + a_{12}^0 \chi_{22} + a_{13}^0 \chi_{12}) \end{aligned} \right], \\ \sigma_{22} &= f_1(x, y) f_2(z) \left[ \begin{aligned} &(a_{21}^0 e_{21} + a_{22}^0 e_{22} + a_{23}^0 e_{12}) - \\ &-z(a_{21}^0 \chi_{11} + a_{22}^0 \chi_{22} + a_{23}^0 \chi_{12}) \end{aligned} \right], \\ \sigma_{12} &= f_1(x, y) f_2(z) \left[ \begin{aligned} &(a_{31}^0 e_{11} + a_{32}^0 e_{22} + a_{33}^0 e_{12}) - \\ &-z(a_{31}^0 \chi_{11} + a_{32}^0 \chi_{22} + a_{33}^0 \chi_{12}) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как в плоскости пластинки внешние силы отсутствуют, естественно предположить, что результирующие силы  $T_{11}, T_{22}, T_{12}$  всюду равны нулю

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz = 0; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dz = 0; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dz = 0. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получим

$$\begin{aligned} &a_{11}^0 e_{11} + a_{12}^0 e_{22} + a_{13}^0 e_{12} = \\ &= A_2 A_1^{-1} (a_{11}^0 \chi_{11} + a_{12}^0 \chi_{22} + a_{13}^0 \chi_{12}), \\ &a_{21}^0 e_{21} + a_{22}^0 e_{22} + a_{23}^0 e_{12} = \\ &= A_2 A_1^{-1} (a_{21}^0 \chi_{11} + a_{22}^0 \chi_{22} + a_{23}^0 \chi_{12}), \\ &a_{31}^0 e_{11} + a_{32}^0 e_{22} + a_{33}^0 e_{12} = \\ &= A_2 A_1^{-1} (a_{31}^0 \chi_{11} + a_{32}^0 \chi_{22} + a_{33}^0 \chi_{12}). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Через

$$A_1 = \int_{-h/2}^{h/2} f_2(z) dz; \quad A_2 = \int_{-h/2}^{h/2} z f_2(z) dz$$

нетрудно установить, что с учетом (7) выражение моментов

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz, \quad i, j = 1, 2. \quad (8.2)$$

Здесь  $\chi_{11}, \chi_{22}$  и  $\chi_{12}$  выражаются в следующем виде:

$$\begin{cases} M_{11} = \mu(x, y) \left( a_{11}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{12}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \\ M_{22} = \mu(x, y) \left( a_{21}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{22}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{23}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{12} = \mu(x, y) \left( a_{31}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{32}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{33}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \end{cases} \quad (9)$$

где приняты обозначения  $\mu(x, y) = \mu_0 f(x, y)$ ;

$$\mu_0 = A_2^2 A_1^{-1} - A_3; \quad A_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f(z) z^2 dz.$$

Уравнение движения свободного колебания пластинки с учетом (1) – (2) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + \\ &+ \left( K_1(x, y) + K_2(x, y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W(x, y) + \\ &+ \bar{\rho} \psi_1(x, y) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\bar{\rho} = \rho_0 h \int_{-h/2}^{h/2} \psi_2(z) dz$ .

Отметим, что если пластина неоднородна только по толщине, уравнение (10) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &a_{11}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (a_{12}^0 + 2a_{12}^0 + a_{32}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ &+ a_{22}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + (a_{13}^0 + 2a_{31}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + \\ &+ (2a_{12}^0 + a_{13}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + \\ &+ \mu_0^{-1} \left( \begin{aligned} &K_1(x, y) + K_2(x, y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \\ &+ \bar{\rho} \psi_1(x, y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned} \right) W(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае, когда характеристики материала и плотность являются непрерывными функциями пространственных координат, уравнение движения записывается в следующем виде:

$$L(W) + K_1(x, y)W + (K_2(x, y) + \bar{\rho}\psi_1(x, y))\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial t^2} = 0. \quad (12.1)$$

В случае, когда пластинка неоднородна только по толщине,  $L(W)$  записывается так:

$$L(W) = a_{11}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (a_{12}^0 + 2a_{12}^0 + a_{32}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + (a_{13}^0 + 2a_{31}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12}^0 + a_{13}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3}. \quad (13)$$

В общем случае

$$L(W) = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \left[ a_{11}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{12}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \left[ a_{11}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + a_{12}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right] + \mu \left[ a_{11}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + a_{12}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} \right] + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \left[ a_{31}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{32}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{33}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + 4 \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[ a_{31}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + a_{32}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} + a_{33}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right] + 2 \mu \left[ a_{31}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{32}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + a_{33}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \left[ a_{21}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{22}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{23}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[ a_{21}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + a_{22}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + a_{23}^0 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] + \mu \left[ a_{21}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + a_{23}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} \right]. \quad (12.2)$$

Как видно, (12.1) является сложным дифференциальным уравнением и определение точного решения затруднительно. Поэтому при решении уравнения (12.1) будем применять комбинированный способ: на первом этапе – метод разделения перемен-

ных, а на втором этапе – метод ортогонализации Бубнова – Галеркина.

## 2. Метод решения

Решение (12.1) будем искать в следующем виде:

$$W(x, y, t) = V(x, y)e^{i\omega t}, \quad (14)$$

где  $V(x, y)$  – должна удовлетворять краевым условиям;  $\omega$  – частота.

Подставляя (14) в (12.1) получим

$$\bar{L}(V) + K_1(x, y)V - \omega^2 [K_2(x, y) + \bar{\rho}\psi_1(x, y)]V = 0, \quad (15)$$

где

$$L(V) = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \left[ a_{11}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a_{12}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \left[ a_{11}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + a_{12}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} \right] + \mu \left[ a_{11}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + a_{12}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial x^3 \partial y} \right] + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \left[ a_{31}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a_{32}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a_{33}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right] + 4 \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[ a_{31}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + a_{32}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial x} + a_{33}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} \right] + 2 \mu \left[ a_{31}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{32}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} + a_{33}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \left[ a_{21}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a_{22}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a_{23}^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[ a_{21}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} + a_{22}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + a_{23}^0 \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} \right] + \mu \left[ a_{21}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} + a_{23}^0 \frac{\partial^4 V}{\partial x \partial y^3} \right]. \quad (16)$$

Решение (15) будем искать в виде

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \phi_i(x) \theta_j(y), \quad (17)$$

где  $A_{ij}$  – неизвестные постоянные и каждый  $\phi_i(x)$  и  $\theta_j(y)$  должны удовлетворять соответствующим краевым условиям.

Функция ошибки  $\eta(x, y)$  в данном случае с учетом (15) и (17) записывается как

$$\eta(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \left[ \bar{L}(\varphi_i(x)\theta_j(y)) + K_1(x, y)\varphi_i(x)\theta_j(y) - \omega^2 [K_2(x, y) + \bar{\rho}\psi(x, y)]\varphi_i(x)\theta_j(y) \right] \neq 0. \quad (18)$$

Условия ортогонализации (17) и (18) имеют вид

$$\int_0^a \int_0^b \eta(x, y)\varphi_k(x)\theta_p(y) dx dy = 0. \quad (19)$$

Произвольное приближение  $\omega^2$  – определяется из системы алгебраических линейных однородных уравнений (19):

$$\|\omega^2\| = 0. \quad (20)$$

Относительно  $\omega^2$  (20) является нелинейным алгебраическим уравнением. Определение и нахождение значения  $\omega^2$  с помощью компьютерной программы не вызывает особого труда. Однако в инженерной практике обычно ограничиваются определением основного тона частоты, что и приведет к следующему уравнению:

$$\int_0^a \int_0^b \left[ \bar{L}(\varphi_i(x)\theta_j(y)) + K_1(x, y)\varphi_i(x)\theta_j(y) - \omega^2 [K_2(x, y) + \bar{\rho}\psi(x, y)]\varphi_i(x)\theta_j(y) \right] dx dy = 0.$$

Отсюда находим:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^a \int_0^b \left[ \bar{L}(\varphi_i(x)\theta_j(y)) + K_1(x, y)\varphi_i(x)\theta_j(y) \right] dx dy}{\int_0^a \int_0^b \left[ K_2(x, y) + \bar{\rho}\psi_1(x, y) \right] \varphi_i(x)\theta_j(y) dx dy}. \quad (21)$$

Из формулы (21) при условии  $K_2 = 0$  получим решение задачи для Винклеровского неоднородного основания.

Простым случаем является цилиндрическая форма изгибного колебания которая возможна при условии  $a \gg b$ .

В этом случае частоты определяется из (21):

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^a [L_1(\varphi_1) + K_1(x)\varphi_1(x)] dx}{\bar{\rho} \int_0^a \psi_1(x)\varphi_1(x) dx}. \quad (22)$$

## Заключение

Определены явные формулы основного тона частоты поперечного колебания анизотропной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Влияние неоднородности ортотропных материалов, неоднородности вязкости, неупругие и упругие основания на безразмерных частотах пластин детально изучены.

## Список литературы

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. С. 376.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 625 с.
3. Кравчук А.С., Майборода В.В., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. С. 303.
4. Tornabene F. Free vibrations of anisotropic doubly-curved shells and plates of revolution with a free from meridian resting on Winkler – Pasternak elastic foundations // Compos. struct. 2011. No. 94. Pp. 186–206.
5. Haciye V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. On the free vibration of orthotropic and inhomogeneous with spatial coordinates plates resting on the inhomogeneous viscoelastic foundation // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2018. Vol. 26. No. 10. Pp. 1–12. DOI: 10.1080/15376494.2018.1430271
6. Sofiyev A.H., Schnack E., Haciye V.C., Kuruoglu N. Effect of the two-parameter elastic, foundation on the critical parameters of non-homogeneous orthotropic shells // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2013. Vol. 12. No. 05. 24 p. DOI: 10.1142/S0219455412500411
7. Баженов В.А. Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде. Киев: Высшая школа, 1975. С. 168.
8. Sofiyev A.H., Hui D., Haciye V.C., Erdem H., Yuan G.Q., Schnack E., Guldal V. The nonlinear vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation within first order shear deformation theory // Composites Part B: Engineering. 2017. Vol. 116. Pp. 170–185. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.006>
9. Haciye V.C., Mirzeyeva G.R., Shiryev A.I. Effect of Winkler foundation, inhomogeneity and orthotropic on the frequency of plates // Journal of Structural Engineering Applied Mechanics. 2018. Vol. I. Issue 1. Pp. 1–15.
10. Haciye V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. Free bending vibration analysis of thin bidirectional exponentially graded orthotropic rectangular plates resting on two-parameter elastic foundations // Composite Structures. 2018. Vol. 184. Pp. 372–277.

11. *Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Mirzeyev R.D.* Free vibration of non-homogeneous elastic rectangular plates // Proceedings of the Institute of Mathematics, Azerbaijan. 1996. Vol. 4. Pp. 103–108.

12. *Huang M., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C.* Free-vibration analysis of stepped rectangular plates res-

ting on non-homogeneous elastic foundations // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 50. Pp. 180–187.

13. *Carnet H., Lielly A.* Free vibrations of reinforced elastic shells // Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36. No. 4. Pp. 835–844.

RESEARCH PAPER

## Free vibrations of anisotropic rectangular plate laying on a heterogeneous viscoelastic basis

Vaqif C. Haciyev<sup>1</sup>, Gulnar R. Mirzoeva<sup>1\*</sup>, Matlab G. Agayarov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>National Academy of Sciences of Azerbaijan, 9 B. Wahabzadeh St., Baku, AZ1143, Republic of Azerbaijan

<sup>2</sup>Sumgait State University, 43 quarter, Sumgait, AZ50008, Republic of Azerbaijan

\*gulnar.mirzayeva@gmail.com

### Article history:

Received: September 17, 2019

Revised: November 20, 2019

Accepted: December 01, 2019

### Acknowledgements

The coauthors are grateful to the scientific supervisor Vaqif Haciyev for valuable advice in the planning of the study.

### For citation

Haciyev V.C., Mirzoeva G.R., Agayarov M.G. (2019). Free vibrations of anisotropic rectangular plate laying on a heterogeneous viscoelastic basis. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 470–476. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-470-476>. (In Russ.)

### Abstract

**The aim of the work.** Free, transverse vibrations are considered heterogeneous along the three spatial coordinates of rectangular plates lying on an inhomogeneous viscoelastic base. It is assumed that the boundary conditions are homogeneous. A closed solution for the problem of free vibration of an inhomogeneous rectangular orthotropic plate based on an inhomogeneous viscoelastic foundation is developed in the article. Young's moduli and the density of the orthotropic plate continuously change with respect to three spatial coordinates, while the characteristics of a viscoelastic base change depending on the coordinates in the plane. **Methods.** The corresponding equation of motion is obtained using the classical theory of plates. The solution to the problem was constructed using the method of separation of variables and the Bubnov – Galerkin method. **Results.** Explicit formulas of the fundamental tone of the frequency of the transverse vibration of an anisotropic plate lying on an inhomogeneous viscoelastic base are determined. The influence of heterogeneity of orthotropic materials, viscosity inhomogeneities, inelastic and elastic substrates at dimensionless plate frequencies have been studied in detail.

**Keywords:** plate; continuity; anisotropy; density; bases; frequency; deflection; equations of motion

## References

1. Lomakin V.A. (1976). *Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel [The theory of elasticity of inhomogeneous walked]*. Moscow, Publishing House of Moscow State University. (In Russ.)
2. Lehnitsky S.G. (1957). *Anizotropnye plastinki [Anisotropic plates]*. Gostekhizdat Publ. (In Russ.)
3. Kravchuk A.S., Mayboroda V.V., Urzhumtsev Yu.S. (1985). *Mekhanika polimernykh i kompozitsionnykh materi-*

*alov [Mechanics of polymer and composite materials]*. Moscow, Nauka Publ. (In Russ.)

4. Tornabene F. (2011). Free vibrations of anisotropic doubly-curved shells and plates of revolution with a free from meridian resting on Winkler – Pasternak elastic foundations. *Compos. struct.*, (94), 186–206.

5. Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. (2018). On the free vibration of orthotropic and inhomogeneous with spatial coordinates plates resting on the inhomogeneous viscoelastic foundation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(10), 1–12. DOI: 10.1080/15376494.2018.1430271

6. Sofiyev A.H., Schnack E., Haciyev V.C., Kuruoglu N. (2013). Effect of the two-parameter elastic, foundation on the critical parameters of non-homogeneous orthotropic shells. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 12(05), 24. DOI: 10.1142/S0219455412500411

**Vaqif C. Haciyev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theory of Elasticity and Plasticity, Institute of Mathematics and Mechanics.

**Gulnar R. Mirzoeva**, Doctor of Philosophy in Mechanics, senior researcher of Department of Theory of Elasticity and Plasticity, Institute of Mathematics and Mechanics.

**Matlab G. Agayarov**, Doctor of Philosophy in Mathematics and Mechanics Sciences, Associate Professor, Head of Additional Education Center.

7. Bajenov V.A. (1975). *Izhib cilindricheskih obolochek v uprugoj srede [The Bending of the Cylindrical Shells in Elastic Medium]*. Kiev, Vysshaya shkola Publ. (In Russ.)
8. Sofiyev A.H., Hui D., Haciyev V.C., Erdem H., Yuan G.Q., Schnack E., Guldal V. (2017). The nonlinear vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation within first order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 116, 170–185. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.02.006>
9. Haciyev V.C., Mirzeyeva G.R., Shiryev A.I. (2018). Effect of Winkler foundation, inhomogeneity and orthotropic on the frequency of plates. *Journal of Structural Engineering Applied Mechanics*, 1(1), 1–15.
10. Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. (2018). Free bending vibration analysis of thin bidirectional exponentially graded orthotropic rectangular plates resting on two-parameter elastic foundations. *Composite Structures*, 184, 372–277.
11. Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Mirzeyev R.D. (1996). Free vibration of non-homogeneous elastic rectangular plates. *Proceedings of the Institute of Mathematics*, (4), 103–108.
12. Huang M., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C. (2015). Free-vibration analysis of stepped rectangular plates resting on non-homogeneous elastic foundations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 50, 180–187.
13. Carnet H., Lielly A. (1969). Free vibrations of reinforced elastic shells. *Journal of Applied Mechanics*, 36(4), 835–844.

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482  
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений в консоли с основанием (полуплоскость) при фундаментальном сейсмическом воздействии

**В.К. Мусаев**

Российский университет транспорта, Российская Федерация, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9  
Минячевирский государственный университет, Азербайджанская Республика, AZ4500, Минячевир, ул. Дилара Алиева  
musayev-vk@yandex.ru

### История статьи:

Поступила в редакцию: 01 октября 2019 г.  
Доработана: 27 ноября 2019 г.  
Принята к публикации: 01 декабря 2019 г.

### Аннотация

**Целью** работы является рассмотрение проблем численного моделирования сейсмической безопасности консоли с основанием в виде упругой полуплоскости при нестационарных волновых воздействиях. Волны напряжений различной природы, распространяясь в деформируемом теле, взаимодействуют друг с другом. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, тело находится в колебательном движении. Проблема моделирования задач переходного периода является актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей. **Методы.** Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями применяется метод конечных элементов в перемещениях. На основе этого метода разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют проводить расчеты при нестационарных волновых воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык «Фортран-90». Исследуемая область разбивалась по пространственным переменным на конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область также разбивалась на конечные элементы первого порядка. **Результаты.** Рассмотрена задача о воздействии плоской продольной упругой волны в виде функции Хевисайда на консоль с основанием (соотношение ширины к высоте один к десяти). Начальные условия приняты нулевыми. Решена система уравнений из 16 016 084 неизвестных. В характерных областях исследуемой задачи получены контурные напряжения и компоненты тензора напряжений. На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы: консоль (соотношение ширины к высоте один к десяти) моделируется с упругим основанием в виде упругой полуплоскости; упругие контурные напряжения на гранях консоли являются почти зеркальным отражением друг друга, то есть антисимметричными; консоль при сейсмическом воздействии работает как стержень переменного сечения, то есть если на одной грани растягивающие напряжения, то на другой – сжимающие напряжения; на контурах консоли при сейсмическом воздействии в основном преобладают изгибные волны.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; волновая теория сейсмической безопасности; динамическая теория упругости; сейсмическое воздействие; фундаментальное воздействие; консоль; упругая полуплоскость; контурное напряжение, изгибные волны

### Для цитирования

Мусаев В.К. Математическое моделирование нестационарных упругих волн напряжений в консоли с основанием (полуплоскость) при фундаментальном сейсмическом воздействии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 477–482. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482>

Мусаев Вячеслав Кадры оглы, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры техносферной безопасности РУТ (МИИТ); eLIBRARY SPIN-код: 8162-1906, ORCID iD: 0000-0003-4336-6785.  
© Мусаев В.К., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## Введение

Импульсное воздействие характеризуется внезапностью приложения и кратковременностью действия. В деформируемом теле при импульсном воздействии возникают возмущения различной природы. Волны напряжений различной природы, распространяясь в деформируемом теле, взаимодействуют друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Некоторые вопросы в области моделирования нестационарных динамических задач рассмотрены в работах [1–11].

В [6–9; 10] приведена информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемых численного метода, алгоритма и комплекса программ.

## 1. Постановка задачи

Для решения задачи о моделировании нестационарных упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело  $\Gamma$  в прямоугольной декартовой системе координат  $XOY$ , которому в начальный момент времени  $t = 0$  сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело  $\Gamma$  изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (x, y) \in \Gamma, \quad \sigma_x &= \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \\ \sigma_y &= \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho(C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ (x, y) \in (\Gamma \cup S), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  – компоненты тензора упругих напряжений;  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $u$  и  $v$  – составляющие

вектора упругих перемещений вдоль осей  $OX$  и  $OY$  соответственно;  $\rho$  – плотность материала;  $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$  – скорость продольной упругой волны;  $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$  – скорость поперечной упругой волны;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости;  $S (S_1 \cup S_2)$  – граничный контур тела  $\Gamma$ .

Систему (1) в области, занимаемой телом  $\Gamma$ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

## 2. Методика

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матриц и векторов для тела  $\Gamma$ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости:

$$\begin{aligned} \bar{H} \ddot{\bar{\Phi}} + \bar{K} \bar{\Phi} &= \bar{R}, \\ \bar{\Phi}|_{t=0} &= \bar{\Phi}_0, \\ \dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} &= \dot{\bar{\Phi}}_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\bar{H}$  – матрица инерции;  $\bar{K}$  – матрица жесткости;  $\bar{\Phi}$  – вектор узловых упругих перемещений;  $\dot{\bar{\Phi}}$  – вектор узловых упругих скоростей перемещений;  $\ddot{\bar{\Phi}}$  – вектор узловых упругих ускорений;  $\bar{R}$  – вектор узловых упругих внешних сил.

Для интегрирования уравнения (2) конечно-элементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду:

$$\begin{aligned} \bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\bar{\Phi}} + \bar{K} \bar{\Phi} &= \bar{R}, \\ \frac{d}{dt} \bar{\Phi} &= \dot{\bar{\Phi}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечно-элементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечно-элементную линейную схему

в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{i+1} &= \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \bar{R}_i), \\ \vec{\Phi}_{i+1} &= \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\Phi}_{i+1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где:  $\Delta t$  – шаг по временной координате.

Система уравнений (4) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы.

Шаг по временной переменной  $\Delta t$  определяем из соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (5)$$

где  $\Delta l$  – длина стороны конечного элемента;  $r$  – число конечных элементов.

Результаты численного эксперимента показали, что при  $k = 0,5$  обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют производить расчеты при нестационарных волновых воздействиях на сложные системы. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык «Фортран-90». Исследуемая область разбивалась по пространственным переменным на конечные элементы первого порядка. По временной переменной исследуемая область также разбивалась на конечные элементы первого порядка.

### 3. Результаты

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения:  $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$ ;  $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$ .

Рассматривалась задача о воздействии плоской продольной упругой волны в виде функции Хевисайда на консоль с основанием (соотношение ширины к высоте один к десяти) (рис. 1).

Начальные условия приняты нулевыми. От точки  $F$  параллельно свободной поверхности  $ABEFG$  приложено нормальное напряжение  $\sigma_x$ , которое при  $0 \leq n \leq 11$  ( $n = t / \Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до  $P$ , а при  $n \geq 11$  равно  $P$  ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = 0,1 \text{ МПа}$  ( $1 \text{ кгс/см}^2$ )).

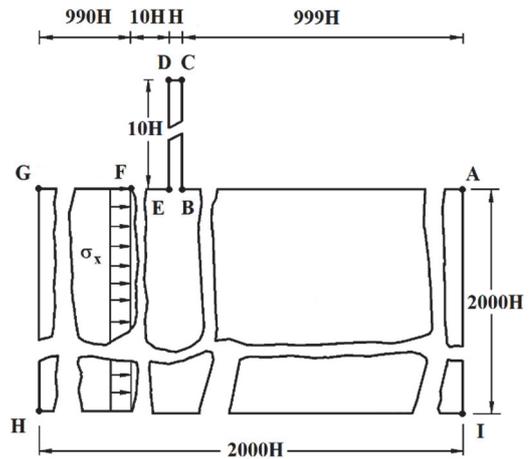


Рис. 1. Постановка задачи для консоли (соотношение ширины к высоте один к десяти) с упругим основанием (полуплоскость)

[Figure 1. Problem statement for a console (width-to-height ratio of one to ten) with an elastic base (half-plane)]

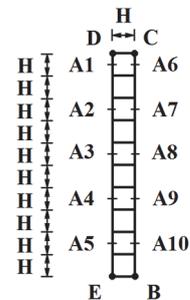


Рис. 2. Точки, в которых получены контурные напряжения в консоли

[Figure 2. The points at which the contour voltages in the console are obtained]

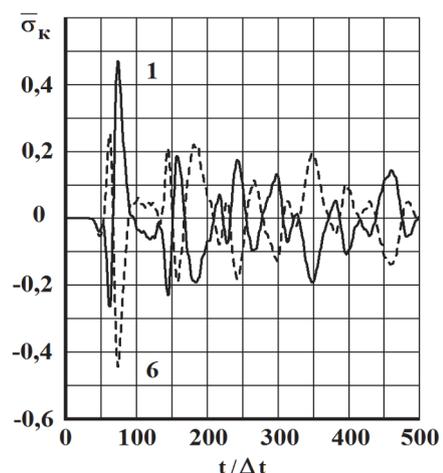
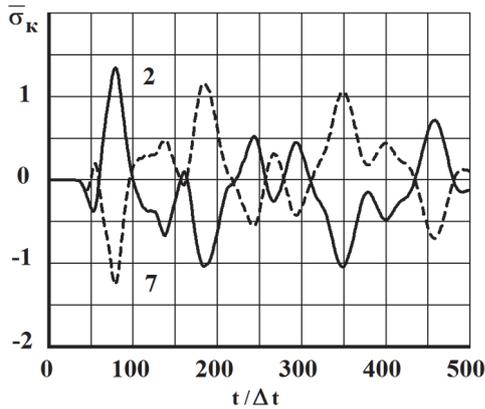
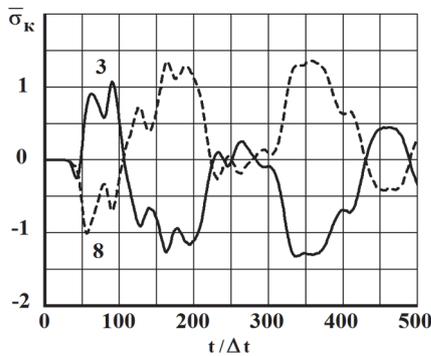


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  в точках 1 и 6 на контуре консоли во времени  $t / \Delta t$

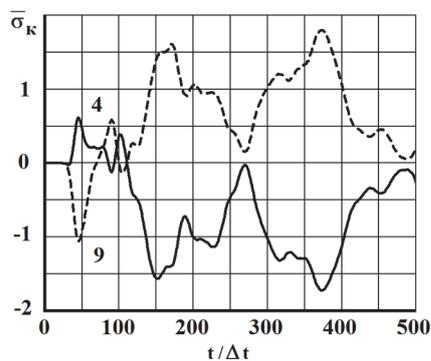
[Figure 3. The change of elastic contour stress  $\bar{\sigma}_k$  at points 1 and 6 on the console loop in time  $t / \Delta t$ ]



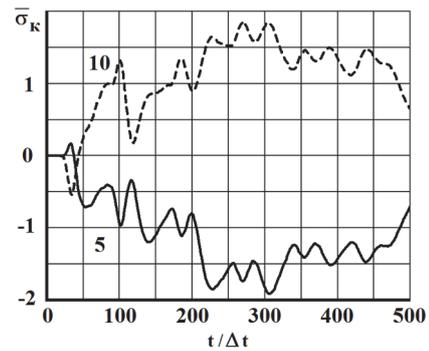
**Рис. 4.** Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  в точках 2 и 7 на контуре консоли во времени  $t / \Delta t$  [Figure 4. The change of elastic contour stress  $\bar{\sigma}_k$  at points 2 and 7 on the console loop in time  $t / \Delta t$  ]



**Рис. 5.** Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  в точках 3 и 8 на контуре консоли во времени  $t / \Delta t$  [Figure 5. The change of elastic contour stress  $\bar{\sigma}_k$  at points 3 and 8 on the console loop in time  $t / \Delta t$  ]



**Рис. 6.** Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  в точках 4 и 9 на контуре консоли во времени  $t / \Delta t$  [Figure 6. The change of elastic contour stress  $\bar{\sigma}_k$  at points 4 and 9 on the console loop in time  $t / \Delta t$  ]



**Рис. 7.** Изменение упругого контурного напряжения  $\bar{\sigma}_k$  в точках 5 и 10 на контуре консоли во времени  $t / \Delta t$  [Figure 7. The change of elastic contour stress  $\bar{\sigma}_k$  at points 5 and 10 on the console loop in time  $t / \Delta t$  ]

Граничные условия для контура  $GHI A$  при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контура  $GHI A$  не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 500$ . Контур  $ABCDEF G$  свободен от нагрузок, кроме точки  $F$ . Решается система уравнений из 16 016 084 неизвестных.

На рис. 3–7 показано изменение контурных напряжений  $\bar{\sigma}_k$  в консоли (рис. 2) во времени  $t / \Delta t$ .

### Заключение

Консоль (соотношение ширины к высоте один к десяти) моделируется с упругим основанием в виде упругой полуплоскости.

Упругие контурные напряжения на гранях консоли являются почти зеркальным отражением друг друга, то есть антисимметричными.

Консоль при сейсмическом воздействии работает как стержень переменного сечения, то есть если на одной грани – растягивающие напряжения, то на другой – сжимающие напряжения.

На контурах консоли при сейсмическом воздействии в основном преобладают изгибные волны.

### Список литературы

1. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. М.: Иностранная литература, 1955. 192 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
4. Мусаев В.К. О моделировании сейсмической волны параллельной свободной поверхности упругой полуплоскости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. № 4. С. 61–64.
5. Спиридонов В.П. Определение некоторых закономерностей волнового напряженного состояния в

геообъектах с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. // Современные наукоемкие технологии. 2015. № 12–5. С. 832–835.

6. Дикова Е.В. Достоверность численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. при решении задачи о распространении плоских продольных упругих волн (восходящая часть – линейная, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. 2016. № 12–3. С. 354–357.

7. Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В. Моделирование упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – четверть круга) в полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 1. С. 36–40.

8. Стародубцев В.В., Акатьев С.В., Мусаев А.В., Шиянов С.М., Куранцов О.В. Моделирование с помощью численного метода Мусаева В.К. нестационарных упругих волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нис-

ходящая часть – линейная) в сплошной деформируемой среде // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 1. С. 63–68.

9. Куранцов В.А., Стародубцев В.В., Мусаев А.В., Самойлов С.Н., Кузнецов М.Е. Моделирование импульса (первая ветвь: восходящая часть – четверть круга, нисходящая часть – линейная; вторая ветвь: треугольник) в упругой полуплоскости с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы безопасности российского общества. 2017. № 2. С. 51–55.

10. Мусаев В.К. Применение волновой теории сейсмического воздействия для моделирования упругих напряжений в Курпсайской плотине с грунтовым основанием при незаполненном водохранилище // Геология и геофизика Юга России. 2017. № 2. С. 98–105.

11. Musayev V.K. Mathematical modeling of non-stationary elastic waves stresses under a concentrated vertical exposure in the form of delta functions on the surface of the half-plane (Lamb problem) // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. Vol. 15. Issue 2. Pp. 111–124.

RESEARCH PAPER

## Mathematical modeling of unsteady elastic stress waves in a console with a base (half-plane) under fundamental seismic action

Vyacheslav K. Musayev

Russian University of Transport, 9 Obraztsova St., bldg. 9, Moscow, 127994, Russian Federation  
Mingachevir State University, Dilyara Alieva St., Mingachevir, AZ4500, Republic of Azerbaijan  
\*musayev-vk@yandex.ru

### Article history:

Received: October 01, 2019  
Revised: November 27, 2019  
Accepted: December 01, 2019

### Abstract

**The aim of the work** is to consider the problems of numerical modeling of seismic safety of the console with the base in the form of an elastic half-plane under unsteady wave influences. Stress waves of different nature, propagating in the deformed body interact with each other. After three or four times the passage and reflection of stress waves in the body, the process of propagation of disturbances becomes steady, the body is in oscillatory motion. The problem of modeling problems of the transition period is an actual fundamental and applied scientific problem. **Methods.** The finite element method in displacements is used to solve the two-dimensional plane dynamic problem of elasticity theory with initial and boundary conditions. On the basis of the finite element method in displacements, an algorithm and a set of programs for solving linear plane two-dimensional problems have been developed, which allow solving problems with non-stationary wave effects on complex systems. The algorithmic language “Fortran-90” was used in the development of the complex of programs. The study area is divided by spatial variables into finite elements of the first order. According to the time variable, the study area is also divided into finite elements of the first order. **Results.** The problem of the influence of a plane longitudinal elastic wave in the form of a Heaviside function on a console with a base (the ratio of width to height is one to ten) is considered. The initial conditions are taken as zero. The system of equations from 16 016 084 unknowns is solved. Contour stresses and stress tensor components are obtained in characteristic areas of the problem. On the basis of the conducted researches it is possible to draw the following conclusions: the console (the ratio of

Musayev Vyacheslav Kadyr ogly, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Technosphere Safety of the RUT (MIIT); eLIBRARY SPIN-code: 8162-1906, ORCID iD: 0000-0003-4336-6785.

## For citation

Musayev V.K. (2019). Mathematical modeling of unsteady elastic stress waves in a console with a base (half-plane) under fundamental seismic action. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 477–482. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-477-482>. (In Russ.)

width to height one to ten) is modeled with the elastic basis in the form of an elastic half-plane; the elastic contour stresses on the faces of the console are almost a mirror image of one another, that is, antisymmetric; the console under seismic action works as a rod of variable cross-section, that is, if there are tensile stresses on one face, then compressive stresses on the other; on the contours of the console under seismic action, bending waves mainly prevail.

**Keywords:** mathematical modeling; wave theory of seismic safety; dynamic theory of elasticity; seismic impact; fundamental impact; console; elastic half-plane; contour stress; bending waves

## References

1. Kolsky G. (1955). *Volny napryazhenij v tverdyh telah* [Stress waves in solids]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ. (In Russ.)

2. Zenkevich O. (1975). *Metod konechnyh ehlementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow, Mir Publ. (In Russ.)

3. Timoshenko S.P., Gudyer D. (1975). *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ. (In Russ.)

4. Musaev V.K. (2009). O modelirovanii seismicheskoy volny paralel'noj svobodnoj poverhnosti uprugoj poluploskosti [On modeling of a seismic wave parallel to the free surface of an elastic half plane]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (4), 61–64. (In Russ.)

5. Spiridonov V.P. (2105). Opreделение nekotoryh zakonov volnovogo napryazhennogo sostoyaniya v geob'ektakh s pomoshch'yu chislennogo metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. [The definition of some patterns of wave stress in geobject using numerical method, algorithm and program complex of Musayev V.K.]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, (12–5), 832–835. (In Russ.)

6. Dikova Ye.V. (2016). Dostovernost' chislennogo metoda, algoritma i kompleksa programm Musaeva V.K. pri reshenii zadachi o rasprostranении ploskih prodol'nyh uprugih voln (voskhodyashchaya chast' – linejnaya, niskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga) v poluploskosti [Reliability of the numerical method, algorithm and software complex of Musayev V.K. in solving the problem of propagation of plane longitudinal elastic waves (the ascending part is linear, the descending part is a quarter of a circle) in a half-plane]. *Mezhdunarodnyj zhurnal ehksperimental'nogo obrazovaniya*, (12–3), 354–357. (In Russ.)

7. Starodubtsev V.V., Akatyev S.V., Musayev A.V., Shiyarov S.M., Kurantsov O.V. (2017). Modelirovanie uprugih voln v vide impul'snogo vozdeystviya (voskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga) v poluploskosti s pomoshch'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. [Modeling of elastic waves in the form of impulse action (ascending part – a quarter of a circle,

descending part – a quarter of a circle) in a half-plane by means of the numerical method of Musayev V.K.]. *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, (1), 36–40. (In Russ.)

8. Starodubtsev V.V., Akatyev S.V., Musayev A.V., Shiyarov S.M., Kurantsov O.V. (2017). Modelirovanie s pomoshch'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. nestacionarnyh uprugih voln v vide impul'snogo vozdeystviya (voskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga, srednyaya – gorizontalnaya, niskhodyashchaya chast' – linejnaya) v sploshnoj deformiruemoj srede [Modeling of unsteady elastic waves in the form of pulse action (ascending part – a quarter of a circle, the middle part – horizontal, the descending part – linear) in a continuous deformable medium using the Musayev V.K. numerical method]. *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, (1), 63–68. (In Russ.)

9. Kurantsov V.A., Starodubtsev V.V., Musayev A.V., Samoylov S.N., Kuznetsov M.E. (2017). Modelirovanie impul'sa (pervaya vetv': voskhodyashchaya chast' – chetvert' kruga, niskhodyashchaya chast' – linejnaya; vtoryaya vetv': treugol'nik) v uprugoj poluploskosti s pomoshch'yu chislennogo metoda Musaeva V.K. [Modeling of momentum (the first branch: the ascending part – a quarter of a circle, the descending part – linear; the second branch: a triangle) in an elastic half-plane using the numerical method of Musayev V.K.]. *Problemy bezopasnosti rossijskogo obshchestva*, (2), 51–55. (In Russ.)

10. Musaev V.K. (2017). Primenenie volnovoj teorii seismicheskogo vozdeystviya dlya modelirovaniya uprugih napryazhenij v Kurpsajskoj plotine s gruntovym osnovaniem pri nezapolnennom vodohranilishche [Application of the wave theory of seismic action for modeling elastic stresses in the Kurpsay dam with a soil base in an unfilled reservoir]. *Geologiya i geofizika Yuga Rossii*, (2), 98–105. (In Russ.)

11. Musayev V.K. (2019). Mathematical modeling of non-stationary elastic waves stresses under a concentrated vertical exposure in the form of delta functions on the surface of the half-plane (Lamb problem). *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 15(2), 111–124.

## ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ THEORY OF PLASTICITY

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-6-483-496  
УДК 624.012:691.328.004.12

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Принцип наложения деформаций в теории ползучести

Е.А. Ларионов\*, В.И. Римшин, Т.В. Жданова

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26

\*i.v.ivn@mail.ru

#### История статьи:

Поступила в редакцию: 12 августа 2019 г.

Доработана: 23 октября 2019 г.

Принята к публикации: 09 декабря 2019 г.

#### Аннотация

**Цель** работы заключается в обосновании применимости в нелинейной постановке принципа наложения взаимонезависимых частичных деформаций ползучести, известного в линейной теории ползучести как принцип суперпозиции Л. Больцмана. **Методы.** В отличие от традиционного подхода материал конструктивного элемента (бетон, сталь, дерево, пластмасса) рассматривается как объединение звеньев со статистически распределенными прочностями. Модель прочностной структуры материала позволяет вывести реологические уравнения механического состояния. В процессе нагружения рассматриваются так называемые структурные напряжения способных к силовому сопротивлению звеньев материала. **Результаты.** Предложена модификация принципа суперпозиции Л. Больцмана, позволяющая применять его и при нелинейной зависимости деформаций ползучести от напряжений. Согласно концепции статистического распределения прочностей звеньев и линейной зависимости деформаций от структурных напряжений выведено реологическое уравнение механического состояния. Этот подход приводит к удобному при решении релаксационных задач линейному интегральному уравнению. Показана связь прочностной структуры материалов с энергией его целостности (максимальной энергии сопротивления разрушению) и с известной из экспериментов независимостью удельной к прочности деформаций от возраста бетона. Приведены корректные интерпретации некоторых известных уравнений механического состояния бетона.

**Ключевые слова:** ползучесть; прочность; напряжение; деформация; суперпозиция

#### Для цитирования

Ларионов Е.А., Римшин В.И., Жданова Т.В. Принцип наложения деформаций в теории ползучести // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 483–496. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-483-496>

### Введение

В представленной работе наряду с некоторыми вопросами теории ползучести строительных ма-

териалов (бетон, сталь, дерево, пластмасса) рассматривается значимый для этой теории принцип наложения деформаций и, в частности, корректность его применения. Принцип наложения заключается в суммировании в некоторый момент времени частичных приращений деформаций, порожденных последовательными предыдущими приращениями напряжений. Полное приращение деформации ползучести при условии взаимонезависимости частичных приращений определяется их суммой, согласно известному в теории линейной ползучести принципу суперпозиции Л. Больцмана. Это условие необходимо для применимости принципа наложения как принципа линейной суперпозиции.

Ларионов Евгений Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики; Author ID: 365207; Scopus ID: 57195228824.

Римшин Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры конструкций; член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук; Author ID 0000-0002-9084-4105; WoS P-4928-2015; Scopus ID: 56258934600.

Жданова Татьяна Владимировна, аспирант кафедры прикладной математики; eLIBRARY SPIN-код: 6911-8343.

© Ларионов Е.А., Римшин В.И., Жданова Т.В., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Следовательно, использование этого принципа в качестве принципа суперпозиции Л. Больцмана для взаимозависимых частичных приращений является некорректным и влечет ошибочные результаты. Например, перераспределение напряжений вследствие структурных повреждений при возрастающем нагружении влечет увеличение каждого частичного приращения деформации при последующих частичных приращениях напряжения, и условие взаимонезависимости не выполняется. Это обстоятельство приводит к необходимости модификации принципа суперпозиции Л. Больцмана для его применимости и при нелинейной зависимости деформаций от напряжений.

Полная деформация при одноосном нагружении представляет сумму мгновенной деформации и деформации ползучести, определяемых наряду с нагружением модулем упругости и мерой ползучести соответственно. Выделение в некоторых работах части мгновенной деформации, отвечающей эволюции модуля упругости, влечет такое представление уравнения состояния, которое позволяет ошибочные выводы при его некорректной интерпретации. Данная работа касается и этого вопроса.

Теории ползучести строительных материалов посвящено большое количество работ, значимые из которых принадлежат, например, Г.Н. Маслову, Н.Х. Арутюняну, С.В. Александровскому, А.А. Гвоздеву, В.М. Бондаренко, П.И. Васильеву, В.Г. Назаренко, Ю.Н. Работнову, А.Р. Ржаницыну, Р.С. Санжаровскому [2–11].

В неравновесном процессе силового деформирования ползучесть играет существенную роль. Напомним, что ползучесть – это явление природы при  $\tau > t_0$  начальной деформации, порожденной нагружением в момент  $\tau = t_0$ .

Принципиально важным является применение принципа наложения частичных деформаций ползучести при выводе реологического уравнения механического состояния материала. В линейной постановке эти частичные деформации взаимонезависимы, и их сумма представляет полное приращение деформации ползучести. В этом состоит известный в линейной теории ползучести принцип суперпозиции Л. Больцмана. В работах [9–11] в отличие от традиционного подхода применяется концепция прочностной структуры строительных материалов. Статистическое распределение прочностей образующих материалов звеньев порождает перераспределение нагружения на способные к силовому сопротивлению звенья, и взаимонезависимость частичных приращений деформации ползучести имеет место лишь относительно приращений напряжения на целых звеньях. Это допускает мо-

дификацию принципа суперпозиции Л. Больцмана и тем самым применение принципа наложения частичных деформаций ползучести и при нелинейной зависимости деформаций от напряжений.

Часть мгновенной деформации, отвечающей эволюции модуля упругости, в некоторых работах добавляется к деформации ползучести, а потому корректная запись уравнения состояния получается лишь при вычитании из мгновенной деформации отмеченной выше ее части. При этом к мере ползучести, естественно, добавляется мера эволюции модуля упругости, и потому интерпретация такого уравнения состояния без указанной добавки не является корректной. Соотнесение части мгновенной деформации с деформациями ползучести не является целесообразным, так как добавление этой части с вычитанием ее из мгновенной деформации приводит к равносильному уравнению механического состояния. Кроме того, эта операция из-за опечаток в обозначениях в некоторых работах влечет некорректные интерпретации. В [2; 3] мгновенные деформации представлены с учетом эволюции модуля упругости, что исключает добавление к мере ползучести меры этой эволюции, а в формулах (2.90) и (2.93) из [2] величины  $C^*(t, \tau)$  и  $C(t, \tau)$  перепутаны местами.

## 1. Уравнения состояния в линейной постановке

Реологическое уравнение механического состояния выводится при одноосном нагружении конструктивного элемента (балка, колонна). Постоянное на промежутке времени  $t_0 \leq \tau \leq t$  напряжение  $\sigma(\tau)$  порождает относительную деформацию

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + C_0(t, t_0)\sigma(t), \quad (1)$$

где  $E(t)$  – модуль упругости;  $C_0(t, t_0)$  – мера ползучести материала в момент  $\tau = t$  при нагружении в момент  $\tau = t_0$

Величины

$$\varepsilon_M(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} \text{ и } \varepsilon_{II}(t) = C_0(t, t_0)\sigma(t) \quad (2)$$

представляют мгновенную деформацию и деформацию ползучести соответственно.

Деформация ползучести  $\Delta\varepsilon(t, t_0)$ , отвечающая ступенчатому приросту

$$\Delta\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma(\tau_i) \quad (3)$$

напряжения  $\sigma(\tau)$ , определяется на основе принципа суперпозиции Л. Больцмана [1] наложением в момент  $\tau = t$  взаимонезависимых частичных приращений ползучести

$$\Delta\varepsilon_{\text{П}}(t, \tau_i) = C_0(t, \tau_i) \Delta\sigma(\tau_i). \quad (4)$$

Согласно Л. Больцману, частичное приращение  $\Delta\varepsilon_{\text{П}}(t, \tau_i)$  определяется лишь величиной  $\Delta\sigma(\tau_i)$  и его продолжительностью  $(t - \tau_i)$  и не зависит от остальных приращений  $\Delta\sigma(\tau_j)$ ,  $j \neq i$ . Это обстоятельство позволяет находить  $\Delta\varepsilon_{\text{П}}(t, t_0)$  наложением по  $\tau$  деформаций  $\Delta\varepsilon_{\text{П}}(t, \tau_i)$  и тем самым

$$\Delta\varepsilon_{\text{П}}(t, t_0) = \sum_{i=1}^n C_0(t, \tau_i) \Delta\sigma(\tau_i). \quad (5)$$

В общем случае напряжение  $\sigma(\tau)$  является кусочно-непрерывной функцией, а (5) представляет интегральную сумму для функции  $C_0(t, \tau)$ . Переходя в (5) к пределу при  $\max \Delta\sigma(\tau_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , получим

$$\Delta\varepsilon_{\text{П}}(t, t_0) = \int_{t_0}^t C_0(t, \tau) d\sigma(\tau). \quad (6)$$

Интегрируя (6) по частям, имеем

$$\Delta\varepsilon_{\text{П}}(t, t_0) = [C_0(t, t) - C_0(t, t_0)]\sigma(t_0) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (7)$$

Здесь  $C_0(t, t)$  так называемая кратковременная ползучесть. Величина  $C_0(t, t)$  экспериментально неопределима и как в большинстве работ по теории ползучести положим  $C_0(t, t) = 0$ .

С учетом порожденной напряжением  $\sigma(t_0)$  ползучести получим

$$\varepsilon_{\text{П}}(t) = - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C_0(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (8)$$

Добавляя к  $\varepsilon_{\text{П}}(t)$  мгновенную деформацию, выводим реологическое уравнение механического состояния материала при одноосном нагружении:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C_0(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (9)$$

Мера ползучести  $C_0(t, \tau)$  принимается в виде

$$C_0(t, \tau) = C_0(\infty, t^*) \cdot \Omega(\tau) f(t - \tau), \quad (10)$$

где  $\Omega(\tau)$  – функция старения;  $f(t - \tau)$  – функция наследственности;  $\tau = t^*$  – момент готовности строительного материала (для бетона  $t^* = 28$  суток);  $C_0(\infty, t^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_0(t, t^*)$ .

$$\text{Согласно равенству } \varepsilon(t, \tau) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \sigma(t) C_0(t, \tau)$$

при заданном напряжении  $\sigma(\tau)$  мгновенная деформация  $\varepsilon_{\text{М}}(t, \tau)$  и деформация ползучести  $\varepsilon_{\text{П}}(t, \tau)$  определяются соответственно параметрами  $E(\tau)$  и  $C_0(t, \tau)$ .

Влияние эволюции модуля упругости  $E(\tau)$  на деформацию  $\varepsilon_{\text{М}}(t, \tau)$  задается величиной  $C_{\text{Е}}(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)}$ , и приращению  $\Delta\sigma(\tau_i)$  напряжения  $\sigma(\tau)$  сопоставим деформацию

$$\tilde{\Delta\varepsilon}_{\text{Е}}(t, \tau_i) = \left[ \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau_i)} \right] \Delta\sigma(\tau_i). \quad (11)$$

Напряжению  $\Delta\sigma(t, t_0) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma(\tau_i)$  соответствует деформация

$$\tilde{\Delta\varepsilon}_{\text{Е}}(t, t_0) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau_i)} \right] \Delta\sigma(\tau_i). \quad (12)$$

Переходя в (12) к пределу, получим равенство

$$\Delta\varepsilon_{\text{Е}}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \left[ \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)} \right] d\sigma(\tau), \quad (13)$$

а после его интегрирования по частям

$$\Delta\varepsilon_{\text{Е}}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d(\tau) - \left[ \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)} \right] \sigma(t_0). \quad (14)$$

С учетом деформации, отвечающей изменению  $E(\tau)$  на промежутке  $[t_0, t]$  при  $\sigma(\tau) = \sigma(t_0)$ , имеем, что часть мгновенной деформации  $\varepsilon_M(t)$ , соответствующая эволюции  $E(\tau)$ , выражается величиной

$$\varepsilon_E(t) = \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d(\tau). \quad (15)$$

Равенство (15) можно вывести и следующим образом. За время  $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  напряжение  $\sigma(\tau_i)$  порождает деформацию

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_E(\tau, \tau_i) &= \left[ \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(\tau_i)} \right] \sigma(\tau_i) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right]_{\tau=\tau_i} \times \Delta\tau_i \cdot \sigma(\tau_i), \end{aligned} \quad (15.1)$$

где  $\tau_i < \zeta < \tau$ .

Согласно (15.1), имеем

$$d\varepsilon_E(\tau) = \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau$$

и снова получим (15).

В силу (15) величина

$$\varepsilon_M(t) - \varepsilon_E(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d(\tau) \quad (16)$$

есть часть мгновенной деформации без учета эволюции модуля упругости  $E(\tau)$ . Представим с

учетом  $\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(t)} \right] = 0$  уравнение (9) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \\ &- \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)} + C_0(t, \tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

Величина

$$C(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)} + C_0(t, \tau) = C_0(t, \tau) + C_E(t, \tau)$$

является суммой меры ползучести  $C_0(t, \tau)$  и меры  $C_E(t, \tau)$  влияния эволюции  $E(\tau)$ .

Добавление к  $C_0(t, \tau)$  слагаемого  $C_E(t, \tau)$  отражает влияние твердения материала на упругое деформирование [2]. Заметим, что в [2; 3]  $C_0(t, \tau)$  и  $C(t, \tau)$  обозначены соответственно  $C(t, \tau)$  и  $C^*(t, \tau)$ , причем

$$C^*(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)} + C(t, \tau). \quad (18)$$

При  $\tilde{C}_E(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)}$  получим  $\tilde{\varepsilon}_E(t) = -\int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau$ , и уравнение (9) представляется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \\ &- \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C_0(t, \tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

Равносильные уравнения (9), (17) и (19) означают, что добавление части  $\varepsilon_E(t)$  деформации  $\varepsilon_M(t)$  к деформации  $\varepsilon_{II}(t)$  возможно лишь при вычитании этой части из  $\varepsilon_M(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)}$ .

В силу (19) равенства

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C_0(t, \tau) \right] d\tau, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{E(\tau)} \right) d\tau - \\ &- \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C_0(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (21)$$

не имеют места. Действительно, согласно (21), вычитание из деформации  $\varepsilon_M(t)$  величины  $\varepsilon_E(t)$  без ее добавления к  $\varepsilon_{II}(t)$  сохраняет равенство  $\varepsilon(t) = \varepsilon_M(t) + \varepsilon_{II}(t)$ , что невозможно.

**Замечание 1.** Утверждение в [4], [17] об ошибочности уравнения (17) в силу вида  $C(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)} + C_0(t, \tau)$  не является корректным. Это утверждение справедливо лишь в отношении

уравнения (21). Уравнение ползучести бетона в работе [16] представлено в виде

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau; \quad (22)$$

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau),$$

равносильном уравнению (9) при  $C(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} -$

$-\frac{1}{E(\tau)} + C_0(t, \tau)$ , и только в этом случае приме-

няется принцип наложения и получается корректное уравнение.

Согласно (20), имеем уравнение

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau, \quad (23)$$

которое при  $C(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)} + C_0(t, \tau)$  рав-

носильно уравнению (9), а при  $C(t, \tau) = C_0(t, \tau)$  неверному равенству (21).

В работе [11] в нелинейной постановке с учетом эволюции  $E(\tau)$  получено уравнение

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\sigma_c(\tau), \quad (24)$$

приводящееся аналогично уравнению (23) при гипотезе  $C(t, t) = 0$  к виду

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial C_0(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (25)$$

Здесь  $\sigma_c(t)$  так называемое структурное напряжение.

**Замечание 2.** В работе [17], неверно полагая (как и в случае линейной постановки) отсутствие в функции  $C(t, \tau) = C_0(t, \tau) + C_E(t, \tau)$  слагаемого  $C_E(t, \tau)$ , утверждается ошибочность уравне-

ния (24). Согласно соотношению  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} +$

$+C(t, \tau)\sigma(t)$ , эволюция  $E(\tau)$  порождает часть

$\varepsilon_E(t)$  именно мгновенной деформации, в арифметическом прибавлении которой к деформации ползучести  $\varepsilon_{II}(t)$  нет необходимости. Представление

$$\varepsilon(t) = [\varepsilon_M(t) - \varepsilon_{II}(t)] + [\varepsilon_{II}(t) + \varepsilon_E(t)], \quad (26)$$

сопутствующее общей мере  $C(t, \tau) = C_0(t, \tau) + C_E(t, \tau)$  этих деформаций, приводит лишь к путанице в обозначениях и не является целесообразным.

Следует подчеркнуть, что мера  $C(t, \tau)$  есть сумма различных по своей физической природе мер  $C_0(t, \tau)$  и  $C_E(t, \tau)$  и не может являться мерой ползучести. Гипотеза, что  $C(t, \tau)$  – это мера ползучести, приводит к некорректному уравнению (21), содержащему (согласно классификации в [17]) три вида ошибок:

- 1) неверное определение значения  $\varepsilon_M(t)$ ;
- 2) неправильное нахождение выражения ядра ползучести;
- 3) ошибочное причисление к деформациям ползучести мгновенных упругих деформаций.

В [17] полагают, что источником перечисленных ошибок является не указанная выше интерпретация  $C(t, \tau)$ , а принцип наложения деформаций ползучести.

**Замечание 3.** Принцип наложения взаимонезависимых частичных деформаций ползучести (известный в линейной постановке как принцип суперпозиции Больцмана) применяется для определения деформаций ползучести при переменном напряжении  $\sigma(\tau)$  и не имеет отношения к ошибочной операции  $[\varepsilon_{II}(t) + \varepsilon_E(t)]$  прибавления деформации  $\varepsilon_E(t)$  к деформации  $\varepsilon_{II}(t)$  без ее вычитания из мгновенной деформации  $\varepsilon_M(t)$ .

**Замечание 4.** В работе [4] полагают, что второе слагаемое в (17) лишнее, появившееся из-за пренебрежения эволюцией  $E(\tau)$  в мгновенной деформации  $\varepsilon_M(t)$ . На самом деле как раз учет эволюции упругой податливости  $\frac{1}{E(\tau)}$  порождает

часть  $\varepsilon_M(t)$ , и, согласно соотношению  $d\varepsilon(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} \right) d\tau$ , имеем

$$\varepsilon_M(t) = \varepsilon_M(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma(\tau)}{E(\tau)} + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{E(\tau)} \right) d\tau.$$

Последнее слагаемое этого равенства является упруго-

пластической деформацией  $\varepsilon_E(t)$ . Эта часть мгновенной деформации добавлена к деформации ползучести. Поскольку  $\varepsilon_M(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma(\tau)}{E(\tau)} = \varepsilon_M(t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{E(\tau)} \right) d\tau$  и  $\varepsilon(t) = \varepsilon_M(t) + \varepsilon_{II}(t)$  первые два слагаемых представляют мгновенную деформацию без учета эволюции  $E(\tau)$ .

Существенным поводом для критических замечаний в [17] послужило представление уравнения

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (27)$$

в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{E(\tau)} \right) d\tau - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (28)$$

допускающем при отсутствии пояснения структуры его слагаемых интерпретацию, приводящую к противоречию.

Источником представления (28) является предложенное в [3] добавление к мере простой ползучести  $C(t, \tau)$  слагаемых для учета эволюции модуля упругости  $E(\tau)$  мгновенной деформации  $\varepsilon_M(t)$ . По-видимому, определенное обоснование этого предложения состоит в проявляемом в процессе разгрузки возникновении пластической части  $\varepsilon_{МП}(t)$  деформации  $\varepsilon_M(t)$ . Поскольку накопление  $\varepsilon_{МП}(t)$  происходит (как и деформация ползучести  $\varepsilon_{II}(t)$ ) в течение промежутка  $[t_0, t]$ , то деформация  $\varepsilon_{МП}(t)$  условно полагается запаздывающей и рассматривается вместе с  $\varepsilon_{II}(t)$ . Формальность этого подхода отмечена в [2] замечанием, что первые два слагаемых равенства

$$C^*(t, \tau) = \frac{1}{E_M(t_0)} - \frac{1}{E_M(t)} + C(t, t_0) \quad (29)$$

необходимы лишь для отражения влияния твердения бетона на упругое деформирование. В монографии [2] при выводе уравнения (2.87) механического состояния бетона соотношением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E_M(t)} = 0 \quad (30)$$

констатируется, что мгновенная деформация  $\varepsilon_M(t)$  определяется (наряду с силовым нагружением при  $t = \tau$ ) величиной модуля  $E(t)$  при любой эволюции  $E(\tau)$  в промежутке  $[t_0, t]$ .

В частности, при  $E(\tau) = E(t)$  приращение  $\Delta \varepsilon_M(t, t_0)$ , порожденной любым режимом приращения нагружения  $\Delta \sigma(t) = \int_{t_0}^t d\sigma(\tau)$  в линейной по-

становке, определяется равенством  $\Delta \varepsilon_M(t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{\sigma(\tau)}{E(t)}$ ,

а в нелинейной [2]  $\Delta \varepsilon_M(t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{S_M(\tau)}{E(t)}$ , где  $S_M(\tau)$  – функция напряжений мгновенных деформаций.

Поскольку

$$\int_{t_0}^t \frac{S_M(\tau)}{E_M(\tau)} = \frac{S_M(\tau)}{E_M(\tau)} \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t S_M(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau, \quad (31)$$

то приведенные в [2] равенства (2.86) и

$$\int_{t_0}^t \frac{S_M}{E_M(\tau)} = \frac{1}{E_M(t)} \int_{t_0}^t dS_M = \frac{1}{E_M(t)} S_M \left[ \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \right] \Big|_{t_0}^t \quad (32)$$

означают учет влияния твердения бетона в деформации  $\varepsilon_M(t)$  и исключают это влияние на меру  $C(t, \tau)$ , выражаемую добавлением слагаемых  $\frac{1}{E(\tau)}$

и  $\frac{1}{E(t)}$ . Отметим, что в [2] в равенствах (2.86) и

(2.87) вместо  $C(t, \tau)$  по техническим причинам напечатано  $C^*(t, \tau)$ , что не соответствует примененной в [2] логике вывода этих равенств.

Согласно [2], величина  $C^*(t, \tau)$  представляет сумму меры ползучести  $C(t, \tau)$  и меры  $C_E(t, \tau)$  влияния твердения на деформацию  $\varepsilon_M(t)$ .

## 2. Уравнения состояния в нелинейной постановке

Эксперименты показывают, что зависимость деформаций  $\varepsilon(\tau)$  от напряжений  $\sigma(\tau)$  является нелинейной. Согласно А.А. Гвоздеву [5], нелинейность возникает вследствие более интенсивного развития деформаций ползучести при сохранении ли-

нейной зависимости упругих деформаций и тем самым

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial \tilde{C}(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (33)$$

Мера ползучести  $\tilde{C}(t, \tau)$  подбирается согласованием с экспериментальными данными. Крутой подъем экспериментальных кривых ползучести, согласно А.А. Гвоздеву [5], означает быстрое натекание  $\varepsilon_{\Pi}(t, \tau)$  при малых значениях  $t - \tau$ . В работе [6] в согласии с нелинейными диаграммами  $\varepsilon - \sigma$  Еврокодов приводится интегральное уравнение, имеющее при  $E(\tau) = E$  и  $R(\tau) = R$  ( $R(\tau)$  – прочность) вид

$$\varepsilon(t) = f_2[\sigma(t)] - \int_{t_0}^t f_1[\varepsilon_M(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (34)$$

Здесь  $f_2[\sigma(t)] = \varepsilon_M(t)$ , а  $f_1[\varepsilon_M(\tau)] = \sigma(\tau)$  и (34) – нелинейное уравнение с линейной ползучестью. Таким образом, в уравнении (33) игнорируется нелинейность упругих, а в уравнении (34) запаздывающих деформаций ползучести. Далее покажем, что силовое нагружение порождает нелинейность по  $\sigma(\tau)$  обоих видов деформаций.

В работе [7] для нелинейной теории ползучести предлагается уравнение

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (35)$$

**Замечание 5.** В (33) и (34) интегральное слагаемое выводится в рамках линейной теории ползучести, а в (35) неявно предполагается (без обоснования) применимость принципа линейной суперпозиции деформаций ползучести.

В.М. Бондаренко нелинейную зависимость упругих и запаздывающих деформаций от  $\sigma(\tau)$  представляет с помощью нелинейных функций. В монографии [2] выводится уравнение

$$\varepsilon(t) = \frac{S_M[\sigma(t)/R(t)]}{E(t)} - \int_{t_0}^t S_{\Pi}[\sigma(\tau)/R(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (36)$$

При этом существенна ссылка на работу [8], где высказана применимость принципа суперпозиции Л. Больцмана и для нелинейных деформаций

ползучести при условии признания взаимозависимости ее частичных приращений. Тем самым, как и в работе [4], заранее предполагается взаимозависимость частичных деформаций ползучести относительно частичных приращений функции напряжений  $S_{\Pi}[\sigma(\tau)/R(\tau)]$ .

Возникшая в теории бетона необходимость обоснования нелинейных реологических уравнений механического состояния сопряжена с принципом наложения нелинейных частичных деформаций ползучести – ключевым моментом вывода этих уравнений.

В работах [9–11] приведена модификация принципа суперпозиции Л. Больцмана при нелинейной зависимости деформаций  $\varepsilon(\tau)$  от напряжений  $\sigma(\tau)$ .

Основой вывода принципа наложения в нелинейной постановке является концепция статистического распределения прочности  $R_i(\tau)$  звеньев (слоев, волокон), составляющих материал конструктивного элемента.

**Замечание 6.** В отличие от принятой нами концепции, восходящей к [12], в предыдущих работах конструктивный материал предполагался изотропным по прочности составляющих его звеньев. Силовое деформирование разрушало часть звеньев и напряжения с них перераспределялись на целые звенья. Например, одноосное усилие  $N(\tau)$  разрушает часть звеньев и тем самым оно воспринимается лишь работоспособной площадью  $A(\tau)$  сечения, порождая нормальное напряжение

$$\sigma_c(\tau) = \frac{N(\tau)}{A(\tau)}. \quad (37)$$

Напряжение  $\sigma_c(\tau)$ , возникающее вследствие структурных повреждений, называется структурным и связано с расчетным напряжением

$$\sigma(\tau) = \frac{N(\tau)}{A} \quad (38)$$

соотношением

$$\sigma_c(\tau) = \frac{A}{A(\tau)} \sigma(\tau), \quad (39)$$

где  $A$  – площадь нормального сечения элемента.

Структурные повреждения, описываемые функцией  $S^0(\tau) = \frac{A}{A(\tau)}$ , порождают нелинейную зависимость деформаций от линейных напряжений  $\sigma(\tau)$ . Функция  $S^0(\tau)$  нелинейности напряжений опре-

деляется их уровнем  $\eta(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}$ , где  $R(\tau)$  –

текущая прочность материала. В приложениях используются функции [3]

$$S^0(\tau) = 1 + V \left[ \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \right]^m, \quad (40)$$

$$S^0(\tau) = a\sigma(\tau)^b / \sigma(\tau), \quad (41)$$

где  $V$ ,  $m$ ,  $a$  и  $b$  – эмпирические параметры.

Физико-химические процессы в материале влекут изменения параметров  $R_i(\tau)$  и функции  $S^0(\tau)$ .

В частности, деградация  $R_i(\tau)$  наряду с  $S^0(\tau)$  увеличивает  $\sigma_c(\tau) = S^0(\tau)\sigma(\tau)$  и при  $\sigma(\tau) = \text{const}$ ,

а тем самым порожденную постоянным напряжением  $\sigma(\tau) = \sigma(t_0)$  начальную деформацию. Это явление последующего увеличения начальной деформации при  $\sigma(\tau) = \text{const}$  называют ползучестью.

Деформация работоспособной части элемента связана с порождающим ее структурным (истинным) напряжением законом Гука

$$\sigma_c(\tau) = E(\tau, t_0)\varepsilon(\tau, t_0), \quad (42)$$

где упруго-пластический модуль  $E(\tau, t_0)$  определяется равенством

$$E(\tau, t_0) = \frac{E(\tau)}{1 + E(\tau)C(\tau, t_0)}. \quad (43)$$

В (43) – модуль упругих деформаций;  $C(\tau, t_0)$  – мера ползучести в момент  $\tau$  при нагружении в момент  $t_0$ .

Соотношения (42) и (43) вытекают из представления деформации  $\varepsilon(\tau, t_0)$  суммой мгновенной упругой деформации

$$\varepsilon_M(\tau, t_0) = \frac{\sigma_c(\tau)}{E(\tau)}. \quad (44)$$

и деформации ползучести [9]

$$\varepsilon_{II}(\tau, t_0) = C(\tau, t_0)\sigma_c(\tau). \quad (45)$$

Согласно (39) и (42),

$$\varepsilon(\tau, t_0) = \frac{S^0(\tau)\sigma(\tau)}{E(\tau, t_0)}. \quad (46)$$

Равенства (44) – (46) означают, что деформации  $\varepsilon(\tau, t_0)$ ,  $\varepsilon_M(\tau, t_0)$  и  $\varepsilon_{II}(\tau, t_0)$  являются нелинейными функциями расчетного напряжения  $\sigma(\tau)$ .

Предполагая отсутствие структурных повреждений, получим  $S^0(\tau) = 1$  и

$$\varepsilon(\tau, t_0) = \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau, t_0)}. \quad (47)$$

Для вывода нелинейного уравнения ползучести необходимо найти приращение  $\Delta\varepsilon_{II}(t, t_0)$  деформации ползучести при переменном на отрезке  $[t_0 \leq \tau \leq t]$  времени структурном напряжении.

При силовом деформировании конструктивно-го элемента статистическое распределение прочности  $R_i(\tau)$  его звеньев (например, по нормальному закону) влечет непрерывное перераспределение по сечению напряжений  $\sigma(\tau)$  на целые

звенья. Ступенчатому приросту  $\Delta\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma(\tau_i)$

уже не отвечают взаимонезависимые, как в линейном случае, частные приращения деформаций ползучести. В самом деле действие приложенного в момент времени  $\tau_i$  приращения  $\Delta\sigma(\tau_i)$  в момент  $\tau_j$  ( $j > i$ ) усиливается из-за действия приращения  $\Delta\sigma(\tau_j)$ , разрушающего часть целых до момента  $\tau_j$  (звеньев) [9].

Пусть  $(V_\tau)$  часть элемента  $(V)$ , состоящая из целых в момент  $\tau$  его звеньев. Под действием напряжения  $\sigma_c(\tau)$  часть  $(V_\tau)$  непрерывно уменьшается до  $(V_t)$ , состоящей из совокупности целых в течение всего промежутка  $[t_0, t]$  звеньев элемента.

Деформации частей  $(V_t)$  и  $(V_\tau)$  под действием напряжения  $\sigma_c(\tau)$  совпадают. Существенно,

что ступенчатый прирост  $\Delta\sigma_c = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_c(\tau_i)$  на-

пряжения  $\sigma(\tau)$  порождает взаимонезависимые в смысле Л. Больцмана частные приращения деформаций ползучести.

Приращения  $\Delta\sigma_c(\tau_i)$  не разрушают звенья  $(V_t)$  и именно это влечет независимость величины

$$\Delta\varepsilon_{II}(\tau_i) = C_0(t, \tau_i)\Delta\sigma_c(\tau_i) \quad (48)$$

от остальных приращений  $\Delta\sigma_c(\tau_j)$ , ( $j \neq i$ ), а потому

$$\Delta \varepsilon_{\Pi}(t, t_0) = \sum_{i=1}^n C_0(t, \tau_i) \Delta \sigma_c(\tau_i). \quad (49)$$

С помощью приведенных выше для  $\sigma(\tau)$  операций получим реологическое уравнение механического состояния в нелинейной постановке

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial C_0(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (50)$$

Соотношение (49) является аналогом принципа наложения Л. Больцмана.

Согласно (44), с учетом  $\sigma_c(\tau) = S^0[\sigma(\tau)]\sigma(\tau)$  имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{S^0[\sigma(t)]\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t S^0[\sigma(\tau)]\sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [C_0(t, \tau)] d\tau. \quad (51)$$

**Замечание 7.** В уравнении (51) присутствует единая функция напряжений  $S[\sigma(\tau)]$ , а в уравнении (36) различные функции напряжений  $S_M[\sigma(\tau)/R(\tau)]$  и  $S_{\Pi}[\sigma(\tau)/R(\tau)]$  для мгновенных и запаздывающих деформаций. Эти функции суть напряжения, порождающие соответствующие деформации. В физическом аспекте силовое напряжение порождает обе составляющие  $\varepsilon_M(t)$  и  $\varepsilon_{\Pi}(t)$  деформации  $\varepsilon(t)$ , и поэтому  $S_M[\sigma(\tau)/R(\tau)] = S_{\Pi}[\sigma(\tau)/R(\tau)]$ . Таким образом, представление деформации  $\varepsilon(t)$  в виде  $\varepsilon(t) = \varepsilon_M(t) + \varepsilon_{\Pi}(t)$  не означает, что мгновенные и запаздывающие деформации порождены разными напряжениями.

Согласно диаграмме  $\varepsilon - \sigma$ , имеем нелинейную зависимость  $\varepsilon_M(t) = f[\sigma(t)]$ , которую по аналогии с равенством  $\varepsilon_M(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)}$  представим в

$$\text{виде } \varepsilon_M(t) = \frac{S[\sigma(t)]}{E(t)}, \text{ где } S[\sigma(\tau)] = E(t)\varepsilon_M(t).$$

Функцию  $S[\sigma(\tau)]$  назовем структурным напряжением (так как силовое нагружение влечет изменение структуры материала). Поскольку

$$dS[\sigma(\tau)] = d[E(t)\varepsilon_M(t)],$$

$$\text{то } d\varepsilon_{\Pi}(t, \tau) = C(t, \tau) dS[\sigma(\tau)].$$

Из равенства  $S[\sigma(\tau)] = S^0 \cdot \sigma(\tau)$  находим функцию нелинейности напряжений  $S^0$ :

$$S^0 = \frac{\varepsilon_M(\tau)E(\tau)}{\sigma(\tau)}, \quad (52)$$

получаем соотношение

$$d\varepsilon_{\Pi}(t, \tau) = C(t, \tau) d[S^0\sigma(\tau)]. \quad (53)$$

Согласно (39), функция  $S^0$  определяется уровнем  $\eta(\tau) = \sigma(\tau)/R(\tau)$  напряжений и, как показывают эксперименты, не зависит от возраста  $\tau$  материала, а потому

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S^0[\eta(\tau)] = 0. \quad (54)$$

Равенства (53) и (54) означают, что справедливо соотношение

$$d\varepsilon(t, \tau) = C_0(t, \tau) S^0[\eta(\tau)] d\sigma(\tau), \quad (55)$$

позволяющее применение принципа наложения, тем самым

$$\Delta \varepsilon_{\Pi}(t, \tau) = \int_{t_0}^t C_0(t, \tau) S^0[\eta(\tau)] d\sigma(\tau). \quad (56)$$

$$\Delta \varepsilon_{\Pi}(t, \tau) = C^*(t, t_0) S^0[\eta(t_0)] \sigma_0 - \int_{t_0}^t S^0[\eta(\tau)] \sigma(\tau) \frac{\partial C^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (57)$$

а потому мы снова получим уравнение (51).

**Замечание 8.** Принципиальное для применимости принципа Больцмана равенство (54) является следствием статистического распределения прочностей звеньев. Функция  $S^0(\tau)$  определяется отношением доли всех разрушенных звеньев к доле всех целых звеньев. В модели одноосного нагружения имеем

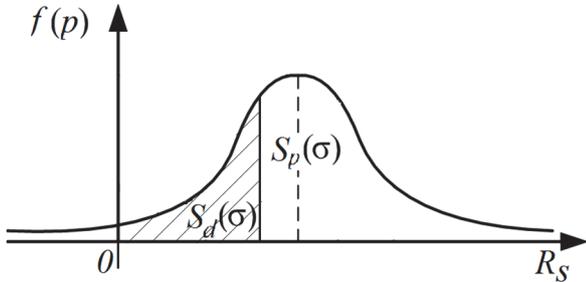
$$S^0(\tau) = \frac{A}{A(\tau)} = \frac{A(\tau) + A - A(\tau)}{A(\tau)} = 1 + \frac{A_d(\tau)}{A(\tau)}, \quad (58)$$

где  $A_d(\tau)$  – площадь поперечного сечения всех потерявших способность силового сопротивления звеньев.

На приведенном рисунке площадям  $A_d(\tau)$  и  $A(\tau)$  соответствуют площади  $S_d(\sigma)$  и  $S_p(\sigma)$ , интегрально выражающие поврежденную и целые части нагруженного элемента.

Поскольку физико-химические процессы происходят одинаково во всех звеньях, то заданное отношение площадей  $S_d(\sigma)/S_p(\sigma)$  не зависит от  $\tau$ ,

что и влечет соотношение (54). В частности, заданный уровень  $\eta(\tau) = \sigma(\tau) / R(\tau)$  не зависит от  $\tau$ , что подтверждается экспериментами [18], согласно которым удельная по отношению к прочности  $R(\tau)$  деформация не зависит от возраста бетона.



**Рисунок.** Плотность вероятности распределения прочностей звеньев:  $R_s$  – структурная прочность

[Figure. Probability density of the strength distribution of links:  $R_s$  – structural strength]

Итак, на основе статистического распределения прочностей мы привели еще одно обоснование принципа суперпозиции деформаций ползучести Больцмана в нелинейной постановке.

**Замечание 9.** В предположении  $C(t, t) = 0$ , согласно (54), и  $S^0(\tau)\sigma(\tau) = \varepsilon_M(\tau)E(\tau)$  имеем

$$\varepsilon_{II}(t) = -\int_{t_0}^t \varepsilon_M(\tau) E(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (59)$$

а при  $E(\tau) = E(t)$  (для зрелого и старого бетона):

$$\varepsilon_{II}(t) = -\int_{t_0}^t \varepsilon_M(\tau) \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau; \quad (60)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_M(t) - \int_{t_0}^t \varepsilon_M(\tau) \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (61)$$

Очевидно, что аналогом линейного относительно  $\sigma_c(\tau)$  интегрального уравнения при условии  $E(\tau) = E$  является линейное относительно упругой деформации уравнение (61).

Функция  $\varphi(t, \tau) = E(t)C_0(t, \tau)$  называется характеристикой ползучести.

В работе [6] уравнение линейной ползучести

$$\varepsilon_{II}(t) = -\int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (62)$$

выражается через  $\varepsilon_M(\tau)$  с помощью функции  $\varphi_H(\tau)$ , отвечающей нелинейной постановке.

$$\text{При простом нагружении } \varphi(t, \tau) = \frac{\varepsilon_{II}(t, \tau)}{\varepsilon_M(\tau)}.$$

Поскольку в [6] предполагается, что ползучесть порождена напряжением  $S(\tau) = \varepsilon_M(\tau)E(\tau) = S_0(\tau)\sigma(\tau)E(\tau)$ , то

$$\varphi_H(t, \tau) = \frac{E(\tau)C(t, \tau)}{S^0(\sigma)}. \quad (63)$$

Далее в [6]

$$\varepsilon_{II}(t) = -\int_{t_0}^t \varepsilon_M(\tau) \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (64)$$

и, согласно (54),

$$\varepsilon_{II}(t) = -\int_{t_0}^t \frac{\varepsilon_M(\tau)}{S^0(\sigma)} \frac{\partial [E(\tau)C(t, \tau)]}{\partial \tau} d\tau. \quad (65)$$

Очевидно, что лишь при  $E(\tau) = \text{const}$  имеет место заранее предполагаемое в [6] соотношение

$$\varepsilon_{II}(t) = -\int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (66)$$

В работе [13] для развития структурно-энергетического подхода в теории железобетона введено понятие энергии целостности элемента  $W(\tau)$  – максимальной энергии его сопротивления разрушению. Этот параметр равен работе разрушения элемента в момент  $\tau$  и складывается из энергии целостности  $W_i(\tau)$  и его звеньев.

Суммарная энергия потерявших способность к силовому сопротивлению звеньев образует рассеянную часть  $W_d(\tau)$  энергии  $W(\tau)$  и определяет необратимую часть  $\varepsilon_H(t)$  деформации  $\varepsilon(t)$ . Деформация  $\varepsilon_H(t)$  порождается напряжением  $\sigma_d(\tau)$ , полученным как добавка к напряжению  $\sigma(\tau)$  в результате разрушения части звеньев. Величина  $W_p(\tau) = W(\tau) - W_d(\tau)$  представляет энергетический запас целостности. Энергиям  $W_d(\tau)$  и  $W_p(\tau)$  отвечают на рисунке площади  $S_d(\sigma)$  и  $S_p(\sigma)$ ,

и величина  $\alpha(\sigma) = \frac{\sigma_d(\tau)}{\sigma(\tau)}$  не зависит от  $\tau$ .

Сумма  $[\sigma(\tau) + \sigma_d(\tau)] = [1 + \alpha(\tau)]\sigma(\tau)$  является структурным напряжением, и, согласно равенству  $S^0(\sigma)\sigma(\tau) = [1 + \alpha(\tau)]\sigma(\tau)$ , имеем

$S(\tau) = [1 + \alpha(\tau)]\sigma(\tau)$ . В частности,  $\alpha(\tau) = V \cdot \left[ \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \right]^m$ ,

где  $V$  и  $m$  – эмпирические параметры.

В силу  $\frac{\partial \alpha(\sigma)}{\partial \tau} = 0$  необратимая часть  $\varepsilon_{\text{пн}}(t)$

деформации  $\varepsilon_{\text{п}}(t)$  находит наложением и при  $C(t, t) = 0$ :

$$\varepsilon_{\text{пн}}(t) = - \int_{t_0}^t \alpha[\sigma(\tau)] \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (67)$$

В результате необратимые деформации силового происхождения

$$\varepsilon_{\text{н}}(t) = \frac{\alpha[\sigma(t)]\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \alpha[\sigma(\tau)]\sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (68)$$

поэтому

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau + \frac{\alpha[\sigma(t)]\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \alpha[\sigma(\tau)]\sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (69)$$

В предложенной А.А. Гвоздевым двухкомпонентной нелинейной теории ползучести [5; 14] мгновенные деформации линейны по  $\sigma(\tau)$ , величина  $\varepsilon_{\text{пн}}(t)$  названа деформацией ползучести первого рода, а второе слагаемое в (68) – второго рода.

При этом

$$\varepsilon_{\text{пн}}(t) = \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] F_{\text{н}}(t, \tau) d\tau, \quad (70)$$

где  $f[\sigma(\tau)]$  – нелинейная функция напряжений, а функция  $F_{\text{н}}(t, \tau)$  строится на основе экспериментальных данных [14].

Величину  $\varepsilon_{\text{пн}}(t)$  невозможно определить наложением частичных деформаций ползучести, и в традиционном смысле она не деформация ползучести, каковой является ее часть  $\varepsilon_{\text{пн}}(t)$ . Авторы в [4] полагают, что  $\varepsilon_{\text{н}}(t)$  представляет нелинейную (необратимую) часть  $\varepsilon_{\text{мн}}(t)$  мгновенной

деформации  $\varepsilon_{\text{м}}(t)$ , присовокупленную к линейной деформации ползучести, и тем самым [6] при  $C(t, t) = 0$  и  $E(t) = E$

$$\varepsilon(t) = f_2[\sigma(t)] - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (71)$$

Получается реологическое уравнение с линейной ползучестью.

**Замечание 10.** Пренебрежение в нелинейной постановке необратимой частью  $\varepsilon_{\text{пн}}(t)$  деформации ползучести приводит к ошибочному реологическому уравнению, что имеет место и в рекомендациях Еврокодов [6; 15].

## Заключение

Обоснование нелинейных реологических уравнений механического состояния строительных материалов (в частности, бетона) не реализуемо без модификации принципа суперпозиции Л. Больцмана относительно соответствующего силового фактора – структурного напряжения.

Суть принципа Больцмана заключается во взаимонезависимости частичных деформаций ползучести, и именно на этой основе реализуется обоснованный подсчет деформаций ползучести. Существенно, что модификация принципа суперпозиции Больцмана применяется и при нелинейной зависимости деформаций от расчетных напряжений. Статистическое распределение прочностей фракций, составляющих бетонный элемент, влечет перераспределение напряжений и порождает структурное напряжение на его способных к силовому сопротивлению фракциях.

Структурное напряжение (функция напряжений) едино для мгновенных и длительных деформаций, порождая оба эти вида.

Функция напряжений, введенная в [2–7] является структурным напряжением, порождающим как мгновенную  $\varepsilon_{\text{м}}(t)$ , так и запаздывающую  $\varepsilon_{\text{п}}(t)$  деформации.

В [6] нелинейное реологическое уравнение содержит нелинейно зависящую от расчетного напряжения мгновенную деформацию и линейную зависящую от этого напряжения деформацию ползучести. Это означает, что упомянутые деформации порождены различными напряжениями, что противоречит физической сущности явления.

Причина нелинейности функции  $\varepsilon(t) = f[\sigma(t)]$  – перераспределение напряжений  $\sigma(\tau)$ , а не изме-

нение характеристик  $E(\tau)$  и  $C(t, \tau)$  материала, определяемых лишь физико-химическими в нем процессами.

В [17] принцип наложения представлен «как основополагающая ошибка теории ползучести». Следует подчеркнуть, что этот принцип как суммирование последовательным по времени наложением запаздывающих частичных деформаций ползучести является естественным и при их взаимонезависимости корректным. Таким образом, не принцип наложения (это лишь схема суммирования) является ошибкой, а его ошибочное применение как принципа суперпозиции Л. Больцмана для взаимозависимых частичных приращений ползучести. Принцип суперпозиции Л. Больцмана (как наложение лишь взаимонезависимых деформаций) представляет простой конструктивный способ определения запаздывающих деформаций и вывода реологических уравнений механического состояния. Более того, этот принцип к возникающим при некорректной интерпретации структуры и параметров уравнения механического состояния ошибкам не имеет отношения.

Приведенные в [17] утверждения, касающиеся ошибочности применения принципа наложения как обычного суммирования [16], справедливы и созвучны с отмеченным в данной работе необходимым условием линейной суперпозиции.

Корректные критические замечания, приведенные в [4; 17] и в данной работе, полезны и необходимы для дальнейшего развития теории бетона и железобетона. К отмеченным в [17] ошибкам принцип наложения не имеет отношения, так как их возможное наличие порождено не применением этого принципа.

Для дальнейшего совершенствования норм необходима добротная теория, безусловно, включающая значимые при расчете железобетонных конструкций результаты. Некоторые приложения теории ползучести в расчетах железобетонных сооружений на долгосрочную безопасность отражены в работах [19–27].

#### Список литературы

1. Boltzmann L.E. Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung // Sitzungsberichte Kaiserliche Akademie Wissenschaft Wien Mathematische-Naturwissenschaft. 1874. 70. Pp. 275–306.
2. Бондаренко В.М. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М.: Стройиздат, 1982. 287 с.
3. Александровский С.В., Васильев П.И. Экспериментальные исследования ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1976. С. 97–152.

4. Санжаровский П.С., Манченко М.М. Ошибки в теории ползучести и современные нормы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 3. С. 25–32.

5. Гвоздев А.А. Замечание о нелинейной теории ползучести бетона при одноосном сжатии // Изв. АН СССР МТТ. 1972. № 5. С. 33.

6. Санжаровский П.С. Нелинейная наследственная теория ползучести // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 1. С. 63–68. URL: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/11070>

7. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

8. Persoz B. Le Principe de superposition de Boltzman // Cahier Groupe Franzitudeszhicl. 1957. 2. No. 1.

9. Ларионов Е.А., Бондаренко В.М. Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях элементов конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 2. С. 16–22.

10. Ларионов Е.А., Ларионов А.Е. К теории нелинейной ползучести // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 58–65.

11. Ларионов Е.А., Ларионов А.Е. К теории нелинейной ползучести // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 4. С. 35–39.

12. Wiebull W. A statistical representation of fatigue failures in solids // Trans. Roy. Inst. Techn. 1949. No. 27. 51 p.

13. Ларионов Е.А. Длительное силовое сопротивление и безопасность сооружений: дис. ... д. т. н. М., 2005.

14. Галустов К.З. Нелинейная теория ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 248 с.

15. Беглов А.Д., Санжаровский П.С. Евростандарты и нелинейная теория железобетона. СПбГАСУ, 2011. 309 с.

16. Ciorino M.A. Analysis of structural effects of time-dependent behavior of concrete an internationally harmonized format // PlenaryPapers of III All-Russian (International) Conference on Concrete and Reinforced Concrete. 2014. Vol. 7. Pp. 338–350.

17. Санжаровский П.С., Тер-Эммануэльян Т.Н., Манченко М.М. Принцип наложения как основополагающая ошибка теории ползучести и стандартов по железобетону // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 92–103. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104>.

18. Александровский С.В., Соломонов В.В. Зависимость деформаций ползучести бетона от начального уровня напряжений // Межотраслевые вопросы строительства. Отечественный опыт: реферативный сборник. 1972. Вып. 6.

19. Krishan A.L., Narkevich M.Yu., Sagadatov A.I. Experimental investigation of selection of warm mode for high-performance self-stressing self-compacting concrete // 7<sup>th</sup> International Symposium on Actual Problems of Computational Simulation in Civil Engineering (APCSCE), Novosibirsk, Russia, Jul. 1–8, 2018.

20. Varlamov A.A., Rimshin V.I., Tverskoi S.Y. Security and destruction of technical systems // 18<sup>th</sup> Internati-

onal Federation of Automatic Control (IFAC) Conference on Technology, Culture and International Stability (TECIS), Baku, Azerbaijan, Sep. 13–15, 2018. Vol. 51. No. 30. Pp. 808–811.

21. *Varlamov A.A., Rimshin V.I., Tverskoi S.Y.* Planning and management of urban environment using the models of degradation theory // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2018. Vol. 177. No. 1. Pp. 012040.

22. *Kuzina E., Cherkas A., Rimshin V.* Technical aspects of using composite materials for strengthening constructions // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365. Pp. 032053.

23. *Kuzina E., Rimshin V.* Deformation Monitoring of Road Transport Structures and Facilities Using Engineering and Geodetic Techniques // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport, EMMFT-2017, Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018. Vol. 692. Pp. 410–416.

24. *Cherkas A., Rimshin V.* Application of composite reinforcement for modernization of buildings and structures // MATEC Web Conf. 2017. Vol. 117. 00027.

25. *Erofeev V.T., Zavalishin E.V., Rimshin V.I.* Frame Composites Based On Soluble Glass // Research journal of pharmaceutical biological and chemical sciences. 2016. Vol. 7. No. 3. Pp. 2506–2517.

26. *Krishan A.L., Troshkina E.A., Rimshin V.I.* Load-Bearing Capacity of Short Concrete-Filled Steel Tube Columns of Circular Cross Section // Research journal of pharmaceutical biological and chemical sciences. 2016. Vol. 7. No. 3. Pp. 2518–2529.

27. *Krishan A., Rimshin V., Erofeev V.* The Energy Integrity Resistance to the Destruction of the Long-Term Strength Concrete // Urban Civil Engineering and Municipal Facilities (SPbUCEMF): International Scientific Conference, Saint Petersburg, Russia, Mar. 18–20, 2015.

RESEARCH PAPER

## Principle of the overlay deformations in the theory of creep

Evgeniy A. Larionov\*, Vladimir I. Rimshin, Tatyana V. Zhdanova

Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

\*i.v.ivn@mail.ru

### Article history:

Received: August 12, 2019

Revised: October 23, 2019

Accepted: December 09, 2019

### Abstract

**The aim of the research** is to justify in the non-linear statement the overlay principle of fraction creep deformation, known in the linear creep theory as Boltzmann's principle of superposition. **Methods.** In contrast to the traditional approach the material of constructive elements is considered as an union of its links with statistical disturbed strength. The model of structural strength allows the deduction of rheological equations. In loading process so called structural stresses of capable to resist links are considered. **Results.** The modification Boltzmann's principle of superposition for fraction creep deformations is proposed. This permits its applicability also under non-linearly dependence of deformations on stresses. In according to concept of the statistical distribution of the strengths of links and linear dependence of determinations on structural stresses the rheological of mechanical statement is reduced. This equation implies the suitable on relation problems the linear integral equation. The relation of structural strength of material with its energy of entirety and with the experimentally known independency of specific to strength deformation on age of concrete is showed. The correct interpretations of certain known mechanical state equations for concrete are represented.

**Keywords:** stress; deformation; creep measure; superposition principle; nonlinearity

### For citation

Larionov E.A., Rimshin V.I., Zhdanova T.V. (2019). Principle of the overlay deformations in the theory of creep. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(6), 483–496. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-483-496>. (In Russ.)

## References

1. Boltzmann L.E. (1874). Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Sitzungsberichte Kaiserliche Akademie Wissenschaft Wien Mathematische-Naturwissenschaft*, 70, 275–306.

**Evgeniy A. Larionov**, Doctor of Science (Technical), Professor of Department of Applied Mathematics; Author ID: 365207, Scopus ID: 57195228824.

**Vladimir I. Rimshin**, Doctor of Science (Technical), Professor of Department of Construction; Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences; Author ID: 0000-0002-9084-4105, WoS P-4928-2015, Scopus ID: 56258934600.

**Tatyana V. Zhdanova**, graduate student of Department of Applied Mathematics; eLIBRARY SPIN-code: 6911-8343.

2. Bondarenko V.M. (1982). *Injenernie metodi nelineinoi teorii jelezobetona [Engineering methods of nonlinear theory of reinforced concrete]*. Moscow, Stroiizdat Publ. (In Russ.)

3. Aleksandrovskii S.V., Vasilev P.I. (1976). Eksperimentalnie issledovaniya polzuchesti betona i jelezobetonnih konstrukcii [Experimental study of creep of concrete]. *Polzuchest' i usadka betona i zhelezobetonnykh konstruksii [Creep and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures]* (pp. 97–152). Moscow, Stroiizdat Publ. (In Russ.)

4. Sanjarovskii R.S., Manchenko M.M. (2016). Errors in the concrete theory and creepmodern regulations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*,

- (3), 25–32. <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/11258>. (In Russ.)
5. Gvozdev A.A. (1972). Zamechanie o nelineinoi teorii polzuchesti betona pri odnoosnom sjatii [Remark on the nonlinear theory of concrete creep under uniaxial compression]. *Izv. AN SSSR, MTT*, (5), 33. (In Russ.)
6. Sanjarovskii R.S. (2014). Non-linear hereditary creep theory. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 63–68. <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/11070>. (In Russ.)
7. Arutyunyan N.H., Kolmanovskii V.B. (1983). *Teoriya polzuchesti neodnorodnih tel* [Theory of creep of inhomogeneous bodies]. Moscow, Nauka Publ. (In Russ.)
8. Persoz B. (1957). Le principe de superposition de Boltzman. *Cahier Groupe Franzituzeszhicl.*, 2(1).
9. Larionov E.A., Bondarenko V.M. (2011). Strains superposition principle when construction elements have structural damages. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (2), 16–22. <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/10938>. (In Russ.)
10. Larionov E.A., Larionov A.E. (2015). Nonlinear creep theory. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (2), 58–65. [http://stroy-mex.narod.ru/index/2015\\_2/0-185](http://stroy-mex.narod.ru/index/2015_2/0-185). (In Russ.)
11. Larionov E.A., Larionov A.E. (2017). The theory of nonlinear creep of materials. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (4), 35–39. [http://stroy-mex.narod.ru/index/2017\\_4/0-23435-39](http://stroy-mex.narod.ru/index/2017_4/0-23435-39). (In Russ.)
12. Wiebull W. (1949). A statistical representation of fatigue failures in solids. *Trans. Roy. Inst. Techn.*, (27).
13. Larionov E.A. (2005). *Dlitelnoe silovoe soprotivlenie i bezopasnost sooruzhenii* [Long-term power resistance and safety of structures]: dis. ... d-ra tehn. nauk. Moscow. (In Russ.)
14. Galustov K.Z. (2006). *Nelineinaya teoriya polzuchesti betona i raschet jelezobetonnih konstrukcii* [Non-linear theory of concrete creep and calculation of reinforced concrete structures]. Moscow, Fizmatlit Publ. (In Russ.)
15. Beglov A.D., Sanjarovskii R.S. (2011). *Evrostandarti i nelineinaya teoriya jelezobetona* [European Standards and nonlinear theory of reinforced concrete]. SPbGASU Publ. (In Russ.)
16. Ciorino M.A. (2014). Analysis of structural effects of time-dependent behavior of concrete an internationally harmonized format. *Plenary Papers of III All-Russian (International) Conference on Concrete and Reinforced Concrete*, 7, 338–350.
17. Sanjarovskii R.S., Ter-Emmanuilyan T.N., Manchenko M.M. (2018). Superposition principle as the fundamental error of the creep theory and standards of the reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(2), 92–103. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104>. (In Russ.)
18. Aleksandrovskii S.V., Solomonov V.V. (1972). Zavisimost deformacii polzuchesti betona ot nachalnogo urovnya napryajenii [Dependence of creep deformations of concrete on the initial level of stress]. *Mejotraslevie voprosi stroitelstva. Otechestvennii opit: Referativnii sbornik*, (6).
19. Krishan A.L., Narkevich M.Yu., Sagadatov A.I. (2018). Experimental investigation of selection of warm mode for high-performance self-stressing self-compacting concrete. *7<sup>th</sup> International Symposium on Actual Problems of Computational Simulation in Civil Engineering (APCSCE), Novosibirsk, Russia, Jul. 1–8, 2018*.
20. Varlamov A.A., Rimshin V.I., Tverskoi S.Y. (2018). Security and destruction of technical systems. *18<sup>th</sup> International Federation of Automatic Control (IFAC) Conference on Technology, Culture and International Stability (TECIS), Baku, Azerbaijan (Sep. 13–15, 2018)*, 51(30), 808–811.
21. Varlamov A.A., Rimshin V.I., Tverskoi S.Y. (2018). Planning and management of urban environment using the models of degradation theory. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 177(1), 012040.
22. Kuzina E., Cherkas A., Rimshin V. (2018). Technical aspects of using composite materials for strengthening constructions. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 365, 032053.
23. Kuzina E., Rimshin V. (2018). Deformation Monitoring of Road Transport Structures and Facilities Using Engineering and Geodetic Techniques. *International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport, EMMFT-2017, Advances in Intelligent Systems and Computing*, 692, 410–416.
24. Cherkas A., Rimshin V. (2017). Application of composite reinforcement for modernization of buildings and structures. *MATEC Web Conf.*, 117, 00027.
25. Erofeev V.T., Zavalishin E.V., Rimshin V.I. (2016). Frame Composites Based On Soluble Glass. *Research journal of pharmaceutical biological and chemical sciences*, 7(3), 2506–2517.
26. Krishan A.L., Troshkina E.A., Rimshin V.I. (2016). Load-Bearing Capacity of Short Concrete-Filled Steel Tube Columns of Circular Cross Section. *Research journal of pharmaceutical biological and chemical sciences*, 7(3), 2518–2529.
27. Krishan A., Rimshin V., Erofeev V. (2015). The Energy Integrity Resistance to the Destruction of the Long-Term Strength Concrete. *Urban Civil Engineering and Municipal Facilities (SPbUCEMF): International Scientific Conference, Saint Petersburg, Russia, Mar. 18–20, 2015*.