

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Акимов П.А.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

### ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*Галишичкова В.В.*, д-р техн. наук, доц., РУДН, Москва, Россия

### ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РЕДАКТОР

*Мамиева И.А.*, РУДН, Москва, Россия

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

*Ванин В.В.*, д-р техн. наук, проф., Киевский политехнический университет, Киев, Украина

*Лисичкин С.Е.*, д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия

*Зверев Е.М.*, д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия

*Обозов В.И.*, д-р техн. наук, проф., ЦНИИСК, Москва, Россия

*Буй Суан Нам*, доцент, Ханойский университет горного дела и геологии, Ханой, Вьетнам

*Санжаровский Р.С.*, д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан

*Аганов В.П.*, д-р техн. наук, проф., МГСУ, Москва, Россия

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

*Андреев В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

*Баженов В.А.*, акад., Национальная академия педагогических наук, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина

*Голик В.И.*, д. член РАЕН, д-р техн. наук, проф., Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет), Владикавказ, Россия

*Заксенхофер Райханд Ф.*, профессор, Горный университет в Леобене, Австрия

*Иванов С.П.*, д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия

*Карпенко Н.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

*Колчунов В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия

*Мандроне Джузеппе*, доцент, Университет Турина, Италия

*Красич Соня*, кандидат технических наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

*Мазуле Фредерик*, профессор, Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Франция

*Ляхович Л.С.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия

*Травуш В.И.*, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

*Якупов Н.М.*, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

## СОДЕРЖАНИЕ

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

<i>Якупов С.Н., Киямов Х.Г., Якупов Н.М., Хасанова Л.И., Бикмухамматов И.И.</i> Эффект концентрации напряжений в стержне прямоугольного сечения в области крепления от продольных усилий .....	451
<i>Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Клочков М.Ю.</i> Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек .....	459

### ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК

<i>Мкртычев О.В., Савенков А.Ю.</i> Численное моделирование фронта воздушной ударной волны при взрыве в воздухе и над землей в программном комплексе LS-DYNA .....	467
<i>Колмогоров Г.Л., Высотин А.С.</i> Применение механики пластин для оценки эффективности упрочняющей дробеструйной обработки .....	475
<i>Лебедев Е.В.</i> Особенности работы каркасов большепролетных металлических куполов в процессе их возведения .....	481
<i>Gebre T.H.</i> The development of chart based method for steel beam designs using the Russian sections (Разработка графического метода проектирования стальных балок с помощью диаграмм для российского сортамента стальных профилей) .....	495

### ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

<i>Gil-oulbè M., Qbaily J.</i> Geometric modeling and linear static analysis of thin shells in the form of cylindroids (Геометрическое моделирование и линейный статический расчет тонких оболочек в форме цилиндров) .....	502
<i>Govind Prasad Lamichhane.</i> Complicated features and their solution in analysis of thin shell and plate structures (Конструктивные особенности и их решение при расчете тонких оболочек и пластин) .....	509

### ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

<i>Бакушев С.В.</i> Плоские геометрически-нелинейные волны деформаций сдвига .....	516
--	-----

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

<i>Фиговский О.Л., Пенский О.Г.</i> Математические модели многостольных строительных артиллерийских орудий .....	523
--	-----

Редактор Ю.А. Заикина  
Дизайн обложки: Ю.Н. Ефремова  
Компьютерная верстка: Ю.А. Заикина

### Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов  
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел.: +7 (495) 955-08-58; факс: +7 (495) 955-08-58; e-mail: [stmj@rudn.university](mailto:stmj@rudn.university); [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Подписано в печать 18.12.2018. Выход в свет 28.12.2018. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 9,76. Тираж 250 экз. Заказ № 2134. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)  
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН:  
Россия, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

# STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2018 VOLUME 14 No. 6

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

ISSN 1815-5235 (print), 2587-8700 (online).

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI (elibrary.ru), Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The Journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the Journal.

The Journal website contains full information about the Journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the Journal since 2008 (Open Access).

## EDITORIAL BOARD

### EDITOR-IN-CHIEF

*P.A. Akimov*, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

### ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

*V.V. Galishnikova*, DSc, RUDN University, Moscow, Russia

### MANAGING EDITOR

*I.A. Mamieva*, RUDN University, Moscow, Russia

### MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

*V.V. Vanin*, DSc, Professor, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine

*S.E. Lisichkin*, DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

*E.M. Zveryaev*, DSc, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia

*V.I. Obozov*, DSc, Professor, Central Research Institute of Building Structures (TzNIISK im. V.V. Kucherenko), Moscow, Russia

*Xuan Nan Bui*, PhD, Assoc. Professor, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi, Vietnam

*R.S. Sanjarovskiy*, DSc, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

*V.P. Agapov*, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

## EDITORIAL COUNCIL

*V.I. Andreev*, Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

*V.A. Bazhenov*, Member of the National Academy of Educational Science of Ukraine, DSc, Professor, Kiev National University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine

*V.I. Golik*, Member of the Russian Academy of Sciences, DSc, Professor, North-Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University), Vladikavkaz, Russia

*Reinhard F. Sachsenhofer*, PhD, Professor, Montanuniversität Leoben, Austria

*S.P. Ivanov*, DSc, Professor, Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia

*N.I. Karpenko*, Member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia

*V.I. Kolchunov*, Member of the RAACS, DSc, Professor, South-West State University, Kursk, Russia

*Giuseppe Mandrone*, PhD, Ass. Prof. in Engineering Geology, University of Torino, Italy

*Sonja Krasic*, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

*Fredéric Magoulès*, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France

*L.S. Lyakhovich*, Member of the RAACS, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk, Russia

*V.I. Travush*, Member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

*N.M. Yakupov*, Corresponding Member of Russian Engineering Academy, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

## CONTENTS

### NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

- Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M., Khasanova L.I., Bikmukhammetov I.I.* Effect of stress concentration in a beam of rectangular cross section in the region of attachment of the longitudinal efforts ..... 451
- Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu.* Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells ..... 459

### ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

- Mkrtychev O.V., Savenkov A.Y.* Numerical simulation of the front of an air shock wave in a ground and air explosion in the software package LS-DYNA ..... 467
- Kolmogorov G.L., Vysotin A.S.* Application of plate mechanics to evaluate the effectiveness of reinforcing shot blasting ..... 475
- Lebed E.V.* Behavior of the frames of large-span metal domes in the process of their installation ..... 481
- Gebre T.H.* The development of chart based method for steel beam designs using the Russian sections ..... 495

### THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS

- Gil-oulibé M., Qbaily J.* Geometric modeling and linear static analysis of thin shells in the form of cylindroids ..... 502
- Govind Prasad Lamichhane.* Complicated features and their solution in analysis of thin shell and plate structures ..... 509

### PROBLEMS OF THEORY OF ELASTICITY

- Bakushev S.V.* Flat geometric-nonlinear shear strains ..... 516

### EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS

- Figovsky O.L., Pensky O.G.* Mathematical models of multi-barreled construction artillery systems ..... 523

Copy Editor Iu.A. Zaikina  
Graphic Designer Iu.N. Efremova  
Layout Designer Iu.A. Zaikina

### Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation; tel.: +7 (495) 955-08-58; fax: +7 (495) 955-08-58; e-mail: stmj@rudn.university; i\_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University:  
3 Ordzhonikidze St., Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 2018  
© Krivoschapko N.S., photo on the cover of the Journal (La Tour Eiffel, Paris, France), 2018

## Численные методы расчета конструкций

УДК 539  
DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-451-458

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Эффект концентрации напряжений в стержне прямоугольного сечения в области крепления от продольных усилий

С.Н. Якупов<sup>1,2\*</sup>, Х.Г. Киямов<sup>1</sup>, Н.М. Якупов<sup>1</sup>, Л.И. Хасанова<sup>2</sup>, И.И. Бикмухамметов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФГБУН «Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр Российской академии наук”»  
Российская Федерация, 420111, Татарстан, Казань, ул. Лобачевского, 2/31

<sup>2</sup>Казанский государственный архитектурно-строительный университет  
Российская Федерация, 420043, Татарстан, Казань, ул. Зеленая, 1

\*Автор, ответственный за переписку

(поступила в редакцию: 19 июля 2018 г.; доработана: 10 ноября 2018 г.; принята к публикации: 12 ноября 2018 г.)

**Актуальность.** Для обеспечения безопасной работы конструкций и сооружений необходимо точнее определять напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций, выявлять области концентрации напряжений. Вопросы распределения напряжений в областях крепления стержней в трехмерной постановке относительно мало изучены. В этих областях могут возникнуть существенные концентрации напряжений, способствующие возникновению и развитию трещин и отколов, являющихся предвестником разрушения. Развитие современных методов расчета, программных комплексов и рост возможностей вычислительной техники позволяют уточнять расчетные схемы: переходить от одномерной схемы расчета к двумерной, от двумерной схемы расчета к трехмерной. Все это дает возможность более точно оценивать НДС элементов конструкций и сооружений, выявлять области концентрации напряжений, а также исследовать влияние коэффициента Пуассона на концентрацию напряжений.

**Методы исследования.** Отмечено, что в стержнях (стойках) квадратного сечения возникают трещины и разрывы в кромках при воздействии продольных нагрузок. Для оценки напряженно-деформированного состояния используются трехмерные элементы на базе сплайнового варианта метода конечных элементов и расчетный комплекс «ЛИРА». Сплайновый метод конечных элементов, благодаря синтезу идеи параметризации и метода конечных элементов (МКЭ) с кубической аппроксимацией всех трех искоемых переменных в пределах каждого элемента, позволяет получать согласованные трехмерные конечные элементы. На базе отмеченных методов и комплексов выполнены численные исследования концентрации напряжений в стержнях квадратного и прямоугольного сечений, закрепленных на одном конце и воспринимающих растягивающие усилия на другом конце.

**Выводы.** Установлено, что в угловых точках сечения в области крепления прямолинейных стержней, воспринимающих осевые растягивающие усилия, возникают концентрации напряжений. Вдали от области крепления стержня напряжения выравниваются. С увеличением коэффициента Пуассона концентрация напряжений возрастает быстрее, чем при малых значениях. Переход от одномерной расчетной схемы к двумерной и тем более к трехмерной схеме позволяет определять концентрацию напряжений как в плане, так и по толщине. Информация о концентрации напряжений в элементах конструкций позволит проектировщикам более грамотно проектировать конструкции и сооружения, а эксплуатационникам своевременно выявлять дефектные области.

**Ключевые слова:** стержни, концентрации напряжений, растягивающие усилия, квадратное и прямоугольное сечение, трехмерные конечные элементы, крепление

#### Введение

Одной из наиболее существенных причин разрушения элементов конструкций является наличие концентраторов [1–6]. Еще Леонардо да Винчи сфор-

мулировал понятие концентратора и тем самым заложил основы современной механики разрушения. Концентрацию напряжений могут вызвать условия крепления, геометрические параметры и форма элементов конструкции (способ крепления элемента

конструкции с основным узлом, конструктивные отверстия и углубления, коррозионные дефекты, пазы и зоны стыков элементов, перепады толщин, острые конструктивные углы и т.д.).

Стержни и стержневые системы (фермы), балки, балочные системы (рамы) и стойки находят широкое применение как в строительных, так и машиностроительных конструкциях [4]. Они имеют различную форму сечения, изготавливаются из различных материалов и воспринимают большие нагрузки, в том числе продольные усилия. Например, наклонные стойки крупногабаритных градирен СК-1200 имеют квадратную форму поперечного сечения (рис. 1), воспринимают большие весовые нагрузки металлических конструкций диффузора, конфузора и железобетонной части цилиндрического участка, а также нагрузки приходящие от парусности градирни в целом. В процессе эксплуатации в ребрах стоек в области концентрации напряжений возникают различные трещины и разрывы, которые существенно снижают несущую способность стойки и в дальнейшем выходят из строя, приводя конструкцию градирни к аварийной ситуации.



**Рис. 1. Продольные угловые трещины в наклонных стойках крупногабаритной градирни СК-1200**  
**[Figure 1. Longitudinal corner cracks in sloping racks large-sized coolers СК-1200]**

Моделирование напряженно-деформированного состояния конструкции, состоящей из набора конструктивных элементов из полимерных композиционных материалов, рассмотрено, в частности, в статье [7]. Задача отклонения зажатой балки от равномерной нагрузки методом конечных элементов рассмотрена в [8].

Большую опасность для конструкции представляют случаи, когда имеют место два и более источника разрушения [9; 10], например существенные механические напряжения, коррозия и концентраторы напряжений. Концентраторы напряжений активизируют коррозионный процесс [11; 12]. При существенной коррозии происходит изменение не только геометрических, но и механических характеристик материала. Все это существенно снижает ресурс конструкции и сооружений.

Для обеспечения безопасной работы конструкций и сооружений необходимо точнее определять напряженно-деформированное состояние элементов конструкций, выявлять области концентрации напряжений и принимать меры к их устранению. Информация о концентрации напряжений в элементах конструкций позволит проектировщикам более грамотно проектировать конструкции и сооружения, а эксплуатационникам своевременно выявлять дефектные области.

Развитие современных методов расчета, программных комплексов и рост возможностей вычислительной техники позволяют уточнять расчетные схемы: переходить от одномерной схемы расчета к двумерной, от двумерной к трехмерной. О важности использования трехмерных схем при расчете угловых трубчатых соединений говорится в статье [13]. Все это позволяет более точно оценивать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций и сооружений.

В статье [6] приведены результаты исследования плоскими конечными элементами балки-стенки, закрепленной по одному торцу от равномерно распределенной растягивающей нагрузки, приложенной к противоположному торцу. Определена, в частности, картина распределения напряжений. Отмечается, что в месте крепления в области угловых точек наблюдается концентрация как нормальных  $\sigma_x$  (рис. 2), так и касательных  $\tau_{xy}$  напряжений для рассмотренных параметров балки-стенки. Установлено, что для исследованного варианта балки-стенки концентрация нормальных напряжений  $\sigma_x$  в угловых точках составляет 27–33 %. То есть, в отличие от расчета напряжений методами сопротивления материалов, максимальные нормальные напряжения превышают общий уровень напряжений более чем на 30 %.

Таким образом, переход от одномерной схемы расчета к двумерной схеме позволяет более точно определять концентрацию напряжений в точках крепления. А из механики разрушения известно, что концентрация напряжений является предвестником разрушения [1–6].

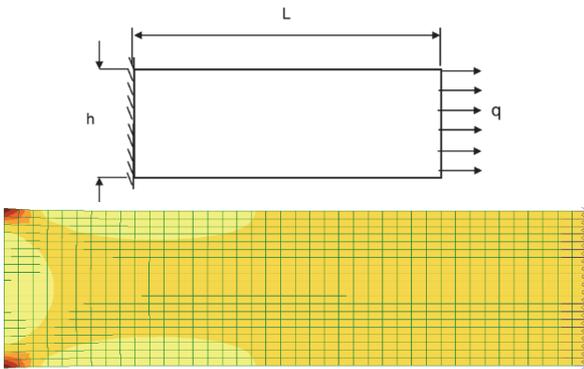


Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_x$  в балке-стенке  
[Figure 2. Stress distribution  $\sigma_x$  in the beam-wall]

Вопросы распределения напряжений в областях крепления стержней (стоек) в трехмерной постановке относительно мало изучены. В этих областях могут возникнуть существенные концентрации напряжений, способствующие возникновению и развитию трещин и отколов, являющихся предвестником разрушения.

Ниже рассмотрены примеры расчета напряженно-деформированного состояния прямолинейных стержней прямоугольного и квадратного сечения от растягивающих нагрузок на базе трехмерных конечных элементов. Выявлены области концентрации напряжений. Рассмотрен вопрос влияния коэффициента Пуассона на степень концентрации напряжений.

### Методы численного исследования

Современные методы расчета позволяют относительно точно оценивать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций и сооружений. Вопросы использования кубического сплайна для расчета слоистой пластины рассматриваются в [14].

В данной работе для определения распределения напряжений в стержне применяются трехмерные конечные элементы. Использовалась программа на базе сплайнового варианта метода конечных элементов с кубической аппроксимацией исходных переменных.

Основы сплайнового варианта метода конечных элементов в трехмерной постановке (СВ МКЭ-3) для расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций сложной геометрии, заданных в декартовой системе координат, изложены, в частности, в [15]. На первом этапе решается задача параметризации. Рассматриваемый участок конструкции (трехмерный объект сложной геометрии), занимаемый объем  $V$ , задается криволинейными координатами  $t^1, t^2, t^3$  еди-

ничного куба  $V_\Phi$  (рис. 3) таким образом, чтобы прямоугольной сетке в области  $V_\Phi$  соответствовала криволинейная пространственная сетка  $V$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(t^1, t^2, t^3). \quad (1)$$

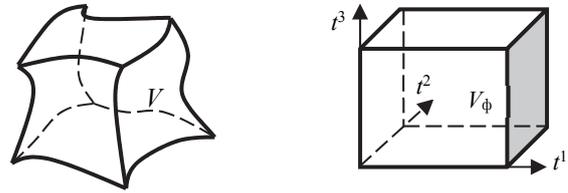


Рис. 3. Параметризация фрагмента трехмерного тела сложной геометрии  
[Figure 3. Parameterization of a fragment of a three-dimensional body of complex geometry]

Далее нетрудно определить координатные векторы:  $\vec{r}_1 = \partial \vec{r} / \partial t^1$ ,  $\vec{r}_2 = \partial \vec{r} / \partial t^2$ ,  $\vec{r}_3 = \partial \vec{r} / \partial t^3$ ; ковариантные компоненты и дискриминант метрического тензора:  $g_{11} = \vec{r}_1 \vec{r}_1$ ,  $g_{12} = \vec{r}_1 \vec{r}_2$ ,  $g_{22} = \vec{r}_2 \vec{r}_2$ ,  $g = g_{33} (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) - g_{32} (g_{11} g_{23} - g_{21} g_{13}) + g_{31} (g_{12} g_{23} - g_{13} g_{22})$ ,  $g_{13} = \vec{r}_1 \vec{r}_3$ ,  $g_{23} = \vec{r}_2 \vec{r}_3$ ,  $g_{33} = \vec{r}_3 \vec{r}_3$ , а также символы Кристоффеля:  $\Gamma_{jk}^i = g^{il} (\partial g_{jl} / \partial t^k + \partial g_{kl} / \partial t^j + \partial g_{jk} / \partial t^l) / 2$ .

Рассматриваемая область единичного куба  $V_\Phi$  разбивается на конечные элементы (параллелепипеды), и решение  $u, v$  и  $w$  в каждом из них представляется в виде интерполяционного эрмитового кубического сплайна трех переменных [11]:

$$\begin{aligned} u &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_U, \\ v &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_V, \\ w &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_W, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\psi_1(s^1), \psi_2(s^2), \psi_3(s^3)$  – векторы координатных функций;  $F_U, F_V, F_W$  – векторы компонент искомого неизвестных  $u, v, w$  и его производных соответственно. Ковариантные компоненты вектора перемещения и их производных  $ijk$ -го узла сетки для  $u, v$  и  $w$  обозначаются через следующие символы соответственно:

$$\begin{aligned} &u_{i,j,k}^{000}, u_{i,j,k}^{100}, u_{i,j,k}^{010}, u_{i,j,k}^{001}, u_{i,j,k}^{110}, u_{i,j,k}^{101}, u_{i,j,k}^{011}, u_{i,j,k}^{111}, \\ &v_{i,j,k}^{000}, v_{i,j,k}^{100}, v_{i,j,k}^{010}, v_{i,j,k}^{001}, v_{i,j,k}^{110}, v_{i,j,k}^{101}, v_{i,j,k}^{011}, v_{i,j,k}^{111}, \\ &w_{i,j,k}^{000}, w_{i,j,k}^{100}, w_{i,j,k}^{010}, w_{i,j,k}^{001}, w_{i,j,k}^{110}, w_{i,j,k}^{101}, w_{i,j,k}^{011}, w_{i,j,k}^{111}, \end{aligned} \quad (3)$$

где приняты следующие обозначения для  $u$  (для  $v$  и  $w$  аналогичны):

$$\begin{aligned}
 u_{i,j,k}^{100} &= \frac{\partial u}{\partial t^1} \Big|_{i,j,k}, & u_{i,j,k}^{010} &= \frac{\partial u}{\partial t^2} \Big|_{i,j,k}, & u_{i,j,k}^{001} &= \frac{\partial u}{\partial t^3} \Big|_{i,j,k}, & u_{i,j,k}^{110} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^1 \partial t^2} \Big|_{i,j,k}, \\
 u_{i,j,k}^{101} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^1 \partial t^3} \Big|_{i,j,k}, & u_{i,j,k}^{011} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2 \partial t^3} \Big|_{i,j,k}, & u_{i,j,k}^{111} &= \frac{\partial^3 u}{\partial t^1 \partial t^2 \partial t^3} \Big|_{i,j,k}.
 \end{aligned}$$

Основные соотношения выведены из вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 W \sqrt{g} dt^1 dt^2 dt^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho f^i \delta u_i \sqrt{g} dt^1 dt^2 dt^3 + \iint_S p^i \delta u_i dS, \quad (4)$$

где  $W$  – удельная потенциальная энергия деформации трехмерного тела;  $f^i, p^i$  – компоненты вектора массовых и поверхностных сил;  $\rho$  – массовая плотность;  $u_i$  – компоненты вектора искомых переменных;  $S$  – поверхность боковых граней тела.

Метод позволяет получать согласованные трехмерные конечные элементы благодаря синтезу идеи параметризации и метода конечных элементов (МКЭ) с кубической аппроксимацией всех трех искомым переменных  $u, v$  и  $w$  в пределах каждого элемента.

Для анализа напряженно-деформированного состояния также использовался расчетный комплекс «ЛИРА».

### Оценка НДС стержня программой СВ МКЭ-3

Выполнено численное исследование НДС стержня прямоугольного сечения (рис. 4), закрепленного по одному торцу ( $x = 200$  мм) и нагруженного равномерно распределенной нагрузкой  $q = 500$  МН/м<sup>2</sup> на другом торце ( $x = 0$ ). Модуль упругости материала стержня  $E = 100\,000$  МПа.

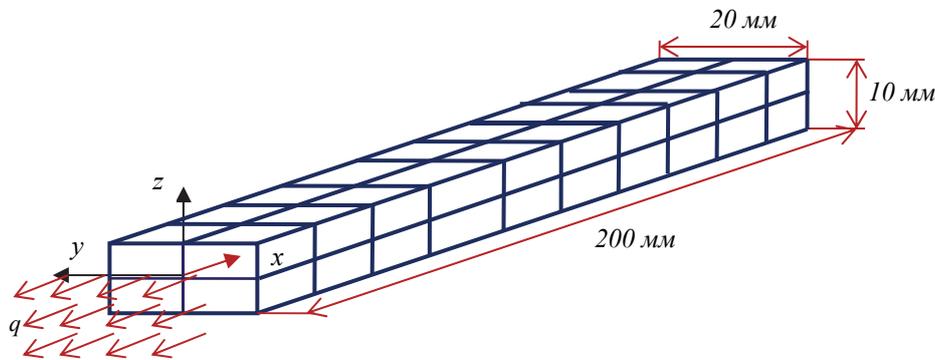


Рис. 4. Схема разбиения стержня на конечные элементы и геометрические параметры [Figure 4. The scheme of splitting the bar into finite elements and geometric parameters]

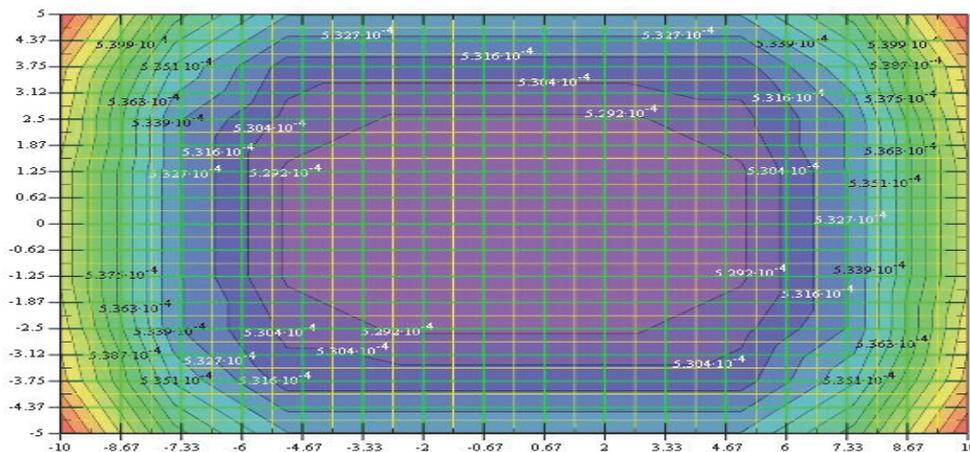


Рис. 5. Распределение напряжений  $\sigma_x$  в области крепления (сечение  $x = 19$  см) [Figure 5. Stress  $\sigma_x$  distribution in the fastening area (section  $x = 19$  cm)]

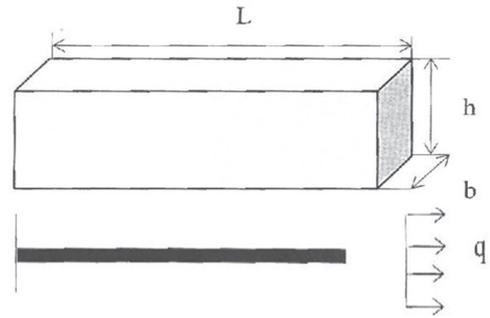
На рис. 5 приведено распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  в сечении  $x = 19$  см, то есть на расстоянии 1 см от торца защемления. Как

видно из рис. 5, в угловых точках в области заделки наблюдается существенная концентрация напряжений  $\sigma_x$ .

**Оценка напряженно-деформированного состояния стержня вычислительным комплексом «ЛИРА»**

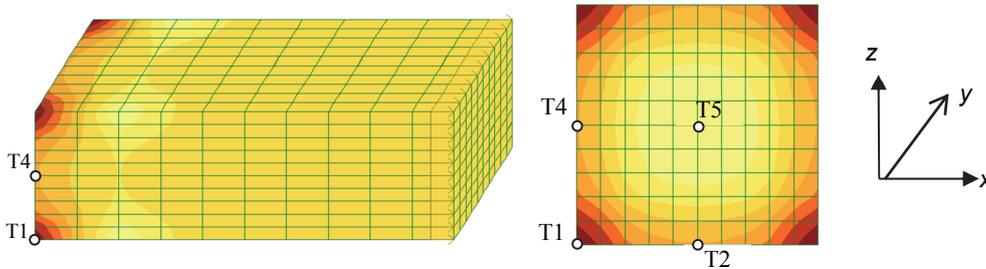
Исследовано трехмерными конечными элементами (программа «ЛИРА 10.1») НДС стержня, закрепленного по одному торцу и нагруженного растягивающей нагрузкой, приложенной к другому торцу (рис. 6). Исходные данные:  $q = 200$  МПа,  $L = 30$  см,  $h = b = 10$  см,  $E = 200\,000$  МПа,  $\nu = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$  (расчетные варианты). Расчетная схема: трехмерные конечные элементы:  $10 \times 10 \times 30$ .

Вопросы влияния коэффициента Пуассона представляют определенный интерес. Влияние коэффициента Пуассона на коэффициенты концентрации напряжений на тонких пластинах с круглыми отверстиями и жесткими включениями рассмотрено, в частности, в [16].



**Рис. 6. Стержень квадратного сечения и его геометрические параметры [Figure 6. The bar of square section and its geometrical parameters]**

На рис. 7 приведена картина распределения напряжений  $\sigma_x$  в стержне при  $\nu = 0,1$ . Табличные значения максимальных напряжений в точках T1, T2, T4 и T5 (по рис. 7) приведены в таблице.



**Рисунок 7. Распределение напряжений  $\sigma_x$  в стержне [Figure 7. Stress  $\sigma_x$  distribution in the bar]**

**Величины максимальных напряжений в области заделки [Table. Maximum stress values in the fixed support area]**

Таблица

Точки [Points]	Максимальные напряжения $\sigma_x$ , МПа [Maximum stresses $\sigma_x$ , MPa]		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,49$
T1	209,278	225,751	281,955
T2	202,375	206,731	227,433
T4	202,375	206,731	227,433
T5	195,472	189,366	174,631

Как видно из рис. 7 в угловых точках в области крепления наблюдается концентрация напряжений  $\sigma_x$ . То есть расчет стержня трехмерными элементами позволяет улавливать изменения напряжений по всем трем координатам. Этот факт является важным обстоятельством как для проектировщиков, так и для эксплуатационников.

Из таблицы видно, что чем выше коэффициент Пуассона  $\nu$ , тем значительнее перераспределение напряжений в сечении заделки.

**Заключение**

По результатам исследования можно заключить следующее:

- 1) расчет стержня по трехмерной схеме позволяет определять концентрацию напряжений;
- 2) в стержнях концентрация продольных напряжений наблюдается в угловых точках области крепления;
- 3) в центральной области сечения стержня вблизи заделки напряжения падают;

4) с увеличением коэффициента Пуассона  $\nu$  концентрация напряжений возрастает более интенсивно, чем при малых значениях коэффициента  $\nu$ ;  
 5) в армированных стержнях (стойках градилен) на кромках вследствие концентрации напряжений возникают трещины, начинается коррозионный износ арматуры. При этом коррозия способствует дальнейшему развитию трещины до полных разрывов, как это наблюдается на практике.

© Якупов С.Н., Киямов Х.Г., Якупов Н.М., Хасанова Л.И., Бикмухамметов И.И., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### Список литературы

1. *Neuber H.* Theory of Notch Stress. Ann Arbor, Michigan: J.W. Edwards, 1946. 204 p.
2. *Peterson R.E.* Stress Concentration Factors. New York: J. Wiley & Sons, 1974.
3. *Collins J.A.* Failure of Materials in Mechanical Design. Analysis, Prediction, Prevention / The Ohio State University. New York: J. Wiley & Sons, 1981.
4. *Якупов Н.М.* Механика: проблема – идея – практика. Казань: Казан. гос. ун-т, 2010. 161 с.
5. *Кантюков Р.А., Тамеев И.М., Якупов Н.М., Абдюшев А.А., Якупов С.Н.* Локальные «лечащие» накладки покрытия // Коррозия ТНГ. 2011. № 1 (18). С. 68–71.
6. *Якупов Н.М., Ризаева А.И., Хуснутдинов А.Э., Муджадиди А.Ш.* Концентрация напряжений в растянутом стержне в области заделки // Труды VIII Международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2015». М.: РУДН, 2015. С. 69–73.
7. *Shardakov I.N., Kosheleva N.A., Serovaev G.S., Shestakov A.P., Shipunov G.S.* The stress-strain state analysis and structural evaluation of PCM construction consisting of heterogeneous elements // International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET). 2018. Vol. 9. Issue 10. P. 1157–1171.
8. *Gunakala S. Rao., Comissiong D.M.G., Jordan K., Alana S.* A Finite Element Solution of the Beam Equation via MATLAB // International Journal of Applied Science and Technology. 2012. Vol. 2. No. 8. P. 80–88.
9. *Сидоренко С.Н., Якупов Н.М.* Коррозия – союзник аварий и катастроф: монография. М.: Изд-во РУДН, 2002. 93 с.
10. *Низамов Х.Н., Сидоренко С.Н., Якупов Н.М.* Прогнозирование и предупреждение коррозионного разрушения конструкций. М.: Изд-во РУДН, 2006. 355 с.
11. *Якупов Н.М., Гиниятуллин Р.Р., Якупов С.Н.* Влияние характера деформирования поверхности элементов конструкции на коррозионный износ // Проблемы прочности. 2012. № 2. С. 76–84.
12. *Yakupov N.M., Giniyatullin R.R., Yakupov S.N.* The influence of the character of deformation of structural element surfaces on the corrosive wear // Strength of materials. Pp. 170–176.
13. *Meneghetti G., Guzzella C.* The peak stress method to estimate the mode I notch stress intensity factor in welded joints using three-dimensional finite element models // Engineering Fracture Mechanics. 2014. Vol. 115. Pp. 154–171.
14. *You F.X.* The Spline Finite Element Method for the Analysis of the Dynamic Response of Composite Material Plate // Advanced Materials Research. 2011. Vol. 168–170. Pp. 1837–1845.
15. *Якупов Н.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Киямов И.Х.* Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. № 1. С. 145–154.
16. *Lim T.C.* Stress Concentration Factors in Auxetic Rods and Plates // Applied Mechanics and Materials. 2013. Vol. 394. Pp. 134–139.

### Об авторах

**Якупов Самат Нухович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФГБУН «Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр Российской академии наук”» (Казань, Россия). eLIBRARY SPIN-код: 7382-4759. Scopus Author ID: 26968046600). *Область научных интересов:* конструкции зданий и сооружений, механика тонкостенных конструкций, механика пленок и мембран, композиционные структуры, адгезия. *Контактная информация:* e-mail – [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

**Киямов Хаким Габдрахманович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФГБУН «Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр Российской академии наук”» (Казань, Россия). *Область научных интересов:* конструкции зданий и сооружений, механика тонкостенных конструкций, механика пленок и мембран, композиционные структуры, адгезия. *Контактная информация:* e-mail – [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

**Якупов Нух Махмудович** – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФГБУН «Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр Российской академии наук”» (Казань, Россия). eLIBRARY SPIN-код: 2933-5615. Scopus Author ID: 6508072220). *Область научных интересов:* конструкции зданий и сооружений, механика тонкостенных конструкций, механика пленок и мембран, композиционные структуры, адгезия. *Контактная информация:* e-mail – [uzsgr@kfti.knc.ru](mailto:uzsgr@kfti.knc.ru)

**Хасанова Лейсан Ильнуровна** – магистр ФГБОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет» (Казань, Россия). *Область науч-*

ных интересов: конструкции зданий и сооружений. Контактная информация: e-mail – leisanka15@mail.ru  
**Бикмухамметов Ильнар Ильдарович** – магистр Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Казанский государственный архитектурно-строительный университет» (Казань, Россия). Область научных интересов: конструкции зданий и сооружений. Контактная информация: e-mail – ilnar\_27@mail.ru

*Для цитирования*  
Якупов С.Н., Киямов Х.Г., Якупов Н.М., Хасанова Л.И., Бикмухамметов И.И. Эффект концентрации напряжений в стержне прямоугольного сечения в области крепления от продольных усилий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 451–458. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-451-458

RESEARCH PAPER

## Effect of stress concentration in a beam of rectangular cross section in the region of attachment of the longitudinal efforts

Samat N. Yakupov<sup>1,2\*</sup>, Hakim G. Kiyamov<sup>1</sup>, Nukh M. Yakupov<sup>1</sup>,  
Leisan I. Khasanova<sup>1</sup>, Inar I. Bikumhammetov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences  
2/31 Lobachevsky St., PO Box 261, Kazan, Tatarstan, 420111, Russian Federation

<sup>2</sup>Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE)  
1 Zelenaya St., Kazan, Tatarstan, 420043, Russian Federation

\*Corresponding author

(received: July 19, 2018; revised: November 10, 2018; accepted: November 12, 2018)

**Abstract. Relevance.** To ensure the safe operation of buildings and structures, it is necessary to more accurately determine the stress-strain state (SSS) of structural elements, to identify areas of stress concentration. The distribution of stresses in the region of the fastening bars in three-dimensional formulation is relatively little studied. In these areas, there may be significant stress concentrations that contribute to the occurrence and development of cracks and splits, which are a harbinger of destruction. The development of modern methods of calculation, software systems and the growth of computing capabilities allow refining the design scheme: to move from one-dimensional to two-dimensional calculation scheme, from two-dimensional to three-dimensional calculation scheme. All this makes it possible to more accurately assess the SSS of structural elements and structures, to identify areas of stress concentration, as well as to investigate the effect of the Poisson's ratio on the stress concentration.

**Methods of research.** It is noted that cracks and breaks in the edges under the influence of longitudinal loads occur in the rods (racks) of square cross-section. Three-dimensional elements based on the spline version of the finite element method and the LIRA computational complex are used to estimate the stress-strain state. The spline finite element method, thanks to the synthesis of the idea of parametrization and the finite element method (FEM) with cubic approximation of all three required variables within each element, allows obtaining consistent three-dimensional finite elements. On the basis of the mentioned methods and complexes, numerical studies of the stress concentration in the bars of square and rectangular cross-sections fixed at one end and perceiving the tensile forces at the other end are performed.

**Conclusions.** It is found that in the angular points of the cross section in the area of fastening of straight bars, perceiving axial tensile forces, there are stress concentrations. Away from the mounting area of the bar, the voltages are aligned. By increasing the Poisson's ratio, the stress concentration increases faster than at low values. The transition from a one-dimensional design model to a two-dimensional one, and even more so to a three-dimensional model allows to determine the stress concentration, both in plan and in thickness. Information about the concentration of stresses in elements of structures will allow designers to more accurately design structures and facilities, and the operators to promptly identify the defective region.

**Keywords:** bars, stress concentrations, tensile forces, square and rectangular cross-section, three-dimensional finite elements, fastening

## References

1. Neuber H. (1946). *Theory of Notch Stress*. Ann Arbor, Mich., J.W. Edwards, 204.
2. Peterson R.E. (1974). *Stress Concentration Factors*. New York, J. Wiley & Sons.
3. Collins J.A. (1981). *Failure of Materials in Mechanical Design. Analysis, Prediction, Prevention*. The Ohio State University; New York, J. Wiley & Sons.
4. Yakupov N.M. (2010). Mechanics: problem – idea – practice. Kazan, Kazan State University Publ., 161. (In Russ.)
5. Kantyukov R.A., Tameev I.M., Yakupov N.M., Abdushev A.A., Yakupov S.N. (2011). Local “treating” overlays-coatings. *Territorija Neftegas*, 1(18), 68–71.
6. Yakupov N.M., Rizaeva A., Khusnutdinov A.E., Mojaddidi A.S. (2015). Concentration of stresses in the stretched rod in the region of the seal. *Proceedings of VIII International Scientific-Practical Conference “Engineering systems – 2015”*. Moscow, RUDN Publ., 69–73. (In Russ.)
7. Shardakov I.N., Kosheleva N.A., Serovaev G.S., Shestakov A.P., Shipunov G.S. (2018). The stress-strain state analysis and structural evaluation of PCM construction consisting of heterogeneous element. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET)*, 9(10), 1157–1171.
8. Gunakala S.R., Comissiong D.M.G., Jordan K., Sankar A. (2012). A Finite Element Solution of the Beam Equation via MATLAB. *International Journal of Applied Science and Technology*, 2(8), 80–88.
9. Sidorenko S.N., Yakupov N.M. (2002). *Corrosion is an ally of accidents and catastrophes*. 93.
10. Nizamov H.N., Sidorenko S.N., Yakupov N.M. (2006). *Forecasting and prevention of corrosion destruction of structures*. 355.
11. Yakupov N.M., Giniyatullin R.R., Yakupov S.N. (2012). The effect of deformation of the surface structure elements on the corrosion wear. *Strength problems*, 2, 76–84.
12. Yakupov N.M., Giniyatullin R.R., Yakupov S.N. (2012). The influence of the character of deformation of structural element surfaces on the corrosive wear. *Strength of materials*, 170–176.
13. Meneghetti G., Guzzella C. (2014). The peak stress method to estimate the mode I notch stress intensity factor in welded joints using three-dimensional finite element models. *Engineering Fracture Mechanics*, 115, 154–171.
14. You F.X. (2011). The Spline Finite Element Method for the Analysis of the Dynamic Response of Composite Material Plate. *Advanced Materials Research*, 168–170, 1837–1845.
15. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Yakupov S.N., Kiyamov I.Kh. (2011). Modeling of structural elements of complex geometry by three-dimensional finite elements. *Mechanics of composite materials and structures*, (1), 145–154. (In Russ.)
16. Lim T.C. (2013). Stress Concentration Factors in Auxetic Rods and Plates. *Applied Mechanics and Materials*, 394, 134–139.

## About the authors

**Samat N. Yakupov** – Cand. Sci. (Eng.), senior researcher, Institute of Mechanics and Engineering – subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences” (Kazan, Russia). eLIBRARY SPIN-code: 7382-4759. Scopus Author ID: 26968046600. *Research interests*: structures of buildings and structures, mechanics of thin-walled structures, mechanics of films and membranes, composite structures, adhesion. *Contacts*: e-mail – [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

**Hakim G. Kiyamov** – Cand. Sci. (Eng.), senior researcher, Institute of Mechanics and Engineering – subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences” (Kazan, Russia). *Research interests*: structures of buildings and structures, mechanics of thin-walled structures, mechanics of films and membranes, composite structures, adhesion. *Contacts*: e-mail – [tamas\\_86@mail.ru](mailto:tamas_86@mail.ru)

**Nukh M. Yakupov** – Dr Sci. (Eng.), leading researcher, Institute of Mechanics and Engineering – subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific center of the Russian Academy of Sciences” (Kazan, Russia). eLIBRARY SPIN-code: 2933-5615. Scopus Author ID: 6508072220. *Research interests*: structures of buildings and structures, mechanics of thin-walled structures, mechanics of films and membranes, composite structures, adhesion. *Contacts*: e-mail – [yzsrr@kfti.knc.ru](mailto:yzsrr@kfti.knc.ru)

**Leisan I. Khasanova** – master of Architecture Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE) (Kazan, Russia). *Research interests*: construction of buildings and structure. *Contacts*: e-mail – [leisanka15@mail.ru](mailto:leisanka15@mail.ru)

**Ilnar I. Bismukhammetov** – master of Architecture Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE) (Kazan, Russia). *Research interests*: construction of buildings and structure. *Contacts*: e-mail – [ilnar\\_27@mail.ru](mailto:ilnar_27@mail.ru)

## For citation

Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M., Khasanova L.I., Bismukhammetov I.I. (2018). Effect of stress concentration in a beam of rectangular cross section in the region of attachment of the longitudinal efforts. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 451–458. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-451-458 (In Russ.)

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-459-466

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек

Ю.В. Клочков<sup>1\*</sup>, А.П. Николаев<sup>1</sup>, Т.А. Соболевская<sup>1</sup>, М.Ю. Клочков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Волгоградский государственный аграрный университет  
Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр., 26

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

\*Автор, ответственный за переписку

(поступила в редакцию: 12 августа 2018 г.; доработана: 15 октября 2018 г.; принята к публикации: 28 октября 2018 г.)

**Актуальность.** Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных оболочек, учитывая сложность получения численных результатов, была разработана теория тонких оболочек с введением гипотезы прямой нормали для сведения трехмерного НДС к двумерному. При современном развитии цифровой техники и численных методов расчета, в частности метода конечных элементов (МКЭ), появилась возможность получения численных результатов без использования гипотезы прямой нормали, а именно на основе теории упругости в трехмерной постановке даже для тонких оболочек.

**Цели.** Целью настоящей работы является сравнение эффективности алгоритмов использования матриц жесткости конечных элементов, полученных на основе теории тонких оболочек с гипотезой прямой нормали и на основе соотношений трехмерной теории упругости.

**Методы.** Представлены результаты сравнительного анализа конечно-элементных расчетов тонких оболочек при использовании двумерного элемента дискретизации в форме четырехугольного фрагмента срединной поверхности и трехмерного элемента в виде восьмиузлового шестигранника. В качестве узловых варьируемых параметров выбирались компоненты вектора перемещения и их первые производные. Функции формы для обоих типов элементов дискретизации были представлены произведениями полиномов Эрмита третьей степени.

**Результаты.** На примере расчета защемленной по торцам цилиндрической оболочки показано, что двумерная постановка в расчетах тонких оболочек является адекватной и позволяет получать приемлемые результаты при оптимальных затратах машинного времени.

**Ключевые слова:** двумерный элемент, трехмерный элемент, узловые неизвестные, сетка дискретизации

### Введение

Тонкостенные конструкции из пластин и оболочек являются неотъемлемой частью современных зданий, сооружений и архитектурных форм [1–3]. В настоящее время при анализе НДС конструкций из оболочек на первый план выдвинулись преимущественно численные методы расчета [4–10], в частности МКЭ [11–18].

В наши дни матрицы жесткости конечных элементов формируются на основе двух теорий: теории тонких оболочек с использованием теории прямой нормали для сведения трехмерного НДС к двумерному состоянию, а также соотношений теории упругости без дополнительных гипотез о деформировании нормального элемента.

В последнее время многими исследователями, занимающимися данной проблематикой, высказывается мнение о том, что при построении конечно-элементных моделей оболочечных конструкций предпочтение следует отдавать трехмерным конечным элементам как наиболее универсальным. При этом в качестве основных геометрических соотношений рекомендуется использовать соотношения теории упругости. Данный подход является вполне обоснованным при исследовании НДС оболочечных конструкций средней толщины и толстостенных сосудов. Однако, использование трехмерных конечных элементов при анализе НДС тонких оболочек является не вполне оправданным и требует детального обоснования. В связи с этим достаточно актуальной остается задача сравнитель-

ного анализа эффективности использования двух- и трехмерных конечных элементов при определении НДС тонких оболочек.

В настоящей работе на примере расчета жестко-зашемленной по торцам цилиндрической оболочки выполнен сравнительный анализ точности конечно-элементных решений, полученных при использовании двух- и трехмерных элементов дискретизации.

### Геометрия оболочки

Радиус-вектор, задающий срединную поверхность эллиптического цилиндра, может быть представлен выражением

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(\theta)\sin\theta\vec{j} + r(\theta)\cos\theta\vec{k}, \quad (1)$$

где  $x$  – осевая координата,  $\theta$  – угол, отсчитываемый от оси  $Oz$  против хода часовой стрелки в плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$ .

Входящие в (1) функция  $r(\theta)$  определяется формулой

$$r(x, \theta) = \frac{bc}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2)$$

где  $b$  и  $c$  – параметры эллипса.

Ковариантные векторы локального базиса точки срединной поверхности определяются дифференцированием (1) по  $x$  и  $\theta$

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,\theta}^0 = (r_{,\theta}(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)\vec{j} + \\ &+ (r_{,\theta}(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta)\vec{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Орт нормали к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / |\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|. \quad (4)$$

Произведение векторов локального базиса (3), (4) по  $x$ ,  $\theta$  могут быть представлены в матричном виде следующим образом

$$\left\{ \vec{a}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[ m^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{a}^0 \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \vec{a}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[ n^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{a}^0 \right\}_{3 \times 1}, \quad (5)$$

где

$$\left\{ \vec{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{a}_1^0 \ \vec{a}_2^0 \ \vec{a}^0 \right\}; \quad \left\{ \vec{a}_{,x}^0 \right\}_{1 \times 3}^T =$$

$$= \left\{ \vec{a}_{1,x}^0 \ \vec{a}_{2,x}^0 \ \vec{a}_{,x}^0 \right\}; \quad \left\{ \vec{a}_{,\theta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \vec{a}_{1,\theta}^0 \ \vec{a}_{2,\theta}^0 \ \vec{a}_{,\theta}^0 \right\};$$

матрица  $[m^0]$  – нулевая, а в матрице  $[n^0]$  ненулевыми элементами являются  $n_{22}$ ,  $n_{23}$  и  $n_{32}$ .

Положение точки оболочки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $t$  в исходном  $M^{0t}$  и деформированном  $M^t$  состояниях, определяется соответствующими радиус-векторами

$$\vec{R}^{0t} = \vec{R}^0 + t\vec{a}^0; \quad \vec{R}^t = \vec{R}^{0t} + \vec{V}, \quad (6)$$

где  $\vec{V}$  – вектор перемещения точки из положения  $M^{0t}$  в положение  $M^t$ .

Дифференцированием (6) по  $x$ ,  $\theta$  и  $t$  могут быть получены ковариантные векторы базиса исходного и деформированного состояний

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{0t} = \vec{a}_1^0; \quad \vec{g}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^{0t} = \vec{a}_2^0 (1 + tn_{32}); \\ \vec{g}_3^0 &= \vec{R}_{,t}^{0t} = \vec{a}^0; \\ \vec{g}_1^t &= \vec{R}_{,x}^t = \vec{g}_1^0 + \vec{V}_{,x}; \quad \vec{g}_2^t = \vec{R}_{,\theta}^t = \vec{g}_2^0 + \vec{V}_{,\theta}; \\ \vec{g}_3^t &= \vec{R}_{,t}^t = \vec{g}_3^0 + \vec{V}_{,t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Входящие в (7) производные вектора перемещения точки  $M^{0t}$  могут быть представлены компонентами, отнесенными к базису отсчетной поверхности

$$\begin{aligned} \vec{V}_{,x} &= t_1^1 \vec{a}_1^0 + t_1^2 \vec{a}_2^0 + t_1 \vec{a}^0; \\ \vec{V}_{,\theta} &= t_2^1 \vec{a}_1^0 + t_2^2 \vec{a}_2^0 + t_2 \vec{a}^0; \\ \vec{V}_{,t} &= t_3^1 \vec{a}_1^0 + t_3^2 \vec{a}_2^0 + t_3 \vec{a}^0. \end{aligned} \quad (8)$$

Ковариантные компоненты тензора деформаций могут быть получены из известного соотношения механики сплошной среды

$$\varepsilon_{mn}^t = (\mathbf{g}_{mn} - \mathbf{g}_{mn}^0) / 2. \quad (9)$$

Входящие в (9) ковариантные компоненты метрического тензора определяются скалярными произведениями (7)

$$\mathbf{g}_{mn}^0 = \vec{g}_m^0 \cdot \vec{g}_n^0; \quad \mathbf{g}_{mn} = \vec{g}_m \cdot \vec{g}_n. \quad (10)$$

Соотношения (8) в развернутом виде для трехмерной формулировки будут иметь следующую структуру

$$\varepsilon_{11}^t = t_1^1; \quad 2\varepsilon_{12}^t = t_2^1 + a_{22}^0 t_1^2 + a_{22}^0 n_{32} t \cdot t_1^2;$$

$$2\varepsilon_{13}^t = t_3^1 + t_1;$$

$$\varepsilon_{22}^t = a_{22}^0 t_2^2 + a_{22}^0 n_{32} t \cdot t_2^2;$$

$$2\varepsilon_{23}^t = a_{22}^0 t_3^2 + a_{22}^0 n_{32} t \cdot t_3^2 + t_2; \quad \varepsilon_{33}^t = t_3, \quad (11)$$

где  $a_{22}^0 = \bar{a}_2^0 \cdot \bar{a}_2^0$ .

### Элементы дискретизации

Элементом дискретизации в двумерной постановке выбирается четырехугольный фрагмент срединной поверхности с узлами  $i, j, k, l$ , расположенными в его вершинах. Столбцы узловых неизвестных в локальной  $\xi, \eta$  и глобальной  $x, \theta$  системах координат имеют следующий вид [19]:

$$\left\{ U_y^L \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^{2L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^L \right\}_{1 \times 12}^T \right\}; \quad (12)$$

$$\left\{ U_y^G \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1G} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^{2G} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^G \right\}_{1 \times 12}^T \right\}, \quad (13)$$

где  $\left\{ q_y^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i \dots q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i \dots q_{,\eta}^l \right\};$

$$\left\{ q_y^G \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l q_{,x}^i \dots q_{,x}^l q_{,\theta}^i \dots q_{,\theta}^l \right\};$$

$q$  – компонента вектора перемещения точки срединной поверхности.

Элементы матрицы-строки функций формы  $\{\varphi\}^T$  для двумерного элемента дискретизации представлены диадными произведениями полиномов Эрмита третьей степени

$$q = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ q_y^L \right\}_{12 \times 1}^T. \quad (14)$$

В качестве объемного элемента дискретизации выбирается восьмиузловой шестигранник с узлами  $i, j, k, l, m, n, p, h$ , расположенными в его вершинах [20].

Столбцы узловых неизвестных трехмерного элемента дискретизации в локальной  $\xi, \eta, \zeta$  и глобальной  $x, \theta, t$  системах координат имеют следующую структуру:

$$\left\{ U_y^L \right\}_{1 \times 96}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1L} \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ v_y^{2L} \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ v_y^L \right\}_{1 \times 32}^T \right\}; \quad (15)$$

$$\left\{ U_y^G \right\}_{1 \times 96}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1G} \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ v_y^{2G} \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ v_y^G \right\}_{1 \times 32}^T \right\}, \quad (16)$$

где  $\left\{ q_y^L \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l q^m q^n q^p q^h q_{,\xi}^i \dots q_{,\xi}^h q_{,\eta}^i \dots q_{,\eta}^h q_{,\zeta}^i \dots q_{,\zeta}^h \right\};$

$$\left\{ q_y^G \right\}_{1 \times 32}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l q^m q^n q^p q^h q_{,x}^i \dots q_{,x}^h q_{,\theta}^i \dots q_{,\theta}^h q_{,t}^i \dots q_{,t}^h \right\};$$

$q$  – компонента вектора перемещения  $\vec{V}$  точки  $M^{0t}$ , отстоящей от отсчетной поверхности на расстоянии  $t$ .

В трехмерном элементе дискретизации функции формы представляют собой триадные произведения полиномов Эрмита третьей степени:

$$q = \left\{ \psi \right\}_{1 \times 32}^T \left\{ q_y^L \right\}_{32 \times 1}^T. \quad (17)$$

Матрицы жесткости и столбцы узловых двух- и трехмерного элементов дискретизации формировались стандартным образом путем минимизации функционала Лагранжа [12; 17; 21].

### Пример расчета

Было исследовано НДС жестко защемленного по торцам цилиндра, нагруженного внутренним давлением интенсивности  $q$ . Приняты следующие исходные данные: радиус срединной поверхности  $R = 1,0$  м; длина образующей  $L = 1,0$  м; толщина стенки  $h = 0,02$  м;  $q = 5$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0,3$ .

Расчеты выполнялись по двум вариантам: в первом в качестве элемента дискретизации использовался двумерный конечный элемент  $36 \times 36$  с девятью неизвестными в узле (12), (13); во втором применялся объемный конечный элемент  $96 \times 96$  с двенадцатью узловыми варьируемыми параметрами. В первом варианте при интерполировании по площади элемента использовалась квадратура Гаусса с  $6 \times 6$  точками интегрирования, а по толщине – формула Симпсона с семью точками интегрирования. Во втором варианте при интегрировании по объему элемента также использовалась квадратура Гаусса с  $6 \times 6 \times 6$  точками интегрирования. В силу наличия плоскостей симметрии рассчитывалась 1/8 часть цилиндра.

Результаты повариантных расчетов представлены в табл. 1, в которой приведены значения меридиональных напряжений на внутренней  $\sigma^e$  и наружной  $\sigma^n$  поверхностях цилиндра в опорном и пролетном сечениях в зависимости от густоты сетки дискретизации, причем во втором варианте

толщина сетки цилиндра моделировалась только одним рядом объемных конечных элементов. Анализ данных, представленных в таб. 1, показывает, что и в первом, и во втором вариантах расчета наблюдается устойчивая сходимости вычисли-

тельного процесса. Однако значения напряжений в опорном сечении во втором варианте оказались существенно меньше (примерно на 100 МПа) по сравнению с первым вариантом расчета.

Таблица 1

Численные значения напряжений при использовании дву- и трехмерного конечных элементов  
[Table 1. Numerical stress values using two- and three-dimensional finite elements]

Вариант расчета [Variant of calculation]	Сетка дискретизации [Sampling grid]	Сечение [Section]				Общее число неизвестных [Total number of unknowns]
		Опорное [Reference]		Пролетное [Span]		
		Напряжения, МПа [Stress, MPa]				
$\sigma^e$	$\sigma^u$	$\sigma^e$	$\sigma^u$			
I	2×9	460,1	-339,9	68,45	50,93	78
	2×17	475,5	-356,0	68,01	51,38	158
	2×33	479,6	-360,2	67,90	51,48	318
	2×65	480,7	-361,3	67,88	51,51	638
	2×97	480,9	-361,5	67,87	51,51	958
II	2×9×2	341,6	-230,5	63,85	53,60	216
	2×17×2	375,6	-263,6	64,45	53,52	440
	2×33×2	381,0	-267,5	64,57	53,55	888
	2×65×2	381,8	-266,7	64,61	53,57	1784
	2×97×2	382,4	-266,5	64,62	53,58	2680
	2×129×2	383,0	-266,7	64,62	53,58	3576

Таблица 2

Численные значения напряжений при использовании трехмерного конечного элемента с дополнительной дискретизацией цилиндра по толщине  
[Table 2. Numerical stress values using a three-dimensional finite element with additional thickness discretization of the cylinder]

Число рядов элементов по толщине цилиндра [The number of rows of elements through the thickness of the cylinder]	Сетка дискретизации [Sampling grid]	Сечение [Section]				Общее число неизвестных [Total number of unknowns]
		Опорное [Reference]		Пролетное [Span]		
		Напряжения, МПа [Stress, MPa]				
$\sigma^e$	$\sigma^u$	$\sigma^e$	$\sigma^u$			
2	2×9×3	370,3	-254,2	65,27	52,76	324
	2×17×3	423,4	-299,5	65,27	52,76	660
	2×33×3	439,4	-305,8	65,53	52,62	1332
	2×65×3	445,8	-308,2	65,61	52,59	2676
	2×97×3	448,0	-310,4	65,63	52,58	4020
	2×129×3	449,2	-311,9	65,64	52,58	5364
3	2×9×4	378,0	-260,7	64,57	53,11	432
	2×17×4	442,0	-314,3	65,43	52,63	880
	2×33×4	471,8	-330,4	65,69	52,47	1776
	2×65×4	487,9	-340,1	65,78	52,43	3568
	2×97×4	491,7	-343,6	65,80	52,43	5360
	2×129×4	492,8	-345,0	65,81	52,43	7152

В табл. 2 приведены результаты второго варианта расчета при дополнительном разбиении стенки цилиндра по толщине на 2 и 3 элемента. Анализ значений напряжений, представленных в табл. 2, показывает, что и при разбиении сетки цилиндра по толщине на 2 ряда объемных конечных элемен-

тов значения напряжений в опорном сечении оказались заниженными примерно на 10 % по сравнению с первым вариантом расчета. И только при разбиении стенки цилиндра по толщине на 3 ряда объемных элементов значения напряжений в опорном сечении достигли уровня значений напряжений перво-

го варианта расчета (при сетке дискретизации по площади  $2 \times 65$ ). Значения напряжений в пролетном сечении оказались примерно одинаковыми в обоих вариантах расчета при любой сетке дискретизации.

### Заключение

Учитывая, что общее число искомым неизвестных при сетке  $2 \times 65$  в первом варианте расчета в 5,6 раза меньше, чем во втором варианте при аналогичной сетке дискретизации (при разбиении стенки цилиндра по толщине на 3 ряда элементов), можно сделать вывод о том, что использование двумерных элементов дискретизации при анализе НДС тонких оболочек вполне обосновано и является более целесообразным с точки зрения затрат машинного времени и ресурсов применяемой компьютерной техники.

© Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Клочков М.Ю., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 18-41-343003 р\_мол\_a.

### Список литературы

1. *Кривошапко С.Н., Галишиникова В.В.* Архитектурно-строительные конструкции: учебник для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2015. 476 с.
2. *Krivoshapko S.N., Gil-oulbé M.* Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids // *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*. 2013. Vol. 3. Issue 3. Pp. 71–73.
3. *Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L.* Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells // *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2016. Vol. 10. Pp. 3–28.
4. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Exact solutions of boundary-value problems for noncircular cylindrical shells // *International Applied Mechanics*. 2016. Vol. 54. No. 4. Pp. 386–397.
5. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Analytical-numerical solution of static problems for noncircular cylindrical shells of variable thickness // *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53. No. 3. Pp. 313–325.
6. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Stress state of branched shells of revolution subject to transverse shear and reduction // *International Applied Mechanics*. 2015. Vol. 51. No. 4. Pp. 410–419.

7. *Пятикрестовский К.П., Травуш В.И.* О программировании нелинейного метода расчета деревянных конструкций // *Academia. Архитектура и строительство*. 2015. № 2. С. 115–119.

8. *Solodovnikov A.S., Sheshenin S.V.* Numerical study of strength properties for a composite material with short reinforcing fibers // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017. Vol. 72. No. 4. Pp. 94–100.

9. *Ким А.Ю.* Итерационный метод приращений параметров для расчета нелинейных мембранно-пневматических систем с учетом упругой работы воздуха // *Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н.И. Вавилова*. 2005. № 1. С. 39–42.

10. *Paimushin V.N.* On the forms of loss of stability of a cylindrical shell under an external side pressure // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Vol. 80. No. 1. Pp. 65–72.

11. *Игнатъев А.В., Игнатъев В.А., Гамзатова Е.А.* Расчет тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2018. № 3 (711). С. 5–13.

12. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шугабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.

13. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Libroком, 2013. 336 с.

14. *Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V.* Non-linear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure // *Russian Aeronautics*. 2014. Vol. 57. No. 2. Pp. 118–126.

15. *Аганов В.П., Айдемиров К.Р.* Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // *Промышленное и гражданское строительство*. 2016. № 11. С. 4–7.

16. *Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Гаврюшин С.С.* Моделирование процесса деформирования и оценка несущей способности системы грунт – тонкостенная конструкция // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2014. № 6. С. 20–24.

17. *Баме К.-Ю.* Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. 1022 с.

18. *Косицын С.Б., Акулич В.Ю.* Об одном численном способе определения осадки поверхности грунтового массива, вызванной сооружением оболочки обделки тоннеля // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. Т. 14. № 1. С. 78–91.

19. *Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A.* A comparative evaluation of the scalar and vector approximations of sought quantities in the finite-element method of arbitrary shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2015. Т. 44. № 2. С. 166–172.

20. *Николаев А.П., Бандурин Н.Г., Киселев А.П., Сизых А.А.* Определение напряжений в стенках изотермического резервуара для транспортировки сжиженно-

го газа в местах действия опор // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2005. № 2. С. 54а–57.

21. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method for solid and structural mechanics. Elsevier, 2005. 631 p.

#### Об авторах

**Клочков Юрий Васильевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет (Волгоград, Россия). Опубликовал 156 научных статей, 3 монографии, 4 наименования учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693. Author ID: 161677. *Область научных интересов:* механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, геометрия поверхностей, вычислительные алгоритмы, программирование. *Контактная информация:* e-mail – klotchkov@bk.ru

**Николаев Анатолий Петрович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, Волгоградский государственный аграрный университет (Волгоград, Россия). Опубликовал 149 научных статей, 6 монографий, 5 наименований учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484. AuthorID: 161676. *Область научных интересов:* механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, геометрия поверхностей, вычислительные алгоритмы, программирование. *Контактная информация:* e-mail – anpetr40@yandex.ru

**Соболевская Татьяна Алексеевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет (Волгоград, Россия). Опубликовала 46 научных статей. eLIBRARY SPIN-код: 6665-9906. AuthorID: 664693. *Область научных интересов:* расчет напряженно-деформированного состояния произвольных тонкостенных оболочек и их сочленений на основе метода конечных элементов при использовании скалярной и векторной интерполяционных процедур. *Контактная информация:* e-mail – moonway13@rambler.ru

**Клочков Михаил Юрьевич** – студент третьего курса физического факультета, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия). Опубликовал 5 научных статей. eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955. AuthorID: 971170. *Область научных интересов:* механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, физика, квантовая механика, программирование. *Контактная информация:* e-mail – m.klo4koff@yandex.ru

#### Для цитирования

Клочков Ю.В., Николаев А.П., Соболевская Т.А., Клочков М.Ю. Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов различной мерности при анализе НДС тонких оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 459–466. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-459-466

RESEARCH PAPER

## Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells

Yuriy V. Klochkov<sup>1\*</sup>, Anatoliy P. Nikolaev<sup>1</sup>, Tatyana A. Sobolevskaya<sup>1</sup>, Mikhail Yu. Klochkov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Volgograd State Agricultural University  
26 University Ave., Volgograd, 400002, Russian Federation

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow state University  
1 Leninskiye Gory, Moscow, 119899, Russian Federation

\*Corresponding author

(received: August 12, 2018; revised: October 15, 2018; accepted: October 28, 2018)

**Abstract. Relevance.** To determine the stress-strain state (SSS) of thin-walled shells due to the complexity of obtaining numerical results, the theory of thin shells was developed with the introduction of the direct normal hypothesis to reduce the three-dimensional SSS to the two-dimensional one. With the modern development of digital technology and numerical methods of calculation, in particular the finite element method (FEM), it became possible to obtain numerical results without the use of the direct normal hypothesis, namely on the basis of the theory of elasticity in three-dimensional formulation even for thin shells.

**Aims.** The aim of this work is to compare the efficiency of algorithms for the use of finite element stiffness matrices obtained on the basis of the theory of thin shells with the hypothesis of a straight normal and on the basis of the relations of the three-dimensional theory of elasticity.

**Methods.** The results of comparative analysis of finite element calculations of thin shells using a two-dimensional sampling element in the form of a quadrangular fragment of the middle surface and a three-dimensional element in the form

of an eight-node six-face are presented. The components of the displacement vector and their first derivatives were chosen as the nodal variable parameters. The functions of the form for both types of discretization elements were represented by products of Hermite polynomials of the third degree.

**Results.** On the example of calculation of the cylindrical shell clamped at the ends it is shown that the two-dimensional statement in calculations of thin shells is adequate and allows to receive acceptable results at optimum costs of machine time.

**Keywords:** two-dimensional element, three-dimensional element, the nodal unknowns, the mesh discretization

### Acknowledgements

The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as part of the research project No. 18-41-343003 p\_mol\_a.

### References

1. Krivoshapko S.N., Galishnikova V.V. (2015). *Arhitekturno-stroitel'nye konstrukcii: uchebnyk dlya akademicheskogo bakalavriata [Architectural and building structures: a textbook for academic undergraduate]*. Moscow, Urait Publ., 476. (In Russ.)
2. Krivoshapko S.N., Gil-Oulbe M. (2013). Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids. *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*, 3(3), 71–73.
3. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. (2016). Geometry, static, vibration and bucking analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells. *The Open Construction and Building Technology Journal*, 10, 3–28.
4. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. (2016). Exact solutions of boundary-value problems for noncircular cylindrical shells. *International Applied Mechanics*, 54(4), 386–397.
5. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. (2017). Analytical-numerical solution of static problems for noncircular cylindrical shells of variable thickness. *International Applied Mechanics*, 53(3), 313–325.
6. Bespalova E.I., Urusova G.P. (2015). Stress state of branched shells of revolution subject to transverse shear and reduction. *International Applied Mechanics*, 51(4), 410–419.
7. Pyatikrestovskiy K.P., Travush V.I. (2015). O programmirovanii nelineynogo metoda rascheta derevyannykh konstruktsiy [On programming non-linear method for calculating wooden structures]. *Academia. Arhitektura i stroitel'stvo*, (2), 115–119. (In Russ.)
8. Solodovnikov A.S., Sheshenin S.V. (2017). Numerical study of strength properties for a composite material with short reinforcing fibers. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 72(4), 94–100.
9. Kim A.Yu. (2005). Iteratsionniy metod prirascheniy parametrov dlya rascheta nelineynykh membranno-pnevmaticheskikh sistem s uchedom uprugoy raboty vozduha [Iterative method of increments of parameters for the calculation of nonlinear membrane-pneumatic systems, taking into account the elastic operation of the air]. *Vestnik Saratovskogo gosagrouniversiteta im. N.I. Vavilova*, (1), 39–42. (In Russ.)
10. Paimushin V.N. (2016). On the forms of loss of stability of a cylindrical shell under an external side pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 80(1), 65–72.
11. Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Gazmatova E.A. (2018). Raschet tonkih plastin po metodu konechnykh elementov v forme klassicheskogo smeshannogo metoda s isklyucheniem peremesheniy konechnykh elementov kak zhestkogo tselogo [Calculation of thin plates according to the finite element method in the form of the classical mixed method with the exception of the displacements of finite elements as a rigid whole]. *Izvestiya visshih uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo*, 3(711), 5–13. (In Russ.)
12. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. (2006). Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktsiy [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 392. (In Russ.)
13. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A. (2013). Nelineynoe deformirovaniye i ustoychivost' uprugih obolochek neodnorodnoy strukturi: modeli, metody, algoritmy, maloizuhennyye i novyye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of an inhomogeneous structure: models, methods, algorithms, little-studied and new problems]. Moscow, Librikom publ., 336. (In Russ.)
14. Zhelezov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. (2014). Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure. *Russian Aeronautics*, 57(2), 118–126.
15. Agapov V.P., Aydemirov K.R. (2016). Raschet ferm metodom konechnykh elementov s uchedom geoetricheskoy nelineynosti [Calculation of farms by the method of finite elements with regard to geometric nonlinearity]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and civil engineering]*, (11), 4–7. (In Russ.)
16. Kayumov P.A., Shakirzyanov F.R., Gavryushin S.S. (2014). Modelirovaniye protsessa deformirovaniya i otsenka nesuschey sposobnosti sistemy grunt – tonkostennaya konstruktsiya [Simulation of the deformation process and assessment of the bearing capacity of the soil system – thin-walled structure]. *Izvestiya visshih uchebnykh zavedeniy. Mashinostroeniye*, (6), 20–24. (In Russ.)
17. Bate K.-Yu. (2010). *Methody konechnykh elementov*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1022. (In Russ.)
18. Kositsyn S.B., Akulich V.Yu. (2018). Ob odnom chislennom sposobe opredeleniya osadki poverhnosti gruntovogo massiva, vizvannoy sooruzheniem obolochki obdelki tonnelya [On one numerical method for determining the precipitation of the surface of the soil massif, caused by the construction of the shell of the tunnel lining]. *Inter-*

*national Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 14(1), 78–91. (In Russ.)

19. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A. (2015). A comparative evaluation of the scalar and vector approximations of sought quantities in the finite-element method of arbitrary shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 44(2), 166–172.

20. Nikolaev A.P., Bandurin N.G., Kiselev A.P., Sizyh A.A. (2005). Opredelenie napryazheniy v stenkah izo-termicheskogo rezervuara dlya transportirovki szhizhen-nogo gaza v mestah deystviya opor [Determination of stresses in the walls of an isothermal tank for transporting liquefied gas in places of action of supports]. *Izvestiya visshih uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Teh-nicheskie nauki*, (2), 54a–57. (In Russ.)

21. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier, 631.

#### **About the authors**

**Yuriy V. Klochkov** – Dr Sci. (Eng.), Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Volgograd State Agrarian University (Volgograd, Russia). He published 156 scientific articles, 3 monographs, 4 titles of educational literature. eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693. AuthorID: 161677. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of calculation, surface geometry, computational algorithms, programming. *Contacts*: e-mail – klotchkov@bk.ru

**Anatoliy P. Nikolaev** – Dr Sci. (Eng.), Professor, Professor of the Department of Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use, Volgograd State Agrarian Uni-

versity (Volgograd, Russia). He published 149 scientific articles, 6 monographs, 5 titles of educational literature. eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484. AuthorID: 161676. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of calculation, surface geometry, computational algorithms, programming. *Contacts*: e-mail – anpetr40@yandex.ru

**Tatyana A. Sobolevskaya** – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of Higher Mathematics Department, Volgograd State Agrarian University (Volgograd, Russia). Published 46 scientific articles. eLIBRARY SPIN-code: 6665-9906. AuthorID: 664693. *Scientific interests*: calculation of stress-strain state of arbitrary thin-walled shells and their joints based on the finite element method using scalar and vector interpolation procedures. *Contacts*: e-mail – moonway13@rambler.ru

**Mikhail Yu. Klochkov** – a third-year student of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia). He published 5 scientific articles. eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955. AuthorID: 971170. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of calculation, physics, quantum mechanics, programming. *Contacts*: e-mail – m.klo4koff@yandex.ru

#### **For citation**

Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. (2018). Comparative analysis of efficiency of use of finite elements of different dimensionality in the analysis of the stress-strain state of thin shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 459–466. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-459-466 (In Russ.)

## Расчет и проектирование строительных конструкций

УДК 533.6.011.72  
DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-467-474

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Численное моделирование фронта воздушной ударной волны при взрыве в воздухе и над землей в программном комплексе LS-DYNA

О.В. Мкртычев, А.Ю. Савенков\*

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет  
Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26

\*Автор, ответственный за переписку

(поступила в редакцию: 27 августа 2018 г.; доработана: 09 ноября 2018; принята к публикации: 12 ноября 2018 г.)

**Введение и цели.** При расчете зданий и сооружений на особые сочетания нагрузок, вызванные действием воздушных ударных волн, необходимо определить основные параметры действующей нагрузки. Нормативный подход, реализованный в современных нормативных документах, предлагает использование упрощенных методов расчета, основанных на использовании эквивалентных статических нагрузок. Целью исследования является получение основных параметров воздушных ударных волн, используя численное моделирование, а также рассмотрение характера распространения фронта ударной волны при расположении эпицентра взрыва на уровне земли и в воздухе.

**Материалы и методы.** Для получения основных параметров воздушных ударных волн рассматриваются численные методы высокой точности, реализованные в современном программном комплексе LS-DYNA. Для описания процесса взрыва используется лагранжево-эйлеровый подход.

**Результаты.** Получены изополя и графики превышения избыточного давления  $\Delta P_{\phi}$  над атмосферным в распространяющейся воздушной ударной волне при эпицентре взрыва, расположенном на уровне земли и в воздухе, а также на дальнем расстоянии от проектируемого сооружения.

**Выводы.** Рассматриваемый метод численного моделирования позволяет получить основные параметры воздушных ударных волн, которые могут быть использованы для дальнейшего расчета строительных конструкций.

**Ключевые слова:** железобетонные конструкции, взрывные воздействия, воздушная ударная волна, нелинейная динамика, явная динамика, метод конечных элементов, численные методы

#### Введение

При проектировании определенных зданий и сооружений, таких как космодромы, химзаводы, хранилища и системы транспортировки газа и пр., в соответствии с отечественными нормами<sup>1</sup> необходимо выполнять расчет на особые воздействия техногенного или природного характера. Одним из таких воздействий являются воздушные ударные волны (ВУВ).

<sup>1</sup> Федеральный закон № 68 «О защите населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера» от 11.11.1994 г.

СП 88.13330.2014. Защитные сооружения гражданской обороны. Актуализированная редакция СНиП II-11-77\*. М.: Минстрой России, 2014. 118 с.

ПиНАЭ-5.6. Нормы строительного проектирования АС с реакторами различного типа. 22 с.

Источником возникновения ВУВ является высокое давление в центре взрыва. ВУВ представляет собой область резкого сжатия воздуха, распространяющуюся во все стороны со сверхзвуковой скоростью [1]. На рис. 1 приведен закон изменения давления в некоторой точке пространства при прохождении через нее ВУВ. В этой точке мгновенно скачком повышается давление на величину избыточного давления  $\Delta P_{\phi}$  до значения  $P_{\phi}$ . В дальнейшем, по мере продвижения ударной волны, давление падает ниже атмосферного. За зоной сжатия образуется зона разряжения.

Для выполнения расчета конструкций должны быть известны следующие параметры:

- значение избыточного давления на фронте ударной волны  $\Delta P_{\phi}$ , Па;
- время действия фазы сжатия  $\tau_{+}$ , с;

- скоростной напор  $D$ , м/с;
- удельный импульс количества движения за фронтом ударной волны  $i$ , Па·с.

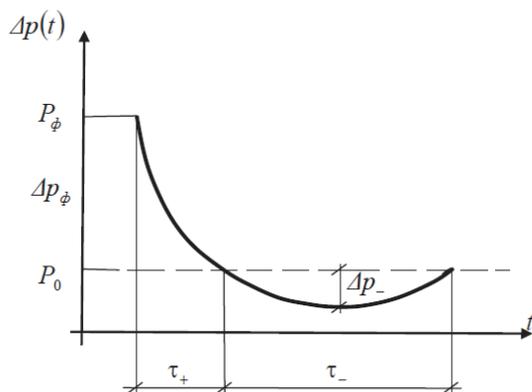


Рис. 1. Закон изменения давления в некоторой точке пространства

[Figure 1. The law of pressure change at some point in space]

При этом избыточное давление во фронте и скоростной напор являются основными характеристиками и определяют поражающее действие УВ на конструкции, а значение давления разрежения не является определяющим из-за малой величины, и им можно пренебречь.

Давление  $\Delta P_\phi$  для свободно распространяющейся сферической воздушной ударной волны убывает по мере удаления от места взрыва. Поэтому расчет его значений обычно проводится на основании соотношений, в которых давление является функцией двух аргументов – массы взрывчатого вещества (ВВ) и расстояния от места взрыва. Сложность разработки и дальнейшего использования таких аналитических выражений определяется следующим обстоятельством. Скорость спада значения  $\Delta P_\phi$  по мере удаления от места взрыва изменяется за счет влияния на ударную волну среды, в которой она распространяется. Чем больше расстояние от места взрыва, тем сильнее искажается характер изменения давления во фронте ударной волны. Для двух ударных волн, имеющих при одинаковых условиях распространения в некоторый момент времени одно и то же значение  $\Delta P_\phi$ , в последующие моменты значения  $\Delta P_\phi$  будут отличаться, если предыстория распространения этих волн была разной. Следовательно, расчетные соотношения для определения значений  $\Delta P_\phi$  в последующие моменты также должны быть разными.

По этим причинам в технической литературе [2; 3] представлен достаточно широкий спектр расчетных соотношений для определения зна-

чений  $\Delta P_\phi$ , каждое из которых имеет свою сферу применения и назначение. Например, для воздушного взрыва, наземного взрыва, малых расстояний от места взрыва, значительных расстояний от места взрыва, относительно небольших зарядов ВВ, крупных зарядов ВВ и т.д. Характер действия ударной волны зависит от рельефа местности, метеорологических условий, направления ветра, а также во многом от вида взрыва (наземный, воздушный, подземный, подводный).

**Цель исследования** – рассмотреть характер распространения фронта ВУВ при наземном и воздушном взрывах, используя численное моделирование, и получить основные параметры ВУВ для дальнейшего прочностного анализа строительных конструкций.

## Материалы и методы

Взрывное воздействие является высоконелинейным процессом, поэтому целесообразно производить расчет численными методами с помощью современных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов. Одним из таких комплексов является программный комплекс LS-DYNA, в котором реализован нелинейный динамический метод, позволяющий выполнять решение задачи во временной области с применением явных схем прямого интегрирования уравнений движения.

Для описания процесса взрыва в программном комплексе LS-DYNA будем использовать эйлеровый подход, который построен на принципе исследования поведения сред, движущихся через неподвижную расчетную сетку, когда все параметры среды рассматриваются как функции координат и времени, что дает наилучший результат при изучении поведения жидкостей или газов. В расчетах применяются произвольные лагранжево-эйлеровые сетки (ALE – Arbitrary Lagrangian-Eulerian) [4], при этом могут использоваться процедуры автоматической перестройки и сглаживания конечно-элементной сетки при вырождении элементов. Решение уравнений Эйлера выполнено с помощью метода конечных разностей [5]. Для аппроксимации уравнений в работе использован метод Годунова второго порядка точности по пространству [6]. Интегрирование уравнений по времени осуществлялось с помощью явной схемы второго порядка точности (метод центральных разностей) с соблюдением условия устойчивости схемы по критерию Куранта.

Решение газодинамической задачи в эйлеровой формулировке основывается на трех составляющих:

1) уравнение сохранения массы

$$\dot{\rho} + \rho \times \operatorname{div}(v) = 0, \quad (1)$$

где  $\dot{\rho}$  – производная плотности по времени,  $v$  – вектор скорости;

2) уравнение сохранения количества движения

$$\dot{v} = f - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(\rho); \quad (2)$$

3) уравнение сохранения энергии

$$\dot{E} + v \times \operatorname{grad}(E) - \frac{p}{\rho^2} (\dot{\rho} + v \times \operatorname{grad}(\rho)) = 0. \quad (3)$$

Уравнения 1–3 в ортогональной системе принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} + \rho \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \\ \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \\ \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dy} = 0 \\ \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = 0 \\ \frac{dE}{dt} + u \frac{dE}{dx} + v \frac{dE}{dy} + w \frac{dE}{dz} - \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} \right) = 0 \\ p = p(\rho, E) \end{array} \right., \quad (4)$$

где  $p = p(\rho, E)$  – уравнение состояния материала.

Поведение продуктов детонации тротила описывается уравнением состояния Джонса – Вилкинса – Ли (JWL) [1]

$$p = A \left( 1 - \frac{\omega}{R_1 V} \right) e^{-R_1 V} + B \left( 1 - \frac{\omega}{R_2 V} \right) e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V}, \quad (5)$$

где  $V = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{v}{v_0}$  – относительный удельный объем;  $A, B, C, R_1, R_2, \omega$  – эмпирические константы;  $E_0$  – внутренняя энергия на единицу объема;  $A, B$  и  $E_0$  – имеют единицы давления;  $R_1, R_2, \omega$  и  $v_0$  – безразмерные.

Воздушное пространство описывается полиномиальным уравнением состояния для воздушной среды

$$p = C_0 + C_1 \mu + C_2 \mu^2 + C_3 \mu^3 + (C_4 + C_6 \mu + C_7 \mu^2) E, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{1}{V} - 1, \quad (7)$$

где  $V$  – относительный объем,  $E$  – внутренняя энергия.

**Расчетная модель.** Рассмотрим основные параметры фронта ВУВ при наземном (взрыв на поверхности земли) и воздушном взрывах (при  $H < 3,5\sqrt{C}$ , где  $C$  – масса ВВ, кг) на уровне 5 м от поверхности земли. В качестве источника ВУВ примем взрывчатое вещество тринитротолуол, которое

моделировалось в виде куба с размерами сторон 0,2 м. Значение плотности заряда принято равным  $1620 \text{ кг/м}^3$ . Масса взрывчатого вещества составляет 13 кг. Воздушное пространство принято размерами  $10 \times 15 \times 20 \text{ м}(h)$ .

Введем допущение, что поверхность земли является абсолютно жесткой преградой для расширяющихся продуктов детонации заряда ВВ, и ее наличие в математической постановке учитывается соответствующими граничными условиями.

## Результаты

**Наземный взрыв.** На рис. 2, 3 рассмотрен взрыв ВВ на поверхности земли. При таком положении заряда фронт ударной волны представляет собой непрерывно увеличивающееся полушарие, распространяющееся параллельно поверхности земли. По мере удаления от центра скорость ударной волны постепенно уменьшается и ее давление также уменьшается. Давление по фронту ударной волны распределяется неравномерно.

**Воздушный взрыв.** При воздушном взрыве (рис. 4, а–г, 5) ударная волна имеет более сложную картину, чем при наземном взрыве. При воздушном взрыве образуется сферическая ударная волна, которая в ближней зоне, т.е. на расстоянии, меньшем высоты взрыва ( $R < H$ ), падает вниз и называется падающей (рис. 4, в). Дойдя до поверхности земли, ударная волна отражается, образуя

отраженную волну. Вследствие торможения частиц воздуха и сложения падающей и отраженной волн избыточное давление удваивается, образуя головную ударную волну (рис. 4, *з*). Ближняя зона называется зоной регулярного отражения. Область, где наблюдается образование и распространение

головной ударной волны, называется дальней зоной, или зоной нерегулярного отражения.

Таким образом, поражающее действие ударной волны воздушного взрыва в ближней зоне определяется давлением отраженной волны, а в дальней зоне – давлением головной ударной волны.

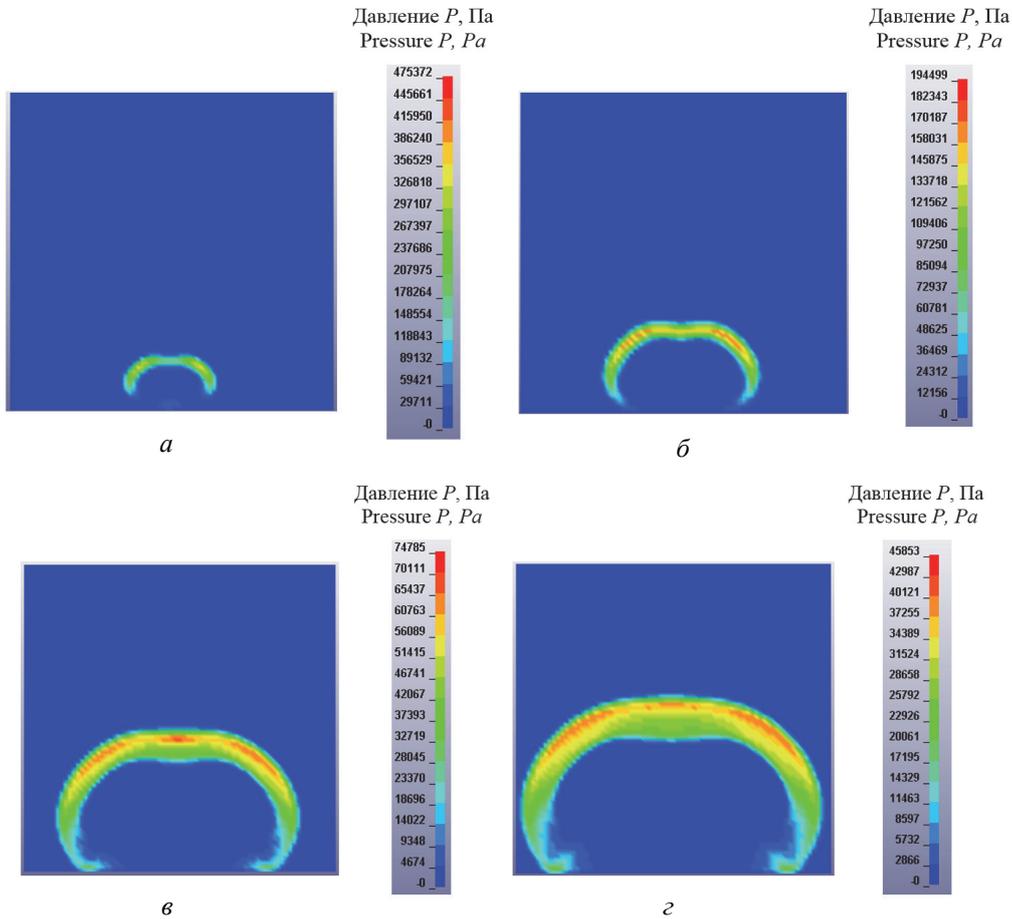


Рис. 2. Изополя давлений в моменты времени: *a* – 0,01 с; *б* – 0,018 с; *в* – 0,034 с; *з* – 0,049 с  
 [Figure 2. Isopoles of pressures at time points: *a* – 0,01 s; *б* – 0,018 s; *в* – 0,034 s; *з* – 0,049 s]

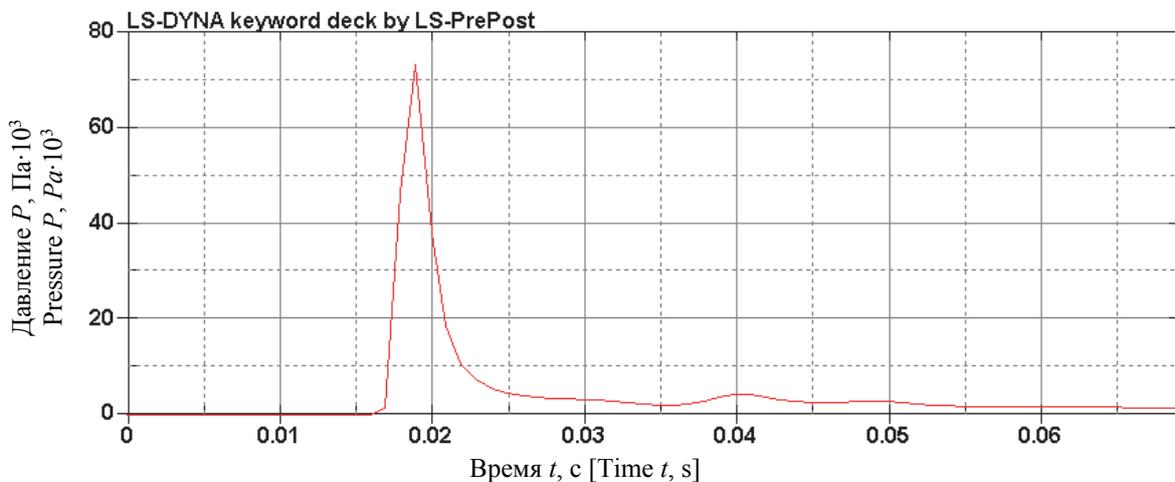


Рис. 3. График приращения давления  $\Delta P_\Phi$  во времени на расстоянии 8 м от центра взрыва  
 [Figure 3. Graph of pressure increment  $\Delta P_\Phi$  in time at a distance of 8 m from the center of the explosion]

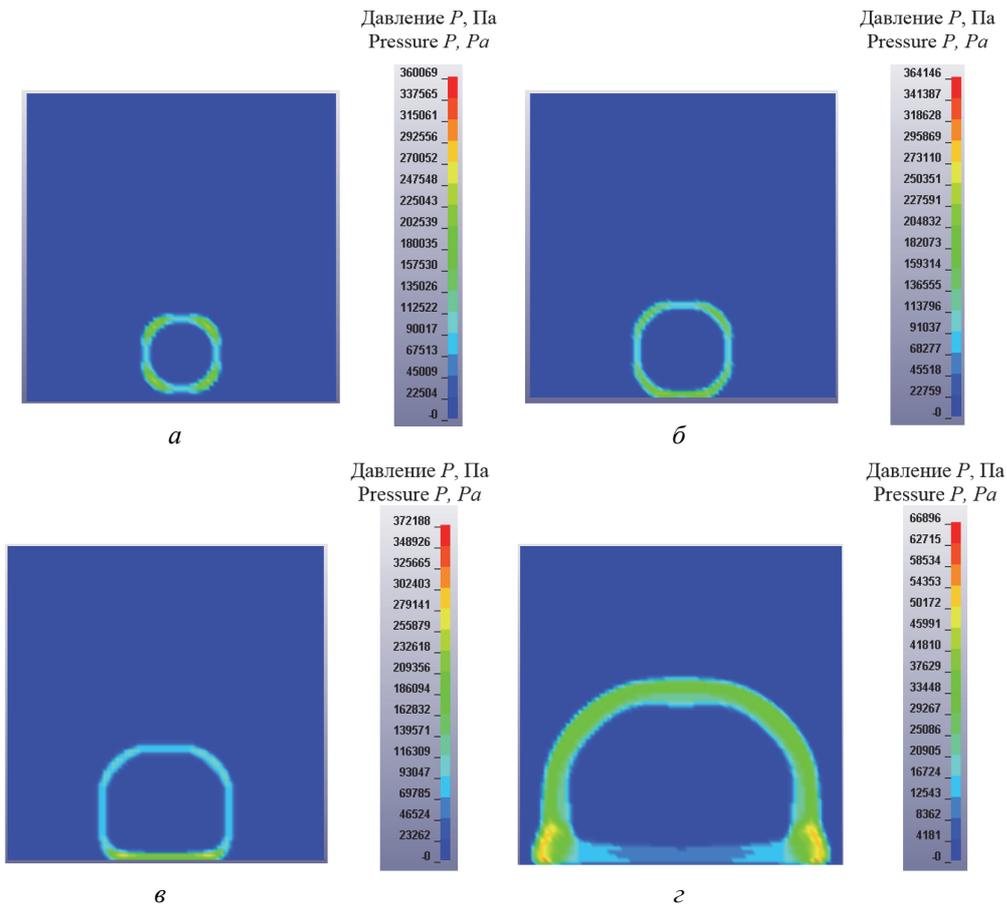


Рис. 4. Изополя давления в моменты времени:  $a - 0,012$  с;  $б - 0,013$  с;  $в - 0,016$  с;  $г - 0,03$  с  
 [Figure 4. Isopoles of pressures at time points:  $a - 0,012$  s;  $б - 0,013$  s;  $в - 0,016$  s;  $г - 0,03$  s]

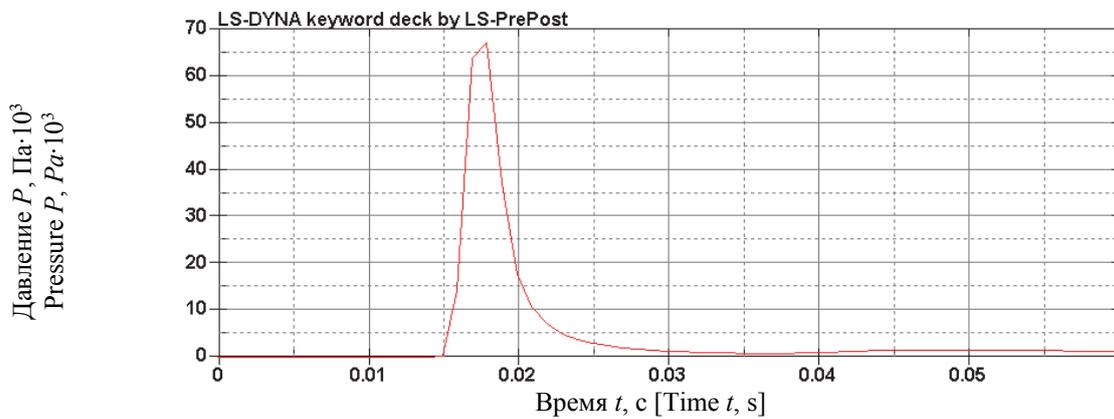


Рис. 5. График приращения давления  $\Delta P_\phi$  во времени на расстоянии 7 м от центра взрыва  
 [Figure 5. Graph of pressure increment  $\Delta P_\phi$  in time at a distance of 7 m from the center of the explosion]

**Моделирование приходящего фронта ВУВ при больших расстояниях от места взрыва.** Во многих практических задачах, например при расчете сооружений гражданской обороны<sup>2</sup>, эпицентр

взрыва располагается на значительном (5–10 км) удалении, что заметно увеличивает размерность задачи и время расчета. Поэтому для моделирования приходящего фронта ударной волны можно воспользоваться теорией подобия при взрывах [7], задав при этом вместо одного заряда, например, 10, как показано на рис. 6.

<sup>2</sup> СП 88.13330.2014. Защитные сооружения гражданской обороны. Актуализированная редакция СНиП II-11-77\*.

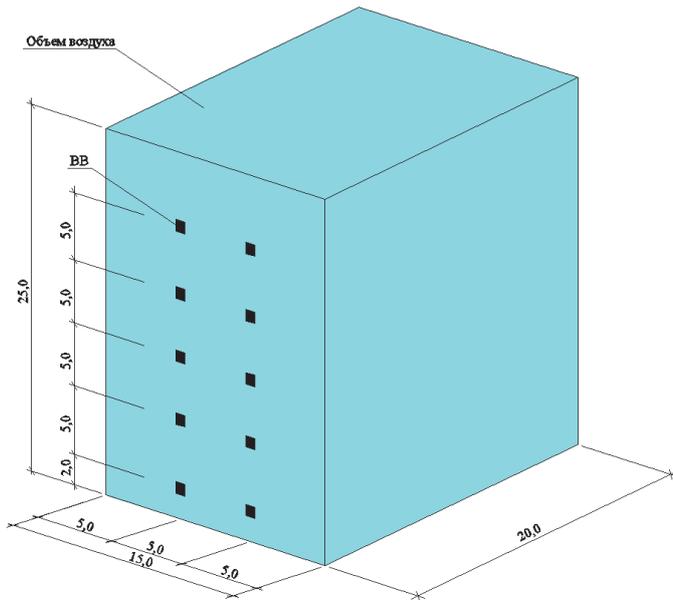


Рис. 6. Конечно-элементная модель воздушного пространства  
[Figure 6. Finite element model airspace]

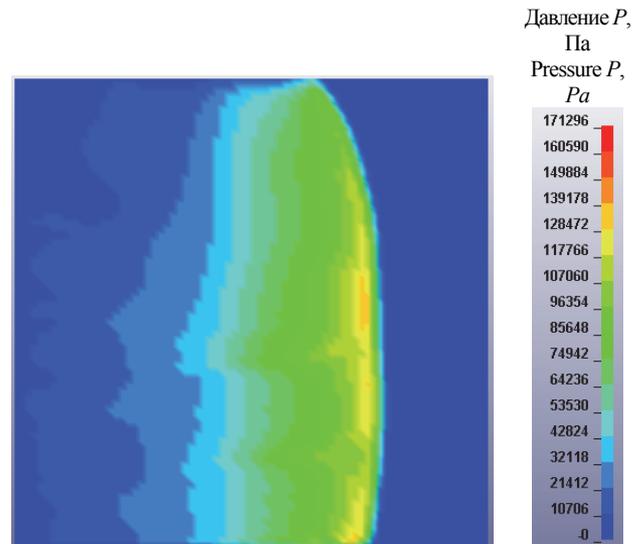


Рис. 7. Распространение фронта ударной волны  
[Figure 7. Shock wave propagation]

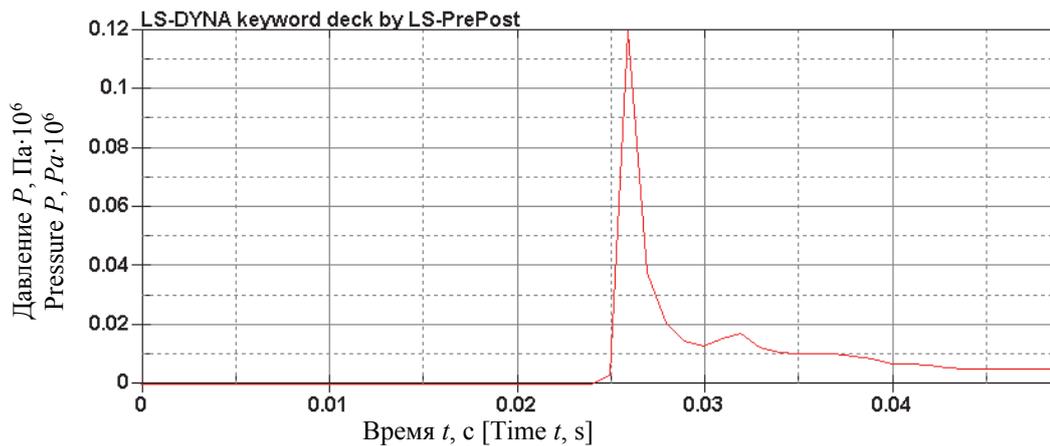


Рис. 8. График приращения давления  $\Delta P_\Phi$  во времени на расстоянии 15 м от центра взрыва  
[Figure 8. Graph of pressure increment  $\Delta P_\Phi$  in time at a distance of 15 m from the center of the explosion]

Таким образом, используя свойства отражения волн, 10 зарядов сформируют головную ударную волну с практически одинаковыми параметрами во фронте (рис. 7). В рассматриваемом примере давление во фронте ВУВ на расстоянии 15 м от центра взрыва составило  $0,12 \cdot 10^6$  Па = 1,21 кгс/см<sup>2</sup> (рис. 8). Время фазы сжатия составило 0,045 с.

### Выводы

Рассмотренный подход позволяет получить параметры ВУВ во фронте для дальнейшего использования при расчете строительных конструкций.

Используя описанный подход можно вычислить максимальное давление во фронте ударной волны при взрыве для зданий и сооружений, рас-

положенных на различном расстоянии от центра взрыва. При этом можно определить параметры ВУВ для различных конструктивных элементов (стены, покрытие и т.д.), т.е. учесть полную картину воздействия ударной волны на сооружение.

© Мкртычев О.В., Савенков А.Ю., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### Список литературы

1. Андреев С.Г., Бабкин А.В., Баум Ф.А., Имховик Н.А. и др. Физика взрыва: в 2 т. / под ред. Л.П. Орленко. 3-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 832 с.

2. *Расторгуев Б.С., Плотников А.И., Хуснутдинов Д.З.* Проектирование зданий и сооружений при аварийных взрывных воздействиях. М.: АСВ, 2007. 152 с.

3. *Бирбраер А.Н., Роледер А.Ю.* Экстремальные воздействия на сооружения. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2009. 594 с.

4. *Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г.* Нестационарные воздействия ударных волн. М.: Наука, 1977. 274 с.

5. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

6. *Van Leer B.J.* Towards the ultimate conservative difference scheme. Second-order sequel to Godunov's Method // *J. Comput. Phys.* 1979. Vol. 32. No. 1. Pp. 10–136.

7. *Садовский М.А.* Механическое действие воздушных ударных волн по данным экспериментальных исследований // *Физика взрыва: сборник № 1 научно-исследовательских работ в области физики взрыва / АН СССР, Ин-т хим. физики.* М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 20–110.

8. LS-DYNA. Keyword user's manual. Volume I. May 2017. Version 971. Livermore Software Technology Corporation (LSTC). URL: [www.dynasupport.com](http://www.dynasupport.com).

9. *Мкртычев О.В., Дорожгинский В.Б.* Анализ подходов к определению параметров взрывного воздействия // *Вестник МГСУ.* 2012. № 5. С. 45–49.

10. *Мкртычев О.В., Дорожгинский В.Б.* Безопасность зданий и сооружений при взрывных воздействиях // *Вестник НИЦ «Строительство».* Вып. 3–4 (XXVIII) / под ред. И.И. Ведякова, Г.С. Варданяна. М.: НИЦ Строительство, 2011. С. 21–34.

11. *Мкртычев О.В., Дорожгинский В.Б.* Вероятностное моделирование взрывного воздействия // *Вестник МГСУ.* 2012. № 11. С. 278–282.

12. *Мкртычев О.В., Дорожгинский В.Б., Лазарев О.В.* Расчет конструкций железобетонного здания на взрывные нагрузки в нелинейной динамической постановке // *Вестник МГСУ.* 2011. № 4. С. 243–247.

13. *Мкртычев О.В., Дорожгинский В.Б., Сидоров Д.С.* Надежность строительных конструкций при взрывах и пожарах. М.: АСВ, 2016. 173 с.

#### **Об авторах**

**Мкртычев Олег Вартанович** – доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ) (Москва, Россия). Опубликовал более 150 научных статей, монографий и учебных пособий. eLIBRARY SPIN-код: 9676-4986. *Область научных интересов:* теория надежности строительных конструкций, вероятностные методы расчетов, теория сейсмостойкости сооружений, численные методы расчета, нелинейные динамические методы расчета, математическое и численное моделирование работы зданий и сооружений. *Контактная информация:* e-mail – [mkrtychev@yandex.ru](mailto:mkrtychev@yandex.ru)

**Савенков Антон Юрьевич** – аспирант кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ) (Москва, Россия). Научный руководитель – доктор технических наук, профессор О.В. Мкртычев. eLIBRARY SPIN-код: 8652-8088. *Область научных интересов:* нелинейные динамические методы расчета, численные методы расчета. *Контактная информация:* e-mail – [savenkov.asp@mail.ru](mailto:savenkov.asp@mail.ru)

#### **Для цитирования**

*Мкртычев О.В., Савенков А.Ю.* Численное моделирование фронта воздушной ударной волны при взрыве в воздухе и над землей в программном комплексе LS-DYNA // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* 2018. Т. 14. № 6. С. 467–474. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-467-474

RESEARCH PAPER

## **Numerical simulation of the front of an air shock wave in a ground and air explosion in the software package LS-DYNA**

**Oleg V. Mkrtychev, Anton Y. Savenkov\***

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)  
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

\*Corresponding author

(received: August 27, 2018; revised: November 09, 2018; accepted: November 12, 2018)

**Abstract. Introduction and objectives.** When calculating buildings and structures for special combinations of loads caused by the action of air shock waves, it is necessary to determine the main parameters of the actual load. The regulatory approach implemented in modern regulatory documents proposes the use of simplified calculation methods based on the use of equivalent static loads. The aim of the study is to obtain the basic parameters of air shock waves, as well as to consider the nature of the propagation of the shock wave front during an explosion on the ground and in the air, using numerical simulation.

**Materials and methods.** To obtain the basic parameters of air shock waves, high-precision numerical methods implemented in the modern LS-DYNA software package are considered. To describe the explosion process, the Lagrangian-Eulerian approach is used.

**Results.** Isopoles and graphs of excess overpressure  $\Delta P_{\phi}$  over atmospheric pressure in an air shock wave were obtained when the epicenter of the explosion was located at ground level and in the air, as well as at a distance from the designed structure.

**Conclusions.** The considered method of numerical simulation allows to obtain the main parameters of air shock waves, which can be used for further calculation of building structures.

**Keywords:** reinforced concrete structures, explosive effects, air shock wave, nonlinear dynamics, explicit dynamics, finite element method, numerical methods

## References

1. Andreev S.G., Babkin A.V., Baum F.A., Imhovich N.A. et al. (2004). *Fizika vzryva. T. 2 [Physics of a Blast. Vol. 2]*. Moscow, Fizmatlit Publ., 832. (In Russ.)
2. Rastorguev B.S., Plotnikov A.I., Khusnutdinov D.Z. (2007). *Proektirovaniye zdaniy i sooruzheniy pri avariynyykh vzryvnykh vozdeystviyakh [Design of Buildings and Structures Exposed to Emergency Blast Effects]*. Moscow, ASV Publ., 152. (In Russ.)
3. Birbraer A.N., Roleder A.Yu. (2009). *Ekstremal'nye vozdeystviya na sooruzheniya [Extreme Impacts on Structures]*. Saint Petersburg, Politehnicheskii universitet Publ., 594. (In Russ.)
4. Bazhenova T.V., Gvozdeva L.G. (1977). *Nestatsionarnyye vozdeystviya udarnyykh voln [Unsteady shock wave action]*. Moscow, Nauka Publ., 274. (In Russ.)
5. Bate K., Vilson Ye. (1982). *Chislennyye metody analiza i metoda konechnyykh elementov [Numerical analysis methods and finite element method]*. Moscow, Stroyizdat Publ., 448. (In Russ.)
6. Van Leer B.J. (1979). Towards the ultimate conservative difference scheme. Second-order sequel to Godunov's Method. *J. Comput. Phys.*, 32(1), 101–136. (In Dutch)
7. Sadovskiy M.A. (1952). *Mekhanicheskoye vozdeystviye vozdushnykh udarnyykh voln po dannym eksperimental'nykh issledovaniy [Mechanical action of air shock waves according to experimental studies]*. *Fizika vzryva: sb. trudov v oblasti fiziki vzryva*, (1), 20–110. Moscow, In-t khim. i fiziki, AN SSSR Publ. (In Russ.)
8. Livermore Software Technology Corporation (LSTC). (May 2017). *LS-DYNA. Keyword user's manual. Volume I. Version 971*. Retrieved from [www.dynasupport.com](http://www.dynasupport.com)
9. Mkrtychev O.V., Dorozhinskiy V.B. (2012). Analiz podkhodov k opredeleniyu parametrov vzryvnogo vozdeystviya [Analysis of approaches to identification of parameters of blast effects]. *Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]*, (5), 45–49. (In Russ.)
10. Mkrtychev O.V., Dorozhinskiy V.B. (2011). Bezopasnost' zdaniy i sooruzheniy pri vzryvnykh vozdeystviyakh [Safety of Buildings and Structures Exposed to Blast Effects]. In I.I. Vedyakov, G.S. Vardanyan (Eds.). *Vestnik NITs "Stroitel'stvo". Issledovaniya po teorii sooruzheniy [Proceedings of Construction Scientific and Research Center. Structural Theory Research]*, XXVIII(3–4), 21–34. (In Russ.)
11. Mkrtychev O.V., Dorozhinskiy V.B. (2012). Veroyatnostnoye modelirovaniye vzryvnogo vozdeystviya [Probabilistic modeling of explosive loading]. *Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]*, (11), 278–228. (In Russ.)
12. Mkrtychev O.V., Dorozhinskiy V.B., Lazarev O.V. (2011). Raschet konstruktsey zhelezobetonnoy zdaniya na vzryvnyye nagruzki v nelineynoy dinamicheskoy postanovke [The calculation of reinforced concrete buildings constructions on the explosive loads in the nonlinear dynamic formulation]. *Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]*, (4), 243–247. (In Russ.)
13. Mkrtychev O.V., Dorozhinskiy V.B., Sidorov D.S. (2016). *Nadezhnost' stroitel'nykh konstruktsey pri vzryvakh i pozharakh [Reliability of building structures during explosions and fires]*. Moscow, ASV Publ., 173. (In Russ.)

### About the authors

**Oleg V. Mkrtychev** – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Strength of Materials Department, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (Moscow, Russia). He published more than 150 scientific articles, monographs and textbooks. eLIBRARY SPIN-code: 9676-4986. *Research interests:* the theory of reliability of building structures, probabilistic methods of calculation, the theory of seismic stability of structures, numerical methods of calculation, nonlinear dynamic methods of calculation, mathematical and numerical modeling of buildings and structures. *Contacts:* e-mail – [mkrtychev@yandex.ru](mailto:mkrtychev@yandex.ru)

**Anton Y. Savenkov** – post-graduate student, student of the Strength of Materials Department, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (Moscow, Russia). Scientific supervisor – Dr Sci. (Eng.), Professor Oleg Mkrtychev. eLIBRARY SPIN-code: 8652-8088. *Research interests:* nonlinear dynamic methods of calculation, numerical calculation methods. *Contacts:* e-mail – [savenkov.asp@mail.ru](mailto:savenkov.asp@mail.ru)

### For citation

Mkrtychev O.V., Savenkov A.Y. (2018). Numerical simulation of the front of an air shock wave in a ground and air explosion in the software package LS-DYNA. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 467–474. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-467-474 (In Russ.)

## Применение механики пластин для оценки эффективности упрочняющей дробеструйной обработки

Г.Л. Колмогоров, А.С. Высотин\*

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
Российская Федерация, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29

\*Автор, ответственный за переписку

(поступила в редакцию: 24 апреля 2018 г.; доработана: 14 сентября 2018 г.; принята к публикации: 11 октября 2018 г.)

**Введение.** В работе рассмотрена современная ситуация в области поверхностного пластического деформирования, а именно упрочнение деталей машиностроения дробеструйной обработкой. Поскольку современное машиностроение использует улучшенные технологические способы и методы преобразования материала деталей в состояние, отвечающее нормам эксплуатации изделий, в отечественной и зарубежной литературе предлагается множество способов оценки влияния эксплуатационных условий на ресурс детали. Однако фундаментальная основополагающая теория этой области еще не создана.

В статье описана сущность процесса поверхностного пластического деформирования. Рассмотрены виды и преимущества дробеструйной обработки. У многих читателей может возникнуть вопрос: возможно ли, сняв слой коррозии, укрепить поверхностный слой обрабатываемой детали? Метод дробеструйной обработки хорошо справляется с разноплановыми задачами, позволяя обрабатывать детали сложной геометрии, а также детали с труднодоступными местами. Качество обработки позволяет наносить на поверхность детали любое покрытие без дополнительной подготовки и обезжиривания.

**Цели.** Одной из проблем является сложность определения уровня остаточных напряжений, формируемых в процессе дробеструйной обработки. Значимость проблемы заключается в том, что в настоящее время нет точной методики определения остаточных напряжений после дробеструйного упрочнения. Цель данного исследования – оценить эффективность дробеструйного упрочнения, т.е. определить уровень остаточных напряжений, формируемых в процессе дробеструйной обработки. Задача состоит в том, чтобы вычислить остаточные напряжения при дробеструйной обработке путем измерения деформации контрольной пластины (образца-свидетеля), полученной при одностороннем наклепе в течение определенного периода времени.

**Методы.** После обработки определяется стрела прогиба контрольной пластины. По стреле прогиба вычисляются остаточные напряжения в пластине. Для этого используют метод Н.Н. Давиденкова, согласно которому из контрольной пластины вырезают полоску и травлением производят последовательное снятие слоев. При снятии слоев полоска меняет геометрию за счет изменения напряженного состояния, что позволяет с использованием соответствующих соотношений установить распределение остаточных напряжений пластины.

Задачей предлагаемой методики является упрощение способа, снижение трудоемкости вычисления распределения остаточных напряжений по толщине контрольной пластинки, повышение точности определения остаточных напряжений при дробеструйном упрочнении.

**Выводы.** На основании положений механики пластин рассмотрено деформированное состояние контрольной пластины при дробеструйной обработке. В итоге получена аналитическая зависимость, позволяющая оценить остаточные напряжения в контрольной пластине после дробеструйной обработки.

**Ключевые слова:** дробеструйная обработка, поверхностное пластическое деформирование, остаточные напряжения, шероховатость, предел выносливости, прогиб, усталость, механика пластин, контрольная пластина

### Введение

Одна из актуальных проблем промышленного производства на сегодняшний день – повышение прочности деталей и конструкций, которые активно подвергаются износу. Один из эффектив-

ных способов решения такой проблемы – упрочнение методами поверхностного пластического деформирования.

В настоящее время разработано и нашло широкое применение в авиационном двигателестроении достаточное количество различных методов

поверхностного пластического деформирования, обеспечивающих упрочнение практически всей номенклатуры деталей двигателей [1–3]. Научные методы и подходы по оценке эффективности упрочняющей обработки, а также по оценке долговечности деталей и конструкций часто совершенствуются. Одной из главных задач современного машиностроения является повышение ресурса используемых деталей. Однако методы оценки напряженно-деформированного состояния дают лишь общее представление об области начала разрушения. Уже не раз научно доказано, что после упрочнения методом поверхностного пластического деформирования в поверхностном слое образуются остаточные напряжения, которые являются причиной появления сопротивления усталости деталей [4]. Из этого следует, что появление растягивающих напряжений в процессе эксплуатации детали чаще всего может привести к тому, что понижается предел выносливости детали, и, соответственно, к ее разрушению.

В ходе обзора отечественной и зарубежной литературы выявлено, что большинство работ посвящается анализу разрушения деталей. Во многих работах представлены различные способы оценки влияния эксплуатационных условий на ресурс детали, также предлагаются методы по определению зон развития усталостных трещин [5–7].

Поверхностное пластическое деформирование – это направление технологии увеличения сопротивления усталости деталей, активно используемое в различных сферах авиации и машиностроения.

Существует несколько способов обработки поверхностным пластическим деформированием:

1. Дробеструйный метод, при котором в качестве рабочих тел используют стальные шары или дробь, а источник кинетической энергии – струя сжатого воздуха.

2. Дробеметный метод, при котором в качестве рабочих тел используют стальные шары или дробь, источником кинетической энергии служит вращение ротора дробемета.

3. Пневмогидродробеструйный метод, при котором в качестве рабочих тел используют стальные шары и дробь, источником кинетической энергии является струя газа с жидкостью.

4. Гидродробеструйный метод, при котором в качестве рабочих тел используют стальные шары или дробь, источник кинетической энергии – струя жидкости [8].

Из всех способов обработки поверхностным пластическим деформированием наиболее эффективным считается дробеструйный метод. Это один из самых распространенных методов поверхност-

ного пластического деформирования, применяемых для повышения сопротивления усталости деталей, работающих в условиях циклического нагружения.

Также это простой и высокопроизводительный способ, позволяющий сократить цикл ремонта, понизить себестоимость, увеличить межремонтный ресурс. Иными словами, дробеструйное упрочнение – это технологический прием механической обработки, который получил широкое применение в авиастроении благодаря простоте использования и эффективности полученных результатов.

Основные преимущества обработки деталей дробью:

- однородность обработки деталей;
- повышение предела усталости обрабатываемого материала;
- обеспечение требуемого качества поверхности;
- возможность обработки изделий сложной геометрии.

Дробеструйная обработка обеспечивает повышение прочностных характеристик деталей за счет формирования благоприятных остаточных напряжений. Она помогает сократить большое количество трещин и истонченных участков на поверхности деталей, которые испытывают повышенные рабочие нагрузки. Подобные результаты достигаются благодаря тому, что в процессе воздействия дроби на обрабатываемую поверхность совершаются интенсивные множественные удары дроби по поверхности материала детали. Отсюда возникновение остаточных напряжений сжатия на внешнем слое обрабатываемой детали. Затем происходит уравнивание напряжения на растяжение, которое испытывает деталь при эксплуатации. В связи с этим необходимо оценить влияние остаточных напряжений на сопротивление усталости деталей.

К недостаткам способа следует отнести сложность реализации способа замера остаточных напряжений при дробеструйном упрочнении деталей, трудоемкость и низкую точность определения остаточных напряжений. Кроме того, при стравливании слоев материала детали происходит перераспределение остаточных напряжений, что также снижает точность их определения.

На первый взгляд кажется, что исследователи с легкостью добиваются повышения выносливости ответственных деталей. Однако следует учесть, что существует множество эмпирических методик назначения режимов дробеструйной обработки. Недостатком их всех является то, что каждая из них ограничена условиями эксперимента, при котором она создана. Если меняются условия эксперимента, то сразу появляется необходимость повторять

эксперимент для создания новых методик [9]. Именно поэтому активно предпринимаются попытки разработки и внедрения определенной методики, позволяющей минимизировать экспериментальные исследования, которые основаны на обработке образцов с целью отладки процесса или оптимизации режимов дробеструйной обработки.

### Цели

Главная проблема назначения режимов дробеструйной обработки – это отсутствие зависимостей, определяющих энергию, которую поглощает материал в процессе обработки. Пример эмпирического решения этой проблемы – метод Almen strips, названный в честь его создателя [10]. Методом Almen strips пользуются многие современные предприятия. Его используют для замера и контроля процесса дробеструйного упрочнения и наклепа. На сегодняшний день метод Almen strips – один из основных и общепринятых процессов измерения для контрольного замера интенсивности упрочнения поверхности после обработки дробью. Метод предоставляет достоверную картину упрочнения и наклепа поверхностного слоя, что в свою очередь позволяет привести процесс обработки поверхности дробью в соответствие с заданными характеристиками необходимой величины упрочнения [11].

Целью данного исследования является оценка эффективности дробеструйного упрочнения, т.е. определение уровня остаточных напряжений, формируемых в процессе дробеструйной обработки. Задача состоит в том, чтобы определить остаточные напряжения при дробеструйной обработке путем измерения деформации контрольной пластины (образца-свидетеля), полученной при одностороннем наклепе в течение конкретного периода времени. После обработки вычисляют стрелу прогиба контрольной пластины. По стреле прогиба устанавливают остаточные напряжения в пластине. Для этого используют метод Н.Н. Давиденкова [12], согласно которому из контрольной пластины вырезают полоску и травлением производят последовательное снятие слоев. При снятии слоев полоска меняет геометрию за счет изменения напряженного состояния, что позволяет с использованием соответствующих соотношений определить распределение остаточных напряжений пластины.

Задачей предлагаемой методики является упрощение способа, снижение трудоемкости выявления распределения остаточных напряжений по толщине контрольной пластинки, повышение точности определения остаточных напряжений при дробеструйном упрочнении.

### Методы

В предлагаемой методике на основании положений механики пластин получено аналитическое выражение связи прогиба контрольной пластины с действующими остаточными напряжениями после дробеструйной обработки.

Дифференциальное уравнение изгиба контрольной пластины определяется дифференциальным уравнением изгиба прямоугольной пластины [13]

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \quad (1)$$

где  $\omega(x, y)$  – функция прогиба;  $p$  – поперечная нагрузка;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость контрольной пластины;  $E$  – модуль упругости материала контрольной пластины;  $\mu$  – коэффициент Пуассона материала пластины;  $h$  – толщина контрольной пластины.

В случае прогиба пластины остаточными напряжениями после дробеструйной обработки в уравнении (1)  $p = 0$  и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = 0. \quad (2)$$

Контрольная пластина в процессе дробеструйной обработки свободно опирается по контуру, при этом функция прогибов, формирующихся в процессе дробеструйной обработки, имеет вид [6]

$$\omega(x, y) = \omega_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (3)$$

где  $a, b$  – размеры контрольной пластины в плане;  $\omega_0$  – стрела прогиба, соответствующая прогибу центральной части пластины.

Функция (3) соответствует упругому деформированному состоянию от остаточных напряжений, сформированных в процессе дробеструйной обработки.

При изгибе в сечениях контрольной пластины действуют изгибающие моменты [6]

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В экспериментах по дробеструйной обработке обычно применяют квадратные пластины ( $a = b$ ), поэтому соотношения (4) будут идентичны

$$\begin{aligned} M_x = M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \\ &= -D \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

или после подстановки соотношения (3) при  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$  для квадратной пластины получим

$$M_x = M_y = \omega_0 \pi^2 D \frac{1}{a^2} (1 + \mu). \quad (6)$$

При изгибе пластины от остаточных напряжений

$$\sigma_x^{\max} = \frac{6M_x}{h^2}, \sigma_y^{\max} = \frac{6M_y}{h^2}. \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) получим значения максимальных остаточных напряжений в контрольной пластине, соответствующих центру контрольной пластины

$$\sigma_x^{\text{осм}} = \sigma_y^{\text{осм}} = \frac{1}{2} \omega_0 \frac{Eh}{1-\mu^2} \cdot \frac{\pi^2}{a^2}. \quad (8)$$

### Выводы

На основании положений механики пластин предложена методика определения остаточных напряжений, формируемых в процессе дробеструйной обработки контрольной пластины. При известном значении стрелы прогиба  $\omega_0$  с помощью соотношения (8) определяются остаточные напряжения  $\sigma_x^{\max}$  и  $\sigma_y^{\max}$  в центре контрольной пластины, что позволяет выбрать технологические параметры дробеструйной обработки. Это имеет важное значение для повышения усталости деталей машиностроения, развития и преобразования методов анализа конструкций машиностроения в условия воздействия технологических факторов и различных эксплуатационных нагрузок.

Также можно сделать вывод, что наибольшее значение при повышении эффективности ремонта деталей авиационных двигателей имеет увеличение послеремонтного ресурса деталей за счет упрочняющей обработки.

В результате проведенного исследования мы можем сделать вывод, что, несмотря на многолетнюю практику изучения процесса поверхностного пластического деформирования дробеструйной обработкой, в этой области не сформирована фундаментальная теоретическая база. Поэтому отсутствует определенная методика оптимального выбора метода упрочняющей обработки для получения требуемой шероховатости поверхностного слоя и усталостной прочности деталей машиностроения.

© Колмогоров Г.Л., Высотин А.С., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### Список литературы

1. Кузнецов Н.Д., Цейтлин В.И., Волков В.И. Технологические методы повышения надежности деталей машин: справочник. М.: Машиностроение, 1993. 304 с.
2. Курпичев В.А., Букатый А.С., Чирков А.В. Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных гладких деталей // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2012. № 3 (23). С. 102–109.
3. Евстигнеев М.И., Подзей А.В., Сулима А.М. Технология производства двигателей летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1982. 263 с.
4. Павлов В.Ф. О связи остаточных напряжений и предела выносливости при изгибе в условиях концентрации напряжений // Известия вузов. Машиностроение. 1986. № 8. С. 29–32.
5. Kanwar J.S.G., Pali R., Subhash C., Bharaj R.S. Durability analysis of lightweight crankshafts design. Using geometrically restricted finite element simulation techniques for camless engines // International Conference of Advance Research and Innovation (ICARI-2014). 2014. Pp. 56–68.
6. Ma Xingguo, You Xiaomei, Wen Bangchun. Multy-body dynamics simulation on flexible crankshaft system // 12<sup>th</sup> IFToMM World Congress, 2007, June 18–21, Besancon, France.
7. Махалов М.С. Расчетные модели остаточных напряжений поверхностного слоя после упрочнения способами поверхностного пластического деформирования // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). 2012. № 3. С. 110–115.
8. Сулима А.М., Шулов В.А., Ягодкин Ю.Д. Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
9. Рыбаков Г.М. Фундаментальные основы управления качеством дробеструйной обработки деталей машиностроения. Сообщение 3. Разработка «предсказывающей функции» // Известия вузов. Машиностроение. 2006. № 3. С. 47–52.
10. Almen J.O. Peening surfaces improve endurance of machine parts // Metal Progress. 1943. No 2. Pp. 209–217.
11. Пластины Альмена. Оборудование для антикоррозионных работ. URL: <http://blastservis.ru/kat/kabiny-drobestruiyue/kabiny-naklep-i-uprochnenie/almen-strips> (дата обращения: 20.10.2018).
12. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: МАШГИЗ, 1963. 232 с.
13. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.

### Об авторах

**Колмогоров Герман Леонидович** – доктор технических наук, профессор кафедры динамики и прочности машин, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Пермь, Россия). Является автором более 200 публикаций. eLIBRARY SPIN-код: 8482-2065. *Область научных интересов:* обработка металлов давлением, теория пластин и оболочек.

чек, статическая и динамическая устойчивость конструкций, механика деформируемого твердого тела. *Контактная информация*: e-mail – dpm@pstu.ru

**Высотин Александр Сергеевич** – аспирант кафедры динамики и прочности машин, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Пермь, Россия). Автор трех публикаций. *Область научных интересов*: обработка металлов давлением, теория пластин и оболочек, статическая и динамическая устойчивость

конструкций, механика деформируемого твердого тела. *Контактная информация*: e-mail – dpm@pstu.ru

#### Для цитирования

Колмогоров Г.Л., Высотин А.С. Применение механики пластин для оценки эффективности упрочняющей дробеструйной обработки // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2018. Т. 14. № 6. С. 475–480. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-475-480

RESEARCH PAPER

## Application of plate mechanics to evaluate the effectiveness of reinforcing shot blasting

German L. Kolmogorov, Alexandr S. Vysotin\*

Perm National Research Polytechnic University  
29 Komsomolsky prospect, Perm, 614000, Russian Federation

\*Corresponding author

(received: April 24, 2018; revised: September 14, 2018; accepted: October 11, 2018)

**Abstract. Introduction.** The paper considers the current state in the field of surface plastic deformation, namely the hardening of machine-building parts by shot blasting. Since modern engineering uses improved technological methods and methods for transforming material parts into a state that meets the standards for the operation of products, in the domestic and foreign literature there are many ways to assess the impact of operating conditions on the part life. However, the fundamental underlying theory of this field has not yet been created. The article describes the essence of the process of surface plastic deformation. The types and advantages of shot blasting are also considered. Many readers may wonder: is it possible, after removing the corrosion layer, to strengthen the surface layer of the workpiece? The method of shot blasting copes well with these diverse tasks, allowing to handle parts of complex geometry, as well as parts with hard-to-reach places. The quality of processing allows to apply any coating to the surface of a part without additional preparation and degreasing.

**Aims.** One of the problems is the difficulty of determining the level of residual stresses generated in the process of shot blasting. The significance of the problem lies in the fact that at present there is no exact method for determining residual stresses after shot peening. The purpose of this study is to evaluate the effectiveness of shot peening, i.e. determination of the level of residual stresses generated in the process of shot blasting. The task is to determine the residual stresses during shot blasting by measuring the deformation of the control plate (witness sample) obtained by one-sided bead over a certain period of time.

**Methods.** After processing, the deflection of the control plate is determined. According to the deflection arrow, the residual stresses in the plate are determined. To do this, the N.N. Davidenkov's method is used, according to which a strip is cut out from the control plate and the layers are removed by etching. When removing the layers, the strip changes the geometry due to a change in the stress state, which makes it possible to determine the distribution of the residual stresses of the plate using the appropriate ratios. The objective of the proposed technique is to simplify the method, reducing the complexity of determining the distribution of residual stresses across the thickness of the control plate, improving the accuracy of determining the residual stresses during shot peening.

**Conclusions.** Thus, based on the positions of the mechanics of plates, the deformed state of the control plate during shot blasting was considered. Finally, an analytical dependence was obtained, allowing estimating the residual stresses in the control plate after shot blasting.

**Keywords:** shot blasting, surface-plastic deformation, residual stress, roughness, limit of endurance, sag, fatigue, mechanics of plates, control plate

### References

1. Kuznetsov N.D., Tseytlin V.I., Volkov V.I. (1993). *Tekhnologicheskie metody povysheniya nadyozhnosti detalej mashin [Technological methods to improve the reliability of machine parts]*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 304. (In Russ.)

2. Kirpichev V.A., Bukatyy A.S., Chirkov A.V. (2012). Prediction of fatigue resistance of surface-hardened smooth parts. *News of higher educational institutions. Povolzhskiy region. Technical Science*, 3(23), 102–109. (In Russ.)

3. Evstigneev M.I., Podzey A.V., Sulima A.M. (1982). *Tekhnologiya proizvodstva dvigatelej letatel'nykh apparatov*

[*Production technology of aircraft engines*]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 263. (In Russ.)

4. Pavlov V.F. (1986). On the relationship between residual stresses and the limit of endurance in bending under conditions of stress concentration. *University news. Engineering*, (8), 29–32. (In Russ.)

5. Kanwar J.S. Gill, Pali Rosha, Subhash Chander, Bharaj R.S. (2014). Durability analysis of lightweight crankshafts design. Using geometrically restricted finite element simulation techniques for camless engines. *International Conference of Advance Research and Innovation (ICARI-2014)*, 56–68.

6. Ma Xingguo, You Xiaomei, Wen Bangchun. (2007). Multy-body dynamics simulation on flexible crankshaft system. *12<sup>th</sup> IFToMM World Congress*. June 18–21, Besancon, France.

7. Makhalov M.S. (2012). Computational models of residual stresses of the surface layer after hardening by means of surface plastic deformation. *Metal processing (technology, equipment, tools)*, (3), 110–115. (In Russ.)

8. Sulima A.M., Shulov V.A., Yagodkin Yu.D. (1988). *Poverhnochnyj sloj i ekspluatatsionnye svoystva detalej mashin [Surface layer and operational properties of machine parts]*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 240. (In Russ.)

9. Rybakov G.M. (2006). Fundamental principles of quality control of shot blasting machining parts. Report 3. Developing a “predictive function”. *University news. Engineering*, (3), 47–52. (In Russ.)

10. Almen J.O. (1943). Peening surfaces improve endurance of machine parts. *Metal Progress*, (2), 209–217.

11. Oborudovanie dlya antikorrozionnyh rabot. (October 20, 2018). *Plastiny Al'mena [Almen Strips]*. Avail-

able from <http://blastservis.ru/kat/kabiny-drobeSTRUynnye/kabiny-naklep-i-uprochnenie/almen-strips> (In Russ.)

12. Birger I.A. (1963). *Ostatochnye napryazheniya [Residual stress]*. Moscow, MASHGIZ Publ., 232. (In Russ.)

13. Timoshenko S.P., Voinovski-Krieger C. (1966). *Plastinki i obolochki [Plates and shells]*. Moscow, Nauka Publ., 635. (In Russ.)

#### **About the authors**

**German L. Kolmogorov** – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Dynamics and Strength of Machine Department, Perm National Research Polytechnic University (Perm, Russia). He is the author more than 200 publications. eLIBRARY SPIN-code: 8482-2065. *Research interests*: processing of metals pressure, theory of plates and envelopes, static and dynamic stability of structures, mechanic of a deformable solid body. *Contacts*: e-mail – [dpm@pstu.ru](mailto:dpm@pstu.ru)

**Alexandr S. Vysotin** – graduated from Perm National Research Polytechnic University in 2016. Graduate student of the Dynamics and Strength of Machine Department in Perm National Research Polytechnic University (Perm, Russia). He is the author of the 3 publications. *Research interests*: processing of metals pressure, theory of plates and envelopes, static and dynamic stability of structures, mechanic of a deformable solid body. *Contacts*: e-mail – [dpm@pstu.ru](mailto:dpm@pstu.ru)

#### **For citation**

Kolmogorov G.L., Vysotin A.S. (2018). Application of plate mechanics to evaluate the effectiveness of reinforcing shot blasting. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 475–480. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-475-480 (In Russ.)

УДК 624.074.2:624.014:693.8  
DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-481-494

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Особенности работы каркасов большепролетных металлических куполов в процессе их возведения

Е.В. Лебедь

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет  
Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26

(поступила в редакцию: 12 августа 2018 г.; доработана: 05 октября 2018 г.; принята к публикации: 16 октября 2018 г.)

**Цели.** Дать характеристику процессу формирования каркасов большепролетных металлических куполов при их возведении. Выполнить анализ работы конструкций при монтаже купольных каркасов по расчетным схемам, отличающимся от проектной, из-за чего в их конструктивных элементах возникают монтажные усилия. Привести геометрические схемы купольных каркасов (ребристых, ребристо-кольцевых и сетчатых) и принципы их образования. Показать, как образуются сетчатые купольные каркасы, и объяснить, почему они являются пространственными стержневыми системами. Описать особенности конструктивных решений однопоясных и двухпоясных купольных каркасов. Отметить, что технологическая схема монтажа конструкций большепролетных металлических куполов зависит от конструктивного решения и способа возведения их каркасов. Вкратце охарактеризовать различные способы возведения каркасов большепролетных металлических куполов и количество применяемых при этом временных опор и механизмов.

**Обзор.** Принципиально различные способы возведения, как реально примененные, иллюстративно показаны на примерах нескольких конкретных известных купольных сооружений мира. Дана оценка влияния каждого способа на работу конструкций в процессе монтажа. Описан характер работы отдельных конструкций и каркаса в процессе возведения большепролетных металлических куполов. Сделан акцент на существенные различия в характере работы конструктивных систем купольных каркасов при разных способах их монтажа.

**Исследование.** Разработаны компьютерные модели однопоясных металлических куполов из стальных двутавров с жесткими сопряжениями в узлах. Созданы дополнительные модели неполного каркаса для исследования различных способов монтажа куполов. Для каждой монтажной модели купольного каркаса выполнены компьютерные расчеты на действие собственного веса. В результате расчетов определены напряжения в конструктивных элементах каркасов, которые сравнивались с напряжениями соответствующих элементов на действие собственного веса в каркасе проектной схемы.

**Результаты.** Сделан вывод о неизбежности появления напряжений в элементах каркасов большепролетных металлических куполов при их возведении. Отмечена необходимость обязательных расчетов каркасов на монтажные состояния при проектировании большепролетных металлических куполов.

**Ключевые слова:** большепролетные купола, металлические каркасы, геометрические схемы, конструктивные решения, способы возведения, монтаж конструкций, компьютерная модель, напряжения в элементах

### Введение

Каркасы большепролетных металлических куполов образуют пространственные стержневые системы. Это способствует повышению жесткости и надежности купольных покрытий при их эксплуатации. Однако каркасы таких систем не появляются на месте строительства сразу и целиком. Проектную геометрическую форму они приобретают постепенно, в течение длительного времени, что в итоге реализуется выразительным внешним

обликом купольного покрытия [1; 2]. В процессе возведения сначала появляются лишь отдельные конструкции купола. Затем эти конструкции объединяются во фрагменты купольных каркасов, которые постепенно увеличиваются путем присоединения других фрагментов, т.е. наращиваются. Завершается монтаж стержневой системы образованием цельного купольного каркаса проектной формы. Монтаж сопровождается появлением и исчезновением со временем вспомогательных конструкций, поддерживающих отдельные конструк-

ции или фрагменты каркасов куполов, которые называют временными опорами [3]. Временные опоры могут оставаться вплоть до полного завершения монтажа как купольного покрытия, так и всех конструкций между постоянными опорами (стенового каркаса). Это характерно для процесса возведения каркасов всех большепролетных металлических куполов.

Купольные каркасы в процессе возведения собираются из большого количества элементов, по-разному ориентированных в пространстве, а также зачастую имеющих разное конструктивное решение (или поперечное сечение). Конструктивная сложность купольных каркасов и способ их возведения во многом зависят от геометрической схемы их стержневых систем, размеров пролета и высоты.

Каркасы металлических куполов по геометрической схеме могут быть ребристыми, ребристо-кольцевыми и сетчатыми [4]. Ребристые купола состоят из меридиональных ребер, установленных на опорное (нижнее) кольцо и объединенных в вершине соединительным (верхним) кольцом (рис. 1, а). В ребристо-кольцевых куполах между нижним и верхним кольцами меридиональные ребра опоясываются регулярно установленными промежуточными кольцами (рис. 1, б). Благодаря им эффект пространственной совместной работы элементов каркаса возрастает. В четырех осесимметричных секторах этих куполов во всех четырехугольных ячейках, образованных ребрами и промежуточными кольцами (или кровельными прогонами), устанавливаются связи крестового вида. Благодаря этим связям в купольных каркасах повышается пространственная жесткость и сопротивляемость изгибно-крутильному виду деформации от внешних нагрузок.

Если крестовые связи, которые работают на растяжение, установлены в каждой четырехугольной ячейке каркаса ребристо-кольцевого купола, то такая геометрическая схема называется куполом Шведлера (рис. 1, в). Поскольку весь купольный каркас состоит из треугольных ячеек, он становится неизменяемым в своей собственной условной оболочке, что придает куполу повышенную пространственную жесткость.

Каркасы сетчатых по геометрической схеме куполов разбивают собственную условную оболочку на треугольные ячейки, что обеспечивает геометрическую неизменяемость образуемой ими пространственной стержневой системы. В отличие от купола Шведлера в таких каркасах нет специальных стержней, работающих только на растя-

жение. В сетчатых каркасах, в отличие от предыдущих, размеры ячеек в вершине и у основания куполов незначительно отличаются друг от друга. По принципу геометрического построения каркасы сетчатых металлических куполов разделяют на осесимметричные и геодезические.

В осесимметричных сетчатых куполах геометрическая схема каркасов характеризуется повторяемостью явных (как купол Шведлера) или условных секторов и ячейками разных размеров от контура к середине. Наибольшее распространение среди сетчатых осесимметричных купольных каркасов получили звездчатый (схемы Фёпля – рис. 1, з) и секториально-сетчатый (схемы Чивитта – рис. 1, д), имеющие выраженные кольцевые элементы.

Геометрические схемы каркасов геодезических куполов получают из вписанных в сферу многогранников с правильными треугольниками, пятиугольниками и шестиугольниками (схема Фуллера – рис. 1, е). Вершины многогранников и спроецированные на сферу центры граней соединяют дугами большого круга или геодезическими линиями, получая сетку с треугольными ячейками. Такими же дугами соединяют середины сторон треугольных ячеек.

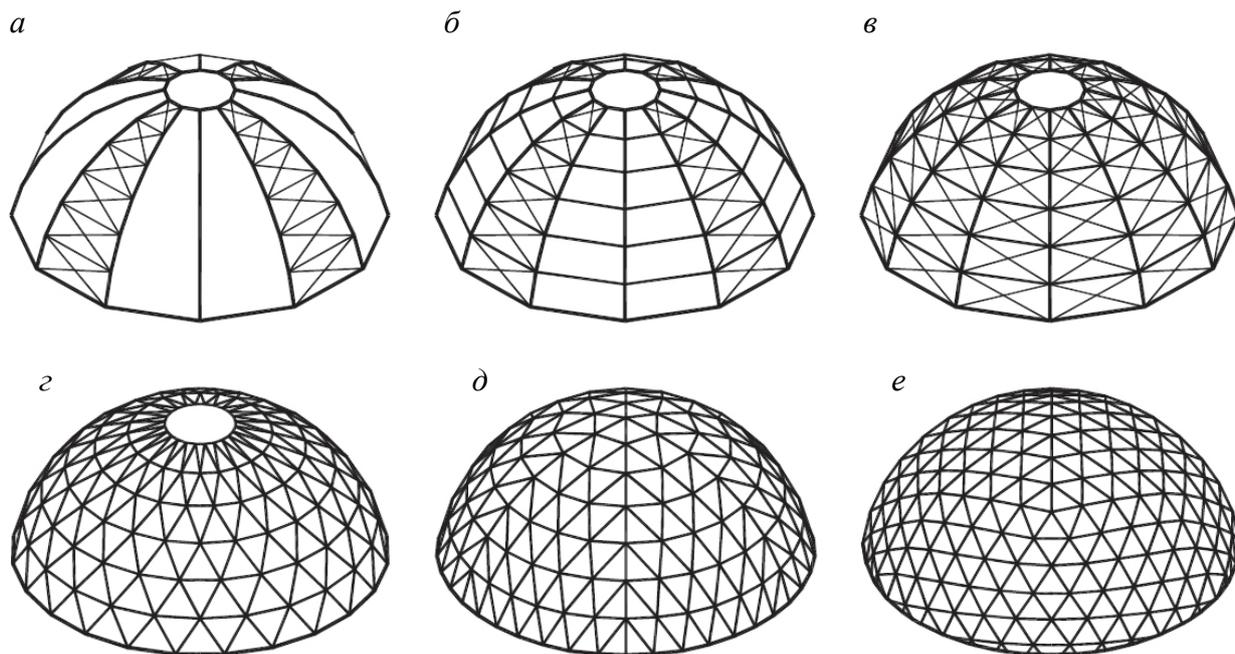
Создаются и комбинированные геометрические схемы каркасов. В ребристо-кольцевых куполах количество ребер может уменьшаться в верхней части купола или чередоваться по ярусам ребристо-кольцевая схема со схемой Шведлера. Ребристо-кольцевой каркас купола может также сочетаться с сетчатым куполом. Возможно также применение различных геометрических схем построения осесимметричных сетчатых куполов в нижней части и у вершины, изменение кольцевой регулярности ячеек сетчатых куполов по высоте, а также геометрической формы ячеек у основания и вершины.

Каркасы одинаковых геометрических схем ребристо-кольцевых и сетчатых куполов могут отличаться друг от друга конструктивными решениями. Наиболее важным из них является количество поясов. По этому конструктивному признаку купола могут быть одноярусными и двухярусными, если речь идет о ребристых и ребристо-кольцевых куполах, и односетчатыми и двухсетчатыми, если описываются сетчатые купола. Стержневые элементы одноярусных ребристых и ребристо-кольцевых куполов, так же как и односетчатых купольных каркасов, работают в основном на сжатие с изгибом в нормальном по отношению к своей условной оболочке направ-

лении. Поэтому сечения элементов их каркасов обычно назначают двутавровыми. Элементы каркасов двухъярусных ребристых и ребристо-кольцевых куполов проектируют решетчатыми, в виде ферм с параллельными поясами, стержни которых работают на продольные усилия. По этой причине их назначают из прокатного профильного металла – парных уголков, труб, швеллеров и др.

В двухсетчатых купольных каркасах поясные стержни могут быть расположены непосредственно друг над другом или со смещением на поло-

вину ячейки сетки. В первом случае двухсетчатый каркас куполов будет аналогичен односетчатому, в котором элементы каркаса проектируют в виде ферм с параллельными поясами и треугольной решеткой. Во втором случае двухсетчатый каркас купола становится похожим на структурные конструкции с треугольными ячейками. Оба варианта двухсетчатых купольных каркасов представляют собой многосвязные пространственные стержневые системы, и проектируют их в основном из труб.



**Рис. 1. Геометрические схемы каркасов металлических куполов:**  
*a* – ребристый купол; *б* – ребристо-кольцевой купол; *в* – купол Шведлера;  
*г* – звездчатый купол; *д* – секториально-сетчатый купол; *е* – геодезический купол  
**[Figure 1. Geometrical schemes of frames of metal domes:**  
*a* – ribbed dome; *б* – ribbed-rings dome; *в* – Schwedler dome;  
*г* – star-lattice dome; *д* – sectoral-lattice dome; *е* – geodesic dome]

Большое значение для конструирования и расчета имеет способ сопряжения стержневых элементов купольных каркасов между собой. Стержневая система в одноярусных ребристо-кольцевых и односетчатых куполах для сохранения геометрической неизменяемости и пространственной жесткости должна иметь в нормальном к условной оболочке направлении жесткие узловые сопряжения. В то же время в плоскостях своих ячеек (касательных к условной оболочке) соединения стержней в односетчатых куполах могут быть выполнены шарнирными. В ребристо-кольцевых куполах в касательных плоскостях применяют примыкающие шарниры для кольцевых стержней и в сопряжении

меридиональных ребер с опорным и верхним кольцами. В двухъярусных ребристо-кольцевых куполах элементы каркаса представляют собой плоские фермы, т.е. геометрически неизменяемые конструкции в нормальных плоскостях. Вследствие чего соединения стержней в них выполняют шарнирными. В касательных к купольной оболочке направлениях их также делают шарнирными. В двухсетчатых куполах образуются решетчатые объемные фермы в каждом повторяющемся по всей оболочке фрагменте каркаса. Поэтому и в нормальном к условной оболочке купола направлении, и в касательных направлениях сопряжения стержней выполняются шарнирными.

Характер монтажа конструкций большепролетных металлических куполов зависит от конструктивного решения и способа возведения их каркасов. Способ возведения металлических куполов выбирается исходя из размеров конструктивных частей каркасов или их отдельных элементов и их способности воспринимать монтажные нагрузки. Учитываются также возможности применяемых подъемно-транспортных машин или заменяющих их механизмов. Из-за того, что купольные каркасы в целом являются многосвязными пространственными стержневыми системами, их возведение представляет собой технически сложную задачу. Необходимо уже в процессе проектирования выбрать способ возведения, разработать схему последовательности монтажа конструкций, по возможности использовать укрупнительную сборку на земле и назначить вид сопряжения отдельных элементов каркаса между собой.

Поскольку купольные каркасы формируются постепенно, а реальные конструкции в большепролетных металлических куполах обладают значительным собственным весом, возникает необходимость их относительно долговременного фиксирования в пространстве. Это достигается тем, что в процессе возведения куполов отдельные их конструкции или фрагменты каркасов устанавливаются на временные опоры или прикрепляются к ранее смонтированной части купола. И в одном, и в другом случаях монтажная расчетная схема работы конструкций или фрагментов купольных каркасов отличается от работы в составе полностью смонтированного каркаса проектной расчетной схемы. Поэтому в процессе возведения куполов в их конструктивных элементах возникают монтажные внутренние усилия, отличающиеся от усилий в элементах каркасов проектных схем. Монтажные усилия в элементах каркаса не только при разных способах возведения куполов, но и на разных его стадиях отличаются друг от друга. При этом значительное влияние на величины и характер этих усилий оказывает как способ возведения купольного каркаса, так и вид монтажных сопряжений его элементов.

Возведение большепролетных металлических куполов выполняется одним из следующих способов [3–5]: с временной центральной опорой, центральной и несколькими промежуточными временными опорами, со сплошных строительных лесов, сборка на земле с последующим подъемом, монтаж навесным способом и комбинированный монтаж. Временная центральная опора устанавливается на оси вращения образующей купольной оболочки под верхним кольцом ребристо-кольцевого

купола или аналогичной ему стержневой части сетчатого купола. При монтаже с несколькими промежуточными временными опорами на равном расстоянии от центральной (по окружности) устанавливаются еще ряд опор [6]. Таких рядов может быть несколько, а их разбивочные оси напоминают концентрические окружности вокруг центральной опоры. Если каркас собирается на земле, то поднимают его на проектную высоту при помощи подъемных кранов или специальных механизмов (лебедок), прикрепленных к опорному контуру и работающих синхронно. При навесном монтаже отдельные фрагменты стержневого купольного каркаса размером с одну или несколько ячеек сетки устанавливаются последовательно по верхней границе части возведенного купольного каркаса. Непременным условием навесного монтажа является замкнутость контура каркаса в процессе возведения купола.

При любом способе возведения купола собираются из отдельных конструкций или из монтажных частей каркасов разной степени укрупнения. Их надо поднимать, перемещать в пространстве и устанавливать в проектное положение. При монтаже большепролетных металлических куполов как отдельными конструкциями, так и фрагментами каркасов применяются башенные подъемные краны, передвигающиеся по рельсам, и самоходные стреловые краны на гусеничном или колесном ходу [3; 5; 7]. Высота башенного крана или длина стрелы гусеничного, как и их грузоподъемность, зависят от размеров куполов и степени укрупнения монтажных фрагментов каркаса. В случае применения временной центральной опоры на ней может быть установлена поворотная стрела башенного крана или поворотная Г-образная часть козлового крана.

## Обзор

С временной центральной опорой возводилась арена «Колизей» в Шарлотте (США, 1955 г.). Покрытием «Колизея» служит однопоясной ребристо-кольцевой купол пролетом 100 м и высотой 16,4 м [8]. Гибкие крестовые связи устанавливались в каждой ячейке, что делает его близким к куполу Шведлера. Меридиональные ребра из двутавров при монтаже устанавливались на опорное кольцо по верху высоких, наклоненных наружу колонн и на решетчатую мачту в центре (рис. 2). Очевидно, что при возведении каркаса ребра работали как двутавровые арки с опорами на разных по высоте уровнях.

С временной центральной опорой возводилась и «Арена-Север» в Красноярске (2011 г.). Покры-

тием арены служит двухпоясной ребристый купол пролетом 80 м [9]. Меридиональные ребра купола выполнены из плоских решетчатых полуарок в виде ферм с параллельными поясами (общего ломаного очертания) и треугольной решеткой. Полуарки попарно (через сектор) объединены между собой полураскосными связями в уровнях поясов по всей высоте купола. Каркас купола опирается на металлические колонны (рис. 3), которые в оголовках опоясаны опорным кольцом сплошного сечения. При возведении каркаса ребра работали как решетчатые пространственные арки с опорами в разных уровнях.

С центральной и несколькими рядами вокруг нее временных опор возводился стадион для бейсбола и американского футбола «Астродом» (Astrodome) в Хьюстоне (США, 1965 г.). Покрытием «Астродома» служит двухпоясной каркас секториально-сетчатого купола (схема Чивитта) пролетом 196 м и высотой 28,4 м [4; 10]. Купол установлен на высокие вертикальные парные колонны (рис. 4). Каждый из элементов двухсет-

чатого купольного каркаса выполнен в виде фермы с параллельными поясами и треугольной решеткой. Временные опоры в виде решетчатых башен устанавливались под узлами на границах секторов и между ними по двум концентрическим окружностям-рядам и в центре. При возведении каркаса купола отдельные элементы меридионального направления работали как пологие арки с опорами на разных уровнях, а кольцевые элементы работали по балочной схеме.

С центральной и несколькими рядами временных опор вокруг нее возводился и стадион для американского футбола «Супердом» (Superdome) в Новом Орлеане (США, 1975 г.). Покрытием «Супердома» также служит двухпоясной каркас секториально-сетчатого купола (схема Чивитта) пролетом 207 м и высотой 32,2 м [11]. Купол установлен на высокие, изогнутые, как бумеранг, колонны, поддерживаемые конструкциями трибун. По геометрической схеме, конструктивному решению и способу возведения этот купольный каркас аналогичен «Астродому» в Хьюстоне.

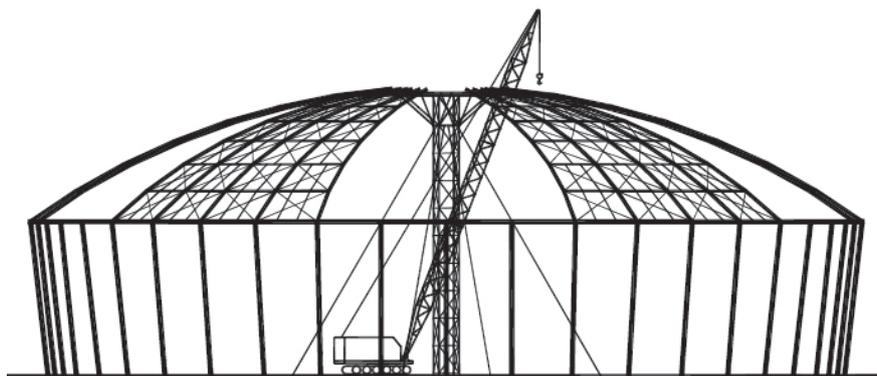


Рис. 2. Монтаж купола «Колизея» в Шарлотте  
[Figure 2. Installation of the Coliseum in Charlotte]

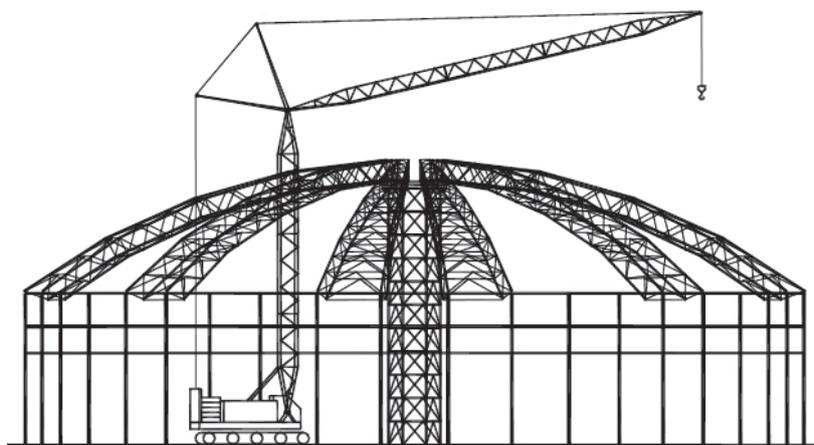


Рис. 3. Монтаж купола «Арена-Север» в Красноярске  
[Figure 3. Installation of the Arena-Sever dome in Krasnoyarsk]

С использованием комбинации строительных лесов и центральной опоры возведен торгово-развлекательный центр «Глобал Сити» в Москве (2007 г.). Покрытием основной части центра служит однопоясной каркас секториально-сетчатого купола (схема Чивитта) пролетом 60 м [12]. Купольный каркас опирается на пространственное решетчатое кольцо (четырёхугольного сквозного сечения), установленное на высокие решетчатые колонны (рис. 5). Все стержневые элементы выполнены из труб. Сначала с использованием временной центральной решетчатой опоры в виде башни устанавливались ребра купола на границах секторов, а остальные элементы монтировались со строительных лесов. Ребра на границах секто-

ров работали как арки с опорами на разных уровнях. Стержни в пределах каждого сектора работали как балки с опорами в узлах.

Сборкой купольного каркаса на земле с последующим подъемом его на проектную высоту производилось возведение покрытия электродепо Московской монорельсовой транспортной системы (2004 г.). Покрытием трансбордера электродепо служит однопоясной сетчатый купол пролетом 46 м и высотой 8 м [13; 14]. Купол выполнен по звездчатой схеме с изменением регулярности в верхней части. Каркас купола собирался на земле из двутавров, а затем поднимался при помощи лебедок, закрепленных на опорном контуре, установленном на металлические колонны (рис. 6).

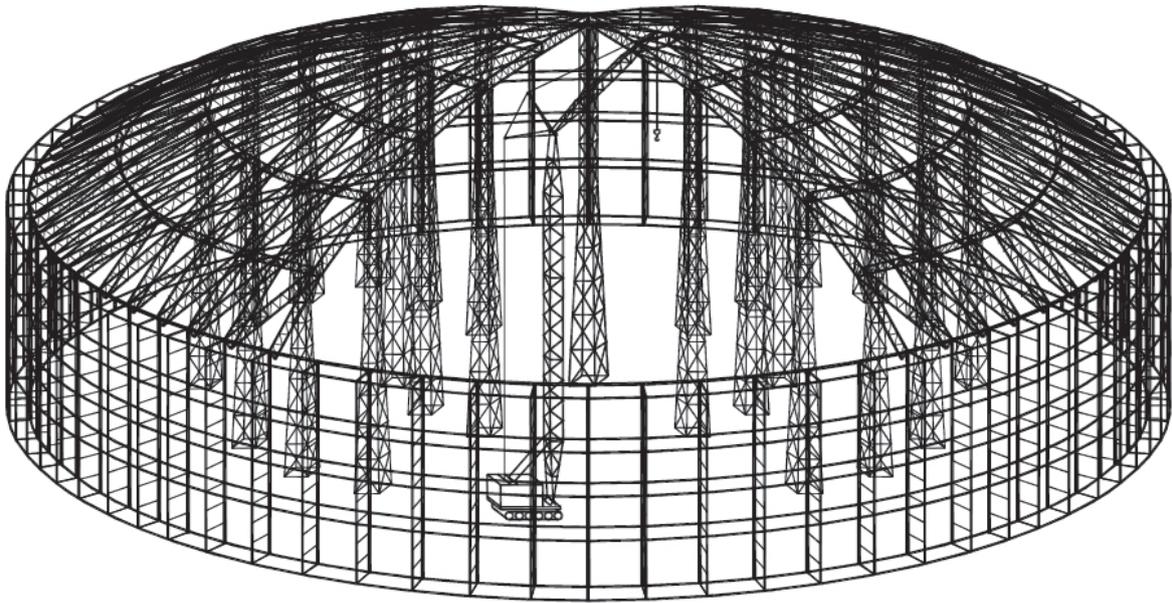


Рис. 4. Монтаж купола стадиона «Астродом» в Хьюстоне  
[Figure 4. Installation of the AstroDome Stadium dome in Houston]

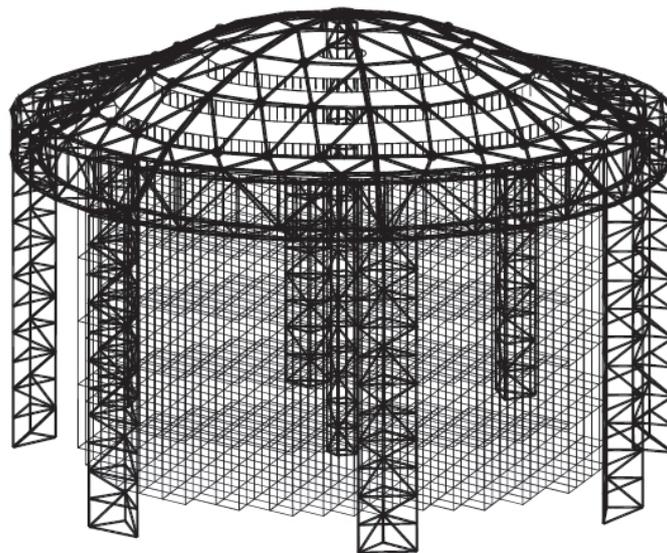
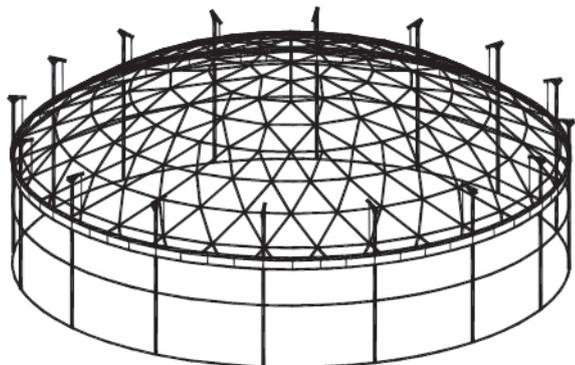


Рис. 5. Монтаж купола ТРЦ «Глобал Сити» в Москве  
[Figure 5. Installation of the dome of the Global City Shopping Mall in Moscow]

В процессе подъема каркаса купола электродепо характер его работы был в определенной степени аналогичен проектной схеме, только опорой служил лишь каждый второй узел контура (половина от проектной схемы).

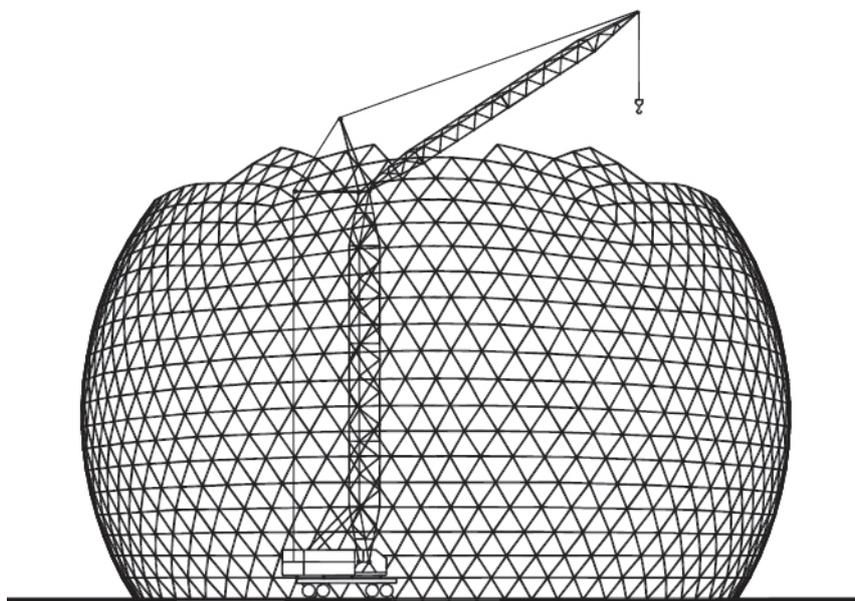


**Рис. 6. Монтаж купола электродепо Московской монорельсовой транспортной системы**  
[Figure 6. Installation of the Depot dome Moscow monorail transport system]

Монтаж купольного каркаса навесным способом применялся для американского павильона «Биосфера» (сейчас – Канадский музей водных

экосистем) в Монреале (Канада, 1967 г.), который стал знаменитой достопримечательностью. Павильон запроектирован Р.Б. Фуллером как геодезический купол в виде усеченной сферы двухсетчатого вида диаметром 76 м и высотой 62 м [15; 16] (рис. 7). Сетка каркаса снаружи купола имеет треугольные ячейки, а внутри – шестиугольные. Все стержни купола выполнены из труб. Р.Б. Фуллером разработано большое количество геодезических сетчатых куполов аналогичного вида и других типов, включающих пологие купола.

Навесной монтаж монреальского купола не предусматривал использования временных опор и производился стержневыми фрагментами размером до двух шестиугольных ячеек (внутренней сетки). Подобным образом осуществлялось равномерное наращивание купольного каркаса по всему контуру. Такой монтаж приводит к наиболее сложному процессу преобразования стержневой пространственной системы купольного каркаса от опорного контура до полной завершенности. В этом процессе возведения непрерывно меняются монтажные схемы работы стержневой системы, воспринимающие собственный вес.



**Рис. 7. Монтаж купола павильона «Биосфера» Р.Б. Фуллера в Монреале**  
[Figure 7. Installation of the dome of the Biosphere pavilion by R.B. Fuller in Montreal]

### Исследование

С целью выяснения характера напряженно-деформированного состояния и величин внутренних монтажных усилий в стержнях металлических купольных каркасов автором были

выполнены специальные компьютерные исследования [17]. Исследования проводились на компьютерных моделях купольных каркасов как пространственных стержневых систем в программе SCAD [18]. Объектами исследования служили однополюсные каркасы ребристо-кольцевого и сектори-

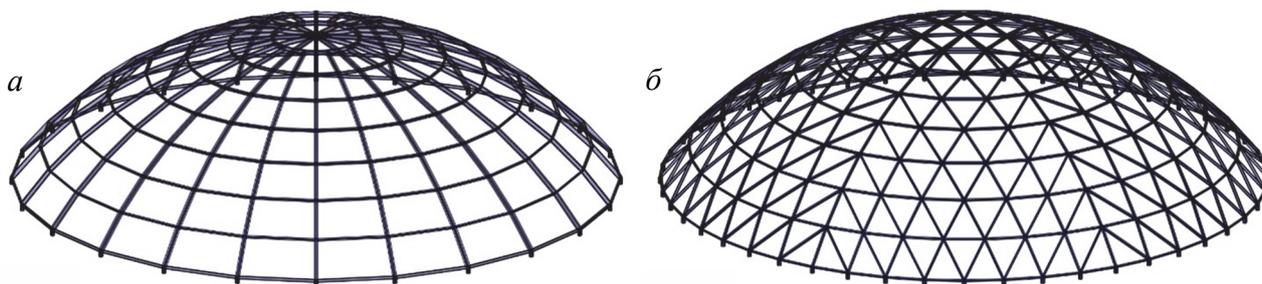
ально-сетчатого куполов, изображенные на рис. 8. Купола сферические, с радиусом кривизны 30 м, пролетом 48,2 м и высотой 12,2 м. Во всех узлах купольных каркасов приняты жесткие сопряжения между стержнями. В ребристо-кольцевом куполе ребра назначены из стального двутавра 35Ш1, кольца – из двутавра 23Ш1. В сетчатом куполе все элементы назначены из стального двутавра 20Ш1. Каркасы куполов опираются на короткие стойки из стальных труб через шарнирные сопряжения.

Была рассмотрена определенная промежуточная стадия возведения при разных способах монтажа. Для каждого из них создавалась отдельная расчетная модель (монтажная схема) купольного каркаса [17]. Для ребристо-кольцевого купола исследованы три схемы монтажа: с центральной и 3 рядами промежуточных опор, центральной и 1 рядом промежуточных опор, только с центральной опорой. Центральная опора поддерживает усиленное радиальными стержнями верхнее кольцо, к которому крепятся меридиональные ребра. Для секториально-сетчатого купола исследованы четыре схемы монтажа: со сплошными лесами, с центральной и 3 рядами промежуточных опор, центральной и 1 рядом промежуточных опор, только с центральной опорой. Центральная опора поддерживает верхний узел или стерж-

невую часть вершины купола, к которым крепятся монтажные элементы или фрагменты сетчатого купола.

Во всех монтажных схемах (моделях) ребристо-кольцевого и секториально-сетчатого куполов условно считалось, что отдельные стержни и фрагменты каркасов в месте сопряжения с временными опорами еще не соединены между собой (рис. 9), но установлены на опоры без возможности смещения. Поэтому сопряжения монтажных стержневых элементов и фрагментов каркасов друг с другом и с временными опорами приняты шарнирными. Сопряжения монтажных стержневых элементов и фрагментов каркаса в местах примыкания к верхнему кольцу или стержневой части вершины купола также приняты шарнирными.

Исследование производилось на основе статического расчета компьютерных моделей каркасов проектной и каждой из монтажных схем промежуточной стадии возведения куполов на действие нагрузки только от собственного веса стержневых элементов. Рассматривалась такая стадия возведения куполов, когда на постоянные и временные опоры установлены стержневые части трех из шести секторов купольных каркасов с круговыми промежутками в один сектор (рис. 10) [17].



**Рис. 8. Исследуемые купольные каркасы:**  
*a* – ребристо-кольцевой купол; *б* – секториально-сетчатый купол  
**[Figure 8. Investigated dome frames:**  
*a* – the ribbed-rings dome; *b* – the sectoral-lattice dome]

В процессе исследования каждого купольного каркаса были получены напряженно-деформированные состояния всех монтажных и проектной схем, которые сравнивались друг с другом. Анализ напряженных состояний этих купольных каркасов производился по нормальным напряжениям в сечениях их конструктивных элементов.

При работе купольных каркасов на собственный вес их элементы находятся под действием продольной силы с изгибом. Причем подавляющее большинство стержневых элементов ис-

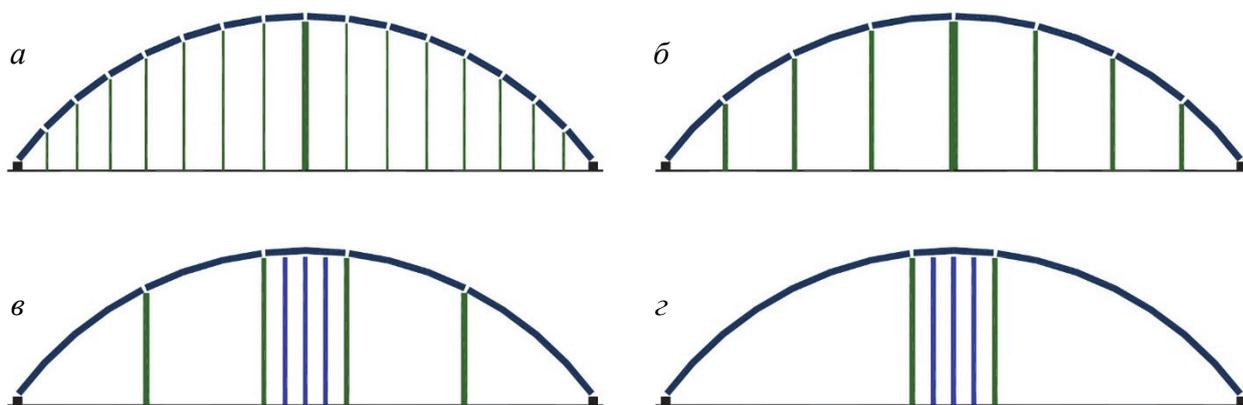
пытывает сжимающие продольные силы, которые и определяют несущую способность куполов. При исследовании вычислялись нормальные напряжения в каждом *i*-ом элементе по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \pm \frac{M_{x,i}}{W_{x,i}} \pm \frac{M_{y,i}}{W_{y,i}} .$$

В качестве критерия оценки принимались напряжения в элементах со сжимающей продольной

силой со стороны сжатых поясов (или сторон сечения) двутавровых элементов купольных каркасов. Исключением являлись элементы с растягивающей продольной силой. В тех случаях, когда сжимающие напряжения в сечении от изгибающих моментов в монтажных схемах оказывались с той же стороны от нейтральной оси двутавро-

вого стержня, что и в проектных схемах, при вычислении  $\sigma_i$  перед соответствующими слагаемыми использовался знак «+», если же с противоположной стороны, то знак «-». Аналогичное правило применялось и при вычислении растягивающих напряжений.

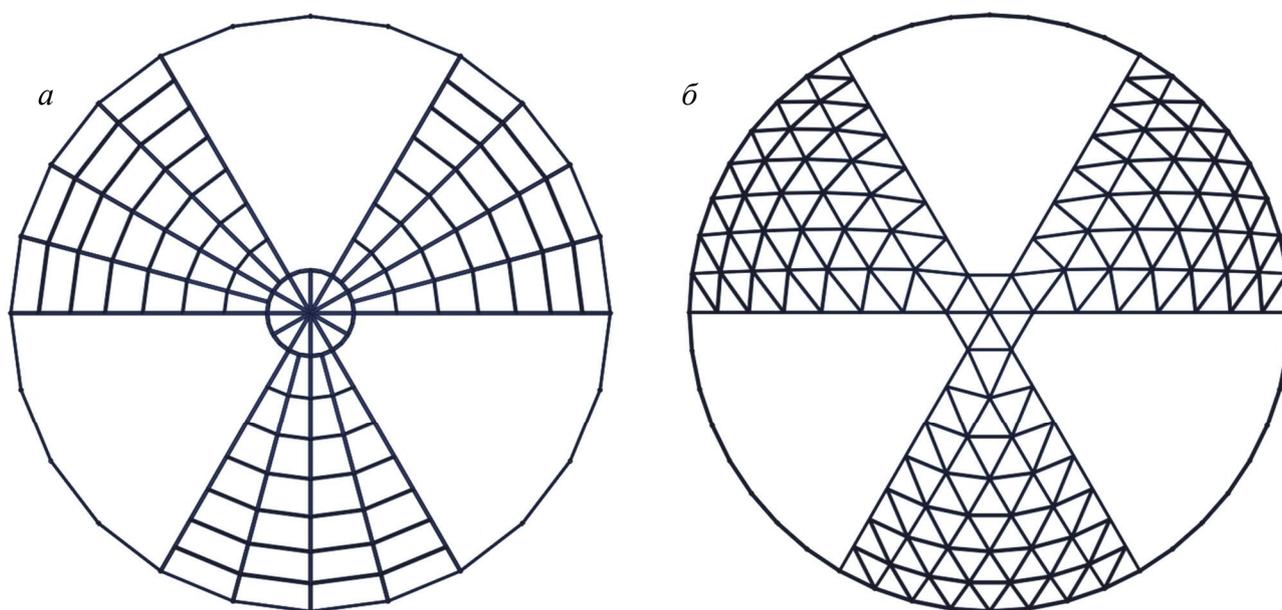


**Рис. 9. Монтажные схемы купольных каркасов:**

*a* – со сплошными лесами; *б* – с центральной и 3 рядами промежуточных опор;  
*в* – с центральной и 1 рядом промежуточных опор

**[Figure 9. Installation schemes of the dome frames:**

*a* – with continuous scaffolding; *б* – with a central support and 3 rows of intermediate supports;  
*в* – with a central and 1 row of intermediate supports; *з* – with a central support]



**Рис. 10. Смонтированные секторы купольных каркасов:**

*a* – ребристо-кольцевой купол; *б* – секториально-сетчатый купол

**[Figure 10. Assembled sectors of the dome frames:**

*a* – the ribbed-rings dome; *б* – the sectoral-lattice dome]

## Результаты

В ребристо-кольцевом куполе стержневые элементы каркаса принадлежат либо ребрам, либо кольцам каркаса. В секториально-сетчатом куполе стержневые элементы расположены по линиям меридионального направления, по диагоналям ячеек (наклонным к меридиональным линиям) и по кольцевым линиям. Условно принято стержневые элементы на границах секторов называть меридиональными, элементы по кольцевому направлению – кольцевыми, а диагональные элементы в ячейках между кольцами – раскосными. Здесь рассмотрены диагональные стержни возле границ секторов.

Напряжения в разных элементах  $\sigma_j$  однотипных конструкций  $j$  каркасов ребристо-кольцевого (элементы ребра или кольца) и секториально-сетчатого (меридиональные, раскосные или кольцевые элементы) куполов как проектных схем, так и монтажных схем имели широкий диапазон значений. Поэтому для анализа напряженных состояний купольных каркасов при различных способах монтажа удобнее сравнивать максимальные по абсолютной величине напряжения одного знака в однотипных элементах  $\sigma_{j,\max}$

с максимальными напряжениями проектной схемы [17].

Однако простое сравнение максимальных напряжений в монтажных схемах с напряжениями в проектной схеме недостаточно четко отражает их значимость для эксплуатационной работы купольных каркасов в целом. Поэтому в данном случае предлагается сравнение отношений максимальных по абсолютной величине напряжений к расчетному сопротивлению стали С245, в результате чего получены зависимости  $\sigma_{j,\max}/R_y$ . Эти зависимости характеризуют степень использования прочности элементов купольных каркасов от действия их собственного веса после завершения монтажа (проектная схема) и на рассматриваемой стадии возведения при различных способах монтажа (монтажные схемы).

На рис. 11 представлены диаграммы степени использования прочности однотипных элементов каркаса ребристо-кольцевого купола в проектной и трех монтажных схемах. На рис. 12 представлены диаграммы степени использования прочности однотипных элементов каркаса секториально-сетчатого купола в проектной и четырех монтажных схемах.

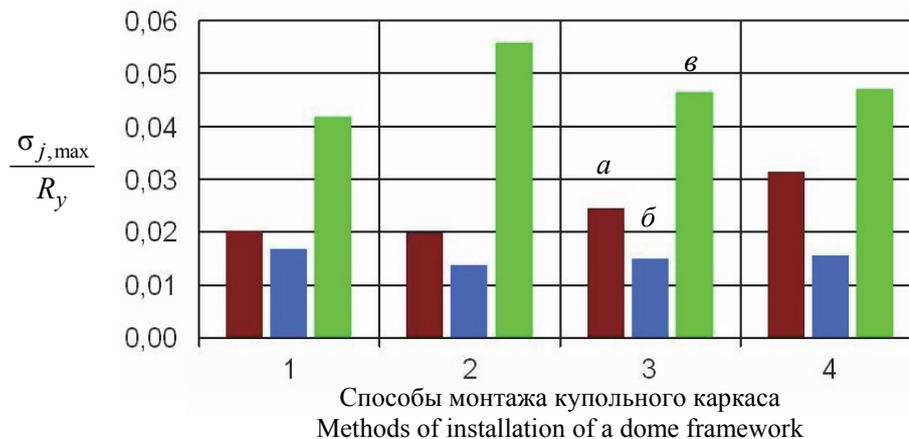


Рис. 11.  $\sigma_{j,\max}/R_y$  в элементах каркаса ребристо-кольцевого купола:

1 – проектная схема работы каркаса; 2 – монтаж с центральной и 3 рядами промежуточных опор; 3 – монтаж с центральной и 1 рядом промежуточных опор; 4 – монтаж с центральной опорой; а – сжатие в ребрах; б – сжатие в кольцах; в – растяжение в кольцах

Figure 11.  $\sigma_{j,\max}/R_y$  in the elements of the framework of the ribbed-ring dome:

1 – the design scheme of the frame work; 2 – installation with a central support and 3 rows of intermediate supports; 3 – installation with a central support and 1 row of intermediate supports; 4 – installation with a central support; а – compression in the ribs; б – compression in the rings; в – tension in the rings

Диаграммы рис. 11 свидетельствуют о том, что в процессе возведения одноярусных каркасов ребристо-кольцевых куполов из-за работы на собственный вес в сечениях их конструктивных

элементов возникают монтажные напряжения, не только сопоставимые по величине с напряжениями проектной схемы работы, но и превышающие их.

При этом в сечениях ребер величины сжимающих напряжений в монтажной схеме с временной центральной опорой и 3 рядами промежуточных опор достигают 2,0 % расчетного сопротивления, что эквивалентно работе конструкций в проектной схеме. При монтаже с временной центральной опорой и 1 рядом промежуточных опор величины сжимающих напряжений возрастают до 2,4 % расчетного сопротивления, а затем до 3,1 % при монтаже только с временной центральной опорой, что в 1,5 раза больше проектной схемы. Можно отметить, что с уменьшением количества временных опор величины сжимающих напряжений в сечениях ребер от работы каркаса в процессе монтажа существенно возрастают.

В сечениях колец сжимающие напряжения в монтажных схемах приближаются к напряжениям проектной схемы, которые достигают 1,7 % расчетного сопротивления стали. Поскольку величины растягивающих напряжений в проектной схеме равны 4,2 % расчетного сопротивления, то рост их до величин 4,6 и 4,7 % в двух последних монтажных схемах не может быть отнесен к существенному. Рост же растягивающих напряжений в сечениях колец до 5,6 % при монтаже с временной центральной опорой и 3 рядами промежуточных опор объясняется изгибом кольцевых элементов из плоскости наибольшей жесткости еще не жестко закрепленных над первым от наружного контура рядом промежуточных временных опор.

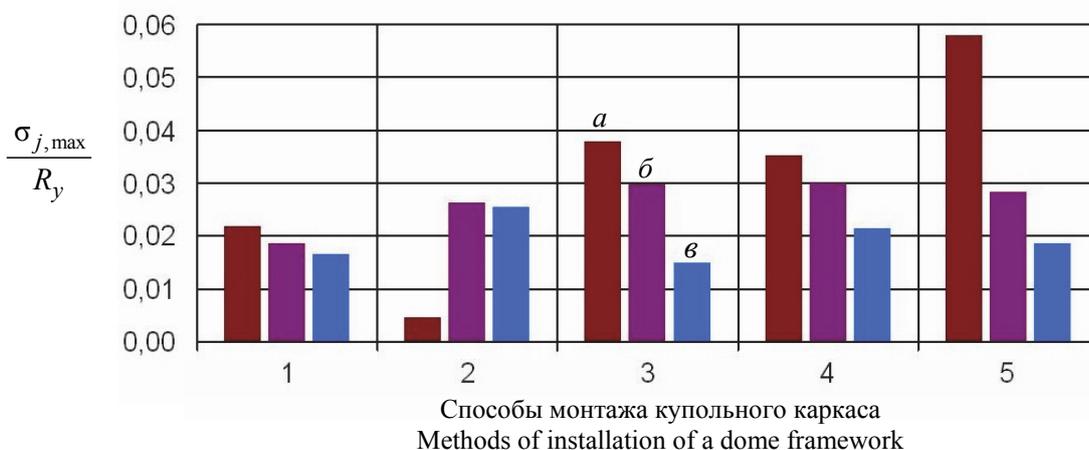


Рис. 12.  $\sigma_{j,max} / R_y$  в элементах каркаса секториально-сетчатого купола:

- 1 – проектная схема работы каркаса; 2 – монтаж со сплошных строительных лесов;
- 3 – монтаж с центральной и 3 рядами промежуточных опор; 4 – монтаж с центральной и 1 рядом промежуточных опор;
- 5 – монтаж с центральной опорой; а – сжатие в меридиональных элементах;
- б – сжатие в раскосных элементах; в – сжатие в кольцевых элементах

[Figure 12.  $\sigma_{j,max} / R_y$  in the elements of the framework of the sectoral-lattice dome:

- 1 – design scheme of the frame work; 2 – installation from continuous scaffolding;
- 3 – installation with a central support and 3 rows of intermediate supports;
- 4 – installation with a central support and 1 row of intermediate supports; 5 – installation with a central support;
- a – compression in the meridional elements; б – compression in the diagonal elements; в – compression in the ring elements]

Диаграммы рис. 12 свидетельствуют о том, что в процессе возведения каркасов секториально-сетчатых куполов из-за работы на собственный вес в сечениях их конструктивных элементах также возникают монтажные напряжения, не только сопоставимые по величине с напряжениями проектной схемы работы, но и превышающие их.

Для сжимающих напряжений в сечениях раскосных элементов проектной схемы 1,9 % расчетного сопротивления величины напряжений при монтаже со сплошных лесов увеличиваются до 2,6 %, при монтаже с временной центральной опо-

рой и 3 рядами промежуточных опор величины сжимающих напряжений возрастают до 3,0 % расчетного сопротивления. Дальнейшее уменьшение количества промежуточных опор практически не изменяет этих величин.

Для сжимающих напряжений в сечениях меридиональных элементов проектной схемы 2,2 % расчетного сопротивления при монтаже со сплошных лесов их величины незначительны. При монтаже с временной центральной опорой и 3 рядами промежуточных опор величины сжимающих напряжений в них возрастают до 3,8 % расчетного со-

противления, которые с уменьшением количества промежуточных опор изменяются незначительно. Однако монтаж только с центральной опорой приводит к возрастанию величины сжимающих напряжений в сечениях меридиональных элементов до 5,8 % расчетного сопротивления, что в 2,6 раза больше проектного значения.

Величины сжимающих напряжений в сечениях кольцевых элементов проектной схемы невелики – 1,7 % расчетного сопротивления. Их рост до 2,6 и 2,1 % при монтаже на сплошных лесах и монтаже с центральной и 1 рядом промежуточных опор объясняется изгибом отдельных кольцевых элементов из плоскости наибольшей жесткости еще не жестко закрепленных над временными опорами в ближних к опорному контуру ярусах.

В пространственных стержневых системах, к которым относятся металлические купольные каркасы, несущая способность сжатых или сжато-изгибаемых элементов исчерпывается в результате потери устойчивости. Появление неучтенных внутренних усилий от работы конструкций по монтажным расчетным схемам может оказать влияние на общее напряженно-деформированное состояние металлических купольных каркасов, возникающее от действия расчетных эксплуатационных нагрузок. Следовательно, к работе элементов купольных каркасов в процессе монтажа следует относиться с должным вниманием, и обязательно выполнять расчеты с учетом влияния монтажных усилий на напряженно-деформированное состояние купольных каркасов от эксплуатационных нагрузок.

### Выводы

На основании изложенного материала можно сделать следующие выводы.

1. В процессе возведения большепролетных металлических куполов в сечениях конструктивных элементов их каркасов неизбежно появление напряжений при любом способе монтажа.

2. Характер монтажных напряжений зависит от способов монтажа и в конструктивных элементах разных типов проявляется по-разному, что обусловлено отличием монтажных схем их работы от проектных схем.

3. Величины монтажных напряжений в сечениях элементов, имеющих тот же характер, что в проектных схемах, сопоставимы с напряжениями от собственного веса каркаса в проектных схемах при большом количестве временных опор и превосходят их при минимальном количестве временных опор, используемых в процессе возведения купольных каркасов.

4. Напряжения в сечениях конструктивных элементов при монтаже каркасов с минимальным количеством временных опор могут оказать влияние на общее напряженно-деформированное состояние большепролетных металлических куполов.

5. Для обеспечения надежности большепролетных металлических куполов необходимо обязательное выполнение расчетов с учетом влияния монтажных внутренних усилий на общее напряженно-деформированное состояние их каркасов.

6. Необходимо проведение исследований по оценке степени влияния внутренних усилий в конструктивных элементах каркасов, возникающих из-за работы по монтажным схемам, на напряженно-деформированное состояние металлических большепролетных куполов в процессе эксплуатации.

© Лебедь Е.В., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### Список литературы

1. *Гохарь-Хармандарян И.Г.* Большепролетные купольные здания. М.: Стройиздат, 1978. 150 с.
2. *Кривошапко С.Н.* Металлические ребристо-кольцевые и сетчато-стержневые оболочки XIX – первой половины XX вв. // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 6. С. 4–15.
3. *Торкатюк В.И.* Монтаж конструкций большепролетных зданий. М.: Стройиздат, 1985. 170 с.
4. Металлические конструкции: справочник проектировщика: в 3 т. / под общ. ред. В.В. Кузнецова (ЦНИИпроектстальконструкция им. Н.П. Мельникова). Т. 2. Стальные конструкции зданий и сооружений. М.: Изд-во АСВ, 1998. 512 с.
5. *Гофштейн Г.Е., Ким В.Г., Ницев В.Н., Соколова А.Д.* Монтаж металлических и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 2004. 528 с.
6. *Лебедь Е.В., Алукаев А.Ю.* Большепролетные металлические купольные покрытия и их возведение // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2018. Т. 14. № 1. С. 4–16.
7. *Mukaiyama Y., Fujino T., Kuroiwa Y., Ueki T.* Erection Methods for Space Structures // *Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures. Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, Valencia, 28 September – 2 October. Spain, Universidad Politecnica de Valencia, 2009. Pp. 1951–1962.*
8. Charlotte Coliseum. Charlotte, NC. URL: <http://scottymoore.net/charlotteColiseum.html> (дата обращения: 18.03.2017).
9. «Арена-Север» // ЗАО Стальмонтаж. Проектирование, изготовление, монтаж стальных конструкций. Наши объекты. URL: <http://www.stalmon.ru/nashi/57> (дата обращения: 14.03.2017).

10. *Louis O., Bass A.M.* Unusual Dome awaits Baseball Season in Houston // *Civil Engineering*. January, 1965. Vol. 35. No. 1. Pp. 63–65.

11. *Thor L. Anderson.* Le stade couvert polyvalent “Louisiana Superdome” à la Nouvelle-Orléans (Etats-Unis) // *Acier*. Mars 1974. Vol. 39. No. 3. Pp. 113–119.

12. Купол торгового центра «Глобал Сити» // Строительная компания «УК Совинтех». URL: <http://fee-develop.ru/ourdoneprojects/2-building/54-montagkupola> (дата обращения: 16.04.2017).

13. *Ружанский И.Л.* Опыт проектирования и сооружения сетчатых куполов // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2005. № 11. С. 22–26.

14. Купол электродепо Московской монорельсовой транспортной системы // ЦНИИПСК им. Мельникова. СТАКО. URL: <http://www.stako.ru/catalog/109/> (дата обращения: 14.03.2017).

15. Photos of the construction of Buckminster Fuller's Geodesic dome, the US pavilion at Expo 67, Montreal // MCM DAILY. Bucky Gallery. URL: <https://www.mcm-daily.com/gallery/bucky/> (дата обращения: 19.03.2017).

16. Монреальская биосфера – удивительный музей // Чудеса природы. Chudolike – самые красивые и самые интересные места нашей планеты. URL: <http://chudolike.ru/canada/monrealskaya-biosfera-udivitelnyj-muzej.html> (дата обращения: 21.10.2017).

17. *Лебедь Е.В.* Компьютерное исследование работы каркасов большепролетных металлических куполов

при различных способах монтажа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 4. С. 261–272.

18. *Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.* SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD. М.: АСВ, 2004. 592 с.

#### Об авторе

*Лебедь Евгений Васильевич* – кандидат технических наук, доцент, кафедра металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ) (Москва, Россия). *Область научных интересов:* большепролетные металлические купольные покрытия – схемы каркасов, конструкции элементов, способы возведения, точность сборки, компьютерное моделирование монтажа, исследование погрешностей и начальных усилий, оценка напряженно-деформированного состояния. *Контактная информация:* e-mail – [evglebed@mail.ru](mailto:evglebed@mail.ru)

#### Для цитирования

*Лебедь Е.В.* Особенности работы каркасов большепролетных металлических куполов в процессе их возведения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 481–494. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-481-494

RESEARCH PAPER

## Behavior of the frames of large-span metal domes in the process of their installation

Evgeny V. Lebed

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)  
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

(received: August 12, 2018; revised: October 05, 2018; accepted: October 16, 2018)

**Abstract. Goal.** The goal of this paper is to characterize the process of forming the frames of large-span metal domes during assembly process. The load-bearing structural schemes during the assembly of frames differ from those, adopted for their analysis and design. Due to this fact, initial internal forces appear in the structural elements of frameworks that are called assembly forces. Geometric schemes of dome frameworks and the principles of their formation are described for ribbed domes, ribbed domes with annular rings and lattice domes. It is shown how lattice dome frameworks are formed and why they are considered as spatial bar systems. Specific features of the structural solutions for single-layer and double-layer frameworks are described. It is noted that the technological scheme for the assembly of structures of large-span metal domes depends on the structural systems of frameworks and on the methods of their erection. A brief description is given of different methods for erecting frameworks of large-span metal domes and of the number of temporary supports and mechanisms used in this process.

**Review.** Different methods of erection are illustrated with the examples of several well-known dome structures built in the world. The evaluation of the influence of each process on the behavior of structures during the installation is given. The nature of the work of individual structures and a frame is described for the process of erecting large-span metal domes. The emphasis was made on the significant differences in the nature of work of structural systems of dome frameworks with different ways of their installation.

**Research.** Computer models of the lattice metal domes are made of steel I-bars with rigid connections at the joints. Additional models were created for incomplete frameworks to study alternative ways of erection. For each assembly model

of the dome framework, computer analysis was performed for the action of its self-weight. Stresses in the structural members, obtained as a result of the analysis, were compared with the stresses in the corresponding elements of the design model of the framework under the self-weight.

**Conclusions.** The conclusion is made that the stresses in the elements of frameworks of the large-span metal domes are unavoidable when they are erected. The necessity of compulsory analysis of frameworks for erection conditions in the design of large-span metal domes was noted.

**Keywords:** large-span domes, metal frameworks, geometric schemes of domes, structural systems, design solutions, methods of erection, assembly of structures, computer model, element stresses

## References

- Gokhar'-Harmadaryan I.G. (1978). *Bol'sheproletnye kupol'nye zdaniya [Wide-Span Dome Buildings]*. Moscow, Stroyizdat Publ., 150. (In Russ.)
- Krivoshapko S.N. (2014). Metal ribbed-and-circular and lattice shells from the XIX<sup>th</sup> until the first half of the XX<sup>th</sup> century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (6), 4–15.
- Torkatyuk V.I. (1985). *Montazh konstrukzij bol'sheproletnyh zdaniy [Installation of Structures of Large-Span Buildings]*. Moscow, Stroyizdat Publ., 170. (In Russ.)
- Kuznetsov V.V. (Ed.). (1998). *Metallicheskie konstruktsii. Tom. 2. Stal'nye konstruktsii zdaniy i sooruzheniy. Spravochnik proektirovshchika [Metal Structures. Vol. 2. Steel structures of buildings and constructions. Reference book of the designer]*. Moscow, ASV Publ., 512. (In Russ.)
- Gofshteyn G.E., Kim V.G., Nishchev V.N., Sokolova A.D. (2004). *Montazh metallicheskih i zhelezobetonnykh konstrukzij [Installation of Metal and Reinforced Concrete Structures]*. Moscow, Stroyizdat Publ., 528. (In Russ.)
- Lebed E.V., Alukaev A.U. (2018). Large-span metal dome roofs and their construction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(1), 4–16.
- Mukaiyama Y., Fujino T., Kuroiwa Y., Ueki T. (2009). Erection Methods for Space Structures. *Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures. Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009, 28 September – 2 October, Valencia*. Spain, Universidad Politecnica de Valencia, 1951–1962.
- Scotty Moore. (2017, March 18). Charlotte Coliseum. Charlotte, NC. Available at: <http://scottymoore.net/charlotteColiseum.html>
- ZAO Stal'montazh. (2017, March 14). Proektirovanie, izgotovlenie, montazh stalnyh konstruktsiy. Nashi ob'ekty. Arena-Sever [Design, production, installation of steel structures. Our objects. Arena-Sever.]. Available at: <http://www.stalmon.ru/nashi/57>
- Louis O., Bass A.M. (1965). Unusual Dome awaits Baseball Season in Houston. *Civil Engineering*, 35(1), 63–65.
- Thor L. Anderson. (1974). Le stade couvert polyvalent "Louisiana Superdome" à la Nouvelle-Orléans (Etats-Unis). *Acier*, 39(3), 113–119.
- UK Sovintekh. (2017, April 16). Kupol trgovogo tsentra "Global Siti" [Dome of shopping center Global City]. Available at: <http://feedevelop.ru/ourdoneprojects/2-building/54-montagkupola>
- Ruzhansky I.L. (2005). Opyt proektirovaniya i sooruzheniya setchatyh kupolov [Experience of design and construction of mesh domes]. *Montazhnye i spetsial'nye raboty v stroitel'stve [Construction and Special Works in Civil Engineering]*, (11), 22–26. (In Russ.)
- TSNIIPSK im. Mel'nikova. STAKO. (2017, March 14). Kupol elektrodepo Moskovskoi monorel'sovoi transportnoi sistemy [Dome of electrodepot of the Moscow monorail transport system]. Available at: <http://www.stako.ru/catalog/109/>
- MCM DAILY. Bucky Gallery. (2017, March 19). Photos of the construction of Buckminster Fuller's Geodesic dome, the US pavilion at Expo 67, Montreal. Available at: <https://www.mcmdaily.com/gallery/bucky/>
- Chudesa prirody. Chudolike – samye krasivye i samye udivitel'nye mesta nashey planety [Nature miracles. Chudolike – The most beautiful and most interesting places of our planet]. (2017, October 21). Monreal'skaya biosfera – udivitel'nyi muzey [The Montreal biosphere – the surprising museum]. Available at: <http://chudolike.ru/canada/monrealskaya-biosfera-udivitelnyj-muzej.html>
- Lebed E.V. (2018). Computer analysis of the behavior of large-span metal domes with different methods of installation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(4), 261–272. (In Russ.)
- Karpilovskiy V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Perel'muter A.V., Perel'muter M.A. (2004). SCAD Office. Vychislitel'ny kompleks SCAD [Computer system SCAD]. Moscow, ASV Publ., 592. (In Russ.)

### About the author

**Evgeny V. Lebed** – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Metal and Wooden Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU) (Moscow, Russia). *Scientific interests:* large-span metal dome roofs – geometric systems, structural systems, methods of construction, accuracy of assembly, computer simulation of mounting, research of assembly errors and initial internal forces, assessment of the stress-strain state. *Contacts:* e-mail: [evglebed@mail.ru](mailto:evglebed@mail.ru)

### For citation

Lebed E.V. (2018). Behavior of the frames of large-span metal domes in the process of their installation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 481–494. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-481-494 (In Russ.)

УДК 624.9  
DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-495-501

RESEARCH PAPER

## The development of chart based method for steel beam designs using the Russian sections

Tesfaldet H. Gebre

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Mikluho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russia

(received: September 19, 2018; revised: November 05, 2018; accepted: November 10, 2018)

**Abstract. Introduction and objectives.** Russian steel construction does not cover the chart method for steel beam design and experimental works need to be implemented to investigate the behavior of the charts. However, the experimental tests are expensive, tedious and time consuming to be conducted. The objective of this paper is to compare and validate the accuracy and reliability of the chart method for steel beam design by correlating moment capacity and bracing length ( $\Phi M_n, L_b$ ) curves between different sections and this strategy is more helpful in determining the lightest steel sections without trial and error.

**Materials and methods.** Alternatively, a strategy to use the AISC-LRFD's chart-based method, which plots the relationships between the flexural capacities of steel sections and their unbraced lengths of lateral bracing and weights, will be helpful in determining the lightest sections in terms of their lateral bracing requirements and moment capacity. In other words, the most optimum steel sections can be obtained without trial-and-error process.

**Results.** If the design with a chart-based method using the Russian steel sections is developed, it can be used to design steel beams more quickly and economically.

**Keywords:** lateral torsional buckling, ideal beam design, design chart, optimum steel sections

### Introduction

During the analysis of steel structures, coming up with the stability resistance is one of the most crucial verification since normally the loss of stability is the governing job. In selecting a high-grade steel for a particular structure tends to produce slender structural elements so that the design of a steel beam is commonly governed by its stability and also by a constraint due to the limitation of steel variation sections available in the market. Those would represent all the issues which should be considered in steel structural designs. The trial and error processes in evaluating a range of steel sections and lateral bracing configurations with the lighter weights are needed in order to achieve an optimum design. By implementing the design based on the chart, we can find the optimum steel sections easily. The nominal flexural strength of  $W$  shapes is illustrated as a function of a braced length,  $L_b$  and the available strength is determined as  $\Phi M_n$ , which must equal to the required strength (bending moment)  $M_u$  [1]. It uses the curve of the bending moment capacity versus the lateral bracing distance of a wide range data of steel sections.

In the manual, the existence of a steel section with a dotted line indicates that in certain conditions and lateral bracing configurations, the performance is less optimal than the other sections indicated by a full line. Steel sections with a full line show a greater capacity but it is lighter than the weight of the steel section with a dotted line. The existence of a graphical method using a design curve would facilitate its economic steel design [1]. So, if the design curve can be created to provide the steel sections, it will certainly be widely used by those engineers since this graphical method can easily generate the optimal design of steel structures, thus saving the costs of construction.

### Steel beam behavior in lateral-torsional buckling

Beams are structural elements loaded in a traverse direction, in other way beam may be defined as a member subjected essentially to bending and shear force but its behavior is dominated by its bending deformation [2; 3]. The behavior of a steel member under bending is influenced by its material properties, section slenderness, member slenderness and lateral and torsional restraints [2]. As lateral torsional stabi-

lity is one of the special type of general buckling. It occurs when the beam is transversely loaded in the plane of the main stiffness of cross section and by the same time the transverse deflation along the beam length is not prevented. This state is characteristic by spatial deformation covering the flexural bending and the torsional displacement. Due to the bending action, the upper flange is in compression and acts like a strut. Being free to move, the compression flange will be likely to buckle sideways dragging the tension flange with it. The tension flange resists this sideways movement, therefore, as the beam buckles, the section twists with the web no longer vertical and this action is known as lateral torsional buckling (LTB) [4]. It is assumed that during deformation of the ends of beam can rotate freely with respect to the principal axes of inertia, and while rotation with respect the third axis is prevented by constraint [4]. Since the phenomena is a buckling phenomenon the strength vs slenderness curve follows the general form of the curve used for LTB [6; 7]. Lateral bracing must be adequate to hold the braced beam in position. Thus, stiffness as well as strength is required. As a general rule, bracing will be adequate if each lateral brace is designed for 2% of the compressive force in the flanges of the beam it braces [8]. Two threshold values for unbraced length namely  $L_p$  and  $L_r$  are defined in AISC. The  $L_p$  value provides a dividing line between plastic and inelastic buckling behavior. Similarly, the  $L_r$  value provides a dividing line between inelastic and elastic buckling behavior. According to AISC, plastic moment capacity of a compact member can develop if the unbraced length is less than  $L_p$  and using this value in design represent the optimum use of steel [2; 7; 9]. The member's capacity reduces linearly between  $M_p$  and  $0.7 M_y$  if the unbraced length is between  $L_p$  and  $L_r$ . If the unbraced length is greater than  $L_r$ , then elastic buckling is expected to occur and the capacity can be found using elastic critical buckling moment ( $M_{cr}$ ). The nominal bending moment curve of the steel beam of figure 1 shows the capacity of a single steel section (W16×26) across a wide range of lateral bracing distances ( $L_b$ ) and shapes of the moment ( $C_b$ ) [3].

Like all buckling, the force that gets on LTB is depend on the effective length or slenderness ratio. The shape and dimensions of the cross section, the slenderness ratio and the type of loading affect the lateral torsional buckling behavior [8].

If the length is short enough, the member can develop its full plastic strength and for longer laterally unbraced lengths remains elastic buckling In-between, there is inelastic buckling. Similarly, the nominal flexural strength curve of **60III2** (Russian steel construction section) shows the assessment of capacity

of a single steel section across a wide range of lateral bracing ( $L_b$ ) and shapes of the moment with ( $C_b = 1$  and  $C_b = 1.2$ ) as shown in figure 2. In this curve, based on the required values for the limits of  $L_p = 11.1$  ft and  $L_r = 34.9$  ft their moment capacities are  $M_p = 998.4$  ft-k and  $M_r = 554.5$  ft-k respectively. Accordingly, depending on the lateral bracing length, there are three different regions for nominal bending moment: plastic ( $L_b < 11.1$  ft), inelastic buckling ( $11.1 \text{ ft} < L_b < 34.9$  ft) and elastic buckling ( $L_b > 34.9$  ft).

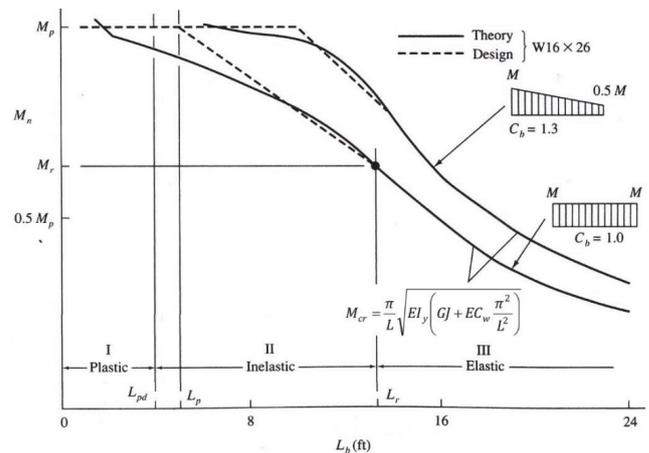


Figure 1. The influence of  $L_b$  and  $C_b$  to the nominal bending moment capacity of steel beam

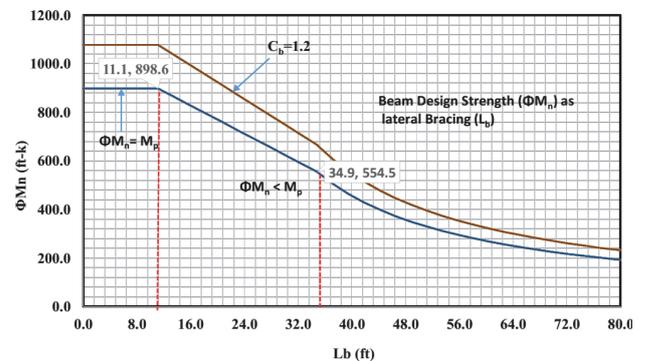


Figure 2.  $\Phi M_n$  vs  $L_b$  for 60III2

### Different types of steel beam section in Russian steel construction

Steel beams are extremely crucial and necessary for the construction any building or structure, such as bridges, etc. They come in a wide range of sizes and shapes. The commonly used I beam sections are III and B sections which are the most economical and most widely used sections. The steel section follows the following format 35Б1, 40Б1, 50III2, etc., the initial number is used to differentiate the Russian steel section based on the height and the alphabets are used for the type of I section example Б stands for regular

I-beams and III is used for wide flange and suffix number is used to differentiate for beams with similar height for example a group of steel sections with similar heights have a classification as 40III1 and 40III2, or 10Б1 and 10Б2 [10].

### The concept of curve designs

Lateral-torsional buckling is a global buckling mode in which the in-plane deflection of a laterally unbraced beam changes to a mixed lateral deflection and twisting. According to the AISC [1]. The general form of the LTB limit state follows the typical buckling curves, as we know that the steel design manual [1; 15] provides a wide variety of such curves for AISC steel sections only. In this paper, the method of steel design requires moment capacity curve from a wide-ranging of Russian steel sections available on the market because creating a local design curves using the commonly available steel section will definitely help to select the optimal steel section easily. On the curve the nominal moment capacity,  $\Phi M_n$  placed on the ordinate and distance of lateral bracing,  $L_b$  on the abscissa as shown in figure 3. The curve is presented in a basic scheme of the nominal flexural strength ( $\Phi M_n$ ) as a function of the unbraced length ( $L_b$ ). The horizontal segment of the curve at the far left, between  $L_b = 0$  ft and  $L_p$ , is the range where the strength is limited by flexural yielding. In this region, the nominal strength is taken as the full plastic moment strength of the section as given by AISC Specification Equation F2-1 AISC. In the range of the curve at the far right, starting at  $L_r$ , the strength is limited by elastic buckling. The strength in this region is given by AISC Specification Equation F2-3 AISC. Between these regions, within the linear region of the curve between  $M_n = M_p$  at  $L_p$  on the left, and  $M_n = 0.7 M_y = 0.7 F_y S_x$  at  $L_r$  on the right, the strength is limited by inelastic buckling and the region is provided in AISC Specification Equation F2-2 [9]. The curve plotted as a heavy solid line represents the case where  $C_b = 1.0$ , while the heavy dashed line represents the case where  $C_b$  exceeds one. The point of the curve indicates that the magnitude limit is independent of the nominal moment  $L_b$  conditions, as determined by the plastic moment of the sections ( $\Phi M_n = M_p$ ), if  $L_b < L_p$ . The point  $L_p$  on the curve is shown as coordinate. The point of another curve showing the cross section may have been yielded at first but failed to establish its plastic moment if  $L_p < L_b < L_r$ . Steel sections with the condition  $L_b > L_r$  is not efficient because the collapse (LTB) occurs in the elastic condition, while it has not undergone its plastic or yielding state,  $\Phi M_n < M_p$ . The curve

shown in figure 2 is only for a section 60III2 separately so that it could be compared with another section, which would be a similar curve of a steel section in the same chart figure 3. If the nominal moment of the two curves meets and intersects at a point, the effective section based on the nominal weight of the two sections can be selected, the curve which describes the line of the economic section is a curve with a thick continuous line, while the steel sections with a broken line curve is not economical. Even though graphs and tables simplify the design process, it is equally important to understand the basic principle of steel structural designs and be accountable for the results. Necessities of the curve taken at  $C_b = 1$ , which shows that the form of moments cause of LTB is considered constant, and also the strength reduction factor,  $\Phi$  of 0.9 according to the AISC specification [10]. A strategic use of the moment curves to select the optimum steel section is described in figure 3. In this explanation, two choices are assumed: Section A 40III3 (123.4 kg/m) and Section B 50III1 (114.4 kg/m), both displayed in the form of the moment curve ( $\Phi M_n$ ) versus lateral unbraced length ( $L_b$ ).

The nominal moment curves of the two different kinds of sections show an intersection of curves and lines which are under the other curve because it is heavier and turns into a dotted line. To design the chart needs an assessment of different cases of the ( $\Phi M_n$ ) versus  $L_b$  of the beam sections. Case I (refer figure 3), the coordinate position with  $L_{b-1}$ ,  $\Phi M_{n-1}$ , within the two curves, Sections A and B can be selected, but the light section is Section B (lower section). Case II with coordinates  $L_{b-2}$ ,  $\Phi M_{n-2}$ , then Section B is the ideal section through its lightweight and strong section. Case III, the coordinate of  $L_{b-3}$ ,  $\Phi M_{n-3}$  is outside the two curves therefore both sections are not appropriate sections but in this case adjustment in lateral bracing can be done by reducing the value of  $L_{b-3}$  to  $L'_{b-3}$  then section be can be selected. Case IV with the coordinates  $L_{b-4}$ ,  $\Phi M_{n-4}$ , it is with in one curve so section A can be selected. Case V ( $L_{b-5}$ ,  $\Phi M_{n-5}$ ) due to its position on top of the two curves, at this moment no sufficient steel sections available and adjustment of  $L_b$  is impossible accordingly we must use another section.

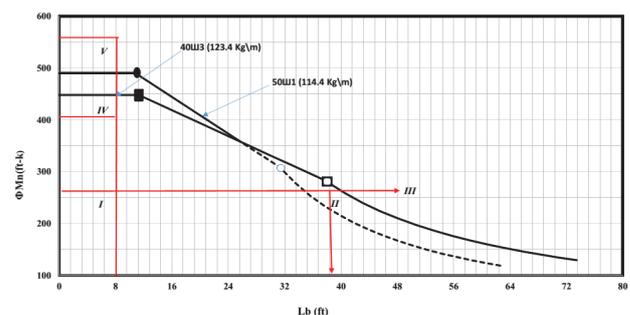


Figure 3.  $\Phi M_n$  vs  $L_b$  for 50III1 and 40III3

**Development of design chart  
to select the optimum steel section**

In beam design, tables and charts in AISC helps as design schemes based on the principle of steel structural designs, in the charts  $C_b$  is taken as unity for uniform bending moment, and also the strength reduction factor,  $\Phi_b$  of 0.9 according to code<sup>1</sup>. The  $C_b$  coefficient is a modification factor that takes into account the non-uniform bending moment diagrams in the beam [13]. If the beam is subjected to a constant bending moment along the length  $L_b$ , then the developed chart is used to select the light weight and best fit Russian steel section for the given  $\Phi M_n$  and  $L_b$ . knowing the factored moment ( $M_u$ ) including self-weight of the beam; it should be less than or equal to the design strength ( $\Phi M_n$ ). Select a shape that satisfies the flexural strength requirement based on the distance of unbraced length. The design chart can be built to calculate the capacity moment of Russian steel I-section at a certain distance of lateral bracing. Moreover, the confirmation is also done through comparison with the manual analysis to calculate the most optimum steel sections [11; 13].

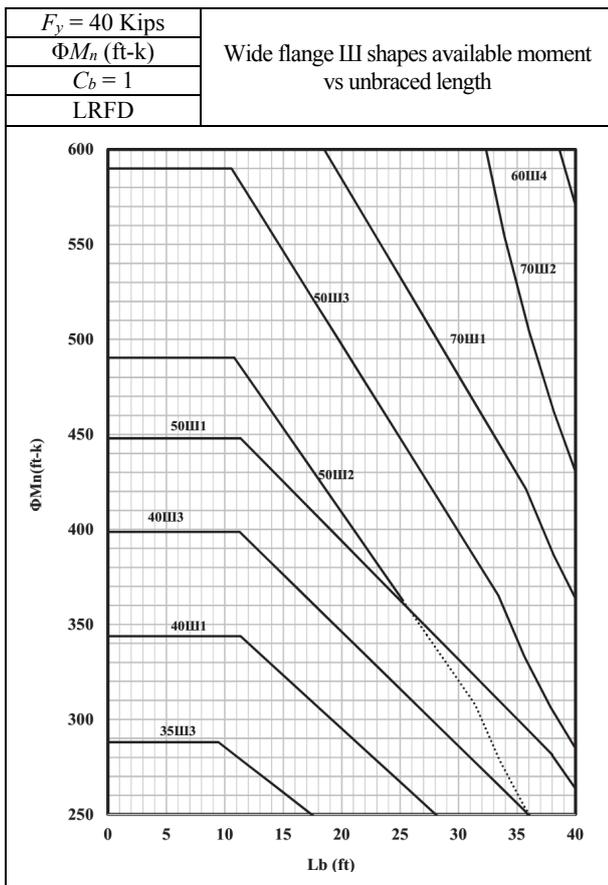


Figure 4.  $\Phi M_n$  vs  $L_b$  design chart

<sup>1</sup> СНиП II-23-81. 2017.

**Chart method  
to select the optimum of steel section**

As the chart is developed for Russian steel I-sections, we can select the most optimal beam section based on the specified moment capacity and lateral bracing. Let we consider a beam with specified  $L_b = 15$  ft and  $M_u = 360$  ft-k, as our goal is to find the optimum steel sections (refer figure 5). The first step is to align a horizontal line corresponding the required moment ( $M_u = 360$  ft-k) and construct another vertical line which begin from the specified lateral bracing ( $L_b = 15$  ft) then the two lines will intersect at a point. Draw a vertical line from the intersection point up to the second intersection point between the vertical line and any curve with solid line; this curve is the optimal one (40III3) finally dragging the horizontal line from the second point to the vertical axis to find the available moment ( $\Phi M_n = 376.5$  ft-k), as the available moment is greater that moment capacity ( $\Phi M_n > M_n$ ) the ideal section is 40III3. The design of the beam with  $C_b > 1.0$ , can be done, by dividing  $M_u$  by  $C_b$ . Then, it should be compared with the nominal bending strength which is specified in the curves. The selected section does not exceed the plastic moment capacity of the cross-section available.

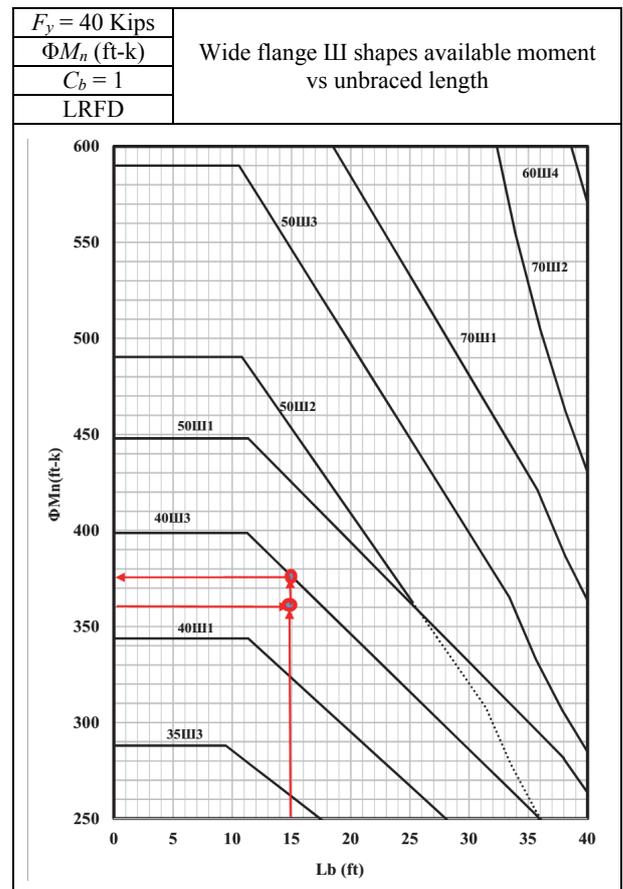


Figure 5.  $\Phi M_n$  vs  $L_b$  for optimal section

## Conclusion

As the objective of this paper is to compare and validate the accuracy and reliability of the chart method for steel beam design by correlating moment capacity and bracing length ( $\Phi M_n, L_b$ ) curves between different wide flange sections. In Russian steel construction specifications, due to the limited number of steel section the graphs are with wide gaps and there is not more overlapping of graphs to each other's. The chart is dominated by unbroken lines and it's unwieldy to select the effective section based on the nominal weight of different sections because the nominal moment of the two curves don't intersects to each other alike AISC charts. As an outcome, the Russian steel construction form of wide flange steel section list has been effectively transformed into the design curves for graphical methods. This paper concludes that the graphical method is simpler, faster, and with the same precision to the manual analysis of the non-graphical method.

© Gebre T.H., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

## References

1. American Institute of Steel Construction. (2011). Steel Construction Manual. 14<sup>th</sup> Edition. 183.
2. Badari B., Papp F. (2015). On Design Method of Lateral-torsional Buckling of Beams: State of the Art and a New Proposal for a General Type Design Method. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 59(2), 179–192. DOI: 10.3311/PPci.7837
3. Salmon C.G., Johnson J.E., Malh F.A. (2009). *Steel Structures: Design and Behaviour: Emphasizing Load and Resistance Factor Design*, 417–431.
4. Galishnikova V.V., Pahl P.J. (2018). Analysis of frame buckling without sidesway classification. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(4), 299–312. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-299-312
5. Brown D.G. et al. (2007). Handbook of Structural Steelwork, (55). 440.
6. Bungale S. Taranath. (2011). *Structural Analysis and Design of Tall Buildings: Steel and Composite Construction*. 407.
7. Farkas J., Jármai K. (2013). Cylindrical and Conical Shells. *Optimum Design of Steel Structures*, 46, 211–230. DOI: 10.1007/978-3-642-36868-4
8. Winkler R., Kindmann R., Knobloch M. (2017). Lateral Torsional Buckling Behavior of Steel Beams – On the Influence of the Structural System. *Structures*, (11), 178–188. DOI: 10.1016/j.istruc.2017.05.007
9. Marshall T.P. et al. (2015). Design Guide for Low- and Medium-Rise Steel Buildings Institute. *AI Mag.*, (13).
10. Building Research, Worked Examples For The Design of Steel Structures BRE SCI Based on BSI & Eurocode 3. 1.1, 1994.
11. Bajera M., Barnat J., Pijak J. (2017). Lateral torsional buckling of selected cross-section types. *Procedia Engineering*, (190), 106–110. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.314>
12. Bernuzzi C., Cordova B. (2016). *Structural Steel Design to Eurocode 3 and AISC Specifications*. 218 p.
13. Galishnikova V.V., Lebed E.V. (2017). A reliable method for the stability analysis of structures. *J. Fundam. Appl. Sci.*, 9(7S), 484–496.
14. Gebre T.H., Negash N.A. (2018). The development of strength curves for compression members using three different codes: AISC, Eurocode and Russian steel construction (pp. 59–67). 208 p.
15. Williams A. (2011). *Steel Structures Design ASD/LRFD*. 545.

### About the author

**Gebre Tesfaldet Hadgembes** – PhD Student of the Department of Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (Moscow, Russia). *Research interests*: computational civil engineering, frame stability analysis, lateral torsional buckling, computational mechanics of buckling systems. *Contacts*: e-mail – tesfaldeth@gmail.com

### For citation

Gebre T.H. (2018). The development of chart based method for steel beam designs using the Russian sections. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 495–501. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-495-501

## Разработка графического метода проектирования стальных балок с помощью диаграмм для российского сортамента стальных профилей

Т.Х. Гебре

Российский университет дружбы народов  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

(поступила в редакцию: 19 сентября 2018 г.; доработана: 05 ноября 2018 г.; принята к публикации: 10 ноября 2018 г.)

**Введение и цели.** Графический метод расчета и проектирования стальных балок с помощью диаграмм не включен в российские нормативы по проектированию стальных конструкций, что приводит к необходимости выполнения трудоемких, длительных и дорогостоящих экспериментальных исследований. Цель данной статьи – сравнить и проверить точность и надежность метода диаграмм для проектирования стальных балок путем сопоставления кривых несущей способности по изгибающему моменту и расчетной длины ( $\Phi M_n$ ,  $L_b$ ) стальных балок, имеющих различные поперечные сечения. Данный подход гораздо удобнее и практичнее для определения наиболее эффективных и наименее металлоемких стальных профилей, чем проектирование методом проб и ошибок.

**Материалы и методы.** Альтернативный подход к проектированию стальных балок с использованием графического метода AISC-LRFD на основе диаграмм изгибной несущей способности стальных профилей и их расчетной длины в боковой перпендикулярной плоскости действия изгибающего момента позволяет значительно упростить подбор наименее металлоемких и наиболее эффективных стальных балок для обеспечения их максимальной изгибной несущей способности и оптимальной длины раскрепления в боковой плоскости без использования метода проб и ошибок.

**Результаты.** Разработка графического метода проектирования стальных балок на основе российского сортамента прокатных профилей позволит значительно оптимизировать процесс проектирования балочных конструкций и одновременно обеспечит их максимальную эффективность и экономичность.

**Ключевые слова:** боковая крутильная потеря устойчивости, идеальная конструкция балки, расчетная схема, оптимальные стальные профили

### Список литературы

1. Steel Construction Manual 14<sup>th</sup> Edition / American Institute of Steel Construction. 2011. 183 p.
2. Badari B., Papp F. On Design Method of Lateral-torsional Buckling of Beams: State of the Art and a New Proposal for a General Type Design Method // Periodica Polytechnica Civil Engineering. 2015. Vol. 59. No. 2. Pp. 179–192. DOI: 10.3311/PPci.7837
3. Salmon C.G., Johnson J.E., Malh F.A. Steel Structures: Design and Behaviour: Emphasizing Load and Resistance Factor Design. 2009. Pp. 417–431.
4. Galishnikova V.V., Pahl P.J. Analysis of frame buckling without sidesway classification // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2018. Vol. 14. No 4. Pp. 299–312. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-299-312
5. Brown D.G. et al. Handbook of Structural Steelwork. 2007. No. 55. 440 p.
6. Bungale S. Taranath. Structural Analysis and Design of Tall Buildings: Steel and Composite Construction. 2011. 407 p.
7. Farkas J., Jármai K. Cylindrical and Conical Shells // Optimum Design of Steel Structures. 2013. Vol. 46. Pp. 211–230. DOI: 10.1007/978-3-642-36868-4
8. Winkler R., Kindmann R., Knobloch M. Lateral Torsional Buckling Behavior of Steel Beams – On the Influence of the Structural System // Structures. 2017. Vol. 11. Pp. 178–188. DOI: 10.1016/j.istruc.2017.05.007
9. Marshall T.P. et al., Design Guide for Low- and Medium-Rise Steel Buildings Institute // AI Mag. 2015. Vol. 13.
10. Building Research, Worked Examples For The Design of Steel Structures BRE SCI Based on BSI & Eurocode 3. 1.1. 1994.
11. Bajera M., Barnat J., Pijak J. Lateral torsional buckling of selected cross-section types // Procedia Engineering. 2017. Vol. 190. Pp. 106–110. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.314>
12. Bernuzzi C., Cordova B. Structural Steel Design to Eurocode 3 and AISC Specifications. 2016. 218 p.
13. Galishnikova V.V., Lebed E.V. A reliable method for the stability analysis of structures // J. Fundam. Appl. Sci. 2017. Vol. 9. No. 7S. Pp. 484–496.

14. *Gebre T.H., Negash N.A.* The development of strength curves for compression members using three different codes: AISC, Eurocode and Russian steel construction). 2018. 208 p. Pp. 59–67.

15. *Williams A.* Steel Structures Design ASD/LRFD. 2011. 545 p.

**Об авторе**

**Тесфалдет Хадгембес Гебре** – магистрант департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия).  
*Область научных интересов:* вычислительное строительство, анализ устойчивости рам, расчет на устойчивость,

математическое моделирование, устойчивость строительных конструкций. *Контактная информация:* e-mail – tesfaldeth@gmail.com

**Для цитирования**

*Gebre T.H.* The development of chart based method for steel beam designs using the Russian sections (Разработка графического метода проектирования стальных балок с помощью диаграмм для российского сортамента стальных профилей) // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 495–501. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-495-501

## Theory of thin elastic shells

УДК 624.04

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-502-508

RESEARCH PAPER

### Geometric modeling and linear static analysis of thin shells in the form of cylindroids

Mathieu Gil-oulbé, Jaafar Qbaily

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Mikluho-maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

\*Автор, ответственный за переписку

(received: August 04, 2018; revised: September 21, 2018; accepted: October 11, 2018)

**Abstract. Aims.** Thin shells in the form of cylindroids are fourth-degree ruled shells for which few works are devoted. In this paper, their geometric modeling is worked out and their middle surface are plotted, using the software MathCAD. Their stress-strain state are instigated with two building material: reinforcement concert and qualitative steel.

**Methods.** This linear investigation is done for fixed and hinged supports and for various thicknesses in the software SCAD. The numerical values of their maximum and minimum displacements of their middle surfaces are given. Based on these displacements, conclusions are made for the whole paper.

**Results.** The linear analysis for reinforced concrete and metallic shells, computed using the software SCAD gives the numerical and graphical results that are presented.

**Conclusions.** The investigations of the stress-strain state are done for shells with the shape of cylindroid with two directrices ellipses and cylindroid Frazer. For the same thickness, loading and span, the reinforced concrete shells has minimum displacements. For thickness, 20 cm the steel shells have the same maximum displacements. For the thickness 30 cm the maximum displacement is more in steel shells. It is more optimal to use reinforced concrete shells than the one in steel. A large span (till 30 m) shells can be designed with reinforced concrete.

**Keywords:** cylindroid surfaces, linear investigation, geometric modeling, stress-strain state, displacements, middle surfaces

### Introduction

Cylindroid surface is a fourth-degree ruled surface, generated by a straight line D, which continuously changes direction, lying on two curves that are different in space, G1 and G2 and which is always parallel to a plane P (figure 1) [1].

Cylindroids – ruled surface, formed by the movement of a rectilinear generatrix along two curvilinear directrices, and in all positions the generating straight line is parallel to each *plane of parallelism*. Cylindroids are negative Gaussian curvature surfaces. That's why they cannot be turned into a plane without tears and folds. They belong to the family of *Catalan surfaces*. A cylindroid, excluding screw cylindroid (direct helicoid) cannot have a constant mean curvature. A cylindrical surface can be obtained as particular cases

of cylindroids, for example, a cylindroid with two directory circles in mutually perpendicular planes.

A cylinder, which one of the two directrices is straight, is a *conoid*. Thus, a conoid is a special case of a cylindroid. For example, if two parabolas are taken as the guide curves of a cylindroid.

For example, if the directrix curves are two parabolas, then the implicit definition is:

$$\begin{aligned} x = 0, z &= \frac{c(y^2 - b^2)}{b^2} \\ \text{и } x = l, z &= \frac{f(y^2 - b^2)}{b^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $c$  and  $f$  are the distances from vertices to parabolas, lying in planes  $x = 0$  and  $x = l$  respectively, to  $z = 0$  (rising height), and for the plane of parallelism the plane  $y = 0$ , then we get a parabolic conoid (see “Parabolic conoid”).

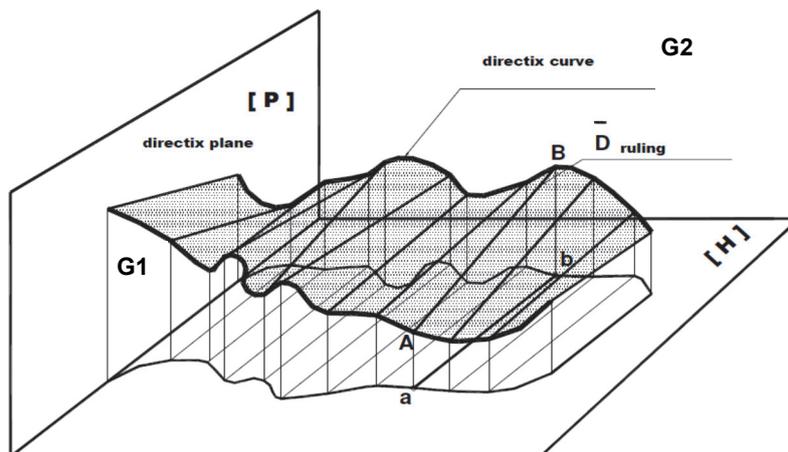


Figure 1. The creation of cylindroid surfaces

Helical cylindrical surface, generated by a straight line, which moves in space, parallel to the parallelism plane, all the time intersecting the helix and the surface of a straight is a circular cylinder. The axis of the helix of the cylinder coincides forming a straight line and the axis is crossed at right angles, therefore, the plane of rising height. If two directrices curves are given:

$$\begin{aligned} r1 &= r1(u) = x1(u)i + y1(u)j + z1(u)k \\ r2 &= r2(v) = x2(v)i + y2(v)j + z2(v)k. \end{aligned} \quad (2)$$

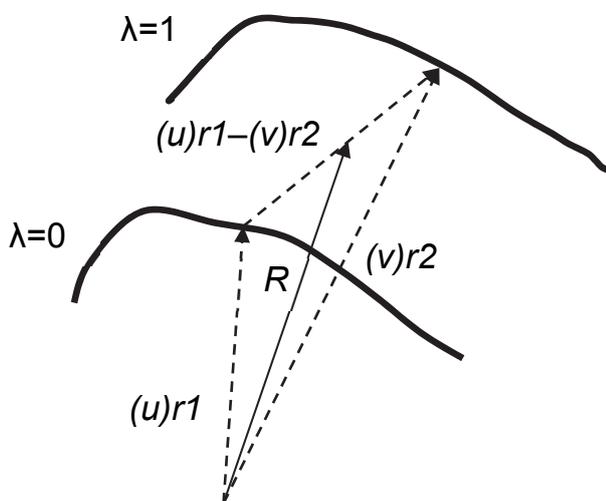


Figure 2. Kinematic of cylindroids

This vector equation of a cylindroid, generated on these two directrices curves (figure 2), can be written as

$$\begin{aligned} R &= R(\lambda, u) = \\ &= r1(u) - \lambda(r1(u) - r2(v = f(u))), \end{aligned} \quad (3)$$

where  $0 \leq \lambda \leq 1$ . After the plane of parallelism is chosen [6] (directrices plane) dependence  $v = f(u)$ . For example, if the coordinate plane is taken as the

plane of parallelism  $XOY$ , then the condition must be met  $z1(u) - z2(v) = 0$ , where the dependency is  $v = f(u)$ . If the plane  $YOZ$  ( $x = 0$ ) taken as a plane of parallelism, it is necessary to fulfill the condition  $x1(u) - x2(v) = 0$ , and then find  $v = f(u)$ .

Constructed according to triangulation method, i.e. flat figure, bounded by a closed broken line and divided into triangles, so that the segments of broken lines were sides of triangles, the ends of these segments would be vertices of no more than four triangles.

## Classification of cylindroids according to the shape

### 1. Cylindroid with two directrices ellipses (figure 3)

The parametric equations are

$$\begin{aligned} x &= x(u) = a - a * u, \\ y &= y(u, v) = [b - u(b - d)] * \cos(v), \\ z &= z(v) = c * \sin(v), \end{aligned} \quad (4)$$

where  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ .

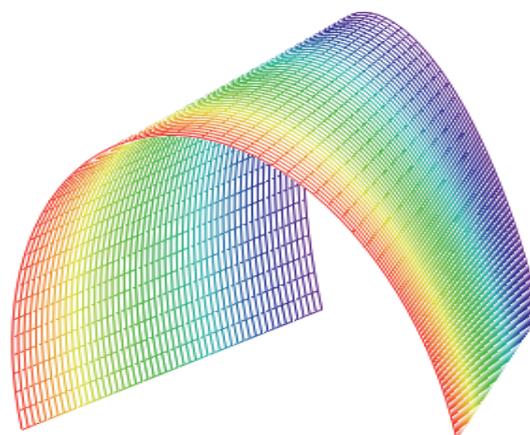


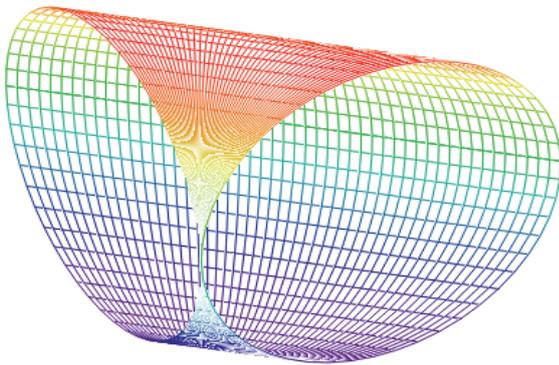
Figure 3. Model cylindroid with two directrices ellipses

**2. Cylindroid with two directrices circles in mutually perpendicular planes (figure 4)**

The two circles are with the same radius and directrices curves for a cylindroid. The parametric definition is:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = a(1 + \cos u)(1 - v), \\ y &= y(u, v) = a * v(1 + \cos u), \\ z &= z(v) = a * \sin(u), \end{aligned} \tag{5}$$

where  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ , and  $a$  is the radius of the circles.

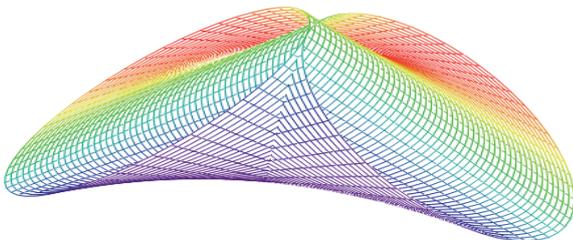


**Figure 4. Model cylindroid with two directrices circles in mutually perpendicular planes**

Thus, this case of cylindroid with circles in mutually perpendicular planes will be an elliptic cylindroid, that is, the surface has zero Gaussian curvature (figure 5). Their parametric forms of definition are:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = a(1 + \cos u)(1 - v), \\ y &= y(u, v) = a * v(1 - \cos u), \\ z &= z(v) = a * \sin(v), \end{aligned} \tag{6}$$

where  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ .



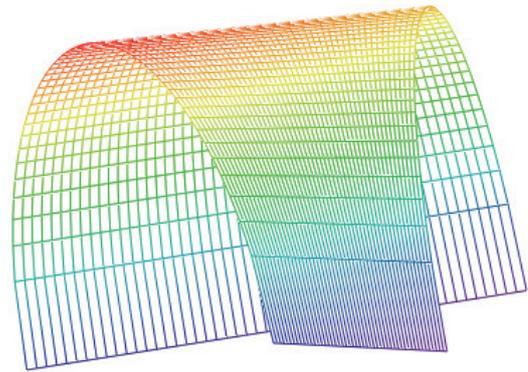
**Figure 5. An elliptic cylindroid**

**3. Cylindroid Fraser**

This cylindroid is shown in figure 6 and parametrically is defined as follows:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = \left(\frac{v}{2}\right) (1 + u), \\ y &= y(u, v) = \left(\frac{v}{2}\right) (1 - u), \\ z &= z(u, v) = \sqrt{r^2 - (v - p)^2} + \frac{q}{2} * (1 - u), \\ -1 &\leq u \leq 1, p - r \leq v \leq p + r, \end{aligned} \tag{7}$$

where  $r$  is the semicircle radius.



**Figure 6. A model of cylindroid Fraser**

If  $q = 0$ , then the parametric equations will be:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = \left(\frac{v}{2}\right) (1 + u), \\ y &= y(u, v) = \left(\frac{v}{2}\right) (1 - u), \\ z &= z(u, v) = \sqrt{r^2 - (v - p)^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

**4. Cylindroid with a parabola and sinusoid at parallel ends**

Consider a cylindroid whose parabola and sine wave are directrices (figure 7). Their parametric form of definition is:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = v \cdot l, y = y(u, v) = u, \\ z &= z(u, v) = (1 - v) * (b - a \cdot u^2) + \\ &+ \left[ d + c \cdot \cos\left(\frac{n \cdot u \cdot \pi}{2 \cdot \frac{b}{a}}\right) \right] \cdot v, \\ 0 &\leq u \leq 1, -\sqrt{\frac{b}{a}} \leq v \leq \sqrt{\frac{b}{a}}. \end{aligned} \tag{9}$$

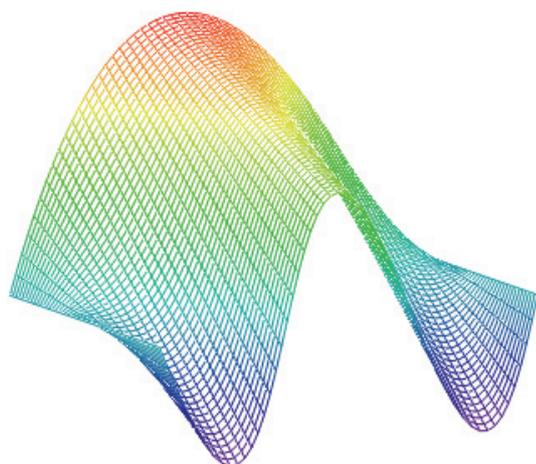


Figure 7. Model cylindroid with a parabola and sinusoid at parallel ends

### 5. Bolla's cylindroid

The parametric form of definition is:

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta) = r \cdot \cos(\theta), \\ y &= y(r, \theta) = r \cdot \sin(\theta), \\ z &= z(u, v) = k \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta), \end{aligned} \quad (10)$$

where  $k$  – constant depending on the parameters of the two screws ( $p_1$ – $p_2$ ) from the shortest distance between these screws and from the corners between the axes of the screws.

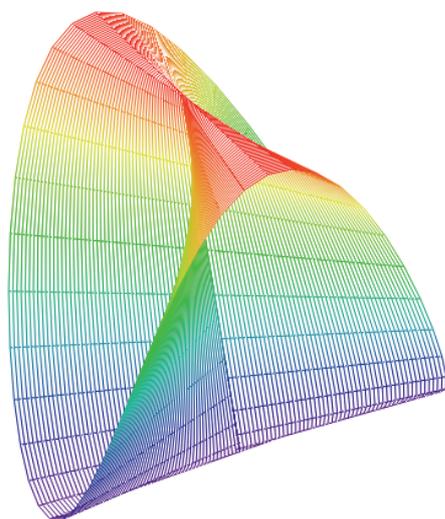


Figure 8. Model of Bolla cylindroid

### Overview of literature

Many works are devoted to the geometrical investigations of cylindroid shape of thin elastic shells. In paper [1], Z.Z. Wang and L.Y. Jiang, investigated thin cylindroid shells subject to internal linearly-in-

creased pressure. Close cylindroid shells are used for it. Membrane theory of shells is used to take an analytical solution to investigate the internal force distributions and deformation laws of such shells. The result shows that, under the condition of two-point simple supports, among three force components (meridional force  $T_1$ , circumferential force  $T_2$ , and shear force  $T_{12}$ ),  $T_1$  is the dominant one, which is negative (compressional) in the vicinity of the neutral axis, and becomes positive (tensional) after being away from the neutral axis. The shear force  $T_{12}$  is rather like a sine curve, which changes its sign at the neutral axis. Guo Ying Yin Zhixiang in article [2] made the nonlinear analysis for the prestressed lattice shell structure of two-layer cylindroid. A new form of cables for the prestressed lattice shell structure is put forward. It means all the down string poles are replaced by the high strength steel cables along the short span and different prestresses are applied to every cable. By calculating the model example of two layer cylindroid prestressed lattice shell structure, based on the nonlinear analysis by ANSYS, the character of the stress and displacement of the structure are got, which will give necessary parameters to actual engineering design. Korotkiy V.A., Usmanova E.A., Khmarova L.I. [3] investigated the geometric modeling of cylindroids. The geometric model of a surface is formed taking into consideration the set of functional, structural, technological, economic, and aesthetic requirements. These requirements are formulated in terms of geometry and are expressed through the surface parameters. The surface is modeled with the help of either the kinematic method or the two-dimensional interpolation method. In accordance with the kinematic method, the surface is formed as a continuous one-parameter set of curves, which forms the simulated surface. The kinematic method studied in the article is based on the curves of the second order with variable eccentricity. In order to control the shape of the constructed surface, directing ruled surfaces are used. The authors develop a computer program which determines the eccentricity of the forming curves depending on the boundary conditions. In paper [4] Liliana Tocariu shown that cylindroid surfaces are part of the ruled surfaces category which are largely used in industrial product design, in construction work, in architecture. They appear in practice under the form of sheets (thin surfaces) that limit the different zones of some solids. For instance: the roofs of halls with large base structures, parts of the bodies of different cars, pieces of furniture, forms of original packages, forms of food products, different objects, etc.

Alba Perez and J.M. McCarthy show that Bennett's linkage [5] is a spatial 4R closed chain that can move

with one degree of freedom. The set of relative displacement screws that form the one-dimensional workspace of this device defines a ruled surface known as a cylindroid. The cylindroid is generally obtained as a result of a real linear combination of two screws. Thus, the workspace of Bennett’s linkage is directly related to a one-dimensional linear subspace of screws. In this paper, we examine in detail Bennett’s linkage and its associated cylindroid, and introduce a reference pyramid which provides a convenient way to relate the two. These results are fundamental to efficient techniques for solving the synthesis equations for spatial RR chains.

Additional information on geometry, static and dynamic strength analyses, and application of cylindroid shells is given in the encyclopedia [6] and in the manuscript [7].

**Linear analysis of some cylindroid shape thin shells**

Let us consider two types of cylindroid shape – metallic and concrete thin shell. The shells are subject to the following loads:

- 1) self weight;
- 2) live loads (2 kN/m<sup>2</sup>);
- 3) dead loads (10 kN).

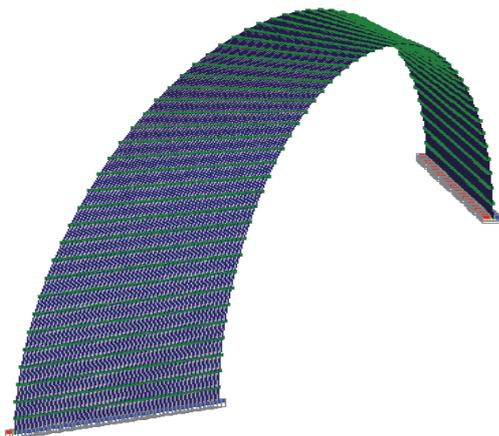
The shells are investigated each with two types of support:

- 1) fixed support;
- 2) hinge support.

The load combinations in the used software SCAD is: (1.2 · self-weight + 1.3 · live loads + 1.1 · dead loads).

*a* – FE model of cylindroid with two directrices ellipses.

The maximum span is 20 m.



**Figure 9. FE model of cylindroid with two directrices ellipses**

The linear analysis for reinforced concrete and metallic shells, computed using the software SCAD

gives the numerical and graphical results that are presented in the following tables.

*Table 1*

**The result of the analysis for reinforced concrete shell**

Concrete B30				
Thickness (cm)	Maximum displacement (mm)		Stability factor	
	Fixed support	Hinge support	Fixed support	Hinge support
15	33.58	75.07	3.7422	1.091
20	17.36	33.6	7.9682	2.2011
25	10.37	20.38	12.6648	3.3531
30	6.55	13.01	19.2451	4.94

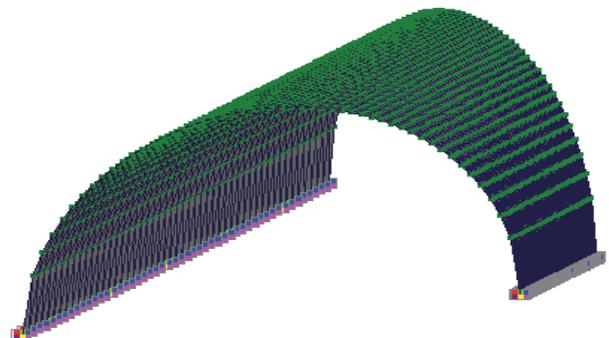
When using metal as a material, the results of the analysis gave large values for displacements, which indicates the efficiency of using concrete in this type of elements with a large span and in terms of economic feasibility also.

*Table 2*

**The result of the analysis for steel shell**

Steel qualitative	Thickness (cm)	Maximum displacement (mm)	Stability factor
Fixed support	20	50.7	20.96
	30	20.6	46.98

Let us consider now a FE model of cylindroid Fraser as shown in (figure 10). The model is plotted in the software SCAD 11.5.



**Figure 10. FE model of cylindroid Fraser**

This shell is subject to the following loads:

- 1) self weight;
- 2) live loads (2 kN/m<sup>2</sup>);
- 3) dead loads (10 kN).

The shell is investigated with a fixed support.

The load combinations in the used software SCAD is: (1.2 · self-weight + 1.3 · live loads + 1.1 · dead loads).

The span is 25 m.

Table 3

## The result of the analysis for the span of 25 m

Concrete B25	Thickness (cm)	Maximum displacement (cm)	Stability factor
Fixed support	20	25.6	6.46
	30	13.36	14.47

Table 4

## The result of the analysis for the span of 25 m

Steel qualitative	Thickness (cm)	Maximum displacement (cm)	Stability factor
Fixed support	20	25.91	4.75
	30	4.84	39.15

### Conclusions

The investigations of the stress-strain state are done for shells with the shape of cylindroid with two directrices ellipses and cylindroid Frazer.

1. For the same thickness, loading and span, the reinforced concrete shells has minimum displacements.
2. For thickness 20 cm the steel shells have the same maximum displacements. For the thickness 30 cm the maximum displacement is more in steel shells.
3. It is more optimal to use reinforced concrete shells than the one in steel.
4. A large span (till 30 m) shells can be designed with reinforced concrete.

© Gil-oulbé M., Qbaily J., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### References

1. Wang Z.Z., Jiang L.Y. (2011). Analysis of Cylindroid Shell Subject to Internal Linearly-Increased Pressure. *Advanced Materials Research*, 239–242, 2584–2589.

2. Deng Hua Dong, Shilin Bao Hongze. (1998). Analysis method of pretensioned reticulated structures. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, (5).

3. Korotkiy V.A., Usmanova E.A., Khmarova L.I. (2016). Dynamic connection of second-order curves. *2<sup>nd</sup> International Conference on Industrial Engineering, Application and Manufacturing (ICIEAM) (pp. 1–4). IEEE Conference Publications*. doi: 10.1109/ICIEAM.2016.7911687

4. Tocariu L. (2007). Stages in the study of cylindroid surfaces. *Journal of Industrial Design and Engineering Graphics*, (3), 37–40.

5. Perez A., McCarthy J.M. (2002). Dimensional Synthesis of Bennett Linkages. *ASME Journal of Mechanical Design*, 37(11), 1245–1260.

6. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Switzerland, Springer International Publishing, 752.

7. Krivoschapko S.N. (2017). The application of conoid and cylindroid in forming of buildings and structures of shell type. *Building and reconstruction*, 5(73), 34–44.

### About the authors

**Gil-oulbé Mathieu** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (Moscow, Russia). *Research interests*: theory of thin elastic shells, nonlinear stability of shells of complex geometry, computer modeling of buildings structures. *Contacts*: e-mail – giloulbem@hotmail.com

**Qbaily Jaafar** – Master's degree student, Department of Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (Moscow, Russia). *Research interests*: computer modeling and numerical methods of structural analyses of buildings. *Contacts*: e-mail – jaafarqbaily@gmail.com

### For citation

Gil-oulbé M., Qbaily J. (2018). Geometric modeling and linear static analysis of thin shells in the form of cylindroids. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 502–508. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-502-508

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Геометрическое моделирование и линейный статический расчет тонких оболочек в форме цилиндров

М. Жиль-улбе, Д. Кбейли

Российский университет дружбы народов  
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

\*Corresponding author

(поступила в редакцию: 04 августа 2018 г.; доработана: 21 сентября 2018 г.; принята к публикации: 11 октября 2018 г.)

**Цель.** Тонкие оболочки в виде цилиндров представляют собой линейчатые оболочки. Их изучению посвящено несколько работ. В данной статье выработано геометрическое моделирование тонких оболочек в виде цилиндров и построены срединные поверхности с помощью программного обеспечения MathCAD. Напряженно-деформированное состояние исследовано для стальных и железобетонных оболочек в форме цилиндров.

**Методы.** Линейное исследование выполнено для жестко защемленных и шарнирных опор, а также для различных толщин в программном комплексе SCAD. Приведены численные значения максимального и минимального перемещений их средних поверхностей, на основе которых сделаны выводы.

**Результаты.** Данные, полученные путем линейного расчета железобетонных и металлических оболочек, выполнены с помощью программного обеспечения SCAD, представлены в числовом и графическом виде.

**Заключение.** Исследования напряженно-деформированного состояния проведены для оболочек в форме цилиндрида с двумя прямыми эллипсами и цилиндрида Фрезера. При одинаковых толщине, нагрузке и пролете железобетонные оболочки имеют минимальные перемещения. Для толщины 20 см стальные оболочки имеют одинаковые максимальные перемещения. Для толщины 30 см максимальное перемещение больше в стальных оболочках. Оболочки большого пролета (до 30 м) могут быть спроектированы из железобетона.

**Ключевые слова:** поверхности цилиндридов, линейное исследование, геометрическое моделирование, напряженно-деформированное состояние, перемещение серединой поверхности

### Список литературы

1. Wang Z.Z., Jiang L.Y. Analysis of Cylindroid Shell Subject to Internal Linearly-Increased Pressure // *Advanced Materials Research*. 2011. Vols. 239–242. Pp. 2584–2589.
2. Deng Hua Dong, Shilin Bao Hongze. Analysis method of pretensioned reticulated structures // *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*. 1998. Issue 5.
3. Korotkiy V.A., Usmanova E.A., Khmarova L.I. Dynamic connection of second-order curves // *2<sup>nd</sup> International Conference on Industrial Engineering, Application and Manufacturing (ICIEAM)*. IEEE Conference Publications, 2016. Pp. 1–4. doi: 10.1109/ICIEAM.2016.7911687
4. Tocariu L. (2007). Stages in the study of cylindroid surfaces // *Journal of Industrial Design and Engineering Graphics*. 2017. No. 3. Pp. 37–40.
5. Perez A., McCarthy J.M. Dimensional Synthesis of Bennett Linkages // *ASME Journal of Mechanical Design*. 2002. Vol. 37. No.11. Pp. 1245–1260.
6. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 752 p.
7. Кривошапко С.Н. Применение коноида и цилиндрида при формообразовании зданий и сооружений оболочечного типа // *Строительство и реконструкция*. 2017. № 5 (73). С. 34–44.

### Об авторах

**Жиль-улбе Матье** – кандидат технических наук, доцент департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия). *Область научных интересов:* теория тонких упругих оболочек, нелинейная устойчивость оболочек сложной геометрии, компьютерное моделирование строительных конструкций. *Контактная информация:* e-mail – gil-oulbem@hotmail.com

**Кбейли Джаафар** – магистрант департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия). *Область научных интересов:* математическое и компьютерное моделирование и численные методы расчета строительных конструкций и сооружений. *Контактная информация:* e-mail – jaafarqbaily@gmail.com

### Для цитирования

Жиль-улбе М., Кбейли Д. Geometric modeling and linear static analysis of thin shells in the form of cylindroids (Геометрическое моделирование и линейный статический расчет тонких оболочек в форме цилиндридов) // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2018. Т. 14. № 6. С. 502–508. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-502-508

УДК 624.046  
DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-509-515

RESEARCH PAPER

## Complicated features and their solution in analysis of thin shell and plate structures

Govind Prasad Lamichhane

Mid-Western University  
Post Box 21700, Kuhine Pani, Birendranagar, Surkhet, Nepal

(received: August 02, 2018; revised: October 08, 2018; accepted: November 10, 2018)

**Abstract. Introduction.** It is instructive to assemble a list of applications from a historical point of view, and to take as a connecting theme the way in which the introduction of the thin shell as a structural form made an important contribution to the development of several branches of engineering. The following is a brief list, which is by no means complete and complicated features and their solutions for analysis of such structures.

**Solution technique, methods.** The linear theory of thin elastic shells with arbitrary shape of the middle surface is derived on the basis of Kirchhoff's assumptions that were used in the development of the plate bending theory introduced in Part I. These assumptions are formulated for the linear theory of thin shells of an arbitrary shape. The problem of the study of this article is to identify simple way of solution to analyze complicated features of thin shell structure by introducing modern and new programmable theories and aspects. Especially the intersecting line of connecting thin shell structures.

**Results.** It is possible to successfully model explicitly a panel profile that can be used for optimization studies for use as possible future test studies. It has also been shown, that if test data exists, a numerical solution can be very accurately modeled to match the test data by modifying the material properties of the model.

**Discussion.** The article should encourage structural engineers to solve complicated features in thin shell structures and design for construction of such structure which are rarely constructing in country like Nepal due to lack of skilled manpower.

**Keywords:** spatial structure, thin shells, surfaces, Monge surfaces, methods of analyses

### Introduction

From the perspective of structural engineering, thin shells due to their spatial and complicated curvature, possess a structurally efficient way of carrying loads acting perpendicular to their surfaces. However, the nature and geometry of thin shells makes them complicated to understand or predict their structural behavior and analyze them [2–4].

It has been widely recognized by structural engineers and designers that shell structures are often the best option for the weight efficiency or the genuine use of materials. This is the reason why various types of shells keep being used despite their high-skilled workmanship demand. Real life shells such as large-span coverings of buildings, cooling towers, structural elements of nuclear power stations or offshore platforms are usually complex in geometry, complicated to analyze them and very expensive structures. The highest

level of reliability that is required for these structures is heavily depended on the accuracy of measurements and the reliability and confidence of their structural analysis for structural engineers. The most popular and often the only tool available for this analysis is the finite element method [5–9] or global (super) element method [10–17]. But unfortunately, the results obtained using some FEM packages or software are not so reliable. The second way to test software for numerical analysis is to compare its results against a known analytical or programmed solution written with variation differential methods. But analytical solutions exist or cannot be obtained for complex geometrical structures. At the beginning of the FEM introduced, the finite difference method served as an alternative method for numerical analysis of thin-shell structures. But it did not gain much popularity because there are several disadvantages inherent in the conventional finite difference method: problems with convergence

of numerical results, pick stresses, intersecting line of connecting shells and difficulty in approximating differences of rigidities of such shell structures, difficulty in incorporation of the boundary conditions at types of boundaries, and limitations of generating fine meshes complicated features of such shell structures should be faced by structural engineers and who must tackle to get results in accuracy for proper design. In this paper a non-traditional and very new procedure for the elastic analysis of thin-walled structures is presented. This procedure is based on a new numerical method – solution of various existing unknown forces and stresses, which is similar to the finite difference method, but in simple way to understand their features by students. Moreover, such types of structures can be used to resist earthquake forces which is more important for our country Nepal.

The linear theory of thin elastic shells with arbitrary shape of the middle surface is derived on the basis of Kirchhoff's assumptions that were used in the development of the plate bending theory introduced in Part I. These assumptions are formulated for the linear theory of thin shells of an arbitrary shape, as follows:

1. Normal to the undeformed middle surface remain straight and normal to the deformed middle surface and undergo no extension. This assumption implies that all the strain components (normal and shear) in the direction of the normal to the middle surface vanish.

2. The transverse normal stress is small compared with other normal stress components and may be neglected. Novozhilov showed that the error introduced by the Kirchhoff hypotheses in the theory of thin shells is of the order  $h/R$  in comparison with unity, in which  $h$  and  $R$  are the shell thickness and radius of curvature of the middle surface, respectively. It is assumed that the thickness of the shell is small compared with other dimensions, for example, the smallest radius of the middle surface of the shell (see the inequality). We also assume that the displacements of an arbitrary point of a shell are small in comparison to its thickness. As a consequence of this assumption, the products of the displacements and their partial derivatives will be neglected as second-order quantities of smallness. Furthermore, we can refer all calculations to the original configuration of the shell and ensure the differential equations will be linear. From here on we assume that the material of the shells is homogeneous, isotropic and that it obeys Hooke's Law.

Envelopes of thin shell designs is used in different areas of mechanical engineering, shipbuilding,

construction, the aviation and space industry. In this report work linear theory of envelopes based on hypotheses Kirchhoff – Love is used. Thus, restriction by frameworks of the technical theory can be proved the general complexity of a problem and enough greater class of designs for which hypotheses of the classical theory of envelopes are corrected

Apparently, from a brief review at analysis or calculation of thin shells of complex geometry, the variation difference method and the finite element method are the used numerical methods. It is connected with complexity of the initial equations of the theory of shells of complex geometry. By consideration of new types of shells, it is necessary to study, first of all, the geometry of the middle surface to receive necessary geometrical characteristics: coefficients of square-law forms, the main radiuses of curvature necessary for preparation of the basic equations of shells. It speaks that in the special literature, the devoted geometry of the certain types of surfaces, in the majority of cases analytical expressions of these characteristics are not considered. In this report, shells in the form of carved surfaces of Monge are considered [2–4; 15; 16; 18]. It is studied surfaces of Monge (figure 1) [15] and their geometry is stated, formulas of factors of square-law forms. The algorithm variation-differential method [4; 9; 19–21] is developed and realized on the structural analysis program too.

### **Description and solution at intersecting line of shells; creation of complexity**

The problem of the study of this report is to identify simple way of solution to analyze complicated features of thin shell structure by introducing modern and new programmable theories and aspects. Especially the intersecting line of connecting thin shell structures and having different rigidities has to be identified and enormous nodes selecting along those intersecting lines to be analyzed with various simple methods like force and displacement or matrix methods which is known by students and using those they can analyze even more complex structures in geometry and types of loadings.

Nepalese skilled manpower who wants construct structure in healthy, complex in geometry and economic sense will be involved in field survey, lab work. Appropriately qualified and well motivated students for field exposure are identified, will be given orientation and employed for research work in this research topic.

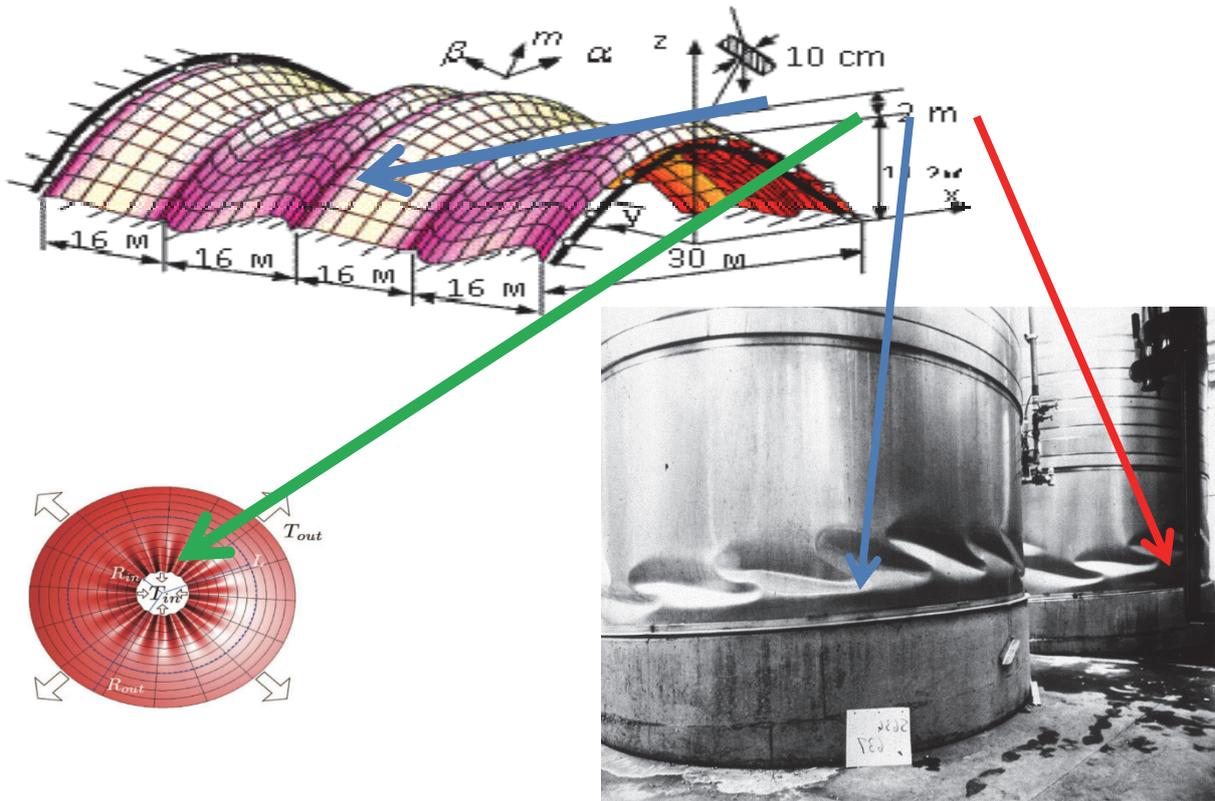


Figure 1. Thin shell with complexity in intersecting line

### Results and Discussion

The conclusions based on this paper are as follows. It is possible to successfully model explicitly a panel profile that can be used for optimization studies for use as possible future test studies. It has also been shown, that if test data exists, a numerical solution can be very accurately modeled to match the test data by modifying the material properties of the model. This modification will take into account any stiffening effects, as well as the influence of geometric parameters that cannot be readily accounted for, such as panel corrugation. In addition, upon verification of a modified material stiffness curve which accurately matches recorded test data, the stiffness curves can be used to model full scale buildings by applying the characteristics of the stiffness curves to various portions of the full scale model. The claims made by other researchers stating that a linear elastic solution cannot be used to solve problems involving thin shell arch panels has been confirmed by the research in this paper. Rather, a nonlinear solution (figure 3) is the most precise method for obtaining accurate solu-

tions to the panel in question. For future tests, it is suggested to evaluate multiple material thickness panels to establish any existing relationship between material thickness and panel radius concerning with finite element method. It is surmised and theorized that the trend of ultimate failure load decreasing as radius is decreased will hold true for various material thickness. The theory stating that the loads will be lower if the material thickness is decreased, and the loads going higher if the material thickness is increased.

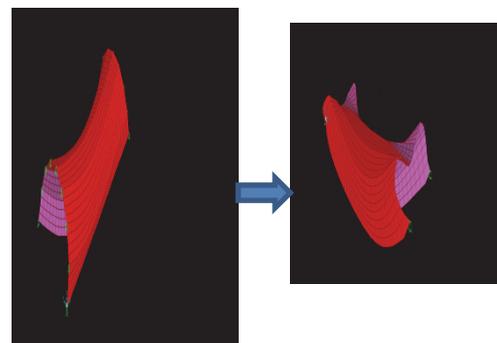


Figure 2. Complexity after deformation of shell structure

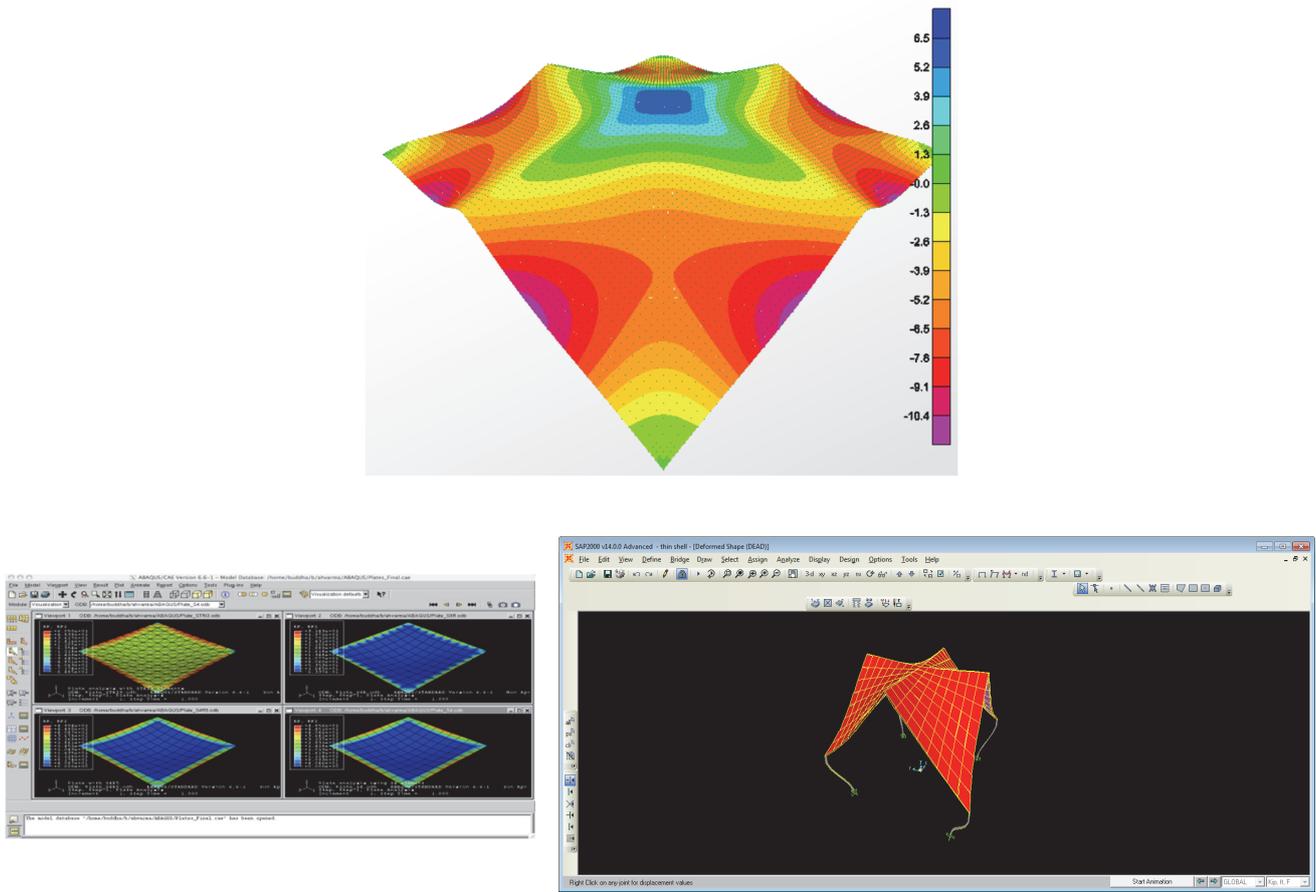


Figure 3. Deflection contour created in SAP2000



Figure 4. Shell model created near School of Engineering, Pokhara University

## Other Results

1. Examples of thin-walled designs from crossed sectors of shells are lead.
2. Conditions of the teamwork, crossed sectors of shells are received.
3. The algorithm of calculation of crossed sectors of shells is developed by a method of global elements.
4. The module of a program complex of calculation thin-walled spatial designs variation-differential method by a method, realizing calculation of crossed sectors of shells is developed.
5. Calculations of crossed sectors of shells with application variation-differential method and a method of global elements on various kinds of loadings are lead.
6. Are constructed graphics internal efforts and pressure, the analysis of the is intense-deformed condition of crossed sectors of shells on the basis of the received numerical results is lead and created model (figure 4).

## Conclusion

The research paper is devoted to the specific research for analyses of crossing sectors of shells or plates, design and construction and also development and realization on the calculation of a method of global elements of crossed sectors of shells with complex geometry.

The various examples of crossing sectors of shells are briefly shown in dissertations and are considered various constructive forms, for example crossing plate designs, plate-shell crossing designs and shell to shell crossing designs.

For calculation of crossing sectors of shells of complex geometry the program of the variation difference method and global element method is used. The module of the program complex realizing calculation of crossed sectors of shells will be developed. The given algorithm is universal enough and allows calculating various designs on uniform algorithm. Under the realized program test calculations of traditional designs which were compared to known decisions are lead. Calculations have shown good concurrence of results. Calculation of a thin-walled design of shells is executed. Calculations are lead on action of a self-weight and wind load. The received numerical results have no analogues will be in the literature. Finally it will be worth evaluation for Pokhara and Mid-Western University leading support to development of country in modernization in structural engineering.

## Recommendations

The report should encourage structural engineers to solve complicated features in thin shell structures and design for construction of such structure which are rarely constructing in country like Nepal due to lack of skilled manpower.

© Govind Prasad Lamichhane, 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

## References

1. Chernykh K.F. (1964). *Linear Theory of Shells. Part 2*. Leningrad State University Press. (In Russ.)
2. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Switzerland, Springer International Publishing, 752.
3. Ivanov V.N., Romanova V.A. (2016). *Constructional forms of the space constructions. Visualization of the surfaces at the systems MathCad, and AUTOCad*. Moscow, ASV Publ., 412.
4. Ivanov V.N., Krivoshapko S.N. (2010). *Analytical methods of analyses of the shells of noncanonic forms*. Moscow, RUDN Publ., 542.
5. Graves Smith T.R., Gierlinski I.T., Walker B. (1995). A combined finite strip. Finite element method for analyzing thin walled structures. *Thin Walled Struct.*, (3), 163–180.
6. Cowper G.R., Lindberg G.M., Olson M.D. (1970). A shallow shell finite element of triangular shape. *Int. J. Solids Struct.*, (6), 1133–1156.
7. Clough R.W., Johnson R.L. (1968). A finite element approximation for the analyses of thin shells. *Int. J. Solids Struct.*, (4), 43–60.
8. Strickland G.E., Loden W.A. (1968). A doubly-curved triangular shell element. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Ohio, Wright-Patterson AFB.
9. Ivanov V.N. (2008). *The base of the finite element method and the variation-difference method*. Moscow: RUDN Publ., 168.
10. Furnike T. (1972). Computerized multiple level substructuring analysis. *J. Comput. Struct.*, (2), 1063–1073.
11. Noor A.K., Kamel H.A., Fulton R.E. (1978). Substructuring techniques status and projections. *J. Comput. Struct.*, 8(5), 621–632.
12. Totoev Y.Z. (1988). *Stress-strain state of the combined plate & shell type structures*. Ph.D. Thesis. Kiev State Technical University of Construction and Architecture. (In Russ.)
13. Totoev Y.Z., Gotsulyak E.A. (1995). The use of the curvilinear mesh method in a super-element procedure for analysis of complex thin-walled structures. *Proceedings of the 14 Australian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, Hobart, Tasmania*, (1), 124–129.

14. Govind L. (2004). At analyses of the section of the shell of complex geometry. *Materials of the All-Russian exhibition of the technical-science creation of the youth (NTTM-2004), Moscow, VVC, 7–10 April 2004*, 14–15.

15. Ivanov V.N., Govind L. (2005). Connection of coordinates on surfaces and global coordinates system for Monge's surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 43–48. (In Russ.)

16. Govind L. (2007). *Analyses of intense-deformed condition of crossing sections of shells by methods of global elements*. Diss. of Ph. Doc. of Technical Sciences. Moscow, RUDN Publ., 143.

17. Ivanov V.N. (2008). The problems of analyses of combined thin space constructions. *Engineering Systems – 2008, Russian Science-Practical Conference*. Moscow, 7–8 April. Moscow, RUDN Publ., 195–201.

18. Ivanov V.N., Rizvan Muhammad. (2002). Geometry of Monge surfaces and construction of the shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. Interuniversity Collection of Science Works*, (11), 27–36. Moscow, ASV Publ.

19. Ivanov V.N. (1982). Variation-difference method of analyses of plates and shells. *Analyses and design of building constructions*. Moscow, UDN Publ., 131–141.

20. Ivanov V.N., Nasr Yunes Abbushy. (2000). Analyses of the shells of complex geometry by variation-

difference method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. Interuniversity Collection of Science Works*, (9), 25–34. Moscow, ASV Publ.

21. Ivanov V.N., Kushnarenko I.V. (2013). The Variational-Difference Method for the Analysis of the Shells with Complex Geometry. International Association for Shell and Spatial Structures. *Proceedings of the IASS 2013 Symposium "Beyond the Limits of Man", Wraclaw, Poland, 23–27 September 2013*. Full Papers. Paper ID 1410. Wroclaw, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, 6.

#### **About the author**

**Govind Prasad Lamichhane** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Pokhara University, Dean in Mid-Western University (Birendranagar, Nepal). *Research interests*: thin shells structures. *Contacts*: e-mail – govindkhec@gmail.com

#### **For citation**

Govind Prasad Lamichhane. (2018). Complicated features and their solution in analysis of thin shell and plate structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 509–515. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-509-515

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## **Конструктивные особенности и их решение при расчете тонких оболочек и пластин**

**Говинд Прасад Ламичхане**

Mid-Western University  
Post Box 21700, Kuhine Pani, Birendranagar, Surkhet, Nepal

(поступила в редакцию: 02 августа 2018 г.; доработана: 08 октября 2018 г.; принята к публикации: 10 ноября 2018 г.)

Почтительно с исторической точки зрения рассмотреть, каким образом внедрение тонкой оболочки как конструктивной формы внесло важный вклад в развитие нескольких отраслей машиностроения. В статье дан краткий обзор, не претендующий на всеобъемность, решений для расчета таких конструкций.

Тонкая оболочка – это трехмерная пространственная конструкция, состоящая из одной или нескольких изогнутых плит или сложенных пластин, толщина которых мала по сравнению с другими их размерами. Тонкие оболочки характеризуются трехмерным несущим поведением, которое определяется геометрией их форм. Тонкие пластины изначально представляют собой плоские конструкции, ограниченные двумя параллельными плоскостями, называемыми гранями, и цилиндрической поверхностью, называемой ребром (или границей). Образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоским граням. Геометрически пластины ограничены либо прямыми, либо изогнутыми границами. Статические или динамические нагрузки, переносимые пластинами, преимущественно перпендикулярны их поверхностям. Несущее действие пластины в некоторой степени аналогично действию балок или кабелей; таким образом, в зависимости от изгибной жесткости конструкций пластины могут быть аппроксимированы сеткой из бесконечного числа балок или сетью из бесконечного количества кабелей. В результате двумерного конструктивного действия пластин конструкции получаются более легкими, что дает многочисленные экономические преимущества. Пластина, будучи изначально плоской, развивает поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты, чтобы противостоять поперечным нагрузкам. При расчетах инженер-строитель должен учитывать,

что тонкие оболочки, связанные друг с другом, могут иметь различную жесткость. Численные решения подобных сложных задач осуществляются с помощью систем автоматизированного проектирования, например SAP2000 (САП2000), Staad Pro (Стаад Про) и т.д.

**Ключевые слова:** пространственная конструкция, тонкие оболочки, поверхности, поверхности Монжа, методы расчета

### Список литературы

1. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек: в 2 ч. Ч. 2. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. 395 с.
2. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 752 p.
3. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCad и AUTOCad: монография. М.: АСВ, 2016. 412 с.
4. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: монография. М.: РУДН, 2010. 542 с.
5. Graves Smith T.R., Gierlinski I.T., Walker B. A combined finite strip. Finite element method for analysing thin walled structures // Thin Walled Struct. 1995. No. 3. Pp. 163–180.
6. Cowper G.R., Lindberg G.M., Olson M.D. A shallow shell finite element of triangular shape // Int. J. Solids Struct. 1970. No. 6. Pp. 1133–1156.
7. Clough R.W., Johnson R.L. A finite element approximation for the analyses of thin shells // Int. J. Solids Struct. 1968. No. 4. Pp. 43–60.
8. Strickland G.E., Loden W.A. A doubly-curved triangular shell element // Proceedings of the 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
9. Иванов В.Н. Основы метода конечных элементов и вариационно-разностного метода: учебное пособие. М.: Изд-во РУДН, 2008. 168 с.
10. Furnike T. Computerized multiple level substructuring analysis // J. Comput. Struct. 1972. No. 2. Pp. 1063–1073.
11. Noor A.K., Kamel H.A., Fulton R.E. Substructuring techniques status and projections // J. Comput. Struct. 1978. Vol. 8. No. 5. Pp. 621–632.
12. Тотоев Ю.З. Напряженно-деформированное состояние комбинированных пластинчато-оболочечных конструкций: дис. ... канд. техн. наук. Киев, 1988. 155 с.
13. Totoev Y.Z., Gotsulyak E.A. The use of the curvilinear mesh method in a super-element procedure for analysis of complex thin-walled structures // Proceedings of the 14 Australian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, Hobart, Tasmania. 1995. Vol. 1. Pp. 124–129.
14. Говинд Л. К расчету сопряжений отсеков оболочек сложной геометрии // Сборник материалов Всероссийской выставки научно-технического творчества молодежи (НТТМ-2004), Москва, ВВЦ, 7–10 апреля 2004 г. С. 14–15.
15. Иванов В.Н., Говинд Л. Связь поверхностной и глобальной систем координат для резных поверхностей Монжа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2005. № 1. С. 43–48.
16. Говинд Л. Исследование напряженно-деформированного состояния пересекающихся отсеков тонких оболочек методом глобальных элементов: дис. ... канд. техн. наук. М.: Изд-во РУДН, 2007. 143 с.
17. Иванов В.Н. Проблемы расчета комбинированных тонкостенных пространственных конструкций // Сборник трудов Всероссийской научно-практической конференции «Инженерные системы – 2008», Москва, 7–10 апреля 2008 г. М.: Изд-во РУДН, 2008. С. 195–201.
18. Иванов В.Н., Ризван М. Геометрия резных поверхностей Монжа и конструирование оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 11. М.: АСВ, 2002. С. 27–36.
19. Иванов В.Н. Вариационно-разностный метод расчета пластин и оболочек // Расчет и проектирование строительных конструкций. М.: УДН, 1982. С. 131–141.
20. Иванов В.Н., Наср Ю.А. Исследование сходимости при расчете пластин вариационно-разностным методом. Проблемы теории и практики инженерных исследований. М.: АСВ, 2000. С. 53–56.
21. Ivanov V.N., Kushnarenko I.V. The Variational-Difference Method for the Analysis of the Shells with Complex Geometry // International Association for Shell and Spatial Structures Proceedings of the IASS 2013 Symposium “Beyond the Limits of Man”, Wroclaw, Poland, 23–27 September 2013. Full Papers. Paper ID 1410. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, Wroclaw, 2013. 6 p.

### Об авторе

**Говинд Прассад Ламичхане** – кандидат технических наук, декан Mid-Western University (Бирендранагар, Непал). *Область научных интересов:* тонкие оболочки, большепролетные покрытия. *Контактная информация:* e-mail – govindkhec@gmail.com

### Для цитирования

Говинд Прассад Ламичхане. Конструктивные особенности и их решение при расчете тонких оболочек и пластин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 509–515. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-509-515

## Проблемы теории упругости

УДК 534.12

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-516-522

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Плоские геометрически-нелинейные волны деформаций сдвига

**С.В. Бакушев**Пензенский государственный университет архитектуры и строительства  
Российская Федерация, 440028, Пенза, ул. Германа Титова, 28*(поступила в редакцию: 19 марта 2018 г.; доработана: 19 сентября 2018 г.; принята к публикации: 21 сентября 2018 г.)*

**Цели.** Рассматривается задача построения дифференциальных уравнений, характеристик и соотношений на них, а также определения скоростей распространения плоских волн деформаций сдвига в сплошной среде, механическое поведение которой описывается геометрически-нелинейными аналогами математических моделей сплошных сред, напряженно-деформированное состояние которых определяется произвольными, вообще говоря, перекрестными зависимостями между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщенных напряжений и нелинейных деформаций.

**Методы.** В качестве примера строятся графики приведенных скоростей волн деформаций сдвига в зависимости от интенсивности деформаций сдвига и значения механических констант материала для трех математических моделей сплошной среды: модель 1 соответствует геометрически-нелинейному аналогу линейной теории упругости; модель 2 соответствует геометрически-нелинейному аналогу теории малых упруго-пластических деформаций; модель 3 соответствует геометрически-нелинейному аналогу деформационной теории пластичности сыпучей среды.

**Выводы.** Отмечено, что в полупространстве, механическое поведение которого описывается уравнениями деформационной теории пластичности сыпучей среды, могут возникать ударные волны при непрерывных краевых условиях.

**Ключевые слова:** плоская задача, плоские волны деформаций сдвига, скорости распространения волн деформаций, геометрическая и физическая нелинейность

#### Введение

Задача определения напряженного и деформированного состояний полупространства при действии на его поверхности динамических нормальных  $p(t)$  и касательных  $q(t)$  нагрузок сводится к исследованию закономерностей распространения волн деформаций в сплошной среде и определению их параметров.

Для сплошной среды, механическое поведение которой описывается уравнениями теории пластического течения, либо уравнениями динамики грунтов С.С. Григоряна, либо уравнениями билинейной теории пластичности, обзор решений данной задачи изложен в монографии [1].

Исследованию закономерностей распространения двумерных продольно-поперечных волн деформаций в сплошной среде, механическое поведение которой описывается перекрестными зависимостями между первыми инвариантами тензо-

ров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций с учетом и без учета геометрической нелинейности, посвящены работы [2] и [3]. Вопросы распространения плоских одномерных и двумерных волн деформаций слабого разрыва для таких сред рассматривались в работе [4].

Во многих работах последнего времени пристальное внимание уделяется вопросам распространения волн деформаций сдвига. Так, в работе [5] рассматривалось распространение сдвиговой волны в упруго-пластической среде, поведение которой описывается перекрестными зависимостями между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций. Ставилась задача определения возможности генерации второй гармоники сдвиговой волны, не описываемой в рамках классической теории упругости.

Исходя из общих уравнений плоской задачи теории упругости в работе [6] построены уравнения уточненной теории статического и динамиче-

ского изгибов длинной упругой полосы, учитывая сдвигающие деформации. Исследование свойств образующихся волн сдвига при ударе позволило разработать новую модель разрушения высокого здания.

Исследование структуры и условия реализуемости поперечных диссипативных ударных волн конечной амплитуды с учетом вязких и температурных эффектов выполнено в работе [7] на основе теории течения пластической среды при чистом сдвиге. Показано, что локализация деформаций сдвига в узких зонах с последующим образованием контактных разрывов возможна в случае температурного разупрочнения материала. Отмечено, что в рамках теории малых деформаций теория разрывных решений типа упругопластических ударных волн изучена достаточно подробно.

Исследование одномерных решений, описывающих плоские продольные, поперечные сдвигающие с вращением частиц, а также крутильные волны, выполнено в работе [8]. В качестве механической модели сплошной среды рассматривалась математическая модель континуума Коссера.

В работе [9] на основе анализа сейсмических сдвиговых волн деформаций и температуры выявляется переходная зона от упругих к пластичным деформациям в земной коре. Решение строится методом сеток с пошаговым применением метода Рунге – Кутты.

Исследованию механического поведения алюминиевых сот под воздействием динамической мультиаксиальной нагрузки посвящена экспериментальная работа [10]. Выявлено существенное влияние на напряженное-деформированное состояние алюминиевых сот угла наклона действующей нагрузки.

К сожалению, вопросы распространения плоских волн деформаций сдвига в сплошных и дискретных средах с учетом геометрической нелинейности еще не получили должного внимания.

В данной работе рассматриваются вопросы распространения плоских волн деформаций сдвига в сплошных средах, механическое поведение которых описывается геометрически-нелинейными аналогами произвольных перекрестных зависимостей между первыми инвариантами тензоров  $\sigma^*$  и  $\varepsilon^*$  и вторыми инвариантами девиаторов  $T^*$  и  $\Gamma^*$  обобщенных напряжений и деформаций:

$$\sigma^* = 3K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)\varepsilon^*; \quad T^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)\Gamma^*, \quad (1)$$

где  $K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  – геометрически-нелинейный аналог модуля объемного расширения (сжатия);  $G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  – геометрически-нелинейный аналог модуля сдвига [4].

### Вывод динамических уравнений

Пусть на поверхности полупространства в направлении оси  $Y$  действует равномерно-распределенная сдвигающая нагрузка  $q(t)$ , бесконечно протяженная в направлении осей  $Y$  и  $Z$  (рис. 1).

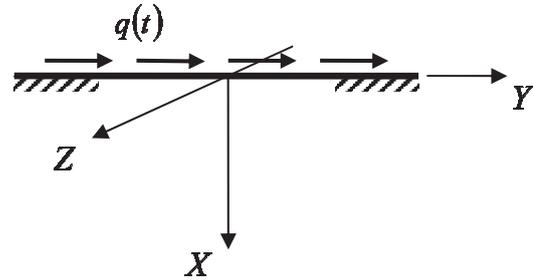


Рис. 1. Расчетная схема  
[Figure 1. The design scheme]

Полупространство будет находиться в условиях плоской деформации. Компоненты перемещений в полупространстве будут определяться соотношениями

$$u = 0, \quad v = v(x, t), \quad w = 0. \quad (2)$$

При этом компоненты тензора деформации при учете геометрической нелинейности, действующие в плоскости  $XOY$ , будут равны [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_x^*(x, t), \\ \varepsilon_y^* &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad \varepsilon_z^* = 0, \\ \gamma_{xy}^* &= \gamma_{yx}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^*(x, t), \\ \gamma_{yz}^* &= \gamma_{zy}^* = 0, \quad \gamma_{zx}^* = \gamma_{xz}^* = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Следовательно,

$$\varepsilon^* = \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* = \varepsilon_x^*, \quad \Gamma^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4(\varepsilon_x^*)^2 + 3(\gamma_{xy}^*)^2}. \quad (4)$$

Физические уравнения для геометрически-нелинейной модели сплошной среды при плоской деформации, как известно, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \varepsilon_x^*; \quad \tau_{xy}^* = G^* \gamma_{xy}^*; \\ \sigma_y^* &= \left( K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \varepsilon_x^*; \quad \tau_{yz}^* = 0; \\ \sigma_z^* &= \left( K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \varepsilon_x^*; \quad \tau_{zx}^* = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим соотношения (5) в динамические уравнения равновесия без учета объемных сил:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_x^* + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy}^* \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tau_{yx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_y^* \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_x^* + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tau_{xy}^* \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{yx}^* + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_y^* \right] = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Принимая во внимание зависимости (1) и (4), получим два уравнения:

$$\begin{aligned} & B \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = 0; \\ & \left\{ \frac{1}{2} \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \gamma_{xy}^2 + \gamma_{xy} (A \gamma_{xy} + B) + \right. \\ & \left. + \left( C \gamma_{xy} + G^* + \frac{(\gamma_{xy}^*)^2}{\Gamma^*} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right) \right\} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (8)$$

Значения коэффициентов  $A, B, C$  равны

$$\begin{aligned} & A = \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) + \left( \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} \right) \varepsilon^* + \\ & + \frac{4(\varepsilon^*)^2}{3\Gamma^*} \left( \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right); \\ & B = \frac{\varepsilon^* \gamma_{xy}^*}{\Gamma^*} \left( \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} + \frac{4}{3} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right); \\ & C = \gamma_{xy}^* \left( \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{4\varepsilon^*}{3\Gamma^*} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Присоединяя к уравнению (6<sub>2</sub>) уравнение совместности

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (10)$$

получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных

относительно величин  $\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}, \frac{\partial v_y}{\partial x}$ .

Система динамических уравнений (7<sub>2</sub>), (10) описывает процесс распространения волн деформаций сдвига при учете геометрической нелинейности.

Что касается уравнения (7<sub>1</sub>), то, поскольку  $B \neq 0$ ,

$$\frac{\partial \gamma_{xy}(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (11) и учитывая соотношение (8<sub>1</sub>), получаем линейный характер распределения перемещений  $v(x,t)$  вдоль оси  $X$  для каждого момента времени:

$$v(x,t) = f(t)x + \varphi(t). \quad (12)$$

Постоянные (по отношению к переменной  $x$ ) интегрирования  $f(t)$  и  $\varphi(t)$  определяются из граничных условий:

- при  $x = 0, \quad v(0,t) = v_0(t)$ ;
- при  $x = x_0, \quad v(x_0,t) = v_m(t)$ .

Здесь  $x_0$  – глубина сжимаемой толщи полупространства;  $v_0(t)$  – смещение поверхности полупространства в направлении оси  $Y$ ;  $v_m(t)$  – перемещение в направлении оси  $Y$  на глубине  $x = x_0$ . Обычно на глубине сжимаемой толщи полупространства перемещения принимаются равными нулю.

### Определение характеристик и соотношений на них

В матричной форме система уравнений (7<sub>2</sub>), (10) имеет вид

$$\mathbf{A} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  равны:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

причем

$$\begin{aligned} & a_{11} = \left\{ \frac{1}{2} \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \gamma_{xy}^2 + \gamma_{xy} (A \gamma_{xy} + B) + \right. \\ & \left. + \left( C \gamma_{xy} + G^* + \frac{(\gamma_{xy}^*)^2}{\Gamma^*} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \right) \right\}; \\ & a_{12} = 0; \quad a_{21} = 0; \quad a_{22} = -1; \\ & b_{11} = 0; \quad b_{12} = -\rho; \quad b_{21} = 1; \quad b_{22} = 0. \end{aligned}$$

Вектор-столбец  $\bar{\mathbf{u}}$  имеет структуру  $\bar{\mathbf{u}} = [\gamma_{xy} \ v_y]^T$ .

Характеристические кривые уравнения (13) определяются путем решения уравнения  $|\mathbf{A} - \alpha\mathbf{B}| = 0$ ,

или в развернутой форме  $\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha\rho \\ -\alpha & -1 \end{vmatrix} = 0$ , веществен-

ные решения которого задают характеристические кривые, описываемые дифференциальными уравнениями:

$$\alpha_{1,2} = \frac{dx}{dt}. \quad (14)$$

$$\text{Здесь } \alpha_1 = +\sqrt{\frac{a_{11}}{\rho}}, \quad \alpha_2 = -\sqrt{\frac{a_{11}}{\rho}}.$$

Дифференциальные уравнения (14) определяют два семейства характеристических кривых. Система уравнений (7<sub>2</sub>), (10) будет гиперболического типа, если  $\alpha_{1,2}$  будут вещественными.

Найдем соотношения вдоль характеристических направлений. Введем вектор  $\bar{\mathbf{l}} = [l_1 \ l_2]$ . Компоненты вектора  $\bar{\mathbf{l}}$  являются решением уравнения  $\bar{\mathbf{l}} \cdot (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{B}) = 0$ , откуда находим

$$\left. \begin{aligned} a_{11}l_1 - \alpha l_2 &= 0 \\ \alpha\rho l_1 - l_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Соотношения вдоль характеристик найдем на основании уравнения  $\bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{B} \cdot \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt}\right) = 0$ , то есть

$$l_2 \frac{d\gamma_{xy}}{dt} - \rho l_1 \frac{dv_y}{dt} = 0. \quad (16)$$

Используя далее зависимости (15), уравнение (16) приведем к виду

$$\sqrt{\frac{a_{11}}{\rho}} d\gamma_{xy} \pm dv_y = 0. \quad (17)$$

Итак, вдоль двух семейств характеристик (14) выполняются соотношения (17).

Запишем уравнение (7<sub>2</sub>) в терминах перемещений. Используя соотношения (8), уравнение (7<sub>2</sub>) приведем к виду

$$a_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial v}{\partial t^2}. \quad (18)$$

Уравнение (10) при этом удовлетворяется тождественно.

## Определение скоростей волн деформаций

Для определения скоростей волн деформаций – нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являющихся поверхностями слабых разрывов деформаций и скоростей частиц, воспользуемся кинематическими и динамическими условиями совместности [11]. Пусть  $\omega(x, t) = 0$  – уравнение линии разрыва на фазовой плоскости  $XOt$ . Обозначая символом [...] скачок функций при переходе через линию  $\omega(x, t) = 0$  и, применяя кинематические условия совместности  $\left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \lambda_v$ , к уравнению (18), получим динамическое условие совместности:

$$\left[ a_{11} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 - \rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right] \lambda_v = 0. \quad (19)$$

Поскольку коэффициент прерывности  $\lambda_v \neq 0$ , и учитывая, что скорость распространения линии разрыва  $\omega(x, t) = 0$  определяется выражением  $N^2 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 / \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2$  из соотношения (19), получаем:

$$N^2 = \frac{a_{11}}{\rho}. \quad (20)$$

Поскольку в главных осях  $\gamma_{xy}^* = \gamma_{yx}^* = 0$ , однако  $\frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial x} \neq 0$  и  $\frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial y} \neq 0$ , и, кроме того, для данной задачи  $\gamma_{xy}^* = \gamma_{yx}^*$ , то

$$a_{11} = G^*. \quad (21)$$

Таким образом, скорость распространения геометрически-нелинейных волн деформаций сдвига в главных осях однозначно определяется величиной геометрически-нелинейного аналога модуля сдвига.

## Результаты численных расчетов

Численные исследования приведенных скоростей  $\frac{\rho N^2}{G_0}$  волн деформаций сдвига с учетом геометрической нелинейности выполнялись для трех математических моделей сплошной среды.

*Модель 1.* Механическое поведение сплошной среды описывается линейным законом, то есть деформационные зависимости (1) имеют вид

$$\sigma^* = K_0 \varepsilon^*; \quad T^* = G_0 \Gamma^*. \quad (22)$$

*Модель 2.* Механическое поведение сплошной среды описывается квадратичным законом в отношении сдвиговых деформаций. Деформационные зависимости (1) в этом случае имеют вид

$$\sigma^* = K_0 \varepsilon^*; \quad T^* = G_0 \left( 1 - \frac{\Gamma^*}{2\Gamma_s} \right) \Gamma^*. \quad (23)$$

*Модель 3.* Механическое поведение сплошной среды описывается перекрестными зависимостями между инвариантами напряженного и деформированного состояний:

$$\sigma^* = K_0 \left[ 1 - \frac{q}{\varepsilon^*} \left( 2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right) \left( \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right)^2 \right] \varepsilon^*;$$

$$T^* = \left[ G_0 \left( 1 - \frac{\Gamma^*}{2\Gamma_s} \right) + K_0 f \frac{q}{\Gamma_s} \left( 2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right) \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} - K_0 f \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} \right] \Gamma^*. \quad (24)$$

Модель 1 соответствует геометрически-нелинейному аналогу линейной теории упругости, модель 2 соответствует геометрически-нелинейному аналогу теории малых упруго-пластических деформаций, модель 3 соответствует геометрически-нелинейному аналогу деформационной теории пластичности сыпучей среды [4; 12].

В формулах (22), (23), (24) обозначено:  $K_0$  – начальный модуль объемного расширения (сжатия);  $G_0$  – начальный модуль сдвига при чистом сдвиге;  $f$  – аналог коэффициента внутреннего трения;  $q$  – коэффициент дилатансии;  $\Gamma_s$  – предельная интенсивность деформаций сдвига, причем  $0 \leq \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \leq 1$ .

Исследования скоростей волн деформаций сдвига показали:

1. Для модели 1 приведенные скорости волн деформаций сдвига постоянны и не зависят ни от

значения механических констант сплошной среды, ни от уровня развития деформаций.

2. Приведенные скорости волн деформаций сдвига, вычисленные для модели 2, существенно зависят от уровня развития деформированного состояния: при возрастании интенсивности деформаций сдвига  $\frac{\Gamma}{\Gamma_s}$  на интервале  $[0,1]$  значения при-

веденных скоростей волн деформаций сдвига монотонно убывают от 1,0 до 0,5.

3. Что касается модели 3, то значения приведенных скоростей волн деформаций сдвига существенно зависят как от значения механических констант сплошной среды, так и от уровня развития деформаций. При увеличении коэффициента внутреннего трения скорости волн уменьшаются для нулевого коэффициента дилатансии (рис. 2, а). Если коэффициент дилатансии  $g/\Gamma_s > 0$ , то при увеличении коэффициента внутреннего трения скорости волн возрастают (рис. 2, б). При увеличении коэффициента дилатансии скорости волн также возрастают. Зависимость приведенных скоростей волн деформаций сдвига от уровня деформированного состояния неоднозначна и при возрастании интенсивности деформаций сдвига может как увеличиваться, так и уменьшаться. Если скорости распространения волн деформаций сдвига увеличиваются в процессе возрастания интенсивности деформаций сдвига (в процессе нагружения), то внутри полупространства возможно образование ударной волны (волны сильного разрыва) при непрерывных краевых условиях [13].

На рис. 2 изображены графики приведенных скоростей волн деформаций сдвига, построенные по уравнению (20), для модели 3. Значения механических констант принимались следующими:

$$\frac{K_0}{G_0} = 1,1547; \quad \frac{q}{\Gamma_s} = 1; \quad \Gamma_s = 0,1155.$$

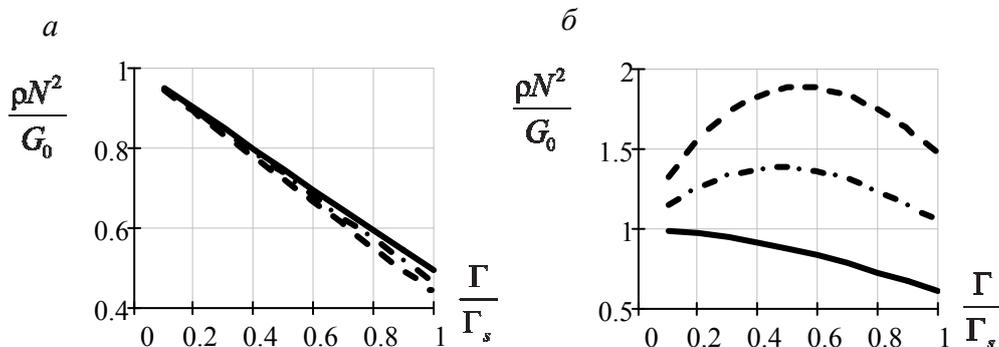


Рис. 2. Скорости волн деформаций сдвига: а –  $q = 0$ ; б –  $q = \Gamma_s$   
 [Figure 2. Velocities of shear strain waves: а –  $q = 0$ ; б –  $q = \Gamma_s$ ]

На рис. 2 сплошная линия соответствует коэффициенту трения  $f = 0,1$ ; штрих-пунктирная –  $f = 0,5$ ; пунктирная –  $f = 0,9$ .

### Выводы

Численные исследования показывают, что скорости распространения волн деформаций сдвига с учетом геометрической нелинейности существенно зависят как от вида математической модели, описывающей напряженно-деформированное состояние полупространства, так и от уровня напряженного и деформированного состояний в рассматриваемой точке среды, а также от величины физических констант материала сплошной среды.

### Заключение

Приведенные в статье соотношения могут быть использованы при построении алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния геометрически и физически нелинейных полупространств, находящихся в условиях плоской деформации от действия на поверхности сдвигающих динамических нагрузок.

© Бакушев С.В., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### Список литературы

1. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности / пер. с польск. В.А. Шачнева; под ред. Г.С. Шапиро. М.: Мир, 1978. 307 с.
2. *Бакушев С.В.* Продольно-поперечные геометрически-нелинейные волны деформаций // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Серия: Естественные и технические науки. Сентябрь, 2014. № 6 (143). С. 99–104.
3. *Бакушев С.В.* Продольно-поперечные волны деформаций слабого разрыва // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Вып. 76 (2). С. 114–121.
4. *Бакушев С.В.* Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: плоская задача. М.: ЛИБРОКОМ, 2013. 312 с.
5. *Доронин А.М., Ерофеев В.И.* Генерация второй гармоники сдвиговой волны в упруго-пластической

среде // Письма о материалах. 2016. Т. 6. № 2 (22). С. 102–104.

6. *Зверев Е.М.* Возникновение волны сдвига при поперечном ударе по высотному зданию // Строительство и реконструкция. 2015. № 3 (59). С. 67–74.

7. *Садовский В.М.* К исследованию структуры поперечных ударных волн конечной амплитуды в пластической среде // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 5. С. 40–50.

8. *Садовская О.В.* Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 2. С. 313–322.

9. *Carcione J.M., Poletto F., Farina B., Craglietto A.* Simulation of seismic waves at the earth's crust (brittle – ductile transition) based on the Burgers model // Solid Earth. 2014. Vol. 5. Issue 2. Pp. 1001–1010. doi: 10.5194/se-5-1001-2014

10. *Markiewicz E., Haugou G., Chaari F., Zouari B., Tounsi R., Dammak F.* Experimental study of aluminium honeycomb behaviour under dynamic multiaxial loading // EPJ Web of Conferences. 2012. Vol. 26. 01050. doi: 10.1051/epjconf/20122601050

11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.

12. *Гениев Г.А.* К вопросу о деформационной теории пластичности сыпучей среды // Строительная механика и расчет сооружений. 1971. № 4. С. 8–10.

13. *Бакушев С.В.* К вопросу о возможности формирования плоских ударных волн в сплошных средах // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 2. С. 70–76.

### Об авторе

*Бакушев Сергей Васильевич* – доктор технических наук, профессор кафедры механики, Пензенский государственный университет архитектуры и строительства (Пенза, Россия). *Область научных интересов:* разработка теории и методов расчета массивных тел с учетом геометрической и физической нелинейности (на основе нелинейных соотношений теории упругости В.В. Новожилова) на статические и динамические воздействия. Автор более 220 опубликованных научных работ. *Контактная информация:* e-mail – bakuchsv@mail.ru

### Для цитирования

*Бакушев С.В.* Плоские геометрически-нелинейные волны деформаций сдвига // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 516–522. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-516-522

RESEARCH PAPER

## Flat geometric-nonlinear shear strains

Sergej V. Bakushev

Penza State University of Architecture and Construction  
28 Titov St., Penza, 440028, Russian Federation

(received: March 19, 2018; revised: September 19, 2018; accepted: September 21, 2018)

**Abstract. Aims.** The problem of differential equation construction characteristics and balances is being analyzed; and also the definitions of the planar wave rotational deformation travel time in the continuum, the mechanical character of which is described by the mathematical models geometrically nonlinear analogues in continuous body, the stress-strain stain

of which is described by the undefined, basically, by the cross-connections between the first tensor invariant and the second invariant deviator of the stresses and nonlinear deformations.

**Methods.** As an example let's plot the specific speed of the transverse waves depending on the intensive rotational transverse deformation and the meanings of the material mechanical constants for the three mathematical models of the continuum: model 1 corresponds to the geometrically nonlinear analogue of the elasticity linear theory; model 2 corresponds to the geometrically nonlinear analogue of the small quantity elastoplastic strain theory; model 3 corresponds to geometrically nonlinear analogue of deformation theory of the loose medium plasticity.

**Conclusions.** It is stated that in half-subspace the mechanical behavior of which is described by the deformation theory equations of the loose medium plasticity, the shock waves can appear in continuous boundary conditions.

**Keywords:** plane problem, rotational deformation plane waves, the deformation wave travel time, geometrically and physical nonlinear effect

## References

1. Novatsky V.K. (1978). *Volnovye zadachi teorii plastichnosti [Wave problems of plasticity theory]*. Moscow, Mir Publ., 307. (In Russ.)
2. Bakushev S.V. (2014). Prodol'no-poperechnye geometricheski-nelinejnye volny deformacij [Longitudinal-cross geometrical non-linear waves of deformation]. *Proceedings of Petrozavodsk State University. Series: Natural & Engineering Sciences*, 6(143), 99–103. (In Russ.)
3. Bakushev S.V. (2014). Prodol'no-poperechnye volny deformacij slabogo razryva [The longitudinal-transverse waves of deformations of the weak gap]. *Problems of Strength and Plasticity*, 76(2), 114–121. (In Russ.)
4. Bakushev S.V. (2013). *Geometricheski i fizicheski nelineinaya mekhanika sploshnoi sredy: ploskaya zadacha [Metrically and physically nonlinear mechanics of continuum: flat task]*. Moscow, LIBROKOM Publ., 312. (In Russ.)
5. Doronin A.M., Erofeev V.I. (2016). Generaciya vtoroj garmoniki sdvigoj volny v uprugo-plasticheskoj srede [The generation of the second harmonics of the transverse wave in elastoplastic circumference]. *Letters on Materials*, 6(2–22), 102–104. (In Russ.)
6. Zveryaev E.M. (2015). Voznikovenie volny sdviga pri poperechnom udare po vysotnomu zdaniyu [The inception of the transverse wave at the time of the transverse impact on the high building]. *Building and Reconstruction*, 3(59), 67–74. (In Russ.)
7. Sadovskii V.M. (2003). K issledovaniyu struktury poperechnyh udarnyh voln konechnoj amplitudy v plasticheskoj srede [To the research of the transversal shock wave structure of finite amplitude in plastic circumference]. *Russian Academy of Science Report. Mechanics of the rigid solids*, (5), 40–50. (In Russ.)
8. Sadovskaya O.V. (2009). Chislennoe reshenie prostranstvennyh dinamicheskikh zadach momentnoj teorii uprugosti s granichnymi usloviyami simmetrii [Solid dynamical problem computational solution of the bending theory of elasticity with interface conditions of symmetry]. *Magazine of the numerical mathematics and mathematical physics*, 49(2), 313–322. (In Russ.)
9. Carcione J.M., Poletto F., Farina B., Craglietto A. (2014). Simulation of seismic waves at the earth's crust (brittle – ductile transition) based on the Burgers model. *Solid Earth*, 5(2), 1001–1010 doi: 10.5194/se-5-1001-2014
10. Markiewicz E., Haugou G., Chaari F., Zouari B., Tounsi R., Dammak F. (2012). Experimental study of aluminium honeycomb behaviour under dynamic multi-axial loading. *EPJ Web of Conferences*, (26), 01050. doi: 10.1051/epjconf/20122601050
11. Smirnov V.I. (1981). *Kurs vysshey matematiki [Course of higher mathematics]. Vol. 4. Part 2*. Moscow: Nauka Publ., 550. (In Russ.)
12. Geniev G.A. (1974). K voprosu o deformatsionnoy teorii plastichnosti sypuchey sredy [To the question of deformation theory of granular media of plasticity]. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (4), 8–10. (In Russ.)
13. Bakushev S.V. (2011). K voprosu o vozmozhnosti formirovaniya ploskih udarnyh voln v sploshnyh sredah [To the question of the possibility of creating flat shock waves in solid media]. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (4), 11–15. (In Russ.)

### About the author

**Sergej V. Bakushev** – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Mechanics, Penza State University of Architecture and Construction (Penza, Russia). *Research interests:* development of the theory and methods of calculation of massive bodies taking into account geometric and physical nonlinearities (based on V.V. Novozhilov nonlinear theory of elasticity ratios) for static and dynamic effects. He is the author of more than 220 scientific publications. *Contacts:* e-mail – bakuchsv@mail.ru

### For citation

Bakushev S.V. (2018). Flat geometric-nonlinear shear strains. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 516–522. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-516-522 (In Russ.)

## Экспериментальные исследования

УДК 6.62:6.691  
DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-523-532

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Математические модели многоствольных строительных артиллерийских орудий

О.Л. Фиговский<sup>1\*</sup>, О.Г. Пенский<sup>2</sup><sup>1</sup>Ассоциация изобретателей Израиля  
POBox 73, Migdal HaEmek 10550, Israel<sup>2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет  
Российская Федерация, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

\*Автор, ответственный за переписку

(поступила в редакцию: 23 сентября 2018 г.; доработана: 14 ноября 2018 г.; принята к публикации: 19 ноября 2018 г.)

В статье приведены принципиальные схемы и математические модели многоствольных артиллерийских систем, предназначенных для застреливания и извлечения строительных элементов из грунта, описаны результаты численных экспериментов, выполненных на основе предложенных математических моделей и позволяющих изучать динамику многоствольных строительных артсистем во время выстрела. Даны математические прогнозы по заглублению свай в грунт, максимальному давлению в каналах стволов, величины и скорости отката пушек для различных условий заряжания стволов и их технических характеристик. В качестве верификации предлагаемых математических моделей описаны результаты экспериментов для одноствольных артиллерийских орудий, являющихся частным случаем многоствольных пушек.

**Ключевые слова:** артиллерийская система, математическая модель, строительство, строительные элементы, свая, извлечение свай

#### Введение

В настоящее время в РФ проводятся исследования по созданию многоствольных артиллерийских систем, предназначенных для решения задач строительства. Выбор артиллерийских орудий для решения этих задач обусловлен тем, что в качестве орудий можно выбрать пушки, снятые с вооружения и идущие на переплавку в металллом, а в качестве порохов можно использовать устаревшие пороха, подлежащие утилизации. Эти факторы в числе прочих позволяют получить большую экономическую эффективность при создании и работе мирных пушек.

В современных строительных технологиях в настоящее время все возрастающее значение приобретает математическое моделирование [1]. При-

ведем математические модели многоствольных строительных артиллерийских систем.

#### Математические модели застреливания свай в грунт из многоствольных артиллерийских систем

На рис. 1 приведена принципиальная схема многоствольной артиллерийской установки.

Работает установка следующим образом. В стволы 1 вставляется фигурный поршень 3 с платформой 2, которая опирается на строительный элемент 4, упирающийся на поверхность грунта 5. Во время выстрела платформа 2 давит на сваю 4, в результате чего свая 4 проникает в грунт 5.

Для описания динамики импульсного вдавливания адаптирована термодинамическая теория выстрела для боевых орудий [2].

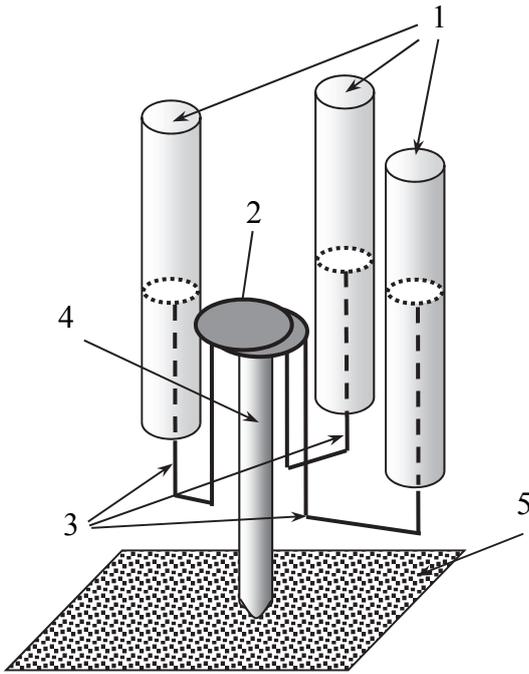


Рис. 1. Принципиальная схема многоствольной строительной артиллерийской установки  
 [Figure 1. Schematic diagram of a multi-barreled construction artillery installation]

Пусть  $n$  – количество стволов в артсистеме,

$i$  – порядковый номер ствола,  $i = 1, n$ .

Предварительный период выстрела для каждого из стволов описывается известной формулой внутренней баллистики [2]:

$$\Psi_{0,i} = \frac{\frac{1}{\Delta_i} - \frac{1}{\delta_i}}{\frac{f_i}{p_{0,i}} + \alpha_i - \frac{1}{\delta_i}}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} = & \frac{f_i \omega_i \frac{d\Psi_i}{dt} + p_i \left[ -\omega_i \left( \alpha_i - \frac{1}{\delta_i} \right) \frac{d\Psi_i}{dt} + S_i V_i + S_i v_a \right]}{S_i (L_{\Psi_i} + L_{p,i} + L_a)} + \\ & + \frac{-\theta_i F(v_a, L_a + X_j) v_a - \theta_i m v_a \frac{dv_a}{dt} - \theta_i M_i g V_i - \theta_i M_i V_i \frac{dV_i}{dt}}{S_i (L_{\Psi_i} + L_{p,i} + L_a)} + \\ & + \frac{-\theta_i G(V_i, L_{p,i}) V_i + \theta_i m g v_a + \theta_i v_a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j p_j}{S_i (L_{\Psi_i} + L_{p,i} + L_a)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Delta_i = \frac{\omega_i}{W_{0,i}}$ ,  $\omega_i$ ,  $W_{0,i}$ ,  $\delta_i$ ,  $f_i$ ,  $p_{0,i}$ ,  $\alpha_i$  – плот-

ность заряжения, масса заряда, объем камеры, плотность пороха, сила пороха, давление форсирования, коэфф. пороховых газов в стволе  $i$ .

Пусть  $L_a$  – абсолютные скорость и путь свай (строительного элемента) в грунте,  $m$  – масса строительного элемента,  $Q_i$  – вес откатных частей пушки с номером  $i$ ,  $L_{p,i}$  – путь отката откатных частей пушки с номером  $i$ ,  $M_i$  – масса откатных частей пушки с порядковым номером  $i$  в многоствольной системе,  $q$  – вес строительного элемента,  $t$  – время,  $V_i$  – скорость отката ствола  $i$ ,  $p_i$  и  $S_i$  – давление в канале и площадь поперечного сечения  $i$ -го ствола соответственно,  $\theta_i$  – показатель адиабаты пороховых газов без единицы,  $\Psi_i$  – относительная часть сгоревшего заряда в стволе  $i$ ,  $W_{\Psi_i}$  – свободный объем камеры к моменту сгорания в ней части заряда  $\Psi_i$ ,  $j$  – порядковый номер импульсного вдавливания,  $X_j$  – суммарное заглубление строительного элемента в грунт в результате  $j$  вдавливаний, где  $X_1 = 0$ ,  $F(v_a, L_a + X_j)$  – сила сопротивления грунта движению в нем строительного элемента,  $G(V_i, L_{p,i})$  – сила сопротивления откату  $i$ -го ствола.

Во время первого периода выстрела давление в стволах описывается уравнениями

$$\text{где } L_{\Psi_i} = \frac{W_{0,i}}{S_i} \left( 1 - \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \Delta_i \left( \alpha_i - \frac{1}{\delta_i} \right) \Psi_i \right).$$

$$m \frac{dv_a}{dt} = \sum_{i=1}^n S_i p_i + mg - F(v_a, L_a + X_j), \quad (3)$$

$$M_i \frac{dV_i}{dt} = p_i S_i - M_i g - G(V_i, L_{p,i}), \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести.

$$\frac{dL_a}{dt} = v_a, \quad (5)$$

$$\frac{dL_{p,i}}{dt} = V_i. \quad (6)$$

Согласно работе [2] для вычисления относительной части сгоревшего трубчатого зерненого пороха можно воспользоваться равенством

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{1}{I_{p,i}} p_i = \Gamma_i p_i, \quad (7)$$

где  $\Gamma_i = \frac{1}{I_{p,i}}$  – удельная интенсивность газообразования;  $I_{p,i}$  – импульс пороха в  $i$ -м стволе.

Таким образом, полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (2)–(7) описывает первый период выстрела в стволе  $i$ .

Начальные условия для решения этой системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} p_i(0) = p_{i,0}, & v_a(0) = 0, & V_i(0) = 0, \\ L_a(0) = 0, & L_{p,i}(0) = 0, & \Psi_i(0) = \Psi_{0,i}. \end{cases} \quad (8)$$

Так как второй период выстрела соответствует адиабатическому расширению пороховых газов, то уравнения моделирования для давления  $p_i$  примут вид

$$p_i = p_{i,k} \left( \frac{L_{\Psi_i=1,k} + L_{p,i,k} + L_{a,i,k}}{L_{\Psi_i=1,i} + L_{p,i} + L_a} \right)^{1+\theta_i}, \quad (9)$$

где  $L_{\Psi_i=1,i} = \frac{W_{0,i}}{S_i} (1 - \Delta_i \alpha_i)$ ;  $L_{a,i,k}$  – абсолютный путь поршня в конце первого периода выстрела для  $i$ -м ствола,  $L_{p,i,k}$  – величина отката  $i$ -го ствола в конце первого периода выстрела;  $p_{i,k}$  – давление в  $i$ -м стволе в конце первого периода выстрела.

Очевидно, что второй период выстрела для ствола  $i$  описывается системой уравнений (3)–(6), (9).

Начальные условия для этой системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} v_a(0) = v_{a,k}, & V_i(0) = V_{i,k}, \\ L_a(0) = L_{a,k}, & L_{p,i}(0) = L_{p,i,k}, \end{cases} \quad (10)$$

где  $v_{a,k}$  – абсолютная скорость строительного элемента в конце первого периода в стволе  $i$ ;  $V_{i,k}$  – скорость отката  $i$ -го ствола в конце первого периода выстрела.

Во время выстрела многоствольной строительной артиллерийской системы первый и второй периоды выстрела могут заканчиваться и начинаться в разные моменты времени. Поэтому расчеты с помощью приведенных уравнений внутренней баллистики нужно выполнять согласно правилу: если для орудия  $i$  выполняется условие  $\Psi_i(t) < 1$ , то для описания внутрибаллистических процессов решается задача Коши (2)–(8). Если  $\Psi_i(t) = 1$  и  $L_{p,i} + L_a \leq L_{d,i}$ , то решается задача Коши (3)–(6), (9), (10), где  $L_{d,i}$  – длина канала ствола  $i$ . Если  $L_{p,i} + L_a > L_{d,i}$ , то давление  $p_i(t) \equiv 0$ .

Очевидно, что после выхода поршня из всех каналов стволов движение сваи в грунте описывается задачей Коши:

$$\begin{cases} m \frac{dv_a}{dt} = -F(v_a, L_a + X_j) + mg, \\ \frac{dL_a}{dt} = v_a, \\ v_a(0) = v_{a,d}, \\ L_a(0) = L_{a,d}, \end{cases}$$

где  $v_{a,d}$  – абсолютная скорость строительного элемента в момент выхода поршня из канала ствола, в котором дольше всего двигался поршень;  $L_{a,d}$  – абсолютный путь поршня по каналу ствола, в котором дольше всего перемещался поршень в суммарное время первого и второго периодов выстрела.

Величина проникания строительного элемента в грунт в результате одного импульса соответствует значению  $L_a$ , при котором выполняется равенство  $v_a = 0$  и  $X_{j+1} = X_j + L_a$ .

В работе [3] предложены математические модели импульсного вдавливания строительных элементов в грунт из многоствольных орудий с одинаковыми техническими характеристиками и условиями заряжания. Отличительной особенностью урав-

нений (1)–(10) является то, что они описывают импульсное вдавливание, осуществляемое за счет использования многоствольных артсистем с разными техническими характеристиками и условиями заряжания каждого из орудий, входящих артсистему. Технические решения для устранения поворотных моментов для таких орудий приведены, например, в работе [4].

Расчеты будем проводить для глинистого грунта с консистенцией 0,5. Для этого грунта сила сопротивления  $F$  движению сваи удовлетворяет соотношению [3]

$$F = S_c (av_a^2 + c) + rzL_a(t),$$

где  $S_c$  – площадь миделевого сечения;  $v_a$  – скорость движения строительного элемента в грунте;  $r$  – удельная сила трения боковой поверхности строительного элемента о грунт;  $z$  – периметр миделевого сечения;  $L_a(t)$  – погружение строительного элемента в грунт;  $t$  – время; коэффициенты сопротивления глинистого грунта –  $a = 3422 \text{ н*с}^2/\text{м}^4$ ,  $c = 2\,000\,000 \text{ Па}$ ,  $r = 35\,000 \text{ Па}$ .

Численные эксперименты, основанные на предложенных математических моделях, показывают возможность застреливания свай в глинистый грунт с консистенцией 0,5 на глубину более 30 м при технических параметрах свай, орудий и условий заряжания, приведенных в табл. 1.

Расчетные характеристики каждого из импульсных вдавливателей приведены в табл. 2.

Анализ табл. 2 позволяет выдвинуть гипотезу о возможности применения многоимпульсного вдавливания при решении задач, связанных с необходимостью забивки свай на большую глубину в грунты средней плотности.

Таблица 1

**Технические характеристики артсистемы и свай**  
[Table 1. Technical characteristics of the artillery system and piles]

Количество стволов [Number of stems]	4
Калибр каждого ствола, м [The caliber of each stem, m]	0,170
Масса откатных частей каждого ствола, кг [Mass of sliding parts of each stem, kg]	3600
Длина каждого ствола, м [The length of each stem, m]	2,345
Масса сваи, кг [Pile weight, kg]	600
Диаметр сваи, м [Diameter of pile, m]	0,168
Допустимая скорость свободного отката, м/с [Admissible free kickback speed, m/s]	6,5
Допустимое максимальное давление в каждом стволе, кПа [Admissible maximum pressure in each stem, kPa]	250

На основании классической термодинамической теории выстрела боевых орудий для вычисления коэффициента полезного действия многоствольных артиллерийских систем предлагается следующая модифицированная формула [3]

$$\text{КПД}_j = \frac{\frac{mv_{ад}^2}{2} + \int_0^{L_{ад}} F(v_a, L_a + X_j) dL_a}{\frac{f \sum_{i=1}^n \varpi_i}{\theta}},$$

где  $v_{ад}$  – дульная скорость свай;  $L_{ад}$  – абсолютный наибольший дульный путь свай.

Таблица 2

**Расчетные характеристики импульсных вдавливателей**  
[Table 2. Impulse impact calculation characteristics]

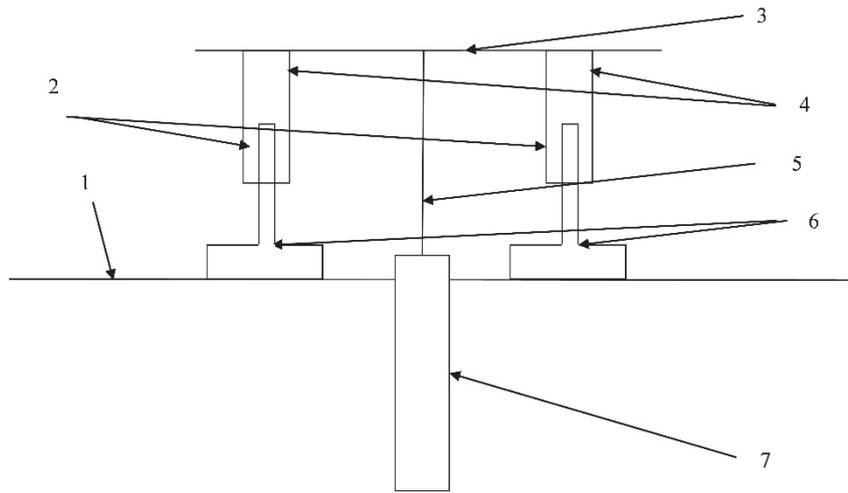
Порядковый номер импульсного вдавливания [Pulse indentation sequence number]	Масса заряда, кг [Charge weight, kg]	Импульс пороха, кПа [Gun-powder impulse, kPa]	Объем камеры, м <sup>3</sup> [Volume of chamber, m <sup>3</sup> ]	Заглубление, м [Deepening, m]
1	1,000	800	0,0020	8,3
2	0,875		0,0016	13,3
3	0,850		0,0020	17,3
4	0,800		0,0020	20,7
5	0,725		0,0014	23,7
6	0,675		0,0011	26,4
7	0,650		0,0010	28,2
9	0,450		0,0006	30,8

Вычисления, проведенные для первого импульсного вдавливания для одноствольного орудия типа УЗАС-2 [3], показали, что коэффициент полезного действия равен 45 %.

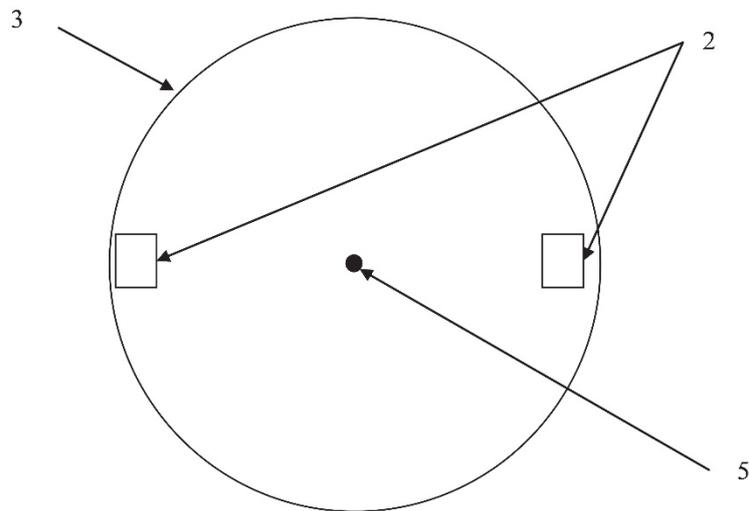
### Математические модели извлечения свай из грунта с помощью многоствольных артиллерийских систем

При градостроительстве зачастую возникают задачи ликвидации так называемых долгостроев. Одним из видов работ, выполняемых для этого, является извлечение свай из грунта. Многие из существующих методов, решающих эту задачу, трудно применимы при точечной застройке зданий.

На рис. 2 и 3 описана принципиальная схема многоствольной откатной артиллерийской системы, позволяющей извлекать сваи из грунта за счет энергии отката стволов при одновременном выстреле из стволов [5; 6].



**Рис. 2. Принципиальная схема извлечения свай из грунта с помощью многоствольных откатных артиллерийских орудий (вид сбоку)**  
**[Figure 2. Schematic diagram of the extraction of piles from the ground with the help of multi-barreled retractable artillery guns (side view)]**



**Рис. 3. Принципиальная схема извлечения свай из грунта с помощью многоствольных откатных артиллерийских орудий (вид сверху)**  
**[Figure 3. Schematic diagram of the extraction of piles from the ground with the help of multi-barreled retractable artillery guns (top view)]**

Способ извлечения строительных элементов из грунта с помощью многоствольных артиллерийских орудий включает следующую последовательность операций:

- штампы 6 вставляют в стволы артиллерийских орудий 2;
- на казенные части артиллерийских орудий 4 устанавливают платформу в виде круга 3 с точками соприкосновения на концах диаметра круга, причем каждая пара откатных частей артиллерий-

ских орудий устанавливается на противоположных концах диаметров платформы 3;

- центр круга платформы 3 прикрепляется к голове извлекаемого строительного элемента 7 с помощью натянутого троса 5;

– производят синхронизированный выстрел из всех орудий;

- платформа 3, поднимаясь вверх за счет отката при выстреле, извлекает из грунта 1 строительный элемент 7.

Опишем математическую модель извлечения свай из грунта откатными частями многоствольных орудий с одинаковыми техническими характеристиками и условиями заряжания каждого из стволов, входящих в артсистему.

Для разработки математической модели будем основываться на термодинамической теории выстрела в рамках допущений этой теории [2; 7] при использовании трубчатого зерненого пороха.

Предварительный период выстрела для каждого из стволов описывается известной формулой

$$\Psi_0 = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta}}{\frac{f}{p_0} + \alpha - \frac{1}{\delta}}, \quad (11)$$

где  $\Delta$  – плотность заряжания;  $\delta$  – плотность пороха;  $f$  – сила пороха;  $p_0$  – давление форсирования штампа;  $\alpha$  – коэфф. порохом газов.

Будем предполагать, что перед выстрелом штампы упираются в грунт.

При анализе процесса выстрела во время застреливания штампов в грунт необходимо учитывать не только часть энергии пороховых газов, которая превращается в кинетическую энергию поступательного движения строительного элемента, но и энергию, затрачиваемую на совершение другого вида работ. Это позволит установить полный баланс энергии при выстреле [2; 7].

Пусть  $n$  – количество стволов в многоствольной системе.

Определим работу по преодолению силы сопротивления грунта движению в нем штампов, выполненную за счет энергии пороховых газов.

Пусть  $v_a$  – абсолютная скорость одного штампа,  $l_a$  – абсолютный путь штампа по каналу ствола. В этих обозначениях силу сопротивления грунта  $F$  можно записать в виде соотношения

$$F = F(v_a, L_a).$$

Тогда энергию, необходимую для вдавливания штампов, количество которых равно  $n$ , на глубину  $L_a$ , можно записать в виде

$$Z_1 = n \int_0^{L_a} F(v_a, x) dx,$$

где  $\frac{dx}{dt} = v_a$ .

Таким образом, величина  $Z_1$  примет вид

$$Z_1 = n \int_0^{L_a} F(v_a, x) dx,$$

где  $\frac{dx}{dt} = v_a$ .

Очевидно, что кинетическая энергия, которую будут иметь штампы массой  $m$  в момент времени  $t$ , удовлетворяет соотношению

$$Z_2 = n \frac{mv_a^2}{2}.$$

Напомним, что стволы артиллерийской системы расположены вертикально и таким образом, что штампы во время выстрела движутся вниз. То есть энергия пороховых газов идет на перемещение стволов и свай вверх. Совершается работа, которую можно выразить соотношением

$$Z_3 = (nQ + q_c)L_p,$$

где  $Q$  – вес откатных частей-стволов каждого артиллерийского орудия, входящего в многоствольную артсистему;  $q_c$  – вес извлекаемой свай;  $L_p$  – перемещение откатных частей.

Кроме того, энергия пороховых газов сообщает откатным частям артиллерийского орудия и извлекаемой свай скорость  $V$ . Следовательно, кинетическая энергия откатных частей удовлетворяет равенству

$$Z_4 = \frac{(nM + m_c)V^2}{2},$$

где  $M$  – масса откатных частей отдельной пушки;  $m_c$  – масса свай.

Энергия, расходуемая на преодоление силы сопротивления отката, имеет вид

$$Z_5 = \int_0^{L_p} [nG(V, l_p) + F_{tr}] dl_p,$$

где  $L_p$  – путь отката;  $G(V, l_p)$  – сила сопротивления отката;  $F_{tr}$  – сила трения боковой поверхности извлекаемой свай о грунт.

Так как штампы движутся вертикально вниз, то сила тяжести сама выполняет работу

$$Z_6 = nqL_a,$$

которая не входит в сумму работ, совершаемых за счет энергии пороховых газов.

Пусть  $E$  – энергия пороховых газов, за счет которой совершаются работы  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$ . Тогда очевидно соотношение

$$E = \sum_{i=1}^5 Z_i - Z_6. \quad (12)$$

Величину  $E$  можно аппроксимировать в следующем виде [2; 3]

$$E = n \left[ \frac{f}{\theta} \omega \Psi - \frac{p(W_\Psi + sL)}{\theta} \right], \quad (13)$$

$$n \left[ \frac{f}{\theta} \omega \Psi - \frac{p(W_\Psi + sL)}{\theta} \right] =$$

$$= n \int_0^{L_a} F(v_a, x) dx + n \frac{mv_a^2}{2} + (nQ + q_c)L_p + \frac{(nM + m_c)V^2}{2} - nqL_a + \int_0^{L_p} [nG(V, l_p) + F_{tr}] dl_p. \quad (14)$$

Из уравнения (14) получаем, дифференцируя параметр давления в канале ствола  $p$  по времени  $t$ , соотношение

$$\frac{dp}{dt} = \frac{n \frac{f}{\theta} \omega \frac{d\Psi}{dt} - nv_a F(v_a, L_a) - nmv_a \frac{dv_a}{dt} - nQ \frac{dL_p}{dt} - q_c \frac{dL_p}{dt}}{n \frac{W_\Psi + sL}{\theta}} - \frac{(nM + m_c)V \frac{dV}{dt} + V[nG(V, L_p) + F_{tr}] + \frac{np(\frac{dW_\Psi}{dt} + sv_a + sV)}{\theta}}{n \frac{W_\Psi + sL}{\theta}}. \quad (15)$$

Очевидны следующие уравнения, описывающие поступательное движение штампа, откатных частей пушки и извлекаемой сваи:

$$m \frac{dv_a}{dt} = ps - F(v_a, L_a) + q, \quad (16)$$

$$\frac{dL_a}{dt} = v_a, \quad (17)$$

$$(nM + m_c) \frac{dV}{dt} = nps - nG(V, L_p) - F_{tr} - Q - q_c, \quad (18)$$

$$\frac{dL_p}{dt} = V. \quad (19)$$

Согласно закону горения трубчатого зернового пороха [2] справедливы соотношения:

где  $\theta$  – коэффициент адиабаты пороховых газов без единицы;  $\omega$  – масса заряда в каждом стволе;  $\Psi$  – относительная часть сгоревшего заряда в каждом стволе;  $P$  – давление в каналах стволов;  $W_\Psi$  – свободный объем камеры в каждом стволе к моменту сгорания в ней части заряда  $\Psi$ ;  $s$  – площадь поперечного сечения канала каждого ствола;  $L$  – путь штампа по каналу каждого ствола.

Заменяя в соотношении (12) значения  $Z_i$  их алгебраическими выражениями и учитывая формулу (13), получим равенство

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Gamma p, \quad \frac{dL_\Psi}{dt} = -a_1 \Gamma p, \quad (20)$$

$$a_1 = \frac{W_0}{s} \left( \alpha - \frac{1}{\delta} \right), \quad \Gamma = \frac{1}{I_p},$$

где  $I_p$  – полный импульс давления пороховых газов за время сгорания пороха.

Начальные условия для решения системы дифференциальных уравнений (15)–(20) запишем в виде

$$p_{/t=0} = p_0, \quad v_{a/t=0} = 0,$$

$$V_{/t=0} = 0, \quad \Psi_{/t=0} = \Psi_0,$$

$$L_{a/t=0} = 0, \quad L_{p/t=0} = 0.$$

Согласно термодинамической теории выстрела задача Коши [8] описывает первый период выстрела [2].

Уравнения (15)–(19) второго периода выстрела [3] эквивалентны уравнениям первого периода выстрела при условии  $\Psi \equiv 1$ . Уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} = \tilde{A}p$$

в систему уравнений не войдет. Начальные условия для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для второго периода выстрела равны конечным значениям искомых функций задачи Коши, описывающей первый период выстрела.

На рис. 4 приведена одноствольная артиллерийская установка (n = 1) для застреливания анкеров и свай в грунт и извлечения свай из грунта УЗАС-2 [3; 9], которая создана в Перми. При извлечении свай из грунта возможно использование установки следующим образом. В ствол помещается штамп с большой площадью миделевого сечения основания. К откатным частям пушки жестко прикрепляется голова извлекаемой из грунта сваи. Во время выстрела штамп на небольшую глубину проникает в грунт, а откатные части пушки поднимаются вверх, извлекая сваю из грунта. Проведем расчеты моделирования динамики извлечения сваи из грунта с помощью УЗАС-2.



Рис. 4. Установка УЗАС-2 с застреливаемым в грунт штампом  
[Figure 4. Installation of UZAS-2 with a stamp being shot into the ground]

Рассмотрим глинистый грунт с консистенцией 0,5.

Сила сопротивления этого грунта ( $H$ ) прониканию штампа определяется соотношением [3]

$$F = F(v_a, L_a) = 3422v_a^2s_s + 2\,000\,000s_s + 35\,000\pi d_s L_a,$$

где  $s_s$ ,  $d_s$  – площадь миделевого сечения и диаметр каждого штампа, м.

Силы  $G(V, L_p)$  и  $F_{tr}$  удовлетворяет равенствам (Н):

$$G(V, L_p) = 0, F_{tr} = 35\,000\pi d_c (H_c - L_p),$$

где  $H_c$  – первоначальное заглубление извлекаемой сваи.

Для численного решения задачи динамики выстрела примем следующие характеристики орудия, условия заряжания, параметры штампа и извлекаемой сваи [9]: длина канала ствола – 1,8 м, вес заряда – 3 н, калибр ствола – 0,170 м, объем камеры – 0,001026 м<sup>3</sup>, сила пороха – 950 000 дж/кг, плотность пороха – 1600 кг/м<sup>3</sup>, показатель адиабаты пороховых газов – 1,2, коволюм пороховых газов – 0,98 · 10<sup>-3</sup> м<sup>3</sup>/кг, полный импульс давления газов во время сгорания пороха (импульс пороха) – 376 500 Па·с, вес откатных частей орудия – 36 000 н, диаметр головной части штампа – 0,5 м, масса штампа – 800 кг, диаметр извлекаемой сваи – 0,168 м, масса сваи – 240 кг, первоначальное проникание сваи – 4 м.

Для расчета динамики орудия была разработана специальная программа [10]. Для решения задачи Коши использовался метод Рунге – Кутты 2-го порядка с шагом интегрирования 10<sup>-6</sup> с [2; 3].

Вычисления позволили получить следующие динамические показатели к концу выстрела: максимальное давление в канале ствола – 654 МПа, дульное давление пороховых газов – 4,2 МПа, величина проникания штампа в грунт – 1,13 м, величина извлечения сваи из грунта – 3,46 м. Относительная погрешность результатов вычислений от экспериментальных данных не превышает 6 %.

## Заключение

Численные эксперименты, основанные на описанных в статье математических моделях, теоретически показали эффективность применения многоствольных артиллерийских систем для застреливания свай в грунт и извлечения свай из грунта. Эксперименты, проведенные на одноствольных системах, являющихся частным случаем многоствольных пушек, доказали практикой теоретические выводы.

© Фиговский О.Л., Пенский О.Г., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

### Список литературы

1. Фиговский О., Гумаров В. Инновационные системы: достижения и проблемы: монография. Изд-во Lambert, 2018. 657 с.
2. Русяк И.Г., Ушаков В.М. Внутрикамерные гетерогенные процессы в ствольных системах. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 259 с.
3. Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Пенский О.Г., Черников А.В. Принципиальные схемы и математические модели строительных артиллерийских орудий. Пермь: Изд-во ПермГУ, 2016. 495 с.
4. Маланин В.В., Остапенко Е.Н., Пенский О.Г. Способ размещения артиллерийских орудий в многоствольной строительной артиллерийской системе. Патент РФ на изобретение RU 2 551 042 С1. 20.05.2015. Бюл. № 14.
5. Пенский О.Г., Мазеина Н.Н., Шестаков Е.С. Способ извлечения строительных элементов из грунта с помощью многоствольных артиллерийских орудий. Патент РФ на изобретение RU 2 653 198 С1. Опубл. 07.05.2018. Бюл. № 13.
6. Pensky O., Kuznetsov A. Mathematical models for extracting pile from the soil with the help of multibarreled artillery systems // Journal of computational and engineering mathematics. 2018. Vol. 5. No. 1. Pp. 14–22.
7. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах: монография. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 255 с.
8. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 231 с.
9. Бартоломей А.А., Григорьев В.Н., Омельчак И.М., Пенский О.Г. Основы импульсной технологии устройства фундаментов. Пермь: Изд-во ПГТУ, 2002. 189 с.
10. Пенский О.Г. Программа расчета динамики извлечения свай из грунта с помощью многоствольных артиллерийских систем. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017660043. Дата выдачи 13.09.2017.

#### Сведения об авторах

**Фиговский Олег Львович** – доктор технических наук, профессор, президент Ассоциации изобретателей Израиля (Хайфа, Израиль). *Область научных интересов:* разработка композиционных материалов, которые основаны на полимерных, силикатных и других матрицах, их передовых технологиях и повышении их эксплуатационных свойств в экстремальных условиях. *Контактная информация:* e-mail – figovsky@gmail.com

**Пенский Олег Геннадьевич** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры механики и математического моделирования, Пермский государственный национальный исследовательский университет (Пермь, Россия). eLIBRARY SPIN-код: 2183-1560. *Область научных интересов:* разработка принципиальных схем и математическое моделирование артиллерийских орудий, предназначенных для решения задач строительства. *Контактная информация:* e-mail – ogpensky@mail.ru

#### Для цитирования

Фиговский О.Л., Пенский О.Г. Математические модели многоствольных строительных артиллерийских орудий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 6. С. 523–532. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-523-532

RESEARCH PAPER

## Mathematical models of multi-barreled construction artillery systems

Oleg L. Figovsky<sup>1\*</sup>, Oleg G. Pensky<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Israel Research Center  
POBox 73, Migdal HaEmek 10550, Israel

<sup>2</sup>Perm State University  
15 Bukireva St., Perm, 614990, Russian Federation

\*Corresponding author

(received: September 23, 2018; revised: November 14, 2018; accepted: November 19, 2018)

**Abstract.** The article presents the schematic diagrams and mathematical models of multi-barrel artillery systems designed for shooting and extraction of building elements from the ground, describes the results of numerical experiments carried out on the basis of the proposed mathematical models and allow to study the dynamics of multi-barrel building artillery systems during the shot. Mathematical forecasts on the depth of piles in the soil, the maximum pressure in the channels of the stems, the magnitude and speed of the guns rollback for different conditions of loading the stems and their technical characteristics are described. As a verification of the proposed mathematical models, the results of experiments for single-barrel artillery guns, which are a special case of multi-barrel guns, are described.

**Keywords:** artillery system, mathematical model, construction, building elements, pile, extraction of piles

## References

1. Figovskij O., Gumarov V. (2018). *Innovacionnyye sistemy: dostizheniya i problemy [Innovative systems: achievements and challenges]*. Lambert Publ., 657. (In Russ.)
2. Ruyak I.G., Ushakov V.M. (2001). *Vnutrikamerne geterogennyye processy v stvol'nyh sistemah [Intracamera heterogeneous processes in receiver systems]*. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 259. (In Russ.)
3. Malanin V.V., Ostapenko E.N., Penskiy O.G., Chernikov A.V. (2016). *Principial'nye skhemy i matematicheskie modeli stroitel'nyh artillerijskih orudij [Schematic diagrams and mathematical models of building artillery guns]*. Perm', PermGU Publ., 495. (In Russ.)
4. Malanin V.V., Ostapenko E.N., Penskiy O.G. (2015, May 20). *Sposob razmeshcheniya artillerijskih orudij v mnogostvol'noj stroitel'noj artillerijskoj sisteme [The method of placement of artillery guns in a multi-barreled building artillery system]*. R.F. Patent 2 551 042 C1. Byul. No. 14. (In Russ.)
5. Penskiy O.G., Mazeina N.N., Shestakov E.S. (2018, May 07). *Sposob izvlecheniya stroitel'nyh ehlementov iz grunta s pomoshch'yu mnogostvol'nyh artillerijskih orudij [The method of extraction of building elements from the ground using multi-barreled artillery]*. R.F. Patent 2 653 198 C1. Byul. No. 13. (In Russ.)
6. Pensky O., Kuznetsov A. (2018). Mathematical models for extracting pile from the soil with the help of multibarreled artillery systems. *Journal of computational and engineering mathematics*, 5(1), 14–22.
7. Homenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999). *Matematicheskoe modelirovanie vnutribalisticheskikh processov v stvol'nyh sistemah [Mathematical modeling of intraballistic processes in stem systems]*. Novosibirsk, SO RAN Publ., 255. (In Russ.)
8. Tihonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G. (1980). *Differencial'nye uravneniya [Differential equations]*. Moscow, Nauka Publ., 231. (In Russ.)
9. Bartolomej A.A., Grigor'ev V.N., Omel'chak I.M., Penskiy O.G. (2002). *Osnovy impul'snoj tekhnologii ustrojstva fundamentov [Fundamentals of pulse technology foundations]*. Perm', PGTU Publ., 189. (In Russ.)
10. Penskiy O.G. (2017, September 13). *Programma rascheta dinamiki izvlecheniya svaj iz grunta s pomoshch'yu mnogostvol'nyh artillerijskih sistem [The program for calculating the dynamics of the extraction of piles from the ground with the help of multi-barreled artillery systems]*. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlya EHVM No. 2017660043 [Certificate of state registration of computer programs No. 2017660043]. (In Russ.)

**About the authors**

**Oleg L. Figovsky** – Dr Sci. (Eng.), Professor, President of the Association of Inventors of Israel (Nayfa, Israel). *Research interests*: development of composite materials that are based on polymer, silicate and other matrixes, their advanced technology and increasing their service properties under extreme conditions. *Contacts*: e-mail – figovsky@gmail.com

**Oleg G. Pensky** – Dr Sci. (Eng.), Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematical Modeling, Perm State University (Perm, Russia). eLIBRARY SPIN-code: 2183-1560. *Research interests*: development of schematic diagrams and mathematical modeling of artillery guns intended for solving construction problems. *Contacts*: e-mail – ogpensky@mail.ru

**For citation**

Figovsky O.L., Pensky O.G. (2018). Mathematical models of multi-barreled construction artillery systems. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(6), 523–532. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-6-523-532 (In Russ.)