

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2019 Том 15 № 2

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране наследия
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

ISSN 1815-5235 (print), 2587-8700 (online).

Периодичность 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения, 05.23.02 – Основания и фундаменты, подземные сооружения, 05.23.17 – Строительная механика.

Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода).

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Акимов П.А., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Галишичкова В.В., д-р техн. наук, доц., РУДН, Москва, Россия

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., Киевский политехнический университет, Киев, Украина

Лисичкин С.Е., д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

Зверьев Е.М., д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

Обозов В.И., д-р техн. наук, проф., ЦНИИСК, Москва, Россия

Буй Суан Нам, доцент, Ханойский университет горного дела и геологии, Ханой, Вьетнам

Санжаровский Р.С., д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

Аганов В.П., д-р техн. наук, проф., МГСУ, Москва, Россия

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Андреев В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Баженов В.А., акад., Национальная академия педагогических наук, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина

Голик В.И., д. член РАЕН, д-р техн. наук, проф., Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет), Владикавказ, Россия

Заксенхофер Райханд Ф., профессор, Горный университет в Леобене, Австрия

Иванов С.П., д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

Мандроне Джузеппе, доцент, Университет Турина, Италия

Красич Соня, кандидат технических наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Мазуле Фредерик, профессор, Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Франция

Ляхович Л.С., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Якунов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

<i>Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю.</i> Определение ширины заготовки в условиях изгиба с растяжением штампуемой детали	83
<i>Галимов Н.К., Якунов С.Н.</i> Определение параметров пластического деформирования эллиптических мембран	90
<i>Рубин О.Д., Антонов А.С., Беллендир Е.Н., Кобочкина Е.М., Котлов О.Н.</i> Разработка расчетного модуля программно-аппаратного комплекса для обеспечения безопасности взаимодействующих ГТС	96

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК

<i>Романова В.А.</i> Образование поверхностей Монжа кинематическим способом в среде AutoCAD	106
---------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

<i>Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В.</i> Численный анализ напряженно-деформированного состояния тонких оболочек на основе совместного конечного элемента треугольной формы	117
<i>Медведский А.Л., Мартыросов М.И., Холмченко А.В.</i> Численный анализ поведения слоистой композитной панели с межслоевыми дефектами под действием динамических нагрузок	127

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<i>Зверьев Е.М.</i> Выделение согласованных уравнений классической теории оболочек из трехмерных уравнений теории упругости	135
<i>Rustatova M.A.</i> Unloading wave in the cylindrical network from nonlinear elastic fibers (Волна разгрузки в цилиндрической сети из нелинейно упругих волокон)	149

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

<i>Lyapichev Yu.P.</i> Static and dynamic analyses of the heightening of concrete face gravel dam Limon (Peru) (Статические и динамические расчеты наращивания грунтовой плотины с бетонным экраном Лимон (Перу))	158
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Редактор Ю.А. Заикина
Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова
Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел.: +7 (495) 955-08-58; факс: +7 (495) 955-08-58; e-mail: stmj@rudn.university; i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 16.04.2019. Выход в свет 30.04.2019. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 10,23. Тираж 250 экз. Заказ № 641. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)

Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН:

Россия, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2019 VOLUME 15 No. 2

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (print), 2587-8700 (online).

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI (elibrary.ru), Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The Journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the Journal.

The Journal website contains full information about the Journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the Journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

P.A. Akimov, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

V.V. Galishnikova, DSc, RUDN University, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

I.A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

V.V. Vanin, DSc, Professor, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine

S.E. Lisichkin, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

E.M. Zveryaev, DSc, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia

V.I. Obozov, DSc, Professor, Central Research Institute of Building Structures (TzNIISK im. V.V. Kucherenko), Moscow, Russia

Xuan Nan Bui, PhD, Assoc. Professor, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi, Vietnam

R.S. Sanjarovskiy, DSc, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

V.P. Agapov, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

EDITORIAL COUNCIL

V.I. Andreev, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

V.A. Bazhenov, Member of the National Academy of Educational Science of Ukraine, DSc, Professor, Kiev National University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine

V.I. Golik, Member of the Russian Academy of Sciences, DSc, Professor, North-Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University), Vladikavkaz, Russia

Reinhard F. Sachsenhofer, PhD, Professor, Montanuniversität Leoben, Austria

S.P. Ivanov, DSc, Professor, Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia

N.I. Karpenko, Member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

V.I. Kolchunov, Member of the RAACS, DSc, Professor, South-West State University, Kursk, Russia

Giuseppe Mandrone, PhD, Ass. Prof. in Engineering Geology, University of Torino, Italy

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France

L.S. Lyakhovich, Member of the RAACS, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk, Russia

V.I. Travush, Member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

N.M. Yakupov, Corresponding Member of Russian Engineering Academy, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

Morozov Yu.A., Verkhov E.Yu. Determining the width of the workpiece under bending conditions with stretching of the stamped part 83

Galimov N.K., Yakupov S.N. Determination of parameters of plastic deformation of elliptic membranes 90

Rubin O.D., Antonov A.S., Bellendir E.N., Kobochkina E.M., Kotlov O.N. Development of the design module of the software and hardware complex to ensure the safety of mutually influencing HPS 96

GEOMETRICAL INVESTIGATIONS OF MIDDLE SURFACES OF THIN SHELLS

Romanova V.A. Formation surfaces of Monge by the kinematic method in AutoCAD environment 106

NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Numerical analysis of the stress-strain state of thin shells based on a joint triangular finite element 117

Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V. Numerical analysis of layered composite panel behavior with interlaminar defects subject to dynamic loads 127

THEORY OF ELASTICITY

Zveryaev E.M. Extraction of consistent shell theory equations from 3D theory of elasticity 135

Rustamova M.A. Unloading wave in the cylindrical network from nonlinear elastic fibers 149

DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

Lyapichev Yu.P. Static and dynamic analyses of the heightening of concrete face gravel dam Limon (Peru) 158

Copy Editor Iu.A. Zaikina
Graphic Designer Iu.N. Efremova
Layout Designer Iu.A. Zaikina

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation; tel.: +7 (495) 955-08-58; fax: +7 (495) 955-08-58; e-mail: stmj@rudn.university; i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University:
3 Ordzhonikidze St., Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 2019
© Digurova I.T., photo on the cover of the Journal (Floating Bridge, Zaryadye Park, Moscow), 2019

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 672.32

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-83-89

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Определение ширины заготовки в условиях изгиба с растяжением штампуемой детали

Ю.А. Морозов^{1*}, Е.Ю. Верхов²¹МИРЭА – Российский технологический университет, Российская Федерация, 107996, Москва, ул. Стромынка, 20²Московский политехнический университет (Московский Политех), Российская Федерация, 111250, Москва, ул. Большая Семеновская, 38

*akafest@mail.ru

Поступила в редакцию: 30 октября 2018 г.*Доработана:* 29 ноября 2018 г.*Принята к публикации:* 16 января 2019 г.

Ключевые слова:

нейтральная поверхность;

радиус гибки;

радиус кривизны;

чистый изгиб;

изгиб с растяжением

Аннотация

Цели. В работе рассматривается вопрос определения радиуса нейтральной поверхности изгибаемой полосы при одновременном действии растягивающих напряжений.

Методы. При разработке технологических процессов листовой гибки и расчете исходной заготовки (развертки) чаще всего рассматривается плоское напряженное состояние, и предпочтение отдается теории чистого изгиба, предусматривающей равномерное искривление отдельных слоев металла под действием изгибающего момента и пренебрегающей действием поперечных растягивающих сил. Однако в реальности гибка всегда сопровождается скольжением металла по деформирующему инструменту, обуславливающим появление сил трения и создающим в металле сложное нагружение в виде пластического изгиба с растяжением, что дополнительно влияет на смещение нейтральной поверхности, вынуждая опытным путем корректировать технологию изготовления гнутых деталей. Приводятся обзор и анализ наиболее известных работ, посвященных данной тематике, с уточнением распределения контактных напряжений, действующих от внутренней поверхности к центру кривизны, и разрабатывается теория сложного изгиба, позволяющая уточнить радиус нейтральной поверхности в условиях растяжения изгибаемой полосы дополнительными тангенциальными напряжениями.

Результаты. Полученные результаты позволяют смоделировать напряженное состояние металла при разработке технологических процессов листовой штамповки и, в частности, оценить конкретное усилие торможения при изгибе (спрямлении) полосы в процессе перетягивания через перетяжные пороги и тормозные ребра штамповой оснастки для устранения возможных дефектов вытягиваемых деталей, а также уточнить размеры заготовки и готового профиля.

Введение

Гибка является основной формоизменяющей операцией листовой штамповки при производстве тонкостенных деталей одинарной кривизны для различных отраслей машиностроения и народно-

го хозяйства. Сюда относятся многочисленные каркасные детали и элементы обшивки автомобилей, подвижного состава, летательных аппаратов и пр.

Основное внимание уделяется первоначальной ширине листовой заготовки в связи с тем, что в процессе изгиба она получает сжимающие и растягивающие деформации, смещающие нейтральную поверхность от среднего радиуса согнутой детали [1–4].

© Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Наиболее известными работами, посвященными определению нейтральной поверхности при гибке, являются исследования И.П. Рене, Р. Хилла, Е.А. Попова, В.П. Романовского и др., использовавших силовой метод равенства радиальных напряжений растянутых и сжатых слоев заготовки, действующих на поверхность произвольного радиуса r_i (рис. 1) [5].

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_T \ln \frac{r_{\text{нар}}}{r_i} & \text{при } \rho_n < r_i \leq r_{\text{нар}}; \\ \sigma_r = \sigma_T \ln \frac{r_i}{r_{\text{вн}}} & \text{при } r_{\text{вн}} \leq r_i < \rho_n. \end{cases} \quad (1)$$

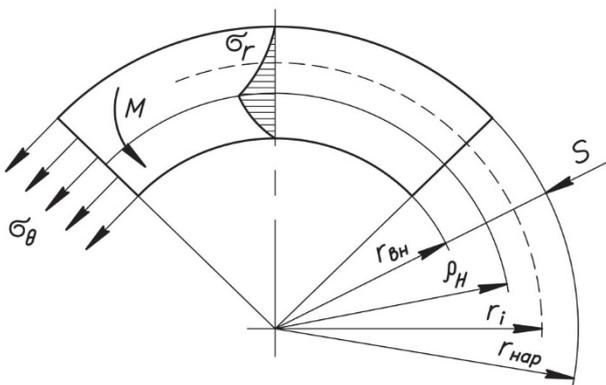


Рис. 1. Определение радиуса нейтральной поверхности изогнутой полосы
[Figure 1. Determining the radius of the neutral surface of the curved strip]

Так как параметр r_i изменяется по толщине полосы от $r_{\text{нар}}$ до $r_{\text{вн}}$, становится возможным определить такое его положение, при котором радиальные напряжения в растянутой и сжатой зонах станут равны друг другу:

$$\sigma_T \ln \frac{r_{\text{нар}}}{\rho_n} = \sigma_T \ln \frac{\rho_n}{r_{\text{вн}}},$$

что определяет положение нейтральной поверхности соотношением величин наружного и внутреннего радиусов гнутого элемента (формула Хилла – Ренне):

$$\rho_n = \sqrt{r_{\text{нар}} r_{\text{вн}}}. \quad (2)$$

1. Математическая постановка задачи

В теории чистого изгиба растянутые и сжатые слои материала, согласно условию равенства ра-

диальных напряжений, разделяются нейтральной поверхностью в пределах наружного и внутреннего радиусов кривизны полосы.

Данное решение справедливо при условии, что гибка не сопровождается растяжением заготовки. Вместе с тем на практике изгибу заготовки всегда сопутствует некоторое ее растяжение, обусловленное скольжением по деформирующему инструменту и возникновением трения в зоне контакта заготовки с рабочим инструментом. Повышенным растяжением будет характеризоваться гибка в П-образных штампах, если толщина штампуемого материала окажется больше расчетной. При этом широко применяются специфические методы формообразования крупногабаритных деталей из листового и профильного металла, создающие сложное нагружение в виде пластического изгиба с растяжением.

По сравнению с простым изгибом при данном методе формообразования в значительной мере уменьшается влияние упругого восстановления металла при разгрузке на кривизну изогнутого элемента, вследствие чего повышается точность процесса. Кроме того, возможность создания по всему сечению однородных по знаку растягивающих напряжений исключает образование складок на вогнутой поверхности детали.

При изгибе с растяжением радиальные напряжения чистого изгиба справедливо можно рассматривать в качестве контактных напряжений пластического формоизменения, возникающих в зоне соприкосновения заготовки с деформирующим инструментом $\sigma_r = \sigma_k$ [6]:

$$\rho_n = \sqrt{\frac{r_{\text{нар}} r_{\text{вн}}}{\exp(\sigma_k / \sigma_T)}} = \sqrt{1 + \frac{\sigma_\theta S}{\sigma_T r_{\text{вн}}}}, \quad (3)$$

где σ_T – предел текучести материала полосы; σ_k – контактные (радиальные) напряжения на внутренней поверхности полосы

$$\sigma_k = \sigma_\theta \frac{S}{r_{\text{вн}}}; \quad (4)$$

S – толщина полосы.

Следует отметить, что в работе [6] рассмотрен случай нахождения нейтральной поверхности в пределах изгибаемой полосы, т.е. $\sigma_\theta \leq \sigma_T$.

Однако при изгибе с растяжением возможен случай, когда растягивающие тангенциальные напряжения σ_θ могут привести к растяжению всех слоев изгибаемой полосы, тогда нейтральная по-

верхность (т.е. поверхность, на которой приращение деформаций равно нулю) будет располагаться ниже ее внутренней поверхности.

Иными словами, при $\sigma_\theta > \sigma_T$ радиус нейтральной поверхности будет меньше внутреннего радиуса $r_{вн}$, т.е. эта поверхность выходит за пределы полосы.

2. Анализ результатов исследования

Для решения поставленной задачи предлагается способ нахождения нейтральной поверхности, согласно которому полосу, подвергающуюся изгибу с растяжением, следует рассматривать только как часть полосы при чистом изгибе, т.е. при действии одних изгибающих моментов. В этом случае предлагается также использовать формулу (2).

Для иллюстрации данного утверждения снова обратимся к теории чистого изгиба.

Приравняем радиальные напряжения (1) к контактным (4), действующим на поверхность произвольной толщины. Тогда тангенциальные напряжения, действующие на внутреннюю поверхность полосы при изгибе с растяжением, равны

$$\sigma_\theta = \frac{r_{вн}}{S} \sigma_k = \frac{r_{вн}}{S} \sigma_T \ln \frac{r_i}{r_{вн}}. \quad (4a)$$

Таким образом, задаваясь изменением контактных напряжений, действующих от внутренней поверхности к центру кривизны, появляется возможность определения внутреннего радиуса полосы, изгибаемой с растяжением.

Например, задаваясь изменением контактных напряжений в виде функций (1), радиус внутренней поверхности полосы равен

$$r_{вн} = \frac{r_{нар}}{\exp\left(\frac{\sigma_\theta S}{\sigma_T r_i}\right)} = \frac{r_{нар}}{\exp(\sigma_k/\sigma_T)}.$$

При допущении отсутствия контактных (радиальных) напряжений на внутренней поверхности полосы ($\sigma_k = 0$), т.е. при отсутствии растяжения заготовки, искомый радиус нейтральной поверхности совпадает с формулой (2):

$$\rho_n = \sqrt{\frac{r_{нар} r_{вн}}{\exp(\sigma_k/\sigma_T)}} = \sqrt{r_{нар} r_{вн}}.$$

При допущении плоского напряженного состояния проведем численное моделирование процесса изгиба с растяжением широкой полосы единичной толщины ($S = 1,0$ мм). Минимальный радиус изгиба металла принимается $r_{вн} = 2S = 2,0$ мм. Учитывая, что $r_{нар} = r_{вн} + S = 2,0 + 1,0 = 3,0$ мм, устанавливается радиус нейтральной поверхности при чистом изгибе:

$$\rho_n = \sqrt{r_{нар} r_{вн}} = \sqrt{3,0 \cdot 2,0} = 2,45 \text{ мм}.$$

Относительная величина смещения нейтральной поверхности от срединного радиуса принятой кривизны $r_{нар}/r_{вн} = 3,0/2,0 = 1,5$

$$\frac{\rho_n}{r_{сп}} = \frac{2\rho_n}{r_{нар} + r_{вн}} = \frac{2 \cdot 2,45}{3,0 + 2,0} = 0,98.$$

Принимая модельным материалом сталь 08КП, устанавливается тангенциальное напряжение, растягивающее полосу (4a):

$$\sigma_\theta = \frac{r_{вн}}{S} \sigma_T \ln \frac{\rho_n}{r_{вн}} = \frac{2,0}{1,0} 230 \ln \frac{2,45}{2,0} = 93,4 \text{ МПа},$$

соответственно, контактное (радиальное) напряжение сжатого волокна:

$$\sigma_k = \sigma_\theta \frac{S}{r_{вн}} = 93,4 \frac{1,0}{2,0} = 46,7 \text{ МПа},$$

где $\sigma_T = 230$ МПа – предел текучести материала в исходном (отожженном) состоянии.

В результате искомый радиус нейтральной поверхности при изгибе с растяжением (3) равен

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sqrt{\frac{r_{нар} r_{вн}}{\exp(\sigma_k/\sigma_T)}} = \\ &= \sqrt{\frac{3,0 \cdot 2,0}{\exp(46,7/230)}} = 2,21 \text{ мм}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\rho_n}{r_{сп}} = 0,88.$$

Для наглядного представления о скорректированном положении нейтральной поверхности приведем полученные результаты к виду формулы Хилла – Ренне:

$$k = f(\rho_n) = \sqrt{\frac{1}{\exp(\sigma_k/\sigma_T)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\exp(46,7/230)}} = 0,903,$$

или

$$\rho_n = 0,903 \sqrt{r_{\text{нар}} r_{\text{вн}}}.$$

Таким образом, растяжение изгибаемой полосы будет смещать нейтральную поверхность ближе к внутренней поверхности. Аналогичные расчеты других параметров гибки приведены в табл. 1.

Таблица 1

Нейтральная поверхность полосы при изгибе с растяжением ($S = 1,0$ мм)
[Table 1. The neutral surface of the strip under bending with stretching ($S = 1,0$ mm)]

$r_{\text{вн}}$, мм [mm]	10	4,0	2,0	1,0	0,5
$r_{\text{нар}}/r_{\text{вн}}$	1,1	1,25	1,5	2,0	3,0
σ_θ , МПа [MPa]	110	102,2	93,4	79	63,7
σ_k , МПа [MPa]	11	25,6	46,7	79	127,4
$\rho_n/r_{\text{ср}}$: – чистый изгиб [pure bending] – изгиб с растяжением [tensile bending]	0,999 0,975	0,993 0,940	0,980 0,884	0,940 0,793	0,870 0,660
$k = f(\rho_n)$	0,976	0,946	0,903	0,842	0,758

Из проведенного исследования видно, что увеличение отношения наружного и внутреннего радиусов приводит к росту контактных (радиальных) напряжений и более интенсивному смещению нейтральной поверхности, что, несомненно, повлияет на выбор первоначальных размеров заготовки (рис. 2).

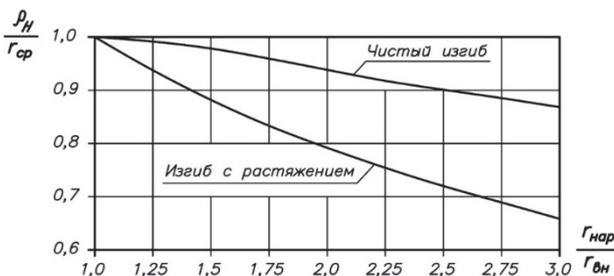


Рис. 2. Нейтральная поверхность изогнутой полосы
[Figure 2. The neutral surface of the bent strip]

В ходе разработки конкретных технологических процессов листовой штамповки практический интерес представляет определение фактических растягивающих сил по сечению изгибаемой полосы. Например, при вытяжке существует технологический дефект – волнистость стенок детали («хлопун»), механизм образования которого связан с недостаточной величиной натяжения заготовки, для чего используются перетяжные пороги и тормозные ребра штамповой оснастки, создающие усилие торможения в процессе перетягивания через них листового материала [7–10]. При этом главным критерием качественного формообразования является вытяжка без разрушения, т.е. обеспечение такого напряженного состояния, при котором в стенках вытягиваемой заготовки не возникает растягивающих напряжений, приводящих к разрыву металла.

В соответствии с вышеизложенной теорией проведем исследование величины тангенциальных растягивающих напряжений, действующих в сечении изгибаемой полосы.

В связи с тем, что изгиб полосы на кромке формообразующего инструмента протекает с особым развитием деформационных процессов на каждом волокне произвольного радиуса и приводит к крайне неравномерному распределению напряжений и деформаций по толщине полосы, а следовательно, неравномерному упрочнению, моделирование проводим с учетом линейного роста предела текучести по толщине полосы от внутренних волокон к внешним. Для этого сечение полосы разделяем на $i = 100$ волокон одинаковой толщины:

$$\Delta S = S/i = 1,0/100 = 0,01 \text{ мм.}$$

Тогда для первого волокна $i = 1$ от радиуса внутренней поверхности полосы $r_1 = r_{\text{вн}} + \Delta S = 2,0 + 0,01 = 2,01$ мм величина тангенциального напряжения (4а) равна

$$\sigma_\theta = \frac{r_{\text{вн}}}{S} \sigma_T \ln \frac{r_1}{r_{\text{вн}}} = \frac{2,0}{1,0} 230 \ln \frac{2,01}{2,0} = 2,3 \text{ МПа.}$$

Деформация данного волокна в тангенциальном направлении

$$\varepsilon_\theta = -\frac{r_i - r_{\text{вн}}}{r_i} = \frac{r_i}{r_{\text{вн}}} - 1,0 =$$

$$= \frac{r_1}{r_{\text{вн}}} - 1,0 = \frac{2,01}{2,0} - 1,0 = 0,005.$$

Используя эмпирическую зависимость сопротивления пластической деформации для принятой стали 08КП с учетом деформационного упрочнения, устанавливается растягивающее напряжение по ширине полосы, позволяющее создать усилие торможения при перетягивании листового материала через тормозные ребра штамповой оснастки [11]:

$$q_0 = \sigma_0 + 34,6 \varepsilon_0^{0,5} = 2,3 + 34,6 \cdot 0,005^{0,5} = 4,7 \text{ МПа.}$$

Аналогично производится расчет остальных волокон по сечению полосы, позволяя оценить допустимый уровень растягивающих напряжений в зависимости от параметров формообразования и механических свойств материала (табл. 2).

Таблица 2

Напряженное состояние в сечении полосы, изгибаемой с растяжением
[Table 2. Stress state in the section of the strip, bent with stretching]

№ волокна, i [№ fibers, i]	Радиус изгиба r_i , мм [Bending radius r_i , mm]	Тангенциальное напряжение σ_0 , МПа [Circumferential stress σ_0 , MPa]	Тангенциальная деформация, ε_0 [Circumferential deformation, ε_0]	Растягивающее напряжение q_0 , МПа [Tensile stress q_0 , MPa]
1	2,01	2,30	0,005	4,7
10	2,10	22,4	0,050	30,1
20	2,20	43,8	0,100	54,7
30	2,30	64,3	0,150	77,7
40	2,40	83,9	0,200	99,4
50	2,50	102,6	0,250	119,9
60	2,60	120,7	0,300	139,7
70	2,70	138,0	0,350	158,5
80	2,80	154,8	0,400	176,7
90	2,90	170,9	0,450	194,1
100	3,00	186,5	0,500	211,0

Заключение

Разработан математический алгоритм пластического течения материала для процессов гибки с растяжением.

Объективность результатов достигалась разбиением сечения исходной полосы на 100 отдельных волокон одинаковой толщины (как показали расчеты, увеличение числа волокон свыше 100 не повышает точности расчетов). Принимая во внимание крайне неравномерное распределение деформаций по толщине и, следовательно, неравномерное упрочнение материала, рассчитывалось напряженное состояние каждого волокна по отдельности.

Моделирование позволило оценить конкретное усилие торможения при изгибе (спрямлении) полосы в процессе перетягивания через перетяжные пороги и тормозные ребра штамповой оснастки для устранения возможных дефектов вытягиваемых деталей [7–10].

Таким образом, проведение дополнительных теоретических исследований напряженно-деформированного состояния металла позволит более обоснованно подойти к определению силовых параметров гибки, уточнить геометрию формообразующего инструмента, а также выбрать оптимальные технологические режимы, обеспечивающие высокое качество выпускаемой продукции.

Список литературы

1. Шинкин В.Н. Расчет сил и моментов семироликовой правильной машины при предварительной правке стального листа // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2016. Т. 59. № 12. С. 870–874.
2. Шинкин В.Н. Методика расчета геометрии стального листа при предварительной правке на семироликовой правильной машине // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2016. Т. 59. № 11. С. 793–798.
3. Wiebenga J.H., Atzema E.H., An Y.G., Vegter H., van den Boogaard A.H. Effect of material scatter on the plastic behavior and stretchability in sheet metal forming // Journal of Materials Processing Technology. February 2014. Vol. 214. Issue 2. Pp. 238–252.
4. Parsa M.H., Nasher Al Ahkami S., Pishbin H., Kazemi M. Investigating spring back phenomena in double curved sheet metals forming // Materials & Design. October 2012. Vol. 41. Pp. 326–337.
5. Ильин Л.Н., Семенов И.Е. Технология листовой штамповки. М.: Дрофа, 2009. 475 с.
6. Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А. Анализ и разработка технологии изготовления гнутых толстолистовых деталей // Вестник Московского государственного открытого университета. Серия: Техника и технология. 2011. № 4 (6). С. 14–19.
7. Верхов Е.Ю., Морозов Ю.А., Фролов А.А. Прижим вытяжного штампа для качественного получения сложных листовых деталей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 2. С. 11–17.
8. Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю., Крутина Е.В. Анализ влияния профилей тормозных участков вытяжных штампов на возможность получения качественных изделий сложной формы из листовых металлов // Заготовительные производства в машиностроении. 2016. № 1. С. 19–24.
9. Pathak N., Butcher C., Worswick M. Assessment of the Critical Parameters Influencing the Edge Stretchability of Advanced High-Strength Steel Sheet // Journal of Materials Engineering and Performance. 1 November 2016. Vol. 25. Issue 11. Pp. 4919–4932.

10. Ishimaru E., Takahashi A., Ono N. Effect of material properties and forming conditions on formability of high-purity ferritic stainless steel // Nippon Steel Technical Report. September 2010. No. 99. Pp. 26–32.

11. Целиков А.И., Томленов А.Д., Зюзин В.И. и др. Теория прокатки: справочник. М.: Metallurgy, 1982. 335 с.

Об авторах

Морозов Юрий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий в машино- и приборостроении, МИРЭА – Российский технологический университет (РТУ МИРЭА). *Область научных интересов:* исследование и разработка с математическим обеспечением эффективных процессов обработки металлов давлением. ORCID iD: 0000-

0001-9229-7398. eLIBRARY SPIN-код: 3189-5426.

Контактная информация: e-mail – akafest@mail.ru

Верхов Евгений Юрьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры обработки материалов давлением и аддитивных технологий, Московский политехнический университет (Московский Политех). *Область научных интересов:* обработка металлов давлением, формообразование деталей листовой штамповкой. ORCID iD: 0000-0002-7993-4169. eLIBRARY SPIN-код: 1244-5518. *Контактная информация:* e-mail – uv.evg.yourich@mail.ru

Для цитирования

Морозов Ю.А., Верхов Е.Ю. Определение ширины заготовки в условиях изгиба с растяжением штампуемой детали // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 83–89. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-83-89.

RESEARCH PAPER

Determining the width of the workpiece under bending conditions with stretching of the stamped part

Yury A. Morozov^{1*}, Evgeniy Yu. Verkhov²

¹MIREA – Russian Technological University, 20 Stromynka St., Moscow, 107996, Russian Federation

²Moscow Polytechnic University, 38 Bolshaya Semenovskaya St., Moscow, 111250, Russian Federation

*akafest@mail.ru

Received: October 30, 2018

Revised: November 29, 2018

Accepted: January 16, 2019

Keywords:

neutral surface;
bending radius;
radius of curvature;
pure bending;
bending and stretching

Abstract

Aims of research. This paper deals with the problem of determining the radius of the neutral surface of the bending strip at the same time the action of tensile stresses.

Methods. In the development of technological processes of sheet bending and the calculation of the initial billet (sweep), most often considered a flat stress state and preference is given to the theory of pure bending, providing uniform curvature of the individual layers of metal under the action of the bending moment and neglecting the action of transverse tensile forces. However, in reality, bending is always accompanied by sliding of the metal along the deforming tool, causing the appearance of friction forces and creating a complex loading in the form of plastic bending with stretching in the metal, which will additionally displace the neutral surface, forcing the experienced one to adjust the technology of manufacturing bent parts. Provides an overview and analysis of the most famous works dedicated to the topic, specifying the distribution of the contact stresses from the inner surface to the center of curvature and developed the theory of complex bending, which allows to specify the radius of the neutral surface in conditions of stretching of the flexible strip of the additional tangential stresses.

Results. The results obtained will allow to simulate the stress state of the metal in the development of technological processes of sheet stamping and, in particular, to assess the specific braking force during the bending (straightening) of the strip in the process of pulling through the thresholds and brake edges of the die tooling to eliminate possible defects in the elongated parts and to clarify the dimensions of the workpiece and the finished profile.

References

1. Shinkin V.N. (2016). Raschet sil i momentov semirolikovoj pravil'noj mashiny pri predvaritel'noj pravke stal'nogo lista [Calculation of steel sheet's

curvature under preliminary flattening on the seven roller straightening machine]. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya [Proceedings of higher educational institutions. Ferrous metallurgy]*, 59(12), 870–874. (In Russ.)

2. Shinkin V.N. (2016). Metodika rascheta geometrii stal'nogo lista pri predvaritel'noj pravke na semirolikovoj pravil'noj mashine [Calculation method of steel sheet's geometry under preliminary flattening on seven-roller straightening machine]. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya Proceedings of higher educational institutions. Ferrous metallurgy*, 59(11), 793–798. (In Russ.)

3. Wiebenga J.H., Atzema E.H., An Y.G., Vegter H., van den Boogaard A.H. (2014). Effect of material scatter on the plastic behavior and stretchability in sheet metal forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 214(2), 238–252.

4. Parsa M.H., Nasher Al Ahkami S., Pishbin H., Kazemi M. (2012). Investigating spring back phenomena in double curved sheet metals forming. *Materials & Design*, (41), 326–337.

5. Ilyin L.N., Semenov E.I. (2009). *Tekhnologiya listovoj shtampovki [Technology of sheet metal forming]*. Moscow: Drofa Publ., 475. (In Russ.)

6. Verkhov E.Yu., Morozov Yu.A. (2011). Analysis and development of manufacturing technology for plate bent parts. *Bulletin of the Moscow State Open University. Series: Technique and Technology*, 4(6), 14–19. (In Russ.)

7. Verkhov E.Yu., Morozov Yu.A., Frolov A.A. (2015). Clamp drawing die for high-quality produce complex sheet metal parts. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (2), 11–17. (In Russ.)

8. Morozov Yu.A., Verkhov E.Yu., Krutina E.V. (2016). Receiving qualitative products at the sheet extract with the clip. *Zagotovitel'nye proizvodstva v mashinostroenii*, (1), 19–24. (In Russ.)

9. Pathak N., Butcher C., Worswick M. (2016). Assessment of the Critical Parameters Influencing the Edge Stretchability of Advanced High-Strength Steel Sheet.

Journal of Materials Engineering and Performance, 25(11), 4919–4932.

10. Ishimaru E., Takahashi A., Ono N. (2010). Effect of material properties and forming conditions on formability of high-purity ferritic stainless steel. *Nippon Steel Technical Report*, (99), 26–32.

11. Tselikov A.I., Tomlenov A.D., Zyuzin V.I. et al. (1982). *Teoriya prokatki: spravochnik [Theory rolling: reference guide]*. Moscow: Metallurgiya Publ., 335. (In Russ.)

About the authors

Yury A. Morozov – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Information Technologies in Machine- and Instrument Engineering, MIREA – Russian Technological University (RTU MIREA). *Research interests*: research and development with mathematical support of effective processes of metalworking with pressure. ORCID iD: 0000-0001-9229-7398. eLIBRARY SPIN-code: 3189-5426. *Contacts*: e-mail – akafest@mail.ru

Evgeniy Yu. Verkhov – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Pressure Processing and Additive Technologies, Moscow Polytechnic University. *Research interests*: metal forming, shaping of parts by sheet stamping. ORCID iD: 0000-0002-7993-4169. eLIBRARY SPIN-code: 1244-5518. *Contacts*: e-mail – uv.evg.yourich@mail.ru

For citation

Morozov Yu.A., Verkhov E.Yu. (2019). Determining the width of the workpiece under bending conditions with stretching of the stamped part. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 83–89. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-83-89

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-90-95

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Определение параметров пластического деформирования эллиптических мембран

Н.К. Галимов¹, С.Н. Якупов^{1,2,*}¹Институт механики и машиностроения Казанского НЦ РАН, Российская Федерация, Татарстан, 420111, Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31²Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Российская Федерация, Татарстан, 420043, Казань, ул. Зеленая, 1

*tamas_86@mail.ru

Поступила в редакцию: 10 октября 2018 г.

Доработана: 21 декабря 2018 г.

Принята к публикации: 20 января 2019 г.

Ключевые слова:

тонкие мембраны эллиптической формы;
конечные перемещения и деформации;
соотношения пластичности;
эксперимент;
нелинейная система
алгебраических уравнений;
метод Бубнова – Галеркина;
алгоритм «пристрелки»;
сравнение;
пример

Аннотация

Введение. Тонкостенные элементы конструкций, сочетающие легкость с высокой прочностью, находят широкое применение во всех отраслях. Широкое распространены круглые конструктивные элементы. Однако, исходя из функционального назначения, все большее распространение получают тонкостенные элементы конструкций различной формы в плане.

Методы. Разработана методика исследования тонких мембран эллиптической формы для случая пластического деформирования под действием равномерного давления. Прогибы мембран в эксперименте составляют более десяти толщин. В связи с этим для решения задачи используются: геометрические нелинейные соотношения для деформаций срединной поверхности (по методу Х.М. Муштари и К.З. Галимова), соотношения для конечных перемещений и деформаций для выражений кривизн (по методу К.З. Галимова), физические соотношения (согласно теории пластичности А.А. Ильюшина). Ввиду малости толщины мембраны, учитываются только растягивающие мембранные деформации и усилия. Задача решается методом Бубнова – Галеркина и сводится к решению нелинейной системы трех алгебраических уравнений. Описан алгоритм «пристрелки» для решения полученной системы уравнений.

Результаты. Проведена работа по оценке достоверности результатов. Для оценки погрешности выполнены также сравнения результатов расчета с экспериментальными результатами В.Д. Головлева. Рассмотрен пример расчета мембраны эллиптической формы.

Введение

Тонкостенные элементы конструкций, сочетающие легкость с высокой прочностью, находят широкое применение во всех отраслях [1; 2]. Широкое распространение получили тонкостенные круглые конструктивные элементы. Разработаны различные методы расчета таких элементов, в частности можно отметить [3; 4] и др.

Однако, исходя из функционального назначения, все большее распространение получают тонкостенные элементы конструкций различной формы в плане. Среди них – эллиптические в плане мембраны.

Для обеспечения безаварийной работы тонкостенных конструкций необходимо достоверно оценивать их прочность и жесткость, грамотно проектировать и диагностировать состояние элементов конструкций [5; 6].

В работах [7–9] описан двумерный экспериментально-теоретический метод исследования механических характеристик пленок и мембран, ко-

© Галимов Н.К., Якупов С.Н., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

торый позволяет оценивать жесткостные свойства, модуль упругости и условный модуль упругости тонкослойных образцов.

Вопросы расчета эллиптических мембран в упругой постановке рассмотрены в [10]. Вопросы пластического деформирования круглых мембран рассмотрены, в частности, в [8; 11]. В [8] предложена методика расчетного определения параметров круглых мембран, исходя из данных эксперимента.

В настоящем исследовании проводится развитие метода [8] применительно к эллиптическим мембранам для случая их пластического деформирования.

1. Экспериментально-теоретический метод расчета

Пусть эллиптическая в плане тонкая мембрана закреплена по контуру и нагружена односторонним равномерным давлением p , под действием которого она деформируется и приобретает форму сегмента эллипсоида. Ввиду малости толщины мембраны учитываются только растягивающие мембранные деформации и усилия.

Запишем уравнения равновесия мембраны [12]:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = 0,$$

$$K_{11}T_{11} + 2T_{12}K_{12} + K_{22}T_{22} = p, \quad (1)$$

где T_{11} , T_{12} , T_{22} – мембранные усилия; K_{11} , K_{12} , K_{22} – кривизны деформированной мембраны.

Нелинейные соотношения для компонент деформаций срединной поверхности по осям x , y запишем согласно Х.М. Муштари и К.З. Галимову в виде [12]:

$$\varepsilon_1 = e_{11} + 0,5(e_{11}^2 + e_{12}^2 + \omega_1^2),$$

$$\varepsilon_2 = e_{22} + 0,5(e_{22}^2 + e_{21}^2 + \omega_2^2), \quad (2)$$

$$2\varepsilon_{12} = e_{12} + e_{21} + 0,5(e_{21}e_{11} + e_{22}e_{12} + \omega_1\omega_2),$$

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$e_{21} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \omega_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_2 = \frac{\partial w}{\partial y},$$

где u и v – перемещения по осям x и y соответственно; w – прогиб.

Выражения для кривизн деформированной мембраны для случая конечных перемещений и деформаций запишем по формулам [13]:

$$K_{11} = \frac{(1 + e_{11})E_{11} + e_{12}E_{12} + \omega_1E_{13}}{\lambda_1^2\sqrt{I}},$$

$$K_{22} = \frac{(1 + e_{22})E_{22} + e_{21}E_{21} + \omega_2E_{23}}{\lambda_2^2\sqrt{I}},$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{e_{21}E_{11} + (1 + e_{22})E_{22} + \omega_2E_{23}}{\lambda_1\lambda_2\sqrt{I}},$$

$$\lambda_1 = (1 + 2\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_2 = (1 + 2\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

$$E_{11} = \frac{\partial E_1}{\partial x}, \quad E_{12} = \frac{\partial E_1}{\partial y}, \quad E_{22} = \frac{\partial E_2}{\partial y},$$

$$E_{21} = \frac{\partial E_2}{\partial x}, \quad E_{13} = \frac{\partial E_3}{\partial x}, \quad E_{23} = \frac{\partial E_3}{\partial y},$$

$$E_1 = e_{12}\omega_2 - (1 + e_{22})\omega_1,$$

$$E_2 = e_{21}\omega_1 - (1 + e_{11})\omega_2,$$

$$E_3 = (1 + e_{11})(1 + e_{22}) - e_{12}e_{21},$$

$$I = 1 + 2P_1 + 4P_2, \quad P_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$P_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_{12}^2.$$

Учитывая, что прогибы мембраны в эксперименте составляют от десяти и более толщин, и ее материал находится в пластическом состоянии, при решении задачи будем применять соотношения теории пластичности А.А. Ильюшина, а коэффициент Пуассона примем равным 0,5 [14]:

$$T_{11} = \frac{4Ahe_i^{(k-1)}(\varepsilon_1 + 0,5\varepsilon_2)}{3},$$

$$T_{22} = \frac{4Ahe_i^{(k-1)}(\varepsilon_2 + 0,5\varepsilon_1)}{3},$$

$$T_{12} = \frac{2Ahe_i^{(k-1)}\varepsilon_{12}}{3}, \quad (4)$$

где A – постоянная материала; k – показатель упрочнения; h – толщина мембраны; σ_i – интенсивность напряжений; e_i – интенсивность деформаций.

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_{12}^2},$$

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 0,25\varepsilon_{12}^2},$$

$$\sigma_i = A e_i^k. \quad (5)$$

Задачу будем решать методом Бубнова – Галеркина в первом приближении, задавая перемещения в виде

$$u(x_1, y_1) = F(x_1, y_1) a b_0 x_1,$$

$$v(x_1, y_1) = F(x_1, y_1) b c_0 y_1, \quad (6)$$

$$w = F(x_1, y_1) a_0 a,$$

$$F(x_1, y_1) = 1 - x_1^2 - y_1^2, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$-1 \leq y \leq 1, \quad x_1 = x / a, \quad y_1 = y / b,$$

где a_0, b_0, c_0 – безразмерные искомые величины; x_1, y_1 – безразмерные координаты; a и b – большая и малая полуоси мембраны соответственно.

Внося выражения (6) в уравнения равновесия (1), после ряда преобразований получаем нелинейную систему трех уравнений относительно параметров a_0, b_0, c_0 (ввиду ее громоздкости – здесь не приводится).

Задавая параметр a_0 (взятый из эксперимента) из первых двух уравнений (1), определяем параметры b_0 и c_0 . Третье уравнение (1) после интегрирования принимает вид

$$\Phi J - p \frac{\pi}{2} = 0, \quad \Phi = \frac{4 A h}{3},$$

или

$$A = \frac{3 p \pi}{8 h J},$$

$$J = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_{11} T_{11} + 2T_{12} K_{12} + K_{22} T_{22}) F(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\Phi}. \quad (7)$$

Из уравнения (7) при фиксированном параметре k и известном из эксперимента давлении p находим A . Аналогично поступаем для всех значений p и a_0 . Далее для рассмотренных значений давлений p находим среднее значение A_{cp} .

Затем для каждой ступени нагружения находим расчетное значение $p_{рас}$ по формуле

$$p_{рас} = \frac{8 A_{cp} h J}{3 p \pi}, \quad (8)$$

вытекающей из (7), и сравниваем с нагрузкой p из эксперимента.

Процесс «пристрелки» повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая погрешность, например 5 %. Таким образом, определяются параметры A и k .

2. Оценка достоверности результатов

Отметим, что дополнительно для оценки получаемых величин по предложенной методике по известному алгоритму [8] были выполнены исследования круглых полимерных мембран толщиной 0,07 мм. При $k = 0,3$ определены значения параметра A для мембран с диаметром 22 и 80 мм, которые составили 154,09 и 156,69 кг/см² соответственно (или среднее значение $A = 155,4$ кг/см²).

3. Пример расчета мембраны эллиптической формы

Исследована эллиптическая мембрана, изготовленная из полимерной пленки толщиной 0,07 мм с полуосями $a = 2,5$ см, $b = 1,5$ см (из того же материала, что и круглая мембрана, рассмотренная выше). Результаты исследования приведены в табл. 1, где $w_0 = w(x=0, y=0)$.

Таблица 1

Результаты исследования эллиптической мембраны [Table 1. The results of investigation of an elliptical membrane]

p , кг/см ²	w_0 , мм	a_0	b_0	c_0	A , кг/см ²
0,10	4,15	0,1660	0,0255	0,0575	103,5
0,15	4,47	0,1788	0,0297	0,0668	140,6
0,20	5,01	0,2004	0,0375	0,0845	157,9
0,25	5,70	0,2280	0,0489	0,1100	163,5
0,30	6,07	0,2428	0,0557	0,1257	178,9
0,35	6,75	0,2700	0,0695	0,1570	178,9
0,40	7,55	0,3020	0,0881	0,1990	178,2
0,45	8,10	0,3240	0,1020	0,2310	173,5
0,50	9,11	0,3544	0,1320	0,2990	160,1
0,55	9,70	0,3880	0,1510	0,3450	159,0
0,60	10,56	0,4224	0,1840	0,4190	150,4

Среднее значение $A_{cp} = 158,6$ кг/см² отличается от среднего значения для круглой мембраны (155,4 кг/см²) на 2 %.

Также, для оценки погрешности разработанного подхода были выполнены сравнения результатов расчета по данной методике с экспериментальными результатами [15]. В этой работе при-

ведены экспериментальные данные исследования деформирования эллиптических и круглых мембран, изготовленных из стали О8КП толщиной 0,82 мм, подверженных равномерному давлению. Параметр упрочнения $k = 0,28$.

В [15] параметр удлиненности мембраны $\lambda = b/a = 0,375; 0,5; 0,75$. Радиус круглых мембран $R = 100$ мм. Большая полуось эллиптических мембран $a = 100$ мм, а малые полуоси $b = \lambda a$ мм. Данные эксперимента для мембран приведены в табл. 2. В последнем столбце приведены величины погрешности ε (в %) расчетных данных от экспериментальных значений параметра A .

Для круглых мембран по разработанной методике параметр $A_{ср} = 5834,2$ кг/см², что отличается от справочного значения 6000 кг/см², приведенного в [15], на 2,7 %.

Из табл. 2 видно, что для умеренных значений λ (0,5–0,75) погрешность не выше 5 %. Отметим, что для случая $\lambda = 0,5$ и $p = 72$ кг/см² получается завышенное значение ε , что можно объяснить большим шагом по нагрузке p .

Таблица 2

Данные эксперимента и расчета
[Table 2. Experiment and calculation data]

$\lambda = b/a$	p , кг/см ² [kg/cm ²]	H , см [cm]	A , кг/см ² [kg/cm ²]	ε , %
0,375	70	2,04	5237	12,7
	82	2,56	5050	15,8
	90	–	–	–
0,5	50	2,22	5702	5,0
	60	2,64	5713	4,8
	72	3,89	4836	19,4
0,75	35	2,73	6092	1,6
	42	3,22	6033	0,6
	56	4,26	6147	2,4
1,0	20	2,4	5930	1,1
	30	3,35	5887	1,8
	35	3,85	5913	1,5
	40	4,35	6042	7,0
	47,5	7,10	5398	10,0

Заключение

Разработана методика исследования тонких мембран эллиптической формы для случая пластического деформирования под действием равномерного давления. Описан алгоритм «пристрелки» для решения полученной системы уравнений. Выполнена работа по оценке достоверности результатов. Для оценки погрешности проведены сравнения результатов расчета с экспериментальными результатами. Рассмотрен пример расчета мембраны эллиптической формы.

Список литературы

1. Якупов Н.М., Якупов С.Н. Пленки неоднородной структуры // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. № 1. С. 60–70.
2. Якупов С.Н., Якупов Н.М. Тонкослойные покрытия // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. № 1. 2017. С. 6–14.
3. Смирнов-Аляев Г.А. Исследование пластического прогиба тонких пластинок (мембран), жестко заделанных по круговому контуру под действием гидростатического давления // Исследования по теории пластичности. Сб. III. Л.-М.: ГОНТИ, 1939. С. 28–52.
4. McPherson A.E., Ramberg W., Lery S. Normal pressure test of circular plates with clamped edges // NASA Report. 1942. No. 744. Pp. 269–285.
5. Махутов Н.А. Прочность и безопасность. Фундаментальные и прикладные исследования. Новосибирск: Наука, 2008. 523 с.
6. Якупов Н.М. Механика «лечения» конструкции // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа 2015 г.): сборник трудов. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2005. С. 4320–4322.
7. Якупов Н.М., Нургалиев А.Р., Якупов С.Н. Методика испытания пленок и мембран в условиях равномерного распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2008. Т. 74. № 11. С. 54–56.
8. Якупов Н.М., Галимов Н.К., Леонтьев А.А. Экспериментально-теоретический метод исследования прочности полимерных пленок // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 2. С. 238–243.
9. Галимов Н.К., Якупов Н.М., Якупов С.Н. Экспериментально-теоретический метод определения механических характеристик сферических пленок и мембран со сложной структурой // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 3. С. 58–66.
10. Weil N.A., Newmark N.M. Large Deflections of Elliptical Plates // J. of Applied Mechanics. March, 1956. Vol. 23. No. 1. Pp. 21–26.
11. Gleyzal A. Plastic Deformation of a Circular Diaphragm under Pressure // J. of Applied Mechanics, Trans. Asme. 1948. Vol. 70. Pp. 288–296.
12. Mushtari Kh.M., Galimov K.Z. Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells / Translated by J. Morgenstern, J.J. Schorr-Kon, PST Staff. Jerusalem: S. Monson; Washington, D.C.: The National Science Foundation; USA: The National Aeronautics and Space Administration; The Israel Program Scientific Translations, 1961. 374 p.
13. Галимов К.З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях // ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 6. С. 723–742.
14. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. С. 376.
15. Головлев В.Д. О способности металла к глубокой вытяжке // Новые процессы обработки металлов давлением: сборник статей. М.: АН СССР, 1962. С. 135–143.

Об авторах

Галимов Наиль Курбанович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр Российской академии наук”». *Область научных интересов:* механика тонкостенных конструкций, механика пленок и мембран, композиционные структуры. *Контактная информация:* e-mail – tamas_86@mail.ru.

Якупов Самат Нухович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Казанский государственный архитектурно-строительный университет.

eLIBRARY SPIN-код: 7382-4759, Scopus AU-ID: 26968046600. *Область научных интересов:* конструкции зданий и сооружений, механика тонкостенных конструкций, механика пленок и мембран, композиционные структуры, адгезия. *Контактная информация:* e-mail – tamas_86@mail.ru

Для цитирования

Галимов Н.К., Якупов С.Н. Определение параметров пластического деформирования эллиптических мембран // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 90–95. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-90-95

RESEARCH PAPER

Determination of parameters of plastic deformation of elliptic membranesNail K. Galimov¹, Samat N. Yakupov^{1,2,*}

¹*Institute of Mechanics and Engineering – subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, PO Box 261, 2/31 Lobachevsky St., Kazan, 420111, Tatarstan, Russian Federation*

²*Kazan State University of Architecture and Engineering, 1 Zelenaya St., Kazan, 420043, Tatarstan, Russian Federation*

*tamas_86@mail.ru

Received: October 10, 2018

Revised: December 21, 2018

Accepted: January 20, 2019

Keywords:

elliptic thin membranes;
finite displacements and deformations;
plasticity ratio;
experiment;
nonlinear system of algebraic equations;
Bubnov – Galerkin method;
example;
“shooting” algorithm;
comparison

Abstract

Introduction. Thin-walled structural elements, combining lightness with high strength, are widely used in all industries. Widespread round design elements. However, based on the functional purpose, thin-walled structural elements of various shapes in plan are becoming more and more common.

Methods. A technique has been developed for the study of thin elliptic membranes for the case of plastic deformation under the action of uniform pressure. The deflections of the membranes in the experiment are more than ten thicknesses. In this regard, to solve the problem, the following are used: geometric nonlinear relations for the deformations of the middle surface (according to Kh.M. Mushtari and K. Z. Galimov), relations for finite displacements and deformations for curvature expressions (according to K.Z. Galimov), physical relations (according to the theory of plasticity A.A. Ilyushin). Due to the smallness of the membrane thickness, only tensile membrane strains and forces are taken into account. The problem is solved by the Bubnov – Galerkin method and reduced to solving a nonlinear system of three algebraic equations. The “shooting” algorithm for solving the resulting system of equations is described.

Results. The work on the assessment of the reliability of the results. To estimate the error, the comparison of the calculation results with the experimental results of G.D. Golovlev was also performed. An example of the calculation of an elliptical membrane is considered.

References

1. Yakupov N.M., Yakupov S.N. (2009). Plenki neodnorodnoj struktury [Films of heterogeneous structure]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 60–70. (In Russ.)

2. Yakupov S.N., Yakupov N.M. (2017). Tonkoslojnye pokrytiya [Thin coatings]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 6–14. (In Russ.)

3. Smirnov-Alyayev G.A. (1939). Issledovanie plasticheskogo progiba tonkih plastinok (membran), zhestko zadlanykh po krugovomu konturu pod dejstviem gidrostaticheskogo davleniya [Investigation of plastic deflection of thin plates (membranes), rigidly set on a circular contour under the action of hydrostatic pressure]. *Research on the theory of plasticity*, (III), 28–52. (In Russ.)

4. McPherson A.E., Ramberg W., Lery S. (1942). Normal pressure test of circular plates with clamped edges. *NASA Report*, (744), 269–285.

5. Mahutov N.Ah. (2008). *Strength and safety. Fundamental and applied research*. Novosibirsk: Nauka Publ., 523. (In Russ.)
6. Yakupov N.M. (2015). Mekhanika “lecheniya” konstrukcii [Mechanics of “treatment” of construction]. *XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics (Kazan, 20–24 August 2015)*, 4320–4322. (In Russ.)
7. Yakupov N.M., Nurgaliyev A.R., Yakupov S.N. (2008). Metodika ispytaniya plenok i membran v usloviyah ravnomernogo raspredelenogo poverhnostnogo davleniya [The technique of test of films and membranes in the conditions of the uniform distributed superficial pressure]. *Industrial laboratory. Diagnostics of materials*, 74(11), 54–56. (In Russ.)
8. Yakupov N.M., Galimov N.K., Leontiev A.A. (2000). Eksperimental'no-teoreticheskij metod issledovaniya prochnosti polimernyh plenok [Experimental-theoretical method for the study of the strength of polymer films]. *Mechanics of composite materials and structures*, 6(2), 238–243. (In Russ.)
9. Galimov N.K., Yakupov N.M., Yakupov S.N. (2011). Eksperimental'no-teoreticheskij metod opredeleniya mekhanicheskikh harakteristik sfericheskikh plenok i membran so slozhnoj strukturoj [Experimentally-theoretical method for determining mechanical characteristics of spherical films and membranes with difficult structure]. *Solid mechanics*, (3), 58–66. (In Russ.)
10. Weil N.A., Newmark N.M. (March, 1956). Large Deflections of elliptical Plates. *Applied Mechanics*, 23(1), 21–26.
11. Gleyzal A. (1948). Plastic Deformation of a Circular Diaphragm under Pressure. *J. of Applied Mechanics, Trans Asme*, 70, 288–296.
12. Mushtari Kh.M., Galimov K.Z. (1961). *Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells*. 374.
13. Galimov K.Z. (1951). K obshchej teorii plastin i obolochek pri konechnyh peremeshcheniyah i deformatsiyah [On the general theory of plates and shells under finite displacements and deformations]. *PMM*, XV(6), 723–742. (In Russ.)
14. Ilyushin A.A. (1948). *Plastichnost' [Plasticity]*. Moscow: Gostekhizdat Publ., 376. (In Russ.)
15. Golovlev V.D. (1962). O sposobnosti metalla k glubokoj vytyazhke [On the ability of metal to deep drawing]. *New processes of metal forming*. Moscow: USSR Academy of Sciences, 135–143. (In Russ.)

About the authors

Nail K. Galimov – PhD in Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Institute of Mechanics and Engineering – subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”. *Research interests*: mechanics of thin-walled structures, mechanics of films and membranes, composite structures. *Contacts*: e-mail – tamas_86@mail.ru

Samat N. Yakupov – PhD in Technical Sciences, senior researcher, Kazan State University of Architecture and Engineering. eLIBRARY SPIN-code: 7382-4759, Scopus AU-ID: 26968046600. *Research interests*: structures of buildings and structures, mechanics of thin-walled structures, mechanics of films and membranes, composite structures, adhesion. *Contacts*: e-mail – tamas_86@mail.ru

For citation

Galimov N.K., Yakupov S.N. (2019). Determination of parameters of plastic deformation of elliptic membranes. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 90–95. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-90-95

УДК 502/504:627.8

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-96-105

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Разработка расчетного модуля программно-аппаратного комплекса для обеспечения безопасности взаимовлияющих ГТС

О.Д. Рубин¹, А.С. Антонов^{1,4*}, Е.Н. Беллендир², Е.М. Кобочкина¹, О.Н. Котлов³

¹Научно-исследовательский институт энергетических сооружений (филиал АО «Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт «Гидропроект» имени С.Я. Жука»), Российская Федерация, 125080, Москва, Волоколамское шоссе, 2

²АО «Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт «Гидропроект» имени С.Я. Жука», Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 2

³АО «Всероссийский научно-исследовательский институт гидротехники имени Б.Е. Веденеева», Российская Федерация, 195220, Санкт-Петербург, ул. Гжатская, 21

⁴Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26

*Antonov.An.S@yandex.ru

Поступила в редакцию: 01 февраля 2019 г.

Доработана: 18 марта 2019 г.

Принята к публикации: 26 марта 2019 г.

Ключевые слова:

гидротехнические сооружения;
ГТС;
основания;
мониторинг;
программно-аппаратный комплекс;
прогнозирование безопасности;
математические модели;
конечно-элементные модели;
информационно-диагностическая система;
расчетный модуль

Аннотация

Актуальность. В рамках реализации Федерального закона № 117-ФЗ «О безопасности гидротехнических сооружений» необходимо осуществлять постоянный контроль состояния гидротехнических сооружений (ГТС) и взаимовлияющих сооружений посредством оснащения их контрольно-измерительной аппаратурой (КИА). Развитие современных вычислительных комплексов позволяет осуществлять и прогнозировать состояние сооружений, совмещая расчетные исследования и данные натурных наблюдений. Работа направлена на организацию комплексной оценки состояния ГТС и обеспечения безопасности существующих и проектируемых взаимовлияющих комплексов.

Цели. Повышение безопасности эксплуатируемого/строящегося комплекса взаимовлияющих ГТС. Оценка достаточности и качества специализированных инженерных и ремонтных работ, проводимых на ГТС. Разработка рекомендаций по повышению эффективности строительства новых и модернизации эксплуатируемых гидроэнергетических объектов. Создание единой платформы для проведения инженерных расчетов по взаимовлиянию ГТС на примере Загорских ГАЭС.

Методы. Представлена идеология взаимодействия различных программных комплексов математического моделирования. Использованы данные КИА для калибровки и верификации математических моделей.

Результаты. Актуализирована структура расчетного модуля программно-аппаратного комплекса (ПАК), проведена систематизация расчетных моделей, описано взаимодействие и передача исходных данных внутри расчетного модуля ПАК. Выполненные научные исследования направлены на повышение безопасности комплекса взаимовлияющих ГТС.

Введение

Данное исследование является новым этапом разработки программно-аппаратного комплек-

са (ПАК) для обеспечения безопасности взаимовлияющих ГТС (ГАЭС/ГАЭС) [1–3]. В связи с развитием информационных технологий и универсальных промышленных программно-вычислительных комплексов ABAQUS, ADINA, ANSYS, MARC, MSC/NASTRAN, COSMOS, LS-DYNA, MODFLOW появилась возможность оптимизировать алгоритм работы, предлагаемый на ранних этапах реализации ПАК, усовершенствовать методику передачи

© Рубин О.Д., Антонов А.С., Беллендир Е.Н., Кобочкина Е.М., Котлов О.Н., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

данных внутри ПАК при использовании механизма экспорта/импорта данных. Исходная информация для выполнения расчетных исследований передается из одного блока расчетного модуля в другой в автоматизированном режиме, что позволяет решать сложную многовариантную совместную задачу на каждом из этапов эксплуатации сооружения. Другой особенностью модернизации ПАК является возможность проведения комплексного анализа и получения экспертного заключения о состоянии ГТС (в перспективе любого энергетического объекта) при сравнении расчетных значений с данными натурных наблюдений и прогнозными расчетными зависимостями. Интеграция расчетного модуля, в который входит набор математических моделей, с информационно-диагностическими системами и экспертным модулем позволяет пользователю в онлайн-режиме определять состояние сооружений или его отдельных элементов. При дальнейшей реализации возможна интеграция с программными платформами, которые совместимы с концепцией управления жизненным циклом проекта (Project Lifecycle Management, PLM и др.), что предоставляет широкие возможности по развитию системы и постоянно действующих математических моделей, а также способствует повышению эффективности их использования [1–5].

1. Цели исследования

1. Повышение безопасности эксплуатируемого (строящегося) комплекса взаимовлияющих гидротехнических сооружений (ГТС).

2. Оценка достаточности и качества специализированных инженерных и ремонтных работ, проводимых на ГТС.

3. Разработка рекомендаций по повышению эффективности строительства новых и модернизации эксплуатируемых гидроэнергетических объектов.

4. Создание единой платформы для проведения инженерных расчетов по взаимовлиянию ГТС на примере Загорских ГАЭС.

В данной статье описывается принцип работы расчетного модуля (РМ) ПАК, при актуализированной и обновленной концепции в него входят общие и расчетные модели. Модели первого типа используются в качестве исходной информации для выполнения расчетных исследований:

- инженерно-геологическая модель (ИГМ);
- геометрическая модель сооружений (ГМ);
- геомеханическая модель (ГММ).

Второй тип – постоянно действующие математические модели, в основу которых заложены конечно-элементная аппроксимация, граничные условия, физико-механические характеристики и механизмы для решения системы дифференциальных уравнений численными методами:

- геофильтрационная модель (ГФМ);
- расчетная геомеханическая модель (РГММ);
- расчетная модель напряженно-деформированного состояния (МНДС).

Все модели совместно с многовариантными калибровочными и прогнозными расчетами хранятся в РМ в формате данных, который позволяет обращаться к ним в режиме реального времени. Общая схема работы модуля представлена на рис. 1.

Количество расчетных сценариев определяется для каждой математической модели на первоначальном этапе исходя из допущения о минимально необходимом количестве вариантов для корректной работы ПАК. По мере эксплуатации системы перечень сценариев дополняется по результатам натурных наблюдений либо по прогнозным значениям.

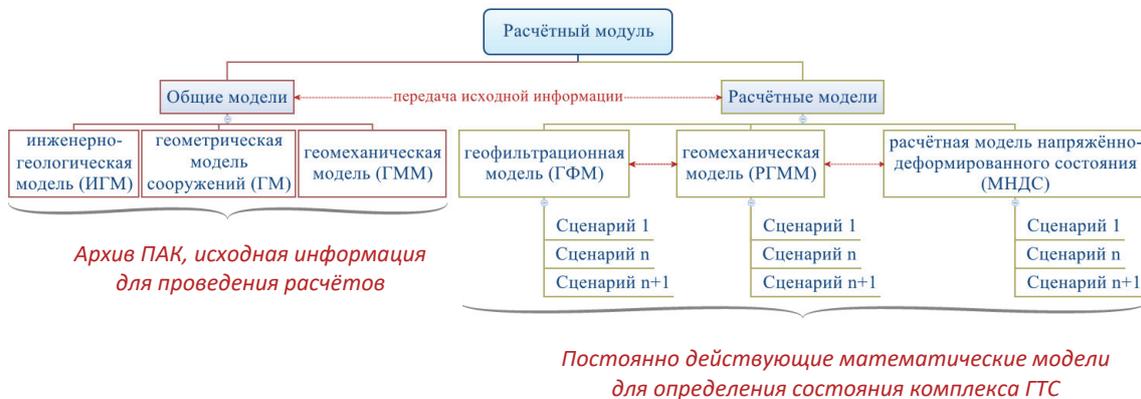


Рис. 1. Общая схема расчетного модуля программно-аппаратного комплекса (РМ ПАК)

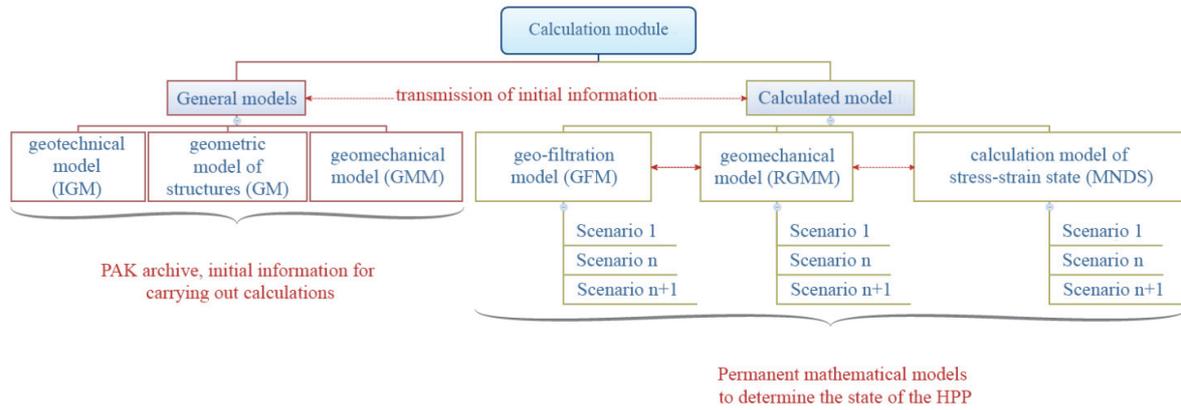


Figure 1. The general scheme of the calculation module of the software and hardware complex (RM PAK)

2. Инженерно-геологическая модель (ИГМ)

Представляет собой базу данных по инженерно-геологическим изысканиям в районе размещения ГЭС (ГЭС/ГАЭС) и используется в качестве исходных данных для последующего математи-

ческого моделирования поведения грунтов основания и НДС конструкций. ИГМ разбита на слои в соответствии с расчетными геологическими элементами, каждый из которых описывается отдельным слоем. Общий вид модели приведен на рис. 2.

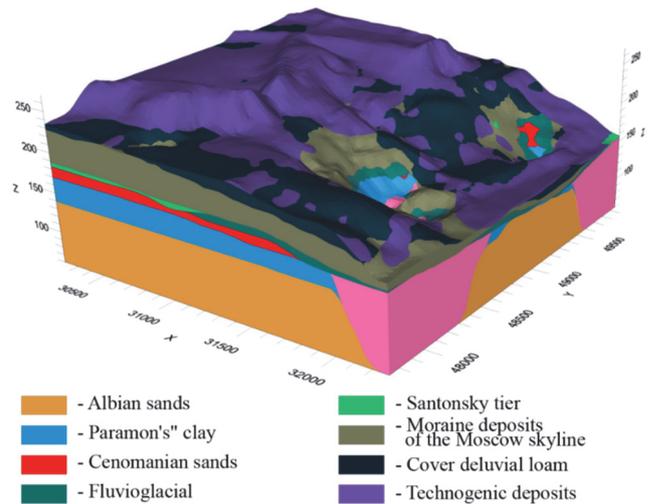
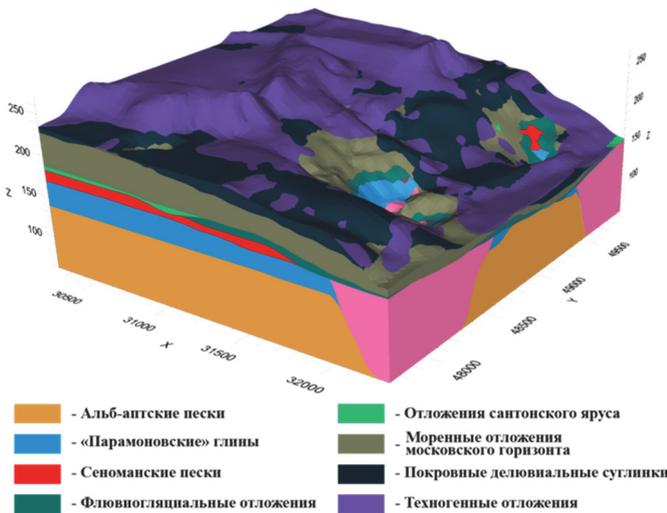


Рис. 2. Инженерно-геологическая модель ПАК (ИГМ ПАК)

Figure 2. Engineering-geological model PAK (IGM PAK)

Область построения модели – площадка расположения Загорских ГАЭС размером в плане 4,0 км², отметка основания – 50 м, максимальная глубина моделируемого грунтового массива – 200 м. ИГМ ПАК разрабатывалась по набору натурных исследований, выполненных в рамках реализации ПАК (инженерно-геологическое картирование, топографические съемки и др.), архивным и фондовым материалам, которые максимально полно описывают характеристики инженерно-геологических, структурно-тектонических и инженерно-геофизических условий площадки размещения Загорских ГАЭС. Классификация грунтов представляется

инженерно-геологическими элементами (ИГЭ), средой разработки модели являются AutoCAD, Ansys SpaceClaim, Visual MODFLOW Flex.

3. Геометрическая модель сооружений (ГМ)

В связи с глобальным развитием BIM технологий, их внедрением в работу проектных и научно-технических организаций необходима разработка пространственных математических моделей по требованиям заказчика. Сегодня пространственные модели используются не только для проектирования и расчетных исследований, но и для опреде-

ления точного расположения уже установленной контрольно-измерительной аппаратуры (КИА), положения вспомогательного и основного оборудования, определения геометрических параметров конструкций др. Поэтому требуется различная детализация предоставляемой информации в пространственных твердотельных математических моделях. В РМ ПАК реализована «плавающая» детализация, ориентированная на тип расчетных исследований, в которых применяется данная модель. К примеру, при расчетах НДС максимально точно предоставляются параметры железобетонных конструкций, при расчетах фильтрации либо грунтов основания модели упрощаются до массогабаритных макетов, позволяющих учесть осадку и смещения, но при этом не влияющих на продолжительность и качество исследований. Общий вид геометрической модели представлен на рис. 3.

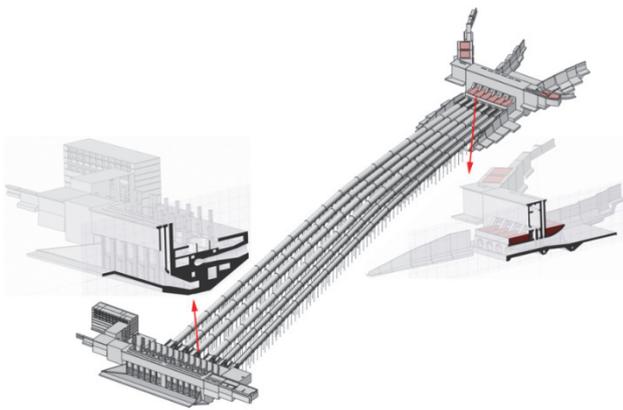


Рис. 3. Общий вид геометрической математической модели Загорской ГАЭС
[Figure 3. General view of the geometric mathematical model of the Zagorsk PSP]

Все ГМ имеют общие габаритные размеры и не расходятся между собой более чем на величину математической погрешности, воспринимаемой расчетными комплексами ПАК. Структура создания: простые формы получаются из упрощения подробной геометрической модели. Обмен данных внутри расчетного модуля осуществляется в виде массива точек, трехмерной поверхности в формате Plaxis, AutoCad, SpaceClaim, Ansys либо набора геометрических примитивов.

4. Геомеханическая модель (ГММ)

Является связующим звеном между ИГМ, НДСМ и ГФМ, описывает упрощенную структуру расположения инженерно-геологических слоев в основании Загорских ГАЭС, которые передаются в расчетные блоки с необходимой детализацией.

Слои группируются по параметрам, необходимым для проведения расчетных исследований, таким как коэффициенты фильтрации, модуль деформации основания и др.

Область построения эквивалентна области ИГМ, импорт данных для дальнейших расчетов либо области построения для локальных расчетов может захватывать не всю зону Загорских ГАЭС, а только ее локальные части, такие как котлован здания станции, склон напорных водоводов, водоприемник и др. Общий вид локальной модели представлен на рис. 4. На рисунке приведена ГММ модель здания станции с котлованом, созданная при использовании «плавающей» детализации основных сооружений.

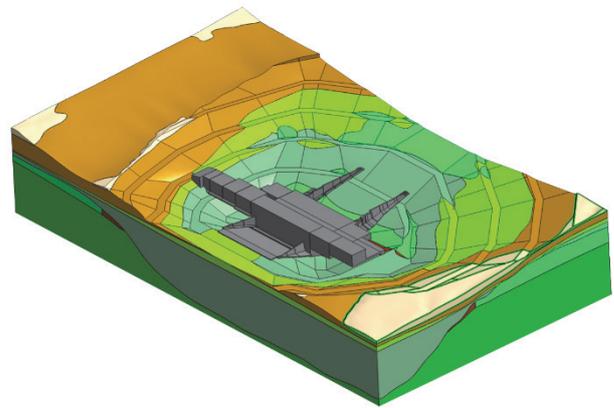


Рис. 4. Локальный фрагмент здания станции с котлованом – геомеханическая модель (ГММ ПАК)
[Figure 4. Local fragment of the station building with a pit – geomechanical model (GMM PAK)]

Данная модель и результаты могут быть экспортированы внутри расчетного модуля в любое используемое ПО (Visual MODFLOW Flex, Midas, Ansys, SpaceClaim, Plaxis и др.).

5. Геофильтрационная модель (ГФМ)

Разработана в современном программном комплексе Visual MODFLOW Flex с учетом предложений и рекомендаций ведущих авторов в области расчетов фильтрационного режима [4–7].

ГФМ является исходной моделью для проведения расчетных исследований, на основе которой выполняется прогноз фильтрационного режима основания Загорских ГАЭС при различных сценариях эксплуатации в пространственной постановке. На начальном этапе определено 12 сценариев моделирования фильтрационного режима, максимально охватывающих эксплуатационное состояние комплекса сооружений и позволяющих оценить взаимное влияние объектов, а также

определен набор параметров для назначения предельных значений показаний КИА. Результаты ГФМ ПАК передаются в расчетную геомеханическую модель (РГММ) и расчетную модель напряженно-деформированного состояния (МНДС) в качестве граничных условий.

Для проведения расчетных исследований в самой ГФМ применены граничные условия первого рода на узлах верхнего и нижнего водохранилищ, граничное условие второго рода назнача-

лось на дренажи в основании водоприемников и станционных узлов, включая вертикальные и горизонтальные элементы и дренажные завесы на южном и северном склонах. На границах расчетной области ГФМ применен частный вид граничного условия второго рода, имитирующего водонепроницаемую поверхность.

Общее строение модели с граничными условиями представлено на рис. 5, результаты на рис. 6 приведены для основного расчетного сочетания.

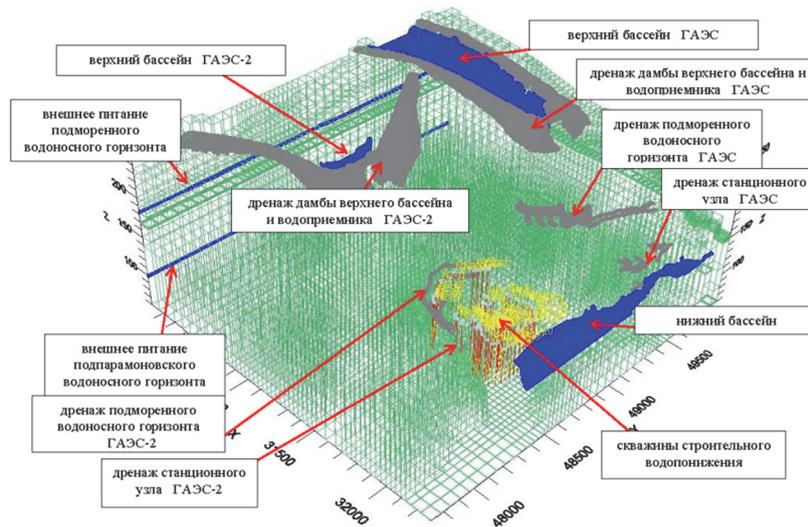


Рис. 5. Пространственная геофильтрационная модель (ГФМ ПАК) с граничными условиями для проведения расчетных исследований

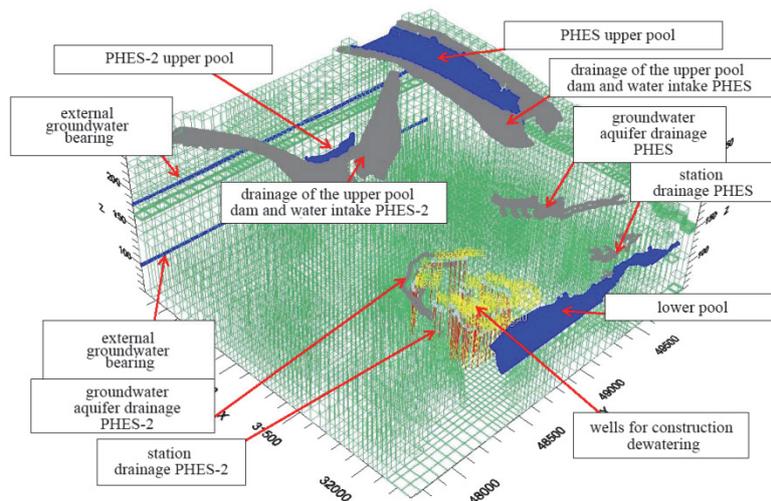


Figure 5. Spatial geofiltration model (GFM PAK) with boundary conditions for carrying out computational studies

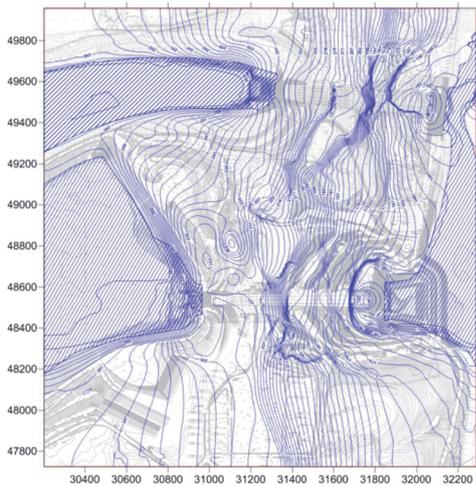


Рис. 6. Распределение напоров в техногенном водоносном горизонте при основном расчетном сочетании [Figure. 6. Distribution of head in a technogenic aquifer with the main design combination]

6. Расчетная геомеханическая модель основания комплекса сооружений (РГММ)

Основывается на верифицированной по данным натурных изысканий ГММ. Для определения деформационных параметров грунтов основания используются данные для каждого расчетного сценария ГФМ, обмен информации происходит внутри программных комплексов, после выполняется решение совместной задачи. В качестве граничных условий используются фильтрационные характеристики и пьезометрические поверхности при каждом из расчетных сценариев. В качестве выходных данных для моделей напряженно-деформированного состояния выступают:

- деформации и напряжения в грунтовом массиве;
- контактные напряжения в системе «сооружение – основание»;
- поровое давление;
- коэффициенты запаса устойчивости склонов;
- потенциальные поверхности смещения.

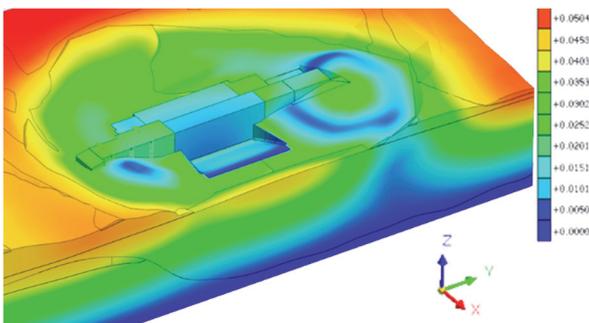


Рис. 7. Суммарные смещения здания станции при расчетном сочетании «Заполнение нижнего бассейна», м [Figure. 7. Total displacements of the station building with the calculated combination “Filling the lower basin”, m]

Результаты расчетных исследований, полученные при сценарии наполнения нижнего бассейна, представлены на рис. 7.

7. Модель напряженно-деформированного состояния сооружений (НДСМ)

Является основной моделью для оценки состояния основных конструкций комплекса взаимовлияющих ГТС. Модель разработана в универсальном промышленном программном комплексе ANSYS Mechanical, который в настоящее время широко применяется при решении подобных задач [8–20]. В случае разработки ПАК применение подобного ПО позволяет учитывать различные сочетания нагрузок, в том числе при учете граничных условий, передаваемых из моделей ГФМ и РГММ. Дополнительно возможно для расчетных исследований использовать локальные области модели, для получения локальных результатов перспективно использование особых сочетаний нагрузок, описывающих непроектную работу конструктивных элементов. Дополнительно на данной модели возможно рассмотрение мероприятий по ремонту и реконструкции ГТС. В модели НДСМ включены следующие сооружения:

- дамбы верхнего водохранилища – 2 ед.;
- водоприемные узлы – 2 ед.;
- сооружения станционных узлов – 2 ед.;
- напорные водоводы – 10 ед.;
- реверсивные каналы – 2 ед.;
- временная отсекающая перемычка реверсивного канала Загорской ГАЭС-2 – 1 ед.

Исходными данными для выполнения расчетных исследований являются результаты, получаемые из:

- ИГМ – физико-механические свойства материалов;
- РГММ – расположения РГЭ в сооружениях и перемещения грунтового массива;
- ГФМ – пьезометрические уровни в основании, основные и особые сочетания нагрузок.

В качестве результатов в экспертный модуль ПАК поступают:

- перемещения конструкций (по узлам КЭ-сетки);
- напряжения в основных конструктивных элементах;
- раскрытие швов (межблочных и межсекционных).

Фрагмент конечно-элементной аппроксимации математической модели в зоне водоприемного узла Загорской ГАЭС и результаты по осадкам водоприемника и тела дамб приведены на рис. 8. Результаты, получаемые на моделях ПАК, хорошо коррелируются с данными натурных наблюдений, поступающих с автоматизированной КИА.

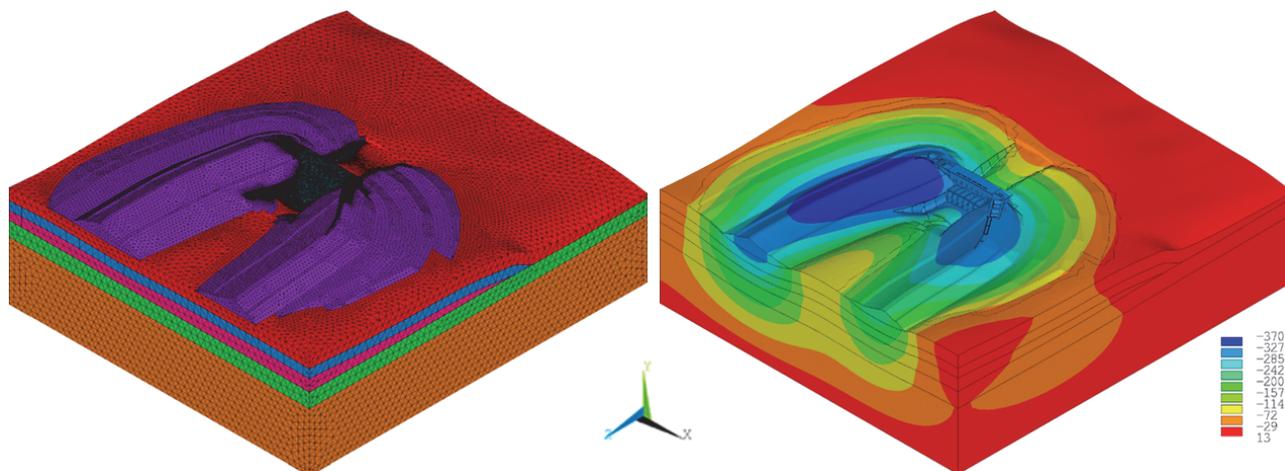


Рис. 8. Локальная математическая модель водоприемного узла Загорской ГАЭС, вертикальные перемещения, м
[Figure. 8. Local mathematical model of the water intake unit of the Zagorskaya PSP, vertical displacements, m]

Выводы

Результатами исследования являются актуализация структуры расчетного модуля ПАК, систематизация расчетных моделей, описание взаимодействия и передачи исходных данных внутри РМ ПАК, а также принципов решения сложных междисциплинарных задач.

Основой расчетного модуля являлись инженерно-геологическая, геометрическая, геомеханическая, геофильтрационная модели основания ГТС и модель напряженно-деформированного состояния сооружений. Применялись современные расчетные комплексы – ANSYS, Midas, Modflow и др.

Полученные в ходе исследования данные могут использоваться для повышения безопасности комплекса взаимовлияющих ГТС.

Список литературы

1. Лунаци М.Э., Шполянский Ю.Б., Соболев В.Ю., Беллендир Е.Н., Белостоцкий А.М., Лисичкин С.Е., Бершов А.В. Концепция построения архитектуры программно-аппаратного комплекса для мониторинга состояния гидротехнических сооружений // Гидротехническое строительство. 2016. № 5. С. 2–.
2. Рубин О.Д., Соболев В.Ю. Техническая реализация программного-аппаратного комплекса для мониторинга состояния и прогнозирования безопасности гидротехнических сооружений и их оснований // Природообустройство. 2017. № 1. С. 41–46.
3. Соболев В.Ю. Создание системы прогнозирования безопасности и надежности гидротехнических сооружений ГЭС и ГАЭС // Природообустройство. 2017. № 2. С. 6–11.
4. Анискин Н.А., Антонов А.С., Мгалобелов Ю.Б., Дейнеко А.В. Исследование фильтрационного режима

оснований высоких плотин на математических моделях // Вестник МГСУ. 2014. № 10. С. 114–131.

5. Aniskin N., Antonov A. Spatial seepage mathematical model of earth-fill dam in complicated topographic and engineering-geological conditions // Materials Science and Engineering. 2018. No. 365. Pp. 1–7.

6. Rak G., Bombac M. Hydraulic analysis of the construction pit of HPP Brežice (Slovenia) and its effect on the runoff regime // Conference: HYDRO 2015.

7. Babar Muhammad Munir. Finite Element Analysis of Seepage through an Earthen Dam by using Geo-Slope (SEEP /W) software // International Journal of Research (IJR). September 2014. Vol. 1. Issue 8. Pp. 619–634.

8. Gaohui Wang, Yongxiang Wang, Wenbo Lu, Mao Yu, Chao Wang. Deterministic 3D seismic damage analysis of Guandi concrete gravity dam: a case study // Engineering Structures. 2017. Vol. 148. Pp. 263–276.

9. Kai Zhu, Chongshi Gu, Jianchun Qiu, Wanxin Liu, Chunhui Fang, Bo Li. Determining the Optimal Placement of Sensors on a Concrete Arch Dam Using a Quantum Genetic Algorithm // Journal of Sensors. Vol. 2016. Article ID 2567305.

10. Fang C.-H., Chen J., Duan Y.-H., Xiao K. A new method to quantify breach sizes for the flood risk management of concrete arch dams // Journal of Flood Risk Management. 2016. 10(4).

11. Волынчиков А.Н., Мгалобелов Ю.Б., Баклыков И.В. Сопряжение бетонной и каменно-набросной плотин Богучанской ГЭС // Гидротехническое строительство. 2014. № 10. С. 2–9.

12. Jiahong Zhang. Safety Assessment Technology of Concrete Arch Dam // International Conference on Civil and Hydraulic Engineering 2018.

13. Rakić D., Živković M., Vulović S., Divac D., Slavković R., Milivojević N. Embankment dam stability analysis using FEM // 3rd South-East European Conference on Computational Mechanics – an ECCOMAS and IACM Special Interest Conference. 2013. Pp. 1–12.

14. Hao Gu, Zhongru Wu, Xiaofei Huang, Jintao Song. Zoning Modulus Inversion Method for Concrete Dams Based on Chaos Genetic Optimization Algorithm // *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Pp. 1–9.

15. Calcina S.V., Eltrudis L., Piroddi L., Ranieri G. Ambient Vibration Tests of an Arch Dam with Different Reservoir Water Levels: Experimental Results and Comparison with Finite Element Modelling // *The Scientific World Journal*. 2014. Article ID 692709.

16. Buffa G., Manciola P., De Lorenzis L., Cavalagli N., Comodini F. Calibration of finite element models of concrete arch-gravity dams using dynamical measures: the case of Ridracoli // *X International Conference on Structural Dynamics, EURODYN*, 2017.

17. Abdulrazeg A.A., Noorzaei J., Jaafar M.S., Khanehzaei P., Mohamed T.A. Thermal and structural analysis of RCC double-curvature arch dam // *Journal of civil engineering and management*. 2014. Vol. 20(3). Pp. 434–445.

18. Suarez B., Miquel J., Gonzalez J.M., Gratiela L., Buil J.M., Rio J.F., Batlle M.T. The behavior of Baserca and Llauset dams in the new energetic scenarios // *9th ICOLD European Club Symposium: Sharing Experience for Safe and Sustainable Water Storage (Venice, Italy)*. 2014. P. 144.

19. Zeinizadeh A., Mirzabozorg H., Noorzad A., Amirpoura A. Hydrodynamic pressures in contraction joints including waterstops on seismic response of high arch dams // *Structures*. 2018. 14. Pp. 1–14.

20. Amina Tahar Berrabah, Mohamed Belharizi, André Laulusa, Abdelmalek Bekkouche. Three-Dimensional Modal Analysis of Brezina Concrete Arch Dam, Algeria // *Earth Science Research*. 2012. Vol. 1. No. 2.

Об авторах

Рубин Олег Дмитриевич – доктор технических наук, директор, Научно-исследовательский институт энергетических сооружений (филиал АО «Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт “Гидропроект” имени С.Я. Жука»). eLIBRARY SPIN-код: 2720-6627. *Область научных интересов:* расчетные исследования напряженно-деформированного состояния сооружений, расчетные исследования гидротехнических сооружений, исследования применения композитных материалов, усиление железобетонных конструкций, определение параметров армирования. *Контактная информация:* e-mail – o.rubin@hydroproject.ru

Антонов Антон Сергеевич – кандидат технических наук, директор аналитического центра безопасности оборудования и ГТС, Научно-исследовательский институт энергетических сооружений (филиал АО «Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт “Гидропроект” имени С.Я. Жука»); старший

преподаватель кафедры гидравлики и гидротехнического строительства, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ). eLIBRARY SPIN-код: 7374-6867. ORCID iD: 0000-0002-8310-9604. *Область научных интересов:* расчеты напряженно-деформированного состояния и устойчивости гидротехнических сооружений (ГТС), исследование термического режима и термонапряженного состояния ГТС, моделирование аварийных ситуаций на ГТС, геофильтрационный режим ГТС, совместный температурно-фильтрационный режим ГТС и их оснований, информационно-диагностические системы. *Контактная информация:* e-mail – Antonov.An.S@yandex.ru

Беллендир Евгений Николаевич – доктор технических наук, генеральный директор, АО «Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт “Гидропроект” имени С.Я. Жука». *Область научных интересов:* расчетные исследования напряженно-деформированного состояния сооружений, расчетные исследования гуртовых оснований, термонапряженное состояние гидротехнических сооружений (ГТС). eLIBRARY SPIN-код: 7975-2841. *Контактная информация:* e-mail – e.bellendir@hydroproject.ru

Кобочкина Екатерина Михайловна – заместитель директора аналитического центра безопасности оборудования и ГТС, Научно-исследовательский институт энергетических сооружений (филиал АО «Проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт “Гидропроект” имени С.Я. Жука»). *Область научных интересов:* геофильтрационный режим ГТС, информационно-диагностические системы, анализ показаний контрольно-измерительной аппаратуры, прогноз состояния ГТС. *Контактная информация:* e-mail – e.kobochkina@hydroproject.ru

Котлов Олег Николаевич – кандидат геолого-минералогических наук, начальник отдела «Основания, грунтовые и подземные сооружения», АО «Всероссийский научно-исследовательский институт гидротехники имени Б.Е. Веденеева». eLIBRARY SPIN-код: 7057-9274. *Область научных интересов:* геофильтрационный режим ГТС, анализ показаний контрольно-измерительной аппаратуры, прогноз состояния ГТС. *Контактная информация:* e-mail – kotlovon@vniig.ru

Для цитирования

Рубин О.Д., Антонов А.С., Беллендир Е.Н., Кобочкина Е.М., Котлов О.Н. Разработка расчетного модуля программно-аппаратного комплекса для обеспечения безопасности взаимодействующих ГТС // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 2. С. 96–105. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-96-105

Development of the design module of the software and hardware complex to ensure the safety of mutually influencing HPS

Oleg D. Rubin¹, Anton S. Antonov^{1,4*}, Evgeny N. Bellendir², Ekaterina M. Kobochkina¹, Oleg N. Kotlov³

¹Research Institute of Energy Structures (branch of JSC “Design, Survey and Research Institute ‘Hydroproject’ named after S.Y. Zhuk”), 2 Volokolamskoye Highway, Moscow, 125080, Russian Federation

²JSC “Design, Survey and Research Institute ‘Hydroproject’ named after S.Y. Zhuk”, 2 Volokolamskoye Highway, Moscow, 125080, Russian Federation

³JSC “All-Russian Scientific Research Institute of Hydraulic Engineering named after B.E. Vedenev”, 21 Gzhatskaya St., Saint Petersburg, 195220, Russian Federation

⁴Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoe Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

*Antonov.An.S@yandex.ru

Received: February 01, 2019

Revised: March 18, 2019

Accepted: March 26, 2019

Keywords:

hydraulic structures; foundations; software and hardware complex; monitoring; safety prediction; mathematical models; finite element models; information and diagnostic system; a calculation module

Abstract

Relevance. As part of the implementation of the Federal Law No. 117-FZ “On the Safety of Hydraulic Structures”, it is necessary to continuously monitor the state of hydraulic structures and related facilities by equipping with control and measuring instruments. The development of modern computer complexes allows us to carry out and predict the state of objects by combining computational research and field observations. The work is aimed at organizing a comprehensive assessment of the state of the HPS and ensuring the safety of existing and projected mutually influential complexes.

Aims of research. Improving the safety of the operated (under construction) complex of interfering hydraulic structures. Assessment of sufficient and high-quality engineering and repair work carried out on the HPS. Development of recommendations for improving the efficiency of construction of new and modernization of operated hydropower facilities. HPS on the example of the Zagorsk HPS.

Methods. Representation of the interaction ideology of various software systems of mathematical modeling, using control and measuring instruments data for calibration and verification of mathematical models.

Results. The structure of the HSC calculation module was updated, systematization of the calculation models was carried out, interaction and transfer of the initial data to the calculation module of the software and hardware complex was revealed. The implementation of scientific research is aimed at improving the safety of the complex hydraulic structures.

References

1. Lunaci M.Eh., Shpolyanskij Yu.B., Sobolev V.Yu., Bellendir E.N., Belostockij A.M., Lisichkin S.E., Bershov A.V. (2016). Koncepciya postroeniya arhitektury programmno-apparatnogo kompleksa dlya monitoringa sostoyaniya gidrotekhnicheskikh sooruzhenij [The concept of building architecture of software and hardware complex for monitoring the state of hydraulic structures]. *Gidrotekhnicheskoe stroitelstvo*, (5), 2–6. (In Russ.)

2. Rubin O.D., Sobolev V.Yu. (2017). Tekhnicheskaya realizaciya programmno-apparatnogo kompleksa dlya monitoringa sostoyaniya i prognozirovaniya bezopasnosti gidrotekhnicheskikh sooruzhenij i ih osnovanij [Technical implementation of software hardware for monitoring the status and prediction of the safety of hydraulic structures and their bases]. *Prirodoobustrojstvo*, (1), 41–46. (In Russ.)

3. Sobolev V.Yu. (2017). Sozdanie sistemy prognozirovaniya bezopasnosti i nadyozhnosti gidrotekhnicheskikh so-

oruzhenij GES i GAES [Creating a system for predicting the safety and reliability of hydraulic structures GEHS and GAEHS]. *Prirodoobustrojstvo*, (2), 6–11. (In Russ.)

4. Aniskin N.A., Antonov A.S., Mgalobelov Yu.B., Dejneko A.V. (2014). Issledovanie fil'tracionnogo rezhima osnovanij vysokih plotin na matematicheskikh modelyah [Investigation of the filtration regime of high dam bases on mathematical models]. *Vestnik MGSU*, (10), 114–131. (In Russ.)

5. Aniskin N., Antonov A. (2018). Spatial seepage mathematical model of earth-fill dam in complicated topographic and engineering-geological conditions. *Materials Science and Engineering*, (365), 1–7.

6. Rak G., Bombac M. (2015). Hydraulic analysis of the construction pit of HPP Brežice (Slovenia) and its effect on the runoff regime. *Conference: HYDRO 2015*.

7. Babar Muhammad Munir. (2014). Finite Element Analysis of Seepage through an Earthen Dam by using GeoSlope (SEEP/W) software. *International Journal of Research (IJR)*, 1(8), 619–634.

8. Gaohui Wang, Yongxiang Wang, Wenbo Lu, Mao Yu, Chao Wang. (2017). Deterministic 3D seismic damage analysis of Guandi concrete gravity dam: a case study. *Engineering Structures*, 148, 263–276.

9. Kai Zhu, Chongshi Gu, Jianchun Qiu, Wanxin Liu, Chunhui Fang, Bo Li. (2016). Determining the Optimal Placement of Sensors on a Concrete Arch Dam Using a Quantum Genetic Algorithm. *Journal of Sensors*. Article ID 2567305.

10. Fang C.-H., Chen J., Duan Y.-H., Xiao K. A new method to quantify breach sizes for the flood risk management of concrete arch dams. *Journal of Flood Risk Management*, 10(4).

11. Volynchikov A.N., Mgalobelov Yu.B., Baklykov I.V. (2014). Sopryazhenie betonnoj i kamenno-nabrosnoj plotin Boguchanskoj GES [Conjugation of the concrete and stone dam of the Boguchanskaya GEGS]. *Gidrotekhnicheskoe Stroitelstvo*, (10), 2–9. (In Russ.)

12. Jiahong Zhang. (2018). Safety Assessment Technology of Concrete Arch Dam. *International Conference on Civil and Hydraulic Engineering 2018*.

13. Rakić D., Živković M., Vulović S., Divac D., Slavković R., Milivojević N. (2013). Embankment dam stability analysis using FEM. *3rd South-East European Conference on Computational Mechanics – an ECCOMAS and IACM Special Interest Conference*, 1–12.

14. Hao Gu, Zhongru Wu, Xiaofei Huang, Jintao Song. (2015). Zoning Modulus Inversion Method for Concrete Dams Based on Chaos Genetic Optimization Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 1–9.

15. Calcina S.V., Eltrudis L., Piroddi L., Ranieri G. (2014). Ambient Vibration Tests of an Arch Dam with Different Reservoir Water Levels: Experimental Results and Comparison with Finite Element Modelling. *The Scientific World Journal*. Article ID 692709.

16. Buffia G., Manciola P., De Lorenzis L., Cavalagli N., Comodini F. (2017). Calibration of finite element models of concrete arch-gravity dams using dynamical measures: the case of Ridracoli. X International Conference on Structural Dynamics, EURO DYN.

17. Abdulrazeg A.A., Noorzaei J., Jaafar M.S., Khanehzaei P., Mohamed T.A. (2014). Thermal and structural analysis of RCC double-curved arch dam. *Journal of Civil Engineering and Management*, 20(3), 434–445.

18. Suarez B., Miquel J., Gonzalez J.M., Gratiela L., Buil J.M., Rio J.F., Batlle M.T. (2014). The behavior of Baserca and Llauset dams in the new energetic scenarios. *9th ICOLD European Club Symposium: Sharing experience for safe and sustainable water storage (Venice, Italy)*, 144.

19. Zeinizadeh A., Mirzabozorg H., Noorzad A., Amirpoura A. (2018). Hydrodynamic pressures in contraction joints including waterstops on seismic response of high arch dams. *Structures*, 14, 1–14;

20. Amina Tahar Berrabah, Mohamed Belharizi, André Laulusa, Abdelmalek Bekkouche. (2012). Three-Dimensional Modal Analysis of Brezina Concrete Arch Dam, Algeria. *Earth Science Research*, 1(2).

About the authors

Oleg D. Rubin – DSc in Technical Sciences, Director, Research Institute of Energy Structures (branch of JSC “Design, Survey and Research Institute ‘Hydroproject’ named after S.Y. Zhuk”). eLIBRARY SPIN-code: 2720-6627. *Research interests*: design studies of stress-strain state of structures, design studies of hydraulic structures, studies of the use of composite materials, reinforced concrete structures, determining the parameters of reinforcement. *Contacts*: e-mail – o.rubin@hydroproject.ru

Anton S. Antonov – PhD in Technical Sciences, Director of the Analytical Center for Equipment Safety and Hydraulic Structures, Research Institute of Energy Structures (branch of JSC “Design, Survey and Research Institute ‘Hydroproject’ named after S.Y. Zhuk”); Senior Lecturer, Institute of Hydraulic Engineering and Energy Sector Construction, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU). eLIBRARY SPIN-code: 7374-6867. ORCID iD: 0000-0002-8310-9604. *Research interests*: calculations of the stress-strain state and stability of hydraulic structures, the study of the thermal regime and the heat-stressed state of hydraulic structures, modeling of emergency situations on hydraulic structures, geofiltration mode of hydraulic structures, joint temperature-filtration mode of structures and their bases, information and diagnostic system. *Contacts*: e-mail – Antonov.An.S@yandex.ru

Evgeny N. Bellendir – Doctor of Technical Sciences, General Director, JSC “Design, Survey and Research Institute ‘Hydroproject’ named after S.Y. Zhuk”. eLIBRARY SPIN-код: 7975-2841. *Research interests*: design studies of stress-strain state of structures, design studies of soil bases, thermal stress state of hydraulic structures hydraulic structures. *Contacts*: e-mail – e.bellendir@hydroproject.ru

Ekaterina M. Kobochkina – Deputy Director of the Analytical Center for Equipment Safety and hydraulic Structures, Research Institute of Energy Structures (branch of JSC “Design, Survey and Research Institute ‘Hydroproject’ named after S.Y. Zhuk”). *Research interests*: geofiltration mode of hydraulic structures, information and diagnostic systems, analysis of control and measuring equipment, the forecast state of hydraulic structures. *Contacts*: e-mail – e.kobochkina@hydroproject.ru

Oleg N. Kotlov – PhD in Geological and Mineralogical Sciences, Head of the Foundation, Ground and Underground Structures Department, All-Russian Research Institute of Hydraulic Engineering named after B.E. Vedenev. eLIBRARY SPIN-code: 7057-9274. *Research interests*: geofiltration mode of the hydraulic structures, analysis of readings of the instrumentation, the prognosis for the hydraulic structures. *Contacts*: e-mail – kotlovon@vniig.ru

For citation

Rubin O.D., Antonov A.S., Bellendir E.N., Kobochkina E.M., Kotlov O.N. (2019). Development of the design module of the software and hardware complex to ensure the safety of mutually influencing HPS. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 96–105. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-96-105

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК

УДК 004.925.83

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-106-116

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Образование поверхностей Монжа кинематическим способом в среде AutoCAD

В.А. Романова*Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6**Поступила в редакцию: 26 января 2019 г.**Доработана: 07 марта 2019 г.**Принята к публикации: 15 марта 2019 г.***Ключевые слова:**поверхность Монжа;
отсек поверхности;
AutoCAD;
AutoLISP;
образующая линия;
нормаль;
касательная плоскость;
развертывающаяся направляющая
поверхность;
мини-фильм**Аннотация**

Цели. Изучение возможности формирования резных поверхностей Монжа, заданных способом их образования, создание алгоритма и программы на языке AutoLISP для демонстрации образования поверхностей в среде AutoCAD в динамическом режиме.

Методы. Резные поверхности Монжа образуются плоской кривой, расположенной в касательной плоскости к неподвижной направляющей развертывающейся поверхности, при перекачивании плоскости и кривой по направляющей поверхности без скольжения. Описанный способ образования указанных поверхностей позволяет выполнить их формирование кинематическим методом в среде AutoCAD с применением программного обеспечения на языке AutoLISP. В статье рассмотрено построение поверхностей Монжа с использованием в качестве направляющих цилиндрической и конической поверхностей. В качестве образующих линий применяются прямая линия и синусоида.

Результаты. Создан алгоритм и программа на языке AutoLISP для образования наборов отсеков нескольких поверхностей Монжа и визуализации формирования этих поверхностей в динамическом режиме посредством последовательного изображения отсеков на экране монитора. Снят мини-фильм об образовании поверхности Монжа при качении плоскости с прямой линией по круговому конусу. В мини-фильме используются рисунки, полученные преобразованием чертежей среды AutoCAD.

Введение

В настоящее время в строительстве широко используются классические типы оболочек, для которых имеются методы расчета на прочность. В целях достижения архитектурной выразительности и увеличения функциональности сооружений появляется необходимость в разработке и использовании оболочек более сложных геометрических форм.

Поверхности, все нормали которых являются касательными к развертывающейся поверхности,

впервые описал Г. Монж [1; 2]. Эти поверхности называют резными поверхностями Монжа. Они образуются плоской кривой, расположенной в касательной плоскости к неподвижной направляющей развертывающейся поверхности, при перекачивании плоскости и кривой по неподвижной поверхности без скольжения [3].

Резные поверхности Монжа – это большой класс поверхностей, поскольку в качестве образующей может быть использована любая плоская кривая. Архитекторы все чаще обращаются к поверхностям Монжа для создания новых форм, продолжают изучать их геометрию [4; 5]. Для поверхностей Монжа разработаны способы расчета по безмоментной теории, вариационно-разностным методом и методом конечных элементов [6; 7].

© Романова В.А., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Известна графическая иллюстрация научных данных (архитектурных, метеорологических, медицинских, биологических, геологических и др.) посредством визуализации в трехмерном пространстве, при этом изображение объемных тех возможно не только в статике, но и в динамике. Высококачественные изображения получают, используя различные виды программного обеспечения [8–13].

Формирование резных поверхностей Монжа выполняется кинематическим способом [14]. Для решения этой задачи в системе AutoCAD разрабатываются пользовательские функции на языке AutoLISP. Этот язык позволяет обращаться с помощью пользовательских функций к командам системы AutoCAD в автоматическом режиме [15; 16] и решать различные практические задачи [17; 18].

Функциональный язык AutoLISP встроен в систему AutoCAD. Программы, созданные на этом языке, используются для визуализации формирования аналитических поверхностей [19–22], если исходными данными является способ образования поверхности.

Рассмотрим образование резных поверхностей Монжа, используя в качестве направляющих неподвижных поверхностей круговой цилиндр и круговой конус, а в качестве образующих – прямую линию и синусоиду.

1. Поверхность Монжа с круговой цилиндрической направляющей поверхностью и образующей прямой линией

Начальное положение элементов поверхности показано на рис. 1, где $xOyz$ – основная система координат; uAv – система координат в плоскости Π_1 ; Π_1 – плоскость, касательная к цилиндру в начальном положении; q – образующая прямая, принадлежащая касательной плоскости; h – высота плоскости и цилиндра; r – радиус цилиндра; β – угол прямой q с осью v ; u_{max} – максимальная величина координаты u .

На участке, где поверхность образуется касательными к поверхности цилиндра, получается торсовая поверхность (рис. 2). Она касается цилиндра по кривой m . В этом случае кривая m является направляющей линией, а прямая q – образующей.

Кривая m строится исходя из того факта, что все точки прямой q перемещаются по эвольвентам окружностей цилиндра.

Уравнение прямой в системе uAv : $v(u) = u \cdot \tan \beta$.

Угол переката определяется из соотношения $\vartheta = v/r$.

Эвольвенты находятся на разных уровнях в плоскостях, определяемых значением функции $v(u)$. Поскольку $v(u) = z$, координаты точек линии m в системе $xOyz$ вычисляются по уравнениям:

$$x(z) = r \cos \vartheta, \quad y(z) = r \sin \vartheta.$$

Для построения линии m составлена пользовательская функция *Stlin*, представленная ниже:

```
(defun stlin ()
; Линия m на цилиндре
(setq z 0.0 betag 40.0)
(setq beta (/ (* betag pi) 180))
(command "spline")
(while (<= z h)
(setq vz (/ (* z (sin beta)) (cos beta))); величина функции v(u)
(setq pt (list x y z)) (setq teta (/ vz r)); угол переката
(setq x (* r (cos teta)) y (* r (sin teta))); точки линии m
(command pt)
(setq z (+ z dz))
(command "" "" ""))
```

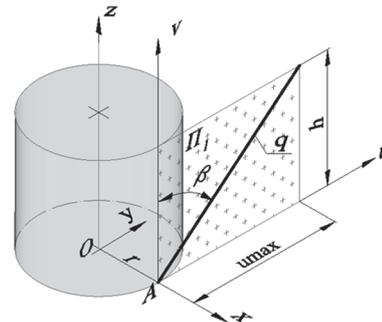


Рис. 1. Начальное положение элементов поверхности [Figure 1. The initial position of the surface elements]

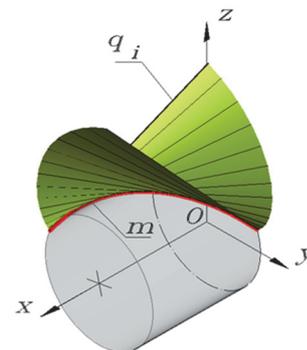


Рис. 2. Торс [Figure 2. Thors]

Процесс качения плоскости с прямой по цилиндру состоит из двух движений: вращения этой

пары вокруг оси z на угол φ и поступательного перемещения на величину s , равную дуге поворота $larc$ (рис. 3).

$$s = larc = r \cdot \frac{\varphi \cdot \pi}{180}$$

Угол переката всей прямой q равен

$$\tau_{\max} = \frac{u_{\max}}{r} \cdot \frac{180}{\pi}$$

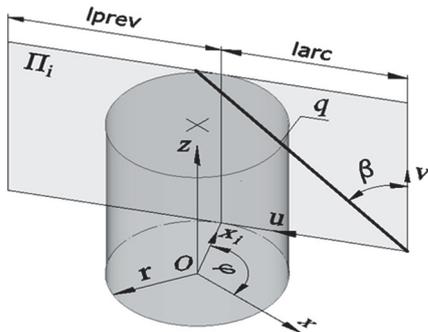


Рис. 3. Перекат поверхности и прямой по цилиндру
[Figure 3. Roll surface and straight on the cylinder]

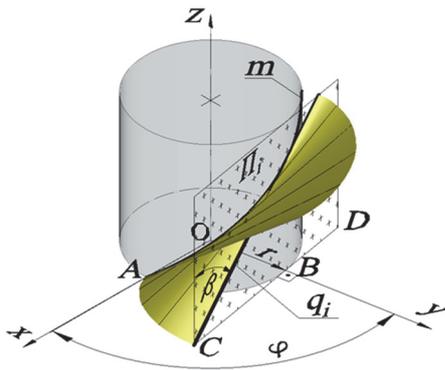


Рис. 4. Образование отсеков торса
[Figure 4. Education torso compartments]

Образование торсовой поверхности (рис. 4) происходит, если $0 \leq \varphi \leq \tau_{\max}$.

При $\varphi > \tau_{\max}$, и если обкат цилиндра выполняется против часовой стрелки, прямая q не касается цилиндра. Образуется первая ветвь поверхности (рис. 5).

Алгоритм выполнения качения включает поворот плоскости с прямой и системы координат uAv на угол φ вокруг оси z , удлинение поверхности на величину $larc$, перенос системы координат uAv и прямой q по оси u на расстояние $larc$ в сторону, противоположную качению (рис. 3).

Алгоритм включает два цикла: внешний и внутренний.

Внутренний цикл содержит следующие операции:

- создание идентификатора слоя при каждом значении i ($i = 1, \dots, n$), слой с этим именем устанавливается в качестве текущего, и выполняются указанные выше операции;

- формирование набора образующих линий.

Во внешнем цикле выполняется образование отсеков поверхности, для чего проводятся следующие операции:

- загрузка в чертеж необходимого числа слоев;
- вычерчивание элементов поверхности в начальном положении (рис. 1);
- выполнение операций внутреннего цикла;
- образование отсеков поверхности.

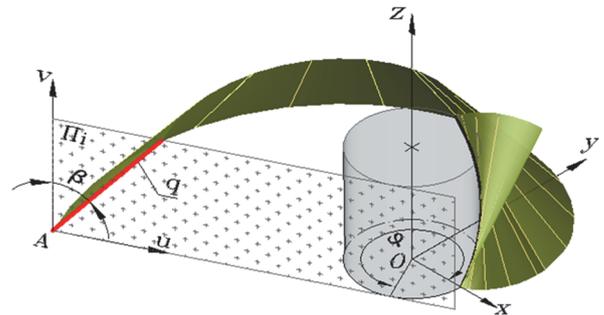


Рис. 5. Образование первой ветви поверхности:

$$r = 20, h = 20, \beta = 40^\circ$$

[Figure 5. Formation of the first branch of the surface:

$$r = 20, h = 20, \beta = 40^\circ]$$

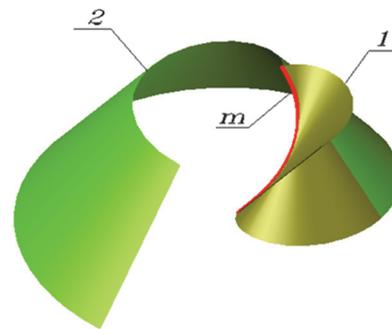


Рис. 6. Торс и первая ветвь поверхности:

$$r = 10, h = 40, \beta = 40^\circ$$

[Figure 6. Thors and first branch of surface:

$$r = 10, h = 40, \beta = 40^\circ]$$

По окончании работы циклов создается блок из отсеков поверхности и образующих линий. Формируется поверхность «размораживанием» слоев [23] (рис. 5). Образование поверхности показано на рис. 5.

Торс и первая ветвь поверхности изображены на рис. 6, где 1 – торс, 2 – первая ветвь поверхности.

При $\varphi < 0$ (обход цилиндра по часовой стрелке) от тора отходит вторая ветвь поверхности.

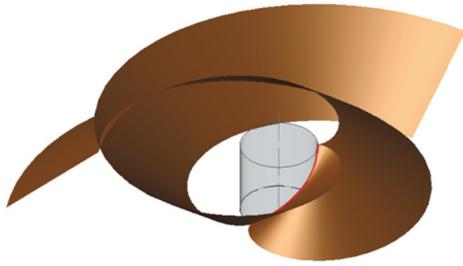


Рис. 7. Поверхность Монжа: $r = 20$, $h = 40$, $\beta = 50^\circ$
[Figure 7. The Monge surface: $r = 20$, $h = 40$, $\beta = 50^\circ$]

Полная поверхность показана на рис. 7.

2. Поверхность Монжа с круговой цилиндрической направляющей поверхностью и синусоидой в качестве меридиана

Алгоритм образования этой поверхности включает те же операции, что и предыдущий, при этом в качестве образующей линии используется синусоида (рис. 8).

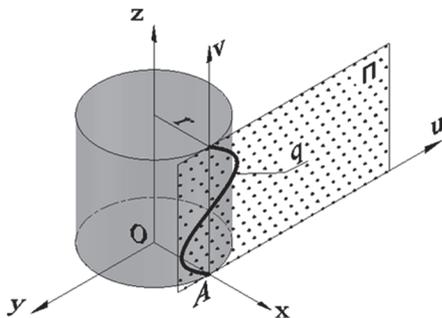


Рис. 8. Начальное положение элементов поверхности
[Figure 8. The initial position of the surface elements]

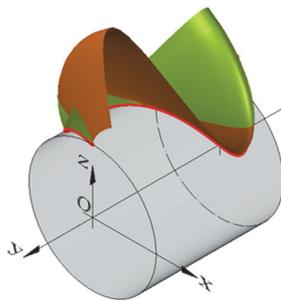


Рис. 9. Поверхность перехода
[Figure 9. The transition surface]

Поверхности также имеют две ветви и поверхность перехода, которая образуется при $-\frac{\tau_{\max}}{2} \leq \varphi \leq \frac{\tau_{\max}}{2}$. Поверхность перехода представлена на рис. 9. Образование поверхности показано на рис. 10.

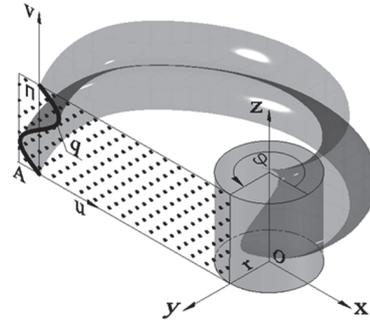


Рис. 10. Образование поверхности
[Figure 10. Surface formation]



Рис. 11. Резная поверхность Монжа с цилиндрической направляющей поверхностью и меридианом в виде синусоиды
[Figure 11. Monge carved surface with cylindrical guide surface and sinusoidal meridian]

Приведенный алгоритм образования поверхности с круговой цилиндрической направляющей может быть использован и для образования поверхности с любой другой плоской кривой в качестве образующей: цепной линией, циклоидой гиперболой, параболой и др.

3. Резная поверхность Монжа с конической направляющей поверхностью и образующей прямой

3.1. Образующая линия совпадает с направляющей конуса

На рис. 12 показан перекал плоскости Ψ и прямой AB по конусу. Плоскость во всех положениях касается конуса, а точка B перемещается по кривой s .

Начальное положение элементов поверхности изображено на рис. 13.

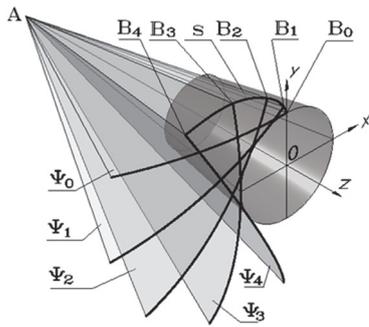


Рис. 12. Качение плоскости с кривой по конусу
[Figure 13. Rolling a plane with a curve along a cone]

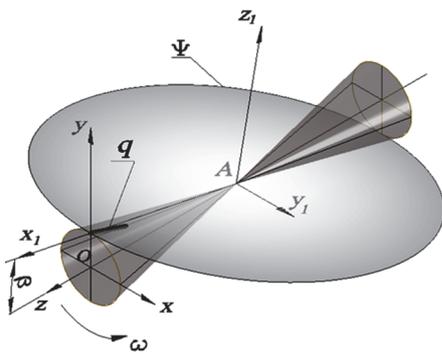


Рис. 13. Начальное положение элементов поверхности
[Figure 12. The initial position of the surface elements]

На рис. 14 показано положение плоскости Ψ и расположенной на ней прямой AB при качении плоскости без скольжения по конусу.

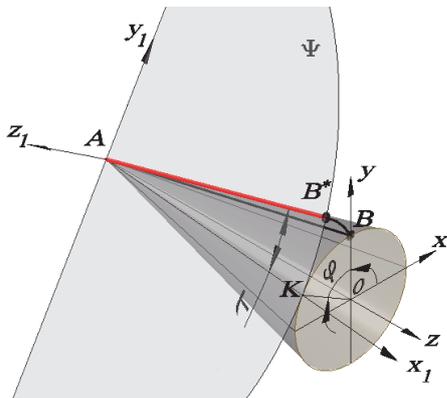


Рис. 14. Перекат плоскости и прямой AB по конусу
[Figure 14. Roll the plane and line AB on the cone]

Новая линия контакта конуса и плоскости – прямая AK . Ось x_1 подвижной системы координат совмещена с прямой AK . Произошел поворот образующей конуса и оси x_1 на угол φ вокруг оси z .

Положение точки B на плоскости осталось прежним, теперь она обозначена B^* . Угол прямой

AB^* с осью x_1 является углом качения плоскости. Из условия качения без скольжения длины дуг контакта конуса и плоскости равны, т.е. $\vec{BK} = \vec{B^*K}$, следовательно, $l_{OB} \cdot \varphi = l_{AB} \cdot \tau$, где l_{OB} – величина радиуса основания конуса; l_{AB} – длина образующей конуса.

Для определения координат точки B^* удобно задавать угол φ поворота плоскости вокруг оси z . Тогда угол τ определяется из соотношения

$$\tau = \varphi \cdot l_{OB} / l_{AB}. \quad (1)$$

Координаты точки B^* в подвижной системе координат вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{AB} \cdot \cos \tau, \\ y_1 &= l_{AB} \cdot \sin \tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Координаты точки $B^*(x_B, y_B, z_B)$ в неподвижной системе $xOyz$ определяются из выражений, полученных преобразованием координат и имеющих вид

$$\begin{aligned} x_B &= (* l_{AB} (- (* (\sin \tau) (\cos \varphi)) (* (\cos \tau) (\sin \beta) (\sin \varphi))), \\ y_B &= (* l_{AB} (+ (* (\cos \tau) (\sin \beta) (\cos \varphi)) ((\sin \tau) (\sin \varphi))), \\ z_B &= (- (* l_{AB} (\cos \tau) (\cos \beta)) h_{\text{con}}), \end{aligned} \quad (3)$$

где β – угол между осью конуса и его образующей; h_{con} – высота конуса.

Поскольку точка B движется по эвольвенте, ее нормальная плоскость совпадает с касательной плоскостью Ψ , которая во всех положениях проходит через вершину конуса A [5].

В этом случае кривая, по которой движется точка B , является сферической эвольвентой. Ее точки находятся на сфере радиуса AB , а сама поверхность находится внутри сферы (рис. 15).

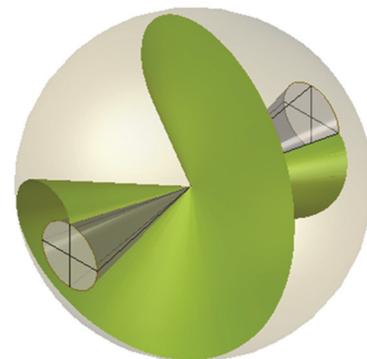


Рис. 15. Поверхность Монжа находится внутри сферы
[Figure 15. The Monge surface is located inside the sphere]

Координаты точки C вычисляются по формулам аналогичным (3) путем замены параметра l_{AB} на параметр l_{AC} .

Полученные формулы дают возможность вычертить образующую при любом положении поверхности Ψ . Это позволяет организовать цикл, в котором на каждом шаге вычерчивается образующая и формируется отсек поверхности.

Сама поверхность образуется описанным выше способом.

3.2. Образующая линия расположена под углом к направляющей конуса

Начальное положение образующей BC , конуса и плоскости Ψ в случае, когда образующая прямая BC расположена под углом τ_0 к радиусу AB , показано на рис. 16.

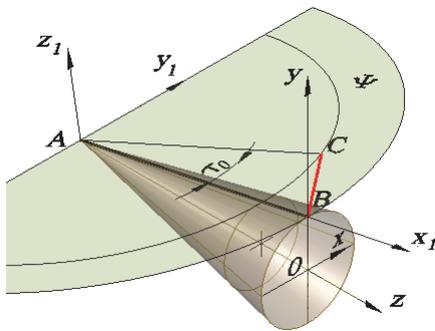


Рис. 16. Начальное положение элементов поверхности [Figure 16. Initial position of surface features]

Угол переката τ_0 для точки B определяется по формуле (1), а для точки C – из соотношения

$$\tau_C = \tau_0 + \tau_B. \quad (4)$$

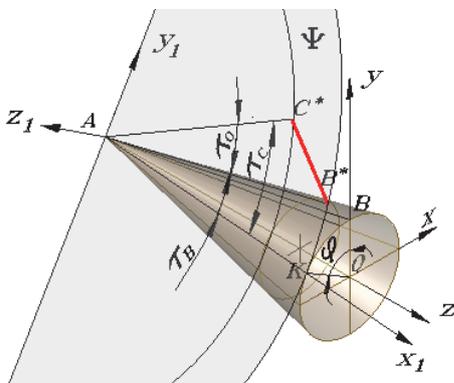


Рис. 17. Положение точек B и C в системе координат $x_1Ay_1z_1$. [Figure 17. The position of points B and C in the $x_1Ay_1z_1$ -coordinate system]

Координаты точки B определяются по формулам (3), а для определения координат точки C формулы (3) преобразуются с учетом выражения (4). Положение точек B и C в системе координат показано на рис. 17.

Алгоритм образования отсеков поверхности повторяет предыдущий.

4. Образование резной поверхности Монжа с применением двух вращений

Поверхность Монжа можно также построить, если представить перекал плоскости Ψ и расположенной на ней прямой AB как вращение этой пары вокруг оси z на угол φ в неподвижной системе координат $xOyz$ и поворот прямой AB в подвижной системе координат $x_1Ay_1z_1$ плоскости Ψ на угол τ вокруг оси z_1 .

В результате этих двух вращений точка B_0 , расположенная в плоскости Ψ , при $\varphi = 0$ перемещается в точку B^* , расположенную на конусе, а затем в точку B , расположенную в повернутой на угол φ плоскости Ψ (рис. 18). Точка C_0 перемещается сначала в точку C^* , а затем в точку C . Между радиусами точек C^* и C угол равен τ .

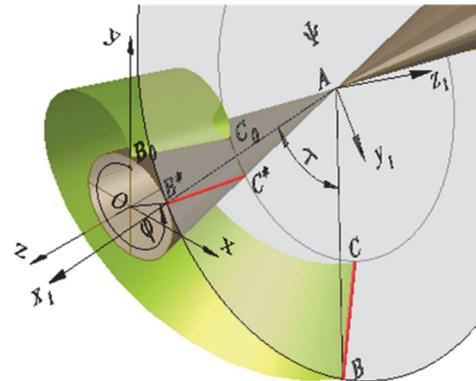


Рис. 18. Качение плоскости Ψ и прямой AB по конусу [Figure 18. Rolling the plane Ψ and the straight line AB with a cone]

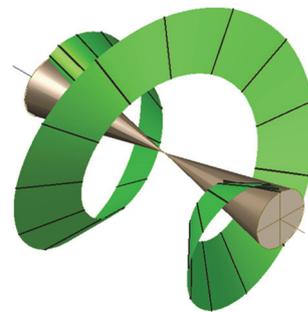


Рис. 19. Отсеки поверхности разделены копиями образующих [Figure 19. Surface compartments are separated by generators]

В этом случае алгоритм образования отсеков поверхности может быть представлен следующим образом.

Предварительно вычерчиваются элементы поверхности в начальном положении. В цикле выполняются следующие операции:

- вращение поверхности Ψ и прямой AB на угол $\Delta\varphi$ в системе координат $xOyz$;
- установка системы координат $x_1Ay_1z_1$ в плоскости Ψ ;
- копирование образующей AB ;
- вращение копии A^*B^* на угол τ ;
- возврат к системе координат $xOyz$.

Результат – набор отсеков поверхности (рис. 19).

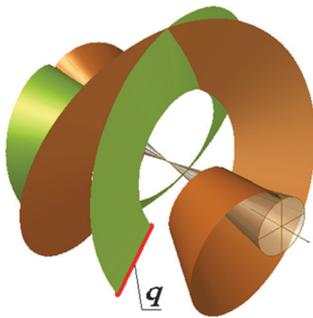


Рис. 20. Образование поверхности Монжа (q – образующая линия)
[Figure 20. Formation of the Monge surface (q – the generatrix)]

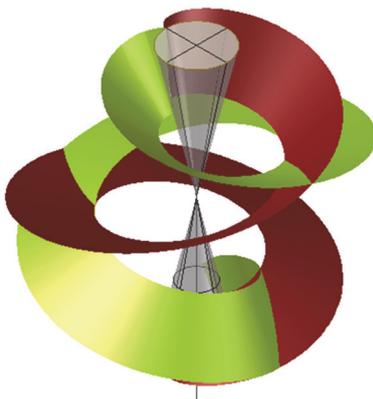


Рис. 21. Поверхность Монжа (повернуто на 90°)
[Figure 21. The surface of Monge (rotated by 90°)]

Образование поверхности выполняется методом «размораживания». На рис. 20 представлено формирование образующей q второй ветви поверхности. На рис. 21 изображена резная поверхность Монжа.

5. Резная поверхность Монжа с конической направляющей поверхностью и образующей синусоидой

Начальное положение элементов поверхности представлено на рис. 22.

Образующей является синусоида:

$$y = A \sin \varphi,$$

где A – задаваемая амплитуда синусоиды; φ – угол, вычисляемый из выражения:

$$\varphi = \frac{\pi x}{BC} \text{ при } AC \leq x \leq BC.$$

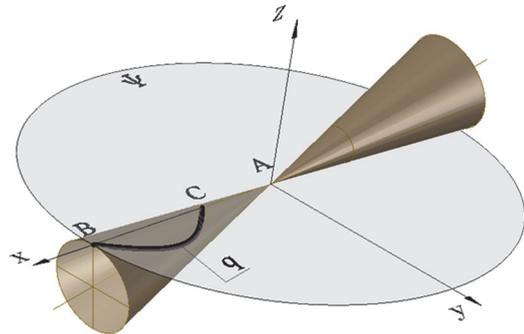


Рис. 22. Начальное положение элементов поверхности
[Figure 22. The initial position of the surface elements]

Алгоритм формирования поверхности предусматривает, как и в предыдущем примере, выполнение в цикле операций по созданию набора отсеков поверхности (рис. 23):

- вращение поверхности Ψ и синусоиды на угол $\Delta\varphi$ в системе координат $xOyz$;
- вращение синусоиды на угол τ .

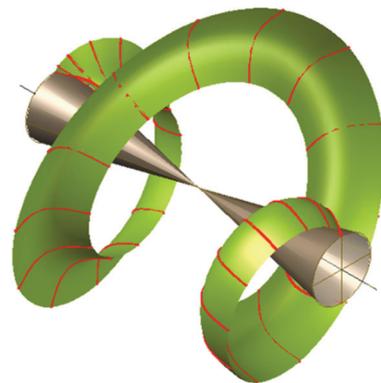


Рис. 23. Набор отсеков поверхности
[Figure 23. A set of surface compartments]

Отсеки поверхности разделены образующими линиями. Образующие линии подчеркивают форму поверхности, ее выпуклые и вогнутые участки.

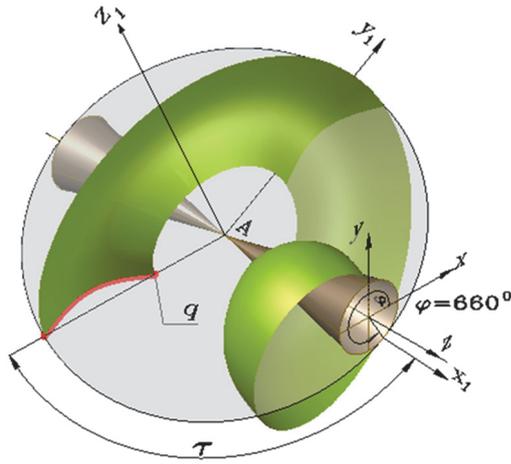


Рис. 24. Образование поверхности
[Figure 24. Surface formation]

Если отношение длины образующей конуса к его радиусу $k = \frac{l_{AB}}{r}$ является целым числом, поверхность имеет две сходящиеся ветви (рис. 26).

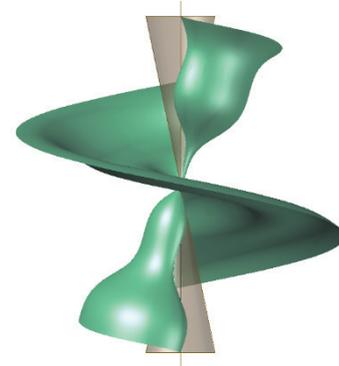


Рис. 27. Резная поверхность Монжа: $n = 3, A = 4$
[Figure 27. Carved surface of Monge: $n = 3, A = 4$]

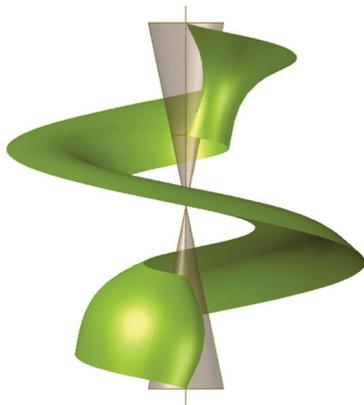


Рис. 25. Ветвь поверхности (вид сверху: $n = 1, A = 10$)
[Figure 25. A branch of the surface (top view: $n = 1, A = 10$)]

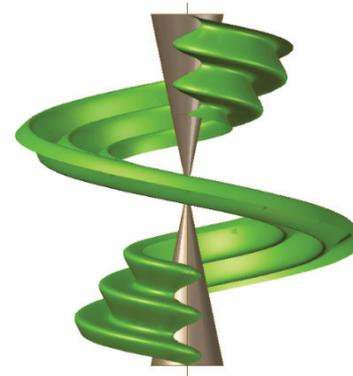


Рис. 28. Поверхность образована при $n = 5, A = 8$
[Figure 28. The surface is formed when $n = 5, A = 8$]

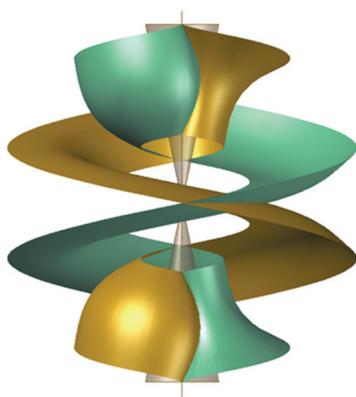


Рис. 26. Две ветви поверхности (вид сверху)
[Figure 26. Two branches of the surface (top view)]

Во втором цикле выполняется поэтапное формирование поверхности (рис. 24) описанным выше способом. На рис. 25 представлена одна ветвь поверхности (вид сверху).

На рис. 27 и рис. 28 показаны разновидности поверхности $n = 3, A = 4$ и $n = 5, A = 8$. На рис. 29 изображена поверхность Монжа, состоящая из двух ветвей.

Заключение

Результатом проведенной работы является создание алгоритмов и программ на языке AutoLISP для образования наборов отсеков следующих резных поверхностей Монжа:

- с круговой цилиндрической направляющей поверхностью и образующей прямой линией;
- с круговой цилиндрической направляющей поверхностью и синусоидой в качестве меридиана;
- с конической направляющей поверхностью и образующей прямой;
- с конической направляющей поверхностью и образующей синусоидой.

Создана программа для визуализации формирования указанных поверхностей посредством последовательного изображения отсеков на экране монитора. Представлены рисунки резной поверхности Монжа. Создан мини-фильм об образовании поверхности Монжа при качении плоскости с прямой линией по круговому конусу.

Список литературы

1. *Монж. Г.* Приложение анализа к геометрии. М.: ОНТИ, 1936. 699 с.
2. *Монж Г.* Начертательная геометрия. М.: АН СССР, 1947. 291 с.
3. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. М.: Либроком, 2010. 556 с.
4. *Ризван Мухаммад.* Геометрия, конструирование и исследование напряженно-деформированного состояния оболочек в форме резных поверхностей Монжа общего вида: дис. ... канд. техн. наук. М., 2004. 218 с.
5. *Филлипова Е.Р.* К вопросу о геометрии резных оболочек Монжа. // Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций: сб. трудов. М.: РУДН, 2014. С. 132–135.
6. *Иванов В.Н., Ризван Мухаммад.* Резные поверхности Монжа и конструирование оболочек // Теория и практика инженерных исследований: материалы научной конференции аспирантов, преподавателей и молодых ученых, 22–25 апреля 2002 г. М.: Изд-во РУДН, 2003. С. 233–234.
7. *Филлипова Е.Р.* Сравнительный анализ результатов расчета тонкой оболочки в форме резной поверхности Монжа по безмоментной теории и методом конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 3. С. 8–13.
8. *Филлипова Е.Р.* Об актуальности применения резных поверхностей Монжа в архитектуре // Строительство и реконструкция. 2015. № 6. С. 91–95.
9. *Schroeder W., Martin K., Lorensen B.* The Visualization Toolkit. Kitware, Inc., 2003.
10. *Haber R.B.* Visualization Techniques for Engineering Mechanics // Computing Systems in Engineering. Jan. 1990. Vol. 1. No. 1. Pp. 37–50.
11. *Durac M., Popirlan C.-I.* Web Technologies for Modelling and Visualization in Mechanical Engineering. April 1st 2010. DOI: 10.5772/9037
12. *Gallagher R.S., Press S.* Computer Visualization: Graphics Techniques for Engineering and Scientific Analysis. CRC Press, 1994, 336 p.
13. *Saha J., Vondrakova A.* Fuzzy surface visualization using HSL colour model // Electronic Journal. 2017. Vol. 2. No. 2. Pp. 26–42.
14. Курс начертательной геометрии / Н.Ф. Четверухин и др. М.: Государственное издательство технической литературы, 1936. 435 с.
15. *Иванов О.Н., Чайкин А.А., Шевченко В.Н.* Язык программирования AutoLISP Release 10, 11. TRINIKA Ltd, 1992.
16. *Кудрявцев Е.М.* AutoLISP. Программирование в FutoCAAD-14. М.: ДМК, 1999.
17. *Романова В.А., Матвеев В.М.* Визуализация движения точки контакта зубьев в цилиндрической зубчатой передаче // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 1. С. 26–29.
18. Инженерная 3D-компьютерная графика / Хейфец А.Л. и др. М.: Юрайт, 2013. 464 с.
19. *Иванов В.Н., Романова В.А.* Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCAD, AutoCAD: монография. М.: АСВ, 2016. 412 с.
20. *Иванов В.Н., Кривошапко С.Н., Романова В.А.* Основы разработки и визуализации объектов аналитических поверхностей и перспективы их использования в архитектуре и строительстве // Геометрия и графика. 2017. Т. 5. № 4. С. 3–14.
21. *Романова В.А.* Визуализация образования поверхностей зонтичного типа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 3. С. 19–22.
22. *Романова В.А.* Формирование циклических поверхностей с образующей окружностью переменного радиуса в АвтоКАДЕ // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 3. С. 20–24.
23. *Романова В.А.* Особенности изображения процесса образования поверхностей в системе AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 3–5.

Об авторе

Романова Викторина Анатольевна – доцент, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов:* визуализация проектирования механизмов и образование аналитических поверхностей в среде AutoCAD с применением программ на языке AutoLISP. *Контактная информация:* e-mail – v.a.r-victoryna@mail.ru

Для цитирования

Романова В.А. Образование поверхностей Монжа кинематическим способом в среде AutoCAD // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 106–116. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-106-116

Formation surfaces of Monge by the kinematic method in AutoCAD environment

Viktoryna A. Romanova

People's Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

Received: January 26, 2019

Revised: March 07, 2019

Accepted: March 15, 2019

Keywords:

Monge's surface;
compartment of a surface;
AutoCAD;
AutoLISP;
a generatrix;
a normal;
a tangent plane;
a developed guide surface;
mini-film

Abstract

Aims of research. Studying the possibility of forming Monge carved surfaces, defined by the method of their formation, creating an algorithm and program in the AutoLISP language to demonstrate the formation of surfaces in the AutoCAD environment in a dynamic mode.

Methods. Monge carved surfaces are formed by a flat curve, located in the tangent plane to the fixed guide of the developable surface, when the plane and the curve roll along the guide surface without sliding. The described method of formation of these surfaces allows to perform their formation by the kinematic method in the AutoCAD environment using AutoLISP software. The article describes the construction of the Monge surfaces using cylindrical and conical surfaces as guides. A straight line and a sine wave are used as the forming lines.

Results. An algorithm and a program in the AutoLISP language were created to form sets of compartments of several Monge surfaces and to visualize the formation of these surfaces in a dynamic mode by sequentially displaying the compartments on the monitor screen. The mini-film about formation of Monge surface by rolling a plane with a straight line along a circular cone is created. In the mini-film the drawings received by transformation of drawings of the AutoCAD environment are used.

References

1. Monge G. (1936). *Annex of the analysis to geometry*. Moscow: ONTY Publ., 699.
2. Monge G. (1947). *Nachertatel'naya geometriya [Descriptive geometry]*. Moscow: AN SSSR Publ., 291.
3. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2010). *Enciklopediya analiticheskikh poverhnostej [Encyclopedia of analytical surfaces]*. Moscow: Librokom Publ., 560.
4. Rizvan Muhammad. (2004). *Geometriya, konstruirovaniye i issledovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya obolochek v forme reznykh poverhnostej Monzha obshchego vida [Geometry, design and study of stress-strain state of shells in the form of carved Monge surfaces of general form]* (Cand. Diss.). Moscow, 218. (In Russ.)
5. Fillipova J.R. (2014). K voprosu o geometrii reznykh obolochek Monzha [To a question of geometry of carved covers of Monge]. *Strength, creep and destruction of building and engineering materials and constructions*, 132–135. (In Russ.)
6. V.N. Ivanov, Rizvan Muhammad. (2003). Rezne poverhnosti Monzha i konstruirovaniye obolochek [Carved surfaces of Monge and designing of covers]. *Theory and practice of engineering researches: materials of a scientific conference of graduate students, teachers and young scientists, April 22–25, 2002*. Moscow: RUDN Publ., 233–234. (In Russ.)
7. Fillipova J.R. (2016). Sravnitel'nyy analiz rezul'tatov rascheta tonkoj obolochki v forme reznoj poverhnosti Monzha po bezmomentnoj teorii i metodom konechnykh elementov [The comparative analysis of results of calculation of a thin cover in the form of a carved surface of Monge according to the momentless theory and a finite element method]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (8), 8–13. (In Russ.)
8. Fillipova J.R. (2015). Ob aktual'nosti primeneniya reznykh poverhnostej Monzha v arhitekture [On the relevance of the use of carved surfaces of Monge in architecture]. *Construction and reconstruction*, (6), 91–95. (In Russ.)
9. Schroeder W., Martin K., Lorensen B. (2003). *The Visualization Toolkit*. Kitware, Inc.
10. Haber R.B. (Jan. 1990). Vizualization Techniques for Engineering Mechanics. *Computing Systems in Engineering*, 1(1), 37–50.
11. Dupac M., Popirlan C.-I. (April 1st 2010). *Web Technologies for Modelling and Visualization in Mechanical Engineering*. DOI: 10.5772/9037
12. Gallagher R.S., Press S. (1994). *Computer Visualization: Graphics Techniques for Engineering and Scientific Analysis*. CRC Press, 336.
13. Caha J., Vondrakova A. (2017). Fuzzy surface visualization using HSL colour model. *Electronic Journal*, 2(2), 26–42.
14. Chetverukhin N.F., Levitsky V.S., Pryanishnikov Z.I., Tevlin A.M., Fedotov G.I. (1936). *Kurs nachertatel'noj geometrii [The course of descriptive geometry]*. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 435. (In Russ.)
15. Ivanov O.N., Chaykin A.A., Shevchenko V.N. (1992). *Yazyk programmirovaniya AutoLISP Release 10, 11*

[AutoLISP Release 10, 11 programming language]. TRINIKA Ltd. (In Russ.)

16. Kudryavtsev E.M. (1999). *AutoLISP. Programirovanie v AutoCAD-14* [AutoLISP. Programming in AutoCAD-14]. Moscow: DM Publ. (In Russ.)

17. Romanova V.A., Matveev V.M. (2016). Vizualizaciya dvizheniya točki kontakta zub'ev v cilindricheskoj zubchatoj peredache [Visualization of the movement of a contact point in cylinder cog-transmission]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 26–29. (In Russ.)

18. Heifetz A.L., Loginovsky A.N., Butorina I.V., Vasilyev V.N. (2013). *Inzhenernaya 3D-komp'yuternaya grafika* [Inzhenernaya 3D-computer graphics]. Moscow: Yurayt Publ., 464. (In Russ.)

19. Ivanov V.N., Romanova V.A. (2016). Konstrukcionnye formy prostranstvennyh konstrukcij. Vizualizaciya poverhnostej v sistemah MathCad, AutoCad [Constructive forms of space constructions. Visualization of the surfaces at systems MathCAD, AutoCAD]. Moscow: ASV Publ., 410. (In Russ.)

20. Ivanov V.N., Krivoshapko S.N., Romanova V.A. (2017). Osnovy razrabotki i vizualizacii ob"ektov analiticheskikh poverhnostej i perspektivy ih ispol'zovaniya v arhitekture i stroitel'stve [Bases of development and visualization of objects of analytical surfaces and the prospect of their use in architecture and construction]. *Geometry and graphics*, 5(4), 3–14. (In Russ.)

21. Romanova V.A. (2015). Vizualizaciya obrazovaniya poverhnostej zontichnogo tipa [Visualization of formation of umbrella-type and umbrella surfaces with radial

damping waves in the central point]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (3), 4–8. (In Russ.)

22. Romanova V.A. (2016). Formirovanie ciklicheskih poverhnostej s obrazuyushchej okruzhnost'yu peremennogo radiusa v AVTOKADE [The formation of cyclic surfaces with variable radius of generatrix circles in AutoCAD]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Building*, (3), 20–24. (In Russ.)

23. Romanova V.A. (2012). Osobennosti izobrazheniya processa obrazovaniya poverhnostej v sisteme AutoCAD [The features of the image formation surfaces in the CAD system AutoCAD]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Building*, (4), 3–5. (In Russ.)

About the author

Viktorina A. Romanova – Associate Professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Research interests:* visualization of the design of mechanisms and the formation of analytical surfaces in the AutoCAD environment using programs in the language AutoLISP. *Contacts:* e-mail – v.a.r-victoryna@mail.ru

For citation

Romanova V.A. (2019). Formation surfaces of Monge by the kinematic method in AutoCAD environment. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 106–116. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-106-116

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-117-126

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Численный анализ напряженно-деформированного состояния тонких оболочек на основе совместного конечного элемента треугольной формы

Ю.В. Клочков, А.П. Николаев, О.В. Вахнина*

Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр., 26
*klotchkov@bk.ru

Поступила в редакцию: 05 февраля 2019 г.

Доработана: 13 марта 2019 г.

Принята к публикации: 18 марта 2019 г.

Ключевые слова:

оболочечная конструкция;
узловые неизвестные;
треугольный конечный элемент;
множители Лагранжа

Аннотация

Актуальность. Использование метода конечных элементов для определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов инженерных конструкций предопределяет их дискретизацию на отдельные конечные элементы. Разбиение нерегулярных частей конструкции невозможно без использования треугольных областей. Треугольные элементы оболочечных конструкций являются совместными по перемещениям и по их производным только в узловых точках. Поэтому способы улучшения условий совместности на границах треугольных элементов являются актуальными.

Цели. Целью работы является улучшение условий совместности на границах смежных треугольных элементов на основе приравнивания производных нормальных перемещений в серединах граничных сторон.

Методы. Для улучшения условий совместности на границах треугольных элементов в настоящей работе используется функционал Лагранжа с условием обеспечения равенства в серединах сторон смежных элементов производных от нормальных перемещений в направлениях перпендикуляров, касательных к срединной поверхности оболочки.

Результаты. На примере расчета эллиптической оболочки показана эффективность использования совместного треугольного конечного элемента, матрица жесткости которого формируется в соответствии с алгоритмом, изложенным в статье.

Введение

Конструкции из тонких оболочек находят самое широкое применение в строительстве и архитектуре [1; 2], машиностроении, авиастроении, химической, нефтяной и газовой промышленности и т.д.

При проектировании и реконструкции такого рода объектов в настоящее время используют чис-

ленные методы анализа их напряженно-деформированного состояния (НДС) с применением высокопроизводительной вычислительной техники [3–7]. Одним из наиболее распространенных численных методов анализа НДС тонкостенных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ) в различных формулировках [8–18]. Несмотря на значительное количество публикаций, посвященных данной проблематике, по-прежнему актуальной является задача совершенствования конечно-элементных алгоритмов в плане решения проблем совместности используемых конечных элементов, повышения точности численных решений и других важных аспектов по данному направлению.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 18-41-340007 p_a.

© Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

1. Геометрические соотношения

Срединная поверхность может быть задана радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x(\theta^1, \theta^2) \vec{i} + y(\theta^1, \theta^2) \vec{j} + z(\theta^1, \theta^2) \vec{k}, \quad (1)$$

где (θ^1, θ^2) – криволинейные координаты поверхности оболочки.

Выражение (1) может быть конкретизировано для оболочек различного типа. Например, для трехосного эллипсоида оно выглядит следующим образом

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x, \theta) \sin\theta \vec{j} + r(x, \theta) \cos\theta \vec{k}, \quad (2)$$

где θ – угловая координата, отсчитываемая против хода часовой стрелки от вертикальной оси в поперечном сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox .

Входящая в (2) функция $r(x, \theta)$ имеет вид

$$r(x, \theta) = \sqrt{(1 - (x/a)^2)bc} / \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \quad (3)$$

где a, b и c – параметры трехосного эллипсоида при записи его уравнения в каноническом виде $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1)$.

Если в формуле (3) первый множитель числителя принять равным единице, то можно получить следующее выражение

$$r(\theta) = bc / \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}. \quad (4)$$

Заменяя в (2) функцию $r(x, \theta)$ формулой (4), можно получить выражение для радиус-вектора эллиптического цилиндра:

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(\theta) \sin\theta \vec{j} + r(\theta) \cos\theta \vec{k}. \quad (5)$$

Дифференцированием (2) или (5) по x и θ можно получить касательные векторы локального базиса в произвольной точке M^0 поверхности оболочки:

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0; \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0. \quad (6)$$

Орт нормали в точке M^0 определяется выражением

$$\vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / \sqrt{a^0}, \quad (7)$$

где $a^0 = a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0)^2$ – детерминант метрического тензора, компоненты которого определяются скалярными произведениями

$$a_{11}^0 = \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0 = 1 + (r_{,x})^2;$$

$$a_{12}^0 = \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0 = r_{,x} \cdot r_{,\theta};$$

$$a_{22}^0 = \vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0 = (r_{,\theta})^2 + r^2. \quad (8)$$

Здесь под r понимается функция $r(x, \theta)$ или $r(\theta)$, определяемая по (3) или (4).

Производные локального базиса точки M^0 могут быть получены по дериационным формулам [19]

$$\vec{a}_{\alpha,\beta}^0 = \Gamma_{\alpha\beta}^{0\rho} \vec{a}_\rho^0 + b_{\alpha\beta}^0 \vec{a}^0; \quad \vec{a}_{,\alpha}^0 = -b_{\alpha}^{0\rho} \vec{a}_\rho^0, \quad (9)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^{0\rho}$ – символы Кристоффеля второго рода; $b_{\alpha\beta}^0$ и $b_{\alpha}^{0\rho}$ – ковариантные и смешанные компоненты тензора кривизны. Здесь и ниже греческие индексы последовательно принимают значения 1, 2.

В процессе деформирования оболочечной конструкции точка M^0 и отстоящая от нее на расстоянии ζ точка $M^{0\zeta}$ займут новые положения M и M^ζ , определяемые радиус-векторами

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \vec{v}; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R} + \zeta \vec{a}, \quad (10)$$

где $\vec{v} = v^p \vec{a}_p^0 + v \vec{a}^0$ – вектор перемещения точки M^0 .

Входящий во вторую формулу (10) орт нормали \vec{a} точки M определяется векторным произведением

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / \sqrt{a}, \quad (11)$$

где $\vec{a}_\alpha = \vec{R}_{,\alpha}$; $a = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2$ – детерминант метрического тензора деформированного состояния, который может быть представлен в виде

$$a = a^0 (1 + 2\varepsilon_p^p), \quad (12)$$

где ε_p^p – смешанные компоненты тензора деформаций оболочки в точке срединной поверхности.

Дифференцированием (11) можно получить производные орта нормали к деформированной поверхности оболочки

$$\bar{a}_{,\alpha} = (\bar{a}_{1,\alpha} \times \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \times \bar{a}_{2,\alpha}) / \sqrt{a} + (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) (1/\sqrt{a})_{,\alpha}, \quad (13)$$

где $1/\sqrt{a} \approx (1 - \varepsilon_p^0) / \sqrt{a^0}$.

Деформации в точке M^ζ определяются известным соотношением механики сплошной среды [20]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta}^\zeta - g_{\alpha\beta}^0) / 2, \quad (14)$$

где

$$g_{\alpha\beta}^\zeta = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_\beta = \bar{R}_{,\alpha}^\zeta \cdot \bar{R}_{,\beta}^\zeta;$$

$$g_{\alpha\beta}^0 = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_\beta^0 = (\bar{R}^0 + \zeta \bar{a}^0)_{,\alpha} \cdot (\bar{R}^0 + \zeta \bar{a}^0)_{,\beta}.$$

Соотношения (14) могут быть представлены суммой

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \mathcal{N}_{\alpha\beta}, \quad (15)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta} = (\bar{a}_\alpha^0 \cdot \bar{v}_{,\beta} + \bar{v}_{,\alpha} \cdot \bar{a}_\beta^0) / 2$;

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = (\bar{a}_\alpha^0 \cdot \bar{a}_{,\beta} + \bar{v}_{,\alpha} \cdot \bar{a}_\beta^0 + \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_{,\beta}^0 + \bar{a}_{,\alpha} \cdot \bar{v}_{,\beta} + \bar{a}_\alpha^0 \cdot b_\beta^{0p} \cdot \bar{a}_\rho^0 + b_\alpha^{0p} \cdot \bar{a}_\rho^0 \cdot \bar{a}_{,\beta}^0) / 2.$$

2. Треугольный конечный элемент

В качестве конечного элемента был выбран фрагмент срединной поверхности тонкой оболочки треугольной формы с узлами i, j, k , расположенными в его вершинах. Для реализации процедуры численного интегрирования по площади конечного элемента треугольный фрагмент срединной поверхности отображается на прямоугольный треугольник с локальной системой координат $0 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Глобальные координаты x и θ точки внутренней области конечного элемента выражаются через глобальные координаты узлов зависимостями

$$x = (1 - \xi - \eta)x^i + \xi x^j + \eta x^k;$$

$$\theta = (1 - \xi - \eta)\theta^i + \xi \theta^j + \eta \theta^k. \quad (16)$$

Столбец узловых варьируемых параметров конечного элемента в локальной ξ, η и глобальной x, θ системах координат был выбран в следующем виде:

$$\left\{ U_y^L \right\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1L} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^{2L} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^L \right\}_{1 \times 9}^T \right\}; \quad (17)$$

$$\left\{ U_y^G \right\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1G} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^{2G} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^G \right\}_{1 \times 9}^T \right\}, \quad (18)$$

где $\left\{ q_y^L \right\}^T = \left\{ q^i q^j q^k q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k \right\}$;

$$\left\{ q_y^G \right\}^T = \left\{ q^i q^j q^k q_{,x}^i q_{,x}^j q_{,x}^k q_{,\theta}^i q_{,\theta}^j q_{,\theta}^k \right\}.$$

Здесь под q понимается компонента вектора перемещения v^1, v^2 или v .

Компоненты вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента выражаются через их узловые значения с помощью интерполяционных зависимостей вида [7–18]

$$q = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ q_y^L \right\}_{9 \times 1}^T, \quad (19)$$

где $\left\{ \varphi \right\}^T$ – матрица-строка функций формы, содержащая двумерные полиномы третьей степени.

Рассматриваемый треугольный конечный элемент является совместным по компонентам вектора перемещения, но несовместным по их производным. Если вычислить производные нормальной компоненты вектора перемещения вдоль нормалей к сторонам конечного элемента в точках 1, 2, 3, соответствующих серединам сторон, то в значениях этих производных в смежных элементах I и II будет наблюдаться различие (рис. 1).

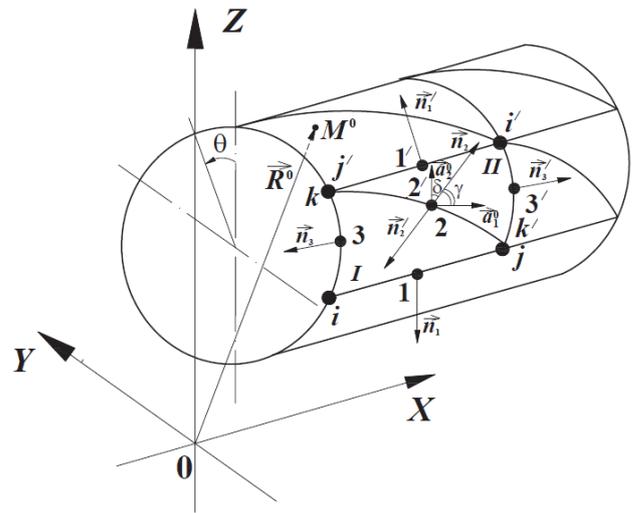


Рис. 1. Векторы нормалей в смежных элементах [Figure 1. Vectors of normals in adjacent elements]

$$\frac{\partial v_m}{\partial \bar{n}_m} \neq \frac{\partial v_{m'}}{\partial \bar{n}'_m}, \quad (20)$$

где индексы m и m' принимают значения дополнительных узлов 1, 2, 3, и 1', 2', 3' (рис. 1) соответственно.

Отмеченное различие обусловлено тем, что при вычислении, например, производных $\partial v_2 / \partial \bar{n}_2$ и $\partial v_2' / \partial \bar{n}_2'$ в точках 2 и 2' смежных элементов I и II используются значения нормальной компоненты вектора перемещения в узлах i и i' , находящихся за пределами общей границы $j-k$ смежных элементов I и II.

Решение отмеченной проблемы совместности треугольных конечных элементов предлагается осуществить за счет использования множителей Лагранжа. Тогда выражение (20) может быть записано в следующем виде:

$$\lambda_m \left(\frac{\partial v_m}{\partial \bar{n}_m} - \frac{\partial v_{m'}}{\partial \bar{n}_{m'}} \right) = 0, \quad (21)$$

где λ_m – множитель Лагранжа в дополнительном узле m .

Входящие в (21) производные нормальной компоненты вектора перемещения вдоль нормалей к серединам сторон \bar{n}_m могут быть выражены через столбцы (17) и (18) узловых неизвестных треугольного конечного элемента:

$$\frac{\partial v_m}{\partial \bar{n}_m} = \{d_m\}^T \{U_y^L\} = \{d_m\}^T [P_R] \{U_y^G\}, \quad (22)$$

где $[P_R]$ – матрица перехода от столбца $\{U_y^L\}$ к столбцу $\{U_y^G\}$.

Структура входящих в (22) матриц-строк $\{d_m\}$ зависит от ориентации треугольных конечных элементов на срединной поверхности оболочки. Если сетку дискретизации сориентировать вдоль линий главных кривизн (рис. 1), то для треугольного элемента I будут справедливы зависимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}_1} &= -\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\left(\{ \varphi_{,\xi} \}^T \cdot \xi_{,\theta} + \{ \varphi_{,\eta} \}^T \cdot \eta_{,\theta} \right) \{ v_y^L \}; \\ \frac{\partial v_3}{\partial \bar{n}_3} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\{ \varphi_{,\xi} \}^T \cdot \xi_{,x} + \{ \varphi_{,\eta} \}^T \cdot \eta_{,x} \right) \{ v_y^L \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для узла 2 на стороне $j-k$ треугольного конечного элемента можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}_2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \delta = \\ &= \left[\left(\{ \varphi_{,\xi} \}^T \cdot \xi_{,x} + \{ \varphi_{,\eta} \}^T \cdot \eta_{,x} \right) \cos \gamma + \right. \\ &\left. + \left(\{ \varphi_{,\xi} \}^T \cdot \xi_{,\theta} + \{ \varphi_{,\eta} \}^T \cdot \eta_{,\theta} \right) \cos \delta \right] \{ v_y^L \}, \end{aligned} \quad (24)$$

где γ и δ – углы между нормалью \bar{n}_2 и векторами локального базиса в данной точке (рис. 1).

Для смежного элемента II соотношения (23) и (24) берутся с противоположным знаком.

Если рассматривать треугольный элемент I в отдельности, то для него можно записать равенство

$$\lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}_1} + \lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}_2} + \lambda_3 \frac{\partial v_3}{\partial \bar{n}_3} = 0. \quad (25)$$

С учетом (22)–(24) соотношение (25) можно представить в матричном виде

$$\{ \lambda \}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial \bar{n}_3} \end{Bmatrix} = \{ \lambda \}^T \begin{Bmatrix} \{d_1\}^T [P_R] \\ \{d_2\}^T [P_R] \\ \{d_3\}^T [P_R] \end{Bmatrix} \{U_y^G\} = \{ \lambda \}^T [D] \{U_y^G\} = 0, \quad (26)$$

где $\{ \lambda \}^T = \{ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \}$.

Функционал Лагранжа для треугольного элемента с учетом дополнительного условия (26) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \int_V \{ \varepsilon_{\alpha\beta}^s \}^T \{ \sigma^{\alpha\beta} \} dV + \{ \lambda \}^T [D] \{U_y^G\} - \\ &- \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^s \}^T = \{ \varepsilon_{11}^s \ \varepsilon_{22}^s \ 2\varepsilon_{12}^s \}$; $\{ \sigma^{\alpha\beta} \}^T = \{ \sigma^{11} \ \sigma^{22} \ \sigma^{12} \}$ – матрицы-строки деформаций и напряжений в точке M^s ; $\{U\}^T = \{ v^1 \ v^2 \ v \}$ – матрица-строка компонент вектора перемещения точки M ; $\{P\}$ – столбец внешней поверхностной нагрузки.

Столбец $\{ \sigma^{\alpha\beta} \}$ на основании закона Гука [20] может быть представлен матричным произведением

$$\{ \sigma^{\alpha\beta} \} = [C] \{ \varepsilon_{\alpha\beta}^s \}, \quad (28)$$

где $[C]$ – матрица упругости.

Деформации в произвольном слое оболочки, отстоящем на расстоянии ζ от срединной поверхности, с учетом (15) и (19) могут быть представлены в виде произведения матриц:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\} &= [\Gamma] \{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = \\ &= [\Gamma][B] \{U_y^L\} = [\Gamma][B][P_R] \{U_y^G\}. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (28) и (29) функционал (27) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \{U_y^G\}^T [P_R]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV [P_R] \{U_y^G\} + \\ &+ \{\lambda\}^T [D] \{U_y^G\} - \{U_y^G\}^T [P_R]^T \int_F [A]^T \{P\} dF, \end{aligned} \quad (30)$$

где $[A] = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}$ – матрица функ-

ций формы.

Выполняя минимизацию (30) по $\{U_y^G\}^T$ и $\{\lambda\}^T$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_L}{\partial \{U_y^G\}^T} = [K] \{U_y^G\} + [D]^T \{\lambda\} - \{F\} = 0; \\ \frac{\partial \Phi_L}{\partial \{\lambda\}^T} = [D] \{U_y^G\} = 0, \end{cases} \quad (31)$$

где $[K] = [P_R]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV$;

$$\{F\} = [P_R]^T \int_F [A]^T \{P\} dF.$$

Систему (31) можно записать в более компактной форме:

$$[K_{\lambda}] \{U_{y\lambda}^G\} = \{F_{\lambda}\}, \quad (32)$$

где $[K_{\lambda}] = \begin{bmatrix} [K] & [D]^T \\ [D] & [0] \end{bmatrix}$;

$$\{U_{y\lambda}^G\}^T = \left\{ \{U_y^G\}^T \{ \lambda \}^T \right\}; \{F_{\lambda}\}^T = \left\{ \{F\} \{000\} \right\}.$$

3. Пример расчета

Была рассчитана эллипсоидальная оболочка, поверхность которой описывается радиус-вектором (5). Эллиптический цилиндр загружен в середине двумя диаметрально противоположными сосредоточенными силами Q (рис. 2). Приняты следующие исходные данные: $Q = 453,6 \text{ Н}$; длина образующей $L = 26 \text{ см}$; модуль упругости $7,38 \times 10^4 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3125$; толщина стенки $t = 0,24 \text{ см}$; параметры эллиптического поперечного сечения $b = 12,58 \text{ см}$, $c = 11,43 \text{ см}$. В силу наличия плоскостей симметрии рассчитана 1/8 часть эллиптического цилиндра.

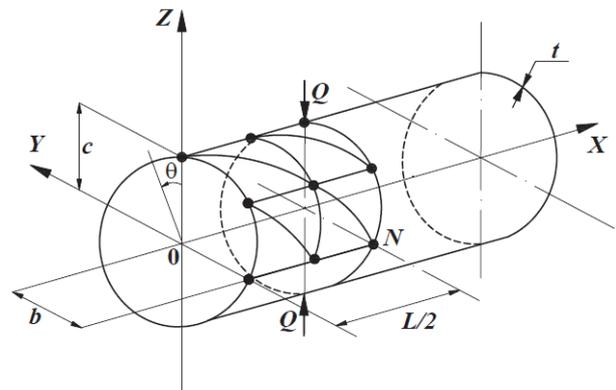


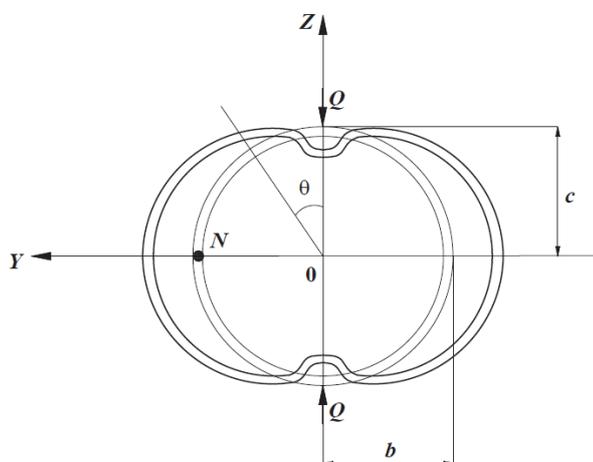
Рис. 2. Расчетная схема эллиптического цилиндра [Figure 2. Elliptical cylinder design]

Расчеты проводились в двух вариантах: в первом варианте использовался треугольный конечный элемент без множителей Лагранжа с матрицей жесткости $[K]$ порядка 27×27 ; во втором варианте применялся совместный элемент с матрицей жесткости $[K_{\lambda}]$ размерностью 30×30 . В качестве контрольного варианта использован четырехугольный конечный элемент также с девятью степенями свободы в узле (17), (18) с порядком матрицы жесткости 36×36 [21]. Результаты повариантных расчетов представлены в таблице, в которой приведены численные значения нормальных напряжений σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$ на внутренней σ^{in} и наружной σ^{out} поверхностях оболочки в точке N с координатами $x = L/2$; $\theta = \pi/2$, а также величины прогиба v под сосредоточенной силой Q в зависимости от густоты сетки дискретизации.

Значения напряжений и прогиба
[Table. Stress and deflection values]

Напряжения (МПа) в точке N с координатами $x = L/2, \theta = \pi/2$ [Stress (MPa) in N point with coordinates $x = L/2, \theta = \pi/2$]	Вариант расчета [Variant of calculation]						Четырех- угольный КЭ [Quadrilateral CE] [21]
	I			II			
	Сетка дискретизации [Sampling grid]						
	6×6	7×7	8×8	6×6	7×7	8×8	7×7
σ_{xx}^{in}	8,67	12,12	14,04	-11,59	-10,87	-10,36	-15,22
σ_{xx}^{out}	-13,23	-15,67	-17,06	10,47	10,56	10,45	12,02
$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-21,15	-17,07	-14,55	-47,01	-46,18	-45,52	-46,95
$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	17,31	15,02	13,40	37,05	38,16	38,47	40,68
Прогиб под силой Q [Deflection under force Q] $\nu \cdot 10^{-2}$ м	-0,2997	-0,2985	-0,2968	-0,2651	-0,2662	-0,2666	-0,2771

Как видно из таблицы, численные значения нормальных напряжений кардинально различаются между собой в зависимости от варианта расчета. Так, в первом варианте расчета σ_{xx}^{in} на внутренней поверхности оказались растягивающими, а на наружной – сжатыми. В действительности же, если проанализировать деформированное состояние оболочки в сечении, перпендикулярном оси Ox , проходящем через точки приложения сил Q (рис. 3), можно отметить, что внутренняя поверхность эллиптического цилиндра в точке N сжата, а наружная – растянута, что и наблюдается во втором варианте расчета.

Рис. 3. Деформация цилиндра
[Figure 3. Cylinder deformation]

Значения прогиба под сосредоточенными силами в первом варианте расчета оказались завышенными примерно на 12 % по сравнению со вторым вариантом расчета.

В крайней правой колонке таблицы представлены численные значения нормальных напряжений и прогиба, полученные при использовании четырехугольного конечного элемента 36×36 при сетке дискретизации 7×7 . Сопоставляя результаты повариантных расчетов со значениями крайней правой колонки, можно отметить следующее. Напряжения σ_{xx} , полученные при использовании четырехугольного элемента 36×36 , имеют такие же знаки, что и напряжения второго варианта расчета. Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, которые существенно больше, чем σ_{xx} во втором варианте расчета, практически совпали или достаточно близки по своим значениям, полученным при применении четырехугольного элемента. Значения σ_{xx} в первом варианте можно признать неприемлемыми из-за несоответствия картине деформирования оболочки, а значения $\sigma_{\theta\theta}$ оказались в 4 раза заниженными по сравнению со вторым и контрольным вариантами расчета.

Заключение

На основании выполненного анализа НДС тонкой оболочки в виде эллиптического цилиндра, за-

груженного системой двух сосредоточенных сил, можно заключить, что использование несовместных треугольных элементов приводит к существенным погрешностям расчета, вплоть до неприемлемых. Для корректного анализа НДС тонких оболочек необходимо использовать совместный треугольный элемент, матрица жесткости которого формируется в соответствии с алгоритмом, изложенным в настоящей статье.

Список литературы

1. *Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L.* Geometry, static, vibration and buckling analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells // *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2016. Vol. 10. Pp. 3–28.

2. *Кривошапко С.Н., Галишиникова В.В.* Архитектурно-строительные конструкции: учебник для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2015. 476 с.

3. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V.* Stress-Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section // *International Applied Mechanics*. 2018. Т. 54. № 5. Pp. 559–567.

4. *Пятикрестовский К.П., Травуш В.И.* О программировании нелинейного метода расчета деревянных конструкций // *Academia. Архитектура и строительство*. 2015. № 2. С. 115–119.

5. *Ким А.Ю., Полников С.В.* Сравнение экспериментального и численного исследования большепролетного пневматического линзообразного сооружения // *Научное обозрение*. 2016. № 15. С. 36–41.

6. *Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М.* Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2016. № 1. С. 36–42.

7. *Каюмов Р.А.* Большие прогибы балок, арок и панелей в упругой среде с учетом деформаций сдвига // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXII Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова / Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*. 2016. С. 111–113.

8. *Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Гамзатова Е.А.* Расчет тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2018. № 3 (711). С. 5–13.

9. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.

10. *Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В.* Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно подкрепленных эллиптических цилиндрических ком-

позитных оболочек при кручении и внутреннем давлении // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2018. № 2. С. 27–34.

11. *Шеиенин С.В., Бахметьев С.Г.* Модель эффективного слоя для резинокордного материала // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2014. № 5. С. 41–45.

12. *Аганов В.П., Айдемиров К.Р.* Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // *Промышленное и гражданское строительство*. 2016. № 11. С. 4–7.

13. *Nguyen N., Waas A.M.* Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // *Z. Angew. Math. Phys.* 2016. Vol. 67. No. 9. Pp. 35/1-35/24.

14. *Lei Z., Gillot F., Jezeguel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // *Int. J. Mech.* 2015. Vol. 54. Pp. 105–119.

15. *Hanslo P., Larson M.G., Larson F.* Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // *Comput. Mech.* 2015. Vol. 56. No. 1. Pp. 87–95.

16. *Yamashita H., Valkeapaa A.I., Jayakumar P., Syqiyama H.* Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn.* 2015. Vol. 10 No. 5. Pp. 051012/1-051012/9.

17. *Ren Hui.* Fast and robust full quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations // *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn.* 2015. Vol. 10. No. 5. Pp. 051018/1-051018/13.

18. *Sartorato M., de Medeiros R., Tita V.* A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation // *Compos. Struct.* 2015. 127. Pp. 185–198.

19. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.

20. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. 574 с.

21. *Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A., Marchenko S.S.* Comparative analysis of the results of finite element calculations based on an ellipsoidal shell // *Journal of machinery manufacture and reliability*. 2016. Vol. 45. No. 4. Pp. 328–336.

Об авторах

Клочков Юрий Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет. Опубликовал 165 научных статей, 4 монографии, 4 наименования учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693. Author ID: 161677. *Область научных интересов:* механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, геометрия поверхностей, вы-

числительные алгоритмы, программирование. *Контактная информация*: e-mail – klotchkov@bk.ru

Николаев Анатолий Петрович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, Волгоградский государственный аграрный университет. Опубликовал 149 научных статей, 6 монографий, 5 наименований учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484. Author ID: 161676. *Область научных интересов*: механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, геометрия поверхностей, вычислительные алгоритмы, программирование. *Контактная информация*: e-mail – anpetr40@yandex.ru

Вахнина Ольга Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Волгоградский государственный аграрный универси-

тет. Опубликовала 47 научных статей, 1 монографию, 8 наименований учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 3593-0159. Author ID: 573151. *Область научных интересов*: механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, расчет оболочек на основе метода конечных элементов с использованием множителей Лагранжа. *Контактная информация*: e-mail – ovahnina@bk.ru

Для цитирования

Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В. Численный анализ напряженно-деформированного состояния тонких оболочек на основе совместного конечного элемента треугольной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 117–126. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-117-126

RESEARCH PAPER

Numerical analysis of the stress-strain state of thin shells based on a joint triangular finite element

Yuriy V. Klochkov, Anatoliy P. Nikolaev, Olga V. Vakhnina*

Volgograd State Agricultural University, 26 University Ave., Volgograd, 400002, Russian Federation
*klotchkov@bk.ru

Received: February 05, 2019

Revised: March 13, 2019

Accepted: March 18, 2019

Keywords:

shell construction;
nodal unknowns;
triangular finite element;
Lagrange coefficients

Abstract

Relevance. The use of the finite element method for determining the stress-strain state of thin-walled elements of engineering structures predetermines their discretization into separate finite elements. Splitting irregular parts of the structure is impossible without the use of triangular areas. The triangular elements of shell structures are joint in displacements and in their derivatives only at the nodal points. Therefore, ways to improve the compatibility conditions at the boundaries of triangular elements are relevant.

Aims of research. The aim of the work is to improve the compatibility conditions at the boundaries of adjacent triangular elements based on equating the derivatives of normal displacements in the middle of the boundary sides.

Methods. In order to improve the compatibility conditions at the boundaries of triangular elements in this work, the Lagrange functional is used with the condition of ensuring equality in the middle of the sides of adjacent elements derived from normal displacements in the directions of perpendiculars tangent to the middle surface of the shell.

Results. Using the example of analysing an elliptical shell, the efficiency of using a joint triangular finite element is shown, whose stiffness matrix is formed in accordance with the algorithm outlined in this article.

References

1. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. (2016). Geometry, static, vibration and bucking analysis and ap-

The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as part of the research project No. 18-41-340007 p_a.

plications to thin elliptic paraboloid shells. *The Open Construction and Building Technology Journal*, 10, 3–28.

2. Krivoshapko S.N., Galishnikova V.V. (2015). *Arhitekturno-stroitel'nye konstrukcii: uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata [Architectural and building structures: a textbook for academic undergraduate]*. Moscow: Urait Publ., 476. (In Russ.)

3. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V. (2018). Stress-Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section. *International Applied Mechanics*, 54(5), 559–567.
4. Pyatikrestovskiy K.P., Travush V.I. (2015). O programmirovanii nelineynogo metoda rascheta derevyannykh konstruktсий [On programming nonlinear method for calculating wooden structures]. *Academia. Arhitektura i stroitel'stvo*, (2), 115–119. (In Russ.)
5. Kim A.Yu., Polnikov S.V. (2016). Sravnenie eksperimental'nogo i chislennogo issledovaniya bol'sheproletnogo pnevmaticheskogo linzobraznogo sooruzheniya [Comparison of experimental and numerical studies of large-span pneumatic lenticular structures]. *Nauchnoe obozrenie*, (15), 36–41. (In Russ.)
6. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. (2016). Metod opredeleniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhmernykh konstruktсий slozhnoy formy [The method for determining the stress-strain state of three-dimensional structures of complex shape]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 36–42. (In Russ.)
7. Kayumov R.A. (2016). Bol'shie progiby balok, arok i panelej v uprugoy srede s uchetom deformatsiy sdviga [Large deflections of beams, arches and panels in an elastic medium with regard to shear deformations]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktсий i sploshnykh sred: materialy XXII Mezhdunarodnogo simpoziuma imeni A.G. Gorshkova*, 111–113. (In Russ.)
8. Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Gazmatova E.A. (2018). Raschet tonkih plastin po metodu konechnykh elementov v forme klassicheskogo smeshannogo metoda s isklyucheniem peremesheniy konechnykh elementov kak zhestkogo tselogo [Analysis of thin plates according to the finite element method in the form of the classical mixed method with the exception of the displacements of finite elements as a rigid whole]. *Izvestiya visshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo*, 3(711), 5–13. (In Russ.)
9. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. (2006). *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktсий* [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow: Fizmatlit Publ., 392. (In Russ.)
10. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. (2018). Nelineynoye deformirovaniye i ustoychivost' diskretno podkreplennykh ellipticheskikh tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri kruchenii i vnutrennem davlenii [Nonlinear deformation and stability of discretely supported elliptical cylindrical composite shells under torsion and internal pressure]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatsionnaya tekhnika*, (2), 27–34. (In Russ.)
11. Sheshenin S.V., Bakhmetev S.G. (2014). Model effektivnogo sloya dlya rezinokordnogo materiala [Effective layer model for the rubber-cord material]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, (5), 41–45. (In Russ.)
12. Agapov V.P., Aydemirov K.R. (2016). Raschet ferm metodom konechnykh elementov s uchetom geometricheskoy nelineynosti [Analysis of farms by the method of finite elements taking into account the geometric nonlinearity]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and civil engineering]*, (11), 4–7. (In Russ.)
13. Nguyen N., Waas A.M. (2016). Nonlinear, finite deformation, finite element analyses. *Z. Angew. Math. and Phys.*, 67(9), 35/1–35/24.
14. Lei Z., Gillot F., Jezeguel L. (2015). Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *Int. J. Mech*, 54, 105–119.
15. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. (2015). Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Comput. Mech*, 56(1), 87–95.
16. Yamashita H., Valkeapaa A.I., Jayakumar P., Syqiyama H. (2015). Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn*, 10(5), 051012/1–051012/9.
17. Ren H. (2015). Fast and robust full quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations. *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn*, 10(5), 051018/1–051018/13.
18. Sartorato M., de Medeiros R., Tita V. (2015). A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Compos. Struct.*, (127), 185–198.
19. Pogorelov A.V. (1974). *Differencial'naja geometriya [Differential geometry]*. M.: Nauka Publ., 176. (In Russ.)
20. Sedov L.I. (1976). *Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum mechanics]*. M.: Nauka Publ., 574. (In Russ.)
21. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A., Marchenko S.S. (2016). Comparative analysis of the results of finite element calculations based on an ellipsoidal shell. *Journal of machinery manufacture and reliability*, 45(4), 328–336.

About the authors

Yuriy V. Klochkov – DSc. in Technical Sciences, Professor, Head of the Higher Mathematics Department, Volgograd State Agricultural University. He published 165 scientific articles, 4 monographs, 4 titles of educational literature. eLIBRARY SPIN-code; 9436-3693. Author ID: 161677. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of analysis, surface geometry, computational algorithms, and programming. *Contact information*: e-mail – klotchkov@bk.ru

Anatoliy P. Nikolaev – DSc. in Technical Sciences, Professor, Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department, Volgograd State Agricultural University. He published 149 scientific articles, 6 monographs, 5 titles of educational literature. eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484. Author ID: 161676. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of calculation, surface geometry, computational algorithms, and programming. *Contact information*: e-mail – anpetr40@yandex.ru

Olga V. Vakhnina – PhD in Technical Sciences, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Volgograd State Agricultural University. She published 47 scientific articles, 1 monograph, 8 titles of educational

literature. eLIBRARY SPIN-code: 3593-0159. Author ID: 573151. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of analysis, shell analysis based on the finite element method using Lagrange coefficients. *Contact information*: e-mail – ovahnina@bk.ru

For citation

Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. (2019). Numerical analysis of the stress-strain state of thin shells based on a joint triangular finite element. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 117–126. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-117-126

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-127-134

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Численный анализ поведения слоистой композитной панели с межслоевыми дефектами под действием динамических нагрузок

А.Л. Медведский¹, М.И. Мартиросов², А.В. Хомченко^{3*}¹Московский физико-технический институт (государственный университет), Российская Федерация, Московская область, 141701, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4³ПАО «Корпорация «Иркут»», Российская Федерация, 125315, Москва, Ленинградский проспект, 68

*khotchenkoanton@yandex.ru

Поступила в редакцию: 11 января 2019 г.

Доработана: 10 марта 2019 г.

Принята к публикации: 26 марта 2019 г.

Ключевые слова:

композитная панель;
критерии разрушения композитов;
межслоевой дефект;
нестационарная нагрузка;
численное моделирование;
метод конечных элементов (МКЭ)

Аннотация

Цели. Основная задача состояла в рассмотрении поведения прямоугольной слоистой панели из однонаправленного полимерного композиционного материала (ПКМ) при наличии межслоевых дефектов под действием динамических нагрузок различного характера.

Методы. В ходе исследования рассчитаны формы собственных колебаний прямоугольной композитной панели при наличии множественных расслоений в форме эллипсов различных размеров. Построены зависимости максимальных прогибов от частоты воздействия стационарного поля давления. Определены поля распределения индексов разрушения слоев панели под действием нестационарного поля давления с помощью различных критериев разрушения (применительно к ПКМ).

Результаты. Проведен анализ разрушения панели с использованием различных критериев разрушения изделий из композитных материалов. По результатам исследования разработана методика моделирования поведения композитных панелей при наличии множественных межслоевых дефектов при воздействии динамических нагрузок различного характера.

Введение

Композиционные конструкционные материалы отличаются от металлических пониженными пластическими свойствами и, следовательно, повышенной чувствительностью к динамическим нагрузкам ударного характера. В результате эксплуатации и внешних воздействий в композитных пакетах могут возникать дефекты, которые сопровождаются растрескиванием матрицы, разрушением волокон и монослоев, что оказывает влияние на несущую способность элементов конструкций из ПКМ [1].

Такие материалы широко используются в различных машиностроительных отраслях, а также в строительной индустрии (например, звукоизоляционные слоистые композитные панели для современных научно-исследовательских лабораторий).

В статье рассмотрено разрушение панели с использованием критериев разрушения композитов Tsai – Hill [1], Hoffman [4], Puppo – Evensen [5], Puck [6–8], Hashin [9], Norris [10], Fischer [11], Norris – McKinnon [12], DeAlia [13].

1. Постановка задачи

Рассматривается плоская прямоугольная панель (рис. 1), представляющая собой многослойную конструкцию, состоящую из 12 монослоев, каж-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 18-08-01153 А).

© Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

дый из которых изготовлен из однородного упругого ортотропного материала. Укладка монослоев панели имеет вид $[+45^\circ/-45^\circ/90^\circ/0^\circ/+45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/+45^\circ/0^\circ/90^\circ/-45^\circ/+45^\circ]$, толщина монослоя – h .

Предполагается, что в панели присутствуют межслоевые дефекты эллиптической формы (рис. 2), расположенные по толщине в соответствии со схемами, представленными на рис. 3–5.

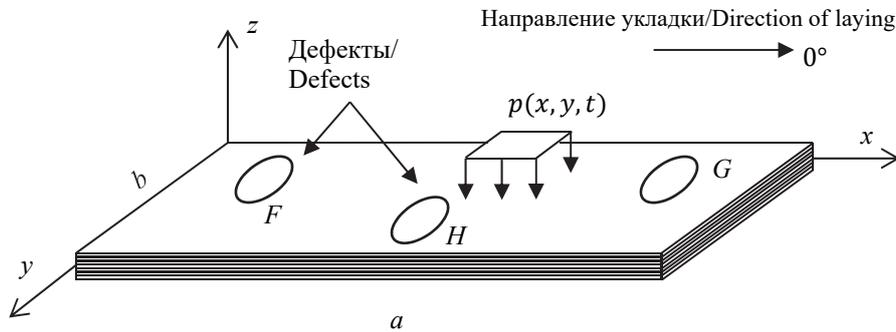


Рис. 1. Прямоугольная многослойная панель с дефектами
[Figure 1. Rectangular multi-layered panel with defects]

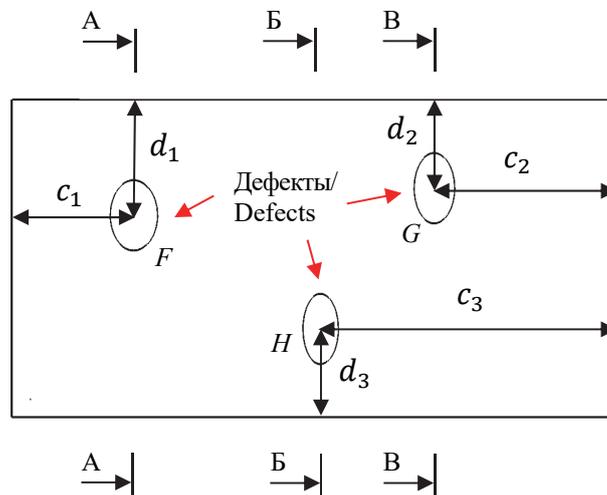


Рис. 2. Расположение дефектов в плоскости панели
[Figure 2. The location of defects in the plane of the panel]

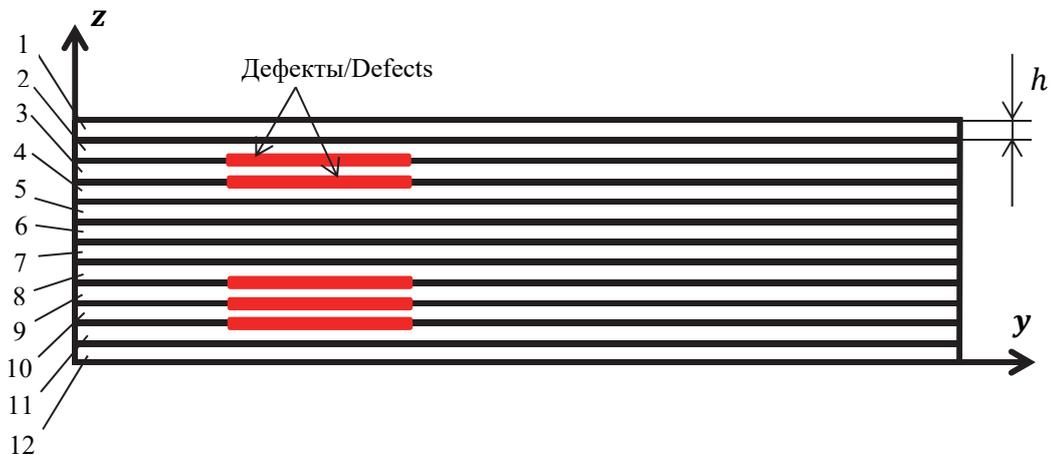


Рис. 3. Положения дефектов по толщине (А–А)
[Figure 3. The position of the defects in thickness (A–A)]

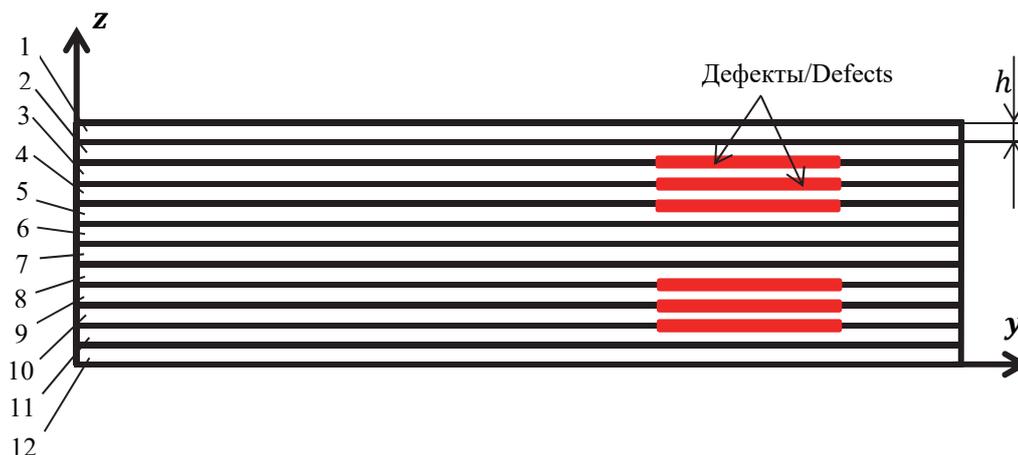


Рис. 4. Положения дефектов по толщине (Б–Б)
 [Figure 4. The position of the defects in thickness (B–B)]

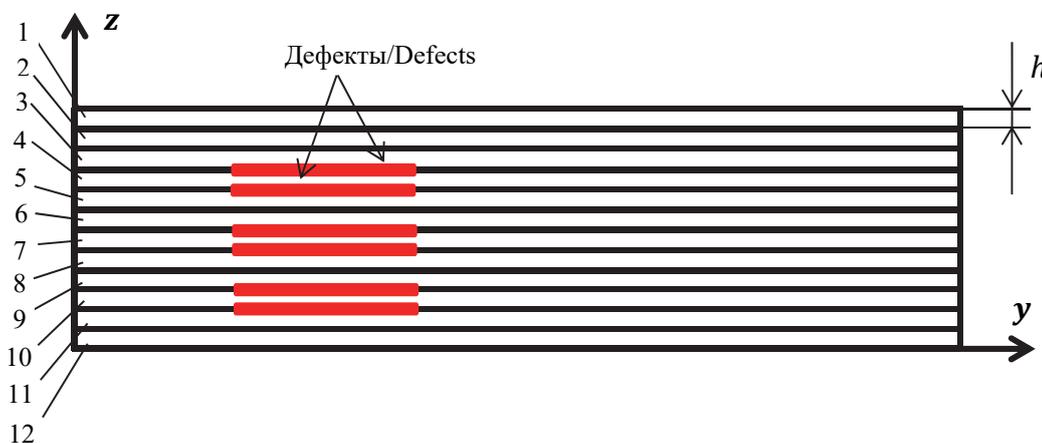


Рис. 5. Положения дефектов по толщине (Б–Б)
 [Figure 5. The position of the defects in thickness (B–B)]

Рассматривается поведение панели в полях стационарного и нестационарного давления.

2. Панель в поле стационарного давления

В качестве числового примера рассмотрим плоскую прямоугольную панель длиной $a = 532$ мм и шириной $b = 282$ мм (рис. 1).

Материал панели – углепластик на основе препрега HexPly M21/34%/UD194/IMA-12K (углеродная лента IMA на основе высокопрочного волокна HexTow IMA-12K и эпоксидное модифицированное связующее M21), произведенного фирмой Hexcel (США).

Препрег представляет собой набор углеродных жгутов, собранных в ленту без утка. Лента пропитана связующим по технологии Hot Melt, т.е. связующее в виде пленки совмещается с наполнителем с двух сторон и под давлением каланд-

ров при повышенной температуре сплавляется. Лента по сравнению с тканью обладает лучшей сопротивляемостью однонаправленным нагрузкам, менее пориста, обладает большей прочностью и жесткостью, меньшей стоимостью сырья, но большей стоимостью производства.

Такой препрег предназначен для изготовления изделий по автоклавной технологии. Характеристики монослоя известны: паспортные данные производителя, полученные экспериментально на образцах по европейским стандартам EN для режима RTD (Room Temperature Dry) – нормальная температура $+23$ °С и влажность – в состоянии поставки. Состояние поставки образцов – состояние, в котором находятся образцы сразу после изготовления, с содержанием влаги, не превышающим 10 % от максимального влагонасыщения при относительной влажности 85 %.

Толщина монослоя равна 0,19 мм. Жесткостные характеристики монослоя: $E_1 = 175$ ГПа, $E_2 = 8,5$ ГПа, $G = 3,2$ ГПа, $\mu_{12} = 0,32$, $\rho = 1500$ кг/м³, где E_1 – модуль упругости в направлении оси x ; E_2 – модуль упругости в направлении оси y ; μ_{12} – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в направлении оси x ; G – модуль упругости при сдвиге в плоскости листа; ρ – плотность. Здесь и далее приведенные механические характеристики соответствуют режиму испытаний RTD.

Расположение межслоевых дефектов указано на рис. 2–5, положения центров расслоений: $d_1 = 102$ мм, $c_1 = 107$ мм, $d_2 = 78,5$ мм, $c_2 = 161$ мм, $d_3 = 78,5$ мм, $c_3 = 261$ мм, дефекты имеют форму эллипса с соотношением осей $F = 1,5$, $G = 1,75$, $H =$

2,0 соответственно. Граничные условия на контуре панели соответствуют жесткому заземлению.

Стационарное поле давления, действующее на панель:

$$p = p_0(x, y)e^{i\omega t}, \quad (1)$$

где ω – циклическая частота, p_0 – амплитуда.

Задача решается с помощью МКЭ в программном комплексе Siemens FEMAP 11.4/NX Nastran. Панель моделируется конечными элементами типа Laminate, а моделирование одностороннего контакта в области межслоевого дефекта проводится с помощью элементов типа Gap.

На рис. 6 показаны формы свободных колебаний и соответствующие им частоты, характерные для «раскрытия» межслоевых дефектов. На рис. 7–9 представлены зависимости максимальных прогибов панели в центре расположения (для каждого слоя) расслоений от частоты гармонического воздействия.

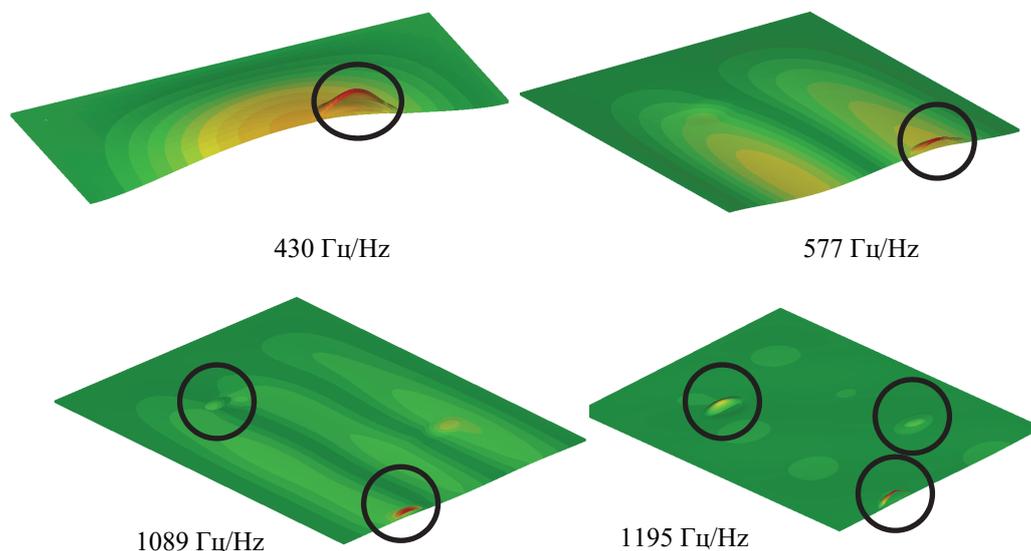


Рис. 6. Собственные формы и частоты, характерные для «раскрытия» расслоения
[Figure 6. Eigenforms and frequencies characteristic of “disclosures” of the bundle]

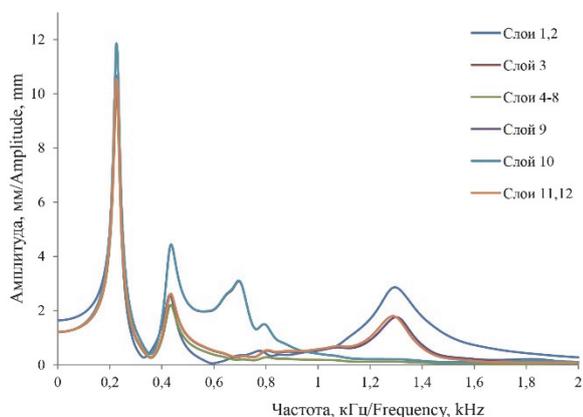


Рис. 7. Зависимость амплитуды от частоты (дефект F)
[Figure 7. Amplitude versus frequency (defect F)]

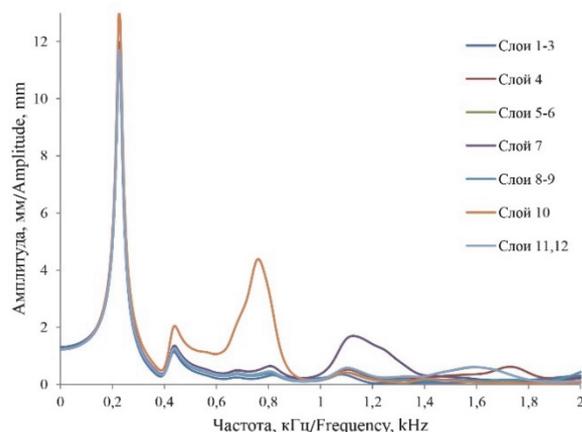


Рис. 8. Зависимость амплитуды от частоты (дефект G)
[Figure 8. Dependence of amplitude on frequency (defect G)]

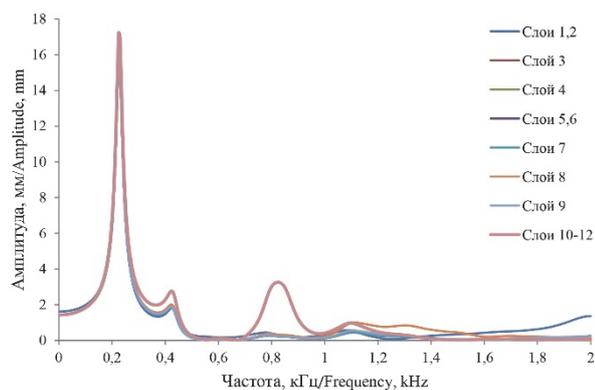


Рис. 9. Зависимость амплитуды от частоты (дефект H)
 [Figure 9. Dependence of amplitude on frequency (defect H)]

3. Панель под действием нестационарной нагрузки

Далее рассматривается задача поведения плоской панели прямоугольной формы при действии мгновенно приложенного равномерного давления на верхнюю поверхность (геометрия, материал и формат укладки соответствуют пунктам 1 и 2). Давление изменяется по закону (1):

$$p(t) = p_0 H(t), \quad (2)$$

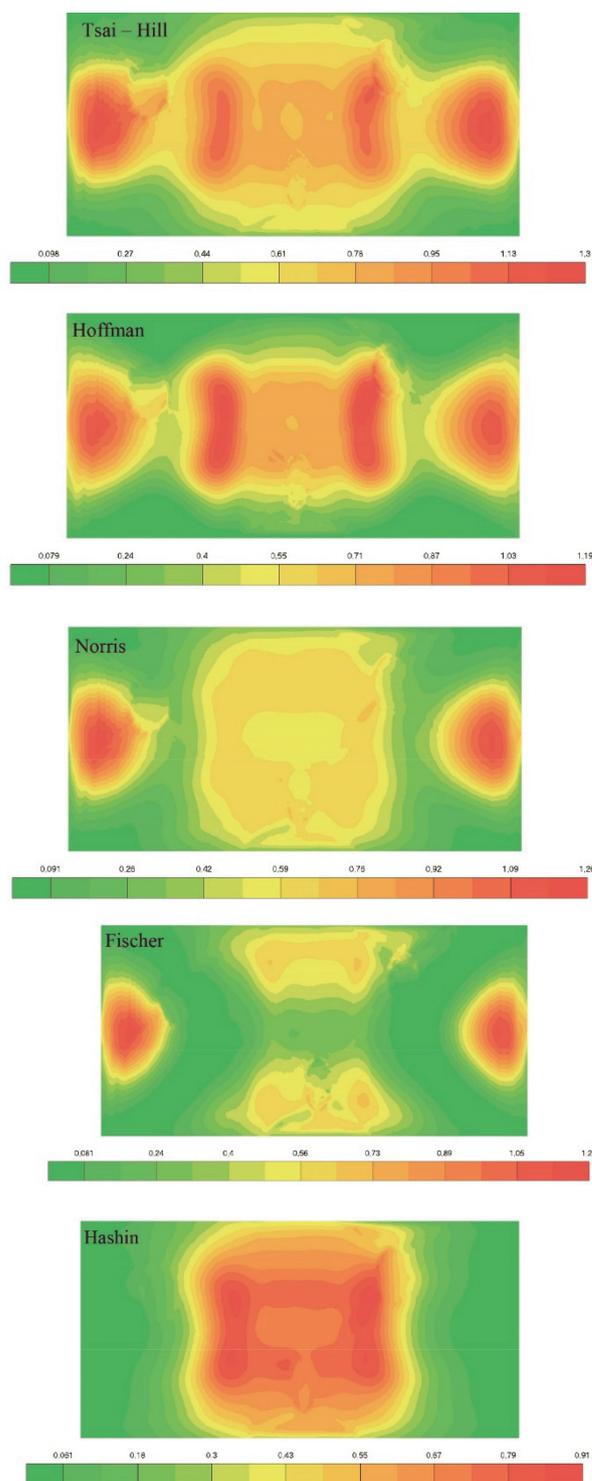
где $H(t)$ – функция Хэвисайда, $p_0 = 1,25$ МПа .

Решение получено с помощью программного комплекса LS-DYNA с применением явной схемы интегрирования полной системы уравнений МКЭ. Слои панели соединены между собой клеявым контактом, что гарантирует равенство прогибов и углов поворотов. Также в модели учитывается контакт в зоне расслоения.

Материал монослоя имеет следующие прочностные характеристики: $X_T = 3042$ МПа, $X_C = 1246$ МПа, $Y_T = 63$ МПа, $Y_C = 217$ МПа, $S_{12} = 96$ МПа, где X_T – предел прочности в направлении оси x при растяжении; X_C – предел прочности в направлении оси x при сжатии; Y_T – предел прочности в направлении оси y при растяжении; Y_C – предел прочности в направлении оси y при сжатии; S_{12} – предел прочности при сдвиге в плоскости листа; σ_1 – нормальное напряжение, действующее в направлении оси x ; σ_2 – нормальное напряжение, действующее в направлении оси y ; τ_{12} – сдвиговое напряжение, действующее в плоскости листа.

На рис. 10 показано распределение индекса разрушения f для слоя № 10 (90°) в момент времени 0,4 мс.

Наименьшее критическое значение индекса разрушения и схожий характер распределения дают критерии разрушения Hashin и DeAlia: $f = 0,91$. Наибольшее значение $f = 1,3$ дают критерии Tsai – Hill, Norris – McKinnon, Puppo – Evensen. Отличие критериев Hoffman, Norris, Fischer, Puck в среднем составляет 10 %.



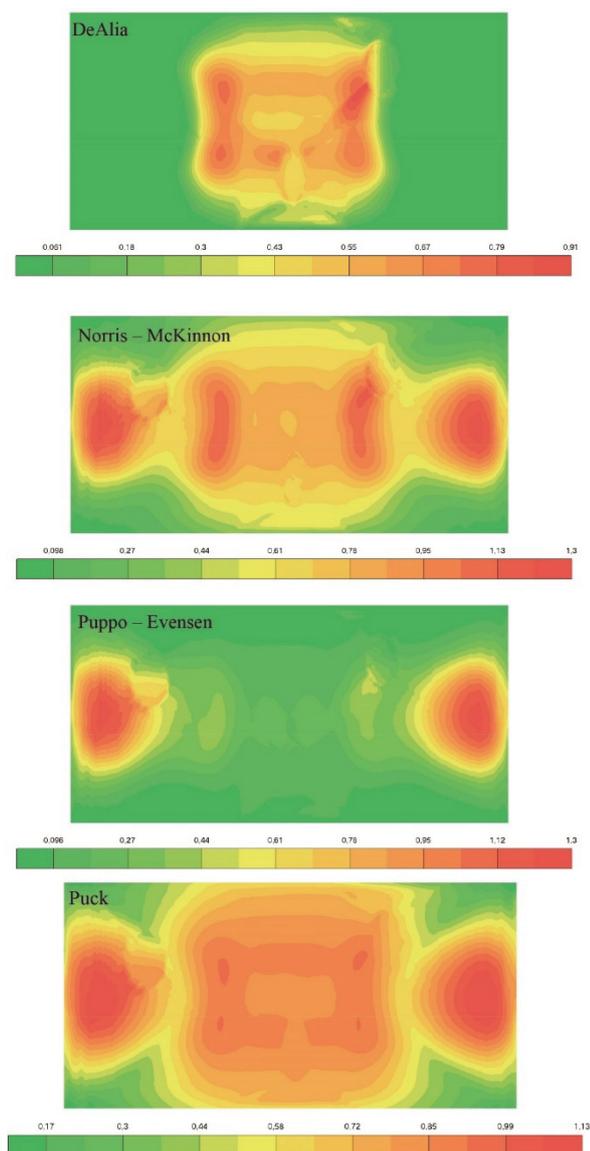


Рис. 10. Значения индекса разрушения
[Figure 10. The values of the index of destruction]

Заключение

Предложенная методика численного моделирования поведения композитных панелей с учетом множественных межслоевых дефектов под действием динамических нагрузок может быть использована при проектировании элементов конструкций из ПКМ.

Список литературы

1. Медведский А.Л., Мартirosов М.И., Хомченко А.В. Численное моделирование поведения пластины из полимерного композита под действием динамических нагрузок при наличии множественных дефектов между слоями // Известия ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 10. С. 271–278.

2. Azzi V.D., Tsai S.W. Anisotropic strength of composites // Experimental Mechanics. 1965. Vol. 5. No. 9. Pp. 283–288.

3. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials // Journal of Composite Materials. 1971. No. 5. Pp. 58–80.

4. Hoffman N.O. The brittle strength of orthotropic materials // Journal of Composite Materials. 1967. Vol. 1. No. 2. Pp. 200–206.

5. Puppo A.H., Evensen H.A. Strength of anisotropic materials under combined stresses // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 1972. Vol. 10. No. 4. Pp. 468–474.

6. Puck A., Schurmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // Composites Science and Technology. 1998. Vol. 58. Pp. 1045–1067.

7. Puck A., Kopp J., Knops M. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // Composites Science and Technology. 2002. Vol. 62. Pp. 1633–1662.

8. Puck A., Kopp J., Knops M. Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion // Composites Science and Technology. 2002. Vol. 62. Pp. 371–378.

9. Hashin Z. Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites // Journal of Applied Mechanics. 1980. Vol. 47. Pp. 329–334.

10. Norris C.B. Strength of orthotropic materials subjected to combined stress // U.S. Forest Products Laboratory. 1962. Report No. 1816.

11. Fischer L. Journal of Engineering for Industry // Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. 1967. Vol. 89. Pp. 389–402.

12. Norris C.B., McKinnon P.F. Compression, tension and shear tests on yellow-poplar plywood panels of sizes that do not buckle with tests made at various angles to the face grain // U.S. Forest Products Laboratory. 1962. Report No. 1328.

13. Sandhu P. A survey of failure theories of isotropic and anisotropic materials. APFDL-TR-72-71. 1972.

Об авторах

Медведский Александр Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет). *Область научных интересов:* волновая динамика, теория тонких оболочек. *Контактная информация:* e-mail – mdv66@mail.ru

Мартirosов Михаил Иванович – кандидат технических наук, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). *Область научных интересов:* механика композиционных материалов, волновая динамика. *Контактная информация:* e-mail – vst@vst-st.ru

Хомченко Антон Васильевич – инженер-конструктор 1 категории, ПАО «Корпорация «Иркут»». *Область научных интересов:* механика композиционных материалов, численное моделирование. *Контактная информация:* e-mail – khomchenkoanton@yandex.ru

Для цитирования

Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В. Численный анализ поведения слоистой композитной панели с межслоевыми дефектами под действием ди-

намических нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 127–134. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-127-134

RESEARCH PAPER

Numerical analysis of layered composite panel behavior with interlaminar defects subject to dynamic loads

Aleksandr L. Medvedskiy¹, Mikhail I. Martirosov², Anton V. Khomchenko^{3*}

¹Moscow Institute of Physics and Technology (State University), 9 Institutsky Pereulok, Dolgoprudny, 141701, Moscow region, Russian Federation

²Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation

³Irkut Corporation, 68 Leningradsky Prospect, Moscow, 125315, Russian Federation

*khomchenkoanton@yandex.ru

Received: January 11, 2019

Revised: March 10, 2019

Accepted: March 26, 2019

Keywords:

composite panel;
composite failure criteria;
interlaminar defect;
nonstationary load;
numerical modeling;
finite element method (FEM)

Abstract

Aims of research. Polymer unidirectional composite laminate panel behavior with interlaminar defects under action of different dynamic loads is considered.

Methods. Normal modes and eigenvalues of rectangular composite panels in the presence of multiple delamination of different sizes in ellipsoidal form are calculated. The dependences of the maximum deflections from the frequency of the stationary pressure field action are constructed. Distribution field of panels failure index under action of nonstationary pressure field by using different failure criteria for composites is determined.

Results. Modeling methodology of composite panels behavior in the presence of multiple interlaminar defects under action of different dynamic loads is developed. Analysis of failure panel with the use of different failure criteria for composites is carried out.

References

1. Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V. (2018). Численное моделирование поведения пластины из полимерного композита под действием динамических нагрузок при наличии множественных дефектов между слоями [Numerical modeling of polymer composite plate behavior under action of dynamic load at presence multiple defects between plies]. *Tidings of TSU. Technical science*, (10), 271–278. (In Russ.)

2. Azzi V.D., Tsai S.W. (1965). Anisotropic strength of composites. *Experimental Mechanics*, 5(9), 283–288.

3. Tsai S.W., Wu E.M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, (5), 58–80.

4. Hoffman N.O. (1967). The brittle strength of orthotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 1(2), 200–206.

5. Puppo A.H., Evensen H.A. (1972). Strength of anisotropic materials under combined stresses. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 10(4), 468–474.

6. Puck A., Schurmann H. (1998). Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, (58), 1045–1067.

7. Puck A., Kopp J., Knops M. (2002). Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, (62), 1633–1662.

8. Puck A., Kopp J., Knops M. (2002). Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion. *Composites Science and Technology*, (62), 371–378.

9. Hashin Z. (1980). Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Journal of Applied Mechanics*, (47), 329–334.

10. Norris C.B. (1962). Strength of orthotropic materials subjected to combined stress. *U.S. Forest Products Laboratory. Report No. 1816.*

11. Fischer L. (1967). *Journal of Engineering for Industry. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, 89, 389–402.

12. Norris C.B., McKinnon P.F. (1962). Compression, tension and shear tests on yellow-poplar plywood panels of sizes that do not buckle with tests made at various angles to the face grain. *U.S. Forest Products Laboratory. Report No. 1328.*

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) (Project № 18-08-01153 A).

13. Sandhu P. (1972). A survey of failure theories of isotropic and anisotropic materials. APFDL-TR-72-71.

About the authors

Aleksandr L. Medvedskiy – DSc in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow Institute of Physics and Technology (State University). *Research interests:* wave dynamic, thin shell theory. *Contacts:* e-mail – mdv66@mail.ru

Mikhail I. Martirosov – PhD in Technical Sciences, Docent, Moscow Aviation Institute (National Research University). *Research interests:* mechanics of composites, wave dynamic. *Contacts:* e-mail – vst@vst-st.ru

Anton V. Khomchenko – Design Engineer 1 Category, Irkut Corporation. *Research interests:* mechanics of composites, numerical modeling. *Contacts:* e-mail – khomchenkoanton@yandex.ru

For citation

Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V. (2019). Numerical analysis of layered composite panel behavior with interlaminar defects subject to dynamic loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 127–134. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-127-134

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148

Выделение согласованных уравнений классической теории оболочек из трехмерных уравнений теории упругости

Е.М. Зверьяев

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., 4
Московский авиационный институт, Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Поступила в редакцию: 18 января 2019 г.

Доработана: 20 марта 2019 г.

Принята к публикации: 22 марта 2019 г.

Ключевые слова:

теория упругости;
согласованная теория оболочек;
метод Сен-Венана;
принцип сжатых отображений

Аннотация

Цели. Вывод согласованных уравнений теории тонких упругих оболочек без гипотез и осреднения напряжений по толщине оболочки.

Методы. С помощью итерационного метода Сен-Венана – Пикара – Банаха без каких-либо гипотез решается трехмерная задача теории упругости. В силу принципа сжатых отображений решение сходится асимптотически независимо от выбора величин начального приближения.

Результаты. Разработан метод интегрирования пространственных уравнений теории упругости в криволинейных координатах для тонкой оболочки. Наличие малого параметра позволяет провести интегрирование системы уравнений таким образом, что выходные данные первого оператора являются входными в следующий оператор и т.д., расщепления исходный сложный оператор на последовательность простых интегрируемых операторов типа Пикара. В каждом уравнении содержатся члены только одного асимптотического порядка.

Введение

Классическая линейная теория оболочек, основана на следующих предположениях:

- толщина оболочки $2h^*$ мала по сравнению с характерным радиусом кривизны R срединной поверхности;
- компоненты тензора напряжения, нормальные к срединной поверхности оболочки, малы по сравнению с другими компонентами;
- нормали к недеформированной поверхности оболочки остаются нормальными к деформированной поверхности и не деформируются;
- тангенциальные напряжения в уравнениях равновесия и соотношениях упругости могут быть

заменены равнодействующими усилиями и моментами.

Последнее предположение обычно не формулируют отдельным пунктом, предполагая возможность такой замены очевидной.

Построение теории оболочек, как правило, выполняется на основе выведенных ранее теорий изгиба стержня и пластины. Сначала Коши и Пуассон для сведения трехмерной задачи к двумерной предложили метод степенных рядов при рассмотрении статики и динамики плоских и искривленных по цилиндрической поверхности пластин. Сен-Венан отдавал предпочтение методам составления основной системы уравнений теории пластин с помощью гипотезы прямой и недеформируемой нормали, называемой также гипотезой Кирхгофа. Гипотеза Кирхгофа была впоследствии распространена Лявом на теорию оболочек [1]. В работе [2] произведена попытка оценки погреш-

© Зверьяев Е.М., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ности, вносимой в уравнения теории оболочек гипотезами Кирхгофа. Было показано, что эта погрешность имеет порядок $\varepsilon = h^*/R$, где h^* – толщина оболочки; R – некоторый характерный радиус срединной поверхности оболочки. Однако влияние данной работы на улучшение теории оказалось неконструктивным. Койтер [3] подтвердил эти оценки и ввел понятие о согласованной теории, когда все члены уравнений имеют одинаковый порядок. В теориях оболочек типа Лява [4–9] принимается условие, что отношение γ/R (γ – размерная координата, отсчитываемая по нормали к срединной поверхности оболочки) мало по сравнению с единицей в выражениях для напряжений и деформаций. Некоторые из авторов учитывают члены порядка γ^2/R^2 , другие в той или иной степени отказываются от гипотезы недеформируемости нормали. При этом считается, что различие отдельных подходов заключено именно в формулировке зависимостей между напряжениями и деформациями. Оценки [2] были дополнены оценками погрешностей в соотношениях упругости [10; 11]. Однако вопрос о погрешностях гипотез типа Кирхгофа и соотношениях упругости не нашел исчерпывающего ответа. В свою очередь, вопрос о количестве краевых условий в теории оболочек и пластин не имеет удовлетворительного объяснения и продолжает привлекать внимание [12].

Классическая теория оболочек определяет кинематику на краю оболочки через четыре обобщенных перемещения и четыре обобщенных силы. Граничные условия на лицевых поверхностях не выполняются и тангенциальные напряжения не определяются. Деформированное состояние оболочки, построенное путем осреднения уравнений теории упругости, не удовлетворяет закону парности касательных напряжений. В результате получается шестое уравнение равновесия, смысл которого не удается объяснить, и его отбрасывают.

В настоящем исследовании на основе метода [13] в развитии работ [14; 15] разыскивается медленно меняющаяся составляющая общего решения уравнений пространственной теории упругости, удовлетворяющая граничным условиям на лицевых поверхностях.

1. Исходные трехмерные уравнения теории упругости

Положение точки тела определяется тремя криволинейными ортогональными координатами α_i , ($i = 1, 2, 3$), которые будем считать безраз-

мерными. Примем, что сплошное упругое тело в направлении α_3 ограничено двумя равноотстоящими на величину друг от друга лицевыми поверхностями, образуя оболочку постоянной толщины, которую обозначим $2h^*$. Координаты α_1, α_2 являются криволинейными ортогональными координатами срединной поверхности оболочки и представляют собой линии главных кривизн срединной поверхности. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид $ds^2 = H_1^{*2} d\alpha_1^2 + H_2^{*2} d\alpha_2^2$, где коэффициенты H_1^*, H_2^* представляют собой функции координат α_1, α_2 и являются размерными коэффициентами Ламе¹. Координата α_3 отмеряет расстояние по нормали к срединной поверхности до рассматриваемой точки. В квадратичной форме $ds^2 = H_1^{*2} d\alpha_1^2 + H_2^{*2} d\alpha_2^2 + H_3^{*2} d\alpha_3^2$ коэффициент H_3^* для всех точек тела имеет постоянное значение. Два других коэффициента выражаются через параметры срединной поверхности и расстояние $H_3^* \alpha_3$ по нормали от срединной поверхности до рассматриваемой точки:

$$H_1^* = A_1^* \left(1 + \frac{H_3^* \alpha_3}{R_1^*} \right) (1, 2), \quad (1)$$

где $A_1^* = A_1^*(\alpha_1, \alpha_2)(1, 2)$ – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, отнесенной к линиям главных кривизн; R_1^*, R_2^* – радиусы главных кривизн. Символы $(1, 2)$, стоящие после определенных уравнений, указывают, что уравнений подобного вида должно быть два: второе получается круговой заменой указанных символов.

Уравнения равновесия в принятой системе координат имеют вид [1; 4]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} H_2^* H_3^* \sigma_{11}^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} H_1^* H_3^* \sigma_{12}^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} H_1^* H_2^* \sigma_{13}^* - \\ & - H_3^* \frac{\partial H_2^*}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^* - H_2^* \frac{\partial H_3^*}{\partial \alpha_1} \sigma_{33}^* + \\ & + H_3^* \frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^* + H_2^* \frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_3} \sigma_{13}^* = 0 (1, 2); \end{aligned}$$

¹ Здесь и далее звездочкой отмечены те размерные величины, которые будут приведены к безразмерному виду.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} H_1^* H_2^* \sigma_{33}^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} H_3^* H_2^* \sigma_{13}^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} H_3^* H_1^* \sigma_{23}^* - \\ & - H_2^* \frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_3} \sigma_{11}^* - H_1^* \frac{\partial H_2^*}{\partial \alpha_3} \sigma_{22}^* + \\ & + H_2^* \frac{\partial H_3^*}{\partial \alpha_1} \sigma_{13}^* + H_1^* \frac{\partial H_3^*}{\partial \alpha_2} \sigma_{23}^* = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ_{ij}^* , ($i, j = 1, 2, 3$) – напряжения.

Размерное перемещение некоторой точки, имеющей до деформации координаты α_i , ($i = 1, 2, 3$), определяется проекциями u_i^* , ($i = 1, 2, 3$) на криволинейные оси координат. Компоненты деформации через перемещения определяются формулами:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{H_1^*} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1^* H_2^*} \frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_2} u_2^* + \frac{1}{H_1^* H_3^*} \frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_3} u_3^* \quad (1,2); \\ e_3 &= \frac{1}{H_3^*} \frac{\partial u_3^*}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_3^* H_1^*} \frac{\partial H_3^*}{\partial \alpha_1} u_1^* + \frac{1}{H_3^* H_2^*} \frac{\partial H_3^*}{\partial \alpha_2} u_2^*; \\ e_{12} &= \frac{H_1^*}{H_2^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{H_1^*} u_1^* + \frac{H_2^*}{H_1^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{H_2^*} u_2^*; \\ e_{13} &= \frac{H_3^*}{H_1^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_3^*}{H_3^*} + \frac{H_1^*}{H_3^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \frac{u_1^*}{H_1^*} \quad (1,2). \end{aligned} \quad (3)$$

Введем безразмерные коэффициенты $H_1 = H_1^* / R$ (1,2), $A_1 = A_1^* / R$ (1,2), в которых под величиной R как единицей измерения понимается некоторый характерный радиус срединной поверхности, безразмерные перемещения $u_i = u_i^* / h^*$ (1,2), $w = u_3^* / h^*$ вдоль осей α_i , ($i = 1, 2, 3$) соответственно, безразмерные напряжения $\sigma_i = \sigma_{ii}^* / E$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* / E$, ($i, j = 1 \div 3, i \neq j$), безразмерные радиусы главных кривизн $R_1 = R_1^* / R$ (1,2), и положим $H_3^* = h^*$, $\alpha_3 = z$. Подставив эти величины в соотношение (1), запишем

$$H_1 = A_1 \left(1 + \varepsilon \frac{z}{R_1} \right), H_2 = A_2 \left(1 + \varepsilon \frac{z}{R_2} \right), \quad (4)$$

откуда получаем для производных по z

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} = \varepsilon \frac{A_1}{R_1}, \frac{\partial H_2}{\partial z} = \varepsilon \frac{A_2}{R_2}.$$

Имея в виду, как это принято в литературе, выделение двумерных уравнений из трехмерных с точностью порядка ε по сравнению с величинами порядка единицы, отбросим в формулах (4) вторые члены в скобках и будем считать $H_1 = A_1$, $H_2 = A_2$.

С учетом последних соотношений уравнения (2), (3) приводятся к безразмерным уравнениям следующего вида:

– уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_{13} - \\ & - \varepsilon \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_2 + \varepsilon \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_{13} = 0; \\ & \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_{23} - \\ & - \varepsilon \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_1 + \varepsilon \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{12} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_2} \sigma_{23} = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_3 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_{13} + \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{32} - \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_1 - \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_2} \sigma_2 = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

– формулы деформации-перемещения:

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \varepsilon \frac{1}{R_1} w; \\ e_2 &= \varepsilon \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \varepsilon \frac{1}{R_2} w; \\ e_{12} &= \varepsilon \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_1}{A_1} + \varepsilon \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_2}{A_2}, \quad e_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6)$$

и сдвигов в нормальных плоскостях:

$$\begin{aligned} e_{13} &= \varepsilon \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + A_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{u_1}{A_1}; \\ e_{13} &= \varepsilon \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + A_2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{u_2}{A_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения должны быть дополнены соотношениями упругости, которые в любой системе ортогональных координат имеют один и тот же

вид и в принятой здесь безразмерной записи выглядят так:

$$\sigma_i = \lambda(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\sigma_{ij} = \mu e_{ij} \quad (i \neq j = 1, 2, 3),$$

где λ, μ – безразмерные коэффициенты Ламе, полученные делением размерных на E .

Три первых соотношения упругости, оставив формулы для сдвигов неизменными, путем тождественных преобразований можно свести к такой записи:

$$\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_3; \quad \sigma_2 = \frac{e_2 + \nu e_1}{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_3;$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2(1 + \nu)} e_{ij} \quad (i \neq j = 1, 2, 3);$$

$$e_3 = -\frac{\nu}{1 - \nu} (e_1 + e_2) + \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \sigma_3, \quad (8)$$

позволяющей организовать последовательный процесс вычисления неизвестных. Для этого переписем систему уравнений в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_{13} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_{13} -$$

$$-\frac{\nu}{1 - \nu} \varepsilon \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_3 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_3 \right) =$$

$$= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(\frac{e_1 + \nu e_2}{1 - \nu^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{e_2 + \nu e_1}{1 - \nu^2} \right) -$$

$$-\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{12} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} \right) (1, 2);$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_3 - \varepsilon \frac{\nu}{1 - \nu} A_1 A_2 \sigma_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) =$$

$$= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_{13} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_2 \sigma_{23} +$$

$$+ \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1} \frac{e_1 + \nu e_2}{1 - \nu^2} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_2} \frac{e_2 + \nu e_1}{1 - \nu^2}.$$

В левой части третьего уравнения можно отбросить одноименный с главным член σ_3 с множителем ε и переписать его так:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_3 = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_{13} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{23} +$$

$$+ \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1} \frac{e_1 + \nu e_2}{1 - \nu^2} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_2} \frac{e_2 + \nu e_1}{1 - \nu^2}.$$

Видно, что σ_3 соизмерима с $\varepsilon \sigma_{13}$ или $\varepsilon (e_1 + \nu e_2)$. Но в левой части первого уравнения можно отбросить член с σ_{13} как малый следующего порядка малости по сравнению с главным и член с σ_3 как величину второго порядка малости, упростив его:

$$\frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_{13} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(\frac{e_1 + \nu e_2}{1 - \nu^2} \right) +$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{e_2 + \nu e_1}{1 - \nu^2} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{12} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} \right) (1, 2).$$

Более того, учитывая полученные оценки можно упростить первые три соотношения упругости (8), отбросив в них члены с напряжением σ_3 как малые более высокого порядка и получить такие соотношения упругости

$$\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1 - \nu^2}; \quad \sigma_2 = \frac{e_2 + \nu e_1}{1 - \nu^2}; \quad e_3 = -\frac{\nu}{1 - \nu} (e_1 + e_2). \quad (9)$$

Для дальнейших вычислений запишем уравнения в следующей последовательности:

– два соотношения для сдвигов (7), в которых e_{13}, e_{23} выражены через σ_{13}, σ_{23} :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{u_1}{A_1} = -\varepsilon \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + 2(1 + \nu) \frac{1}{A_1} \sigma_{13} (1, 2); \quad (10)$$

– формулы деформации-перемещения для компонент тангенциальной деформации:

$$e_1 = \varepsilon \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} w (1, 2);$$

$$e_{12} = \varepsilon \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_1}{A_1} + \varepsilon \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_2}{A_2}; \quad (11)$$

– три тангенциальных соотношения упругости:

$$\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1 - \nu^2}; \quad \sigma_2 = \frac{e_2 + \nu e_1}{1 - \nu^2}; \quad \sigma_{12} = \frac{e_{12}}{2(1 + \nu)}, \quad (12)$$

в которых два первых взяты упрощенными из (9);

– два первых уравнения равновесия, в которых отброшены члены $\varepsilon\sigma_{13}$ как малые по сравнению с главными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_{13} &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_1 - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{12} + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_2 - \varepsilon \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} \quad (1, 2); \end{aligned} \quad (13)$$

– третье уравнение равновесия, в котором напряжения σ_1, σ_2 определены из соотношений (9) и напряжение σ_3 отброшено как малое по сравнению с одноименным главным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_3 &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_{13} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{23} + \\ &+ \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_1 + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_2} \sigma_2; \end{aligned} \quad (14)$$

– формулы для поперечной деформации растяжения (сжатия) и перемещения w

$$e_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_1 + e_2); \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e_3. \quad (15)$$

Погрешность записанной системы уравнений оценивается в ε по сравнению с единицей.

Решение системы уравнений (9)–(15) будем искать методом простых итераций. Предположим, что в (10) перемещение w и касательные напряжения σ_{13}, σ_{23} известны. В этом случае тангенциальные перемещения u_1, u_2 вычисляются путем прямого интегрирования по z . Подставив их и предположенное известным нормальное перемещение w в (11), вычисляем тангенциальные деформации e_1, e_2, e_{12} . Уравнения (12) позволяют определить тангенциальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$. Уравнения (13) дают возможность путем интегрирования по z вычислить неизвестные нетангенциальные напряжения сдвига σ_{13}, σ_{23} , а уравнение (14) – нетангенциальное нормальное напряжение σ_3 , которое в классической теории оболочек не вычисляется. Последние два соотношения (15) позволяют найти также отсутствующие в классической теории поперечную деформацию и перемещение. На этом нулевую итерацию можно считать законченной.

Если теперь найденные $w, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ подставить в выражения (10), можно вычислить искомые не-

известные в первой итерации и т.д. Однако здесь ограничимся вычислением только нулевой итерации, обеспечивающей асимптотическую точность ε , т.к. уравнения (9)–(15) записаны с такой же точностью.

Величины начального приближения выберем такими:

$$\begin{aligned} w &= w_{(0)} = w_0(\alpha_1, \alpha_2); \\ \sigma_{13(0)} &= \tau_{13(0)}(\alpha_1, \alpha_2); \\ \sigma_{23(0)} &= \tau_{23(0)}(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (16)$$

считая поперечное перемещение и касательные напряжения в нулевом приближении не зависящими от поперечной координаты. Для удобства процедуру вычислений разделим в силу линейности задачи на два элементарных процесса: w и τ [13–15]. В w -процессе задаются величины начального приближения:

$$w_{(0)} = w_0, \quad \sigma_{13(0)} = \sigma_{23(0)} = 0, \quad (17)$$

совпадающие с известными гипотезами Кирхгофа и рассматриваемые в настоящей работе как величины начального приближения.

Для сведения трехмерных формул, связывающих деформации и перемещения, к двумерным В.З. Власов использует гипотезы прямой и недеформируемой нормали:

$$e_3 = 0; \quad e_{13} = e_{23} = 0. \quad (18)$$

Тогда из уравнений (6) и (7) следует:

$$\begin{aligned} w^* &= w_0^*(\alpha_1, \alpha_2); \\ u_1^* &= -\varepsilon \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial w^*}{\partial \alpha_1} z + u_{10}^*; \\ u_2^* &= -\varepsilon \frac{1}{A_2^*} \frac{\partial w^*}{\partial \alpha_2} z + u_{20}^*, \end{aligned}$$

где u_{10}^*, u_{20}^* – тангенциальные перемещения точки срединной поверхности.

Затем он подставляет это в выражения (3) и, используя для коэффициентов формулы (1) и раскладывая деформации e_1, e_2, e_{12} в ряды по степеням поперечной координаты $\gamma = H_3^* z$ до второй степени, получает выражения для тангенциальных и нетангенциальных компонент деформации оболочки с точностью до ε^2 . Здесь будут получены формулы для деформаций с точностью ε , т.к. в формулах (4) отбрасывается второй член в

скобках, внося погрешность порядка ε во все дальнейшие вычисления.

В настоящем исследовании гипотезы (18) можно рассматривать как величины начального приближения w -процесса, заданные выражениями (17). Вычислять неизвестные будем в следующем порядке. Исходя из величин начального приближения, из уравнений $\frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{1}{A_1} = -\varepsilon \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{1}{A_1} = -\varepsilon \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{1}{A_2} = -\varepsilon \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2}$ получаем выражения для перемещений $u_{1(0)}, u_{2(0)}$:

$$\begin{aligned} u_{1(0)} &= -\varepsilon \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} z + u_{10}; \\ u_{2(0)} &= -\varepsilon \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2} z + u_{20}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив их в правые части формул деформации-перемещения (11), получим:

$$e_{1(0)} = \varepsilon^2 \kappa_{1(0)} z + \varepsilon \varepsilon_{1(0)} \quad (1, 2);$$

$$e_{12(0)} = \varepsilon^2 \tau_{(0)} z + \varepsilon \omega_{(0)}.$$

Здесь использованы компоненты:

– нетангенциальной деформации:

$$\kappa_{1(0)} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_2} \quad (1, 2);$$

$$\tau_{(0)} = -\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_2}; \quad (20)$$

– и тангенциальной деформации:

$$\varepsilon_{1(0)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{10}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_{20} + \frac{1}{R_1} w_0 \quad (1, 2);$$

$$\omega_{(0)} = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_{10}}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_{20}}{A_2}. \quad (21)$$

Величина w_0 является решением уравнения

$e_3 = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. С помощью первых двух соотношений упругости (12) вычисляем, учитывая последнее равенство в (19), тангенциальные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{1(0)} &= \varepsilon^2 m_{1(0)} z + \varepsilon t_{1(0)}; \\ \sigma_{2(0)} &= \varepsilon^2 m_{2(0)} z + \varepsilon t_{2(0)}; \\ \sigma_{12(0)} &= \varepsilon^2 h_{(0)} z + \varepsilon s_{(0)}, \end{aligned} \quad (22)$$

в которых

$$\begin{aligned} t_{1(0)} &= \frac{1}{1-v^2} (\varepsilon_{1(0)} + v \varepsilon_{2(0)}); \\ t_{2(0)} &= \frac{1}{1-v^2} (\varepsilon_{2(0)} + v \varepsilon_{1(0)}); \end{aligned}$$

$$s_{(0)} = \frac{1}{2(1+v)} \omega_{(0)};$$

$$m_{1(0)} = \frac{1}{1-v^2} (\kappa_{1(0)} + v \kappa_{2(0)});$$

$$m_{2(0)} = \frac{1}{1-v^2} (\kappa_{2(0)} + v \kappa_{1(0)});$$

$$h_{(0)} = \frac{1}{2(1+v)} \tau_{(0)}.$$

Полученные напряжения подставим в уравнения (13), что даст следующие выражения для касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{13(1)} &= \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(\varepsilon^2 m_{1(0)} \frac{z^2}{2} + \varepsilon t_{1(0)} z \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \left(\varepsilon^2 h_{(0)} \frac{z^2}{2} + \varepsilon s_{(0)} z \right) + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\varepsilon^2 m_{2(0)} \frac{z^2}{2} + \varepsilon t_{2(0)} z \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\varepsilon^2 h_{(0)} \frac{z^2}{2} + \varepsilon s_{(0)} z \right) \right] + \tau_{130} \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\tau_{130} = \tau_{130}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\tau_{230} = \tau_{230}(\alpha_1, \alpha_2)$ – произволы интегрирования, определяющие постоянные по толщине составляющие напряжений.

Подставляя эти напряжения вместе с нормальными тангенциальными напряжениями в третье уравнение системы (14), вычисляем нормальное нетангенциальное напряжение $\sigma_{3(1)}$ в первом приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_{3(1)} &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[-\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(\varepsilon^4 m_{1(0)} \frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 t_{1(0)} \frac{z^2}{2} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \left(\varepsilon^4 h_{(0)} \frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 s_{(0)} \frac{z^2}{2} \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[-\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \left(\varepsilon^4 m_{2(0)} \frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 t_{2(0)} \frac{z^2}{2} \right) - \right. \\
 & -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(\varepsilon^4 h_{(0)} \frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 s_{(0)} \frac{z^2}{2} \right) + \\
 & +\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\varepsilon^4 m_{1(0)} \frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 t_{1(0)} \frac{z^2}{2} \right) - \\
 & \left. -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\varepsilon^4 h_{(0)} \frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 s_{(0)} \frac{z^2}{2} \right) \right] + \\
 & +\frac{A_1 A_2}{R_1} \left(\varepsilon^4 m_{1(0)} \frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 t_{1(0)} \frac{z^2}{2} \right) + \\
 & +\frac{A_1 A_2}{R_2} \left(\varepsilon^4 m_{2(0)} \frac{z^3}{6} + \varepsilon^3 t_{2(0)} \frac{z^2}{2} \right) \Big\} - \\
 & -\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{130} z - \\
 & -\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{230} z + \sigma_{30}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{30} = \sigma_{30}(\alpha_1, \alpha_2)$ – произвол интегрирования, определяющий постоянную по толщине составляющую напряжения.

С помощью последнего уравнения из (15) находим поперечное перемещение в первом приближении:

$$\begin{aligned}
 w &= w_{(0)} + w_{(1)} = \\
 &= w_0 - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\varepsilon^2 \left(\kappa_{1(0)} + \kappa_{2(0)} \right) \frac{z^2}{2} + \varepsilon \left(\varepsilon_{1(0)} + \varepsilon_{2(0)} \right) z \right]. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Поскольку поправка $w_{(1)}$ является величиной ε по сравнению с w_0 , она может быть отброшена, и поперечное перемещение будет состоять только из прогиба срединной поверхности.

Соотношения (19)–(25) дают выражения всех девяти неизвестных трехмерной задачи теории упругости $u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_3, w$ при начальном выборе нетангенциальных касательных напряжений, отсутствующих в нулевом приближении, через 15 неизвестных теории оболочек: перемещения срединной поверхности u_1, u_2, w , нетангенциальные деформации κ_1, κ_2, τ , тангенциальные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$, параметры изгиба-

ющих m_1, m_2 и крутящего h моментов и параметры тангенциальных напряжений t_1, t_2, s . Также вычислены поперечное нормальное σ_3 , касательные σ_{13}, σ_{23} напряжения и установлена зависимость поперечного перемещения w от координаты z , которыми в классической теории пренебрегают. Видно, что напряжение σ_3 имеет порядок ε^4 относительно $m_{1(0)}$, тогда как тангенциальное напряжение – порядок ε^2 относительно той же величины. Это оправдывает пренебрежение величиной σ_3 в первых двух формулах в (9) и при выборе величин начального приближения (19).

Отметим, что в схеме последовательного вычисления неизвестных

$$\begin{aligned}
 & \left(w_{(0)}, \sigma_{13(0)}, \sigma_{23(0)} \right) \Rightarrow \left(u_{1(0)}, u_{2(0)} \right) \Rightarrow \\
 & \left(e_{1(0)}, e_{2(0)}, e_{12(0)}, \varepsilon_{1(0)}, \varepsilon_{2(0)}, \omega_{(0)}, \kappa_{1(0)}, \kappa_{2(0)}, \right. \\
 & \left. \tau_{(0)} \right) \Rightarrow \left(\sigma_{1(0)}, \sigma_{2(0)}, \sigma_{12(0)} \right) \Rightarrow \\
 & \left(\sigma_{13(1)}, \sigma_{23(1)}, \sigma_{3(1)}, w_{(1)} \right) \Rightarrow \dots \tag{26}
 \end{aligned}$$

можно любую совокупность величин выбрать в качестве величин нулевого приближения и продолжить процесс вычисления остальных.

2. Выполнение граничных условий на лицевых поверхностях оболочки

На лицевых поверхностях оболочки надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются так:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_3 = Z_+; \quad \sigma_{13} = X_{1+}; \quad \sigma_{23} = X_{2+} \quad \text{при } z = 1; \\
 & \sigma_3 = Z_-; \quad \sigma_{13} = X_{1-}; \quad \sigma_{23} = X_{2-} \quad \text{при } z = -1, \tag{27}
 \end{aligned}$$

где безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на модуль упругости E .

Посмотрим, можно ли выполнить эти граничные условия величинами (22) и (23), считая, что они аппроксимируют искомые величины в первом приближении с достаточной точностью:

$$\sigma_{13} = \varepsilon^3 \frac{1}{A_1 A_2} E_{1m}^w \frac{z^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{1}{A_1 A_2} E_{1t}^w z + \tau_{130} (1, 2);$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 = & -\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} B \times \\ & \times \left(\varepsilon^3 \frac{1}{A_1 A_2} E_{1m}^w \frac{z^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{1}{A_1 A_2} E_{1t}^w \frac{z^2}{2} + \tau_{130(0)} z \right) - \\ & - \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A \times \\ & \times \left(\varepsilon^3 \frac{1}{A_1 A_2} E_{2m}^w \frac{z^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{1}{A_1 A_2} E_{2t}^w \frac{z^2}{2} + \tau_{230(0)} z \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left(\frac{m_{1(0)}}{R_1} + \frac{m_{2(0)}}{R_2} \right) \frac{z^2}{2} + \varepsilon^2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) z + \sigma_{30}. \quad (28) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} E_{1m}^w = & -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 m_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 h_{(0)} + \\ & + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h_{(0)} \quad (1,2); \\ E_{1t}^w = & -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 t_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_2 s_{(0)} + \\ & + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s_{(0)} \quad (1,2). \quad (29) \end{aligned}$$

Подчинение напряжений граничным условиям (27) дает пять уравнений с шестью неизвестными $E_{1t}^w, E_{1m}^w, \tau_{130}, E_{2t}^w, E_{2m}^w, \tau_{230}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 2E_{1t}^w = & A_1 A_2 (X_{1+} - X_{1-}) \quad (1,2); \\ -\varepsilon^4 \frac{1}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} E_{1m}^w + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} E_{2m}^w \right) - \\ -2\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{130(0)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{230(0)} \right) + \\ + \varepsilon^2 2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) = & Z_+ - Z_- \\ \varepsilon^3 E_{1m}^w + 2A_1 A_2 \tau_{130} = & A_1 A_2 (X_{1+} + X_{1-}) \quad (1,2). \quad (30) \end{aligned}$$

Или с учетом обозначений (29) и последних двух уравнений равновесия – с неизвестными $m_{1(0)}, t_{1(0)}, h_{(0)}, s_{(0)}, \tau_{130} \quad (1,2)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 t_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} s_{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s_{(0)} \right) = \\ = A_1 A_2 (X_{1+} - X_{1-}); \\ -\varepsilon \frac{4}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{130(0)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{230(0)} \right) + \\ + \varepsilon^2 2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) = Z_+ - Z_- + \varepsilon \frac{1}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} + X_{2-}) \right]; \\ \varepsilon^3 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 m_{1(0)} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 h_{(0)} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_{2(0)} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h_{(0)} \right) + \\ + 2A_1 A_2 \tau_{130} = A_1 A_2 (X_{1+} + X_{1-}) \quad (1,2). \quad (31) \end{aligned}$$

А также шестое уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A_1 B_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \varepsilon^3 \frac{1}{A_1} E_{1t}^w - \frac{1}{A_1 B_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \varepsilon^3 \frac{1}{A_2} E_{2t}^w + \\ + \varepsilon^3 \left(\frac{m_{10}}{R_1} + \frac{m_{20}}{R_2} \right) + 2\sigma_{30} = Z_+ + Z_-, \end{aligned}$$

сводящееся к уравнению, определяющему $\sigma_{30} = \sigma_{30}(\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{30} = Z_+ + Z_- + \varepsilon^3 \frac{1}{2A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} - X_{1-}) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} - X_{2-}) \right] - \varepsilon^3 \left(\frac{m_{1(0)}}{R_1} + \frac{m_{2(0)}}{R_2} \right). \end{aligned}$$

Напряжениям σ_{13} и σ_3 из (28) можно придать более простой вид, преобразовав их с помощью уравнений (30):

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = (X_{1+} + X_{1-}) \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} (X_{1+} - X_{1-}) z + \\ + \tau_{130} (1 - z^2) \quad (1,2); \\ \sigma_3 = -\frac{1}{2} (Z_+ + Z_-) - \\ - \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_+ + X_-) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (Y_+ + Y_-) \right] \frac{z^3}{6} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\varepsilon \frac{1}{2} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} - X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} - X_{2-}) \right] \times \\
 & \times \frac{1-z^2}{2} - \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{130(0)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{230(0)} \right) \times \\
 & \times \left(z - \frac{z^3}{3} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) z + \\
 & + \varepsilon^2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) z + \varepsilon^3 \left(\frac{m_{1(0)}}{R_1} + \frac{m_{2(0)}}{R_2} \right) \frac{z^2 - 1}{2}. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Отсюда хорошо виден закон распределения нетангенциальных напряжений по толщине оболочки. Легко проверить, что напряжения удовлетворяют условиям нагружения на лицевых поверхностях.

3. Сравнение с уравнениями классической теории

В классической теории оболочек в качестве неизвестных вводятся усилия и моменты, определяемые через соответствующие им напряжения интегралами следующего вида:

$$T_1^* = \frac{1}{B^*} \int_{-h}^h \sigma_1^* H_2^* d\gamma (1, 2);$$

$$S^* = \frac{1}{B^*} \int_{-h}^h \sigma_{12}^* H_2^* d\gamma;$$

$$N_1^* = \frac{1}{B^*} \int_{-h}^h \sigma_{13}^* H_2^* d\gamma (1, 2);$$

$$M_1^* = \frac{1}{B^*} \int_{-h}^h \sigma_1^* H_2^* \gamma d\gamma (1, 2);$$

$$M_{12}^* = \frac{1}{B^*} \int_{-h}^h \sigma_{12}^* H_2^* \gamma d\gamma.$$

Учитывая, что в настоящей работе все вычисления ведутся с точностью ε , последние определения можно переписать так:

$$T_1^* = \int_{-h}^h \sigma_1^* d\gamma (1, 2);$$

$$S^* = \int_{-h}^h \sigma_{12}^* d\gamma;$$

$$N_1^* = \int_{-h}^h \sigma_{13}^* d\gamma (1, 2);$$

$$M_1^* = \int_{-h}^h \sigma_1^* \gamma d\gamma (1, 2);$$

$$M_{12}^* = \int_{-h}^h \sigma_{12}^* \gamma d\gamma. \quad (33)$$

Введенные таким образом величины должны удовлетворять уравнениям равновесия [6]:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2^* T_1^* - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1^* S_2^* + \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} T_2^* - \\
 & -\frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} S_1^* - A_1^* A_2^* \frac{N_1^*}{R_1^*} = A_1^* A_2^* X_1^* (1, 2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_1^*}{R_1^*} + \frac{T_2^*}{R_2^*} - \frac{1}{A_1^* A_2^*} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2^* N_1^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1^* N_2^* \right) = \\
 & = Z_+^* - Z_-^*;
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2^* M_1^* - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1^* M_{12}^* + \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} M_2^* -$$

$$-\frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} M_{12}^* - A_1^* A_2^* N_1^* = 0 (1, 2). \quad (34)$$

Усилия и моменты связаны с деформациями соотношениями упругости:

$$T_1^* = \frac{2Eh^*}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) (1, 2);$$

$$S^* = \frac{2Eh^*}{2(1+\nu)} \omega;$$

$$M_1^* = \frac{2Eh^{*3}}{3(1-\nu^2)} (\kappa_1^* + \nu \kappa_2^*) (1, 2);$$

$$M_{12}^* = \frac{3Eh^{*3}}{3(1+\nu)} \tau^*. \quad (35)$$

Компоненты деформации определяются выражениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*} \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_2} + \frac{w^*}{R_1^*} (1, 2);$$

$$\omega = \frac{A_1^*}{A_2^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_1^*}{A_1^*} + \frac{A_2^*}{A_1^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_2^*}{A_2^*};$$

$$\begin{aligned} \kappa_1^* &= \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial w^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^{*2}} \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w^*}{\partial \alpha_2} - \\ &\frac{u_1^*}{A_1^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{R_1^*} - \frac{u_2^*}{A_2^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{R_1^*} + \frac{w^*}{R_1^{*2}} (1,2); \\ \tau^* &= -\frac{1}{A_1^* A_2^*} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w^*}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2^*} \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w^*}{\partial \alpha_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^*} - \frac{1}{R_2^*} \right) \left(\frac{A_1^*}{A_2^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_1^*}{A_1^*} - \frac{A_2^*}{A_1^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_2^*}{B^*} \right) \end{aligned}$$

либо несущественно отличающимися от этих. Общеизвестно, что тангенциальные перемещения в формулах для нетангенциальных деформаций могут быть отброшены.

Поскольку выведенные в работе уравнения имеют точность ε и записаны в безразмерном виде, приведем уравнения классической теории к безразмерному виду и такой же точности, выразив размерные усилия и моменты через безразмерные параметры. Умножим напряжения (22) и (32) на модуль упругости E , сделав их размерными, и подставим в (33). После интегрирования получаем связь между размерными усилиями и моментами и безразмерными параметрами усилий и моментов, являющимися коэффициентами в законах распределения напряжений (22)–(24):

$$\begin{aligned} T_1^* &= 2Eh^* \varepsilon_{t_{(0)}} (1,2); S^* = 2Eh^* \varepsilon_{s_{(0)}}; \\ M_1^* &= \frac{2}{3} Eh^* \varepsilon^2 m_{1(0)} (1,2); \\ M_{12}^* &= \frac{2}{3} Eh^* \varepsilon^2 h_{(0)} (1,2); \\ N_1^* &= \frac{2}{3} Eh^* (X_+ + X_-) + \frac{4}{3} Eh^* \tau_{130}. \end{aligned} \quad (36)$$

Если заменить безразмерные параметры в уравнениях (31) в соответствии с этими выражениями, получим расхождение только в первых двух уравнениях равновесия в силу наличия в классических уравнениях (34) членов $A_1^* A_2^* N_1^* / R_1^*$, $A_1^* A_2^* N_2^* / R_2^*$, которые являются малыми порядка ε по сравнению с остальными. При использовании уравнений теории оболочек их принято отбрасывать, т.к. в расчетах они всегда являются пренебрежимо малыми.

Легко проверить совпадение приведенных к размерным величинам формул для компонент деформации (20), (21) с формулами (36), где в формулах компонент нетангенциальной деформации отброшены члены с тангенциальными перемеще-

ниями. Соответствие соотношений упругости (22) и (35) устанавливается с помощью (36) тем же путем. Таким образом, выведенные в настоящей работе в результате применения w -процесса выражения искомого неизвестных в первом приближении и выполнения ими граничных условий на лицевых поверхностях оболочки дают уравнения классической теории с точностью до величин порядка ε по сравнению с единицей.

Приведем сводку уравнений и формулы для напряжений и перемещений, выведенной здесь теории, опустив указывающие на процесс и приближение индексы:

– уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 t_1 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 s + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} t_2 - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} s \right) &= \\ = A_1 A_2 (X_{1+} - X_{1-}) (1,2); \\ -\varepsilon \frac{4}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{13} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{23} \right) &+ \\ + \varepsilon^2 2 \left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2} \right) &= Z_+ - Z_- + \varepsilon \frac{1}{3} \frac{1}{A_1 A_2} \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} + X_{2-}) \right], \\ \varepsilon^3 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 m_1 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 h + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_2 - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h \right) &+ \\ + 2 A_1 A_2 \tau_{13} &= A_1 A_2 (X_{1+} + X_{1-}) (1,2); \end{aligned} \quad (37)$$

– соотношения упругости:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) (1,2); s = \frac{1}{2(1+\nu)} \omega; \\ m_1 &= \frac{1}{1-\nu^2} (\kappa_1 + \nu \kappa_2) (1,2); h = \frac{1}{2(1+\nu)} \tau; \end{aligned}$$

– компоненты тангенциальной деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{R_1} w (1,2); \\ \omega &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_2}{A_2}; \end{aligned}$$

– компоненты нетангенциальной деформации:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} (1,2);$$

$$\tau = -\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2};$$

– формулы для перемещений:

$$u_1 = -\varepsilon \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} z + u_{10} (1, 2);$$

$$u_3 = -\frac{\nu}{1-\nu} \left[\varepsilon^2 (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{z^2}{2} + \varepsilon (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) z \right] + w_0;$$

– тангенциальные напряжения:

$$\sigma_1 = \varepsilon^2 m_1 z + \varepsilon t_1 (1, 2); \quad \sigma_{12} = \varepsilon^2 h z + \varepsilon s;$$

– нетангенциальные касательные напряжения:

$$\sigma_{13} = (X_{1+} + X_{1-}) \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} (X_{1+} - X_{1-}) z + \tau_{13} (1 - z^2) (1, 2); \quad (38)$$

– нетангенциальное нормальное напряжение:

$$\begin{aligned} \sigma_3 = & -\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{13} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{23} \right) \left(z - \frac{z^3}{3} \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2} \right) z + \varepsilon^3 \left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_1} \right) \frac{z^2 - 1}{2} - \\ & - \frac{1}{2} (Z_+ + Z_-) - \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \times \\ & \times \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} + X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} + X_{2-}) \right] \frac{z^3}{6} + \\ & + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_{1+} - X_{1-}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (X_{2+} - X_{2-}) \right] \times \\ & \times \frac{1 - z^2}{2}. \end{aligned}$$

Эти уравнения соответствуют классическим гипотезам Кирхгоффа при выборе величин начального приближения и выделены из общих уравнений теории упругости путем отбрасывания величин порядка ε по сравнению с главными и выполнения граничных условий на лицевых поверхностях оболочки. В отличие от классической теории

здесь определены все искомые неизвестные исходной задачи в напряжениях и перемещениях, без введения понятия об осредненных по толщине усилиях и моментах. Однако известно, что для выполнения граничных условий на торцевых поверхностях, необходимо дополнительно учитывать поправку на сдвиг [7; 8; 13–22].

Заключение

Выведенные уравнения теории оболочек позволяют оценить погрешность классической теории. Для этого в записанных в безразмерной форме уравнениях выделен малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки и позволивший отбросить малые по сравнению с главными величины в исходных уравнениях трехмерной теории упругости. В выводимых ранее теориях в силу использования размерных уравнений такая возможность представляется сомнительной. Классические уравнения содержат в первых двух уравнениях равновесия перерезывающие усилия, а в формулах – компоненты нетангенциальной деформации-перемещения и члены с тангенциальными перемещениями, которые в практических задачах и учебниках отбрасываются как малые, что объясняется или отсутствием влияния на расчеты, или пологой оболочкой. Подобное имеет место по причине различной степени точности написания уравнений классической теории.

Рассматривая схему вычисления (26) как процесс, в котором слева вначале задается величина нулевого приближения, а справа вычисляется поправка к нему в виде величины первого приближения, можно заметить, что последняя имеет множитель ε^2 , т.е. поправка мала и убывает асимптотически вместе с малым параметром. Однако установить однозначно вид асимптотических разложений искомых неизвестных не представляется возможным без априорных соображений об изменчивости искомого НДС.

Легко заметить, что классические гипотезы используются при выборе величин начального приближения (17), и дальше к ним вычисляется поправка. Она, как правило, мала. Однако сам вывод методом простых итераций требует кроме начального приближения о недеформируемости нормали (чему соответствует w -процесс) задания начальной величины сдвига, соответствующего дополнению по Тимошенко – Рейсснеру. Трактовка классических гипотез и поправок Тимошенко – Рейсснера в качестве величин начального приближения (16) позволяет процесс вычислений неизвестных отнести к полубратному методу Сен-Венана,

модифицируя его до итерационного, и опереться на принцип сжатых отображений Банаха.

Отказ от использования классической гипотезы осреднения и вывод уравнений на основе принципа сжатых отображений приводят в случае сведения двумерной задачи к одномерной для полосы и трехмерной задачи к двумерной для пластины из композиционного материала к другим по сравнению с традиционными эффективным коэффициентам жесткости [21; 22]. Таким образом, в результате применения модифицированного полуобратного метода Сен-Венана – Пикара – Банаха дано приближенное решение пространственной задачи теории упругости путем сведения к двумерным разрешающим уравнениям для медленно меняющихся переменных, совпадающее с уравнениями равновесия классической теории оболочек.

Список литературы

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа – Лява в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 323–330.
3. Koiter W.T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells // Proc. IUTAM Symp. on the theory of thin elastic shells (Delft. 1959). Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960. Pp. 12–33.
4. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
5. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
6. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судопромгиз, 1962. 432 с.
7. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. Reissner E. On consistent first approximations in the general linear theory of thin elastic shells // Ing. arch. 1971. Vol. 40. Issue 6. Pp 402–419.
9. Başar Y., Krätzig W.B. Theory of shell structures, 2nd ed. Düsseldorf: VDI Verlag, 2001.
10. Зверяев Е.М. О соотношениях упругости в линейной теории тонких упругих оболочек // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 6. С. 1136–1138.
11. Рогачева Н.Н. О соотношениях упругости Рейсснера – Нахди // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1063–1071.
12. Васильев В.В. О преобразованиях Томсона – Тэта в классической теории пластин // МГТ. 2012. № 5. С. 98–107
13. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2018. № 83. 19 с. doi:10.20948/prepr-2018-83. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-83>
14. Зверяев Е.М. Непротиворечивая теория оболочек // ПММ. 2016. Т. 80. Вып.5. С. 590–596.
15. Зверяев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2016. № 33. 25 с. doi:10.20948/prepr-2016-33. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33>
16. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.
17. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321.
18. Зверяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 1–22. URL: <http://www.mai.ru/upload/iblock/8b4/8b4dff2e41bb50a03dfe08744877a2cf.pdf>
19. Friedrichs K.O. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates // Proc. Symp. Appl. Math. 1950. 3. Pp. 117–124.
20. Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure Appl. Math. 1961. 14. Pp. 1–33.
21. Зверяев Е.М. Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. С. 1–27. URL: <http://www.mai.ru/upload/iblock/876/8767af08970b8e67ef0a1b71d2763cd0.pdf>
22. Зверяев Е.М. Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2014. № 95. 29 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2014/prepr2014_95.pdf

Об авторе

Зверяев Евгений Михайлович – доктор технических наук, профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Московский авиационный институт. *Область научных интересов:* статика, динамика, устойчивость тонкостенных систем, уравнения с малым параметром в частных производных. *Контактная информация:* e-mail – zveriaev@mail.ru

Для цитирования

Зверяев Е.М. Выделение согласованных уравнений классической теории оболочек из трехмерных уравнений теории упругости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 135–148. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148

Extraction of consistent shell theory equations from 3D theory of elasticity

Evgeny M. Zveryaev

Keldysh Institute of Applied Mathematics, 4 Miusskaya Sq., Moscow, 125047, Russian Federation

Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation

Received: January 18, 2019

Revised: March 20, 2019

Accepted: March 22, 2019

Keywords:

theory of elasticity;
consistent theory of shells;
Saint-Venant method;
principle of compressed mappings

Abstract

Aims of research. Derivation of consistent equations of the theory of thin elastic shells without hypotheses and stress averaging over the shell thickness.

Methods. Using the iterative method of Saint-Venant – Picard – Banach, the three-dimensional problem of the theory of elasticity is solved without any hypotheses. By the principle of compressed mappings, the solution converges asymptotically, regardless of the choice of the values of the initial approximation.

Results. A method has been developed for integrating the spatial equations of the theory of elasticity in curvilinear coordinates for a thin shell. The presence of a small parameter allows the integration of the system of equations in such a way that the output data of the first operator is input to the next operator, etc., dividing the original complex operator into a sequence of simple integrable Picard type operators. Each equation contains terms of only one asymptotic order.

References

1. Love A.E.H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Univ. Press., 674.
2. Novozhilov V.V., Finkel'shtejn R.M. (1943). O pogreshnosti gipotez Kirchgofa – Lyava v teorii obolochek [On the error of Kirchhoff – Love hypotheses in the theory of shells]. *PMM*, 7(5), 323–330. (In Russ.)
3. Koiter W.T. (1960). A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. *Proc. IUTAM Symp. On the theory of thin elastic shells (Delft. 1959)*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 12–33.
4. Vlasov V.Z. (1949). *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozheniya v tekhnike [The General Shells Theory and its Application in Technology]*. Moscow: Gostekhizdat Publ., 784. (In Russ.)
5. Lur'e A.I. (1947). *Statika tonkostennykh uprugih obolochek [Statics of thin-walled elastic shells]*. Moscow: Gostekhizdat Publ., 252. (In Russ.)
6. Novozhilov V.V. (1964). *Thin shell theory*. 2nd ed. The Netherlands, 432.
7. Gol'denvejzer A.L. (1976). *Teoriya tonkih uprugih obolochek [Theory of Elastic Thin Shells]*. Moscow: Nauka Publ., 512.
8. Reissner E. (1971). On consistent first approximations in the general linear theory of thin elastic shells. *Ing. arch*, 40(6), 402–419. doi.org/10.1007/BF00533975
9. Başar Y., Krätzig W.B. (2001). *Theory of shell structures*. 2nd ed. Düsseldorf: VDI Verlag.
10. Zveriaev E.M. (1970). On elasticity relationships in the linear theory of thin elastic shells. *Prikl. Mat. Mekh.*, 34(6), 1136–1138.
11. Rogachova N.N. (1974). On the Reissner – Naghdi elasticity relationship. *Prikl. Mat. Mekh.*, 38(6), 1063–1071.
12. Vasil'ev V.V. (2012). O preobrazovaniyah Tomsona – Tehta v klassicheskoy teorii plastin [Kirchhoff and Thomson – Tait Transformations in the Classical Theory of Plates]. *MTT*, (5), 98–107. (In Russ.)
13. Zveryaev E.M. (2018). Metod Sen-Venana – Pikara – Banaha integrirvaniya uravnenij v chastnykh proizvodnykh s malym parametrom [The Saint-Venant – Picard – Banach method of integrating equations in partial derivatives with a small parameter]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha*, (83), 19. doi:10.20948/prepr-2018-83. (In Russ.)
14. Zveryaev Ye.M. (2016). Neprotivorechivaya teoriya obolochek [A consistent theory of thin elastic shells]. *Prikl. Mat. Mekh.*, 80(5), 580–596. (In Russ.)
15. Zveryaev E.M. (2016). Konstruktivnaya teoriya tonkih uprugih obolochek [Constructive theory of thin elastic shell]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha*, (33), 25. doi:10.20948/prepr-2016-33. (In Russ.)
16. Zveryayev Ye.M. (2008). Analiz gipotez, ispol'zuemykh pri postroenii teorii balok i plit [Analysis of hypotheses used when constricting the theory of beams and plates]. *Prikl. Mat. Mekh.*, 67(3), 472–481. (In Russ.)
17. Zveryayev Ye.M., Makarov G.I. (2008). Obschii metod postroeniya teorii tipa Timoshenko [A general method for constructing Timoshenko-type theories]. *Prikl. Mat. Mekh.*, 72(2) 308–321. (In Russ.)
18. Zveryaev E.M. (2014). Vydelenie uravnenij tipa Timoshenko iz prostranstvennykh uravnenij teorii uprugosti dlya plastiny na osnove principa szhatyh otobrazhenij [Isolation of type Timoshenko equations from spatial theory elasticity plate equations on the base contraction mapping principle]. *Trudy MAI*, (78), 1–22. <http://www.mai.ru/upload/iblock/8b4/8b4dff2e41bb50a03dfe08744877a2c.f.pdf>. (In Russ.)

19. Friedrichs K.O. (1950). Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. *Poc. Symp. Appl. Math.*, (3), 117–124.

20. Friedrichs K.O., Dressler R.F. (1961). A boundary-layer theory for elastic plates. *Comm. Pure Appl. Math.*, (14), 1–33.

21. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. (2015). Iteracionnaya traktovka poluobratnogo metoda Sen-Venana pri postroenii uravnenij tonkostennyh ehlementov konstrukcij iz kompozicionnogo materiala [Iterative interpretation of Saint-Venant semi-inverse method for construction of composite material thin-walled structural elements equations]. *Trudy MAI*, (79), 1–27. <http://www.mai.ru/upload/iblock/876/8767af08970b8e67ef0a1b71d2763cd0.pdf>. (In Russ.)

22. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. (2014). Svedenie trekhmernykh uravnenij NDS plastiny iz kompozicionnogo materiala k dvumernym na baze principa szhatyh otobrazhenij [Reduction 3D equations of composite plate to 2D

equations on base of mapping contraction principle]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha*, (95), 29. http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf. (In Russ.)

About the author

Evgeny M. Zveryaev – Doctor of Technical Sciences, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University). *Research interests*: statics, dynamics, stability of thin-walled systems, equations with a small parameter in partial derivatives. *Contact*: e-mail – zveriaev@mail.ru

For citation

Zveryaev E.M. (2019). Extraction of consistent shell theory equations from 3D theory of elasticity. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 135–148. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148

UDC 539.3

RESEARCH PAPER

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-149-157

Unloading wave in the cylindrical network from nonlinear elastic fibers

Mexseti A. Rustamova

Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan, 9 B. Vahabzadeh St., Baku, AZ 1143, Republic of Azerbaijan

Received: January 30, 2019

Revised: February 27, 2019

Accepted: March 16, 2019

Keywords:

nonlinear elastic fibers;
 wave of unloading;
 cylindrical network;
 continuous waves

Abstract

Aims of research. Investigation of a wave of unloading in a cylindrical network of nonlinear elastic fibers. Given the many options for wave propagation in cylindrical networks, an attempt is made to solve the problem of continuous waves.

Methods. The movement of the network in the axial direction is considered. To a basis of a cylindrical system are accepted: an individual vector \vec{i} parallel to a cylinder axis, \vec{j} – an individual vector of a tangent to cross-section section of the cylinder, \vec{k} – an individual vector perpendicular to the previous ones, x – is the coordinate in the direction of the axis of the cylinder, y – is the length of an arc of the circumference of the cylinder. The problem reduces to a hyperbolic system of equations under appropriate conditions. Since the wave speed increases when the net is stretched, the stretch wave will obviously be discontinuous. In order to study continuous waves, the problem of wave propagation is solved when unloading a pre-stretched cylinder from a nonlinear basis. The problem is solved by the method of characteristics.

Results. The results are illustrated with calculations and can be used at calculations of various flexible pipes, including flexible drilling.

Introduction

The equation of movement of [1] networks in space has a form, constructed on the basis of the theory of Rahmatullin. In articles [2–7] waves in networks in rectangular Cartesian system of coordinates were investigated. Here waves in a cylindrical system of co-ordinates are investigated. Obviously, during stretching a cylindrical network is going to be narrowed. Being placed on a rigid pipe during motion, it will be exposed to operate a force of a friction between it and a pipe. In order to avoid it, the network is replaced on a screw pipe of a special profile. Such pipes are applied, in particular at the process of drilling of chinks. In practice, these phenomena can take place in the flexible pipelines.

Aim is research of waves in cylindrical sets. Considering sets of variants of distribution of waves

in cylindrical networks, it is attempted to solve a problem about continuous waves.

1. The general equations of movement of a network

The equation of motion of the network, taking into account the reaction of the supporting body and the geometric relations will have the form, in contrast to [2].

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1 \bar{\tau}_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2 \bar{\tau}_2) = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} + p \bar{n};$$

$$(1 + e_1) \bar{\tau}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1}; \quad (1 + e_2) \bar{\tau}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2}. \quad (1)$$

Here, \bar{r} – radius vector of a particle of a network; p – power of a reaction of the cylinder; e_1 , e_2 – the relative lengthening, corresponding threads;

© Rustamova M.A., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

s_1, s_2 – Lagrange coordinates of particles of threads; σ_1 and σ_2 the conditional pressure defined as the sum of tension of separate threads of one family (crossing a site of a thread of other family), carried to an initial length of a considered element.

Such distribution of weight and efforts is admissible at sufficient dense network, $\rho_1 + \rho_2$ – weights of elements of the network, having corresponding directions on area unit in an initial condition, τ_1, τ_2 individual vectors tangents to threads, \vec{n} – a normal to a surface of the cylindrical basis.

2. Coordinate system

To a basis of a cylindrical system are accepted (figure 1): an individual vector \vec{i} parallel to a cylinder axis, \vec{j} an individual vector of a tangent to cross-section section of the cylinder, \vec{k} an individual vector perpendicular to the previous ones, x – is the coordinate in the direction of the axis of the cylinder, y – is the length of an arc of the circumference of the cylinder. Then

$$\vec{\tau}_1 = \cos\gamma_1 \vec{i} + \sin\gamma_1 \vec{j}; \quad \vec{\tau}_2 = \cos\gamma_2 \vec{i} + \sin\gamma_2 \vec{j}, \quad (2)$$

where $\gamma_{1,2}$ – corners of threads formed with a cylinder axis.

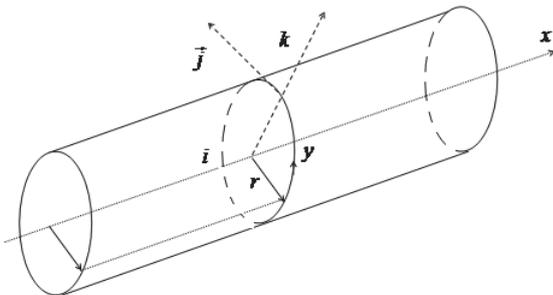


Figure 1. Coordinate system

Derivatives:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial s_1} &= \cos\gamma_1 \frac{\partial \vec{i}}{\partial s_1} + \vec{i} \frac{\partial(\cos\gamma_1)}{\partial s_1} + \\ &+ \sin\gamma_1 \frac{\partial \vec{j}}{\partial s_1} + \vec{j} \frac{\partial(\sin\gamma_1)}{\partial s_1}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial s_2} &= \cos\gamma_2 \frac{\partial \vec{i}}{\partial s_2} + \vec{i} \frac{\partial(\cos\gamma_2)}{\partial s_2} + \\ &+ \sin\gamma_2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial s_2} + \vec{j} \frac{\partial(\sin\gamma_2)}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

Considering

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{i}}{\partial s_1} = \frac{\partial \vec{i}}{\partial s_2} &= 0; \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial s_1} = -\frac{\sin\gamma_1}{r} \vec{k}; \\ \frac{\partial \vec{j}}{\partial s_2} &= -\frac{\sin\gamma_2}{r} \vec{k}. \end{aligned}$$

From (3) we will get

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial s_1} &= \frac{\partial(\cos\gamma_1)}{\partial s_1} \vec{i} - \frac{(\sin\gamma_1)^2}{r} \vec{k} + \frac{\partial(\sin\gamma_1)}{\partial s_1} \vec{j}. \quad (4) \\ \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial s_2} &= \frac{\partial(\cos\gamma_2)}{\partial s_2} \vec{i} - \frac{(\sin\gamma_2)^2}{r} \vec{k} + \frac{\partial(\sin\gamma_2)}{\partial s_2} \vec{j}. \end{aligned}$$

Also considering $\vec{r} = x\vec{i} + r\vec{k}$ we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \vec{i} + r \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \vec{i} + r\omega \vec{j}; \quad (5) \\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{i} + r \frac{\partial \omega}{\partial t} \vec{j} + r\omega \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \end{aligned}$$

or

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{i} + r\epsilon \vec{j} + r\omega^2 \vec{k},$$

where ω – angular speed; ϵ – angular acceleration.

3. The equations of movement of a cylindrical network

Having substituted (4) and (5) in (1) we will get

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} (\sigma_1 \cos\gamma_1) \vec{i} - \frac{\sigma_1}{r} (\sin\gamma_1)^2 \vec{k} + \frac{\partial}{\partial s_1} (\sigma_1 \sin\gamma_1) \vec{j} + \\ + \frac{\partial}{\partial s_2} (\sigma_2 \cos\gamma_2) \vec{i} - \frac{\sigma_2}{r} (\sin\gamma_2)^2 \vec{k} + \frac{\partial}{\partial s_2} (\sigma_2 \sin\gamma_2) \vec{j} = \\ = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{i} + (\rho_1 + \rho_2) r \epsilon \vec{j} + (\rho_1 + \rho_2) r \omega^2 \vec{k} + p \vec{n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1 \cos \gamma_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2 \cos \gamma_2) &= (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial s_1}(\sigma_1 \sin \gamma_1) + \frac{\partial}{\partial s_2}(\sigma_2 \sin \gamma_2) &= (\rho_1 + \rho_2) r \varepsilon; \\ -\frac{\sigma_1}{r}(\sin \gamma_1)^2 - \frac{\sigma_2}{r}(\sin \gamma_2)^2 &= (\rho_1 + \rho_2) r \omega^2 + p. \end{aligned} \quad (6)$$

Next is the symmetrical arrangement of the right and left fibers. Then the equations (6), considering $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$, $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ will become:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial s}(\sigma \cos \gamma) &= (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \\ 2 \frac{\sigma}{r}(\sin \gamma)^2 &= -p. \end{aligned} \quad (7)$$

Geometrical correlations

Let's define a derivative of a radius-vector \vec{r} with respect to s . Having designated $\vec{r} = x\vec{i} + r\vec{k}$.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \vec{i} + \frac{\partial k}{\partial s} r = \frac{\partial x}{\partial s} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \vec{j}.$$

Where according to (1) and (3)

$$(1 + e_1) \cos \gamma_1 \vec{i} + (1 + e_1) \sin \gamma_1 \vec{j} = \frac{\partial r}{\partial s_1};$$

$$(1 + e_2) \cos \gamma_2 \vec{i} + (1 + e_2) \sin \gamma_2 \vec{j} = \frac{\partial r}{\partial s_2};$$

$$(1 + e) \cos \gamma = \frac{\partial x}{\partial s}; \quad (8)$$

$$(1 + e) \sin \gamma = \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (9)$$

As the network does not rotate, then $y = \text{const}$.

$$\frac{\partial((1 + e) \sin \gamma)}{\partial t} = 0$$

or

$$(1 + e_0) \sin \gamma_0 = (1 + e) \sin \gamma, \quad (10)$$

where e_0 also γ_0 are values of parameters in an initial condition.

Using (8) of the first equation (6) it is possible to write:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{1}{1 + e} \frac{\partial x}{\partial s} + \sigma \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1 + e} \frac{\partial x}{\partial s} \right) &= (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{1 + e} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} - \sigma \frac{1}{(1 + e)^2} \frac{\partial e}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\sigma}{1 + e} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} &= \\ = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \\ \frac{\sigma'}{1 + e} \frac{\partial e}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} - \sigma \frac{1}{(1 + e)^2} \frac{\partial e}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\sigma}{1 + e} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} &= \\ = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \\ \left(\frac{\sigma'}{1 + e} - \frac{\sigma}{(1 + e)^2} \right) \frac{1}{1 + e} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \frac{\sigma}{1 + e} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} &= \\ = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

From (11) we will get the following equation:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\sigma'}{(1 + e)^2} - \frac{\sigma}{(1 + e)^3} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \frac{\sigma}{1 + e} \right] \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} &= \\ = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Last equation represents quasilinear equation in partial derivatives.

$$a = \sqrt{\left(\frac{\sigma'}{(1 + e)^2} - \frac{\sigma}{(1 + e)^3} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \frac{\sigma}{1 + e}}.$$

$$\text{Here } e = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + (1 + e_0) \sin \gamma_0} - 1; \quad \varepsilon = \frac{\partial x}{\partial s};$$

$\sigma \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)$ it is set.

If we take σ, σ' in the following way

$$\sigma = \alpha \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2; \quad \sigma' = 2\alpha \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right), \text{ we get the above given plot.}$$

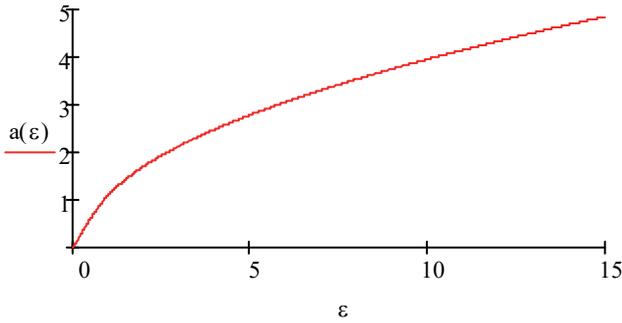


Figure 2. The graph for dependence between quantities ε and $a(\varepsilon)$

Let's consider another case.

Flat nonlinear elastic, in other words,

$$\sigma = \alpha_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \alpha_2 \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2, \text{ system (8), (9) and (10) can}$$

be reduced to one quasilinear equation of the second order.

From (6) follows

$$2 \cdot \frac{\partial}{\partial S} (\sigma \cos \gamma) = (\rho_1 + \rho_2) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \quad (13)$$

$$2 \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \alpha_2 \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right) \cos \gamma = (\rho_1 + \rho_2) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2};$$

$$2 \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(\alpha_1 \cdot \cos \gamma \frac{\partial x}{\partial s} \right) + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(\alpha_2 \cdot \cos \gamma \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right) =$$

$$= (\rho_1 + \rho_2) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2};$$

$$2 \cdot \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial \cos \gamma}{\partial s} + 2 \cdot \alpha_1 \cos \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} +$$

$$+ 2 \cdot \alpha_2 \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial \cos \gamma}{\partial S} + 4 \cdot \alpha_2 \cos \gamma \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} =$$

$$= (\rho_1 + \rho_2) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (14)$$

From (8)

$$\cos \gamma = \frac{1}{1+e} \frac{\partial x}{\partial s}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \cos \gamma}{\partial S} = -\frac{1}{(1+e)^2} \frac{\partial e}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}. \quad (16)$$

From (8) and (10)

$$(1+e)^2 \cos^2 \gamma = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2};$$

$$(1+e_0)^2 \sin^2 \gamma_0 = (1+e)^2 \sin^2 \gamma;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial S^2} + (1+e_0)^2 \sin^2 \gamma_0 = (1+e)^2. \quad (17)$$

From (17)

$$2(1+e) \frac{\partial e}{\partial s} = 2 \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$$

or

$$\frac{\partial e}{\partial s} = \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}. \quad (18)$$

Using (15), (16) and (18) in (14) we will get

$$\alpha_1 \left(\frac{\partial x}{\partial s} \left(-\frac{1}{(1+e)^3} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{1}{1+e} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) + \frac{1}{1+e} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) +$$

$$+ \alpha_2 \left(\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \left(-\frac{1}{(1+e)^3} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{1}{1+e} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) + \frac{2}{1+e} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) =$$

$$= \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2};$$

$$\alpha_1 \left(-\frac{1}{(1+e)^3} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{2}{1+e} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) +$$

$$+ \alpha_2 \left(-\frac{1}{(1+e)^3} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^4 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{3}{1+e} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) =$$

$$= \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

$$\text{Here, } a_0^2 = \frac{2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Last equation can be represented in the above given form:

$$\left[-\frac{1}{(1+e)^3} \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 + \left(\frac{1}{(1+e)} \left(2\alpha_1 + 3\alpha_2 \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right] \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} =$$

$$= \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

$$a \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = a_0 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (19)$$

The last equation is a quasilinear partial differential equation.

The coefficient at $\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$ in (19) increases with the growth of $\frac{\partial x}{\partial s}$, therefore speed of waves with deformation growth increases, conducts to the formation of shock waves [8].

Continuous waves will occur when unloading a pre-stretched cylinder. Here, too, the method of characteristics is used (figure 3).

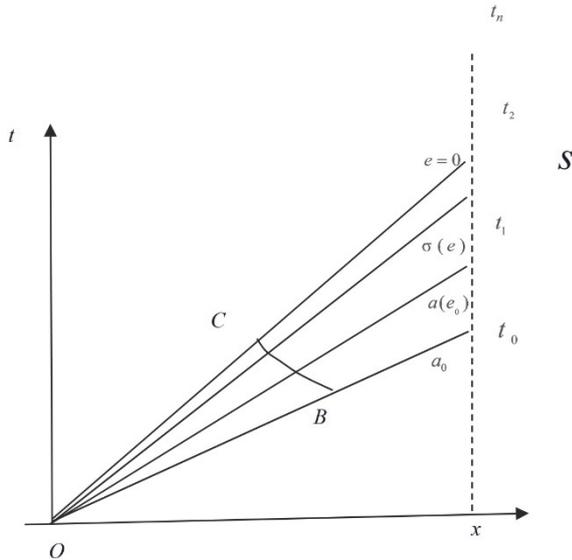


Figure 3. The method of characteristics

From a point 0 wave extends with the maximum speed $a(e_0)$ as waves with smaller deformation extend with smaller speed and will not influence a condition at the front.

Let the cylinder to locate in the stretched condition e_0 .

On border the cylinder unloads, in other words, its end moves with a speed of \mathcal{G} .

Characteristics of the equation (19) have a form:

$$ds = adt. \tag{20}$$

$$ds = -adt. \tag{21}$$

Conditions on characteristics

$$dx_t = adx_s \left(\frac{\partial x}{\partial s} = x_s, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = x_t \right) \tag{22}$$

and

$$dx_t = -adx_s; \tag{23}$$

$$a = a_0 \sqrt{\left[-\frac{1}{(1+e)^3} \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 + \left(\frac{1}{(1+e)} \left(2\alpha_1 + 3\alpha_2 \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} \right) \right]}.$$

The front of an unloading wave moves with a speed $a(e_0)$. In the field of SOA (figure 2) a rest condition. From a condition on negative characteristic BC follows $x_t = -\int_{x_s^0}^{x_s} adx_s$; differentiating in a direction of the positive characteristic we have $dx_t = -adx_s$.

Comparing with (22) we get $x_t = \text{const}$, $x_s = \text{const}$. In other words, on positive characteristics x_t , x_s are constant.

From (20) we have, considering a constancy x_s on the characteristic

$$x = a(t - t_0). \tag{24}$$

At $x = 0$ we choose t_0 and define ε .

From (24)

$$t_0 = t - \frac{x}{a}$$

and accordingly

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0(t_0)$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \left(t - \frac{x}{a} \right). \tag{25}$$

Let's consider an example: $\gamma_0 = \frac{\pi}{4}$ and

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{6}, \quad e_0 = 0,1; \quad a_0 = 5000 \text{ m/c.}$$

The plot of $(a(x_s) = a(\varepsilon)(x_s = \varepsilon)$, $f(\varepsilon)$ is shown on figure 3 and the plot of $p(\varepsilon)$, $m(\varepsilon)$ is manifested on figure 4.

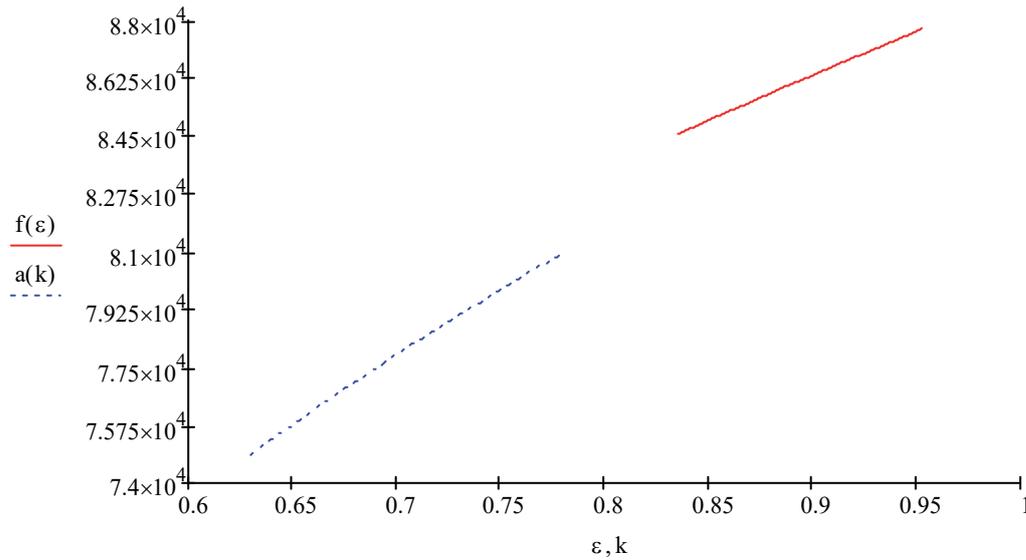


Figure. 4 The graph for dependence between quantities ε, k and $f(\varepsilon), a(k)$:

$$\left(\gamma_0 = \frac{\pi}{4}; \quad e_0 = 0, 1; \quad a_0 = 5000 \text{ m/c} \right)$$

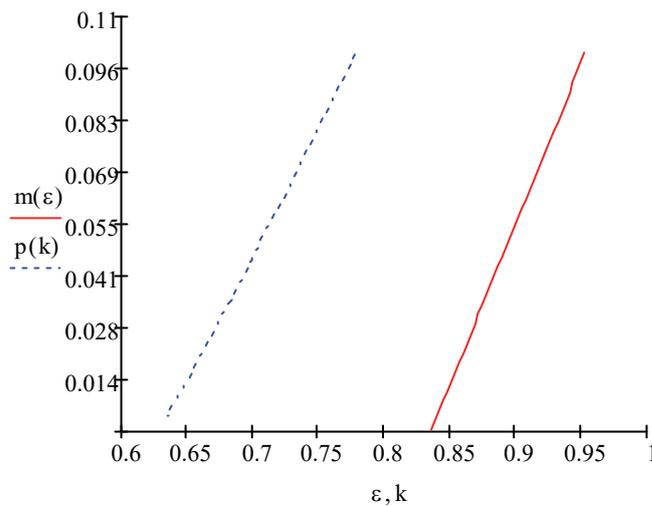


Figure. 5. The graph for dependence between quantities ε, k and $f(\varepsilon), a(k)$:

$$\left(\gamma_0 = \frac{\pi}{6}; \quad e_0 = 0, 1; \quad a_0 = 5000 \text{ m/c} \right)$$

Let the cylinder on border $s = 0$ unload with a speed $v(t)$.

From (25)

$$\mathcal{G}(t) = - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} a(x_s) dx_s. \quad (26)$$

Where \mathcal{G} is a function of the top limit of an integral.

The equation (26) is the equation for defining an axial deformation of a network $x_s = \varepsilon$ (unlike deformation of fibers e).

Approximately having presented integral (19) in the form of the sum, we have:

$$\mathcal{G} = - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} a(\eta) d\eta; \quad (27)$$

$$\mathcal{G} = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} a(\eta) d\eta;$$

$$\mathcal{G}_0 = a(\varepsilon_0) \Delta\varepsilon;$$

$$\mathcal{G}_1 = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1)) \cdot \Delta\varepsilon;$$

$$\mathcal{G}_2 = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1) + a(\varepsilon_2)) \cdot \Delta\varepsilon;$$

.....

$$\mathcal{G}_n = (a(\varepsilon_0) + a(\varepsilon_1) + \dots + a(\varepsilon_n)) \cdot \Delta\varepsilon$$

or $\mathcal{G} = f(\varepsilon)$

inverse relationship $\varepsilon \rightarrow \mathcal{G}$ on border. As positive characteristics are rectilinear, it is possible to define ε in all area of movement. Functional dependence of speed of movement – speed of a wave and deformation for the given example is presented in the tables 1 and 2.

$$\mathcal{G}_n = f(\varepsilon_0 - \varepsilon). \tag{28}$$

Table 1

Calculated values of the utilized parameters (for $\gamma_0 = \frac{\pi}{4}$)

ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	ε_{11}
0.778	0.770	0.762	0.754	0.746	0.738	0.730	0.722	0.714	0.706	0.698	0.690
$e(\varepsilon_0)$	$e(\varepsilon_1)$	$e(\varepsilon_2)$	$e(\varepsilon_3)$	$e(\varepsilon_4)$	$e(\varepsilon_5)$	$e(\varepsilon_6)$	$e(\varepsilon_7)$	$e(\varepsilon_8)$	$e(\varepsilon_9)$	$e(\varepsilon_{10})$	$e(\varepsilon_{11})$
0.1	0.094	0.089	0.083	0.078	0.072	0.067	0.061	0.056	0.050	0.045	0.040
\mathcal{G}_0	\mathcal{G}_1	\mathcal{G}_2	\mathcal{G}_3	\mathcal{G}_4	\mathcal{G}_5	\mathcal{G}_6	\mathcal{G}_7	\mathcal{G}_8	\mathcal{G}_9	\mathcal{G}_{10}	\mathcal{G}_{11}
$747 \cdot 10^3$	$1.493 \cdot 10^3$	$2.237 \cdot 10^3$	$2.980 \cdot 10^3$	$3.721 \cdot 10^3$	$4.461 \cdot 10^3$	$5.199 \cdot 10^3$	$5.936 \cdot 10^3$	$6.672 \cdot 10^3$	$7.406 \cdot 10^3$	$8.139 \cdot 10^3$	$8.87 \cdot 10^3$
$a(\varepsilon_0)$	$a(\varepsilon_1)$	$a(\varepsilon_2)$	$a(\varepsilon_3)$	$a(\varepsilon_4)$	$a(\varepsilon_5)$	$a(\varepsilon_6)$	$a(\varepsilon_7)$	$a(\varepsilon_8)$	$a(\varepsilon_9)$	$a(\varepsilon_{10})$	$a(\varepsilon_{11})$
$7.753 \cdot 10^4$	$7.732 \cdot 10^4$	$7.711 \cdot 10^4$	$7.689 \cdot 10^4$	$7.667 \cdot 10^4$	$7.644 \cdot 10^4$	$7.621 \cdot 10^4$	$7.598 \cdot 10^4$	$7.575 \cdot 10^4$	$7.551 \cdot 10^4$	$7.526 \cdot 10^4$	$7.502 \cdot 10^4$

Table 2

Calculated values of the utilized parameters (for $\gamma_0 = \frac{\pi}{6}$)

ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	ε_{11}
0.953	0.950	0.947	0.944	0.941	0.938	0.935	0.932	0.929	0.926	0.923	0.920
$e(\varepsilon_0)$	$e(\varepsilon_1)$	$e(\varepsilon_2)$	$e(\varepsilon_3)$	$e(\varepsilon_4)$	$e(\varepsilon_5)$	$e(\varepsilon_6)$	$e(\varepsilon_7)$	$e(\varepsilon_8)$	$e(\varepsilon_9)$	$e(\varepsilon_{10})$	$e(\varepsilon_{11})$
0.230	0.228	0.225	0.223	0.221	0.219	0.216	0.214	0.212	0.209	0.207	0.205
\mathcal{G}_0	\mathcal{G}_1	\mathcal{G}_2	\mathcal{G}_3	\mathcal{G}_4	\mathcal{G}_5	\mathcal{G}_6	\mathcal{G}_7	\mathcal{G}_8	\mathcal{G}_9	\mathcal{G}_{10}	\mathcal{G}_{11}
866.7	$1.732 \cdot 10^3$	$2.597 \cdot 10^3$	$3.461 \cdot 10^3$	$4.324 \cdot 10^3$	$5.186 \cdot 10^3$	$6.048 \cdot 10^3$	$6.908 \cdot 10^3$	$7.767 \cdot 10^3$	$8.626 \cdot 10^3$	$9.483 \cdot 10^3$	$1.034 \cdot 10^3$
$a(\varepsilon_0)$	$a(\varepsilon_1)$	$a(\varepsilon_2)$	$a(\varepsilon_3)$	$a(\varepsilon_4)$	$a(\varepsilon_5)$	$a(\varepsilon_6)$	$a(\varepsilon_7)$	$a(\varepsilon_8)$	$a(\varepsilon_9)$	$a(\varepsilon_{10})$	$a(\varepsilon_{11})$
$8.667 \cdot 10^4$	$8.658 \cdot 10^4$	$8.648 \cdot 10^4$	$8.639 \cdot 10^4$	$8.630 \cdot 10^4$	$8.621 \cdot 10^4$	$8.612 \cdot 10^4$	$8.603 \cdot 10^4$	$8.593 \cdot 10^4$	$8.584 \cdot 10^4$	$8.575 \cdot 10^4$	$8.566 \cdot 10^4$

Conclusions

Setting on border speed of movement of the end of a network as a time function it is possible to define deformation as time function on the end of a network and to the above-stated form everywhere in area *SOt*.

For an example takes $\mathcal{G} = bt$ then $t = f(\varepsilon) / b$.

Depending on distribution of speed on the border, deformation of a constant on characteristics is defined (figures 4 and 5).

References

1. Rakhmatulin Kh.A. (1947). Ob udare po gibkoi niti [On hitting a flexible thread]. *Journal Appl. Math. Mech.*, *XII*, 379–382. (In Russ.)

2. Agalarov J.H., Efendiev A.N. (1988). The propagation of nonlinear waves in a structure consisting of net system. *Rakenteiden mekaniika seura ry. Finish association for structural mechanics*, 21(2), 3–10.

3. Agalarov J.H., Gulieva (Rustamova) M.A. (1998). Movement equation of a net in the plane. *Izv. AN Azerb. Mathematics and mechanics*, XVIII(2), 103–105

4. Seyfullayev A.I., Gulieva (Rustamova) M.A. (2000). To the solution of the equilibrium problem of the net. *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of AS of Azerbaijan*, (XIII), 144–147.

5. Agalarov D.G., Seyfullayev A.I., Gulieva (Rustamova) M.A. (2001). Chislennoe reshenie odnoj ploskoj zadachi ravnovesiya seti [The numerical decision of one flat problem of balance of a network]. *The Mechanic Engineering*, (1), 3–4. (In Russ.)

6. Gulieva (Rustamova) M.A. (2002). Tension of a rectangular net fastened from two adjacent sides. *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan*, XVI(XXIV), 156–160.

7. Agalarov J.H., Gulieva (Rustamova) M.A. (2002). Waves of strong breaks in nets. *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan*, XVII (XXV), 135–137.

8. Agalarov J.H. (1982). Issledovanie dvizheniya setej pri udare [Research of movement of networks at blow]. *News of Academy of Sciences of the Azerbaijan Soviet Socialist Republic. Series of Physicotechnical and Mathematical Sciences*, (6), 38–41. (In Russ.)

9. Barenblat G.I. (1953). O rasprostraneni mgnovennyh vozmushchenij v srede s nelinejnoj zavisimost'yu napryazhenij ot deformatsij [About distribution of instant indignations to the environment with nonlinear dependence of pressure on deformations]. *PMM*, XVII(4). (In Russ.)

About the author

Mexseti A. Rustamova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Associate Professor, Department of Wave Dynamics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. *Research interests*: the wave dynamics. *Contacts*: e-mail – mehsetir@gmail.com

For citation

Rustamova M.A. (2019). Unloading wave in the cylindrical network from nonlinear elastic fibers. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 149–157. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-149-157

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Волна разгрузки в цилиндрической сети из нелинейно упругих волокон

М.А. Рустамова

Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, Азербайджанская Республика, AZ1143, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9

Поступила в редакцию: 30 января 2019 г.

Доработана: 27 февраля 2019 г.

Принята к публикации: 16 марта 2019 г.

Ключевые слова:

нелинейно упругие волокна;
волна разгрузки;
цилиндрическая сеть;
непрерывные волны

Аннотация

Цели. Исследование волны разгрузки в цилиндрической сети из нелинейно упругих волокон. Предпринимается попытка решения задачи о непрерывных волнах с учетом множества вариантов распространения волн в цилиндрических сетях.

Методы. На основе уравнений движения сети в общем случае строятся уравнения движения цилиндрической сети. Рассматривается движение сети в осевом направлении. За базис цилиндрической системы принимаются: единичный вектор \vec{i} , параллельный оси цилиндра, \vec{j} — единичный вектор касательной к поперечному сечению цилиндра, \vec{k} — единичный вектор, перпендикулярный к предыдущим, x — координата в направлении оси цилиндра, y — длина дуги окружности цилиндра. Задача сводится к гиперболической системе уравнений при соответствующих условиях.

Поскольку при растяжении сети скорость волны увеличивается, то, очевидно, волна растяжения будет разрывной. С целью исследования непрерывных волн решается задача о распространении волн при разгрузке предварительно растянутого цилиндра из нелинейной основы. Задача решается методом характеристик.

Результаты. Результаты иллюстрируются расчетами и могут быть использованы при вычислении данных для различных гибких труб, в том числе буровых.

Список литературы

1. Рахматулин Х.А. Об ударе по гибкой нити // ПММ. 1947. Т. XII. С. 379–382.
2. Agalarov J.H., Efendiev A.N. The propagation of nonlinear waves in a structure consisting of net system // Rakenteiden mekaniika seura ry. Finish association for structural mechanics. 1988. Vol. 21. No. 2. Pp. 3–10.
3. Agalarov J.H., Gulieva (Rustamova) M.A. Movement equation of a net in the plane // Изв. АН Азерб. Сер. физ.-мат. наук. Математика и механика. 1998. Т. XVIII. № 2. С. 103–105.
4. Seyfullayev A.I., Gulieva (Rustamova) M.A. To the solution of the equilibrium problem of the net // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of AS of Azerbaijan. 2000. Vol. XIII. Pp. 144–147.
5. Agalarov D.G., Seyfullayev A.I., Gulieva (Rustamova) M.A. Численное решение одной плоской задачи равновесия сети // Механика машиностроение. 2001. № 1. С. 3–4.
6. Gulieva (Rustamova) M.A. Tension of a rectangular net fastened from two adjacent sides // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan. 2002. Vol. XVI (XXIV). Pp. 156–160.
7. Agalarov J.H., Gulieva (Rustamova) M.A. Waves of strong breaks in nets // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan. 2002. Vol. XVII (XXV). Pp. 135–137.
8. Agalarov D.G. Исследование движения сетей при ударе // Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Серия физико-технических и математических наук. 1982. № 6. С. 38–41.
9. Баренблат Г.И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций // ПММ. 1953. Т. XVII. № 4.

Об авторе

Рустамова Мехсети Акиф кызы – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, доцент, отдел волновой динамики, Институт математики и механики, Национальная академия наук Азербайджана. *Область научных интересов:* волновая динамика. *Контактная информация:* e-mail – mehsetir@gmail.com

Для цитирования

Rustamova M.A. Unloading wave in the cylindrical network from nonlinear elastic fibers (Волна разгрузки в цилиндрической сети из нелинейно упругих волокон) // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 149–157. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-149-157

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

UDC 626.624.04

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-158-168

RESEARCH PAPER

Static and dynamic analyses of the heightening of concrete face gravel dam Limon (Peru)

Yury P. Lyapichev

JSC “Institute Hydroproject”, 2 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation,
International Commission on Large Dams (ICOLD), 61 Avenue Kleber, Paris, 75016, France

Received: January 11, 2019

Revised: March 12, 2019

Accepted: March 22, 2019

Keywords:

concrete face gravel dam (CFGD);
nonlinear dynamic analysis;
ground acceleration;
earthquake accelerogram;
seepage analysis

Abstract

Aims of research. Expert validation of all proposed design solutions, development of necessary design solutions for the heightening of the Limon dam according to the ICOLD recommendations.

Methods. The detailed static and seismic (dynamic) analyses of stress-strain state and seepage of concrete face rockfill dam Limon (Peru) were performed using the advanced software FLAC-3D (USA) and PLAXIS 2D (Holland), respectively. The elasto-plastic model with Mohr – Coulomb criterion with variable shear angles of gravel and pebble zones of dam materials and its foundation soils was used in the static and seismic (dynamic) analyses of the dam. The dynamic nonlinear analyses of stress-strain state of two variants of Limon dam with full reservoir under Maximum Credible Earthquake (MCE) action of the Mar–Chile Earthquake accelerogram.

Results. On the base of these analyses the recommendations were developed for the project of the dam heightening from 43 up to 82 m before the initial filling of the reservoir. Expert validation of all proposed design solutions, necessary design solutions for the heightening of the Limon dam were developed according to the ICOLD recommendations.

Introduction

In July 2012 the Government of Lambayeque province (Peru) invited the author of this article as an international expert and member of ICOLD to perform the expert validation of design of the heightening of concrete face gravel dam (CFGD) Limon from 43 to 82 m. The dam is the main element of project “Proyecto Especial Olmos – Tinajones (PEOT)”. The hydraulic transfer scheme of

the project includes the TransAndes water-transfer 26 km long tunnel now completed. The 82 m high Limon CFGD is located on the right bank of Huancabamba river in remote region of Andes with very high seismicity. Maximum Credible Earthquake (MCE) with the return period $T = 5000$ years and $A_{\max} = 0.57g$ corresponds to ICOLD recommendations: Bulletins 148, 122, 154, 155, 167 [1–5] and was much more dangerous than adopted in 2009 Brazilian design: $A_{\max} = 0.39g$, $T \approx 1000$ years [6].

In the first PEOT project, developed by Hydroproject Institute (Moscow) in 1982, the variant of 82 m high Limon rockfill dam with clay core

© Lyapichev Yu.P., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

was adopted for the one-stage dam construction. But later due to the political and financial problems in Peru the project implementation was delayed for 20 years and was resumed as a two-stage construction by BOT scheme (build, operate and transfer to owner), proposed by Odebrecht construction company (Brazil). The company changed the Soviet design of one-stage 82 m high Limon traditional rockfill dam with clay core in favor of the two-stage CFGD (43 and 82 m high). The Soviet project of shore spillway remained unchanged.

1. Seepage analysis of Limon CFGD ($H = 82$ m) and its alluvial (40 m deep) foundation

Seepage analysis was made using the software PLAXIS 2D PlaxFlow (The Netherlands) [7].

In figure 1 is presented the geometry of dam with zones of materials and its 40 m deep alluvial strata of foundation in channel section 10–10' and their permeability coefficients. In figure 2 is presented the finite element mesh of dam and its foundation in channel section 10.

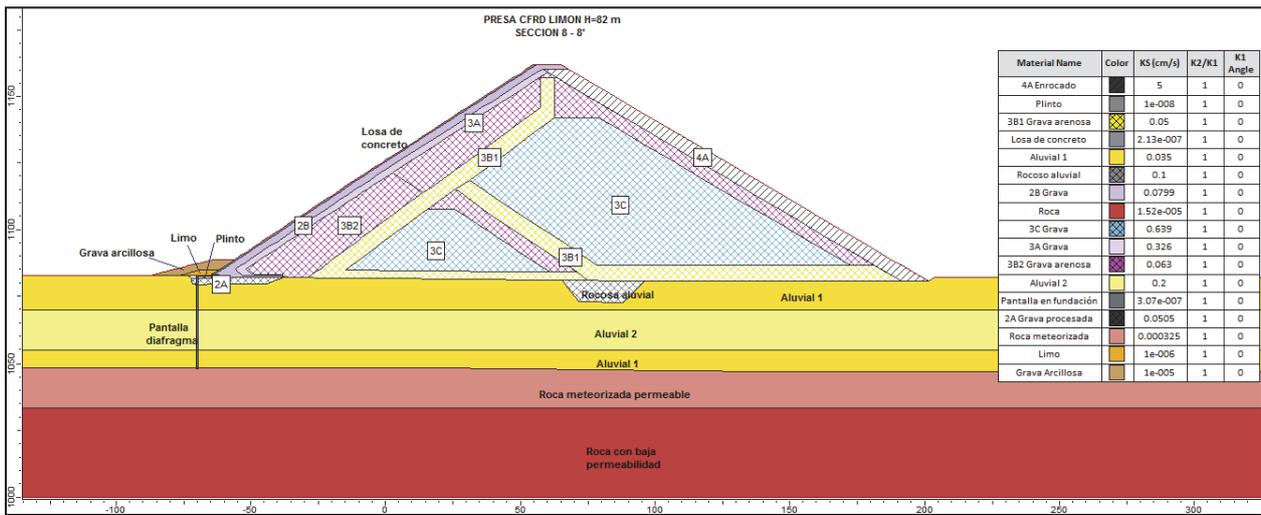


Figure 1. Zoning and permeability of soils of CFGD Limon $H = 82$ m and its foundation in channel section

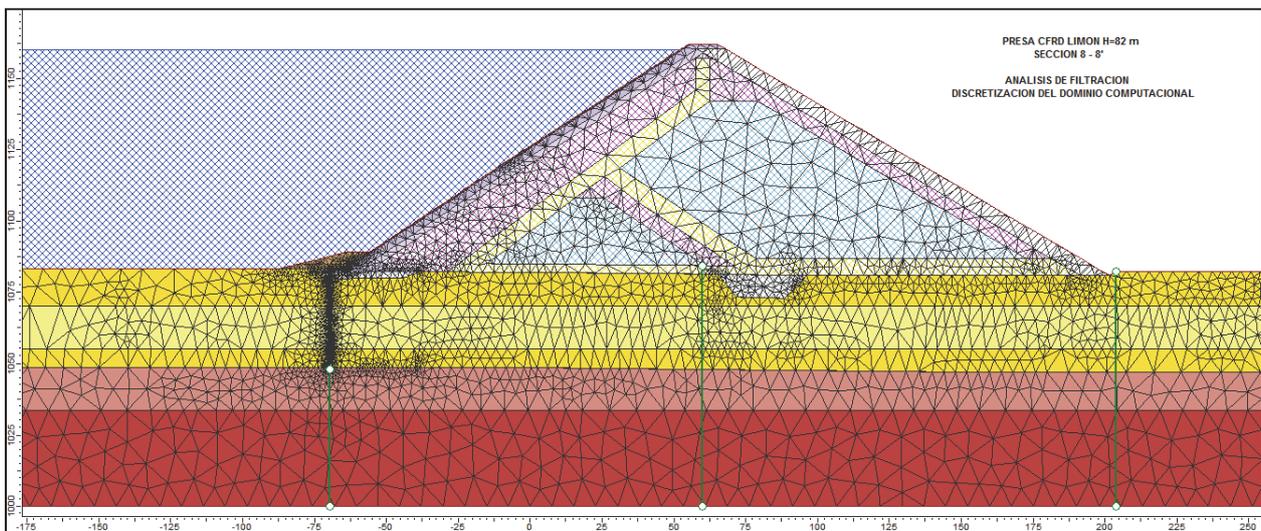


Figure 2. Finite element mesh of CFGD Limon $H = 82$ m and (40 m deep) foundation in channel section

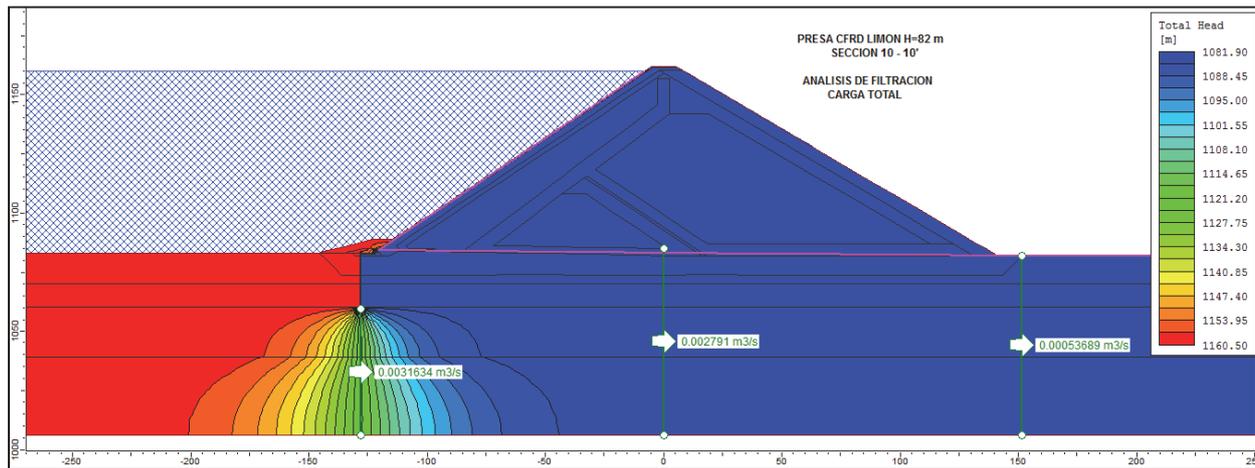


Figure 3. Equipotential lines of the total seepage heads in rock foundation below the concrete diaphragm

The results of the equipotential lines of total seepage heads in the rock foundation below the plastic concrete diaphragm are showed in figure 4, verifying the significant reduction of the total seepage and pressure heads in the rock foundation by effect of the plastic concrete diaphragm in foundation.

Table 1 shows the unit seepage flows in the dam foundation for construction stages of $H = 43$ m and

$H = 82$ m in sections 8–8' (in right abutment) and 10–10' (channel section) below the concrete diaphragm, in the central dam axis and below the dam toe. The relationship of unit seepage flows in section 8–8' and 10–10' shows that seepage flow in the foundation of the dam $H = 82$ m would be more than twice the seepage flow in the foundation of the dam $H = 43$ m.

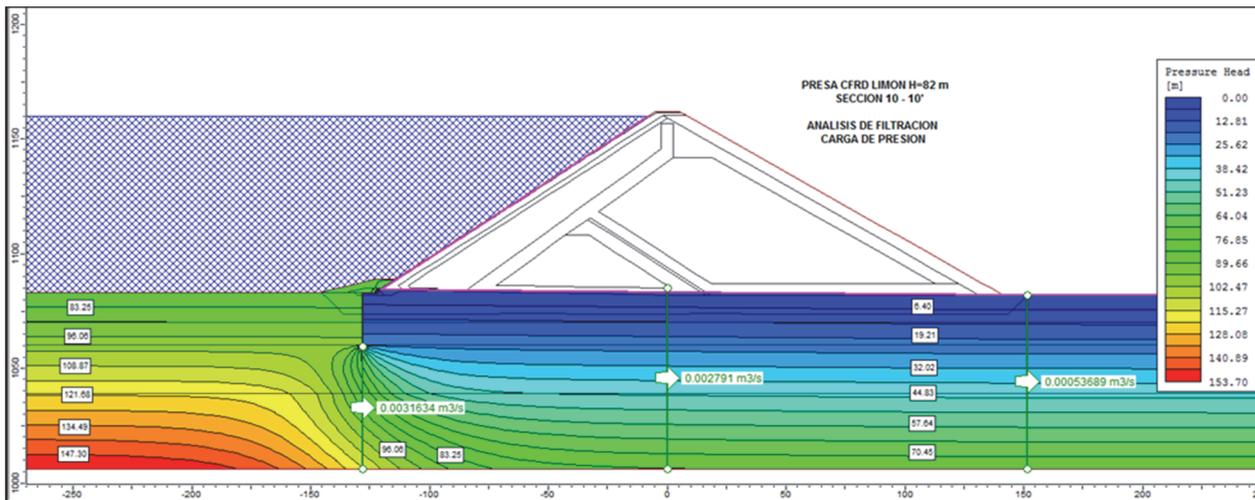


Figure 4. Equipotential lines of seepage pressure heads in rock foundation below the concrete diaphragm

Table 1

Unit seepage flows in the dam foundation for construction stages of $H = 43$ m and $H = 82$ m

Dam	Section	Unit seepage flows ($\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$)		
		Below concrete diaphragm	In axis of dam cross-section	Below toe of downstream slope
I Stage $H = 43$ m	8–8'	1.373×10^{-3}	1.37×10^{-3}	0.744×10^{-3}
	10–10'	1.495×10^{-3}	1.38×10^{-3}	0.652×10^{-3}
II Stage $H = 82$ m	8–8'	2.865×10^{-3}	2.759×10^{-3}	1.904×10^{-5}
	10–10'	3.163×10^{-3}	2.791×10^{-3}	0.536×10^{-3}
Relation Q_{H82}/Q_{H43}	8–8'	2.09	2.01	2.56
	10–10'	2.12	2.02	0.82

2. Seismic (dynamic) analysis of 82 m high Limon CFGD under MCE action ($A_{max} = 0.57 g$)

The main results of dynamic nonlinear analysis of stress-strain state of Limon CFGD ($H = 82 m$, adopted variant 2 with additional downstream rock-fill zone) with full reservoir under Maximum Credible Earthquake (MCE) action of the Mar–Chile Earthquake accelerogram are given in figures 5–17. The previous dynamic analysis of variant 1 (without this downstream rockfill zone) are omitted.

Another MCE of the Lima–Peru Earthquake accelerogram was considered also in the dynamic analysis, but its action was less dangerous than that of the Mar–Chile Earthquake accelerogram.

In figure 5 the accelerogram of Mar–Chile Earthquake normalized to the maximum acceleration of $A_{max} = 0.57g$ is shown. The Mar–Chile Earthquake with the return period $T = 5000$ years and $A_{max} = 0.57g$ corresponds to the recommendations of the ICOLD Bulletins [1–5] and was much more dangerous than adopted in previous (2009) Brazilian design: $A_{max} = 0.39 g$, $T \approx 1000$ years [6].

The static and dynamic analyses of stress-strain state of Limon CFGD ($H = 43$ and $82 m$) were made by FLAC-3D software (USA) [8], which was estimated in ICOLD Congress (Canada, 2003) [9] as one of the best software for dynamic analyses of large rockfill dams including CFRDs. The finite element

model of Limon CFGD ($H = 43$ and $82 m$) with its foundation is shown in the figure 6.

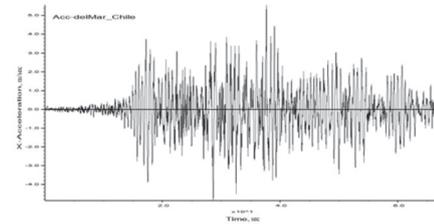


Figure 5. Accelerogram of Mar–Chile

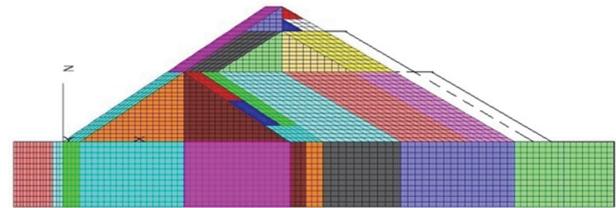


Figure 6. The finite element model of Limon CFGD

Earthquake normalized to $A_{max} = 0.57 g$ ($H = 43$ and $82 m$) with its foundation

Parameters of the elasto-plastic model with Mohr – Coulomb criterion for dam materials and foundation soils in static analyses of Limon CFGD ($H = 43$ and $82 m$) are given in table 2.

Table 2

Parameters of Mohr–Coulomb model in static analyses of Limon CFGD ($H = 43$ and $82 m$)

Numbers and names of zones of dam materials and foundation soils	Material or soils	Dry density and void ratio		Parameters of deformation			Parameters of shear strength of materials	
		$\gamma_{dr}, t/m^3$	n	E (MPa)	Angle of dilatancy ($^\circ$)	ν	C (MPa)	ψ ($^\circ$)
1st stage dam ($H = 43 m$)								
1, 3. Foundation	Alluvium	2.15	0.2	108	0	0.30	0	42
2. Diaphragm	Concrete	2.25	0	320	0	0.40	0.4	30
4. Plint slab	Concrete	2.5	0	20000	0	0.17	1.0	60
5. Embankment zone	Gravels and pebbles	2.2	0.15	168	0	0.30	0	46.5
6. Transition zone	Gravels	2.15	0.2	150	10	0.33	0	42
7. Transition zone	Sand	2.1	0.25	100	10	0.33	0	40
8. Concrete face	Concrete	2.5	0	20000	0	0.17	1.0	60
2nd stage dam ($H = 82 m$)								
9. Embankment zone	Gravels	2.2	0.15	168	0	0.30	0	46.5
10. Embankment zone	Gravels	2.2	0.15	168	0	0.30	0	46.5
11. Transition zone	Gravels	2.15	0.2	150	10	0.33	0	42
12. Transition zone	Sand	2.1	0.25	100	10	0.33	0	40
13. Concrete face	Concrete	2.5	0	20000	0	0.17	1.0	60
14. Downstream zone with 2 berms	Pebbles	2.1	0.25	150	0	0.30	0	46.5

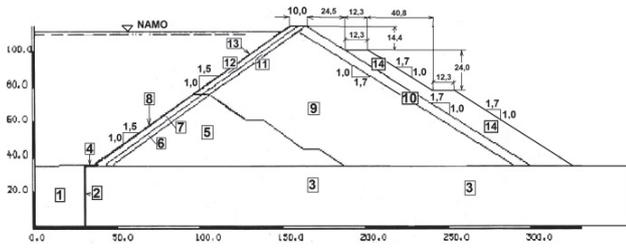


Figure 7. Scheme of CFGD Limon ($H = 42$ and 82 m) (adopted variant with $d-s$ zone 14 with 2 berms)

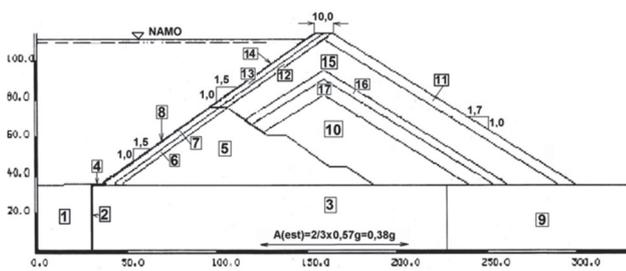


Figure 8. Scheme of CFGD Limon ($H = 43$ and 82 m) with variable shear angles of gravel and pebble zones 10–11, 15–17

Table 3

Values of shear angles of gravel and pebble zones 10–11, 15–17 depending on normal stresses

Normal stresses, σ_n , MPa	0.2	0.5	0.8	1.0	≥ 1.2
Shear angles ψ (°) of gravel and pebble zones	46.5	46.3	42.0	41.1	40.0

Scheme of zoning of CFGD Limon ($H = 82$ m) with variable shear angles of gravel and pebble zones 10–11, 15–17 (figure 8) was used in the pseudo-static analyses of the downstream slope stability under action of the acceleration in dam foundation $A_{hor} = 2/3 \cdot A_{max} = 2/3 \cdot 0.57 g = 0.38 g$.

The distribution of seismic accelerations through the dam height was received according to Russian seismic design norms for dams (SNiP 33-01-2003) using the shear wedge method (figure 9).

Figure 10 shows results of static (the most dangerous circular surface 2) and seismic (the most dangerous circular surface 1) stability of downstream slope of Limon CFGD ($H = 82$ m) taking into account the variable shear angles of gravel and pebble zones 10–11, 15–17. This figure show that the minimum factor of the downstream slope stability under action of seismic loads is more that permissible as per design norms SNiP 33-01-2003 ($F_{min} = 1,22 > F_{perm} = 1,06$) and corresponds to the deep circular sliding surface

between the dam crest and upper alluvial layers of dam foundation.

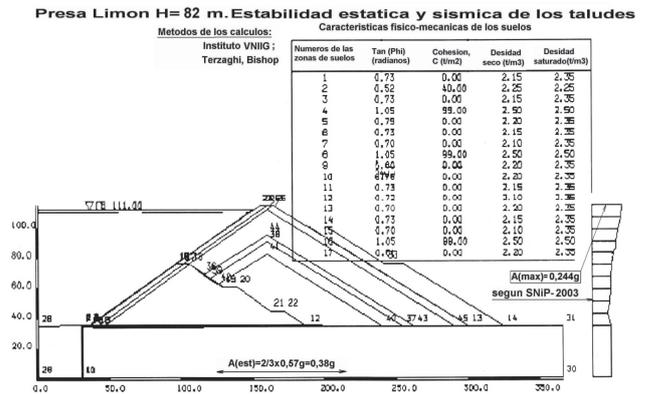


Figure 9. Distribution of seismic accelerations through the dam height ($H = 82$ m) using shear wedge method

Presa Limon $H = 82$ m. Resultados de los calculos estaticos y sismicos por metodo de VNIIG-Terzhagi

Superficie	γ_c	γ_s	$F(\min)$	$F(\text{perm})$
1	280.0	120.0	1,69	1,25
2	290.0	155.0	1,19	1,06

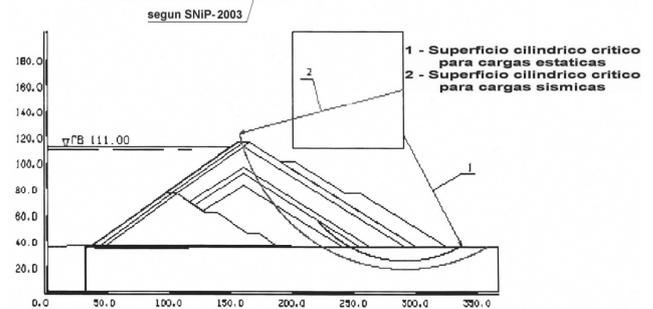


Figure 10. Factors of seismic ($F_{min} = 1,19 > F_{perm} = 1,06$) and static stability ($F_{min} = 1,69 > F_{perm} = 1,25$) of downstream slope

The comparison of results of the seismic stability analysis of the downstream slope of Limon CFGD ($H = 82$ m) with additional pebble zone 14 with two berms (figure 7) with results of the same analysis of the dam but without the additional zone show that the inclusion of this zone in the downstream slope provide a significant increase of the minimum factor of the downstream slope stability from 1.05 up to 1.22. Below in figures 11, 13–15 the main results of dynamic nonlinear analysis of stress-strain state of Limon CFGD ($H = 43$ and 82 m, variant with the additional downstream pebble zone) with full reservoir under action of MCE of the Mar–Chile Earthquake accelerogram are presented. The dam zones with the shear stress state of soils are painted in orange and zones with the tension stress state of soils are painted in blue (figure 11).

Parameters of Mohr–Coulomb model used in the dynamic nonlinear analysis of Limon CFGD ($H = 43$ and 82 m) are given in table 4.

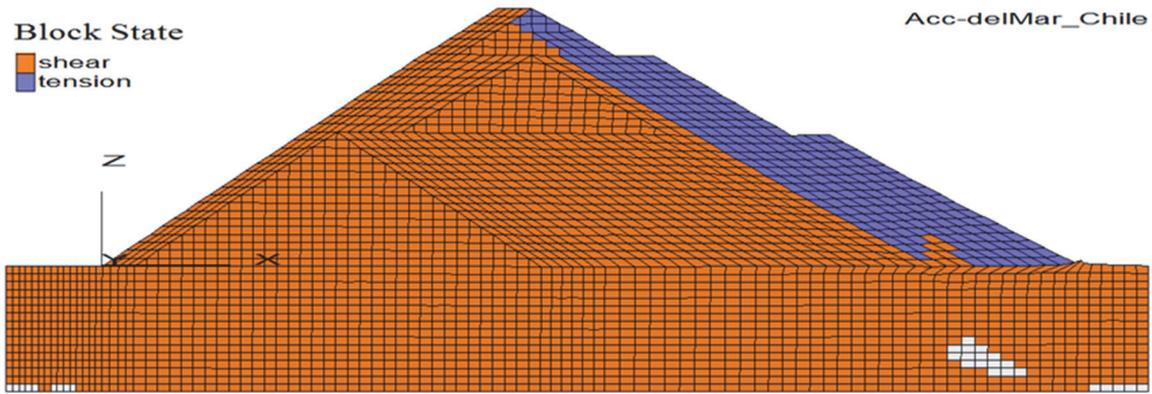


Figure 11. Zones of Limon CFGD ($H = 43$ and 82 m) with the shear and tension stress state of soils under action of SMC of the Mar–Chile Earthquake accelerogram with $A_{max} = 0.57$ g

Table 4

Parameters of Mohr–Coulomb model in dynamic analyses of Limon CFGD ($H = 43$ and 82 m)

Numbers and names of zones of dam materials and foundation soils	Material or soils	Dry density and void ratio		Dynamic modulus of elasticity E^{dyn} , MPa	Shear modulus G_{max} (MPa)	Initial coefficient of damping ξ , %	Reduction of parameters G_{max} and ξ
		γ_{dr} , t/m ³	n				
<i>1st stage dam ($H = 43$ m)</i>							
1, 3. Foundation	Alluvium	2.15	0.2	1300	$G_{max} = 35(\sigma_m)^{0.5}$	5	see figure A
2. Diaphragm	Concrete	2.25	0	1600	$G = E^{dyn} / [2(1 + \nu)]$	3	–
4. Plint slab	Concrete	2.5	0	20000	$G = E^{dyn} / [2(1 + \nu)]$	2	–
5. Embankment zone	Gravels and pebbles	2.2	0.15	2000	$G_{max} = 40(\sigma_m)^{0.5}$	5	see figure A
6. Transition zone	Gravels	2.15	0.2	1000	$G_{max} = 22(\sigma_m)^{0.5}$	4	see figure A
7. Transition zone	Sand	2.15	0.2	700	$G_{max} = 20(\sigma_m)^{0.5}$	4	see figure A
8. Concrete face	Concrete	2.5	0	20000	$G = E^{dyn} / [2(1 + \nu)]$	5	–
<i>2nd stage dam ($H = 82$ m)</i>							
9. Embankment zone	Gravels	2.2	0.15	2000	$G_{max} = 40(\sigma_m)^{0.5}$	5	see figure A
10. Embankment zone	Gravels	2.2	0.15	2000	$G_{max} = 40(\sigma_m)^{0.5}$	5	see figure A
11. Transition zone	Gravels	2.15	0.2	1000	$G_{max} = 22(\sigma_m)^{0.5}$	4	see figure A
12. Transition zone	Sand	2.1	0.25	700	$G_{max} = 20(\sigma_m)^{0.5}$	4	see figure A
13. Concrete face	Concrete	2.5	0	20000	$G = E^{dyn} / [2(1 + \nu)]$	5	–
14. Downstream zone with 2 berms	Pebbles	2.15	0.2	1500	$G = E^{dyn} / [2(1 + \nu)]$	5	see figure A

Note : (σ_m) – medium stress (effective) in kPa.

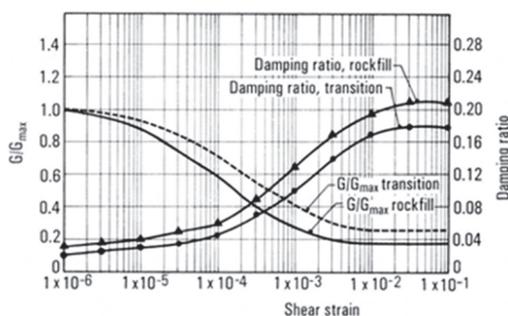


Figure 12. Curves of reduction of the shear modulus G/G_{max} and initial coefficient of damping ξ , % of soils of the dam and its foundation

Under action of the Mar–Chile Earthquake the dam would suffer elasto-plastic deformations with large plastic displacements in the wide zone of the downstream slope (figure 13). The large plastic deformations modified the dynamic stress-strain state of the dam and its foundation (figures 13–14). The horizontal and vertical displacement in the dam after the Mar–Chile Earthquake in the upper part of the downstream slope are, respectively, 2.0 and 1.0 m; in the upper berm – 2.2 and 1.1 m; in the lower berm – 2.5 and 1.3 m and at the toe of the slope – 6.0 m and zero (figure 13). The intensity of shear deformations (figure 13) is concentrated in the narrow zone in lower part of dam downstream slope.

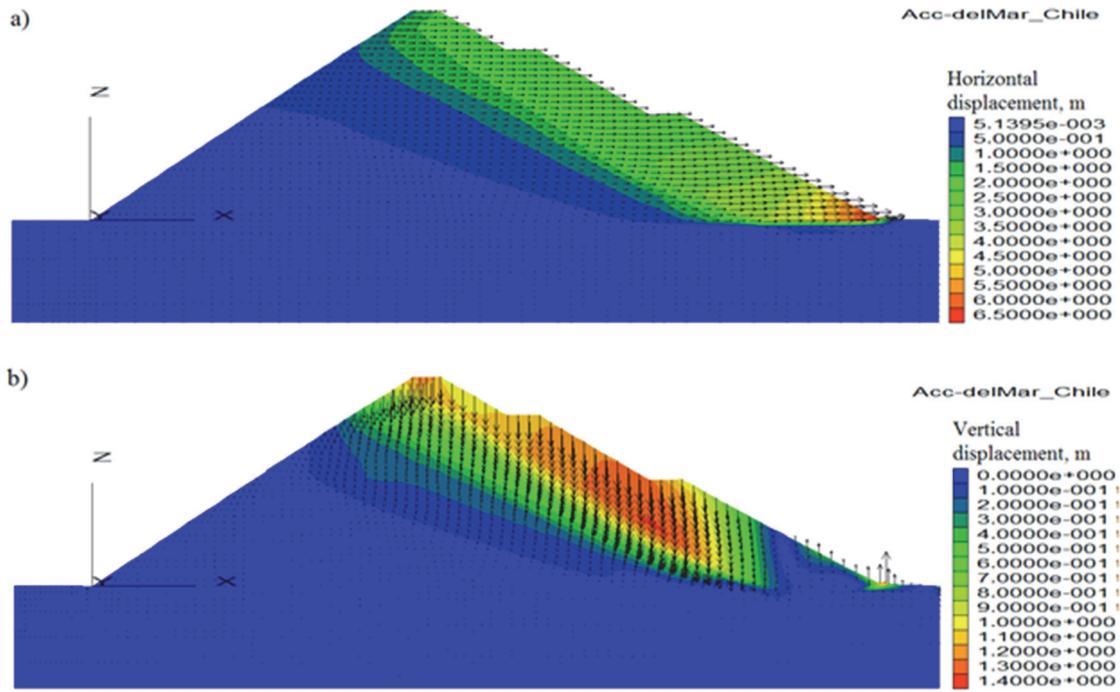


Figure 13. Horizontal (a) and vertical (b) displacements in Limon dam (82 m) after Mar–Chile Earthquake

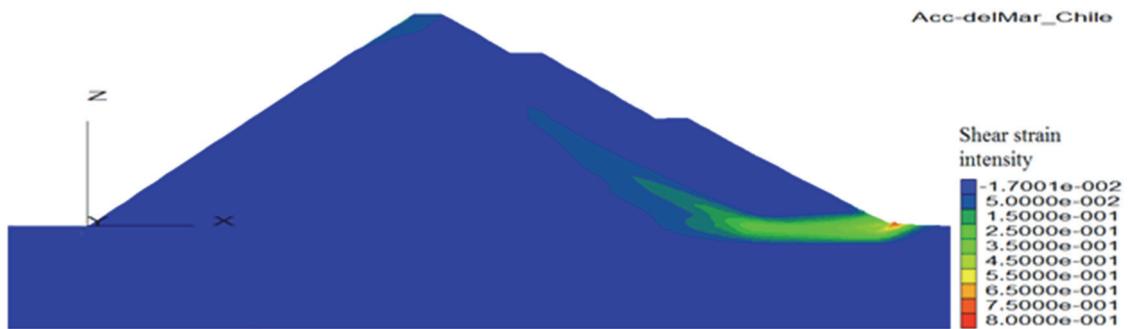


Figure 14. Intensity of the shear deformations in Limon dam (82 m) after the Mar–Chile Earthquake

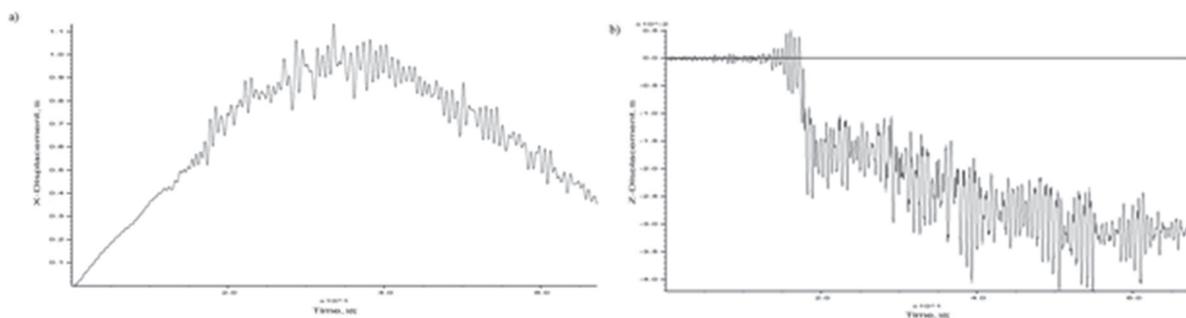


Figure 15. The time history of the residual horizontal (a) and vertical (b) displacements of the crest of Limon dam (82 m) during the Mar–Chile Earthquake

The time history of the residual horizontal (a) and vertical (b) displacements of the dam crest during the Mar–Chile Earthquake is shown in figure 15.

The maximum horizontal and vertical displacements of the dam crest during the Mar–Chile Earthquake are, respectively, 1.5 and 1.1 m.

3. Results of analysis of the concrete face

These results are showed in figure16 and 17 (Limon dam, the 2nd stage, $H = 82$ m). The displacements, bending moments and longitudinal forces (axial) in the concrete face are presented for action of Maximum Credible Eartquake (MCE) of Mar–Chile after filling of the reservoir up to maximum elevation (Limon dam, the 2nd stage, $H = 82$ m). It's shown that the greatest

influences on the concrete face is axial compression, being of lesser bending moment value, therefore, the concrete face will be in compression state. With the dimensions of concrete face, adopted forces and moments it can determine the bearing capacity and reinforcement of thick 0.55 and 0.42 m concrete face based on the diagram of interaction force-bending. Also this reinforcement is also recommended to absorb stresses due to shrinkage and thermal changes in concrete face.

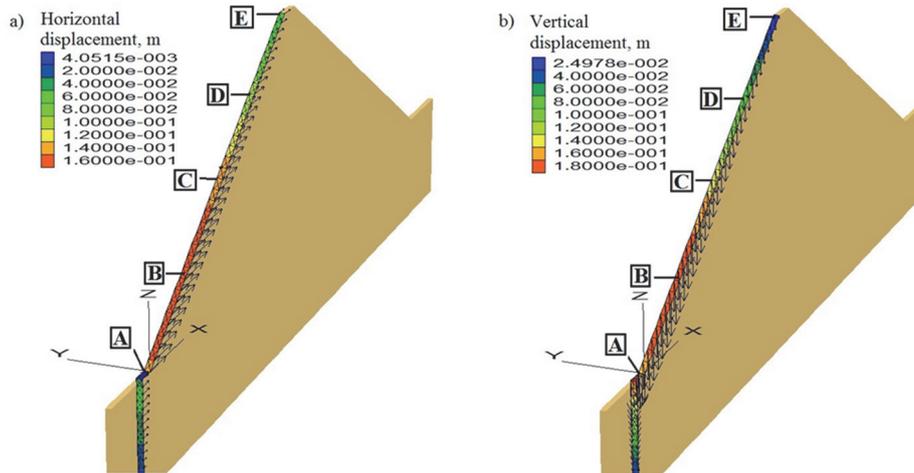


Figure 16. Horizontal (a) & vertical (b) displacements of concrete face after filling of the reservoir up to maximum elevation (CFRD of the 2nd stage, $H = 82$ m):

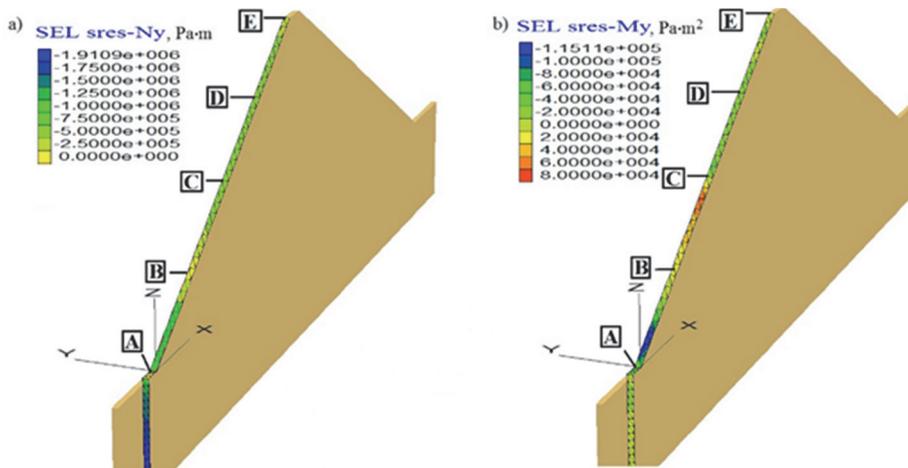


Figure 17. Longitudinal forces (a) and bending moments (b) in the concrete face after filling of the reservoir up to maximum elevation (CFRD of the 2nd stage, $H = 82$ m)

LEGEND FOR FIGURES 16 AND 17:

A – point on perimetral joint; B – intermedial point; C – point on the crest of dam of the 1st stage;
 A – point on perimetral joint; B – intermedial point; C – point on the crest of dam of the 2nd stage.

Displacements in points of concrete face:

A – $U_x = 0,14$ m; $U_z = -0,16$ m
 B – $U_x = 0,16$ m; $U_z = -0,18$ m
 C – $U_x = 0,14$ m; $U_z = -0,14$ m
 D – $U_x = 0,08$ m; $U_z = -0,10$ m
 E – $U_x = 0,06$ m; $U_z = -0,04$ m

Forces N & bending moments M in points of concrete face:

A – $N = -80$ t (compression); $M = -6$ tm
 B – $N = -40$ t (compression); $M = -2$ tm
 C – $N = -50$ t (compression); $M = 0$ tm
 D – $N = -50$ t (compression); $M = -2$ tm
 E – $N = -50$ t (compression); $M = -4$ tm

Deflections of concrete face: in point B (maximum) – 24 cm; in point C – 19 cm; in point D – 13 cm

4. Supposed designed behavior of the concrete face of Limon dam

From the pattern of deformations the behavior of concrete face acts as a rigid wall to vibrations in the transverse direction of the valley, differs considerably from the rockfill and transition zone materials, the transverse response across the valley of rockfill dam may be limited by the relatively rigid concrete face. This may lead to tension stresses in the plane of concrete face, seismic forces transferred from rockfill to concrete face are limited by the frictional forces between the transition zone of rockfill and concrete face. Like all the water load is supported by the concrete face, these frictional forces are relatively high and therefore stresses in the plane of concrete face can be significant enough to cause local deformations or shears of concrete face slabs along its longitudinal joints. The dam deformations can cause the crack opening in concrete slabs and sliding along the crack surface and suffer oscillating movements. This behavior of Limon dam corresponds to many case studies of behavior of concrete face rockfill dams, in detail described and discussed in [10–15].

The main advantage of this dam with concrete face is its high resistance to erosion in case of water seepage through cracked concrete face. If the zone of materials under the concrete face has a proper particle sizes the permeability coefficient will be 10^{-3} cm/s and then zone will be stable against its erosion. This eliminates the risk of high leakages developed under cracked concrete face.

Main conclusions

1. Horizontal and vertical displacements of the downstream slope after the Mar–Chile Earthquake are, respectively, 2.0–2.5 and 1–1.3 m. The maximum horizontal and vertical displacements of dam crest during the Mar–Chile Earthquake are, respectively, 1.5 and 1.1 m and after the earthquake – 0.4 and 0.3 m. These displacements about two times lower than those in the previous variant 1 of the dam with the downstream slope of ($V/H = 1/1.7$) and the under-laying rockfill without berms.

2. In comparison with the previous variant 1 of Limon dam ($H = 82$ m) with the downstream slope of ($V/H = 1/1.7$) and the under-laying rockfill without berms this variant 2 of Limon dam ($H = 82$ m) with additional gravel zone with two berms on downstream slope is much more stable and safe under action of very strong MCE of the Mar–Chile Earthquake. Therefore, this variant 2 of Limon dam can be adopted in the following detailed final design of 82 m high Limon dam.

3. During the forthcoming reservoir filling the strict monitoring of instruments embedded in dam body (piezometers, benchmarks, strain gauges, accelerometers) with expert control is necessary.

References

1. ICOLD Bulletin 148. (2010). *Selecting seismic parameters for large dams*. Guidelines.
2. ICOLD Bulletin 122. (2001). *Computational procedures for dam engineering*.
3. ICOLD Bulletin 154. (2011). *Dam safety management. Operational phase of the dam life cycle*.
4. ICOLD Bulletin 155. (2013). *Guidelines for use of numerical models in dam engineering*.
5. ICOLD Bulletin 167. (2015). *Regulation of dam safety. Overview of current practice*.
6. *Informe de gestión Proyecto Especial Olmos – Tinajones (PEOT)*. (Junio 2009).
7. *PLAXIS 2D PlaxFlow*. The Netherlands. <https://www.plaxis.com/product/plaxis-2d/>
8. *FLAC-3D software*. USA. <http://www.itascacg.com/>
9. *Proceedings of the ICOLD Congress*. (2003). Canada.
10. SPANCOLD. (1996). *Proceedings of the 4th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*. Madrid, Spain.
11. USCOLD. (1999). *Proceedings of the 5th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*. Denver, Colorado, USA.
12. ATCOLD and VERBUND. (2001). *Proceedings of the 6th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*. Salzburg, Austria.
13. ROCOLD. (2003). *Proceedings of the 7th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*. Bucharest, Romania.
14. Wuhan University. (2005). *Proceedings of the 8th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*. Wuhan, China.
15. VNIIG (Russian Research Institute of Hydraulic Engineering named after B.E. Vedenev). (2007). *Proceedings of 9th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*. Saint Petersburg, Russia.
16. COYNE ET BELLIER. (2009). *Proceedings of the 10th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*. Gennevilliers, France.
17. Lyapichev Yu.P., Landau Yu.A. (November – December 2011). Modern structural and technological solutions for new large dams. *Hydro Review Worldwide*. PennWell Corp., USA.
18. Lyapichev Yu.P. (2013). Design, construction and behavior monitoring of modern high dams. Palmarium Academic, Germany, 369. (In Russ.)

About the author

Yury P. Lyapichev – Doctor of Technical Sciences, Professor, Expert of JSC “Hydroproject Institute” for foreign projects, Member of International Commission on

Large Dams (ICOLD). *Research interests*: dams, hydraulic structures (HS), static and seismic (dynamic) nonlinear analyses of rockfill and concrete dams, safety of dams and HS, elasto-plastic models of dam materials. *Contacts*: e-mail – lyapichev@mail.ru

For citation

Lyapichev Yu.P. (2019). Static and dynamic analyses of the heightening of concrete face gravel dam Limon (Peru). *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 158–168. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-158-168

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Статические и динамические расчеты наращивания грунтовой плотины с бетонным экраном Лимон (Перу)

Ю.П. Ляпичев

АО «Институт “Гидропроект”», Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 2,
Международная комиссия по большим плотинам (ICOLD), France, 75016, Paris, Avenue Kleber, 61

Поступила в редакцию: 11 января 2019 г.
Доработана: 12 марта 2019 г.
Принята к публикации: 22 марта 2019 г.

Ключевые слова:

грунтовая плотина
с бетонным экраном (CFGD);
нелинейный сейсмический
(динамический) расчет;
ускорение основания;
акселерограмма землетрясения;
расчет фильтрации

Аннотация

Цели. Экспертная проверка предложенных проектных решений, разработка необходимых проектных решений по наращиванию плотины Лимон согласно рекомендациям ICOLD.

Методы. Подробные статические и сейсмические (динамические) расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) и фильтрации грунтовой плотины Лимон (Перу) с бетонным экраном были выполнены с использованием передовых программ численных расчетов FLAC-3D (США) и PLAXIS 2D (Голландия) соответственно. В статических и сейсмических (динамических) расчетах плотины Лимон использовалась упруго-пластическая модель Мора – Кулона с переменным углом сдвига гравийных и галечниковых зон плотины и грунтов ее основания. В динамических нелинейных расчетах НДС двух вариантов плотины Лимон при наполненном водохранилище использовалась акселерограмма максимального возможного землетрясения (МВЗ) Маг–Чиле.

Результаты. На основе полученных расчетов были разработаны рекомендации по проекту наращивания плотины с первоначальной высоты ($H = 43$ м) до 82 м перед первым наполнением водохранилища. Экспертная оценка всех необходимых проектных решений по наращиванию плотины Лимон была выполнена в соответствии с рекомендациями Международной комиссии по большим плотинам (ICOLD).

Список литературы

1. ICOLD Bulletin 148. Selecting seismic parameters for large dams. Guidelines. 2010.
2. ICOLD Bulletin 122. Computational procedures for dam engineering. 2001.
3. ICOLD Bulletin 154. Dam safety management. Operational phase of the dam life cycle. 2011.
4. ICOLD Bulletin 155. Guidelines for use of numerical models in dam engineering. 2013.
5. ICOLD Bulletin 167. Regulation of dam safety. Overview of current practice. 2015.
6. Informe de gestión Proyecto Especial Olmos – Tinajones (PEOT). Junio 2009.
7. PLAXIS 2D PlaxFlow. The Netherlands. <https://www.plaxis.com/product/plaxis-2d/>
8. FLAC-3D software. USA. <http://www.itascacg.com/>
9. Proceedings of the ICOLD Congress. Canada, 2003.
10. Proceedings of the 4th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams / SPANCOLD. Spain: Madrid, 1996.
11. Proceedings of the 5th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams / USCOLD. USA: Denver, Colorado, 1999.
12. Proceedings of the 6th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams / ATCOLD; VERBUND. Austria: Salzburg, 2001.
13. Proceedings of the 7th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams / ROCOLD. Romania: Bucharest, 2003.
14. Proceedings of the 8th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams / Wuhan University. China: Wuhan, 2005.
15. Proceedings of 9th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams / VNIIG (Russian Research Institute of Hydraulic Engineering named after B.E. Vedenev). Russia: Saint Petersburg, 2007.

16. Proceedings of the 10th Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams / COYNE ET BELLIER. France: Gennevilliers, 2009.

17. Lyapichev Yu.P., Landau Yu.A. Modern structural and technological solutions for new large dams // Hydro Review Worldwide. November – December, 2011. USA: PennWell Corp. 12 p.

18. Ляпичев Ю.П. Проектирование, строительство и мониторинг поведения современных высоких плотин. Германия: Palmarium Academic, 2013. 369 с.

Об авторе

Ляпичев Юрий Петрович – доктор технических наук, профессор, эксперт по зарубежным проектам, АО «Институт Гидропроект», член Международной комис-

сии по большим плотинам (ICOLD). *Область научных интересов:* плотины, гидросооружения (ГС), статические и сейсмические (динамические) нелинейные расчеты грунтовых и бетонных плотин, безопасность плотин, упруго-пластические модели материалов плотин. *Контактная информация:* e-mail – lyapichev@mail.ru

Для цитирования

Lyapichev Yu.P. Static and dynamic analyses of the heightening of concrete face gravel dam Limon (Peru) (Статические и динамические расчеты наращивания грунтовой плотины с бетонным экраном Лимон (Перу)) // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 2. С. 158–168. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-158-168