

ISSN 1815-5235 (print), 2587-8700 (online).

Периодичность 6 выпусков в год.

Сайт журнала: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ).

Языки: русский, английский, французский.

Журнал индексируют: РИНЦ, Cyberleninka, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 05.23.00 – Строительство и архитектура. Подписной индекс по каталогу агентства «Роспечать» – 20479 (полгода) и 80344 (год).

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал «*Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала функционирует на портале научных журналов Российского университета дружбы народов: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>. Сайт содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

#### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

ГАЛИШНИКОВА В.В., *д-р техн. наук, доц., РУДН, Москва, Россия*

#### ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

ИВАНОВ В.Н., *д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия*

#### ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РЕДАКТОР

МАМИЕВА И.А., *РУДН, Москва, Россия*

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

ВАНИН В.В., *д-р техн. наук, проф., Киевский политехнический университет, Киев, Украина*

ЛИСИЧКИН С.Е., *д-р техн. наук, ООО «ИЦСКТЭ», Москва, Россия*

ЗВЕРЯЕВ Е.М., *д-р техн. наук, проф., ИПМ РАН, Москва, Россия*

ОБОЗОВ В.И., *д-р техн. наук, проф., ЦНИИСК, Москва, Россия*

БУЙ СУАН НАМ, *доцент, Ханойский университет горного дела и геологии, Ханой, Вьетнам*

САНЖАРОВСКИЙ Р.С., *д-р техн. наук, проф., ЕНУ им. Гумилева, Астана, Казахстан*

АГАПОВ В.П., *д-р техн. наук, проф., МГСУ, Москва, Россия*

#### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АНДРЕЕВ В.И., *акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГСУ, Москва, Россия*

БАЖЕНОВ В.А., *акад., Национальная академия педагогических наук, д-р техн. наук, проф., КНУСА, Киев, Украина*

ГОЛИК В.И., *д. член РАЕН, д-р техн. наук, проф., Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет), Владикавказ, Россия*

ЗАКСЕНХОФЕР РАЙХАНД Ф., *профессор, Горный университет в Леобене, Австрия*

ИВАНОВ С.П., *д-р техн. наук, проф., ПГТУ (ВолгаТех), Йошкар-Ола, Россия*

КАРПЕНКО Н.И., *акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия*

КОЛЧУНОВ В.И., *акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЮЗГУ, Курск, Россия*

МАНДРОНЕ ДЖУЗЕППЕ, *доцент, Университет Турина, Италия*

КРАСИЧ СОНЯ, *кандидат технических наук, Нишский университет, Ниш, Сербия*

МАГУЛЕ ФРЕДЕРИК, *профессор, Высшая инженерная школа «Централь Стопелек», Университет Париж-Сабли, Франция*

ЛЯХОВИЧ Л.С., *акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ТГАСУ, Томск, Россия*

ТРАВУШ В.И., *акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия*

ЯКУПОВ Н.М., *чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия*

Корректор Ю.А. Занкина

Дизайн обложки Ю.Н. Ефремовой

Компьютерная верстка Ю.А. Занкиной

#### Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов  
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6  
Тел.: +7 (495) 955-08-58; факс: +7 (495) 955-08-58  
E-mail: [stmj@rudn.university](mailto:stmj@rudn.university); [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Подписано в печать 07.06.2018. Выход в свет 14.06.2018. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman».

Усл. печ. л. 9,53. Тираж 250 экз. Заказ № 843. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)  
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН: Россия, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

© Российский университет дружбы народов, 2018  
© Харун М., фото на обложке (мост «Харбор-Бридж», Сидней), 2018

ISSN 1815-5235 (print), 2587-8700 (online).

Published 6 times a year.

Website: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access).

Languages: Russian, English, French.

Indexed by RSCI (elibrary.ru), Cyberleninka, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory.

The Journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal “*Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*” shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the Journal.

The Journal website operates on the Portal of RUDN University scientific journals: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>. The website contains full information about the Journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the Journal since 2008 (Open Access).

#### EDITOR-IN-CHIEF

V.V. GALISHNIKOVA, *DSc, RUDN University, Moscow, Russia*

#### ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

V.N. IVANOV, *DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia*

#### MANAGING EDITOR

I.A. MAMIEVA, *RUDN University, Moscow, Russia*

#### EDITORIAL STAFF:

V.V. VANIN, *DSc, Professor, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kiev, Ukraine*

S.E. LISICHKIN, *DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia*

E.M. ZVERVAEV, *DSc, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia*

V.I. OBOZOV, *DSc, Professor, Central Research Institute of Building Structures (TzNIISK im. V.V. Kucherenko), Moscow, Russia*

XUAN NAM BUI, *PhD, Assoc. Professor, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi, Vietnam*

R.S. SANJAROVSKY, *DSc, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

V.P. AGAPOV, *DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

#### EDITORIAL BOARD:

V.I. ANDREEV, *Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

V.A. BAZHENOV, *Member of the National Academy of Educational Science of Ukraine, DSc, Professor, Kiev National University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine*

V.I. GOLIK, *Member of the Russian Academy of Sciences, DSc, Professor, North-Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University), Vladikavkaz, Russia*

REINHARD F. SACHSENHOFER, *PhD, Professor, Montanuniversität Leoben, Austria*

S.P. IVANOV, *DSc, Professor, Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia*

N.I. KARPENKO, *Member of the RAACS, DSc, Professor, NIISF RAACS, Moscow, Russia*

V.I. KOLCHUNOV, *Member of the RAACS, DSc, Professor, South-West State University, Kursk, Russia*

GIUSEPPE MANDRONE, *PhD, Ass. Prof. in Engineering Geology, University of Torino, Italy*

SONJA KRASIC, *PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia*

FREDÉRIC MAGOULÈS, *DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France*

L.S. LYAKHOVICH, *Member of the RAACS, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk, Russia*

V.I. TRAVUSH, *Member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia*

N.M. YAKUPOV, *Corresponding Member of Russian Engineering Academy, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia*

Copy Editor Yu.A. Zaikina

Graphic Designer Yu.N. Efremova

Layout Designer Yu.A. Zaikina

#### Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation  
Tel.: +7 (495) 955-08-58; fax: +7 (495) 955-08-58  
E-mail: [stmj@rudn.university](mailto:stmj@rudn.university); [i\\_mamieva@mail.ru](mailto:i_mamieva@mail.ru)

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University:  
3 Ordzhonikidze St., Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 2018  
© Kharun M., photo on the cover of the Journal (Sydney Harbour Bridge), 2018

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2018 Том 14 № 3

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал  
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-19706 от 13 апреля 2005 г.  
выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства  
в сфере массовых коммуникаций и охране наследия  
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

## СОДЕРЖАНИЕ

### **РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

- Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А.* Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухслойной балки ..... 180
- Кузнецов В.С., Шапошникова Ю.А.* Определение распалубочной прочности монолитных плит и балок ..... 187
- Galishnikova V.V., Gebre T.H., Al-Sabri S.A.M., Saffia-Doe O.* Second order structural theory for the stability analysis of columns (Теория второго порядка в расчетах устойчивости колонн) ..... 192

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ**

- Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Фролов К.Е.* Экспериментальные исследования железобетонных конструкций гидротехнических сооружений с блочными швами, усиленных системой внешнего армирования ..... 198
- Алексейцев А.В., Курченко Н.С.* Обзор методов и результатов экспериментальных исследований стальных и сталебетонных конструкций при особых воздействиях ..... 205
- Ogorodov L.I., Nickolaeva I.P., Yakovleva E.L., Fominykh O.V.* Creep of polytetrafluoroethylene under various loading conditions (Ползучесть политетрафторэтилена при различных условиях нагружения) ..... 216

### **РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК**

- Мустахимов В.Р., Якунов С.Н.* Исследование напряженно-деформированного состояния купольно-конических конструкций Казанского государственного цирка ..... 226

### **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ**

- Маркович А.С., Абу Махади М.И., Милосердова Д.А., Акифьева К.С., Асад М.* Проблема численного анализа жесткости изгибаемых железобетонных элементов ..... 233

### **ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК**

- Иванов В.Н.* Эпи-гипоциклоиды и эпи-гипоциклоидальные каналовые поверхности ..... 242

### **ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ**

- Гасанов Ш.Г.* Моделирование трещинообразования в волокнистом композите при изгибе ..... 248

# STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2018 VOLUME 14 No. 3

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

## CONTENTS

### **ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES**

- Andreev V.I., Tsybin N.Yu., Turusov R.A.* Analysis of the edge effect of shear stresses in the shift of a two-layer beam ..... 180
- Kuznetsov V.S., Shaposhnikova Yu.A.* Determination of the stripping strength of monolithic slabs and beams ..... 187
- Galishnikova V.V., Gebre T.H., Al-Sabri S.A.M., Saffia-Doe O.* Second order structural theory for the stability analysis of columns ..... 192

### **EXPERIMENTAL RESEARCHES**

- Rubin O.D., Lisichkin S.E., Frolov K.E.* Experimental investigations of reinforced concrete structures of hydraulic structures with block seams, enhanced by the external reinforcement system ..... 198
- Alekseytsev A.V., Kurchenko N.S.* Review of methods and results of experimental investigations of steel and steel concrete structures under special impact ..... 205
- Ogorodov L.I., Nickolaeva I.P., Yakovleva E.L., Fominykh O.V.* Creep of polytetrafluoroethylene under various loading conditions ..... 216

### **ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS**

- Mustakimov V.R., Yakupov S.N.* Investigation of the stress-strained state of dome-conical structures of the Kazan state circus ..... 226

### **NUMERICAL METHODS OF STRUCTURES' ANALYSIS**

- Markovich A.S., Abu Mahadi M.I., Miloserdova D.A., Akifeva K.S., Asad M.* Problem of numerical analysis of deformation of binded reinforced concrete elements ..... 233

### **GEOMETRICAL INVESTIGATIONS OF MIDDLE SURFACES OF THIN SHELLS**

- Ivanov V.N.* Epi-hypocycloids and epi-hypocycloidal canal surfaces ..... 242

### **THEORY OF ELASTICITY**

- Hasanov Sh.H.* Modeling of cracks nucleation in fiber composite under bending ..... 248

## Расчет и проектирование строительных конструкций

УДК 531.2

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186

### АНАЛИЗ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СДВИГЕ ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ

В.И. АНДРЕЕВ, Н.Ю. ЦЫБИН, Р.А. ТУРУСОВ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет  
Ярославское шоссе, д. 26, Москва, Россия, 129337

(поступила в редакцию: 6 марта 2018 г.; принята к публикации: 5 мая 2018 г.)

В статье приводится система разрешающих уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние многослойной балки и позволяющая решать широкий ряд задач, таких как сдвиг, изгиб, нормальный отрыв для любого числа слоев. Для каждого из слоев вводятся гипотезы, аналогичные гипотезам Кирхгофа – Лява. В предложенной модели взаимодействие слоев осуществляется с помощью контактного слоя. Контактный слой представляет собой анизотропную среду, которую можно рассматривать как «щетку» упругих коротких стержней. Для простоты предполагается, что стержни ориентированы нормально к поверхности контакта. Использование контактного слоя позволяет избежать таких проблем, как бесконечные касательные напряжения на границе раздела слоев вблизи торцов балки, а также решать задачи определения концентрации касательных напряжений, возникающих на границах между слоями и в угловых точках, и их изменения, например в процессе ползучести. Главной особенностью предлагаемой модели является строгое удовлетворение граничных условий. Ввиду сложности разрешающей системы уравнений в качестве примера рассматривается задача о сдвиге слоев двухслойной балки. Получено аналитическое решение, позволяющее качественно анализировать влияние механических и геометрических характеристик на напряженно-деформированное состояние расчетной модели, вычислять истинную адгезионную прочность, а также определять физические характеристики контактного слоя на основе экспериментальных данных. Произведен численный пример расчета балки при двух вариантах загрузки модели, на основе которого установлена связь между истинной и средней адгезионной прочностью в зависимости от различных параметров.

**Ключевые слова:** многослойные балки, контактный слой, краевой эффект, касательные напряжения

### ANALYSIS OF THE EDGE EFFECT OF SHEAR STRESSES IN THE SHIFT OF A TWO-LAYER BEAM

V.I. ANDREEV, N.YU. TSYBIN, R.A. TURUSOV

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)  
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

(received: March 06, 2018; accepted: May 05, 2018)

The paper presents a system of resolving equations describing the stress-strain state of multilayer beams and allowing solving a wide range of problems, such as shear, bending, and normal separation for any number of layers. For each of the layers, hypotheses similar to the Kirchhoff – Love hypotheses are introduced. In the proposed model, the layers interact with a contact layer. The contact layer is an anisotropic medium, which can be considered as a “brush” of elastic short rods. For simplicity, it is assumed that the rods are oriented normally to the contact surface. The use of a contact layer allows such problems as infinite tangential stresses at the interface between the layers near the end of the beam and also to solve the problem of determining the concentration of the shearing stresses occurring at the boundaries between the layers and in the corner points, their variation, for example, in the creep process. The main feature of the proposed model is strict satisfaction of the boundary conditions. In view of the complexity of the resolving system of equations, we consider, as an example, the problem of shearing the layers of a double-layer beam. An analytical solution is obtained that allows qualitative analysis of the influence of mechanical and geometric characteristics on the stress-strain state of the design model, calculate the true adhesive strength, and determine the physical characteristics of the contact layer on the basis of experimental data. A numerical example is given for calculating a beam in two variants of model loading, on the basis of which a relationship was established between the true and average adhesive strength, depending on various parameters.

**Keywords:** multilayer beams, contact layer, edge effect, stresses

### 1. Вывод разрешающих уравнений

Модель многослойной балки, состоящей из набора внешних и контактных слоев приведена на рис. 1.

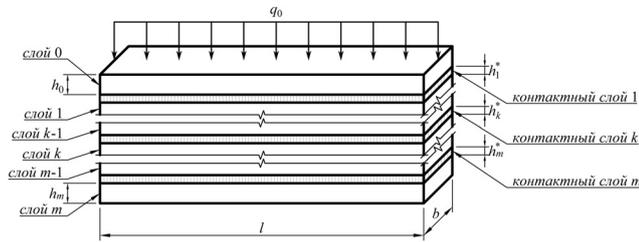


Рис. 1. Многослойная балка с контактными слоями  
[Fig. 1. Multilayer beam with contact layers]

В работах [1] и [7] была получена система разрешающих уравнений для многослойной балки. Выпишем часть данной системы для внешних слоев.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N_k}{dx^2} &= \frac{dP_{x,k}^t}{dx} - \frac{dP_{x,k}^b}{dx}; \\ -D_k \frac{d^4 v_k}{dx^4} + \frac{h_k}{2} \left( \frac{dP_{x,k}^t}{dx} + \frac{dP_{x,k}^b}{dx} \right) &= P_{y,k}^t - P_{y,k}^b. \end{aligned} \right\} (1)$$

Уравнения описывают напряженно-деформированное состояние  $k$ -того внешнего слоя балки. Предполагается, что внешние слои подчиняются классическим гипотезам теории пластин.

В уравнения входят следующие величины:  $k$  – номер внешнего слоя;  $h_k$  – толщина слоя;  $D_k$  – интегральная изгибная жесткость;  $N_k$  – продольная сила;  $v_k$  – прогиб слоя;  $P_{y,k}^t, P_{y,k}^b$  – нормальные нагрузки;  $P_{x,k}^t, P_{x,k}^b$  – касательные нагрузки;  $t, b$  – индексы, обозначающие верхнюю и нижнюю поверхность слоя соответственно.

В общем случае силы, действующие на внешний слой представляют собой сумму нагрузок, приложенных к слою, и усилий, возникающих в контактных слоях.

$$\left. \begin{aligned} P_{y,k}^t &= q_k^t + \sigma_k^*; P_{y,k}^b &= q_k^b + \sigma_{k+1}^*; \\ P_{x,k}^t &= s_k^t + \tau_k^*; P_{x,k}^b &= s_k^b + \tau_{k+1}^*. \end{aligned} \right\} (2)$$

В выражениях  $q_k^t; q_k^b; s_k^t; s_k^b$  – внешние нагрузки,  $\sigma_k^*; \sigma_{k+1}^*; \tau_k^*; \tau_{k+1}^*$  – нормальные и касательные

напряжения в примыкающих контактных слоях. Здесь и далее все величины, относящиеся к контактному слою, будем пометать символом  $*$ .

В работе [1] используется одномерная модель контактного слоя. Подобная модель не позволяет полностью удовлетворить все граничные условия. В данной работе мы будем использовать двухмерную модель, представленную в работе [8]. Напряжения (нормальные и касательные) в контактном слое при этом определяются из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_k^* &= \frac{(h_k^*)^2}{12 E_k^*} \frac{d^2 \tau_k^*}{dx^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{dv_{t,k}^*}{dx} + \frac{dv_{b,k}^*}{dx} \right) - \frac{1}{h_k^*} (u_{t,k}^* - u_{b,k}^*); \\ \sigma_k^* &= -y_k^* \frac{d\tau_k^*}{dx} - \frac{E_k^*}{h_k^*} (v_{t,k}^* - v_{b,k}^*). \end{aligned} \right\} (3)$$

В уравнения (3) входят:  $h_k^*$  – толщина контактного слоя;  $G_k^*$  – модуль сдвига;  $E_k^*$  – модуль Юнга;  $v_{t,k}^*, v_{b,k}^*$  – нормальные перемещения на верхней и нижней гранях контактного слоя (представляют собой нормальные перемещения примыкающих внешних слоев);  $u_{t,k}^*, u_{b,k}^*$  – осевые перемещения (выражения записаны далее в тексте);  $y_k^*$  – переменная, отсчитываемая от средней линии контактного слоя.

В качестве примера рассмотрим балку, представленную двумя «внешними» слоями и одним контактным слоем. Общий вид данной балки приведен на рис. 2.

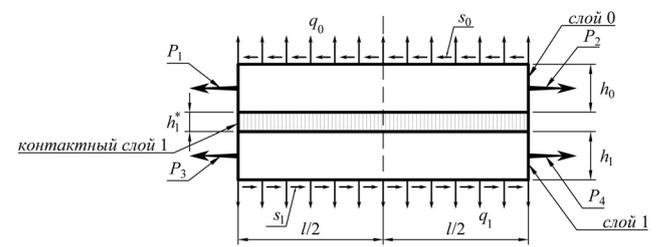


Рис. 2. Двухслойная балка  
[Fig. 2. Two-layer beam]

Подставим  $k = 0, 1$  в уравнения (1) и  $k = 1$  в уравнения (3). В результате получим разрешающую систему для двухслойной балки.

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d^2 N_0}{dx^2} = \frac{dP_{x,0}^t}{dx} - \frac{dP_{x,0}^b}{dx}; \\
 & -D_0 \frac{d^4 v_0}{dx^4} + \frac{h_0}{2} \left( \frac{dP_{x,0}^t}{dx} + \frac{dP_{x,0}^b}{dx} \right) = P_{y,0}^t - P_{y,0}^b; \\
 & \frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{dP_{x,1}^t}{dx} - \frac{dP_{x,1}^b}{dx}; \\
 & -D_1 \frac{d^4 v_1}{dx^4} + \frac{h_1}{2} \left( \frac{dP_{x,1}^t}{dx} + \frac{dP_{x,1}^b}{dx} \right) = P_{y,1}^t - P_{y,1}^b; \\
 & \frac{\tau^*}{G^*} = \frac{(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^2 \tau^*}{dx^2} + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0}{dx} + \frac{dv_1}{dx} \right) - \frac{1}{h^*} (u_t^* - u_b^*); \\
 & \sigma^* = -y^* \frac{d\tau^*}{dx} - \frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1).
 \end{aligned} \right\} (4)$$

Входящие в данную систему величины записаны ниже:

$$\left. \begin{aligned}
 & P_{y,0}^t = q_0; P_{y,0}^b = \sigma^* (-h^*/2); P_{x,0}^t = s_0; P_{x,0}^b = \tau^*; \\
 & P_{y,1}^t = \sigma^* (h^*/2); P_{y,1}^b = q_1; P_{x,1}^t = \tau^*; P_{x,1}^b = s_1; \\
 & u_t^* = u_{0,0} - \frac{h_0}{2} \frac{dv_0}{dx}; u_b^* = u_{0,1} + \frac{h_1}{2} \frac{dv_1}{dx}.
 \end{aligned} \right\} (5)$$

Здесь  $u_{0,k}$  – перемещения внешнего слоя на уровне нейтральной оси. Индекс 1 для величин, относящихся к контактному слою, опущен.

Подставляя (5) в (4), получим:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d^2 N_0}{dx^2} = -\frac{d\tau^*}{dx}; \\
 & -D_0 \frac{d^4 v_0}{dx^4} + \frac{h_0}{2} \frac{d\tau^*}{dx} = q_0 - \sigma^* (-h^*/2); \\
 & \frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{d\tau^*}{dx}; \\
 & -D_1 \frac{d^4 v_1}{dx^4} + \frac{h_1}{2} \frac{d\tau^*}{dx} = \sigma^* (h^*/2) - q_1; \\
 & \frac{\tau^*}{G^*} = \frac{(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^2 \tau^*}{dx^2} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \frac{dv_0}{dx} \left( 1 + \frac{h_0}{h^*} \right) + \frac{dv_1}{dx} \left( 1 + \frac{h_1}{h^*} \right) \right] - \frac{1}{h^*} (u_{0,0} - u_{0,1}); \\
 & \sigma^* = -y^* \frac{d\tau^*}{dx} - \frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1).
 \end{aligned} \right\} (6)$$

В работе [1] получены следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{du_{t,1}^*}{dx} = \varepsilon_{0,0} - \frac{h_0}{2} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = \frac{N_0 + N_{f,0}}{B_0} - \frac{h_0}{2} \frac{d^2 v_0}{dx^2}; \\
 & \frac{du_{b,1}^*}{dx} = \varepsilon_{0,1} + \frac{h_1}{2} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{N_1 + N_{f,1}}{B_1} + \frac{h_1}{2} \frac{d^2 v_1}{dx^2}; \\
 & B_k = E_k h_k; D_k = \frac{E_k h_k^3}{12}; N_{f,k} = E_k \int_{-h_k/2}^{h_k/2} \varepsilon_{f,k} dy_k.
 \end{aligned} \right\} (7)$$

Величины, приведенные в уравнениях (5) и (7):  $B_k$  – интегральная жесткость при растяжении;  $E_k$  – модуль Юнга внешнего слоя;  $N_{fk}$  – осевые силы, связанные с вынужденными деформациями  $\varepsilon_{f,k}$  (температурными, усадочными и т.д.).

В дальнейшем будем считать, что вынужденные деформации вызваны температурой. В этом случае

$$\varepsilon_{f,k} = \alpha_k \Delta T_k; N_{f,k} = E_k h_k \alpha_k \Delta T_k. \quad (8)$$

Из рис. 2 следует связь между продольными усилиями во внешних слоях и приложенными продольными нагрузками.

$$N_0 + N_1 = P_1 + P_3; N_0 + N_1 = P_2 + P_4. \quad (9)$$

Складывая между собой выражения (9), найдем

$$\left. \begin{aligned}
 & N_1 = F_P - N_0; \\
 & F_P = \frac{1}{2} (P_1 + P_2 + P_3 + P_4).
 \end{aligned} \right\} (10)$$

В любом случае для обеспечения статического равновесия должно выполняться соотношение  $P_1 + P_3 = P_2 + P_4$ .

Продифференцировав пятое уравнение из (6), получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tau^*}{dx} &= \frac{G^* (h^*)^2}{12E^*} \frac{d^3 \tau^*}{dx^3} + \frac{G^*}{2} \left( \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right) - \\
 & - \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{du_t^*}{dx} - \frac{du_b^*}{dx} \right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Используя первое и второе соотношения (7), преобразуем (11):

$$\begin{aligned}
 & \frac{G^* (h^*)^2}{12E^*} \frac{d^3 \tau^*}{dx^3} - \frac{d\tau^*}{dx} + \frac{G^*}{2} \left[ \frac{d^2 v_0}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_0}{h^*} \right) + \frac{d^2 v_1}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_1}{h^*} \right) \right] - \\
 & - \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{N_0 + N_{f,0}}{B_0} - \frac{N_1 + N_{f,1}}{B_1} \right) = 0. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Используем первое уравнение (6), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{G^*(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^4 N_0}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} + N_0 \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} \right) + \\ & + \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{N_{f,0}}{B_0} - \frac{F_P + N_{f,1}}{B_1} \right) - \\ & - \frac{G^*}{2} \left[ \frac{d^2 v_0}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_0}{h^*} \right) + \frac{d^2 v_1}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_1}{h^*} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразовывая шестое уравнение из (6) и используя первое, находим

$$\sigma^* = y^* \frac{d^2 N_0}{dx^2} - \frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1). \quad (14)$$

Окончательно разрешающая система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} & -D_0 \frac{d^4 v_0}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} \left( \frac{h_0}{2} - \frac{h^*}{2} \right) = \\ & = q_0 + \frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1); \\ & -D_1 \frac{d^4 v_1}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h^*}{2} \right) = \\ & = -\frac{E^*}{h^*} (v_0 - v_1) - q_1; \\ & \frac{G^*(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^4 N_0}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} + N_0 \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} \right) + \\ & + \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{N_{f,0}}{B_0} - \frac{F_P + N_{f,1}}{B_1} \right) - \\ & - \frac{G^*}{2} \left[ \frac{d^2 v_0}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_0}{h^*} \right) + \frac{d^2 v_1}{dx^2} \left( 1 + \frac{h_1}{h^*} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

С использованием системы уравнений (15) также решена задача о нормальном отрыве слоистого композита [3], [6].

## 2. Соединение внахлестку

При рассмотрении подобной задачи можно пренебречь вертикальными перемещениями слоев. Данное пренебрежение оправданно ввиду малой гибкости используемых образцов.

В результате из разрешающей системы (15) остается только одно уравнение.

$$\begin{aligned} & \frac{G^*(h^*)^2}{12E^*} \frac{d^4 N_0}{dx^4} - \frac{d^2 N_0}{dx^2} + N_0 \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} \right) + \\ & + \frac{G^*}{h^*} \left( \frac{N_{f,0}}{B_0} - \frac{F_P + N_{f,1}}{B_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Запишем (16) в более компактном виде:

$$\frac{d^4 N_0}{dx^4} - 2\omega \frac{d^2 N_0}{dx^2} + \lambda^2 N_0 + \eta = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \omega &= \frac{6E^*}{G^*(h^*)^2}; \quad \lambda = \left[ \frac{12E^*}{(h^*)^3} \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1} \right) \right]^{1/2}; \\ \eta &= \frac{12E^*}{(h^*)^3} \left( \frac{N_{f,0}}{B_0} - \frac{F_P + N_{f,1}}{B_1} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Общее решение уравнения (17) представляется в виде

$$\begin{aligned} N_0 &= -\frac{\eta}{\lambda^2} + C_1 \exp(\psi_1 x) + C_2 \exp(-\psi_1 x) + \\ & + C_3 \exp(\psi_2 x) + C_4 \exp(-\psi_2 x), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $C_i$  – неизвестные интегрирования, определяемые из граничных условий;  $\psi_i$  – корни характеристического уравнения  $\psi^4 - 2\omega\psi^2 + \lambda^2 = 0$ . Ниже приведены данные корни:

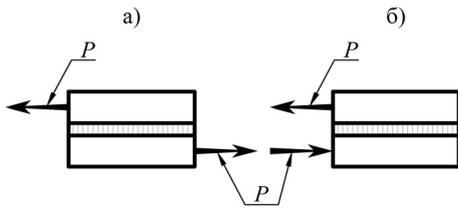
$$\psi_1 = \sqrt{\omega + (\omega^2 - \lambda^2)^{1/2}}; \quad \psi_2 = \sqrt{\omega - (\omega^2 - \lambda^2)^{1/2}}. \quad (20)$$

Укажем граничные условия для определения неизвестных констант интегрирования

$$\left. \begin{aligned} N_0 \left( -\frac{l}{2} \right) &= P_1; \quad \frac{d}{dx} \left[ N_0 \left( -\frac{l}{2} \right) \right] = -\tau^* \left( -\frac{l}{2} \right) = 0; \\ N_0 \left( \frac{l}{2} \right) &= P_2; \quad \frac{d}{dx} \left[ N_0 \left( \frac{l}{2} \right) \right] = -\tau^* \left( \frac{l}{2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Общее решение, полученное из данных граничных условий, весьма громоздко, поэтому здесь не приведено.

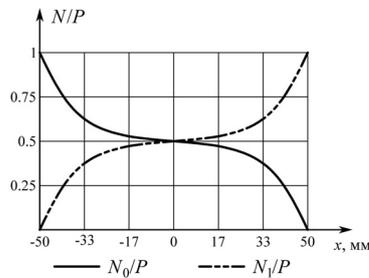
Далее будем рассматривать два варианта загрузки в соответствии с рис. 3. Дополнительные варианты нагружения модели представлены в [5].



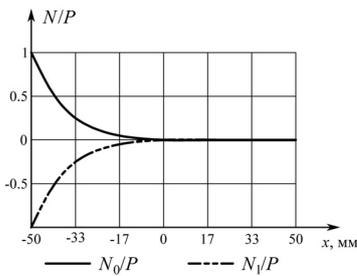
**Рис. 3. Вариант приложения нагрузки 1 (а), вариант приложения нагрузки 2 (б)**  
 [Fig. 3. Load application variant 1 (a), load application variant 2 (b)]

Для анализа влияния геометрических и физико-механических характеристик на напряженно-деформированное состояние модели будем использовать эталонные значения:  $h_0 = 10$  мм;  $h_1 = 10$  мм;  $h^* = 1$  мм;  $l = 100$  мм;  $E_0 = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $E^* = 10^3$  МПа;  $P = 1$  кН/мм.

Результаты вычисления продольных сил и касательных напряжений для эталонных параметров модели приведены ниже.



**Рис. 4. Продольные усилия во внешних слоях (вариант нагружения 1)**  
 [Fig. 4. Longitudinal forces in the outer layers (loading option 1)]

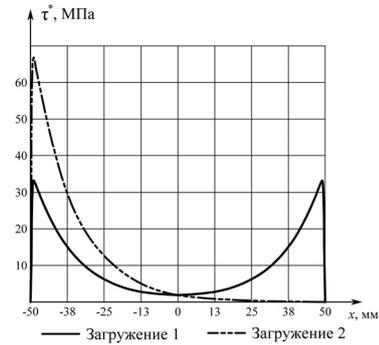


**Рис. 5. Продольные усилия во внешних слоях (вариант нагружения 2)**  
 [Fig. 5. Longitudinal forces in the outer layers (loading option 2)]

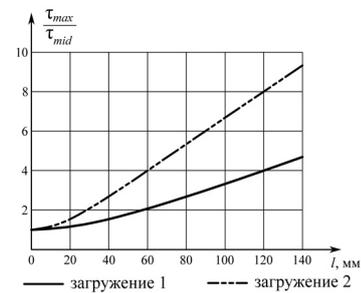
На рис. 6 можно увидеть краевой эффект, возникающий в контактном слое в узкой зоне.

При испытании образцов на сдвиг адгезионная прочность вычисляется как разрушающая нагрузка, деленная на площадь склейки. Величину, полученную таким образом, правильнее называть средней прочностью ( $\tau_{mid}$ ). Истинной адгезионной прочностью является максимальная величина касательных напряжений  $\tau_{max}$  в момент разрушения [2].

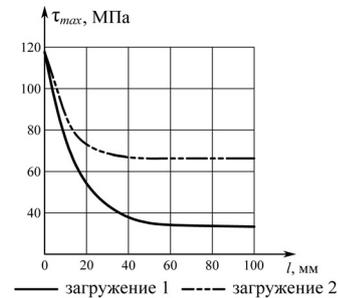
На рис. 7 и далее представлена серия графиков, отражающих соотношение между истинной и средней адгезионной прочностью.



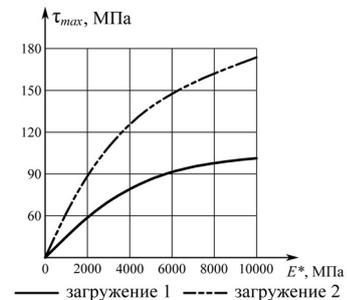
**Рис. 6. Касательные напряжения в контактном слое**  
 [Fig. 6. Tangential stresses in the contact layer]



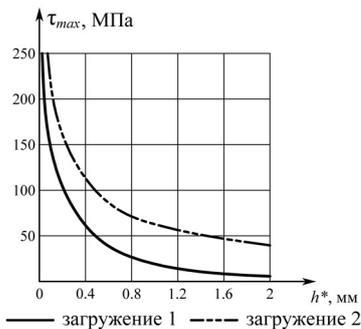
**Рис. 7. Соотношение между истинной и средней адгезионной прочностью в зависимости от длины склейки**  
 [Fig. 7. The ratio between the true and average adhesive strength, depending on the length of the gluing]



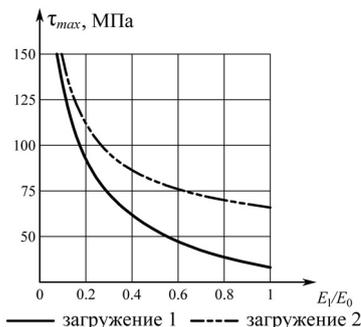
**Рис. 8. Графики зависимостей истинной и адгезионной прочности от длины склейки**  
 [Fig. 8. Graphs of dependencies of true and adhesive strength on the length of the gluing]



**Рис. 9. Графики зависимостей истинной и адгезионной прочности от модуля Юнга контактного слоя**  
 [Fig. 9. Graphs of dependencies of the true and adhesive strength on the Young's modulus of the contact layer]



**Рис. 10. Графики зависимостей истинной и адгезионной прочности от толщины контактного слоя**  
**[Fig. 10. Graphs of dependencies of the true and adhesive strength on the thickness of the contact layer]**



**Рис. 11. Графики зависимостей истинной и адгезионной прочности от соотношения модулей Юнга внешних слоев**  
**[Fig. 11. Graphs of the dependences of the true and adhesive strength on the ratio of Young's modules of the "outer" layers]**

Как видим, с увеличением длины склейки отношение истинной адгезионной прочности к средней увеличивается. Начиная с некоторого значения, данные зависимости имеют линейный характер. Это связано с тем, что увеличение длины склейки перестает влиять на максимальное значение касательных напряжений. При малых размерах истинная прочность практически совпадает со средней прочностью.

### Заключение

В статье получена система разрешающих уравнений для решения многочисленных задач теории многослойных балок. Полученные уравнения прогнозируют возникновение краевого эффекта. Получены результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии соединения внахлестку. Проанализировано влияние механических характеристик на истинную адгезионную прочность.

Очевидно, что объема статьи недостаточно для подробного анализа полученных результатов. Однако можно сказать, что предложенная модель адгезионного взаимодействия с использо-

ванием контактного слоя отражает влияние многих факторов на прочность и позволяет качественно и количественно анализировать данное влияние.

© Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А., 2018

### Список литературы

1. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Определение напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с применением метода контактного слоя // Вестник МГСУ. 2016. № 4. С. 17–26.
2. Турусов Р.А., Маневич Л.И. Метод контактного слоя в адгезионной механике // Клеи. Герметики. Технологии. 2009. № 6. С. 2–11.
3. Tsybin N.Yu., Turusov R.A., Andreev V.I. Comparison of creep in free polymer rod and creep in polymer layer of the layered composite // Procedia Engineering. 2016. № 153. С. 51–58.
4. Турусов Р.А. Адгезия и адгезионная механика // Научно-просветительский журнал «НБИКС-наука. Технологии». 2017. № 2. С. 207–222.
5. Турусов Р.А. Адгезионная механика: монография. М., 2016. 232 с. (Серия «Библиотека научных разработок и проектов НИУ МГСУ»).
6. Андреев В.И., Турусов Р.А., Цыбин Н.Ю. Напряженное состояние слоистого композита при нормальном отрыве. Ч. 1 // Научное обозрение. 2015. № 24. С. 98–106.
7. Турусов Р.А., Андреев В.И., Цыбин Н.Ю. Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 34–42.
8. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. The contact layer method in calculating of the shear compounds // MATEC Web of Conferences. 26. RSP 2017 – 26<sup>th</sup> R-S-P Seminar 2017 Theoretical Foundation of Civil Engineering. 2017. Vol. 17. URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711700008>.

### References

1. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. (2016). Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhslonnoy balki s primeneniem metoda kontaktnogo sloya [Determination of the stress-strain state of a three-layer beam using the contact layer method]. *Vestnik MGSU*, No 4, 17–26. (In Russ.)
2. Turusov R.A., Manevich L.I. (2009). Metod kontaktnogo sloya v adgezionnoy mekhanike [The contact layer method in adhesion mechanics]. *Klei. Germetiki. Tekhnologii [Adhesives. Sealants. Technologies]*, No 6, 2–11. (In Russ.)
3. Tsybin N.Yu., Turusov R.A., Andreev V.I. (2016). Comparison of creep in a free polymer rod and creep in a polymer layer of the layered composite. *Procedia Engineering*, No 153, 51–58.
4. Turusov R.A. (2017). Adgeziya i adgezionnaya mekhanika [Adhesion and adhesion mechanics]. *Scientific*

and educational magazine “NBICS-science. Technology”, No 2, 207–222. (In Russ.)

5. Turusov R.A. (2016). *Adgezionnaya mekhanika: monografiya* [Adhesion mechanics: monograph]. Moscow, 232. (Series “Library of scientific developments and projects”). (In Russ.)

6. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. (2015). Napryazhennoe sostoyanie sloistogo kompozita pri normal'nom otryve. Ch. 1 [Stress state of a layered composite under normal separation. Part 1]. *Scientific Review*, No 24, 98–106. (In Russ.)

7. Turusov R.A., Andreev V.I., Tsybin N.Yu. (2017). General solution of bending of multilayer beams in Fourier series. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, No 4, 34–42. (In Russ.)

8. Andreev V.I., Turusov R.A., Tsybin N.Yu. (2017). The contact layer method in calculating of the shear compounds // MATEC Web of Conferences. 26. RSP 2017 – 26<sup>th</sup> R-S-P Seminar 2017 Theoretical Foundation of Civil Engineering, Vol. 17. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711700008>.

#### Об авторах

**Андреев Владимир Игоревич** – доктор технических наук, профессор, академик РААСН, заведующий кафедрой сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. Опубликовал более 350 научных статей, 4 монографии, 8 учебников и учебных пособий. *Область научных интересов:* строительная механика, механика деформируемого твердого тела, механика неоднородных тел, механика полимеров и композитов. *Контактная информация:* e-mail – asv@mgsu.ru.

**Цыбин Никита Юрьевич** – аспирант кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. Научный руководитель – доктор технических наук, профессор В.И. Андреев. Заканчивает работу над диссертацией «Расчет слоистых конструкций с использованием модели контактного слоя» по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела. Опубликовал 15 научных статей, соавтор учебника «Основы теории упругих тонких оболочек». *Область научных интересов:* механика деформируемого твердого тела, механика неоднородных тел, механика полимеров и композитов. *Контактная информация:* e-mail – science@nikitatsybin.ru.

**Турусов Роберт Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. Опубликовал более 200 научных статей, 4 монографии. *Область научных интересов:* механика деформируемого твердого тела, физика и механика композитов и полимеров. *Контактная информация:* e-mail – rob-turusov@yandex.ru.

#### About the authors

**Andreev Vladimir** – Full Member of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Strength of Materials Department, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). He published more than 350 scientific articles, 4 monographs, 8 textbooks and teaching aids. *Research interests:* structural mechanics, solid mechanics, mechanics of heterogeneous bodies, mechanics of polymers and composites. *Contact:* asv@mgsu.ru.

**Tsybin Nikita** – Graduate Student of the Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). He published 15 scientific articles. Theme of the dissertation “Calculation of layered structures with using a contact layer model”. *Research interests:* solid mechanics, mechanics of heterogeneous bodies, mechanics of polymers and composites. *Contact:* science@nikitatsybin.ru.

**Turusov Robert** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). He published near 200 scientific articles, 4 monographs. *Research interests:* solid mechanics, physics and mechanics of composites and polymers. *Contact:* rob-turusov@yandex.ru.

#### Для цитирования

Андреев В.И., Цыбин Н.Ю., Турусов Р.А. Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухслойной балки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 180–186. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186.

#### For citation

Andreev V.I., Tsybin N.Yu., Turusov R.A. (2018). Analysis of the edge effect of shear stresses in the shift of a two-layer beam. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14(3), 180–186. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186.

УДК 693.547.8:691.328:624.072.2.  
DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-187-191**ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПАЛУБОЧНОЙ ПРОЧНОСТИ МОНОЛИТНЫХ ПЛИТ И БАЛОК**

В.С. КУЗНЕЦОВ, Ю.А. ШАПОШНИКОВА

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет  
Ярославское шоссе, д. 26, Москва, Россия, 129337*(поступила в редакцию: 20 декабря 2017 г.; принята к публикации: 21 апреля 2018 г.)*

Проверка прочности бетона монолитных конструкций в стадии возведения является необходимым условием для дальнейшей нормальной эксплуатации зданий и сооружений. Целью работы является уточнение сроков распалубливания плит и балок с учетом реального набора прочности. В статье рассматривается инженерный способ определения распалубочной прочности бетона монолитных изгибаемых элементов без предварительного напряжения арматуры. Способ определения распалубочной прочности основан на равенстве внешних и внутренних усилий в нормальном расчетном сечении в стадии разрушения при исчерпании прочности бетона. Данный способ применим для линейных элементов и конструкций. По результатам работы получена формула для назначения минимальной прочности бетона при распалубливании и коэффициент  $k$ , который можно использовать для простого и точного определения распалубочной прочности для плит и балок. Для определения распалубочной прочности при применении рабочей арматуры А400 и А500С приведены графики зависимости коэффициента  $k$  от толщины плиты при действии единичного момента. Предложенный способ определения распалубочной прочности позволяет назначать величину распалубочной прочности для плит и балок и уточнять сроки распалубливания конструкций с учетом реального набора прочности.

**Ключевые слова:** монолитные железобетонные конструкции, прочность бетона, распалубочная прочность, стадия возведения

**DETERMINATION OF THE STRIPPING STRENGTH  
OF MONOLITHIC SLABS AND BEAMS**

V.S. KUZNETSOV, Yu.A. SHAPOSHNIKOVA

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)  
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation*(received: December 20, 2017; accepted: April 21, 2018)*

Checking the strength of concrete monolithic structures in the stage of erection is a necessary condition for the possibility of further normal operation of buildings and structures. The purpose of the work is to specify the timing of the decoupling of slabs and beams taking into account the real strength set. In this article, an engineering method for determining the form-fitting strength of concrete of monolithic bending elements without a prestressing reinforcement is considered. The method for determining the form-fitting strength is based on the equality of external and internal forces in the normal design section in the stage of failure when the strength of concrete is depleted. This method is applicable to linear elements and constructions. Based on the results of the work, a formula has been obtained for assigning the minimum concrete strength at decompression and the coefficient  $k$ , which can be used to easily and accurately determine the stripping strength for slabs and beams. The graphs of the dependence of the coefficient  $k$  are given for determining the formwork strength when using working reinforcements А400 and А500С, on the thickness of the plate under the action of a single moment. The proposed method for determining the form-fitting strength makes it possible to designate the size of the form-fitting strength for slabs and beams and to specify the timing of the decoupling of structures, taking into account the actual strength set.

**Keywords:** monolithic reinforced concrete structures, strength of concrete, formwork strength, stage of erection

**Введение.** Особенностью проектирования монолитных железобетонных конструкций, возводимых на строительной площадке, является обязательная проверка прочности в стадии возведения [1–2]. Невыполнение требований прочности в промежуточном возрасте приводит к тяжелым последствиям, связанным не только с материальными потерями, но и с человеческими жертвами [3–5]. Поэтому проверка прочности бетона монолитных конструкций в стадии возведения является необходимым условием для дальнейшей нормальной эксплуатации зданий и сооружений [6–9].

**Цель работы.** Целью работы является уточнение сроков распалубливания линейных изгибаемых элементов (плит и балок) с учетом реального набора бетоном прочности.

**Материалы и методы.** При проверке прочности в стадии возведения должны учитываться следующие обстоятельства: пониженная прочность бетона, связанная со временем и условиями твердения, снижение прочности бетона при длительном действии нагрузки [10–13]. При этом прочность нормальных сечений определяется только сжатым бетоном, так как количество продольной арматуры назначается из условия прочности элемента в стадии эксплуатации (рис. 1) [14–16].

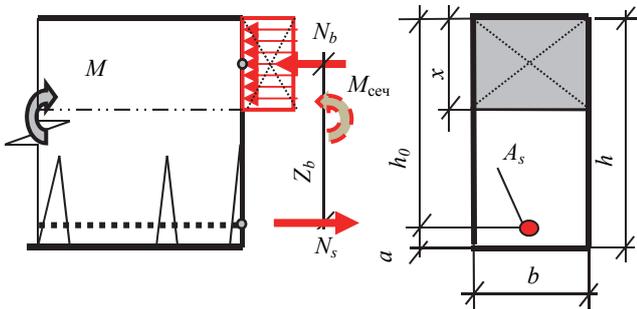


Рис. 1. Схема к расчету прочности сечений с одиночной арматурой  
[Fig. 1. Scheme for calculating the strength of sections with a single armature]

Рассматривается случай, когда сжимающие напряжения воспринимаются только бетоном, арматура в сжатой зоне не учитывается, т.е.  $A' = 0$ .

Уравнение прочности нормального сечения по бетону

$$M = R_b b x / (h_0 - 0,5x). \quad (1)$$

Учитывая, что  $x = \xi / h_0$ , выражение (1) после некоторых преобразований примет вид

$$M = R_b b h_0^2 \xi (1 - 0,5\xi). \quad (2)$$

Или, учитывая, что  $\xi(1 - 0,5\xi) = \alpha_m$ :

$$M = \alpha_m R_b b h_0^2. \quad (3)$$

Максимальное усилие, воспринимаемое бетоном, достигается при высоте сжатой зоны бетона при  $x = x_R$  или  $\xi = \xi_R$  и  $\alpha_m = \alpha_R$  и наступает при достижении в сжатом бетоне напряжений, равных установленной распалубочной прочности  $R_{b,рас}$ .

Граничное положение нейтральной оси определяется экспериментальным путем и принимается при использовании арматуры класса А400  $\xi_R = 0,531$  и  $\alpha_R = 0,390$ . При арматуре А500С  $\xi_R = 0,493$  и  $\alpha_R = 0,372$  [1].

Принимая в выражении (3)  $\alpha_m = 0,8\alpha_R$ , находим минимальное значение распалубочной прочности:

$$R_{b,расп} = M / (0,8\alpha_R b h_0^2). \quad (4)$$

**Результаты и обсуждение.** Для плит при расчетной ширине сечения  $b = 1$  м выражение (4) принимает следующий вид.

Для арматуры А400

$$R_{b,расп} = M / (\alpha_R b h_0^2) = M / (0,8 \cdot 0,390 \cdot 1,0 \cdot h_0^2) = M / (0,312 h_0^2). \quad (5)$$

Для арматуры А500С

$$R_{b,расп} = M / (0,8 \cdot 0,372 \cdot 1,0 \cdot h_0^2) = M / (0,298 h_0^2). \quad (6)$$

Данная формула может быть рекомендована для назначения минимальной прочности бетона при распалубливании плит.

Таким образом можно получить коэффициент  $k$ , равный  $0,312 h_0^2$  при использовании арматуры А400 и  $0,298 h_0^2$  для А500С, который позволяет просто определить распалубочную прочность в зависимости от толщины плиты. На рис. 2 представлены графики коэффициента  $k$  для определения распалубочной прочности от  $M = 1$  кНм/м.

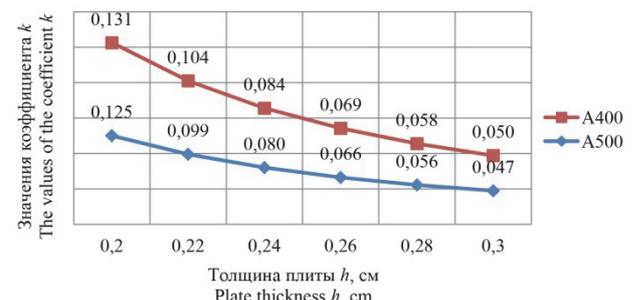


Рис. 2. Значения коэффициента  $k$  для определения распалубочной прочности плит от  $M = 1$  кНм/м  
[Fig. 2. The values of the coefficient  $k$  for determining the stripping strength of slabs from  $M = 1$  kNm/m]

Например, при толщине плиты 200 мм,  $h_0 \approx 160$  мм и расчетном моменте от собственного веса  $M = 55,0$  кНм/м по графику (рис. 2) минимальное значение промежуточной прочности составляет:

– при арматуре А500С:  $R_{b,расп} = 0,131 \cdot 55,0 = 7,21$  МПа, что при классе бетона В20 составляет  $7,21 \cdot 100/11,5 = 62,7\%$ . Таким образом, промежуточная прочность  $R_{b,расп}$  должна быть не менее  $0,63R_b$  класса бетона В20;

– при арматуре А400:  $R_{b,расп} = 0,125 \cdot 55,0 = 6,88$  МПа, что при бетоне В20 составляет  $6,88 \cdot 100/11,5 = 59,8\%$ . Промежуточная прочность  $R_{b,расп}$  должна быть не менее  $0,6R_b$  класса бетона В20.

Выполним проверку прочности нормальных сечений при вычисленной промежуточной прочности  $M = 55,0$  кНм/м,  $h_0 = 0,16$  м, арматуре А500С и распалубочной прочности  $R_{b,расп} = 7,21$  МПа.

$$\alpha_m = M/R_b b h_0^2 = 55,0/7,21 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 0,16^2 = 0,298 < \alpha_R = 0,372.$$

Так как  $\alpha_m = \xi(1 - 0,5\xi)$ , то значение относительной высоты сжатой зоны  $\xi$  находится из известного квадратного уравнения  $0,5\xi^2 - \xi + \alpha_m = 0$ , откуда  $\xi = 0,364$ .

При  $\alpha_m = 0,298$  абсолютная высота сжатой зоны

$$x = \xi h_0 = 0,364 \cdot 0,16 = 0,058 \text{ м.}$$

$$M_{сеч} = R_{b,расп} b x (h_0 - 0,5x) = 7,21 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 0,058 (0,16 - 0,5 \cdot 0,058) = 55 \text{ кНм.}$$

$$M = 55 = M_{сеч} = 55 \text{ кНм/м.}$$

Таким образом, прочность нормальных сечений плиты в стадии распалубливания по бетону при установленной передаточной прочности обеспечена.

Аналогично вычислялась распалубочная прочность  $R_{b,расп}$  при арматуре А500С для других плит. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Таблица 1  
[Table 1]

**Величины распалубочной прочности при различных толщинах плит и соотношениях моментов**  
[The values of the formwork for different thicknesses of the plates and moment ratios]

Толщина плиты $h$ , м [Plate thickness $h$ , m]	Коэффициент $k$ [Coefficient $k$ ]	Прочность $R_{b,расп}$ МПа [Formwork strength $R_{b,расп}$ MPa]	$R_{b,расп}/R_b$ , %	Внешний момент $M$ , кНм [External moment $M$ , kNm]	$M_{сеч}$ кНм [Section moment $M_{сеч}$ kNm]	$M_{сеч}/M$
0,2	0,131	7,210	62,69	55	55	1
0,22	0,104	6,214	54,04	60	60	1
0,24	0,084	5,453	47,42	65	65	1
0,26	0,069	4,853	42,20	70	70	1
0,28	0,058	4,369	37,99	75	75	1
0,30	0,050	3,971	34,53	80	80	1

Из таблицы видно, что принятые в соответствии с формулами (5) и (6) или графиком рис. 1 значения промежуточной прочности  $R_{b,расп}$  обеспечивают прочность нормальных сечений в расчетной ситуации, соответствующей снятию опалубки [9–11].

Таким образом, предложенный способ определения распалубочной прочности  $R_{b,расп}$  для плит позволяет не только назначить величину  $R_{b,расп}$ , но и уточнить сроки распалубливания конструкций.

Данный способ применим для линейных элементов и конструкций.

Для балок при отношении ширины сечения балки к ее высоте  $b = 0,4 h$  выражение (4) принимает следующий вид.

**Арматура А400**

$$R_{b,расп} = M/\alpha_R b h_0^2 = M/0,8 \cdot 0,390 \cdot 0,4 h_0 \cdot h_0^2 = M/0,125 h_0^3. \quad (7)$$

**Арматура А500С**

$$R_{b,расп} = M/0,8 \cdot 0,372 \cdot 0,4 h_0 \cdot h_0^2 = M/0,119 h_0^3. \quad (8)$$

Например, для монолитного балочного перекрытия из бетона класса В20, арматуры А500С высота балки  $h = 600$  мм,  $h_0 \approx 560$  мм, расчетный момент от собственного веса балки и плиты  $M = 72,0$  кНм. По формуле (8) прочность  $R_{b,расп} = 0,119 \cdot 72,0 = 8,6$  МПа, что при бетоне В20 составляет  $8,6 \cdot 100/11,5 = 74,5\%$ . Следовательно, промежуточная прочность  $R_{b,расп}$  должна быть не менее  $0,75R_b$  класса бетона В20.

Проверка прочности нормальных сечений при вычисленной распалубочной прочности  $R_{b,расп} = 8,6$  МПа показала, что  $\alpha_m = 0,0268 < \alpha_R = 0,372$ . Абсолютная высота сжатой зоны

$$x = \xi h_0 = 0,272 \cdot 0,56 = 0,015 \text{ м.}$$

Условие прочности по бетону

$$M_{сеч} = R_{b,расп} b x (h_0 - 0,5x) = 8,6 \cdot 10^3 \cdot 0,24 \cdot 0,015 (0,56 - 0,5 \cdot 0,015) = 17,3 \text{ кНм.}$$

$$M = 17,3 < M_{сеч} = 80,0 \text{ кНм.}$$

Прочность нормальных сечений балки в стадии распалубливания по бетону при установленной передаточной прочности обеспечена.

**Заключение.** Предложенный способ определения распалубочной прочности  $R_{b,расп}$  позволяет назначать величину  $R_{b,расп}$  для плит и балок и уточнять сроки распалубливания конструкций с учетом реального набора прочности.

© Кузнецов В.С., Шапошникова Ю.А., 2018

## Список литературы

1. ГОСТ 18105-2010 «Бетоны. Правила контроля и оценки прочности». М.: Стандартиформ, 2013. 20 с.
2. Кузьминых О.В. Необходимость ухода и наблюдения за бетоном в период твердения с 29-х и последующих суток // Материалы 67-й научной конференции «Наука ЮУРГУ», 14–17 апреля 2015 г., Челябинск. Челябинск: ЮУРГУ, 2015. С. 1361–1364.
3. Писарев С.В., Астахов Н.Н. Оценка технического состояния конструкций зданий при типовых нарушениях технологии строительства // Приоритетные научные направления: от теории к практике. 2014. № 12. С. 142–148.
4. Рапопорт П.Б., Рапопорт Н.В., Полянский В.Г., Соколова Е.Р., Гарибов Р.Б., Кочетков А.В., Янковский Л.В. Анализ срока службы современных цементных бетонов // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 4. С. 92.
5. Гныря А.И., Бояринцев А.П., Коробков С.В., Абзаев Ю.А., Мошкин Д.И., Гаусс К.С., Бибииков И.А., Титов М.М. Обоснование метода температурно-прочностного контроля в технологии производства бетонных работ при возведении монолитных железобетонных конструкций // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2017. № 3 (62). С. 161–170.
6. Юдина А.Ф. Достоинства монолитного строительства и некоторые проблемы его совершенствования // Вестник гражданских инженеров. 2012. № 1. С. 154–156.
7. Имайкин Д.Г., Ибрагимов Р.А. Совершенствование технологии бетонирования монолитных конструкций // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2017. № 1 (39). С. 250–256.
8. Салов А.С., Чернова А.Р., Кузьмина А.Ю. Проблемы контроля качества бетона при монолитном строительстве // Материалы Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы технических, естественных и гуманитарных наук», 2015. Уфа: УГНТУ, 2015. С. 71–74.
9. Пак А.А. К вопросу контроля качества строительных материалов и изделий из бетона // Материалы Международной научно-практической конференции «Наука и образование в Арктическом регионе», 2015. Мурманск: МГТУ, 2015. С. 149–156.
10. Свинцов А.П., Николенко Ю.В., Курилкин В.В. Тепловая обработка бетонной смеси в монолитных конструкциях // Промышленное и гражданское строительство. 2015. № 1. С. 15–19.
11. Хамхоева З.М., Дзангиева А.Р. Зависимость качества бетона от способа укладки бетонной смеси // Успехи современной науки и образования. 2016. Т. 2. № 3. С. 48–52.
12. Головин Н.Г., Бедов А.И., Силантьев А.С., Воронцов А.А. Стесненная усадка бетона как фактор развития дефектов в монолитных перекрытиях многоэтажных зданий // Промышленное и гражданское строительство. 2015. № 1. С. 46–50.
13. Ерышев В.А., Латышева Е.В., Бондаренко А.С. Усадочные деформации в бетонных и железобетонных элементах // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2012. № 4. С. 97–101.

14. СП 52-103-2007 «Железобетонные монолитные конструкции зданий». М.: ФГУП «НИЦ “Строительство”», 2007.

15. Беленцов Ю.А., Рошупкин А.А. Оценка необходимости учета коэффициента вариации при приемке бетона монолитных конструкций // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2014. № 6. С. 70–73.

16. Бутенко С.А., Нефедов А.Т. Фактический класс бетона монолитных конструкций // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: сборник статей / под ред. М.И. Бальзанникова, К.С. Галицкова, А.К. Стрелкова. Самара: Изд-во: СГАСУ, 2016. С. 114–117.

## References

1. GOST 18105-2010. *Betony. Pravila kontrolya i otsenki prochnosti* [GOST 18105-2010. Concretes. Rules for monitoring and evaluation of strength]. Moscow: Standartinform, 2013, 20.
2. Kuz'minykh O.V. (2015). Neobkhodimost' ukhoda i nablyudeniya za betonom v period tverdeniya s 29-kh i posleduyushchikh sutok [The need for care and observation of concrete during the hardening from the 29<sup>th</sup> and the following days]. *Nauka YuURGU. Materialy 67-i nauchnoi konf. [Science of SUSU. Materials of the 67<sup>th</sup> scientific conference]*, April 14–17. Chelyabinsk, 1361–1364. (In Russ.)
3. Pisarev S.V., Astakhov N.N. (2014). Otsenka tekhnicheskogo sostoyaniya konstruksii zdaniy pri tipovykh narusheniyakh tekhnologii stroitel'stva [Assessment of the technical condition of buildings in typical violations of construction technology]. *Prioritetnye nauchnye napravleniya: ot teorii k praktike* [Priority research areas: from theory to practice], (12), 142–148. (In Russ.)
4. Rapoport P.B., Rapoport N.V., Polyanskiy V.G., Sokolova E.R., Garibov R.B., Kochetkov A.V., Yankovsky L.V. (2012). Analiz sroka sluzhby sovremennykh tsementnykh betonov [Analysis of the service life of modern cement concrete]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education], (4), 92. (In Russ.)
5. Gnyrya A.I., Boyarintsev A.P., Korobkov S.V., Abzaev Yu.A., Mokshin D.I., Gauss K.S., Bibikov I.A., Titov M.M. (2017). Obosnovanie metoda temperaturno-prochnostnogo kontrolya v tekhnologii proizvodstva betonnykh rabot pri vozvedenii monolitnykh zhelezobetonnykh konstruksii [Justification of methods for temperature and strength monitoring of in-situ reinforced concrete construction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta* [Tomsk State University of Architecture and Building], 3(62), 161–170. (In Russ.)
6. Yudina A.F. (2012). Dostoinstva monolitnogo stroitel'stva i nekotorye problemy ego sovershenstvovaniya [Advantages of monolithic building and some problems of its perfection]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov* [University of Architecture and Civil Engineering], (1), 154–156. (In Russ.)
7. Imaykin D.G., Ibragimov R.A. (2017). Sovershenstvovanie tekhnologii betonirovaniya monolitnykh konstruksii [Perfection of technology of concreting of monolithic constructions]. *Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-*

*stroitel'nogo universiteta* [Kazan State University of Architecture and Engineering], 1(39), 250–256. (In Russ.)

8. Salov A.S., Chernova A.R., Kuz'mina A.Yu. (2015). Problemy kontrolya kachestva betona pri monolitnom stroitel'stve [Problems of quality control of concrete in monolithic construction]. *Aktual'nye problemy tekhnicheskikh, estestvennykh i gumanitarnykh nauk. Materialy mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Actual problems of technical, natural and humanities. Materials of the international scientific and technical conference]. Ufa, 71–74. (In Russ.)

9. Pak A.A. (2015). K voprosu kontrolya kachestva stroitel'nykh materialov i izdelii iz betona nauka i obrazovanie v Arkticheskom regione [On the issue of quality control of building materials and articles from concrete science and education in the Arctic region]. *Nauka i obrazovanie v Arkticheskom regione. Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Science and Education in the Arctic Region. Proceedings of the International Scientific and Practical Conference]. Murmansk, 149–156. (In Russ.)

10. Svintsov A.P., Nikolenko Yu.V., Kurilkin V.V. (2015). Teplovaya obrabotka betonnoi smesi v monolitnykh konstruksiyakh [Heat treatment of concrete mix in cast-in-situ structures]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and civil construction], (1), 15–19. (In Russ.)

11. Khamkhoeva Z.M., Dzangieva A.R. (2016). Zavisimost' kachestva betona ot sposoba ukladki betonnoi smesi [Dependence of the quality of concrete on the method of laying concrete mixes]. *Uspekhi sovremennoi nauki i obrazovaniya* [Progress in Modern Science and Education], 2(3), 48–52. (In Russ.)

12. Golovin N.G., Bedov A.I., Silant'ev A.S., Voronov A.A. (2015). Stesnennaya usadka betona kak faktor razvitiya defektov v monolitnykh perekrytiyakh mnogoetazhnykh zdaniy [Constrained concrete shrinkage as a factor of defect development in cast-in-place slabs of multistory buildings]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Construction], (1), 46–50. (In Russ.)

13. Eryshev V.A., Latysheva E.V., Bondarenko A.S. (2012). Usadochnye deformatsii v betonnykh i zhelezobetonnykh elementakh [Shrink deformations in concrete and reinforced concrete elements]. *Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, (4), 97–101. (In Russ.)

14. SP 52-103-2007 (2007). *Zhelezobetonnye monolitnye konstruksii zdaniy*. [Concrete monolithic construction of buildings]. Moscow, 2007. (In Russ.)

15. Belentsov Yu.A., Roshupkin A.A. (2014). Otsenka neobkhodimosti ucheta koeffitsienta variatsii pri priemke betona monolitnykh konstruksii [Evaluation of the need to take into account the coefficient of variation in the acceptance of concrete monolithic structures]. *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shukhova* [Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov], (6), 70–73. (In Russ.)

16. Butenko S.A., Nefedov A.T. (2016). Fakticheskii klass betona monolitnykh konstruksii [Actual class of concrete monolithic constructions]. *Traditsii i innovatsii v stroitel'stve i arkhitekture*. Sbornik statei [Traditions and

innovations in construction and architecture. Collection of articles]. Ed. by M.I. Bal'zannikova, K.S. Galitskova, A.K. Strelkova. Samara: SGASU Publ., 114–117. (In Russ.)

#### **Об авторах**

**Кузнецов Виталий Сергеевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры архитектурно-строительного проектирования (АСП), Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ»). *Область научных интересов:* монолитные и сборные конструкции с использованием высокопрочной арматуры со сцеплением и без сцепления с бетоном в современном строительстве зданий и сооружений. *Контактная информация:* e-mail: –vitaly.ggh2014@yandex.ru.

**Шапошникова Юлия Александровна** – кандидат технических наук, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций (ЖБК), Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ»). *Область научных интересов:* монолитное строительство, преднапряженные конструкции без сцепления и со сцеплением с бетоном, современные строительные конструкции, обследование технического состояния и усиление строительных конструкций. *Контактная информация:* e-mail – yuliatalyzova@yandex.ru.

#### **About the authors**

**Vitaliy S. Kuznetsov** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Architectural and Construction Design (TSA), Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). *Research interests:* monolithic and prefabricated structures with the use of high-strength fittings with clutch and without adhesion to concrete in the modern construction of buildings and structures. *Contact:* e-mail – vitaly.ggh2014@yandex.ru.

**Yulia A. Shaposhnikova** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Reinforced Concrete and Stone Structures (ZHBK), Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). *Research interests:* monolithic construction, prestressed constructions without adhesion and with adhesion to concrete, modern building structures, inspection of technical condition and strengthening of building structures. *Contact:* e-mail – yuliatalyzova@yandex.ru.

#### **Для цитирования**

Кузнецов В.С., Шапошникова Ю.А. Определение распалубочной прочности монолитных плит и балок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 187–191. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-187-191.

#### **For citation**

Kuznetsov V.S., Shaposhnikova Yu.A. (2018). Determination of the stripping strength of monolithic slabs and beams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14(3), 187–191. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-187-191.

УДК 692.4

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-192-197

**SECOND ORDER STRUCTURAL THEORY FOR THE STABILITY ANALYSIS OF COLUMNS**

V.V. GALISHNIKOVA, T.H. GEBRE, S.A.M. AL-SABRI, O. SAFFIA-DOE

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Mikluho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russia*(received: January 04, 2018; accepted: April 05, 2018)*

Stability analysis in civil engineering is traditionally centred on the stability of individual components of a structure, rather than on the stability of the assemblage of structural components. This may be explained by the lack of adequate tools for the stability analysis of complete structures in the past. Recently, the necessity of the development of general rational methods of stability analysis with a model of the complex structure is widely recognized. These methods should reliably predict the overall stability of the structure, the interaction between the components of the structure in providing restraint against instability of individual members, and the local stability of each individual member. Development of such theories and corresponding algorithms require a thorough investigation. The aim of this paper is to investigate the instability of single columns without large deflections by means of the second order structural theory and to study the influence of imperfections on the behaviour of such structural elements.

**Keywords:** columns, stability of the structure, investigate the instability, structural elements**ТЕОРИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В РАСЧЕТАХ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛОНН**

В.В. ГАЛИШНИКОВА, Т.Х. ГЕБРЕ, С.А.М. АЛЬ-САБРИ, О. САФФИА-ДОЕ

Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198*(поступила в редакцию: 4 января 2018 г.; принята к публикации: 5 апреля 2018 г.)*

Анализ устойчивости в строительстве традиционно ориентирован на устойчивость отдельных компонентов конструкции, а не на устойчивость конструктивной системы в целом. Это может быть объяснено отсутствием адекватных инструментов для анализа устойчивости сложных структур в прошлом. В последнее время широко признана необходимость разработки общих рациональных методов анализа устойчивости при помощи моделирования конструктивной системы. Эти методы должны надежно прогнозировать общую устойчивость структуры, взаимодействие между ее элементами при обеспечении устойчивости отдельных элементов и устойчивости каждого отдельного элемента. Разработка таких теорий и соответствующих алгоритмов требует тщательного исследования. Целью настоящей работы является исследование потери устойчивости отдельно стоящих колонн в отсутствии больших перемещений с помощью конструктивной теории второго порядка, а также изучение влияния несовершенств на поведение таких конструктивных элементов.

**Keywords:** колонны, устойчивость структуры, потеря устойчивости, конструктивные элементы**Introduction**

The behaviour of structures in compression differs significantly from their behaviour in tension. The load bearing capacity of a structure in tension is limited by the strength of its material. The load bearing

capacity of a structure in compression can be limited either by the strength of its material or by instability.

An equilibrium configuration of a structure is singular if the structure can be displaced to a neighbouring equilibrium configuration without change in

the applied loading. The displacement is assumed to be infinitesimally small. If the load on a structure that is in a singular configuration can be reduced by displacing the structure by a finite increment to a neighbouring equilibrium configuration, this structure is called unstable. If no neighbouring equilibrium configuration with reduced load exists, the structure is called stable even though the configuration is singular.

The order of a theory specifies the approximation that is made in the formulation of the equilibrium equations of a structure. If the equilibrium equations are derived for the reference configuration, the formulation is called a first order theory. If the equilibrium equations are derived for the instant configuration, the formulation is called a second order theory. The governing equations of both first order and second order theory can be either linear or nonlinear, depending on additional assumptions made in the formulations.

First order theories are usually formulated with assumptions that make the theory linear. The solution of the linear governing equations of first order theory for given loads and supports leads to a unique displacement vector. This is illustrated in this paper for a straight bar subjected to an axial load. Because the displacement for given loads and supports is unique, a neighbouring equilibrium configuration with different displacements but equal loads and supports cannot exist. The necessary condition for instability of the structure thus cannot be fulfilled. It is not possible to study the stability of structures with a linear first order theory.

Second order theories can be linear or nonlinear. Nonlinear second order theories are sometimes called third order theories. If the displacements of a structure prior to instability are small relative to the dimensions of the structure, it is sufficient to analyse their stability with a linear second order theory. Such cases are treated in this paper. If the displacements prior to instability are large, the structure must be analysed with a nonlinear second order theory.

The following three cases can be distinguished in second order theory if the governing equations are linear:

(a) The equations are homogeneous: they have nontrivial solutions (solutions that are not null) only if the determinant of their coefficient matrix is null. It is illustrated herein that this approach leads to the Euler buckling load for columns.

(b) The equations are inhomogeneous and the determinant of their coefficient matrix is not equal to null. The structure does not become unstable but undergoes large displacements that limit its serviceability. This is illustrated for columns with imperfections.

(c) The equations are inhomogeneous and the determinant of their coefficient matrix is null. The struc-

ture is not in equilibrium for general loadings, but can be in equilibrium for specific loadings. Small geometric imperfections or load perturbations trigger instability under these specific loadings.

Second order theory with nonlinear governing equations is not treated in this paper.

### First Order Theory for an Axially Loaded Bar

Figure 1 shows a straight prismatic bar with modulus of elasticity  $E$ , whose cross-section has area  $A$ . The bar is subjected to an axial load  $P$  at node  $A$ . It is supported by a roller in the axial direction at  $A$  and by a pin at  $B$ . The displacements and stresses of the bar under the axial load are to be determined.

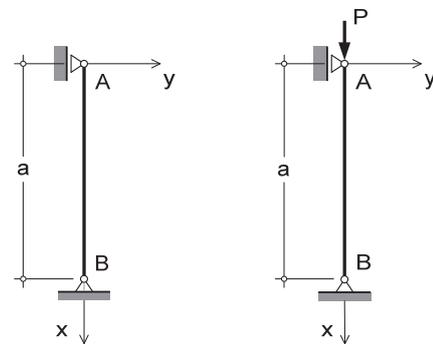


Fig. 1. Reference bar configurations for first order theory

The equilibrium equation is formulated for the bar in its reference configuration: the axis of the bar is considered to be a straight line segment of length  $a$  as in the reference configuration on the left of figure 1. Let the axial force in the bar be  $N$  (tension positive). The forces applied to node  $A$  are in equilibrium:  $N = -P$ .

Let the displacement of point  $x$  on the axis of the column in the direction of the  $x$ -axis be  $u(x)$ . The axial strain  $\epsilon$  on the cross-section of the column is assumed to be constant over the cross-section and equal to the derivative of the displacement  $u$  with respect to  $x$ . The nonlinear terms in the strain-displacement relationship are thus neglected. The axial force in the bar is given by:

$$N = AE\epsilon = AE \frac{du}{dx}. \quad (1)$$

The axial force  $N$  is replaced by  $-P$  and the resulting differential equation is solved for the displacement:  $u = -(P/AE)x + c$ .

The integration constant  $c$  follows from the boundary condition that  $u = 0$  for  $x = a$ :

$$u = (P/AE)(a - x). \quad (2)$$

The bar fails when the stress reaches the yield strength of its material. The example shows that linear first order theory does not predict singular configurations of a bar.

### Second Order Theory for Euler Columns

Figure 2 shows a straight prismatic bar with modulus of elasticity  $E$ , whose cross-section has an area  $A$  and a moment of inertia  $I$ . The bar is subjected to an axial load  $P$  at node  $B$ . It is supported by a pin at  $B$  and by a roller in the axial direction at  $A$ . The displacements and stresses of the bar under the axial load are to be determined.

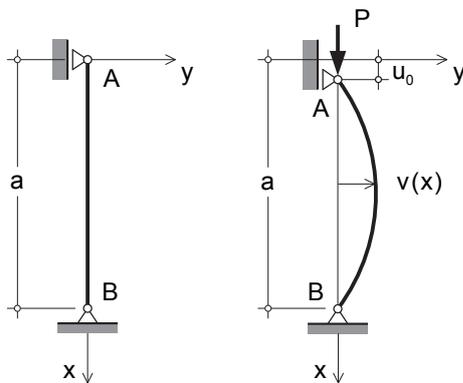


Fig. 2. Reference and instant bar configurations for second order theory

The origin of the Cartesian coordinate system is chosen at node  $A$  of the bar. The  $x$ -axis is directed from node  $A$  to node  $B$ . The  $y$ -axis is rotated anti-clockwise through an angle of 90 degrees from the  $x$ -axis. The  $z$ -axis is orthogonal to the  $x$ - and  $y$ -axes so that the three axes form a right-hand system. This coordinate system will also be used in the following sections.

The equilibrium equation is formulated for the bar in its instant configuration. The axis of the bar in the instant configuration on the right hand side of figure 2 is a curve: the points on the axis of the bar have displaced from their reference location by  $u(x)$  in the direction of the  $x$ -axis and by  $v(x)$  in the direction of the  $y$ -axis.

In the general nonlinear theory, the governing equations for the displacements  $u$  and  $v$  are coupled because the nonlinear strains are functions of  $u$  and  $v$ . The analysis is simplified by assuming that the displacements are small compared to the dimensions of the column and its cross-section. Separate governing equations can then be formulated for the two displacements.

Additional assumptions are made in the formulation of the governing equation for the axial direction.

The area of the cross-section changes under load due to the Poisson effect. This change is not taken into account. The axial strain  $\varepsilon$  is a nonlinear function of the derivatives of displacements  $u$  and  $v$ :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2. \quad (3)$$

The quadratic terms on the right-hand side of (3) are neglected so that the strain is a linear function of the displacement. Due to these assumptions, solution (2) for the axial displacement  $u$  remains valid for second order theory.

Due to the transverse displacement  $v$  of the bar, the axial load  $P$  causes a bending moment  $M$  in the bar. The bending moment acting on a cross-section, whose normal points in the direction of the positive  $x$ -axis, is considered positive if its vector points in the positive direction of the  $z$ -axis.

$$M = -Pv. \quad (4)$$

The general relationship between the bending moment  $M$  and the displacements  $u$  and  $v$  is highly nonlinear. It is approximated by the relationship between  $M$  and  $v$  that is formulated in first order beam theory:  $M = EI (d^2v/dx^2)$ .

Substituting the moment  $M$  into equation (4) yields:

$$EI (d^2v/dx^2) + Pv = 0. \quad (5)$$

The differential equation (5) is solved with the trigonometric sine function. The integration constants are chosen so that the boundary conditions  $v = 0$  at  $x = 0$  and  $x = a$  are satisfied:

$$v = v_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \quad n \in \{1, 2, \dots\}. \quad (6)$$

Substitution of  $v$  from (6) into (5) yields a linear homogeneous equation:

$$v_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \left( -EI \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + P \right) = 0. \quad (7)$$

Equation (7) is solved by setting either the displacement or the coefficient of the displacement to null:

solution 1:

$$v_0 = 0; \quad (8)$$

solution 2:

$$P_n = \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 EI. \quad (9)$$

It follows from solutions (8) and (9) that the load path of the bar contains bifurcations. The trivial solution  $v = 0$  is valid for all values of the load  $P$ .

The specific values of  $P_n$  in (9) permit additional equilibrium configurations in which the lateral displacement  $v$  is not null. There is a bifurcation in the load path for each value of  $n$ .

Due to geometric imperfections of the column and perturbations of its loading, the load path in nature will consist of a principal branch with  $v = 0$  for  $P < P_1$ , and a secondary branch with displacement  $v$  given by (6) with  $n = 1$ . The displacement amplitude  $v_0$  is indeterminate. The load  $P_1$  is called the Euler buckling load  $P_E$  for simply supported columns:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{a^2}. \tag{10}$$

The example shows that the approach of Euler leads to a linear homogeneous equation for the lateral displacement  $v$  that predicts several singular points (9). The point with the smallest absolute value of the load controls the buckling of the column.

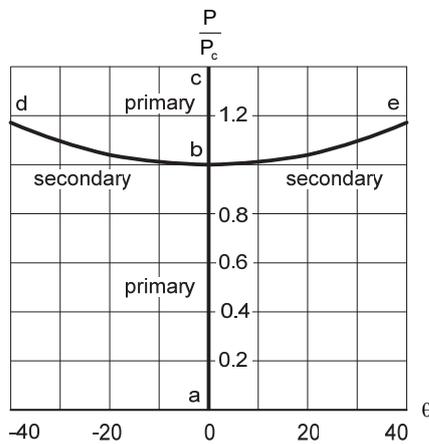


Fig. 3. Bifurcation of the load path of the bar in figure 2

Figure 3 shows the load path of the bar in figure 2. Point a corresponds to the reference configuration.

### Behaviour of Geometrically Imperfect Columns

Assume that the axis of bar  $AB$  in figure 2 is not straight in its reference configuration, but has a geometric imperfection given by the following curve:

$$g = g_0 \sin \frac{\pi x}{a}, \tag{11}$$

where  $g_0$  – specified amplitude of the imperfection.

The equilibrium equation (4) and the governing equation (5) are replaced by:

$$M = -P(g + v), \tag{12}$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = -Pg. \tag{13}$$

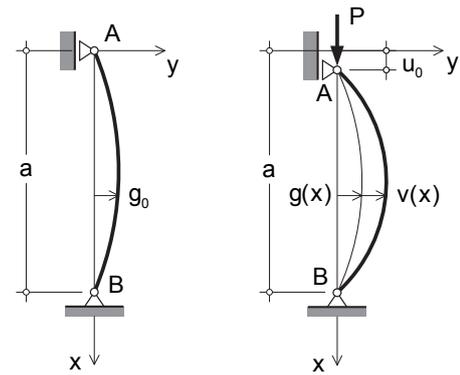


Fig. 4. Column with geometric imperfection

Substitution of the displacement (6) and the imperfection (11) into (13) yields:

$$-EI \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 v_0 + Pv_0 = -Pg_0. \tag{14}$$

The governing equation remains linear, but is no longer homogeneous. Consider the special case  $n = 1$  and define the sum  $t(x)$  of the imperfection  $g(x)$  and the displacement  $v(x)$ . Equation (14) leads to:

$$\frac{t}{g_0} = \frac{v_0 + g_0}{g_0} = \frac{1}{1-s} \quad \text{with} \quad s = \frac{P}{P_E}. \tag{15}$$

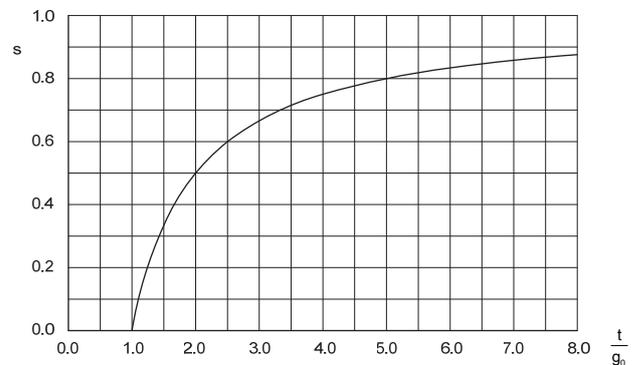


Fig. 5. Load ratio  $s = \frac{P}{P_E}$  as a function of the displacement ratio  $\frac{t}{g_0}$

Solution (15) shows that the load path of the column in figure 4 does not contain a singular point. The axis of the column displaces laterally at all load levels. The displacement tends towards infinity as the load on the column tends towards the Euler buckling load  $P_E$ . Figure 5 shows the variation of the displacement ratio  $t/g_0$  in (15) with the load ratio  $s$ . The displacement ratio reaches the value 2 for a load ratio of 0.50, the value of 5 for a load ratio of 0.80 and the value 10 for a load ratio of 0.90.

## Behaviour of Columns with Load Perturbation

Assume that the column in figure 6 is subjected to a sinusoidal transverse load  $q$  in addition to the axial load  $P$ :

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a},$$

where  $q_0$  – amplitude of the perturbation load.

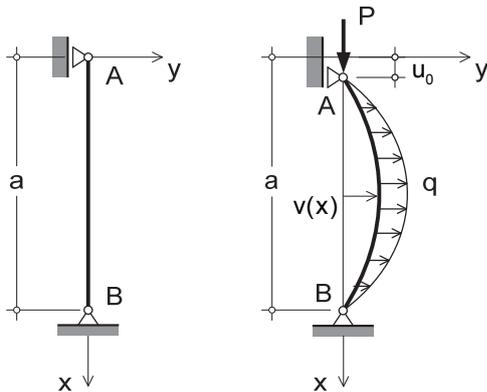


Fig. 6. Column with perturbation load

The equilibrium equation (4) and the governing equation (5) are replaced by:

$$M = -Pv - q_0 \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (16)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = -q_0 \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (17)$$

Substitution of the displacement (6) into (17) yields the displacement amplitude:

$$v_0 = \frac{1}{1-s} \frac{q_0}{EI} \left( \frac{a}{\pi} \right)^4 \quad \text{with} \quad s = \frac{P}{P_E}. \quad (18)$$

The amplitude  $v_i$  of the displacement due to the transverse load without axial load is:

$$v_i = \frac{q_0}{EI} \left( \frac{a}{\pi} \right)^4. \quad (19)$$

The amplitude  $v_i$  is substituted from (19) into (18):

$$\frac{v_0}{v_i} = \frac{1}{1-s}. \quad (20)$$

Solution (20) shows that the load path of the column in figure 6 does not contain a singular point. The axis of the column displaces laterally at all load levels. The lateral displacement tends towards infinity as the load on the column tends towards the Euler buckling load  $P_E$ . The ratio of the displacement am-

plitude  $v_0$  with axial load to the displacement amplitude  $v_i$  without the axial load in (20) varies with the load ratio  $s$  like the ratio of the lateral displacement  $v_i$  to the amplitude  $g_0$  of the geometric imperfection in (15). The displacement tends towards infinity as the load ratio  $s$  goes to 1.

## Conclusions

The study of Euler columns shows that their stability can be studied with two significantly different approaches.

(a) A singular configuration is determined for the column without geometric imperfection and without load perturbation. The load for which this configuration occurs is the buckling load of the column. The column does not displace laterally until the buckling load is reached.

(b) The column is subjected to a geometric imperfection or to a perturbation load in addition to the axial load. The column displaces laterally at all load levels. The displacements cause moments in the column. As the load tends towards the buckling load determined in (a) above, the lateral displacement tends to infinity.

Most of the building codes permit modified forms of both of these approaches to stability theory. In addition, the codes account for the initial stresses in steel members, yielding of the material of the column before it buckles and large displacements that limit serviceability.

© Gebre T.H., Al-Sabri S.A.M., Saffia-Doe O., 2018

## References

1. Santamouris M., Mumovic M. (2015). *A Handbook of Sustainable Building Design and Engineering*, 476.
2. Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L. (2008). *The Behaviour and Design of Steel Structure to EC3*. Fourth edition. Published by Taylor & Francis, New York, 490.
3. American Institute of Steel Construction, *Steel Construction Manual 13<sup>th</sup> Edition*, 2005, 2181.
4. En B.S. (2007). Eurocode 3 – Design of steel structures. *Design*, 3(1).
5. Building Research, *Worked Examples for the Design of Steel Structures BRE SCI Based on BSI & Eurocode 3. 1.1*, 1994.
6. *Revisions, January 2003, Manual of Steel Construction Load and Resistance Factor Design*, 3<sup>rd</sup> Edition.
7. Salmon C.G., Johnson J.E., Malh F A. (2009). *Steel Structures: Design and Behaviour: Emphasizing Load and Resistance Factor Design*.
8. Ghosh K.M. (2010). *Practical Design of Steel Structures*.

9. Timoshenko S.P., Gere J. (1963). *Theory of elastic stability*, 541.
10. Chen W.F., Sohal I. (1995). *Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames*.
11. Marshall T.P. et al. (2015). Design Guide for Low- and Medium-Rise Steel Buildings Institute, *AI Mag.*, 13(1), 217–245.
12. Ray S.S. (1998). *Structural Steelwork – Analysis and Design*, 582.
13. Wong M.B. (2011). *Plastic Analysis and Design of Steel Structures*.
14. Claudio Bernuzzi B.C. (2016). *Structural Steel Design to Eurocode 3 and AISC Specifications*.
15. Williams A. (2011). *Steel Structures Design ASD/LRFD*, 545.
16. American A., Standard N. (2010). *For Structural Steel Buildings*.
17. Sci, *Steel Building Design: Design Data*, 2009.
18. Beedle L.S. (1956). Why plastic design, *AISC-USC Conf. Plast. Des. Struct. STEEL*, No. 205, 1–28.
19. Farkas J., Jármay K. (2013). *Optimum Design of Steel Structures*, Vol. 46, No. 1–3.
20. Kirke B., Al-Jamel I.H. (2004). *Steel Structures Design Manual To AS 4100 First Edition*, No. June, 243.

#### About the authors

**Vera V. Galishnikova** – Professor, Director of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Research interests*: computational civil engineering, building information modeling, topological computer models of buildings, computational geometry, computational mechanics of complex steel structural systems – latticed plates and shells, thin-walled plate and plate-rod structures. nonlinear finite element analysis of space frames, nonlinear stability of structures. *Contact*: e-mail – galishni@gmail.com.

**Gebre Tesfaldet Hudgembes** – Master of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Research interests*: questions of the stability of multi-story buildings elements. *Contact*: e-mail – tesfaldethg@gmail.com.

**Al-Sabri Sahar Abdylrahman Mohammed** – Master of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Research interests*: metal constructions, computational civil engineering, building information modeling, computational mechanics of complex steel structural systems. *Contact*: e-mail – sahar.alsabri@mail.ru.

**Saffia-Doe Osman** – Master of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy,

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Research interests*: design of steel structure, structure mechanics, stability analysis. *Contact*: e-mail – osmadoe@yahoo.com.

#### Об авторах

**Галишникова Вера Владимировна** – доктор технических наук, профессор, директор департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: вычислительная строительная инженерия, информационное моделирование зданий, топологические компьютерные модели зданий, вычислительная механика сложных стержневых систем, нелинейные конечно-элементные модели и программные комплексы для расчета пространственных стержневых систем, нелинейная устойчивость конструкций. *Контактная информация*: e-mail – galishni@gmail.com.

**Тесфалдет Хадзембес Гебре** – магистрант департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: вопросы устойчивости элементов строительных конструкций. *Контактная информация*: e-mail – tesfaldethg@gmail.com.

**Сахар Абдулрахман Мохаммед Аль-Сабри** – магистрант департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: металлоконструкции, вычислительная строительная инженерия, информационное моделирование зданий, вычислительная механика сложных стержневых систем. *Контактная информация*: e-mail: – sahar.alsabri@mail.ru.

**Осман Саффиа-Дое** – магистрант департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: проектирование стальных конструкций, анализ устойчивости. *Контактная информация*: e-mail – osmadoe@yahoo.com.

#### For citation

Galishnikova V.V., Gebre T.H., Al-Sabri S.A.M., Saffia-Doe O. (2018). Second order structural theory for the stability analysis of columns. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14(3), 192–197. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-192-197.

#### Для цитирования

Galishnikova V.V., Gebre T.H., Al-Sabri S.A.M., Saffia-Doe O. Second order structural theory for the stability analysis of columns // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 192–197. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-192-197.

## **Экспериментальные исследования**

УДК 626/691.328:620.1

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-198-204

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ С БЛОЧНЫМИ ШВАМИ, УСИЛЕННЫХ СИСТЕМОЙ ВНЕШНЕГО АРМИРОВАНИЯ**

О.Д. РУБИН<sup>1</sup>, С.Е. ЛИСИЧКИН<sup>2</sup>, К.Е. ФРОЛОВ<sup>3</sup><sup>1</sup>АО «Научно-исследовательский институт энергетических сооружений»  
*Строительный проезд, д. 7А, Москва, Российская Федерация, 125362*<sup>2</sup>ООО «Инженерный центр сооружений, конструкций и технологий в энергетике»  
*ул. Свободы, д. 35, Москва, Российская Федерация, 125362*<sup>3</sup>ПАО «РусГидро»  
*ул. Малая Дмитровка, д. 7, Москва, Российская Федерация, 127006**(поступила в редакцию: 12 января 2018 г.; принята к публикации: 5 марта 2018 г.)*

В настоящее время широкое распространение получает метод усиления железобетонных конструкций системами внешнего армирования на основе углеродного волокна. Накоплен значительный опыт в промышленном и гражданском строительстве, а также определенный опыт усиления железобетонных конструкций гидротехнических сооружений. Вместе с тем потребовалось проведение экспериментальных исследований для обоснования технических решений по усилению железобетонных конструкций гидротехнических сооружений. Характерная особенность железобетонных конструкций гидротехнических сооружений заключается в обязательном наличии межблочных строительных швов, которое вызвано необходимостью возводить массивные гидросооружения ярусами и блоками с перерывами в бетонировании. Ранее проводились исследования железобетонных конструкций, усиленных композитными материалами, без учета блочного строения. В настоящей статье приводятся результаты экспериментальных исследований железобетонных балочных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных углеродными лентами, имеющих горизонтальные и вертикальные межблочные строительные швы. Были выполнены экспериментальные исследования серии железобетонных балочных моделей, изготовленных из бетона класса В15 с продольным рабочим армированием из двух стержней диаметром 10 мм класса А500С (процент армирования 0,39%) и из бетона класса В25 с продольным рабочим армированием из трех стержней диаметром 12 мм класса А500С (процент армирования 0,84%), с межблочными строительными швами до и после их усиления продольными и поперечными углеродными композитными лентами. Зафиксирован особый характер трещинообразования, при котором трещины распространяются по вертикальным и горизонтальным межблочным строительным швам. За счет усиления железобетонных конструкций углеродными композитными лентами прочность конструкций повысилась в среднем в 1,78 раза.

**Ключевые слова:** железобетонные конструкции гидротехнических сооружений, межблочные строительные швы, усиление внешним армированием, ленты из углеродного волокна, экспериментальные исследования

## EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES OF HYDRAULIC STRUCTURES WITH BLOCK SEAMS, ENHANCED BY THE EXTERNAL REINFORCEMENT SYSTEM

O.D. RUBIN<sup>1</sup>, S.E. LISICHKIN<sup>2</sup>, K.E. FROLOV<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Scientific Research Institute of Energy Structures (Joint-Stock Company)  
*7A Stroitel'nyi proezd, Moscow, 125362, Russia*

<sup>2</sup>Engineering Center of Structures, Constructions and Technologies in Power Engineering (Limited Liability Company)  
*35 Svobody St., Moscow, 125362, Russia*

<sup>3</sup>PJSC RusHydro  
*7 Malaya Dmitrovka St., Moscow, 127006, Russia*

(received: January 12, 2018; accepted: March 05, 2018)

A method of strengthening reinforced concrete structures by external reinforcement systems based on carbon fiber is widely used. Significant experience is accumulated in industrial and civil construction; there is also a certain experience of strengthening reinforced concrete structures of hydraulic structures. It was necessary to conduct experimental studies to justify technical solutions for strengthening the reinforced concrete structures of hydraulic structures. A characteristic feature of reinforced concrete structures of hydraulic structures is the mandatory availability of inter-block construction joints, which are caused by the need to build massive hydraulic structures with tiers and blocks with interruptions in concreting. Previously studies of reinforced concrete structures strengthened by composite materials were conducted without taking into account the block structure. The results of experimental studies of reinforced concrete beam structures of hydraulic structures reinforced with carbon strips having horizontal and vertical inter-block building seams are presented in the article. Experimental studies of a series of reinforced concrete beam-type models made of concrete of class B15 with longitudinal reinforcement from two bars. Their diameter is 10 mm and class is A500C (percentage of reinforcement 0.39%). The used concrete class is B25 with longitudinal reinforcement of three bars of diameter 12 mm and class A500C (percentage of reinforcement 0.84%). Their inter-block construction joints is before their strengthening and after reinforcement by longitudinal and transverse carbon composite tapes. In this case, a special type of cracking was recorded, in which cracks propagate along vertical and horizontal inter-block building seams. Due to the strengthening of reinforced concrete structures with carbon composite strips, the strength of the structures has increased, on average, by 1.78 times.

**Keywords:** reinforced concrete structures of hydraulic structures, inter-block building seams, strengthening by external reinforcement, carbon fiber tapes, experimental research

В настоящее время распространяется метод усиления железобетонных конструкций системами внешнего армирования на основе углеродного волокна. В том числе появился определенный опыт усиления железобетонных конструкций гидротехнических сооружений (ГТС). Для обоснования технических решений по усилению железобетонных конструкций гидротехнических сооружений был проведен комплекс экспериментальных исследований [1; 2].

Следует отметить, что характерную особенность массивных гидротехнических ГТС представляют собой межблочные строительные швы, которые являются неотъемлемой составной частью указанных конструкций, вызванной необходимостью возводить их в несколько этапов с перерывами в бетонировании.

Наличие межблочных строительных швов нашло свое отражение в нормативных документах по проектированию железобетонных конструкций ГТС [3; 4].

Потребовалось проведение исследований железобетонных конструкций ГТС с блочными швами, усиленных внешним армированием на основе композиционных материалов с учетом отечественного и зарубежного опыта [5–8].

Для этих целей была изготовлена серия железобетонных моделей балочного типа с горизонтальными и вертикальными межблочными швами.

Проектные размеры опытных балок: длина – 2150 мм; высота – 300 мм; ширина – 150 мм.

Две балки Б-И15-2.1 и Б-И15-2.2 изготавливались из бетона класса В15 с рабочим продольным армированием из двух стержней диаметром 10 мм класса А500С (процент армирования 0,39%).

Третья балка Б-И25-1.1 изготавливалась из бетона класса В25 с рабочим продольным армированием из трех стержней диаметром 12 мм класса А500С (процент армирования 0,84%).

Во всех балках на расстоянии 425 мм от торцов устраивались вертикальные межблочные швы.

Также во всех балках устраивался горизонтальный межблочный шов на расстоянии 90, 70 и 110 мм от верхней грани соответственно.

Поперечная рабочая арматура выполнялась из стержней диаметром 8 мм класса А500С на участке между опорой и вертикальным швом таким образом, чтобы участок между силой и вертикальным швом не имел поперечной арматуры.

Конструкция опытных балок представлена на рис. 1.

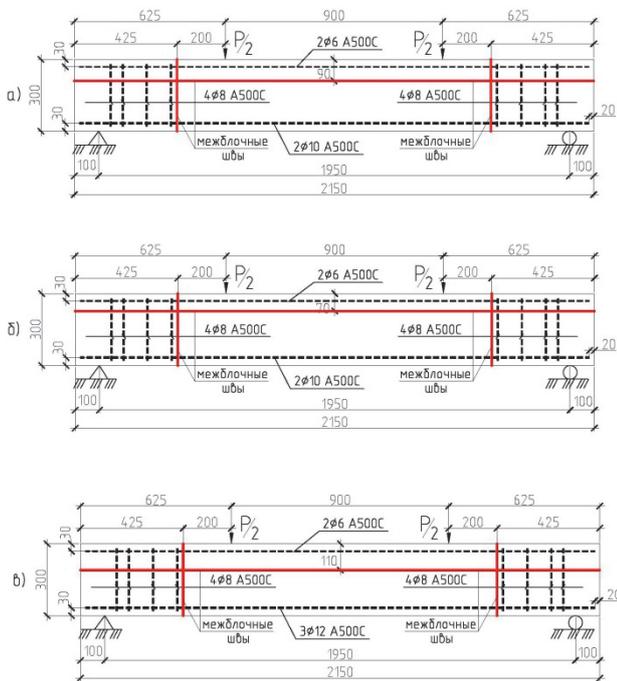


Рис. 1. Конструкции и схемы испытаний опытных балок

[Fig. 1. Constructions and testing schemes of the experimental beams]

При испытаниях опытные балки опирались на подвижную (катковую) и неподвижную (ножевую) опоры, расположенные на расстоянии 100 мм от торцов.

Нагрузка прикладывалась вертикально посредством гидродомкрата с максимальным усилием 500 кН и передавалась через горизонтальную траверсу в двух точках на расстоянии 450 мм от центра балки. При этом расстояние между силами (зона «чистого» изгиба) составило 900 мм, а расстояние между силами и опорами (пролет среза) составило 525 мм. Схема испытаний показана на рис. 1.

Испытания балок проводились в 2 этапа.

На этапе 1 испытаний железобетонные балки нагружались ступенями до уровня, составляющего около 70% от нагрузки, вызывающей начало текучести в продольной рабочей арматуре. При этом происходило раскрытие вертикальных и горизонтальных межблочных строительных швов и развитие системы вертикальных (нормальных) трещин в зоне действия «чистого изгиба».

На этапе 2 проводились испытания тех же железобетонных моделей, усиленных внешним армированием, до их разрушения.

Оклейка железобетонных моделей элементами усиления (лентами из углеродного волокна) производилась после полного снятия нагрузки.

При этом следует выделить три группы элементов усиления моделей (внешнего армирования).

Первую группу внешнего армирования составляли продольные углеродные композитные ленты типа FibArm 530/150 шириной 150 мм, наклеенные на нижние растянутые грани опытных балок в два слоя. Продольная внешняя арматура анкеровалась поперечными хомутами из углеродных композитных лент шириной 150 мм у торцов балок.

Вторую группу внешнего армирования составляли поперечные хомуты из углеродных композитных лент шириной 50 мм, устанавливаемые в количестве 3-х штук равномерно с шагом 250 мм на среднем участке моделей между двумя силами.

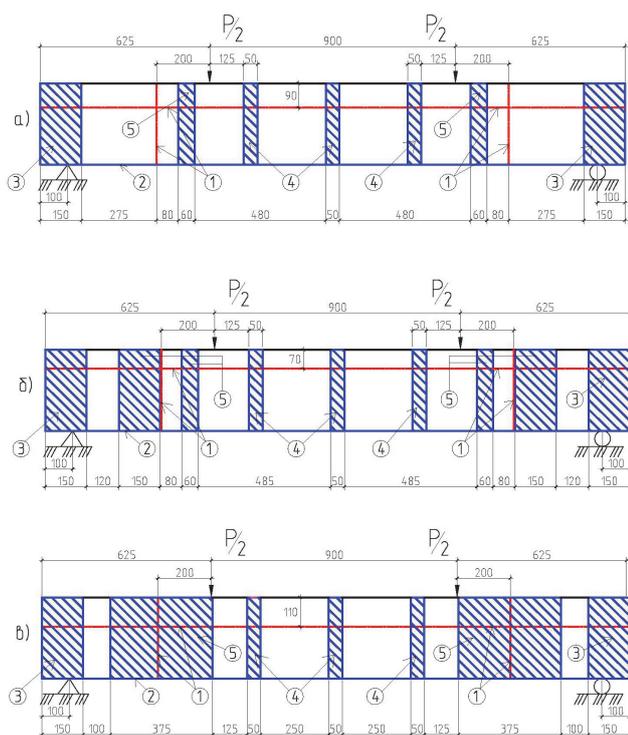
Третью группу внешнего армирования составляли поперечные хомуты из углеродных композитных лент на участке среза между опорой и силой.

В балках Б-И15-2.1 и Б-И15-2.2 (с процентами армирования 0,39%) в пролете среза устанавливались поперечные хомуты из углеродных композитных лент шириной 60 мм на участке между силой и вертикальным межблочным швом.

В балке Б-И15-2.2 в пролете среза добавлялись хомуты из углеродных композитных лент шириной 150 мм на расстоянии 120 мм от торцевых хомутов, анкерующих продольную внешнюю арматуру на нижней грани балок.

В балке Б-И25-1.1 (с процентом армирования 0,84%) в пролете среза устанавливались поперечные хомуты из углеродных композитных лент шириной 375 мм на расстоянии 100 мм от торцевых анкерующих хомутов, вплотную примыкающие к вертикальному сечению под силой.

Схемы оклейки опытных балок углеродными композитными лентами представлены на рис. 2.



**Рис. 2. Схемы усиления опытных балок композитными углеродными лентами:**

*а* – Б-И15-2.1; *б* – Б-И15-2.2; *в* – Б-И25-1.1;

- 1 – межблочные швы; 2 – углеродная лента шириной 150 мм (2 слоя);
- 3 – анкеровские хомуты из углеродной ленты шириной 150 мм;
- 4 – хомуты из углеродной ленты шириной 50 мм;
- 5 – хомуты из углеродной ленты в пролете среза

**[Fig. 2. Schemes of amplification of experimental beams by composite carbon strips:**

*a* – B-I15-2.1; *b* – B-I15-2.2; *v* – B-I25-1.1;

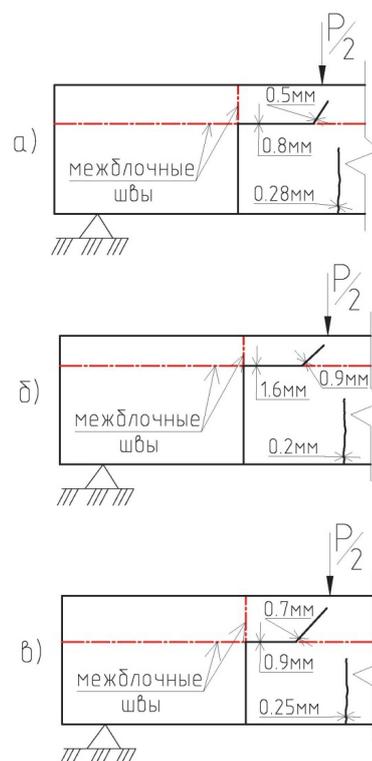
- 1 – interlocking seams, 2 – carbon tape 150 mm wide (2 layers);
- 3 – anchoring clamps made of carbon tape 150 mm wide;
- 4 – clamps from carbon tape with a width of 50 mm;
- 5 – clamps from the carbon tape in the shear span]

Опытные балки оснащались контрольно-измерительной аппаратурой для измерения прогибов, раскрытия межблочных швов, деформаций бетона и элементов усиления конструкций. При этом использовались индикаторы часового типа, тензорезисторы омического сопротивления с базой 20 и 50 мм.

В ходе этапа 1 испытаний (до усиления конструкций) были получены следующие основные результаты.

Во всех опытных балках был зафиксирован особый характер трещинообразования. После раскрытия вертикальных межблочных швов со стороны нижней растянутой грани вертикальные трещины по швам достигли горизонтальных швов и стали продвигаться горизонтально по шву в направлении силы. Вблизи силы трещины выклинились наклонно вверх или вертикально (рис. 3).

На участке между силами образовалась система вертикальных нормальных трещин.



**Рис. 3. Схема характерных трещин в опытных балках на этапе 1 испытаний:**

*а* – Б-И15-2.1; *б* – Б-И15-2.2; *в* – Б-И25-1.1

**[Fig. 3. The scheme of the specific cracks**

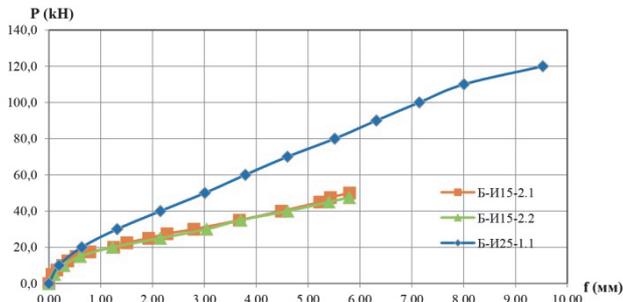
**in the experimental beams at the stage 1 of the test:**

*a* – B-I15-2.1; *b* – B-I15-2.2; *v* – B-I25-1.1]

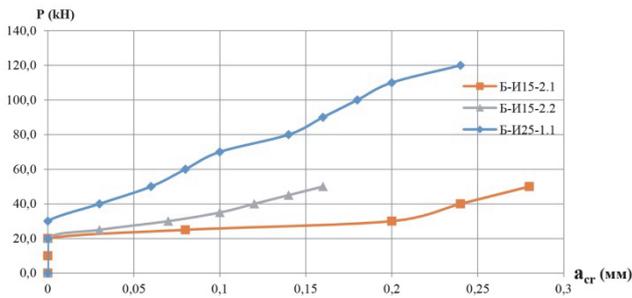
При максимальной нагрузке 50 кН (учитывая, что начало текучести в стержневой арматуре ожидалось при нагрузке 75 кН) раскрытие горизонтального шва составило 0,8 мм в первой балке (Б-И15-2.1) и 1,6 мм во второй балке (Б-И15-2.2). Раскрытие наклонной трещины, направленной к силе, составило 0,5 мм в первой балке и 0,9 мм во второй балке. Максимальное раскрытие вертикальных нормальных трещин составило 0,28 мм в первой балке и 0,2 мм во второй балке.

Графики прогибов опытных балок Б-И15-2.1 и Б-И15-2.2 в центре пролета и ширины раскрытия нормальных вертикальных трещин на первом этапе испытаний представлены на рис. 4 и 5.

Аналогичная картина трещинообразования отмечалась в балке Б-И25-1.1, которая доводилась до нагрузки 120 кН (учитывая, что начало текучести в арматуре ожидалось при нагрузке 160 кН). Раскрытие горизонтального шва составило 0,9 мм, раскрытие наклонной трещины, направленной к силе, составило 0,7 мм. Максимальное раскрытие вертикальных нормальных трещин составило 0,25 мм. Графики прогибов опытной балки Б-И25-1.1 в центре пролета и ширины раскрытия нормальных вертикальных трещин на этапе 1 испытаний представлены на рис. 4 и 5.



**Рис. 4. Прогобы опытных балок в центре пролета на этапе 1 испытаний**  
**[Fig. 4. Deflections of the experimental beams in the center of the span at the stage 1 of the test]**



**Рис. 5. Максимальная ширина раскрытия вертикальных нормальных трещин в средней части пролета на этапе 1 испытаний**  
**[Fig. 5. The maximum width of the opening of the vertical normal cracks in the middle part of the span at the stage 1 of the test]**

На этапе 2 испытаний после снятия нагрузки и оклейки моделей элементами усиления были получены следующие основные результаты. Следует отметить, что после снятия нагрузки произошло частичное или полное закрытие трещин.

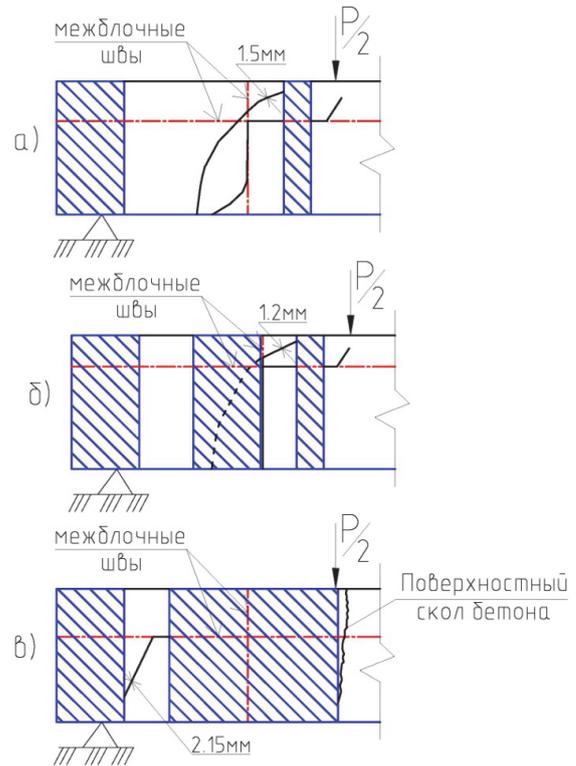
При последующем нагружении элементы усиления препятствовали раскрытию швов и трещин.

В первой (Б-И15-2.1) и второй (Б-И15-2.2) опытных балках нагрузки разрушения составили 125 и 100 кН соответственно (при нагрузке начала текучести в балках без усиления, равной 75 кН), что в 1,67 и 1,33 раза превысило нагрузку начала текучести в опытных балках без усиления.

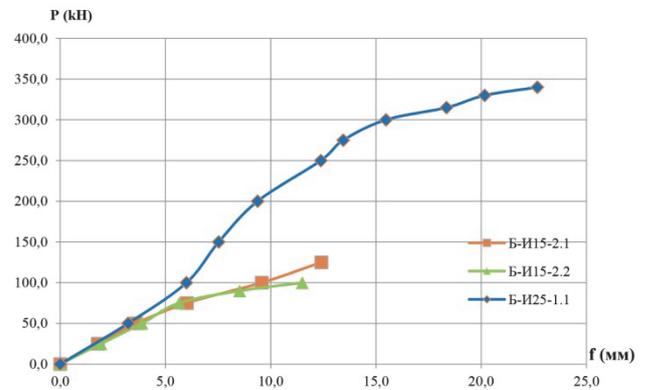
В пролете среза первой балки образовалась наклонная трещина, по которой впоследствии произошло разрушение (рис. 6, а). При этом ширина раскрытия наклонной трещины составила 1,5 мм.

В пролете среза второй балки в просвете между вертикальными хомутами возникла наклонная трещина шириной раскрытия 1,2 мм, по которой впоследствии произошло разрушение (рис. 6, б).

Графики прогибов опытных балок Б-И15-2.1 и Б-И15-2.2 в центре пролета и ширины раскрытия нормальных вертикальных трещин на этапе 2 испытаний представлены на рис. 7 и 8.



**Рис. 6. Схемы трещин разрушения опытных балок на этапе 2 испытаний:**  
 а – Б-И15-2.1; б – Б-И15-2.2; в – Б-И25-1.1  
**[Fig. 6. The scheme of the cracks of the experimental beams destruction at the stage 2 of the test:**  
 а – Б-И15-2.1; б – Б-И15-2.2; в – Б-И25-1.1]

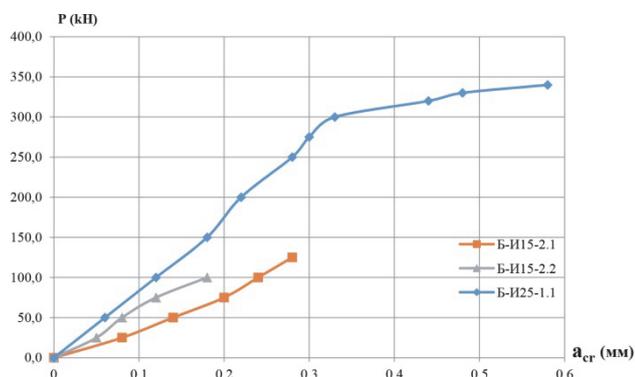


**Рис. 7. Прогобы опытных балок в центре пролета на этапе 2 испытаний**  
**[Fig. 7. Deflections of the experimental beams in the center of the span at the stage 2 of the test]**

Следует обратить внимание на расположение горизонтального шва во второй балке (на расстоянии 70 мм от верхней грани) практически на уровне нейтральной оси, где действуют максимальные вторичные вертикальные растягивающие напряжения [3; 4]. Этим обуславливается большее раскрытие горизонтального шва (1,6 мм) во второй балке, чем в первой балке (0,8 мм) на первом этапе испытания.

Учитывая приведенное выше обстоятельство, а также меньшую прочность на растяжение бето-

на второй балки (1,49 МПа) по сравнению с бетоном первой балки (1,74 МПа), можно объяснить меньшую нагрузку разрушения второй балки (100 кН) по сравнению с нагрузкой разрушения первой балки (125 кН).



**Рис. 8. Максимальная ширина раскрытия вертикальных нормальных трещин в средней части пролета на этапе 2 испытаний [Fig. 8. The maximum width of the vertical normal cracks opening in the middle part of the span at the stage 2 of the test]**

Разрушение третьей балки Б-И25-1.1 произошло под нагрузкой 375 кН (при нагрузке начала текучести в балке без усиления, равной 160 кН) вследствие разрыва горизонтальной углеродной композитной ленты усиления на нижней грани, что в 2,34 раза превысило нагрузку начала текучести в моделях без усиления (160 кН).

Перед разрушением произошло значительное раскрытие наклонной трещины и отслоение бетона под силой (рис. 6, в). При этом ширина раскрытия наклонной трещины, образовавшейся в пролете между хомутами, составила 2,15 мм, а вертикальной нормальной трещины в средней части пролета – 0,56 мм.

Графики прогибов опытной балки Б-И25-1 в центре пролета и ширины раскрытия нормальных вертикальных трещин на втором этапе испытаний представлены на рис. 7 и 8.

Таким образом, результаты проведенных экспериментальных исследований показали, что усиление железобетонных конструкций ГТС, ослабленных межблочными строительными швами, внешним армированием из углеродных композитных лент позволило повысить прочность в среднем в 1,78 раза.

Также был выявлен особый характер трещинообразования, обусловленный наличием вертикальных и горизонтальных межблочных строительных швов.

При этом было зафиксировано влияние расположения горизонтальных швов в первой и второй балках на ширину раскрытия этих швов и на несущую способность опытных балок. Располо-

жение горизонтального шва ближе к нейтральной оси во второй балке обусловило большее раскрытие горизонтального шва и снижение разрушающей нагрузки второй балки по сравнению с первой балкой.

Изучение особого характера трещинообразования при наличии межблочных швов различного направления позволяет управлять процессами реализации технических решений при усилении, ремонте, реконструкции железобетонных конструкций гидротехнических сооружений.

© Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Фролов К.Е., 2018

### Список литературы

1. Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Балагуров В.Б., Александров А.В. Новая технология ремонта ГТС посредством армирования композитными материалами // Известия ВНИИГ. 2016. Т. 280. С. 3–10.
2. Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Фролов К.Е. Результаты экспериментальных исследований железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных углеродными лентами, при действии изгибающего момента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 58–63.
3. СП 41.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции гидротехнических сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.06.08-87. М., 2012. 67 с.
4. П 46-89. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций гидротехнических сооружений (без предварительного напряжения) к СНиП 2.06.08-87 // Министерство энергетики и электрификации СССР. Л.: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1991.
5. Сердюк А.И., Чернявский В.Л. Опыт усиления строительных конструкций композиционными материалами при реконструкции Баканской ГЭС // Гидротехника. 2013. № 3 (32). С. 115–117.
6. Zhou Y. et al. (2013). Reinforced concrete beams strengthened with carbon fiber reinforced polymer by friction hybrid bond technique: Experimental investigation // Materials and Design. 50. Pp. 130–139.
7. Akbarzadeh H., Maghsoudi A.A. (2010). Experimental and analytical investigation of reinforced high strength concrete continuous beams strengthened with fiber reinforced polymer // Mater Des. 31. Pp. 1130–1147.
8. Wu Y.F., Lu J. (2013). Preventing debonding at the steel to concrete interface through strain localization // Composites Part B. 45. Pp. 1061–1070.

### References

1. Rubin O.D., Lisichkin S.E., Balagurov V.B., Aleksandrov A.V. (2016). Novaya tekhnologiya remonta GTS posredstvom armirovaniya kompozitnymi materialami [New technology of repairing hydraulic structures by means of reinforcement with composite materials]. *Izvestiya VNIIG*, Vol. 280, 3–10. (In Russ.)

2. Rubin O.D., Lisichkin S.E., Frolov K.E. (2016). Rezul'taty ehksperimental'nyh issledovaniy zhelezobetonnykh konstrukcij gidrotekhnicheskikh sooruzhenij, usilennykh uglerodnymi lentami, pri dejstvii izgibayushchego momenta [The results of experimental studies of reinforced concrete structures of hydraulic buildings reinforced with carbon ribbons and subject to a bending moment]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, No 6, 58–63. (In Russ.)

3. SP 41.13330.2012. *Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii gidrotekhnicheskikh sooruzhenij. Aktualizirovannaya redakciya SNIp 2.06.08-87* [Concrete and reinforced concrete structures of hydraulic buildings. Actualized edition of SNIp 2.06.08-87]. Moscow, 2012, 67. (In Russ.)

4. P 46-89. *Posobie po proektirovaniyu betonnykh i zhelezobetonnykh konstrukcij gidrotekhnicheskikh sooruzhenij (bez predvaritel'nogo napryazheniya) k SNIp 2.06.08-87* [Manual for the design of concrete and reinforced concrete structures of hydraulic buildings (without prestressing) to SNIp 2.06.08-87]. Ministerstvo ehnergetiki i ehlektrifikacii SSSR. Leningrad: VNIIG im. B.E. Vedeneeva Publ., 1991. (In Russ.)

5. Serdyuk A.I., Chernyavskij V.L. (2013). Opyt usileniya stroitel'nykh konstrukcij kompozicionnymi materialami pri rekonstrukcii Baksanskoj GEHS [Experience in strengthening building structures with composite materials during the reconstruction of the Baksanskaya Hydroelectric Power Station]. *Gidrotekhnika*, 3(32), 115–117. (In Russ.)

6. Zhou Y. et al. (2013). Reinforced concrete beams strengthened with carbon fiber reinforced polymer by friction hybrid bond technique: Experimental investigation. *Materials and Design*, 50, 130–139.

7. Akbarzadeh H., Maghsoudi A.A. (2010). Experimental and analytical investigation of reinforced high strength concrete continuous beams strengthened with fiber reinforced polymer. *Mater Des*, 31, 1130–1147.

8. Wu Y.F., Lu J. (2013). Preventing debonding at the steel to concrete interface through strain localization. *Compositer Part B*, 45, 1061–1070.

#### **Об авторах**

**Рубин Олег Дмитриевич** – доктор технических наук, генеральный директор, АО «Научно-исследовательский институт энергетических сооружений» (АО «НИИЭС»). *Область научных интересов:* безопасность гидротехнических сооружений, теория массивного железобетона гидротехнических сооружений, композитные материалы. *Контактная информация:* info@niies.ru

**Лисичкин Сергей Евгеньевич** – доктор технических наук, заместитель генерального директора, началь-

ник отдела, ООО «Инженерный центр сооружений, конструкций и технологий в энергетике» (ООО «ИЦСКТЭ»). *Область научных интересов:* безопасность гидротехнических сооружений, теория массивного железобетона гидротехнических сооружений, композитные материалы. *Контактная информация:* cskte@mail.ru

**Фролов Кирилл Евгеньевич** – инженер, заместитель генерального директора по научно-проектной деятельности, ПАО «РусГидро». *Область научных интересов:* безопасность гидротехнических сооружений, теория массивного железобетона гидротехнических сооружений, композитные материалы. *Контактная информация:* frolovke@gidroogk.ru

#### **About the authors**

**Rubin Oleg** – Doctor of Technical Sciences, General Director, Scientific Research Institute of Energy Structures (NIIES) (Joint-Stock Company). *Scientific interests:* safety of hydraulic structures, theory of massive reinforced concrete hydraulic structures, composite materials. *Contact:* e-mail – info@niies.ru.

**Lisichkin Sergey** – Doctor of Technical Sciences, Deputy General Director, Head of Division, LLC “Engineering Center of Structures, Constructions and Technologies in Power Engineering” (ITCSKTE) (Limited Liability Company). *Scientific interests:* safety of hydraulic structures, theory of massive reinforced concrete hydraulic structures, composite materials. *Contact:* e-mail – cskte@mail.ru.

**Frolov Kirill** – Engineer, Deputy General Director for Scientific and Design Activities, PJSC RusHydro. *Scientific interests:* safety of hydraulic structures, theory of massive reinforced concrete hydraulic structures, composite materials. *Contact:* e-mail – frolovke@gidroogk.ru.

#### **Для цитирования**

Рубин О.Д., Лисичкин С.Е., Фролов К.Е. Экспериментальные исследования железобетонных конструкций гидротехнических сооружений с блочными швами, усиленных системой внешнего армирования // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 198–204. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-198-204.

#### **For citation**

Rubin O.D., Lisichkin S.E., Frolov K.E. (2018). Experimental investigations of reinforced concrete structures of hydraulic structures with block seams, enhanced by the external reinforcement system. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(3), 198–204. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-198-204.

УДК 69.059.22

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-205-215

**ОБЗОР МЕТОДОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
СТАЛЬНЫХ И СТАЛЕБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ОСОБЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**А.В. АЛЕКСЕЙЦЕВ<sup>1</sup>, Н.С. КУРЧЕНКО<sup>2</sup><sup>1</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет  
*Ярославское шоссе, д. 26, Москва, Россия, 129337*<sup>2</sup>Брянский государственный инженерно-технологический университет  
*проспект Станке Димитрова, д. 3, Брянск, Россия, 241037**(поступила в редакцию: 26 декабря 2017 г.; принята к публикации: 21 апреля 2018 г.)*

В статье выполнен обзор современных экспериментальных исследований силового сопротивления наиболее распространенных стальных и сталебетонных строительных конструкций в запредельных состояниях. Выявлены основные направления постановок экспериментов при некоторых типах особых воздействий, влияющих на обеспечение механической безопасности сооружений. Рассмотрены изложенные в современной научной литературе экспериментальные исследования живучести стальных и сталебетонных пластинчато-стержневых элементов сооружений при локальных повреждениях колонн. Описываются испытания пластинчатых и легких стальных тонкостенных конструкций на действие циклической знакопеременной нагрузки. Приводятся данные по предельным статическим нагрузкам балок и пространственных рамных систем. Уделено внимание испытаниям конструкций на комбинированные ударные и взрывные воздействия. Исследования иллюстрируются фотографиями и схемами лабораторных образцов и натуральных объектов. По результатам обзора делается вывод о перспективах дальнейших исследований живучести стальных конструкций при запроектных воздействиях. Отмечается необходимость расширения номенклатуры нормируемых типов запроектных воздействий, что позволит более эффективно выполнять комплекс превентивных мероприятий, обеспечивающих повышенную механическую безопасность сооружений и минимизацию потенциальных рисков материальных и социальных потерь при возникновении аварийных ситуаций.

**Ключевые слова:** экспериментальные исследования, запроектные воздействия, взрыв, удар, удаление опор, предельное нагружение, натуральный эксперимент, лабораторные испытания

**REVIEW OF METHODS AND RESULTS OF EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS  
OF STEEL AND STEEL CONCRETE STRUCTURES UNDER SPECIAL IMPACT**A.V. ALEKSEYTSEV<sup>1</sup>, N.S. KURCHENKO<sup>2</sup><sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)  
*26 Yaroslavskeye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation*<sup>2</sup>Bryansk State University of Engineering and Technology  
*3 Stanke Dimitrov Prospekt, Bryansk, 241037, Russian Federation**(received: December 26, 2017; accepted: April 21, 2018)*

The modern experimental studies review of the resistance of the most common steel and steel-concrete building structures in emergency conditions is performed. The main directions of experimental design are revealed under certain types of special influences that affect the mechanical safety of structures. An overview of the experimental studies of steel and steel-concrete lamellar-structural elements survivability in local damage to columns, described in the modern scientific literature is presented. Tests of lamellar and light steel thin-walled structures on the effect of cyclic loading are described. Data on the limit static loads of beams and spatial frame systems are given. Attention to testing of structures for combined impact and explosive effects is paid. Photos and diagrams of laboratory samples and objects are given. As a result of the review, a conclusion is made about the prospects for further studies of the survivability of steel structures under emergency actions.

It is noted, that now there is a need to expand the nomenclature of standardized types of emergency actions. That will allow to more effectively carrying out a complex of preventive measures that let us to increase the mechanical safety of structures and minimize potential risks of material and social losses in the event of emergencies.

**Keywords:** experimental studies, emergency actions, explosion, impact, removal of supports, limit loading, full-scale experiment, laboratory tests

**Введение.** Проблема обеспечения живучести несущих конструкций зданий и сооружений является одной из центральных в современной строительной науке [1–4]. Для решения ряда задач по данному направлению разрабатываются новые методы расчетов, основой верификации которых часто являются лабораторные или натурные испытания. Для достаточно распространенных железобетонных конструкций в настоящее время в данном направлении проведен значительный объем экспериментально-теоретических исследований [1; 5; 6]. Наименее изученными представляются вопросы экспериментальных исследований стальных конструкций при воздействиях, не предусмотренных нормальными условиями эксплуатации (запроектных воздействиях). В частности, имеют важность опыты, изучающие динамическое поведение стальных и сталебетонных конструкций. В настоящей статье приводится краткое описание экспериментальных исследований балочных, рамных и пластинчатых объектов со стальными конструкциями при испытаниях на запроектные воздействия. Целью работы является актуализация основных направлений опытного изучения живучести таких объектов.

**Направления экспериментальных исследований.** Как для моделей (лабораторных образцов), так и для натуральных сооружений рассматриваются следующие основные виды нагружений:

- локальное повреждение одной или нескольких опор, в том числе и с последующим взаимодействием поврежденной конструкции с преградами;
- циклическая знакопеременная горизонтальная нагрузка, имитирующая идеализированное сейсмическое воздействие;
- ударные нагрузки, включающие локальное динамическое воздействие от разгрузки, повреждения от неупругого удара, взаимодействие с взрывной волной, комбинированные ударные воздействия;
- статическая разрушающая нагрузка при простых деформациях и сложном сопротивлении.

#### **Динамические испытания на локальные повреждения опор**

Экспозиция некоторых схем лабораторных стендов и объектов, на которых изучалось локальное повреждение опор, приведена на рис. 1–7.

Дадим краткое описание этих экспериментальных работ.

В статье [7] рассматривается сопротивляемость модели трехмерной пластинчато-стержневой конструкции (несущий стальной каркас и перекрытие) запроектному воздействию в виде удаления колонны. Перекрытие выполнено бетонным с внешним армированием сплошным стальным листом и соединено сваркой со стержневой системой каркаса. В ходе эксперимента измерялись деформации и перемещения. Для анализа перераспределения силовых потоков напряженно-деформированное состояние каждого конструктивного элемента исследовалось дополнительно. Система была доведена до исчерпания несущей способности с образованием зон локальных разрушений плиты и пластических шарниров в стержнях.

В статьях [8; 9] исследовался эффект общей сопротивляемости многопролетных пространственных рам зданий воздействию в виде удаления средней колонны. В работе [10] ставились эксперименты по анализу живучести рам при различных конструкциях болтовых стыков. В эксперименте [11] исследуется сопротивляемость прогрессирующему разрушению двухпролетной рамы повышенной живучести, оборудованной страховочными тязями. Экспериментальным путем для данной конструкции был определен коэффициент конструкционного демпфирования по Релею. Смежным направлением этих исследований является учет взаимодействия поврежденной конструкции с неразрушаемой преградой [12]. Такой тип воздействий является характерным для ряда аварийных ситуаций на объектах строительства. Целью данных экспериментальных исследований являлась проверка точности методик расчета повреждаемых систем на этот тип нагружения.

Работы [13–18] посвящены удалению колонны образца в виде композитной рамы с ригелями, состоящими из стальных прокатных профилей и жестко соединенной с ними железобетонной плиты. Стыки ригелей с колоннами осуществлялись болтовым соединением. В работе [13] исследовался эффект от усиления узловых соединений подкрепляющими пластинками. Выявлено, что рамы хорошо сопротивляются таким воздействиям, определены рациональные углы установки пла-

стинок, позволяющие более эффективно распределять силовые потоки при динамических догружениях.

В статье [19] рассматривается экспериментальное моделирование напряженно-деформированного состояния фрагмента шестиэтажного здания при удалении колонны. Колонна удаляется с помощью механического актуатора, сдвигающего колонну. Узловые соединения выполнены на болтах, соединяющих фланцы балок и пояса колонн. Установлен характер изменения вертикальных перемещений во времени и характер деформирования балок и узловых соединений. Выяснено, что болтовые соединения при заданном виде воздействий позволяют эффективно распределять силовые потоки и не допускать прогрессирующего разрушения.

В работах [20–22] исследуются неразрезные стальные балки при удалении одной из опор. Оценивается эффект динамического догружения в зависимости от уровня напряженно-деформированного состояния конструкции. При этом удаление опор моделируется не обычным механическим способом, а с помощью электромагнита.

Особого внимания заслуживают эксперименты на реальных сооружениях и стальных рамах в составе их каркасов [23–27]. Так, в работе [23] исследовался процесс деформирования реального здания, подлежащего сносу, при последовательном удалении до 4-х крайних колонн поперечной рамы здания. Измерялись перемещения и нагруженность стержней. При этом для оценки уровня напряженного состояния вычислялся коэффициент  $K = M_{\max}/M_p \leq 1$ , где  $M_p$  – момент, при котором в сечении стальной рамы образуется пластический шарнир. С помощью выполненных экспериментов проверялась корректность использования двумерных и трехмерных моделей для конечно-элементных расчетов пространственных объектов при быстром удалении стоек из расчетной схемы. Показывается, что для удаления крайних колонн как двумерные, так и трехмерные модели при сравнении с экспериментальными данными дают удовлетворительные результаты.

В работе [28] исследуется несущая способность рамных тонкостенных стальных конструкций при просадках грунтового основания. Во всех рассматриваемых системах сбор экспериментальных данных выполняется с помощью современных промышленных систем сбора данных, основанных на применении крейтов с аналогово-цифровыми преобразователями, универсальных многоканальных модулей, соединенных с линейными стержневыми, тросовыми или лазерными датчиками перемещений. Измерялись преимущественно

перемещения и деформации во времени для перебранных систем. В результате проведения такого рода исследований были выявлены характерные закономерности динамического поведения стальных рам при удалении одной или нескольких стоек.

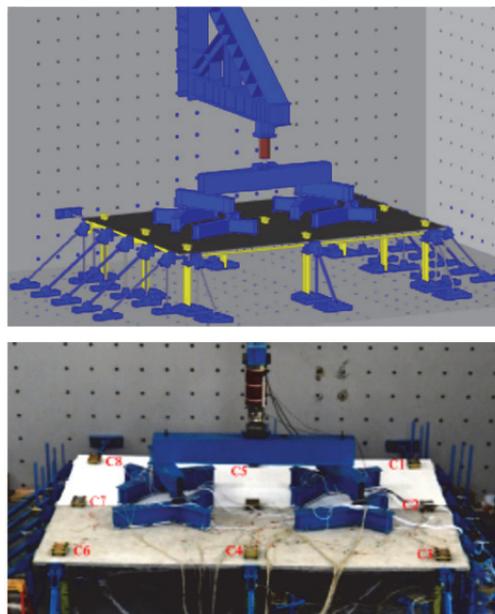


Рис. 1. Удаление средней колонны пространственной рамной системы с композитным перекрытием [Fig. 1. Removing the middle column of a spatial frame system with a composite overlap] [7]



Рис. 2. Локальное повреждение поперечной рамы повышенной живучести [Fig. 2. Local damage to the transverse frame of increased survivability] [11]



Рис. 3. Выключение опоры в раме, взаимодействующей с преградой [Fig. 3. Disconnection of the support in the frame, interacting with balk] [12]

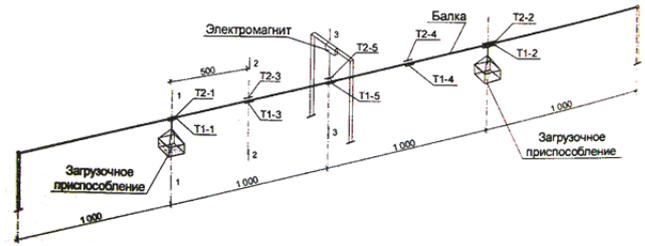
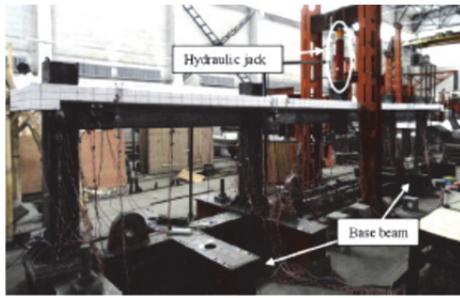


Рис. 7. Выключение опоры в П-образной раме [Fig. 7. Disconnection of the support in a U-shaped frame] [20]

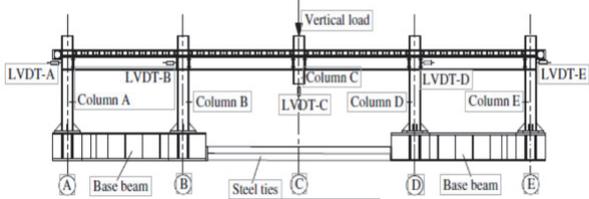


Рис. 4. Удаление средней колонны плоской рамной системы [Fig. 4. Removing the middle column of a flat frame system] [13]



Рис. 5. Последовательное удаление колонн в здании [Fig. 5. Consecutive removal of columns in the building] [23]

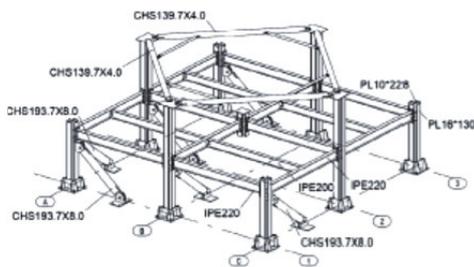


Рис. 6. Выключение средней опоры в ячейке здания [Fig. 6. The disconnection of support in the middle of the building cell] [19]

## Испытания на квазисейсмические воздействия

Испытания конструкций на циклическую горизонтальную нагрузку изображены на рис. 8–10. Приведем краткое описание таких экспериментов.

В статье [29] экспериментально исследовался сдвиг пластинок, опертых по двум сторонам при динамических нагружениях, в виде циклически повторяющихся горизонтальных силовых воздействий, аналогичных идеализированным сейсмическим. Измерялись деформации во времени для сплошных и перфорированных образцов различной толщины. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании балок со сплошной и перфорированной стенкой в зданиях, расположенных в сейсмически опасных районах.

В работах [30–32] рассматривается поведение пластин, подкрепленных стержнями при сейсмических нагрузках. Статья [33] посвящена исследованию сопротивления боковой циклической нагрузке рамной конструкции с тонкостенными пластинами, работающими на сдвиг. Также испытывались на сейсмические воздействия и тонкостенные стержневые системы [34–37]. На лабораторных образцах [34] исследовалась несущая способность при кручении тонкостенных профилей различных сечений при периодически повторяющихся горизонтальных нагрузках, моделирующих сейсмические воздействия. Исследовалось влияние постановки ребер жесткости на силовое сопротивление стержня. В результате установлено, что при таких воздействиях постановка ребер жесткости по длине профиля не всегда приводит к увеличению прочности образцов.

Работы [35–37] посвящены испытаниям рамных тонкостенных элементов и рам в целом, при этом для исследователей особый интерес представляет диссипация энергии при деформациях таких систем.

Отдельно на сейсмические воздействия исследуются узловые соединения [38–40]. В этих работах уделяется внимание узлам, состоящим из стальных сварных конструкций, усиленных железобетоном. В статье [38] испытывался узел сопряжения

стальной балки и колонны, усиленной железобетонной облоймой. При этом соединения колонны с балкой – сварные через сплошную соединительную пластину, проходящую в теле колонны. Узел доводился до разрушения. Приведены зависимости деформаций опасных точек во времени. Цель эксперимента – опытная проверка применимости такого типа узловое соединения для повышения сопротивляемости здания сейсмическим воздействиям.



Рис. 8. Испытания стальной пластины [Fig. 8. Testing of a steel plate for shear in its plane] [29]

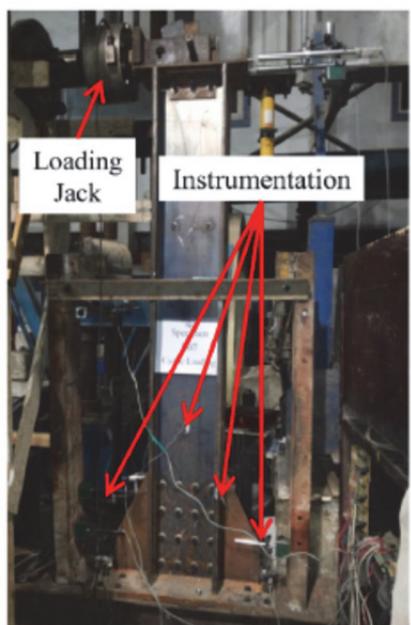


Рис. 9. Испытания колонны из ЛСТК [Fig. 9. Tests of a light steel thin-walled column profile] [34]

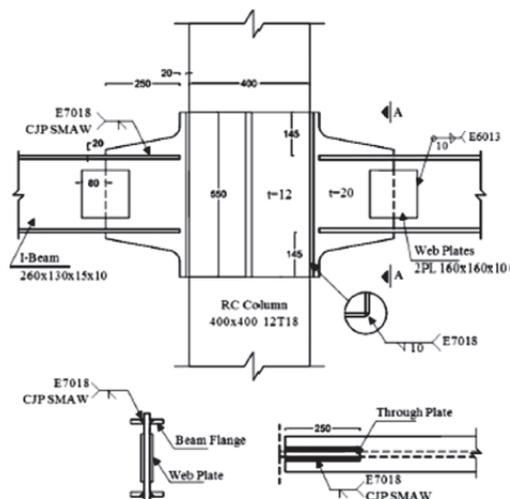
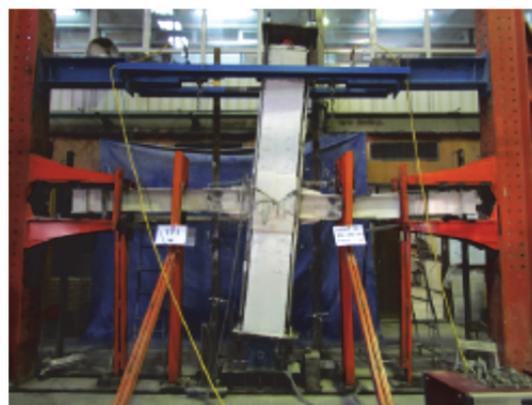


Рис. 10. Разрушающие испытания сварного фланцевого узла опирания балок [Fig. 10. Destructive testing of a welded flange support unit for beams] [38]

### Исследования предельной статической нагруженности

На рис. 11–14 представлены эксперименты по определению предельной статической нагрузки на балки при их сложном сопротивлении и пространственную раму.



Рис. 11. Косой изгиб трубчатых стержней [Fig. 11. Skew bending of tubular bars] [41]



Рис. 12. Изгиб с кручением трубчатых стержней [Fig. 12. Bending with torsion of tubular bars][41]

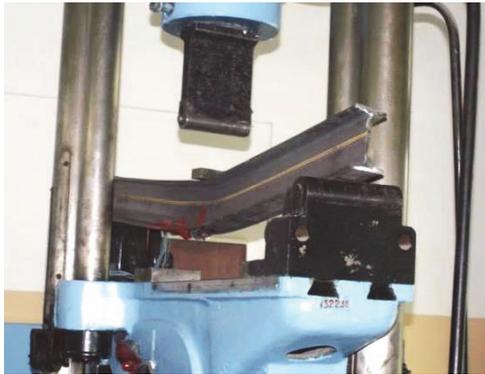


Рис. 13. Поперечный изгиб двутавровых балок [Fig. 13. Transverse bending of I-beams] [42]



Рис. 14. Предельное нагружение пространственных рам [Fig. 14. Limit loading of spatial frames] [43]

В экспериментах [41–43] исследовалось деформирование стержней при сложном сопротивлении. В результате установлено, что механизм разрушения исследуемых систем аналогичен схеме образования пластического шарнира при плоском изгибе. Эксперименты [42; 43] выполнялись с целью верификации методики расчета, основанной на схеме эволюционного моделирования с ограничениями статической теоремы метода предельного равновесия. Эти исследования подтвердили, что пространственные стальные рамы при достижении ими предельной несущей способности имеют схемы локальных разрушений в виде системы пространственных пластических шарниров. При этом

деформируемая система обладает свойством живучести до тех пор, пока не произойдет переход в состояние, соответствующее образованию механизма, что отмечалось ранее для железобетонных конструкций.

### Комбинированные ударные и взрывные воздействия

На рис. 15–18 представлены некоторые исследования на ударные и взрывные воздействия.

В работе [44] изучен характер изменения несущей способности образцов трубчатых колонн при локальном повреждении ударным воздействием. Удар наносился перпендикулярно продольной оси трубы. Воздействие приводило к незначительному локальному смятию части стенки. Далее образец испытывался на сжатие до потери устойчивости. Установлено, что такие воздействия приводят к потере несущей способности более чем на 40%, при этом большая несущая способность наблюдается у образцов большей толщины.

Экспериментально исследуется на сопротивление взрыву защитная сэндвич-панель [45], состоящая из двусторонней стальной обшивки и алюминиевых гнутых листов, образующих при соединении друг с другом структуру, аналогичную ячейкам пчелиных сот. Такая панель обладает существенной сопротивляемостью взрыву по сравнению со сплошной панелью. Цель эксперимента – разработка и верификация пластинчатых защитных панелей для повышения устойчивости зданий к террористическим актам, связанным со взрывами самодельных устройств.

Кроме того, исследуется стойкость взрывозащитных сэндвич-панелей при контакте с жидкими взрывчатыми веществами [46] и с воздушной взрывной волной [47; 48]. На воздействие взрывом испытывались также трубобетонные колонны [49].



Рис. 15. Ударные воздействия на раму [Fig. 15. Shock impacts on the frame] [50]



Рис. 16. Испытание фермы в составе каркаса здания на локальную динамическую разгрузку  
[Fig. 16. Testing the truss as part of the building frame for local dynamic unloading] [51]

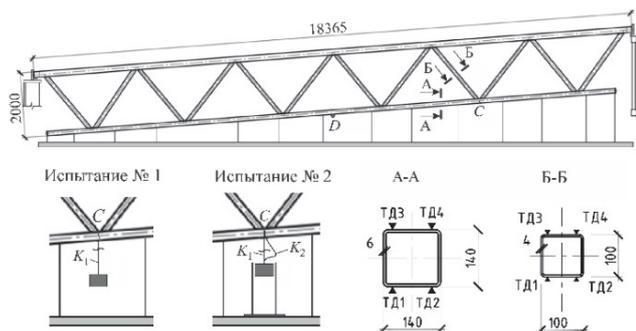


Рис. 17. Схемы испытаний  
[Fig. 17. Testing schemes] [51]

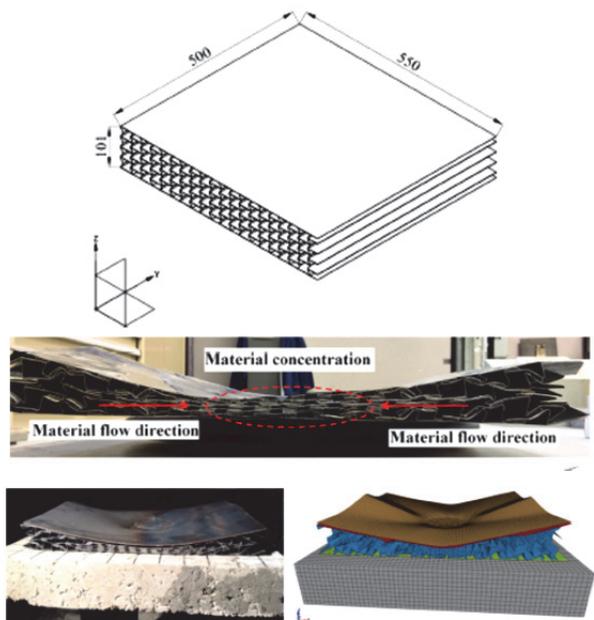


Рис. 18. Испытание защитной панели на взрыв от самодельного заряда  
[Fig. 18. Testing the protective panel for an explosion under a self-made charge] [45]

Эксперименты [50] и [51] посвящены исследованиям динамики конструкций при ударных воздействиях. Пространственная рама из испытания [50] подвергалась серии неупругих ударов массивным телом, свободно падающим с различных высот. При этом фиксировалась динамическая ре-

акция на ударное воздействие. В результате установлено, что для пространственных рам значения максимальной амплитуды наблюдаемых характеристик достигаются в первой четверти периода основной частоты колебаний системы. Объектом для испытания [51] являлась стропильная ферма пролетом 18 м, установленная в каркасе промышленного здания. Эта ферма подвергалась исследованию при ненормируемом ударном воздействии, которое включало динамическую разгрузку фермы при моделировании обрыва подвеса  $K_1$  (см. рис. 17) вентиляционно-охладительного комплекса (ВОК), закрепленного в нижний узел фермы. При этом падение груза в цех предотвращалось страховочными канатами, связывающими груз (модель ВОК) и две соседних фермы, расположенные по разным сторонам от испытываемой конструкции. В результате была определена максимальная масса ВОК, который можно разместить на ферме при обеспечении недопущения появления значительных пластических деформаций в случае возникновения такого рода запроектных воздействий. В качестве другого воздействия на конструкцию рассматривался обрыв троса ВОК, сопровождающийся ударом по страховочной траверсе, закрепляемой в нижний узел фермы. Такое воздействие моделировалось введением двух канатов  $K_1$  и  $K_2$  (см. рис. 17). После разрыва каната  $K_1$  с грузом последний совершает свободное падение и передает ударный импульс с помощью каната  $K_2$  в узел нижнего пояса фермы.

**Вывод.** Оценка степени силового сопротивления стальных конструкций аварийным воздействиям, в том числе их живучести, наиболее достоверно может быть выполнена при верификационных экспериментальных исследованиях, моделирующих эти воздействия. Необходимо расширять область нормирования запроектных воздействий на стальные конструкции с целью более всесторонней оценки безопасности объектов при возникновении различных аварийных ситуаций. Основываясь на результатах обзора, можно отметить, что мало внимания уделяется экспериментальным исследованиям, включающим локальные разрушения узлов соединения стальных балок с колоннами при запроектных воздействиях, а также напряженно-деформированному состоянию рамных систем при локальных просадках грунта.

© Алексейцев А.В., Курченко Н.С., 2018

#### Благодарности

Авторы сердечно благодарят почетного работника науки и техники Российской Федерации, заслуженного ученого Брянской области, руководителя научной школы «Повышение прочности, конструктивной безопас-

ности, виброзащитности и срока службы строительных систем и машиностроительной продукции», заведующего кафедрой механики Брянского государственного инженерно-технологического университета доктора технических наук, профессора Игоря Нафтольевича Серпика за доброжелательное отношение и помощь в научных исследованиях.

### Список литературы

1. Бондаренко В.М., Клюева Н.В., Колчунов В.И., Андросова Н.Б. Некоторые результаты анализа и обобщения научных исследований по теории конструктивной безопасности и живучести // Строительство и реконструкция. 2012. № 4. С. 3–14.
2. Колчунов В.И. Основные направления развития конструктивных решений и обеспечение безопасности жилища // Промышленное и гражданское строительство. 2007. № 10. С. 12–15.
3. Тамразян А.Г. Рекомендации к разработке требований к живучести зданий и сооружений // Вестник МГСУ. 2011. Т. 1. № 2. С. 77–83.
4. Кривошапко С.Н. Виды аварий и разрушений пространственных структур и оболочек // Строительство и реконструкция. 2015. № 1. С. 22–32.
5. Клюева Н.В., Ветрова О.А. Экспериментально-теоретические исследования живучести эксплуатируемых железобетонных рам при внезапных повреждениях // Бетон и железобетон. 2006. № 6. С. 12–15.
6. Колчунов В.И., Андросова Н.Б., Колчина Т.О. К анализу экспериментально-теоретических исследований живучести коррозионно-повреждаемых железобетонных балочных систем с разрушением по наклонному сечению // Промышленное и гражданское строительство. 2012. № 12. С. 69–72.
7. Fu Q.N., Tan K.H., Zhou X. H. et. all. Load-resisting mechanisms of 3D composite floor systems under internal column-removal scenario // Engineering structures. 2017. № 148. Pp. 357–372.
8. Izzuddin B.A., Vlassis A.G., Elghazouli A.Y., Nethercot D.A. Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss. Part I. Simplified assessment framework // Engineering structures. 2008. № 30 (5). Pp. 1308–1318.
9. Li H., El-Tawil S. Three-dimensional effects and collapse resistance mechanisms in steel frame buildings // Journal of Structural Engineering. 2014. 140: A4014017.
10. Yang B., Tan K.H. Experimental tests of different types of bolted steel beam-column joints under a central-column-removal scenario // Engineering Structures. 2013. № 54. Pp. 112–130.
11. Алексейцев А.В., Сертик И.Н. Экспериментально-теоретический анализ запроектного воздействия на стальную раму со страховочными тяжами // Строительство и реконструкция. 2015. № 1. С. 3–10.
12. Сертик И.Н., Алексейцев А.В. Оценка нагруженности повреждаемых стальных рам с учетом ударного взаимодействия с внешними преградами // Проблемы инновационного биосферно-совместимого социально-экономического развития в строительном, жилищно-коммунальном и дорожном комплексах: матер. 3-й Междунар. науч.-практ. конф. Брянск, 2013. Т. 1. С. 375–378.
13. Lanhui G., Shan G., Feng F. Structural performance of semi-rigid composite frame under column loss // Engineering structures. № 95. Pp. 112–126.
14. Li L., Wang W., Chen Y.Y., Lu Y. Experimental investigation of beam-to-tubular column moment connections under column removal scenario // Journal of Constructional Steel Research. 2013. № 88. Pp. 244–255.
15. Guo L.H., Gao S., Fu F., Wang Y.Y. Experimental study and numerical analysis of progressive collapse resistance of composite frames // Journal of Construction Steel Research. 2013. № 89. Pp. 236–251.
16. Dinu F., Dubina D., Marginean I., Neagu C., Petran I. Structural connections of steel building frames under extreme loading // Advanced Material Research. 2015. Vol. 1111. Pp. 223–228.
17. Demonceau J.F., Jaspert J.P. Experimental test simulating a column loss in a composite frame // Advanced Steel Construction. 2010. Vol. 6. No 3. Pp. 891–913.
18. Kuhlmann U., Roelle L., Izzuddin B. Resistance and Response of Steel and Steel-Concrete Composite Structures in Progressive Collapse Assessment // Structural Engineering International. 2012. Vol. 22. Pp. 86–92.
19. Florea D., Ioan M., Dan D. Experimental testing and numerical analysis of 3D steel frame system under column loss // Engineering structures. 2016. Vol. 113. Pp. 59–70.
20. Меднов Е.А. Оценка динамических усилий в элементах металлоконструкций при внезапном запроектном воздействии: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. М., 2011. 23 с.
21. Федоров В.С., Меднов Е.А. Влияние исходного напряженно-деформированного состояния и уровня нагружения на возникающий динамический эффект при аварийном разрушении опоры в неразрезных стальных балках // Строительство и реконструкция. 2010. № 6. С. 48–52.
22. Федоров В.С., Меднов А.Е., Меднов Е.А. К расчету динамических догрузений в неразрезных балках // Вестник РААСН. 2011. № 15. С. 162–166.
23. Song B.I., Giriunas K.A., Sezen H. Progressive collapse testing and analysis of a steel frame building // Journal of constructional steel research. 2014. Vol. 94. Pp. 76–83.
24. Ortiz J.A., Hernandez L.A., Hernandez M. et al. Full-scale experimental and numerical study about structural behaviour of a thin-walled cold-formed steel building affected by ground settlements due to land subsidence // Prevention and Mitigation of Natural and Anthropogenic Hazards due to Land Subsidence: Proceedings of the International Association of Hydrological Sciences (IAHS). Nagoya, Japan, 2015. Vol. 372. Pp. 141–144.
25. Janssens V.M., O'Dwyer D.W. Disproportionate Collapse in Building Structures. Joint Symposium on Bridge and Infrastructure Research in Ireland (BRI 10) and Concrete Research in Ireland (CRI 10). Cork, Ireland, 2010.
26. Song B.I., Sezen H. Experimental and analytical progressive collapse assessment of a steel frame building // Engineering structures. 2013. Vol. 56. Pp. 664–672.
27. Song B.I., Sezen H., Giriunas K. Experimental and analytical assessment on progressive collapse potential of

actual steel frame buildings. ASCE Structures Conference and North American Steel Construction Conference, American Society of Civil Engineers, Orlando, Florida, 2010.

28. *Hernandez-Castillo L.A., Ortiz-Lozano J.A., Hernandez-Marin M.* et al. Fragility curves for thin-walled cold-formed steel wall frames affected by ground settlements due to land subsidence // *Thin-walled structures*. 2015. Vol. 87. Pp. 66–75.

29. *Shekastehband B., Azaraxsh A.A., Showkati H.* et al. Behavior of semi-supported steel shear walls: Experimental and numerical simulations // *Engineering structures*. 2017. Vol. 135. Pp. 161–176.

30. *Guo L., Rong Q., Ma X., Zhang S.* Behavior of steel plate shear wall connected to frame beams only // *International Journal of Steel Structures*. 2011. № 11 (4). Pp. 467–479.

31. *Kurata M., Leon R.T., Roches R., Nakashima M.* Steel plate shear wall with tension-bracing for seismic rehabilitation of steel frames // *Journal of constructional steel research*. 2012. Vol. 71. Pp. 92–103.

32. *Clayton P.M., Berman J.W., Lowes L.N.* Seismic performance of self-centering steel plate shear walls with beam-only-connected web plates // *Journal of constructional steel research*. 2015. Vol. 106. Pp. 198–208.

33. *Dubina D., Dinu F.* Experimental evaluation of dual frame structures with thin-walled steel panels // *Thin-walled structures*. 2014. Vol. 78. Pp. 57–69.

34. *Serror M.H., Hassan E.M., Mourad S.A.* Experimental study on the rotation capacity of cold-formed steel beams // *Journal of constructional steel research*. 2016. Vol. 121. Pp. 216–228.

35. *Bagheri S.A., Petkovski M.K., Mirghaderi P.R.* Experimental work on cold-formed steel elements for earthquake resilient moment frame buildings // *Engineering structures*. 2012. Vol. 42. Pp. 371–386.

36. *Padilla-Llano D., Moen C.D., Eatherton M.R.* Cyclic axial response and energy dissipation of cold-formed steel framing members // *Thin-walled structures*. 2014. Vol. 78. Pp. 95–107.

37. *Hassan E.M., Serror M.H., Mourad S.A.* Behavior of cold-formed steel in moment-resisting frames // *Materials of Scientific Thesis at Department of Structural Engineering, Faculty of Engineering, Cairo University*, 2016.

38. *Eghbali N.B., Mirghaderi S.R.* Experimental investigation of steel beam to RC column connection via a through-plate // *Journal of constructional steel research*. 2017. Vol. 133. Pp. 125–140.

39. *Mirghaderi S.R., Eghbali N.B.* Analytical investigation of a new Through Column-Type Joint for composite reinforced concrete and steel frames // *The World Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM13)*, Jeju, Korea, September 2013.

40. *Mirghaderi S.R., Eghbali N.B., Ahmadi M.M.* Moment-connection between continuous steel beams and reinforced concrete column under cyclic loading // *Journal of constructional steel research*. 2016. Vol. 118. Pp. 105–119.

41. *Серпик И.Н., Алексейцев А.В., Гусаков А.И.* Экспериментально-теоретические исследования образования пластических шарниров в стержнях замкнутого тонкостенного сечения при сложном сопротивлении //

Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: материалы 67-й Всероссийской науч.-техн. конф. Самара: СГАСУ, 2010. С. 131–133.

42. *Парфенов С.Г., Алексейцев А.В.* Моделирование нелинейного деформирования стальных балок и рам и оценка их предельной несущей способности // *Вестник отделения строительных наук РААСН*. Вып. 18. Москва, 2014. С. 60–64.

43. *Серпик И.Н., Алексейцев А.В.* Экспериментальные исследования несущей способности пространственных металлических рам // *Вестник МГСУ*. 2012. № 5. С. 40–44.

44. *Jun W., Yu C., Kai W.* Residual strength of CHS short steel columns after lateral impact // *Thin-walled structures*. 2017. Vol. 118. Pp. 23–36.

45. *Qi C., Remennikov A., Pei L.-Z.* Impact and close-in blast response of auxetic honeycomb-cored sandwich panels: Experimental tests and numerical simulations // *Composite structures*. 2017. Vol. 180. Pp. 161–178.

46. *Remennikov A.* Experimental investigation and simplified modeling of response of steel plates subjected to close-in blast loading from spherical liquid explosive charges // *International journal of impact engineering*. 2017. Vol. 101. Pp. 78–89.

47. *Nurick G.N.* Behaviour of sandwich panels subjected to intense air blast. Part 1. Experiments // *Composite Structures*. 2009. № 91 (4). Pp. 433–441.

48. *Santosa S.P., Arifurrahman F., Izzudin M.H.* Response Analysis of Blast Impact Loading of Metal-Foam Sandwich Panels // *11<sup>th</sup> International Symposium on Plasticity and Impact Mechanics (IMPLAST): Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. Pp. 495–502.

49. *Wang H.* Experimental study of large-sized concrete filled steel tube columns under blast load // *Construction and building materials*. 2017. Vol. 134. Pp. 131–141.

50. *Серпик И.Н., Курченко Н.С., Алексейцев А.В.* Экспериментальное исследование деформаций стальной рамы при ударном нагружении // *Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции: материалы VIII Всероссийской (II Международной) конференции*. Чебоксары: Изд-во Чуваши. ун-та, 2014. С. 317–321.

51. *Алексейцев А.В., Курченко Н.С.* Деформации стальных стропильных ферм при ударных аварийных воздействиях // *Инженерно-строительный журнал*. 2017. № 5. С. 3–13.

## References

1. Bondarenko V.M., Klyuyeva N.V., Kolchunov V.I. (2012). Some results of analysis and generalization of scientific research on the theory of constructive safety and survivability. *Construction and reconstruction*, (4), 3–14. (In Russ.)

2. Kolchunov V.I. (2007). The basic directions of development of constructive decisions and maintenance of safety of dwelling. *Industrial and civil construction*, (10), 12–15. (In Russ.)

3. Tamrazyan A.G. (2011). Recommendations to the development of requirements for the survivability of buildings and structures. *Bulletin of MGSU*, 1(2), 77–83. (In Russ.)

4. Krivoshapko S.N. (2015). Types of accidents and destruction of spatial structures and shells. *Building and reconstruction*, (1), 22–32. (In Russ.)
5. Klyueva N.V., Vetrov O.A. (2006). Experimental-theoretical studies of the survivability of exploited reinforced concrete frames in case of sudden damage. *Concrete and reinforced concrete*, (6), 12–15. (In Russ.)
6. Kolchunov V.I., Androsova N.B., Kolchina T.O. (2012). To the analysis of experimental and theoretical studies on the livability of corrosion-damaged reinforced concrete beam systems with fracture along an inclined cross section. *Industrial and civil construction*, (12), 69–72. (In Russ.)
7. Fu Q.N., Tan K.H., Zhou X.H. (2017). Load-resisting mechanisms of 3D composite floor systems under internal column-removal scenario. *Engineering structures*, (148), 357–372.
8. Izzuddin B.A., Vlassis A.G., Elghazouli A.Y., Nethercot D.A. (2008). Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss. Part I. Simplified assessment framework. *Engineering structures*, 30(5), 1308–1318.
9. Li H., El-Tawil S. (2014). Three-dimensional effects and collapse resistance mechanisms in steel frame buildings. *Journal of Structural Engineering*, 140:A4014017.
10. Yang B. (2013). Experimental tests of different types of bolted steel beam-column joints under a central-column-removal scenario. *Engineering Structures*, (54), 112–130.
11. Alekseytsev A.V., Serpik I.N. (2015). Experimental-theoretical analysis of the beyond design effect on a steel frame with safety belts. *Construction and Reconstruction*, (1), 3–10. (In Russ.)
12. Serpik I.N., Alekseytsev A.V. (2013). Assessment of the loading of damaged steel frames with allowance for impact interaction with external obstacles. *Problems of innovative biosphere-compatible socio-economic development in the construction, housing and communal and road complexes*. Mater. 3<sup>rd</sup> Intern. scientific-practical. conf. Bryansk, 1, 375–378. (In Russ.)
13. Lanhui G., Shan G., Feng F. (2011). Structural performance of semi-rigid composite frame under column loss. *Engineering structures*, (95), 112–126.
14. Li L., Wang W., Chen Y.Y., Lu Y. (2013). Experimental investigation of beam-to-tubular column moment connections under column removal scenario. *Journal of Constructional Steel Research*, (88), 244–255.
15. Guo L.H., Gao S., Fu F., Wang Y.Y. (2013). Experimental study and numerical analysis of progressive collapse resistance of composite frames. *Journal of Construction Steel Research*, (89), 236–251.
16. Dinu F., Dubina D., Marginean I., Neagu C., Petran I. (2015). Structural connections of steel building frames under extreme loading. *Advanced Material Research*, 1111, 223–228.
17. Demonceau J.F., Jaspert J.P. (2010). Experimental test simulating a column loss in a composite frame. *Advanced Steel Construction*, 6(3), 891–913.
18. Kuhlmann U., Roelle L., Izzuddin B. (2012). Resistance and Response of Steel and Steel-Concrete Composite Structures in Progressive Collapse Assessment. *Structural Engineering International*, 22, 86–92.
19. Florea D., Ioan M., Dan D. (2016). Experimental testing and numerical analysis of 3D steel frame system under column loss. *Engineering structures*, 113, 59–70.
20. Mednov E.A. (2011). *Otsenka dinamicheskikh usilii v elementakh metallokonstruktsiy pri vnezapnom zaproyektnom vozdeystvii* [Evaluation of dynamic forces in the elements of metal structures with sudden emergency action] (PhD Dissertation). Moscow, Russia. (In Russ.)
21. Fedorov V.S., Mednov E.A. (2010). Influence of the initial stress-strain state and the loading level on the emerging dynamic effect in the case of emergency failure of a support in continuous steel beams. *Construction and Reconstruction*, (6), 48–52. (In Russ.)
22. Fedorov V.S., Mednov A.E., Mednov E.A. (2011). To the calculation of dynamic immersions in continuous beams. *The Bulletin of the Russian Academy of Construction Sciences*, (15), 162–166. (In Russ.)
23. Song B.I., Giriunas K.A., Sezen H. (2014). Progressive collapse testing and analysis of a steel frame building. *Journal of constructional steel research*, 94, 76–83.
24. Ortiz J.A., Hernandez L.A., Hernandez M. (2015). Full-scale experimental and numerical study about structural behaviour of a thin-walled cold-formed steel building affected by ground settlements due to land subsidence. *Prevention and Mitigation of Natural and Anthropogenic Hazards due to Land Subsidence*. Proceedings of the International Association of Hydrological Sciences (IAHS). Nagoya, Japan, 372, 141–144.
25. Janssens V.M., O'Dwyer D.W. (2010) Disproportionate Collapse in Building Structures. *Joint Symposium on Bridge and Infrastructure Research in Ireland (BRI 10) and Concrete Research in Ireland (CRI 10)*. Cork, Ireland, 2010.
26. Song B.I., Sezen H. (2013). Experimental and analytical progressive collapse assessment of a steel frame building. *Engineering structures*, 56, 664–672.
27. Song B.I., Sezen H., Giriunas K. (2010). *Experimental and analytical assessment on progressive collapse potential of actual steel frame buildings*. ASCE Structures Conference and North American Steel Construction Conference, American Society of Civil Engineers, Orlando, Florida, 2010.
28. Hernandez-Castillo L.A., Ortiz-Lozano J.A., Hernandez-Marin M. (2015). Fragility curves for thin-walled cold-formed steel wall frames affected by ground settlements due to land subsidence. *Thin-walled structures*, 87, 66–75.
29. Shekastehband B., Azaraxsh A.A., Showkati H. (2017). Behavior of semi-supported steel shear walls: Experimental and numerical simulations. *Engineering structures*, 135, 161–176.
30. Guo L., Rong Q., Ma X., Zhang S. (2011). Behavior of steel plate shear wall connected to frame beams only. *International Journal of Steel Structures*, 11(4), 467–479.
31. Kurata M., Leon R.T., Roches R., Nakashima M. (2012). Steel plate shear wall with tension-bracing for seismic rehabilitation of steel frames. *Journal of constructional steel research*, 71, 92–103.
32. Clayton P.M., Berman J.W., Lowes L.N. (2015). Seismic performance of self-centering steel plate shear walls with beam-only-connected web plates. *Journal of constructional steel research*, 106, 198–208.
33. Dubina D., Dinu F. (2014). Experimental evaluation of dual frame structures with thin-walled steel panels. *Thin-walled structures*, 78, 57–69.

34. Serror M.H., Hassan E.M., Mourad S.A. (2016). Experimental study on the rotation capacity of cold-formed steel beams. *Journal of constructional steel research*, 121, 216–228.
35. Bagheri S.A., Petkovski M.K., Mirghaderi P.R. (2012). Experimental work on cold-formed steel elements for earthquake resilient moment frame buildings. *Engineering structures*, 42, 371–386.
36. Padilla-Llano D., Moen C.D., Eatherton M.R. (2014). Cyclic axial response and energy dissipation of cold-formed steel framing members. *Thin-walled structures*, 78, 95–107.
37. Hassan E.M., Serror M.H., Mourad S.A. (2016). *Behavior of cold-formed steel in moment-resisting frames*. Materials of Scientific thesis at Department of Structural Engineering, Faculty of Engineering, Cairo University, 2016.
38. Eghbali N.B., Mirghaderi S.R. (2017). Experimental investigation of steel beam to RC column connection via a through-plate. *Journal of constructional steel research*, 133, 125–140.
39. Mirghaderi S.R., Eghbali N.B. (2013). *Analytical investigation of a new Through Column-Type Joint for composite reinforced concrete and steel frames*. The World Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM13), Jeju, Korea, September 2013.
40. Mirghaderi S.R., Eghbali N.B., Ahmadi M.M. (2016). Moment-connection between continuous steel beams and reinforced concrete column under cyclic loading. *Journal of constructional steel research*, 118, 105–119.
41. Serpik I.N., Alekseytsev A.V., Gusakov A.N. (2010). Experimental and theoretical studies of the formation of plastic hinges in rods of a closed thin-walled section under complex resistance. *Traditions and Innovations in Construction and Architecture*. Materials of the 67<sup>th</sup> All-Russian Scientific and Technical University Conf. Samara: SSUABCE, 131–133. (In Russ.)
42. Parfenov S.G., Alekseyev A.V. (2014). Modeling of non-linear deformation of steel beams and frames and estimation of their ultimate load-bearing capacity. *Bulletin of the Department of Building Sciences of RAASN*. Moscow, (18), 60–64.
43. Serpik I.N., Alekseytsev A.V. (2012). Experimental studies of the load-bearing capacity of spacer metal frames. *Bulletin of MGSU*, (5), 40–44. (In Russ.)
44. Jun W., Yu C., Kai W. (2017). Residual strength of CHS short steel columns after lateral impact. *Thin-walled structures*, 118, 23–36.
45. Qi C., Remennikov A., Pei L.Z. (2017). Impact and close-in blast response of auxetic honeycomb-cored sandwich panels: Experimental tests and numerical simulations. *Composite structures*, 180, 161–178.
46. Remennikov A. (2017). Experimental investigation and simplified modeling of response of steel plates subjected to close-in blast loading from spherical liquid explosive charges. *International journal of impact engineering*, 101, 78–89.
47. Nurick G.N. (2009). Behavior of sandwich panels subjected to intense air blast. Part 1. Experiments. *Composite Structures*, 91(4), 433–441.
48. Santosa S.P., Arifurrahman F., Izzudin M.H. (2017). Response Analysis of Blast Impact Loading of Metal-Foam Sandwich Panels. *Procedia Engineering*. 11<sup>th</sup> International Symposium on Plasticity and Impact Mechanics (IMPLAST), 173, 495–502.
49. Wang H. (2017). Experimental study of large-sized concrete filled steel tube columns under blast load. *Construction and building materials*, 134, 131–141.
50. Serpik I.N., Kurchenko N.S., Alekseytsev A.V. (2014). Experimental study of steel frame deformations under impact loading. *New in Architecture, Design of Building Structures and Reconstruction*. Materials of the VIII All-Russian (II International) Conference. Cheboksary: Publishing house Chuvash. Univ., 317–321. (In Russ.)
51. Alekseytsev A.V., Kurchenko N.S. (2017). Deformations of steel trusses under emergency action. *Magazine of Civil Engineering*, 5(73), 3–13.

#### Об авторах

**Алексейцев Анатолий Викторович** – кандидат технических наук, доцент кафедры проектирования зданий и сооружений, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет». *Область научных интересов:* строительные конструкции, строительная механика. *Контактная информация:* e-mail – aalexw@mail.ru.

**Курченко Наталья Сергеевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры строительного производства, Брянский государственный инженерно-технологический университет. *Область научных интересов:* строительные конструкции, организация строительства. *Контактная информация:* e-mail – ms.kurchenko@mail.ru.

#### About the authors

**Alekseytsev Anatoly** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Engineering, Institute of Construction and Architecture, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). *Scientific interests:* building constructions, structural mechanics. *Contact:* e-mail – aalexw@mail.ru. Scopus ID: 57191530761. ORCID: 0000-0002-4765-5819. E-library SPIN: 3035-5571.

**Kurchenko Natalya** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Production, Institute of Construction, Bryansk State University of Engineering and Technology. *Scientific interests:* building constructions, organization and planning of construction. *Contact:* e-mail – ms.kurchenko@mail.ru. Scopus ID: 57196073119. E-library SPIN: 6641-1733.

#### Для цитирования

Алексейцев А.В., Курченко Н.С. Обзор методов и результатов экспериментальных исследований стальных и сталебетонных конструкций при особых воздействиях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 205–215. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-205-215.

#### For citation

Alekseytsev A.V., Kurchenko N.S. (2018). Review of methods and results of experimental investigations of steel and steel concrete structures under special impact. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(3), 205–215. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-205-215.

УДК 691

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-216-225

**CREEP OF POLYTETRAFLUOROETHYLENE UNDER VARIOUS LOADING CONDITIONS**

L.I. OGORODOV, I.P. NICKOLAEVA, E.L. YAKOVLEVA, O.V. FOMINYKH

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University  
29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia*(received: March 14, 2018; accepted: April 27, 2018)*

This article contains results of experimental research of polytetrafluoroethylene (PTFE) deformation and creep under linear and plane stresses. During the tests predetermined values of real stresses considering current deformation were constant. The equation of mechanical states considering instant elastic, viscoelastic, instant plastic and viscoplastic components of total deformation was obtained. The equation is used for the description of PTFE deformations (F-4, F-4D, F-4D0) under stationary and non-stationary cyclic loads in flat stress condition with an application of material constant volume condition, condition of similarity of deviators of stresses and deformations and with the input of parameters which are functions of the form of stress deviators. The results of PTFE creep investigation under real stresses reaching ultimate values are relevant and unique.

**Keywords:** creep, polytetrafluoroethylene, mechanical equation of states, static loadings, cyclic loadings, flat stress state, ultimate deformations

**ПОЛЗУЧЕСТЬ ПОЛИТЕТРАФТОРЭТИЛЕНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НАГРУЖЕНИЯ**

Л.И. ОГОРОДОВ, И.П. НИКОЛАЕВА, Е.Л. ЯКОВЛЕВА, О.В. ФОМИНЫХ

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, Российская Федерация, 195251*(поступила в редакцию: 14 марта 2018 г.; принята к публикации: 27 апреля 2018 г.)*

В статье представлены результаты экспериментальных исследований деформации и ползучести политетрафторэтилена (ПТФЭ) при линейных и плоских напряженных состояниях. Во время испытаний заданные значения истинных напряжений с учетом текущей деформации были постоянными. Получено уравнение механических состояний, учитывающее мгновенноупругие, вязкоупругие, мгновеннопластические и вязкопластические компоненты полной деформации. Уравнение используется для описания деформаций ПТФЭ (F-4, F-4D, F-4D0) при стационарных и нестационарных циклических нагрузках в условиях плоского напряженного состояния с применением условия постоянства объема материала, условия подобия девиаторов напряжений и деформаций и ввода параметров, которые являются функциями вида девиаторов напряжений. Результаты исследования ползучести ПТФЭ при реальных напряжениях, достигающих предельных значений, являются актуальными и уникальными.

**Ключевые слова:** ползучесть, политетрафторэтилен, механическое уравнение состояний, статические нагрузки, циклические нагрузки, плоское напряженное состояние, конечные деформации

**Introduction.** One of the directions of the development of engineer durability calculations of structural elements theory is consideration of their rheonomous properties in order to describe the processes of long-term deforming and destruction. From the one hand, for calculating creep and long-term durability of structural elements it is necessary to use the equation of mechanical states which describes complicated deformation processes. From the other hand,

kinematic equation of damages should be used in deformation type. The materials show rheonomous and hereditary features in deformation processes as well as in long-term destruction. Despite of the fact that there are a lot of theoretical and experimental researches, the question of choosing adequate description method of deformational processes for different classes of polymer materials under non-stationary loading and complex stress cannot be finally solved,

especially in the most complex thermomechanical loadings [1–7]. The requirements of practical applicability for the resulting mechanical state equation in some cases of cyclic loading makes us to make a compromise in accuracy while describing complex deformation processes. The task is to reduce this compromise to the logical minimum.

The development of cyclic creep model provides new opportunities for experimental research task formulation, makes experiment purposeful and allows to choose test program for checking the theory.

**Research targets.** Studies of creep of partially crystal polymer and composite materials on polymer base remain topical. The influence of complex static and cyclic stress state and non-stationary loading conditions on deformation process mostly remains unclear.

Research targets are:

1. According to the short-term monotonic loading tests data, to make up an equation of mechanical states in terms of real stresses and deformations under complex stress state for direct and reverse creep for three modifications of tetrafluoroethylene.

2. To research and to describe creep of the same materials under non-stationary static and cyclic stationary and non-stationary loading

3. To make a conclusion about the possibility of formularization of destruction deformation criteria for studied materials.

**Materials and testing method with predetermined intensity of real stresses.** The samples were made of pipe blanks of polytetrafluoroethylene F-4, F-4D by turning on the lathe tool and part of F-4D blanks were annealed; F-4D<sub>0</sub> blanks were heated until 80 °C with the following cooling in the heating stove. The degree of materials' crystallinity was detected by German – Weidinger's method and it is: 30% for F-4, 45% for F-4D, 38% for inner surface of F-4D<sub>0</sub>, 25% for outer surface of F-4D<sub>0</sub>. The densities of these materials are: for F-4 – 2.25 g/sm<sup>2</sup>, for F-4D and for F-4D<sub>0</sub> – 2.23 g/sm<sup>2</sup>.

The samples were thin-walled tubes with the wall thickness  $t_0 = 1.0$  mm in working part and the length of working part  $l_p = 120$  mm. The outer diameter ( $D_0$ ) of F-4 and F-4D working parts is 23.5 mm, for F-4D<sub>0</sub> – 26 mm. The wall thickness fluctuations along the working part did not exceed 0.05 mm. The fluctuations of working parts lengths were within  $\pm 1$  mm and the fluctuations of outer diameter – within  $\pm 0.1$  mm. The samples were fixed in special sealing caps.

Sample tests were held on equipment [25; 26], which allow to study mechanical properties of materials under biaxial stress state with static and cyclic loading.

Lateral sample deformation was measured on the base  $l_0 = 50$  mm by optical system with the value

of division 0.01 mm. Transverse deformation was measured by arrow indicator. Temperature was  $22 \pm 1$  °C.

The intensity of real stress values for tubular sample under flat stress state with static loading was obtained by formula:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\overline{\sigma_x} - \overline{\sigma_\theta})^2 + \overline{\sigma_x}^2 + \overline{\sigma_\theta}^2}. \quad (1)$$

Under cyclic loading the intensity of maximum stress value per cycle was obtained by formula:

$$\sigma_i^{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\overline{\sigma_x^{\max}} - \overline{\sigma_\theta^{\max}})^2 + (\overline{\sigma_x^{\max}})^2 + (\overline{\sigma_\theta^{\max}})^2}. \quad (2)$$

Real stress components (axial  $\overline{\sigma_x}$  and tangential  $\overline{\sigma_\theta}$ ) were measured with considering current values of outer diameter ( $D$ ) and thickness of the wall ( $t$ ). The thickness of the wall was measured from the condition of constant value. The ratio between main stress components  $n = \sigma_x/\sigma_\theta$  was established by choice of equipment plunger pair [25]. The delay time of equipment adjustment was not exceed 2 minutes, besides the fluctuations of stress intensity were not exceed 5% from set value of stress intensity  $\sigma_i$  or  $\sigma_i^{\max}$  and fluctuations  $n$  were not exceed 6%.

Obtained experimental data under short time loading and creep with static loading are presented in the form of deformation curves in coordinates  $\sigma_i - \varepsilon_i$  and creep curves in coordinates  $\varepsilon_i^{\max} - \tau$ . The intensity of real (logarithmic) stresses were obtained by formula:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\tau)^2 + (\varepsilon_\tau - \varepsilon_x)^2}. \quad (3)$$

Real deformation components  $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\tau$  were obtained by following dependences, considering current sample dimensions  $D, t$  and current base  $l$  (the sample length):

$$\varepsilon_x = \ln \frac{l}{l_0}; \quad \varepsilon_\theta = \ln \frac{D-t}{D_0-t_0}; \quad \varepsilon_\tau = \ln \frac{t}{t_0}. \quad (4)$$

Lode's parameter for stresses is calculating:

$$\mu_s = 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \mu_s = 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1, \quad (5)$$

where  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  – the main stresses.

**Tests results. Polytetrafluoroethylene deformation under short time loading.** Short time loading PTFE deformation tests were held under linear and flat stress states with various ratios of axial and tangential stresses ( $n = \sigma_x/\sigma_\theta$ ) in conditions of proportional loading. For PTFE there is an influence of stress state type on deformation curve, besides the material shows the highest rigidity when the ratio  $\sigma_x/\sigma_\theta$  is close to equiaxial tension and the lowest – when it is under linear stress state. The variation of

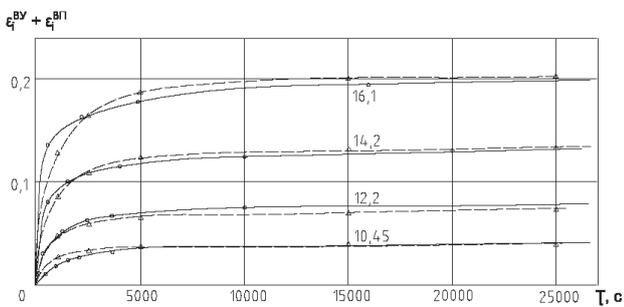
the loading speed from 0.03 MPa/sec. to 0.3 MPa/sec. influences on the deformation curves insignificantly.

The law of immediate deformation was studied by tests on the fast sample unloading from the fixed level of stress intensity under various types of stress state. Non-linear dependences of instantly elastic deformation from stress intensities for studied fluoroplastics are presented in an article [26]. According to the results of the measurements, the transverse deformation coefficient values under axial tension are vary from 0.3 to 0.48.

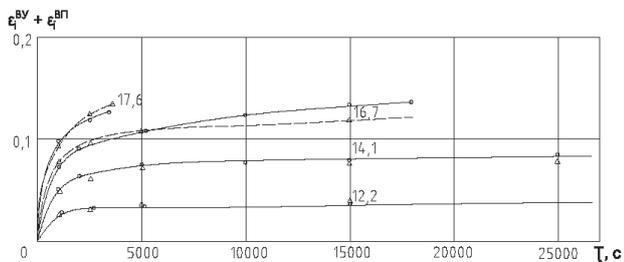
For the selection of the law of instant plastic deformation (the term is conditional) the data of the tests on the multiple loading with the speed  $d\sigma_i/dt = 0.1-0.3$  MPa/sec., with the registration of the  $\sigma_i$  and  $\varepsilon_i$  levels and further instant sample unloading was used. After exposure of at least one hour, permanent (instant elastic) deformations were measured. The dependence of instant plastic fluoroplastics deformations from the stress intensity is presented in the article [27]. Instant plastic deformations of fluoroplastics depend on the type of the stress state.

**Direct and reverse creep under static loading.**

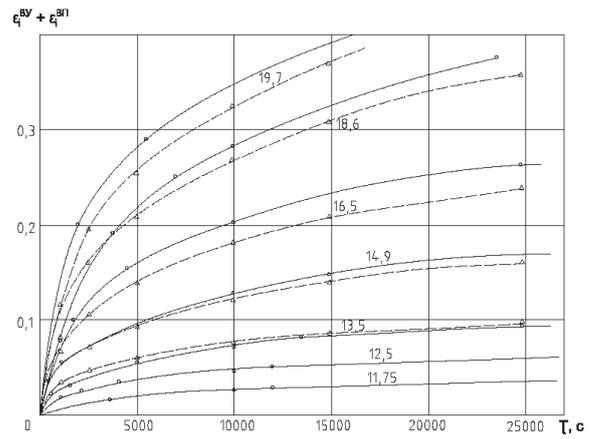
Direct creep is the increase of deformations in time under permanent real stresses (i.e. under constantly decreasing loads) (fig. 1–3). Complete deformation is the sum of four components: instant elastic, instant plastic, viscoplastic, viscoelastic [7–13]. To study viscoelastic creep deformation the tests on reverse creep (fig. 4–6) were held (returning after loading).



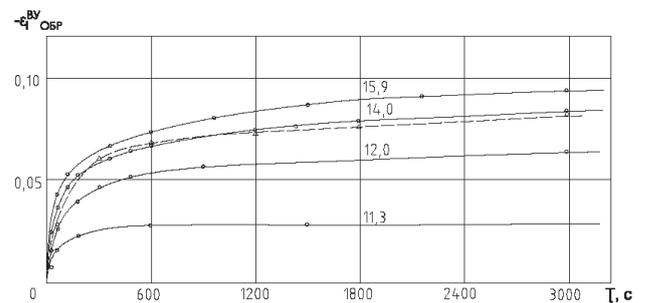
**Fig. 1. Rheonomic F-4D<sub>0</sub> creep dependence ( $n = 0.5$ ) under various intensities of real stresses  $\sigma_i$ :**  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves



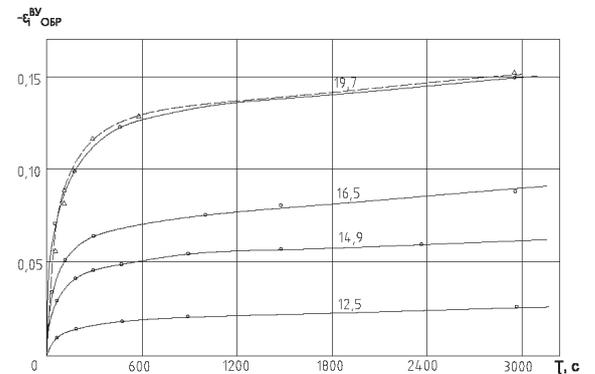
**Fig. 2. Rheonomic F-4D<sub>0</sub> creep dependence ( $n = 1.15$ ) under various intensities of real stresses  $\sigma_i$ :**  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves



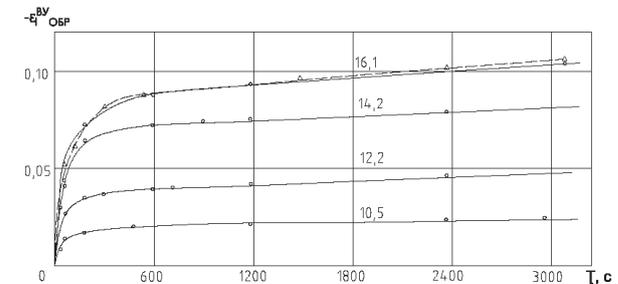
**Fig. 3. Rheonomic F-4D creep dependence ( $n = 0.5$ ) under various intensities of real stresses  $\sigma_i$ :**  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves



**Fig. 4. Reverse F-4 creep curves ( $n = 0.5$ ) under various intensities of real stresses  $\sigma_i$ :**  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves



**Fig. 5. Reverse F-4D creep curves ( $n = 0.5$ ) under various intensities of real stresses  $\sigma_i$ :**  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves



**Fig. 6. Reverse F-4D<sub>0</sub> creep curves ( $n = 0.5$ ) under various intensities of real stresses  $\sigma_i$ :**  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves

As a result, the complete equation of mechanical states in stress and deformation intensities ( $\sigma_i, \varepsilon_i$ ) under stationary loading was obtained, besides the condition of deformation speeds and stress deviators similarity is observed [27]:

$$\varepsilon_i = \frac{2(1+\nu)\sigma_i}{3E_0(1-\frac{\sigma_i}{\sigma_{**}})} + \gamma \left[ (\alpha - \beta\mu_S)e^{m(\frac{\sigma_i}{\sigma_*})} - 1 \right] + \int_0^\tau (a - b\mu_S)c \frac{\sigma_i}{\sigma_*} \left[ A_1 e^{-\frac{\tau}{\mu_1}} + A_2 e^{-\frac{\tau}{\mu_2}} \right] d\theta + \int_0^\tau (d - l\mu_S)k \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_*} - \delta \right) \left[ A_3 e^{-\frac{\tau}{\alpha}} \right] d\tau. \quad (6)$$

Table 1

Constant equations of mechanical states

Parameters	Studied materials		
	F-4	F-4D	F-4D <sub>0</sub>
$E_0$ , MPa	800	900	615
$\sigma_{**}$ , MPa	27.5	28.5	22.5
$\nu$	0.48/0.50	0.48/0.50	0.48/0.50
$\gamma$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
$\alpha$	0.05	0.20	0.25
$\beta$	0.03	0.06	0.08
$m$	2.80	1.65	2.20
$\sigma_*$ , MPa	10	10	10
$a$	1	1	1
$b$	0.1	0.1	0.6
$c$	0.30	0.08	0.26
$n$	3.2	3.7	2.8
$A_1$	$5.5 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-4}$	$9.5 \cdot 10^{-4}$
$A_2$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
$\mu_1$ , sec.	110	110	85
$\mu_2$ , sec.	2475	3200	3000
$d$	1	1	1
$l$	0.3	0.3	0.5
$\delta$	1.05	1.18	1.17
$k$	3.95	1.89	4.00
$A_3$	$7 \cdot 10^{-6}$	$14 \cdot 10^{-6}$	$26 \cdot 10^{-6}$
$\alpha$ , sec.	$14.0 \cdot 10^{-3}$	$14.1 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$

**Non-stationary static loading modes of studying materials.** Non-stationary static loading modes are presented on the fig. 7–10. Here also the dependences of real deformations from time are shown. According to the comparison of experimental and calculated data, generally, the calculation reproduces the creep process under complex loading mode with satisfactory accuracy. The experiment showed, that the differences are mostly connected with insufficient accuracy in approximation of functions  $A_1 e^{-\frac{\tau}{\mu_1}} + A_2 e^{-\frac{\tau}{\mu_2}}$ . To describe viscoelastic component of the complete

deformation in this function, it is necessary to take more than two exponents. One of the additional exponents has to have the relaxation time in the following interval:  $10 \cdot 10^3 \text{ sec.} \leq \mu \leq 15 \cdot 10^3 \text{ sec.}$

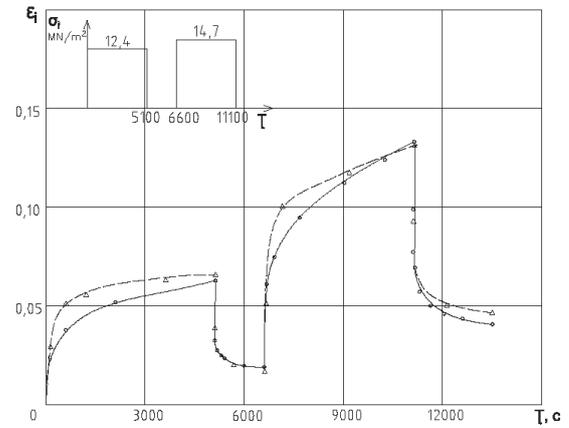


Fig. 7. Non-stationary static loading mode and creep curves F-4D ( $n = 0.5$ ):  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves

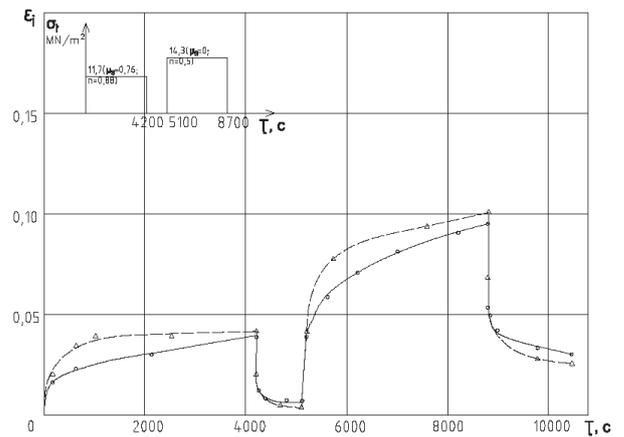


Fig. 8. Disproportional static loading mode and creep curves F-4D:  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves

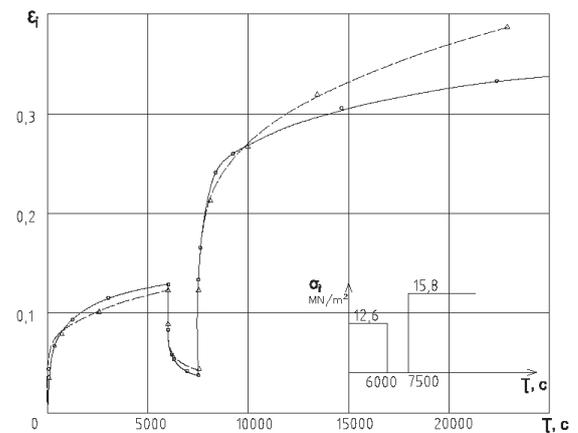
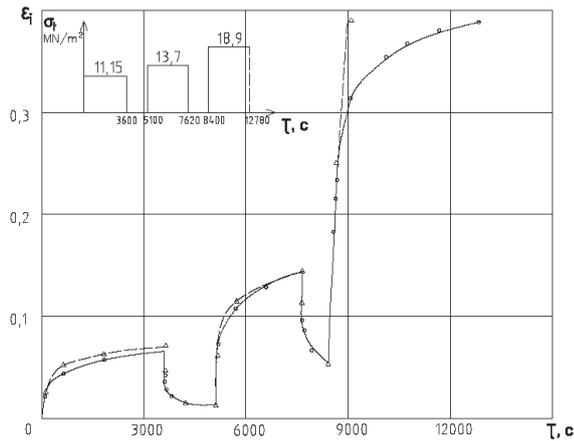
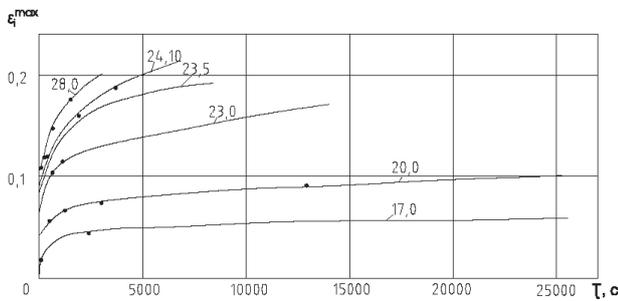


Fig. 9. Non-stationary static loading mode and creep curves F-4 ( $n = 0.5$ ):  
o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves

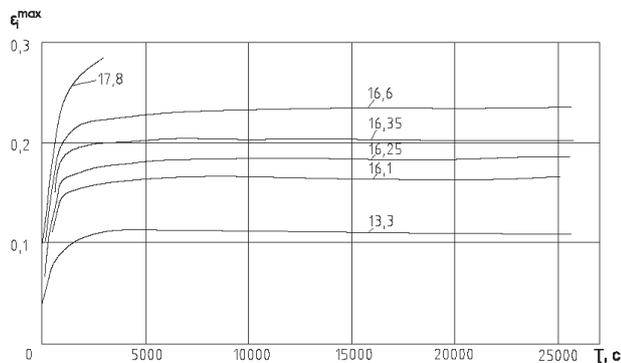


**Fig. 10. Non-stationary static loading mode and creep curves F-4 ( $n = 0.5$ ):**  
 o – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves

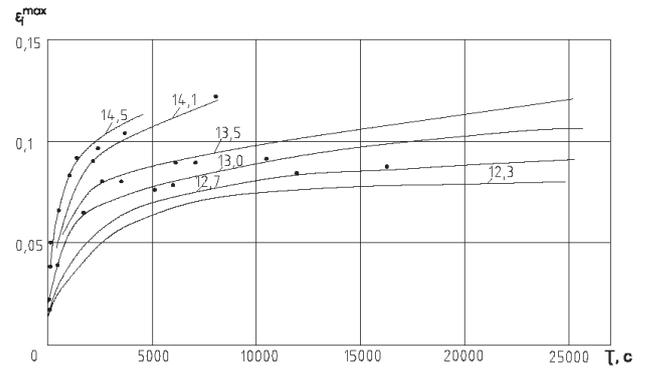
**Creep under cyclic loading with various frequencies.** Fluoroplastics F-4, F-4D, F-4D<sub>0</sub> creep under cyclic loading with the frequencies 2.4 Hz, 5.0 Hz and 10.0 Hz were tested in the conditions of maximum per cycle intensity constancy with the cycle asymmetric coefficient  $\tau = \sigma_i^{\min} - \sigma_i^{\max} = 0.5$  and temperature  $22 \pm 1 \text{ }^\circ\text{C}$  (fig. 14–16). The form of the cycle is sinusoidal. To compare creep complete deformations under static and cyclic loadings, isochronous dependences were made  $\sigma_i - \varepsilon_i$  and  $\sigma_i^{\max} - \varepsilon_i^{\max}$  while obtaining the creep time  $t = 5 \cdot 10^3 \text{ sec.}$  (fig. 11–13).



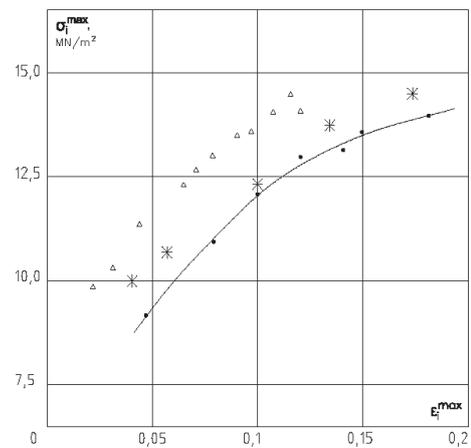
**Fig 11. Creep curves F-4 ( $n = 2.8$ ) under cyclic loading with the frequency of 10 Hz**



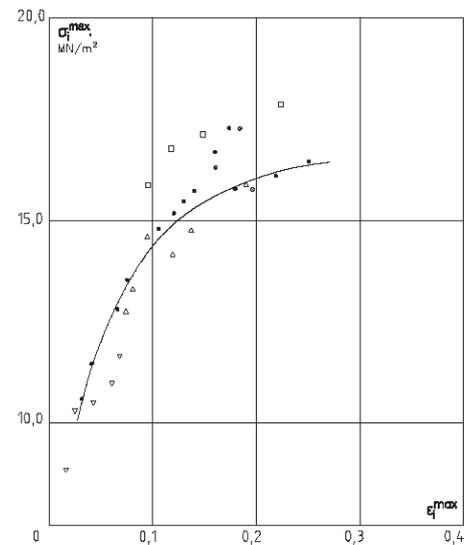
**Fig. 12. Creep curves F-4D<sub>0</sub> ( $n = 1.15$ ) under cyclic loading with the frequency of 5 Hz**



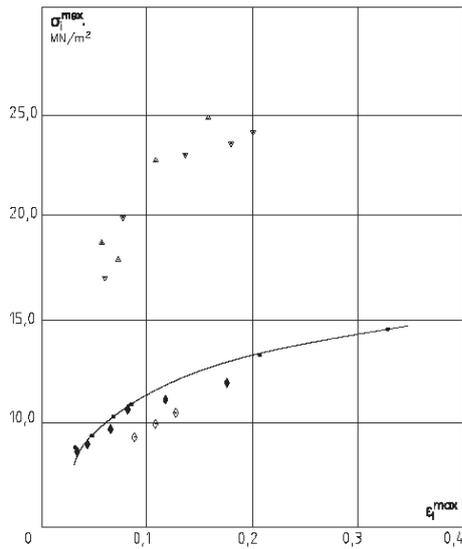
**Fig. 13. Creep curves F-4 ( $n = 1.25$ ) under cyclic loading with the frequency of 10 Hz**



**Fig. 14. The maximum stress intensity dependence from the maximum deformation intensity F-4 with  $\tau_* = 5000 \text{ sec.}$  ( $n = 1.25$ ):**  
 ● –  $f = 0$ ;  $\Delta$  –  $f = 10 \text{ Hz}$



**Fig. 15. The maximum stress intensity dependence from the maximum deformation intensity F-4D with  $\tau_* = 5000 \text{ sec.}$  ( $n = 1.25$ ):**  
 ● –  $f = 0$ ;  $\square$  –  $f = 2.5 \text{ Hz}$ ;  $\circ$  –  $f = 5 \text{ Hz}$ ;  
 $\Delta$  –  $f = 10 \text{ Hz}$ ;  $\nabla$  –  $f = 5 \text{ Hz}$  with  $n = 0.88$



**Fig. 16. The maximum stress intensity dependence from the maximum deformation intensity F-4D with  $\tau_* = 5000 \text{ sec. } (n = \infty)$ :**  
 • –  $f = 0$ ;  $\diamond$  –  $f = 0 \text{ Hz}$ ;  $\blacklozenge$  –  $f = 1.2 \text{ Hz}$ ;  
 $\Delta$  –  $f = 10 \text{ Hz}$ ;  $\nabla$  –  $f = 5 \text{ Hz}$  with  $n = 2.8$

Thus, experimental points of the same material and type of stress state under frequencies of 2.5 and 5.0 Hz do not completely match to the experimental ones under stationary static loading. It is also noticeable that the material rigidity tends to increase under cyclic loading in comparison with static one, if the maximum variable stress intensity during the cycle equals to the intensity of permanent stresses under stationary loading. Besides, in comparison with static loading and frequencies of 2.5 Hz and 5.0 Hz, under frequencies of 10 Hz there is a significant rigidity increase. The most valuable increase of the material rigidity is when  $n = \sigma_x / \sigma_\theta$  is close to  $n = \infty$  (linear tension), i.e. under conditions, when under static loading there is the most intensive development of viscoplastic deformations.

The examples of the creep curves under cyclic loading are presented on the fig. 11–13, 17, 18. The nature of the curves differs from one for the static loading. Let us apply for cyclic loading the same equation as for various cases of static loading from the previous section. The instant elastic and instant plastic intensity deformation components are calculated from the maximum stresses per cycle and viscoelastic component is calculated directly by substitution of a variable  $\sigma_i$  values in the equation:

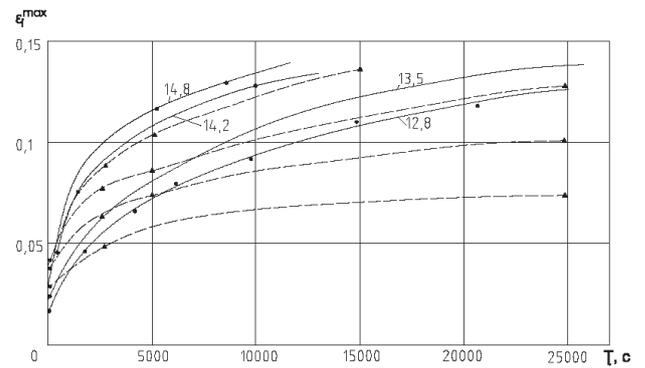
$$\epsilon_i^{VE} = (a - b\mu_S) \int_0^\tau c \left( \frac{\sigma_{im} + \sigma_{ia} \sin 2\pi f \theta}{\sigma_*} \right)^n k(\tau - \Delta) d\theta. \quad (7)$$

The calculation of the first three complete deformation components does not occur logical issues, but the calculation of viscoplastic component is not so obvious. After drafting series of attempts, the following

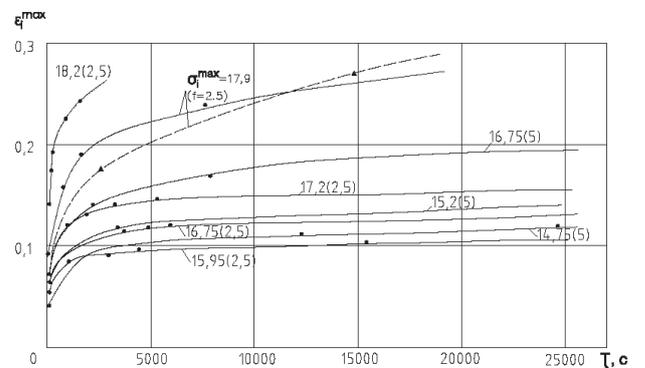
empirical dependence for that component under cyclic loading was suggested:

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{\max} = & \frac{2(1+\nu)\sigma_i^{\max}}{3E_0\left(1-\frac{\sigma_i^{\max}}{\sigma_{**}}\right)} + \gamma\left[(\alpha - \beta\mu_S)e^{m(\sigma_i^{\max}-\sigma_*)} - 1\right] + \\ & + (a - b\mu_S)\lambda_2 c \left(\frac{\sigma_i^{\max}}{\sigma_*}\right)^n \int_0^\tau \left[A_1 e^{-\frac{\tau}{\mu_1}} + A_2 e^{-\frac{\tau}{\mu_2}}\right] d\theta + \\ & + (d - l\mu_S)k \left(\frac{\sigma_i^{\max}}{\sigma_*} - \delta\right) \int_0^\tau A_3 e^{-\frac{\tau}{\alpha}} d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

where  $\lambda_2$  – is an empirical coefficient (for F-4  $\lambda_2 = 0.58$ , for F-4D  $\lambda_2 = 0.65$ , for F-4D<sub>0</sub>  $\lambda_2 = 0.5$ ). The calculated according to this equation creep curves are presented on the fig. 20, 21.



**Fig. 17. Creep curves F-4D ( $n = 1.25$ ) under cyclic loading with the frequency of 10 Hz:**  
 • – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves



**Fig. 18. Creep curves F-4D ( $n = 1.25$ ) under cyclic loading with the frequency of 2.5 Hz:**  
 • – experimental curves;  $\Delta$  – calculated curves

Moreover, there was made an attempt to use that empirical dependency also for creep deformation presentation under non-stationary modes of cyclic loading as a several cycle blocks with variable values of  $\sigma_i^{\max}$ [30].

**Discussions. Ultimate deformation of fluoroplastics under static and cyclic loading.** First of all, studying of ultimate deformation is important from an opportunity of formulation some deformation destruction criteria for polymer materials [7]. Experimental data about ultimate material deformation al-

lows to estimate objectively admissible creep deformation of structural elements. For the fluoroplastics in wide range of  $n$  there is no ultimate deformation constancy [30]. In whole series of non-stationary loading cases the current deformations  $\varepsilon_i$  ( $\varepsilon_i^{\max}$ ) already reach the ultimate value zone on the first loading steps (fig. 19). That also attests against deformation destruction criteria.

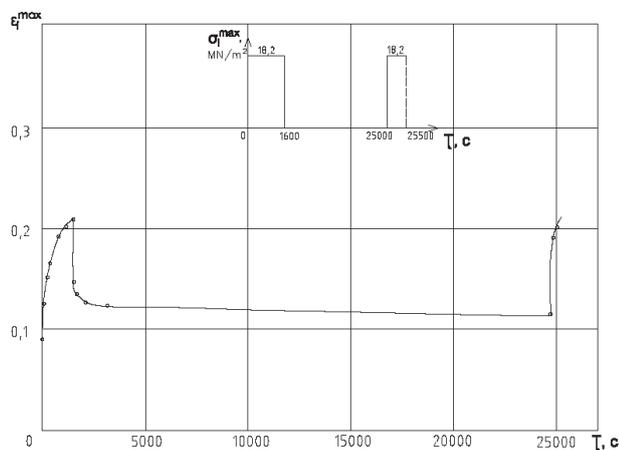


Fig. 19. Creep curves and loading mode ( $n = 1.25$ ) of cyclic loading with the frequency of 5 Hz

The study of PTFE F-4 sample failure mode is interesting. Under static loading with mostly tensile axial stress the destruction occurs along the transversal section of the tubular sample without visible localization of viscoplastic deformation (with the maintaining the assigned real stress considering the deformation changes). Under biaxial stress state, when  $n = 1.25$ , in the destruction place pores occurs, which means that the material is strongly loosened. Sometimes pores occurs in samples under axial tension. Probably, the loosening precedes the sample disruption along the plane of transverse section. Under cyclic loading the same material loosening occurs and only in some cases when  $n = 1.25$  the failure mode differs from described. Under that conditions before the pores appearance a small bubble occurs on the surface of the damaged sample.

Experimental results can be used for estimation of structural elements rigidity.

**Conclusion.** Creep deformation of fluoroplastics (F-4, F-4D, F-4D<sub>0</sub>) under stationary and non-stationary loading is satisfactory described by the equation of mechanical states, which considers instant elastic, viscoelastic, instant plastic and viscoplastic deformation components with the use of the volume constancy condition and the condition of stress and deformation deviators similarity. Also that deformations can be described with addition of special parameters, which are functions of the stress deviator form.

The speed of creep under cyclic loading with the constant sign of real stress intensities is lower, than the one under the same static loading when the intensity of permanent stresses  $\sigma_i$  equals to the intensity of the maximum variable stresses  $\sigma_i^{\max}$ . Frequency changing from 2.5 to 10 Hz does not cause any significant changing of polytetrafluoroethylene deformation properties, except the case of uniaxial tension with the frequency of 10 Hz, when the increase of the material rigidity occurs, in comparison with other frequencies and  $n = \sigma_x / \sigma_\theta$  values during the experiment.

An application of the mechanical states equation, based on results of statistical test results, to the cyclic loading mode gives quite lower results of designed deformation creep values. Thus, an empirical amendment was suggested to that equation of mechanical states.

For fluoroplastics in quite wide range  $n$  there is no constancy in ultimate deformations. The current deformations already reach the ultimate value zone on the first stages of loading, however, destruction does not occur. That also attests against deformation criteria of failure.

© Ogorodov L.I., Nickolaeva I.P., Yakovleva E.L., Fominykh O.V., 2018

## References

1. Moskvitin V.V. (1972). *Soprotivlenie vyazkoyprygh materialov* [Resistance of the viscoelastic materials. Moscow: Nayka Publ., 327. (In Russ.)
2. Bugakov I.I. (1973). *Polzychest polimernykh materialov* [Creep of polymer materials]. Moscow: Nayka Publ., 288. (In Russ.)
3. Goldman A.Y. (1979). *Prochnost konstruksionnykh plastmass* [Strength of structural plastics]. Leningrad: Mashinostroenie Publ., 320. (In Russ.)
4. Pavlov P.A. (1980). *Mehanicheskie sostoyaniya i prochnost materialov* [Mechanical states and materials strength]. Leningrad: izd-vo LGY Publ., 176. (In Russ.)
5. Aibinder S.B., Tunina E.L., Tsirule K.I. (1981). *Svoistva polimerov pri razlichnykh napryazhennykh sostoyaniyah* [Material properties under various stress states]. Moscow: Himiya, 232. (in Russ.)
6. Goldman A.Y. (1988). *Prognozirovanie deformatsionno-prochnostnykh svoistv polimernykh i kompozitsionnykh materialov* [Forecasting of the polymer and composite materials strength-deformation properties]. Leningrad: Himiya, 272. (In Russ.)
7. Pavlov P.A. (1988). *Osnovy inzhenernykh raschetov elementov mashin na ystalost i dlitelnyiy prochnost* [The basics of engineering calculations of fatigue and long-term strength of machine elements]. Leningrad: Mashinostroenie, 252. (In Russ.)

8. Pavlov P.A., Andreev A.V. (1976). Issledovanie polzychesti fluoroplasta-4 v usloviyah ploskogo tsicheskogo napryazhennogo sostoyaniya [The study of the luoroplastic-4 creep under flat cyclic stress state]. *Mehanika polimerov*, (6), 1099–1103. (In Russ.)
9. Pavlov P.A., Krutskih N.A. (1984). Fenomenologicheskoe opisanie I eksperimentalnoe issledovanie deformatsionnykh protsessov pri slozhnom termomechanicheskom nagruzhении chastichno kristallicheskih materialov [Phenomenological description and experimental study of the deformation processes in partially crystal materials under complex thermomechanical loading]. *Mehanika kompozitnykh materialov*, (6), 974–979. (In Russ.)
10. Pavlov P.A., Yakovleva E.L., Krutckih N.A. (1983). Analiticheskoe opisanie protsessov deformirovaniya I razrusheniya elementov konstruktsyi iz polimernykh materialov [Analytical description of deformation processes and destruction of the structural polymer elements]. *Trudy LPI*, (393), 3–7. (In Russ.)
11. Pavlov P.A., Kosov K.A. (1986). Soprotivlenie chastichno kristallicheskih polimernykh materialov tsicheskomy nagruzhению pri ploskom napryazhennom sostoyanii [Resistance of partially crystal polymer composite materials to the cyclic loading under flat stress state]. *Mechanica compositnykh materialov*, (6), 978–986. (In Russ.)
12. Belan-Gaiko V.N. (1992). Eksperimentalnoe issledovanie polzychesty polimernogo materiala pri proporsionalnom nestatsionarnom nagruzhении v usloviyah ploskogo napryazhennogo sostoyaniya [Experimental study of polymer material creep under proportional non-stationary loading and flat stress state]. *Problemy mashinostroyeniya I nadezhnosti mashin*, (1), 105–109. (In Russ.)
13. Nickolaeva I.P., Ogorodov L.I., Krasikov S.V. (2015). Polzychest polyethylena vysokoy plotnosti pri razlichnykh rezhimakh nagruzheniya [Creep of high density polyethylene under various loading modes]. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 12(27), 50–63. (In Russ.)
14. Krollmann N. (2006). Verhalten von EPS-Hartschaumstoffen unter langzeitiger Druckbeanspruchung [Behavior of EPS rigid foams under long-term compressive stress]. *Bauphysik*, 28(3), 184–191. (In Germ.)
15. Beake B. (2006). Modelling indentation creep of polymers: a phenomenological approach. *J. Phys. D.*, 39(20), 4478–4485.
16. Demidov A.V., Makarov A.G., Stolevich A.M. (2006). Varianty matematicheskogo modelirovaniya deformatsionnykh protsessov polimernykh materialov [Mathematical modeling variants of polymer material deformation processes]. *Voprosy materialovedeniya*, (3), 101–110. (In Russ.)
17. Sherstnev V.A., Goldman A.Y. (1976). Ustanovka dlya ispytaniya polimernykh materialov na ustalost v usloviyah ploskogo napryazhennogo sostoyaniya [Testing set for polymer materials on fatigue under flat stress state]. *Problemy prochnosti*, (12), 111–113. (In Russ.)
18. Yoda M., Nakamura T., Saito Yu., Nakamura T. (2008). Creep crack growl characteristics in polyethylene film at various stresses and temperatures. *Nihon rairyo kyodo gakkashi. J. Jap. Soc. Strength and Fract. Ma-ter.*, 40(2), 27–34.
19. Girard D., Castagnet S., Gacougnolle J.L., Hoeshtetter G. (2007). On the relevance of a notch creep test for the comprehension and prediction of slow crack growth in PVDE. *Polym. Test*, 26(7), 937–948.
20. Dian G. (2007). Modelling non-linear creep behavior of an epoxy adhesive. *Jnt. J. Adhes and Adhes.*, 27(8), 636–646.
21. Rostovtseva N.G., Litvinov A.M., Fedorova S.V., Makarov A.G. (2009). Prognozirovaniye deformatsionnykh protsessov polimernykh materialov v usloviyah menyau-sheisya temperatury [Forecasting of the polymer material deformation processes under changing temperature conditions]. *Disain. Materialy. Technologii*, (3), 69–71. (In Russ.)
22. Goludin E.P. (2009). Variant staticheskoy modeli neizotermicheskoy polzychesty polyvinilhloridnogo plasticata [Variant of non-isothermal creep static polyvinylchloride plastic model]. *Vest. Samar. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz-mat. nauki*, (1), 114–121. (In Russ.)
23. Mourad A.-H. J., Fouad H., Elleithy R. (2009). Impact of same invironmental conditions on the tensile, creep-recovery, relaxation, melting and crystallinity behavior of UHMWPE-GUR 410-medical grade. *Mater. and Des.*, 30(10), 4112–4119.
24. Elksnite J., Maksimov R.D., Zicans J., Mevi R. (2010). The effect of small additions of a lignid-crystalline polymer on the mechanical properties of polyethylene. *Mech. Compos. Mater.*, 46(1), 77–88.
25. Sherstnev V.A., Goldman A.Y. (1976). Ustanovka dlya ispytany polimernykh materialov na ustalost v usloviyah ploskogo napryazhennogo sostoyaniya [Equipment for polymer material testing on fatigue under flat stress state]. *Problemy prochnosti*, (12), 11–113. (In Russ.)
26. Ogorodov L.I. (1979). Ustanovka dlya ispytany polimernykh materialov v usloviyah ploskogo napryazhennogo sostoyaniya pri staticheskome i tsicheskome nagruzhении [Equipment for polymer material testing under flat and cyclic loadings]. *Mechanica. RZH*, (1096). (In Russ.)
27. Ogorodov L.I., Kotyakov L.F., Kyrilovich N.N. (2006). Deformirovaniye polikristallicheskih polimernykh materialov v usloviyah kratkovremennogo nagruzheniya [Deformation of polycrystalline polymer materials under short-time loading]. *Nauchno-technicheskie problem razvitiya proizvodstva himicheskikh volokon v Belarusi. Materialy tretei Belorusskoy naucho-practicheskoy konferentsii*, 329–333. (In Russ.)
28. Belan-Gaiko V.N., Ogorodov L.I. (2012). Geometricheskoe podobie deviatorov napryazheniy I skorostey deformatsii polzychesty polimernykh materialov v usloviyah lineinogo, slozhnogo proporsionalnogo I tsicheskogo regimov nagruzheniya [Geometrical similarity of stress deviators and creep deformation speeds of polymer materials under linear, complex proportional and cyclic loading modes]. *Vuzovskaya nauka – regionu. Materialy desyatoi Vserossiiskoy konferentsii. Vologda: VSTU Publ.*, 305–310. (In Russ.)
29. Loginova I.I., Artamonova D.A., Stolyarov O.N., Melnikov B.E. (2015). Vliyanie struktury na vyzkouprugie svoistva geosynteticheskikh materialov [Structure influence on the viscoelastic properties of geosynthetic materials]. *Magazine of Civil Engineering*, 4(56), 11–18. (In Russ.)

30. Nickolaeva I.P., Ogorodov L.I., Yakovleva E.L. (2017). Polzchest modificatsiy polytetrafluorethylena pri razlichnykh regimakh nagruzheniya [Creep of polytetrafluoroethylene modifications under various loading conditions]. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 3(54), 7–17. (In Russ.)

### Список литературы

1. Москвитин В.В. Сопrotивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972. 327 с.
2. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 288 с.
3. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение, 1979. 320 с.
4. Павлов П.А. Механические состояния и прочность материалов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 176 с.
5. Айбиндер С.Б., Тюнина Е.Л., Цируле К.И. Свойства полимеров при различных напряженных состояниях. М.: Химия, 1981. 232 с.
6. Гольдман А.Я. Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов. Л.: Химия, 1988. 272 с.
7. Павлов П.А. Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. Л.: Машиностроение, 1988. 252 с.
8. Павлов П.А., Андреев А.В. Исследование ползучести фторопласта-4 в условиях плоского циклического напряженного состояния // *Механика полимеров*. 1976. № 6. С. 1099–1103.
9. Павлов П.А., Крутских Н.А. Феноменологическое описание и экспериментальное исследование деформационных процессов при сложном термомеханическом нагружении частично кристаллических материалов // *Механика композиционных материалов*. 1984. № 6. С. 974–979.
10. Павлов П.А., Яковлева Е.Л., Крутских Н.А. Аналитическое описание процессов деформирования и разрушения элементов конструкций из полимерных материалов // *Труды ЛПИ*. 1983. № 393. С. 3–7.
11. Павлов П.А., Косов К.А. Сопrotивление частично кристаллических полимерных материалов циклическому нагружению при плоском напряженном состоянии // *Механика композитных материалов*. 1986. № 6. С. 978–986.
12. Белан-Гайко В.Н. Экспериментальное исследование ползучести полимерного материала при пропорциональном нестационарном нагружении в условиях плоского напряженного состояния // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1992. № 1. С. 105–109.
13. Николаева И.П., Огородов Л.И., Красиков С.В. Ползучесть полиэтилена высокой плотности при различных режимах нагружения // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2015. № 12 (27). С. 50–63.
14. Krollmann N. Verhalten von EPS-Hartschaumstoffen unter langzeitiger Druckbeanspruchung. *Vauphysik*. 2006. 28. № 3. Pp. 184–191.
15. Beake B. Modelling indentation creep of polymers: a phenomenological approach // *J. Phys. D*. 2006. 39. № 20. Pp. 4478–4485.
16. Демидов А.В., Макаров А.Г., Столевиц А.М. Варианты математического моделирования деформационных процессов полимерных материалов // *Вопросы материаловедения*. 2006. № 3. С. 101–110.
17. Шерстнев В.А., Гольдман А.Я. Установка для испытания полимерных материалов на усталость в условиях плоского напряженного состояния // *Проблемы прочности*. 1976. № 12. С. 111–113.
18. Yoda M., Nakamura T., Saito Yu., Nakamura T. Creep crack growth characteristics in polyethylene film at various stresses and temperatures // *Nihon rairyo kyodo gakkashi. J. Jap. Soc. Strength and Fract. Ma-ter*. 2006. 40. № 2. Pp. 27–34.
19. Girard D., Castagnet S., Gacougnolle J.L., Hoeshtetter G. On the relevance of a notch creep test for the comprehension and prediction of slow crack growth in PVDE // *Polym. Test*. 2007. 26. № 7. Pp. 937–948.
20. Dian G. Modelling non-linear creep behavior of an epoxy adhesive // *Int. J. Adhes and Adhes*. 2007. 27. № 8. Pp. 636–646.
21. Ростовцева Н.Г., Литвинов А.М., Федорова С.В., Макаров А.Г. Прогнозирование деформационных процессов полимерных материалов в условиях меняющейся температуры // *Дизайн. Материалы. Технологии*. 2009. № 3. С. 69–71.
22. Голудин Е.П. Вариант статической модели не-изометрической ползучести поливинилхлоридного пластика // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2009. № 1. С. 114–121.
23. Mourad A.-H. J., Fouad H., Elleithy R. Impact of same invironmental conditions on the tensile, creep-recovery, relaxation, melting and crystallinity behavior of UHMWPE-GUR 410-medical grade // *Mater. and Des*. 2009. 30. No 10. Pp. 4112–4119.
24. Elksnite J., Maksimov R.D., Zicans J., Mevi R. The effect of small additions of a lignid-crystalline polymer on the mechanical properties of polyethylene // *Mech. Compos. Mater*. 2010. 46. № 1. Pp. 77–88.
25. Шерстнев В.А., Гольдман В.А. Установка для испытаний полимерных материалов на усталость в условиях плоского напряженного состояния // *Проблемы прочности*. 1976. № 12. С. 11–113.
26. Огородов Л.И. Установка для испытаний полимерных материалов в условиях плоского напряженного состояния при статическом и циклическом нагружении // *Механика. РЖ*. 1979. № 1096 С. 65–82.
27. Огородов Л.И., Котьяков Л.Ф., Курилович Н.Н. Деформирование поликристаллических полимерных материалов в условиях кратковременного нагружения // *Научно-технические проблемы развития производства химических волокон в Беларуси: Материалы III Белорусской научно-практической конференции*. 2006. С. 329–333.
28. Белан-Гайко В.Н., Огородов Л.И. Геометрическое подобие девиаторов напряжений и скоростей деформации ползучести полимерных материалов в условиях линейного, сложного, пропорционального и циклического режимов нагружения // *Вузovская наука – региону: материалы X Всероссийской конференции*. Вологда: ВоГТУ, 2012. С. 305–310.

29. *Логинова И.И., Артамонова Д.А., Столяров О.Н., Мельников Б.Е.* Влияние структуры на вязкоупругие свойства геосинтетических материалов // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 4 (56). С. 11–18.

30. *Николаева И.П., Огородов Л.И., Яковлева Е.Л.* Ползучесть модификаций политетрафторэтилена при различных режимах нагружения // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2017. № 3 (54). С. 7–17.

#### **About the authors**

**Ogorodov Leonid** – Associate Professor, Candidate of Technician Sciences, Hydraulic and Strength Department, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University. *Scientific interests:* polymer and composite materials, material resistance, creep, material ageing, material durability, long-term fracture. *Contact information:* e-mail – L.ogorodov@mail.ru. *eLibrary SPIN-code:* 1514-6380.

**Nickolaeva Inna** – Associate Professor, Candidate of Technician Sciences, Hydraulic and Strength Department, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University. *Scientific interests:* polymer and composite materials, material resistance, creep, material durability. *Contact information:* e-mail – inna4i4n@mail.ru. *eLibrary SPIN-code:* 8949-8906.

**Yakovleva Elena** – Associate Professor, Candidate of Technician Sciences, Hydraulic and Strength Department, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University. *Scientific interests:* polymer and composite materials, material resistance, creep, material ageing, material durability, long-term fracture. *Contact information:* e-mail – helena47@mail.ru. *eLibrary SPIN-code:* 4575-6835.

**Fominykh Olga** – Master's Degree Student, Construction Mechanics and Structures Department, Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University. *Scientific interests:* polymer and composite materials, material resistance, creep, material ageing, material durability, long-term fracture. *Contact information:* e-mail – luola94@mail.ru. *eLibrary SPIN-code:* 8237-1707.

#### **Об авторах**

**Огородов Леонид Иванович** – кандидат технических наук, доцент кафедры гидравлики и прочности, Петербургский политехнический университет Петра Великого. *Область научных интересов:* полимерные и композиционные материалы, сопротивление материала,

ползучесть, старение материала, долговечность материала, долговременный разрыв. *Контактная информация:* e-mail – L.ogorodov@mail.ru. *eLibrary SPIN-code:* 1514-6380.

**Николаева Инна Павловна** – кандидат технических наук, доцент кафедры гидравлики и прочности, Петербургский политехнический университет Петра Великого. *Область научных интересов:* полимерные и композиционные материалы, сопротивление материала, ползучесть, долговечность материала. *Контактная информация:* e-mail – inna4i4n@mail.ru. *eLibrary SPIN-code:* 8949-8906.

**Яковлева Елена Леонидовна** – кандидат технических наук, доцент кафедры гидравлики и прочности, Петербургский политехнический университет Петра Великого. *Область научных интересов:* полимерные и композиционные материалы, сопротивление материала, ползучесть, старение материала, долговечность материала, долговременный разрыв. *Контактная информация:* e-mail – helena47@mail.ru. *eLibrary SPIN-code:* 4575-6835.

**Фоминых Ольга Васильевна** – магистрант кафедры строительная механика и строительные конструкции, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. *Область научных интересов:* полимерные и композиционные материалы, сопротивление материала, ползучесть, старение материала, долговечность материала, долговременный разрыв. *Контактная информация:* e-mail – luola94@mail.ru. *eLibrary SPIN-code:* 8237-1707.

#### **For citation**

Ogorodov L.I., Nickolaeva I.P., Yakovleva E.L., Fominykh O.V. (2018). Creep of polytetrafluoroethylene under various loading conditions. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(3), 216–225. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-216-225.

#### **Для цитирования**

Ogorodov L.I., Nickolaeva I.P., Yakovleva E.L., Fominykh O.V. Creep of polytetrafluoroethylene under various loading conditions // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 216–225. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-216-225.

## Расчет тонких упругих оболочек

УДК 69.001.12/.18:72:624.074.4

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-226-232

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КУПОЛЬНО-КОНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЦИРКА

В.Р. МУСТАКИМОВ<sup>1</sup>, С.Н. ЯКУПОВ<sup>2</sup><sup>1</sup>Казанский государственный архитектурно-строительный университет  
ул. Зеленая, д. 1, Казань, Россия, 420043<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр РАН»  
ул. Лобачевского, д. 2/31, Казань, Россия, 420111

(поступила в редакцию: 26 октября 2017 г.; принята к публикации: 26 апреля 2018 г.)

В статье представлены некоторые результаты комплексного историко-архивного, производственно-технологического и расчетно-теоретического исследования купольно-конической конструкции здания Казанского цирка. Приводится оценка состояния конструкций по истечении 50 лет непрерывной и безаварийной эксплуатации. Проведено пространственное моделирование и осуществлены поверочные численные расчеты с использованием объемных конечных элементов (МКЭ) на базе программного комплекса «MicroFe». При этом учтены: история эксплуатации конструкции, включая данные инженерных и численных расчетов (1976 г.); особенности конструирования и технология возведения; результаты натурных испытаний и физический износ конструкций. На первом этапе произведен расчет пространственной модели верхней купольной конструкции, позволивший оценить и установить напряженно-деформированное состояние (НДС) каркаса из лепестков-ребер как оставляемой оснастки купольно-ребристого покрытия. На втором этапе приняты расчетные пространственные схемы с учетом совместной работы основания и надземных конструкций. В расчете учтены вертикальные и горизонтальные нагрузки от всех региональных природно-климатических воздействий, а также технологические нагрузки при цирковых представлениях. На основании результатов комплексных расчетно-теоретических исследований НДС купольно-конической конструкции здания Казанского цирка, обладающего статусом уникального объекта, разработаны мероприятия по устранению дефектов.

**Ключевые слова:** купольно-конические конструкции, опорное кольцо, лепестковый элемент, радиально-кольцевое армирование

### INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAINED STATE OF DOME-CONICAL STRUCTURES OF THE KAZAN STATE CIRCUS

V.R. MUSTAKIMOV<sup>1</sup>, S.N. YAKUPOV<sup>2</sup><sup>1</sup>Kazan State University of Architecture and Engineering  
1 Zelenaya St., Kazan, 420043, Russia<sup>2</sup>Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences  
2/31 Lobachevsky St., Kazan, 420111, Russia

(received: October 26, 2017; accepted: April 26, 2018)

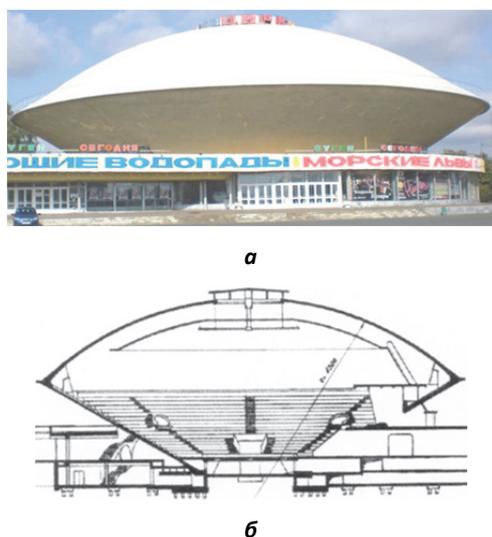
Some results of the complex historical-archival, production-technological and computational-theoretical study of the dome-conical structure of the Kazan circus are presented. The state of structures after 50 years of continuous and trouble-free operation is evaluated. Spatial modelling was carried out and numerical verification was carried out using volumetric

finite elements (FEM) based on the software package “MicroFe”. This takes into account: the history of operation of the structure, including the data of engineering and numerical calculations (1976); the features of construction and technology of construction; the results of field tests and physical depreciation of structures. At the first stage, the spatial model of the upper dome structure was calculated, which allowed to estimate and establish the stress-strain state of the frame made of petals-ribs as the left snap of the dome-ribbed coating. In the second stage adopted the estimated spatial scheme with the collaboration of the foundation and superstructure. The calculation takes into account vertical and horizontal loads from all regional climatic influences, as well as technological loads at circus performances. On the basis of complex computational and theoretical studies of stress-strain state dome-conical structure of the building of the Kazan circus, which has the status of a unique object, made conclusions and developed measures to eliminate defects.

**Keywords:** dome-conical constructions, support ring, petal element, radial-ring reinforcement

### Историко-архивные данные

Пятьдесят лет тому назад (7 ноября 1967 г.) в Казани был возведен уникальный по архитектурной форме и конструктивным решениям объект – здание государственного цирка на 2000 мест в виде «летающей тарелки» (рис. 1).



**Рис. 1. Общий вид (а) и разрез (б) здания Казанского государственного цирка**  
**[Fig. 1. General view (a) and section (b) of the building of the Kazan state circus]**

Объемно-пространственная структура объекта была сформирована специалистами проектного института «Татаргражданпроект» (ныне ГУП «Татинвестгражданпроект») за счет сочленения двух пространственных тел вращения – усеченного конуса в нижней части и пологого сферического купола в верхней части здания, которые объединены между собой предварительно напряженным распорным кольцом диаметром 62 м.

Идея строительства здания цирка в Казани возникла после того, как в 1961 г. сгорел старый цирк, возведенный из деревянных конструкций [1]. Место для размещения здания нового цирка выбрано в историческом центре города, в прибрежной зоне

реки Казанки, имеющей особые инженерно-геологические и гидрогеологические условия [2].

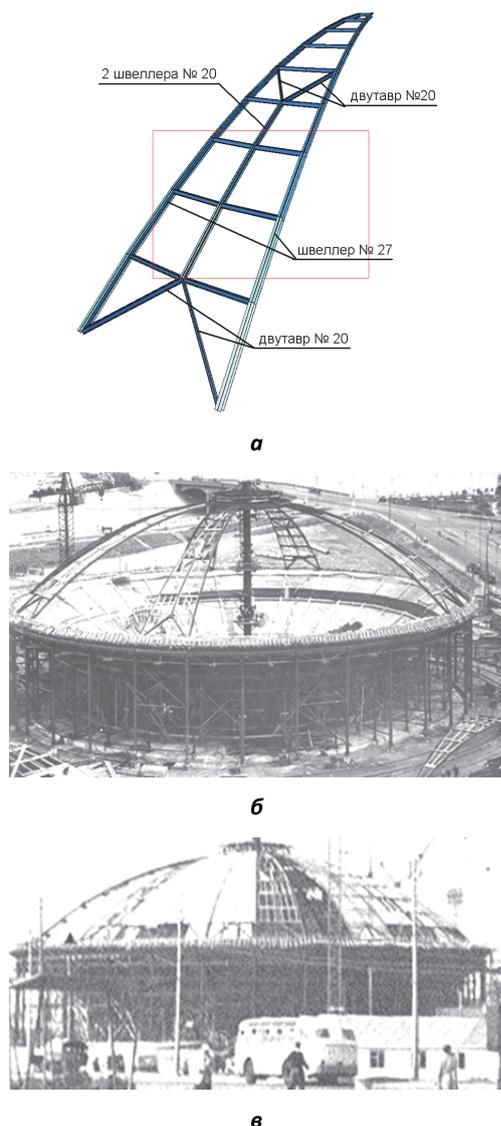
### Особенности сооружения и технологии возведения

Проектирование купольно-конической конструктивной системы здания цирка в семидесятых годах XX века для отечественных инженеров было непростой задачей.

Здание возведено на насыпных грунтах, подстилаемых водонасыщенными песками, с расчетным сопротивлением  $R = 250$  кПа. Уровень подземных вод колеблется в диапазоне  $WL = 3,50–4,20$  м (50,64–50,98 м БС). В связи с этим был предусмотрен комплекс инженерных мероприятий для подземной части здания, включая: кольцевой свайный фундамент из свай  $Cy-8-300$  и  $Cy-10-300$ , забитых с шагом  $l = 3d$  м ( $d$  – диаметр свай) с отметки дна котлована (52,0 м БС); систему горизонтального самотечного дренажа; оклеечную вертикальную и горизонтальную гидроизоляцию конструкций подвальных помещений. Достоверность выполненных при строительстве конструктивных, гидроизоляционных и водопонизительных работ, а также их техническое состояние, были установлены при проведении авторами комплексного инженерного обследования.

Главными несущими элементами надземной части цирка являются: снизу – чаша амфитеатра с местами для зрителей, выполненная в форме усеченного конуса с меньшим основанием, обращенным вниз; сверху – пологий сферический купол, имеющий верхнее и нижнее опорные кольца. Нижняя, коническая часть здания, воспринимает постоянную и временную нагрузку, передавая ее через пилоны на плиту кольцевого ленточного ростверка и отдельно стоящие ростверки свайного фундамента. Верхняя часть цирка решена в виде тонкостенного купола из монолитного железобетона, который опирается на решетчатую конструкцию с регулярным расположением радиаль-

ных и кольцевых элементов из прокатных профилей. Радиально-кольцевое армирование железобетонного купола и лепестки-ребра из стальных спаренных швеллеров № 27, № 20 и двутавров № 20 объединены в единую пространственную решетчатую конструкцию (рис. 2, а). Жесткость конструкции каждого лепестка-ребра обеспечена за счет крестовых связей из стальных прокатных двутавров № 20, связующим центральным элементом из спаренных швеллеров № 20 замкнутого поперечного сечения и обрешетки.



**Рис. 2. Возведение купольно-конических конструкций здания Казанского цирка (июнь 1966 г.):**

*а* – конструкция опорного лепестка-ребра, изготовленного из стальных прокатных профилей; *б* – монтаж лепестков-ребер с центральной опорой и опорными кольцами;

*в* – монтаж оснастки для железобетонного купола

**[Fig. 2. Erection of dome-conical structures of the building of the Kazan Circus (June 1966):**

*a* – the construction of a supporting lobe-rib made of steel rolling profiles; *б* – assembly of petal-ribs with central support and support rings;

*в* – installation of equipment for reinforced concrete dome]

Технологической особенностью при возведении железобетонной скорлупы купола являлось то, что армирование и укладка бетона осуществлены на оснастку без установки инвентарных стоек. Была использована технологическая система «оставляемой опорно-пролетной оснастки с временной центральной опорой» из сочлененной стальной трубы (рис. 2, б).

Лепестки-ребра установлены вплотную друг к другу по всему периметру, последовательно сочленены на электросварке с образованием замкнутых поперечных сечений из спаренных швеллеров № 27.

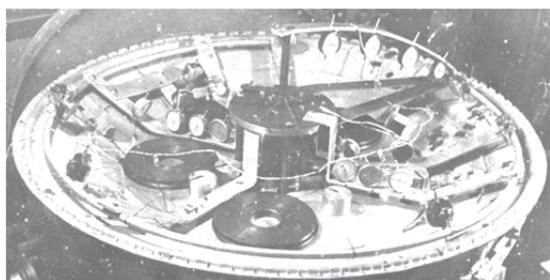
К решетчатой опорной оставляемой оснастке подвешен съемный деревянный настил опалубки (рис. 2, б, в). Стержни кольцевой арматуры железобетонного купола приварены электросваркой к верхнему поясу лепестков-ребер.

В области сопряжения нижней – конической и верхней – купольной частей купольно-конического здания выполнено предварительно напряженное железобетонное кольцо  $d_{н.к} = 62$  м, воспринимающее основные растягивающие усилия от горизонтальных распорных нагрузок купола. Натяжение арматуры производилось на бетон электротермическим методом. В результате предварительного обжатия по наружному периметру железобетонного распорного кольца длиной окружности  $L_{н.к} = 194,7$  м произошло уменьшение общей длины до  $L_{н.к} = 194,4$  м. При этом в конструктивной системе купольно-конической конструкции сформировались сжимающие напряжения вместо напряжений растяжения, вызывающие образование трещин в бетоне, то есть получен эффект предварительного напряжения. Было зафиксировано, что обжатие распорного кольца привело к естественному процессу отслоения оснастки купольной конструкции с образованием зазора до 50 мм между поверхностью железобетона и опалубки.

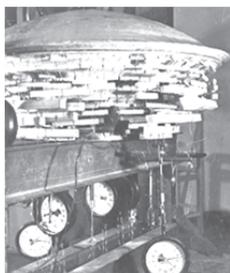
Через шесть лет после ввода в эксплуатацию зданию цирка присвоен статус памятника архитектуры регионального значения [3].

### Об испытаниях и обследовании сооружения

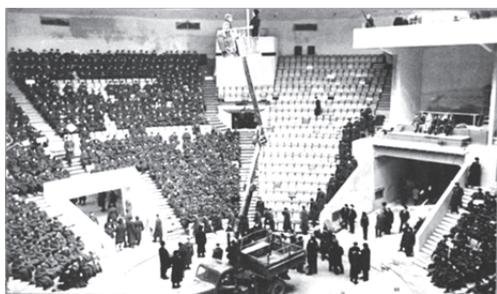
Учитывая уровень ответственности и уникальность конструктивной системы здания, кроме расчетов было выполнено масштабное моделирование купольно-конического здания с использованием метода подобия. Предварительно в КНИИСиП произвели модельные, а перед сдачей в эксплуатацию – натурные испытания несущих конструкций здания цирка (рис. 3).



а



б



в



г

**Рис. 3. Испытание здания цирка на статические нагрузки:**

а, б – масштабные модели; в, г – натурные испытания  
**[Fig. 3. Circus building static load test:**  
 а, б – scale models; в, г – full-scale tests]

В 2009 и повторно в 2017 гг. авторами статьи проведено инженерное обследование несущих и ограждающих конструкций здания.

Установлено, что при проектной марке бетона М300 освидетельствованная по состоянию на 27.10.2009 г. марка составляет М318...М378, то есть на 6–13% превышает проектную марку. Освидетельствование прочности осуществлено методами неразрушающего контроля (рис. 4, а, б).

Вскрытием установлено, что фибролит толщиной 180 мм уложен по слою пароизоляции (рис. 4, в). Проведены испытания крепежного анкера на выдергивание (рис. 4, г).



а



б



в



г

**Рис. 4. Инструментальные исследования конструкции купола цирка:**

а – при помощи измерителя прочности ИПС-МГ4.03;  
 б – прибором Шмидта; в – исследование кровли из вскрытого шурфа; г – испытание анкера  
**[Fig. 4. Instrumental investigations of the design of the circus dome:**  
 а – with the aid of measuring the strength IPS-MG4.03;  
 б – device of Schmidt; в – investigation of a roof from the opened hole; г – anchor test]

### Поверочные расчеты

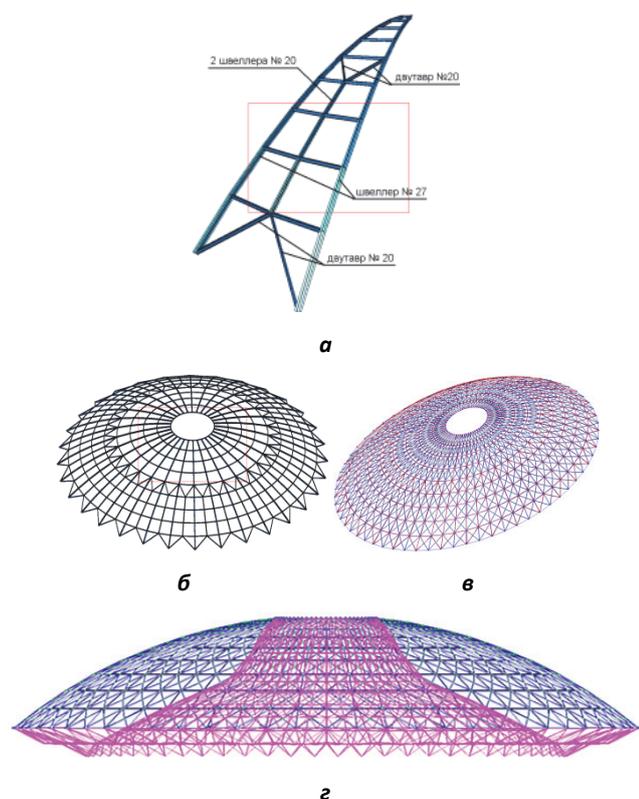
Расчет несущих конструкций производился инженерными, а также численными методами на базе ЭВМ. Было оценено состояние конструкции по истечении 50 лет непрерывной и безаварийной эксплуатации. Проведено пространственное моделирование и осуществлены поверочные численные расчеты с использованием объемных конечных элементов (МКЭ) на базе программного комплекса «MicroFe». При этом учтены: история эксплуатации конструкции, включая данные инженерных и численных расчетов (1976 г.); особенности конструирования и технология возведения; результаты натурных испытаний и физический износ конструкций.

*Первый этап.* Произведен расчет пространственной модели верхней купольной конструкции, позволивший оценить и установить напряженно-деформированное состояние (НДС) каркаса из

лепестков-ребер как оставляемой оснастки купольно-ребристого покрытия (рис. 5).

По результатам поверочных расчетов можно констатировать следующее.

1. Максимальный расчетный прогиб железобетонного монолитного купола толщиной 60 мм (марка бетона М300 – В25) с опорными лепестками-ребрами из стальных прокатных профилей составил 3,618 мм – для стальных ребер и 3,980 мм – для железобетонной части купола. Следовательно, расчетные значения прогибов от внешней нагрузки не превышают величины выгиба 50 мм конструктивной системы ребристого купола, образовавшегося после предварительного натяжения на бетон стальной арматуры нижнего опорного пояса, соединяющего купольный и конический элементы купольно-конической конструкции здания цирка.



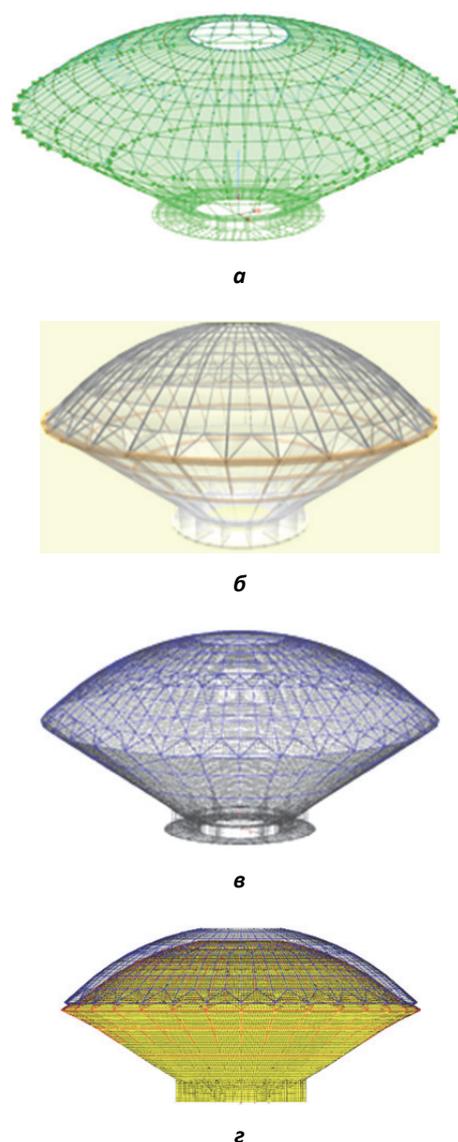
**Рис. 5. Схемы моделей стального каркаса из лепестков-ребер:**

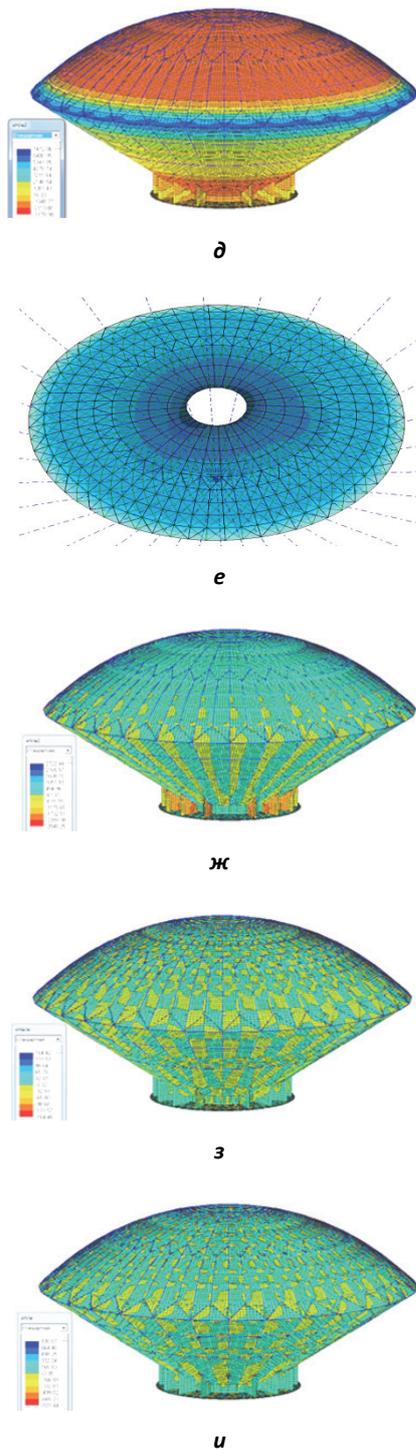
- a* – трехмерная расчетная модель лепестка-ребра из прокатных швеллеров и двутавров;  
*б* – пространственная модель из лепестков-ребер;  
*в* – схема пространственной конечно-элементной модели (ПКЭМ) купола из лепестков-ребер;  
*z* – исходная и деформированная модель купола
- [Fig. 5. Schematic models of the steel frame of the petal-fins:**
- a* – three-dimensional design model of the petal-rib from rolling channels and I-beams;  
*б* – three-dimensional model of petals-ribs;  
*в* – the scheme of the 3D finite elements model (FEM) of the dome of petals-ribs;  
*z* – the original and deformed model of the dome]

2. Установлено, что армирование купола достаточно для надежной работы конструкции: по расчету требуются радиальная и кольцевая рабочие арматуры в железобетонной части купола диаметром 6 мм класса А-III (А400); сканирование арматуры показало, что в куполе установлена арматура диаметром 10 мм класса А-III (А400).

*Второй этап.* На втором этапе приняты расчетные пространственные схемы (рис. 6). В расчете учтены вертикальные и горизонтальные нагрузки от всех региональных природно-климатических воздействий, а также технологические нагрузки при цирковых представлениях.

По результатам комплексных исследований НДС модели купольно-конической конструкции здания цирка проведен поверочный расчет всех конструктивных элементов каркаса здания. На рис. 7 приведен пример системного расчета составного сечения лепестков-ребер здания.



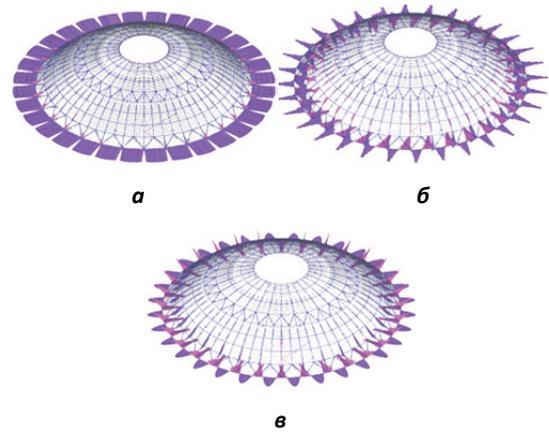


**Рис. 6. Некоторые результаты исследований НДС модели здания цирка:**

*а* – купольно-коническая модель; *б* – 3D-модель;  
*в* – конечно-элементная модель; *г* – исходная и деформированная схемы; *е* – мозаика перемещений;  
*д* – усилия  $S_r$  в конструкциях; *ж* – усилия  $S_{srs}$  в конструкциях;  
*з* – усилия  $M_{srs}$  в конструкциях; *и* – усилия  $Q_r$  в конструкциях

**[Fig. 6. Some results of investigations of the stress-strained state of the circus building model:**

*a* – dome-conical model; *б* – 3D-model;  
*в* – finite elements model; *г* – the original and deformed scheme;  
*е* – isofields of displacements; *д* – the efforts  $S_r$  in structures;  
*ж* – the efforts  $S_{srs}$  in structures; *з* – the efforts  $M_{srs}$  in structures;  
*и* – the efforts  $Q_r$  in structures]



**Рис. 7. Результаты поверочного расчета:**  
*а* – распределение расчетных продольных усилий  $N$  в стержневых элементах ребер купола ( $N_{max} = 3097,35$  кН);  
*б* – то же, поперечных  $Q$  ( $Q_{max} = 101,36$  кН);  
*в* – то же, изгибающих моментов  $M$  ( $M_{max} = -94,173$  кН•м)

**[Fig. 7. The results of calibration calculation:**

*a* – distribution of the design longitudinal forces  $N$  in the bar elements of the dome ribs ( $N_{max} = 3097.35$  kN);  
*б* – the same transverse  $Q$  ( $Q_{max} = 101.36$  kN);  
*в* – the same bending moments  $M$  ( $M_{max} = -94.173$  kN•m)]

## Выводы

На основании комплексных расчетно-теоретических исследований НДС купольно-конической конструкции здания Казанского цирка, обладающего статусом уникального объекта, можно сделать следующие общие выводы.

1. Для достоверной оценки состояния здания необходимо учесть историю его создания: формирование и реализацию идеи архитектурно-конструктивной и объемно-пространственной структуры каркаса; оптимизацию равнопрочного распределения основных несущих конструктивных элементов на базе системы «расчет – моделирование – испытание»; строительно-технологические методы и приемы, влияющие на несущую способность и надежность каркаса; предварительное обжатие конструкции нижнего опорного кольца, воспринимающего растягивающие усилия.

2. Результаты исследований НДС при помощи программного комплекса «MicroFe» для конструктивной системы купольно-конического каркаса с вариантами моделирования его работы на разных этапах строительства и эксплуатации, а также с учетом результатов инженерного обследования, физического износа и истории формирования НДС, позволяют с определенной степенью достоверности оценить фактическое напряженно-деформированное состояние конструкции здания.

3. По результатам проведенных авторами и другими специалистами инженерных инструментальных обследований строительных конструкций

купольно-конической конструкции здания цирка можно констатировать, что техническое состояние всех несущих и ограждающих конструктивных элементов здания в целом, в соответствии с п.п. 3.11, ГОСТ 31937-2011, оценивается как работоспособное. Таким образом, эксплуатация здания Казанского цирка в течение 50 лет существенно не изменила прочность и устойчивость конструкции: здание пригодно к дальнейшей безаварийной эксплуатации по своему функциональному назначению.

© Мустакимов В.Р., Якупов С.Н., 2018

### Список литературы

1. Ефимов Д.Д. Казанский цирк как памятник архитектуры периода советского модернизма: история проектирования и строительства, истоки формообразования, значение для развития архитектуры цирков // Известия КГАСУ. 2017. № 2 (40). С. 7–17.
2. Мустакимов В.Р. Проблемы геотехники в современном строительстве и реконструкции зданий и сооружений Казани // Известия КГАСУ. 2006. № 2 (6). С. 66–68.
3. Федеральный закон № 73-ФЗ от 25.06.2002 г. «Об объектах культурного наследия (памятниках истории и культуры) народов Российской Федерации». Ст. 64.
4. Krivoshapko S.N., Christian A. Bock Hyeng, Mamiyeva I.A. Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells. IJRRAS. 2014. № 18 (2). Pp. 95–108.
5. Peerdeman B. Analysis of Thin Concrete Shells Revisited: Opportunities due to Innovations in Materials and Analysis Methods. Master's thesis. The Netherlands: Delf University of Technology, 2008. Pp. 30–50.

### References

1. Efimov D.D. (2017). The Kazan Circus as an architectural heritage-listed building of the Soviet modernism period: history of design and construction, origins of the architectonic formation, importance for the development of architecture of circuses. *News of the KSUAE*, 2(40), 7–17. (In Russ.)
2. Mustakimov V.R. (2006). Problems of geotechnics in modern construction and reconstruction of buildings and structures in Kazan. *News of the KSUAE*, 2(6), 66–68. (In Russ.)
3. Federal Law No. 73-FZ of 25.06.2002. *On Objects of Cultural Heritage (Monuments of History and Culture) of Peoples of the Russian Federation*. Art. 64. (In Russ.)
4. Krivoshapko S.N., Christian A. Bock Hyeng, Mamiyeva I.A. (2014). Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells. *IJRRAS*, 18(2), 95–108.

5. Peerdeman B. (2008). *Analysis of Thin Concrete Shells Revisited: Opportunities due to Innovations in Materials and Analysis Methods*, Master's thesis, Delf University of Technology, the Netherlands, 30–50.

### Об авторах

**Мустакимов Валерий Раифович** – кандидат технических наук, доцент кафедры архитектуры, ФГБОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет». *Область научных интересов:* конструкции зданий и сооружений, механика грунтов, основания и фундаменты зданий и сооружений. *Контактная информация:* e-mail – mustakimovvr@yandex.ru.

**Якупов Самат Нухович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук». *Область научных интересов:* конструкции зданий и сооружений, механика тонкостенных конструкций, механика пленок и мембран, композиционные структуры, адгезия. *Контактная информация:* e-mail – tamas\_86@mail.ru.

### About the authors

**Mustakimov Valeriy Raifovich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Architecture, Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE). *Scientific interests:* construction of buildings and structures, soil mechanics, foundations of buildings and structures. *Contact:* e-mail – mustakimovvr@yandex.ru.

**Yakupov Samat Nuhovich** – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering – Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science «Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences». *Scientific interests:* structures of buildings and structures, mechanics of thin-walled structures, mechanics of films and membranes, composite structures, adhesion. *Contact:* e-mail – tamas\_86@mail.ru.

### Для цитирования

Мустакимов В.Р., Якупов С.Н. Исследование напряженно-деформированного состояния купольно-конических конструкций Казанского государственного цирка // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 226–232. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-226-232.

### For citation

Mustakimov V.R., Yakupov S.N. (2018). Investigation of the stress-strained state of dome-conical structures of the Kazan state circus. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14(3), 226–232. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-226-232.

## Численные методы расчета конструкций

УДК 624.073

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-233-241

### ПРОБЛЕМА ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ЖЕСТКОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.С. МАРКОВИЧ, М.И. АБУ МАХАДИ, Д.А. МИЛОСЕРДОВА, К.С. АКИФЬЕВА, М. АСАД

Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Российская Федерация, 117198

(поступила в редакцию: 12 января 2018 г.; принята к публикации: 5 марта 2018 г.)

В 1938 г. были приняты нормы проектирования, в которых для расчета железобетонных конструкций рекомендовался метод предельного равновесия, разработанный в ЦНИПС А.А. Гвоздевым и В.И. Мурашевым. С самого начала предлагаемая теория вызвала в научных кругах острую дискуссию, ввиду того, что содержала ряд противоречий. Поскольку до сих пор метод предельного равновесия остается основным методом расчета железобетонных конструкций на прочность, большинство противоречий теории А.А. Гвоздева унаследовали современные нормы. Последние несколько десятков лет активно развивается дискуссия относительно перехода на деформационную модель сопротивления железобетона, используемую Европейскими стандартами. По этой причине актуализированная редакция отечественных норм допускает выполнять расчет железобетонных конструкций по нелинейной деформационной модели. Однако исследований, подтверждающих согласованность деформационной модели с теоретическими положениями норм применительно к расчетам изгибаемых элементов, имеется ограниченное количество. В связи с этим нами была выполнена серия расчетов жесткости шарнирно опертой плиты перекрытия на основании теоретической и деформационной моделей отечественных норм. Расчет плиты производился методом конечных элементов по нелинейной деформационной модели, затем выполнялся анализ полученных результатов и сравнение с результатами расчета согласно теоретическим положениям норм.

**Ключевые слова:** железобетонные конструкции, метод предельного равновесия, теория деформирования бетона, физическая нелинейность, метод конечных элементов, изгибаемые элементы

### PROBLEM OF NUMERICAL ANALYSIS OF DEFORMATION OF BINDED REINFORCED CONCRETE ELEMENTS

A.S. MARKOVICH, M.I. ABU MAHADI, D.A. MILOSERDOVA, K.S. AKIFEVA, M. ASAD

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russia

(received: January 12, 2018; accepted: March 5, 2018)

In 1938 standards were adopted in which the method of limiting equilibrium, developed by prof. A.A. Gvozdev and V.I. Murashev, was recommended for the calculation of reinforced concrete structures. From the very beginning, the proposed method caused a sharp discussion in the scientific community, since it contained number of contradictions. Most of the contradictions in the theory of A.A. Gvozdev became part of modern Russian standards. Until now the method of limiting equilibrium remains the main method for calculating reinforced concrete structures for strength. In recent years, a discussion has been developed on the transition to the deformation model of reinforced concrete resistance used by the European codes. In view of this, the updated version of domestic regulations allows the calculation of reinforced concrete structures using a nonlinear deformation model. However, there is a limited number of studies confirming the consistency of the proposed deformation model. In this regard we performed a series of calculations of rigidity of hinged supported on the basis of the theoretical and deformation models of the Russian standards. The calculation was carried out by the finite element method using the model of nonlinear deformation of concrete.

**Keywords:** reinforced concrete structures, limit equilibrium method, theory of deformation of concrete, physical non-linearity, finite element method, bending elements

До середины 30-х гг. прошлого века расчет железобетонных конструкций выполнялся согласно классической теории в предположении линейной эпюры распределения нормальных напряжений по высоте изгибаемого элемента. Рассматривалось приведенное к бетону сечение, а расчет производился по формулам сопротивления материалов, в той или иной степени отражающим механику строительных конструкций.

В 1938 г. были приняты нормы проектирования, в которых для расчета железобетонных конструкций рекомендовался метод предельного равновесия, разработанный в ЦНИПС выдающимся инженером А.А. Гвоздевым и его соратником В.И. Мурашевым. В том же году основные положения этого метода были изложены в работе [1].

Главное отличие от классической теории заключалось в том, что расчет железобетонных элементов выполнялся в пластической стадии работы, предшествующей разрушению конструкции.

С самого начала предлагаемая А.А. Гвоздевым теория вызвала в научных кругах острую дискуссию, ввиду того, что содержала ряд противоречий, однако принятию последней во многом способствовала простота теоретической модели.

Введенный в 1938 г. в нормы проектирования метод предельного равновесия до настоящего времени остается основным методом расчета железобетонных конструкций на прочность, поэтому большинство противоречий теории А.А. Гвоздева унаследовали современные нормы. Наиболее полно эти противоречия изложены в работах Р.С. Санжаровского, А.И. Звезда, Т.Т. Мусабаева и других исследователей [5–8].

Так как расчет по методу предельного равновесия выполняется в пластической стадии работы материала, минуя упругую и упруго-пластичную стадии, реализовать теоретическую модель А.А. Гвоздева для расчета железобетонных конструкций методом конечных элементов весьма затруднительно. Ввиду этого у расчетчиков возникают определенные трудности в достоверной оценке жесткости изгибаемых элементов.

В 2007 г. вышли в свет нормы проектирования [2], где применительно к расчету конструкций численными методами указывалось: «В первом приближении значения понижающих коэффициентов относительно начального модуля упругости бетона с учетом длительности действия нагрузки рекомендуется принимать: для вертикальных несущих элементов – 0,6, а для плит перекрытий (покрытий) – 0,2 при наличии трещин или 0,3 – при отсутствии трещин».

Последние несколько десятков лет активно развивается дискуссия относительно перехода на деформационную модель сопротивления железобетона, используемую Европейскими стандартами [9; 10].

По этой причине актуализированная редакция норм [3] допускает выполнять расчет прочности и жесткости железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели. В качестве диаграмм деформирования бетона и арматуры нормы рекомендуют использовать билинейные и трехлинейные диаграммы.

Аналізу неупругого деформирования бетона, а также расчету железобетонных плит методом конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности, посвящены работы В.П. Агапова, А.В. Бенина, А.С. Семенова и других авторов [11–14].

Однако в целом, исследований, подтверждающих согласованность предлагаемой деформационной модели с теоретическими положениями отечественных норм применительно к расчетам изгибаемых железобетонных элементов, имеется ограниченное количество.

В связи с этим нами была выполнена серия расчетов жесткости шарнирно опертой плиты перекрытия на основании теоретической (полуэмпирической) и деформационной моделей норм. Расчет по деформационной модели выполнялся методом конечных элементов.

Рассматривалась плита перекрытия следующих геометрических размеров (рис. 1): пролет  $l = 5600$  мм, ширина  $b = 1000$  мм, толщина  $h = 200$  мм ( $h_0 = 173$  мм). Бетон принят класса В15 ( $E_b = 24000$  МПа,  $R_{b,ser} = 11$  МПа,  $R_{bt,ser} = 1,1$  МПа). Растянутая арматура класса А400 ( $E_s = 200\,000$  МПа) с площадью поперечного сечения  $A_s = 769$  мм<sup>2</sup> ( $5\varnothing 14$  мм). Плита была загружена длительной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 6,5$  кН/м<sup>2</sup>.

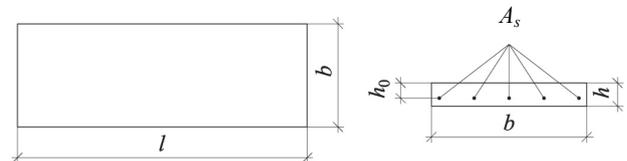
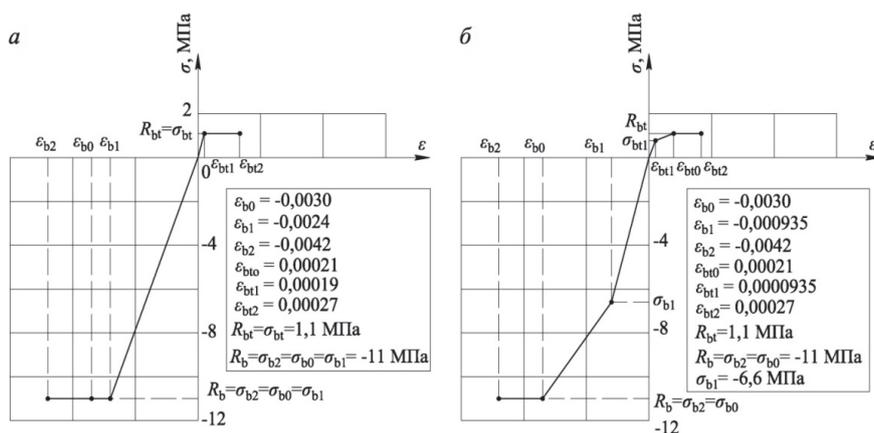


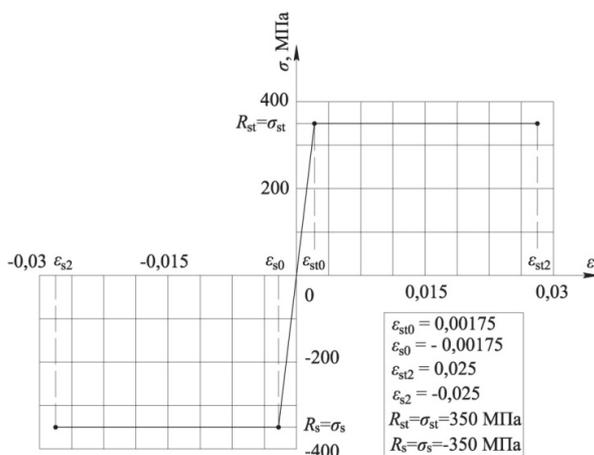
Рис. 1. Рассматриваемая плита перекрытия  
[Fig. 1. The studied slab]

В качестве расчетных диаграмм состояния бетона, определяющих связь между напряжениями и деформациями, использовались упрощенные кусочно-линейные диаграммы: двухлинейная и трехлинейная (рис. 2).

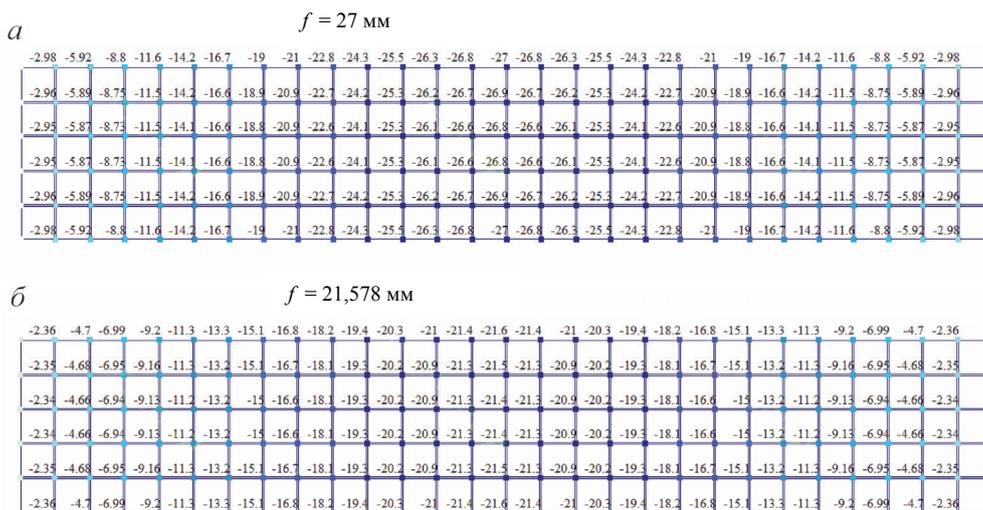
При этом закон деформирования арматуры определялся диаграммой Прандтля (рис. 3).



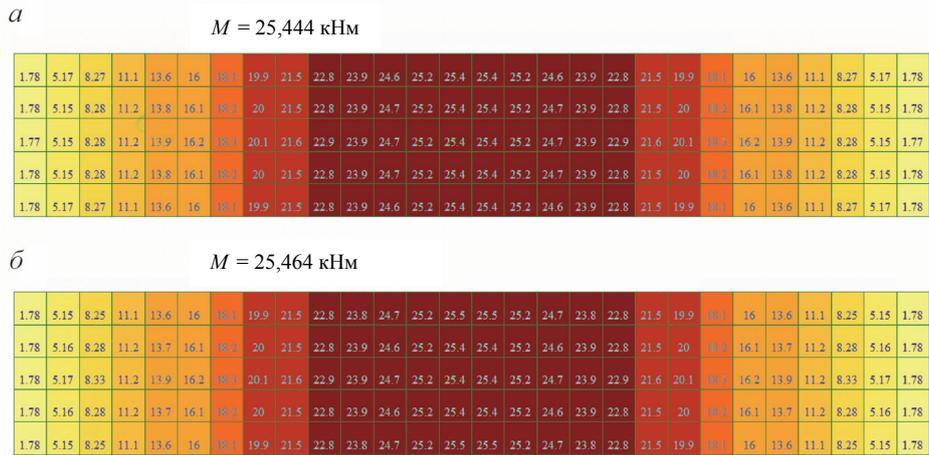
**Рис. 2. Деформационная модель бетона:**  
 а – двухлинейная диаграмма; б – трехлинейная диаграмма  
**[Fig. 2. Deformation model of concrete:**  
 а – a two-line diagram; б – a three-line diagram]



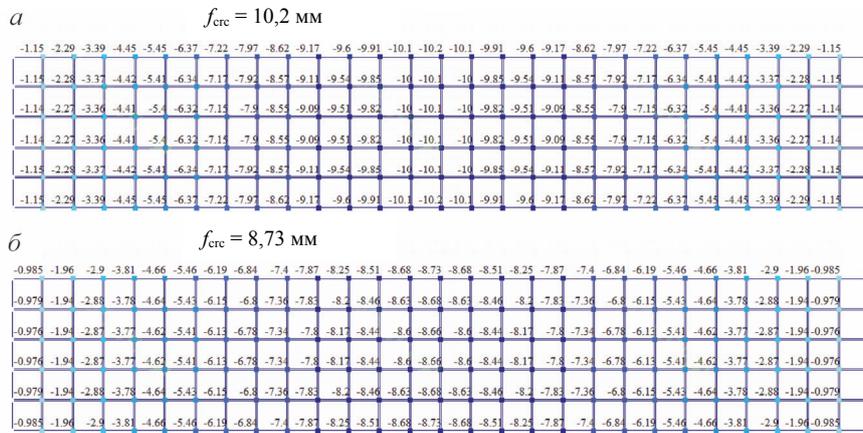
**Рис. 3. Диаграмма деформирования арматуры**  
**[Fig. 3. Reinforcement deformation diagram]**



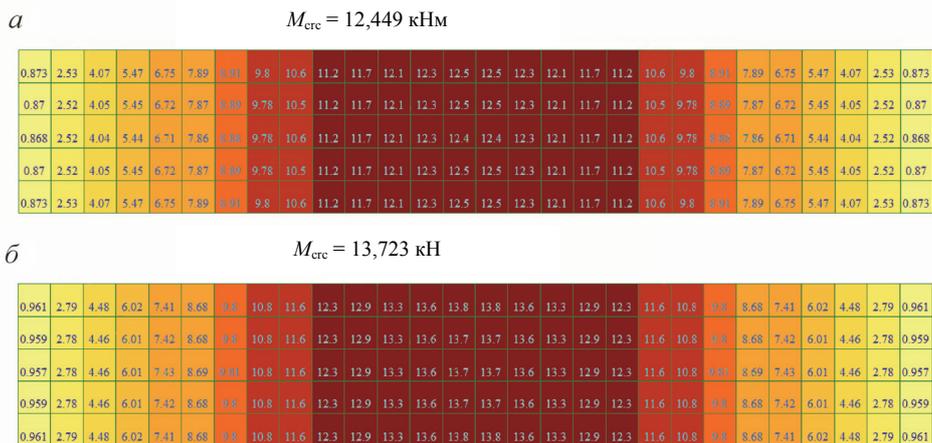
**Рис. 4. Прогобы плиты при диаграммах состояния бетона, мм:**  
 а – двухлинейная диаграмма; б – трехлинейная диаграмма  
**[Fig. 4. Slab deflections for diagrams of the state of concrete, mm:**  
 а – a two-line diagram; б – a three-line diagram]



**Рис. 5. Значения изгибающих моментов при диаграммах состояния бетона, кНм:**  
*a* – двухлинейная диаграмма; *b* – трехлинейная диаграмма  
**[Fig. 5. The values of the bending moments for diagrams of the state of concrete, кНм:**  
*a* – a two-line diagram; *b* – a three-line diagram]



**Рис. 6. Прогобы плиты (мм), соответствующие началу образования трещин, при диаграммах состояния бетона:**  
*a* – двухлинейная диаграмма; *b* – трехлинейная диаграмма  
**[Fig. 6. Deflections of the slab (mm), corresponding to the beginning of the formation of cracks, for diagrams of the state of concrete:**  
*a* – a two-line diagram; *b* – a three-line diagram]



**Рис. 7. Значения изгибающих моментов (кНм), соответствующие началу образования трещин, при диаграммах состояния бетона:**  
*a* – двухлинейная диаграмма; *b* – трехлинейная диаграмма  
**[Fig. 7. The values of the bending moments (кНм), corresponding to the beginning of the formation of cracks, for diagrams of the state of concrete:**  
*a* – a two-line diagram; *b* – a three-line diagram]



Таблица 1

Доля на- груз- ки, % [Load share, %]	Диаграммы состояния бетона [Concrete state diagrams]					
	Двухлинейная [Two-line]			Трехлинейная [Three-line]		
	Прогиб $f$ , мм [Deflec- tion $f$ , mm]	Пролет- ный из- гибаю- щий момент $M$ , кНм [Spanning bending moment $M$ , kNm]	Ширина раскрытия трещин $a_{\text{крс}}$ , мм [Width of crack opening $a_{\text{крс}}$ , mm]	Про- гиб $f$ , мм [Deflec- tion $f$ , mm]	Пролет- ный из- гибаю- щий момент $M$ , кНм [Spanning bending moment $M$ , kNm]	Ширина раскрытия трещин $a_{\text{крс}}$ , мм [Width of crack opening $a_{\text{крс}}$ , mm]
10	2,047	2,548	–	1,505	2,548	–
20	4,080	5,095	–	3,010	5,095	–
30	6,114	7,643	–	4,554	7,642	–
40	8,155	10,190	–	6,226	10,189	–
50	10,409	12,729	0,0569	7,982	12,734	–
60	13,350	15,270	0,0848	10,139	15,288	0,0695
70	16,616	17,810	0,106	12,806	17,826	0,0895
80	20,018	20,353	0,126	15,654	20,370	0,107
90	23,486	22,898	0,144	18,594	22,916	0,125
100	27,000	25,444	0,163	21,578	25,464	0,140

С учетом переменной жесткости на участке с трещинами прогиб плиты вычислялся по формуле (4.33) норм [4]:

$$f = \frac{l^2}{48} \left( \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{max}} (5 + 3m + 3mk)(1 - m) + 4m^2 \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{el}} \right), \quad (1)$$

где  $\left( \frac{1}{r} \right)_{\text{max}} = 9,99 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{мм}}$  – полная кривизна

в сечении с изгибающим моментом  $M$ ;

$\left( \frac{1}{r} \right)_{\text{крс}} = 2,28 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{мм}}$  – кривизна при действии

момента  $M = M_{\text{крс}}$  с учетом трещин;

$\left( \frac{1}{r} \right)_{\text{el}} = 2,68 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{мм}}$  – то же без учета трещин.

Коэффициенты  $m$  и  $k$  определяются выраже-  
ниями:

$$m = \frac{M_{\text{крс}}}{M} = \frac{10,24}{25,50} = 0,4019;$$

$$k = \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{крс}} / \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{max}} = 0,228.$$

Тогда прогиб плиты равен

$$f = \frac{5,6^2}{48} (9,99 \cdot 10^{-6} (5 + 3 \cdot 0,4019 + 3 \cdot 0,4019 \cdot 0,228) (1 - 0,4019) + 4 \cdot 0,4019^2 \cdot 2,68 \cdot 10^{-6}) = 27,6 \text{ мм}.$$

Ширину раскрытия трещин, нормальных к продольной оси элемента, определим по формуле (4.10) норм [4]:

$$a_{\text{крс}} = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_s \frac{\sigma_s}{E_s} l_s, \quad (2)$$

где  $\varphi_1 = 1,4$  – коэффициент, учитывающий продолжительность действия нагрузки;  $\varphi_2 = 0,5$  – коэффициент, учитывающий профиль продольной арматуры;  $\varphi_3 = 1$  – коэффициент, учитывающий характер нагружения;  $\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{\text{крс}}}{M} = 0,679$  – ко-

эффициент, учитывающий неравномерное распределение относительных деформаций растянутой арматуры между трещинами.

Нормальное напряжение в растянутой арматуре определяется выражением

$$\sigma_s = \frac{M}{z_s A_s} = 239,6 \text{ МПа},$$

где плечо пары сил  $z_s = 0,8h_0 = 138,4$  мм.

Расстояние между трещинами равно

$$l_s = 0,5 \frac{A_{bt}}{A_s} d_s = 800,4 \text{ мм},$$

где  $A_{bt} = 87\,930 \text{ мм}^2$ ;  $A_s = 768 \text{ мм}^2$ ;  $d_s = 14$  мм.

Так как согласно п. 4.12 норм [4] расстояние между трещинами не должно превышать  $40d_s$  и 400 мм, принимаем  $l_s = 400$  мм.

Тогда ширина раскрытия трещин равна

$$a_{\text{крс}} = 1,4 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 0,679 \frac{239,6}{2 \cdot 10^5} 400 = 0,228 \text{ мм}.$$

Сравнение результатов, полученных по деформационной модели, с теоретической методикой норм представлено в табл. 2.

Таблица 2

	Теорети- ческая методика норм [Theoretical methodology of norms]	Нелинейная деформа- ционная модель норм [Nonlinear deformation model of norms]	Расхож- дения, % [Discre- pancies, %]
Прогиб $f$ , мм [Deflection $f$ , mm]	27,60	27,00	2,174
		21,578	21,819
Пролетный изги- бающий момент $M$ , кНм [Spanning bending moment $M$ , kNm]	25,50	25,444	0,212
		25,464	0,141

Окончание табл. 2

	Теоретическая методика норм [Theoretical methodology of norms]	Нелинейная деформационная модель норм [Nonlinear deformation model of norms]	Расхождения, % [Discrepancies, %]
Изгибающий момент образования трещин $M_{\text{крс}}$ , кНм [Bending moment of crack formation $M_{\text{крс}}$ , kNm]	10,24	12,449	17,744
		13,723	25,381
Ширина раскрытия трещин $a_{\text{крс}}$ , мм [Width of crack opening $a_{\text{крс}}$ , mm]	0,228	0,163	28,509
		0,140	38,596

Примечание: над чертой приведены результаты, относящиеся к двухлинейной диаграмме состояния бетона, а под чертой – к трехлинейной диаграмме.

[Note: above the line are the results relating to the two-line diagram of the concrete state, and below the line – the three-line diagram.]

### Выводы

Расчет плиты перекрытия методом конечных элементов по нелинейной деформационной модели и последующее сравнение полученных результатов с результатами расчета согласно теоретической модели отечественных норм позволили сделать следующие выводы.

1. Прогибы плиты, определенные по нелинейной деформационной модели, неплохо согласуются с теоретической моделью норм (при двухлинейной диаграмме деформирования бетона расхождения составили около 2%, при трехлинейной диаграмме – более 21%).

2. Значения изгибающего момента образования первых трещин, полученного по деформационной модели норм, отличаются от теоретической модели на 18% в случае двухлинейной диаграммы деформирования бетона и на 25% при использовании трехлинейной диаграммы.

3. Достоверность ширины раскрытия трещин, определенной по нелинейной деформационной модели, в полной мере не подтверждается теоретической методикой норм (расхождения составили 28 и 38% соответственно). Данный факт объясняется определенной проблемой реализации численными методами положений норм, в частности корректного учета эмпирических коэффициентов  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_s$  и выполнения требования норм «... $l_s$  принимают не менее  $10d_s$  и 100 мм и не более  $40d_s$  и 400 мм».

Проведенные исследования показали, что проблема гармонизации теоретических положений отечественных норм с нелинейной моделью деформирования бетона особо остро стоит для расчета сложных систем, имеющих большое количество узловых неизвестных, численными методами. Также эту проблему следует распространить и на другие классы железобетонных конструкций.

© Маркович А.С., Абу Махади М.И., Милосердова Д.А., Акифьева К.С., Асад М., 2018

### Список литературы

1. *Мурашев В.И.* Расчет железобетонных элементов по стадии разрушения. М. – Л.: Госстройиздат, 1938. 184 с.
2. СП 52-103-2007. Железобетонные монолитные конструкции зданий. 22 с.
3. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. Введ. 2013-01-01, изд. официальное. М.: Минрегион России, 2013. 155 с.
4. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003). М., 2005.
5. *Санжаровский П.С.* Ошибки в стандартах по расчету железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 3. С. 57–65.
6. *Санжаровский П.С., Мусабаяев Т.Т.* О несоответствии Еврокода и норматива по проектированию бетонных и железобетонных конструкций // Бетон и железобетон – взгляд в будущее: научные труды III Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и железобетону: в 7 т. Т. 6. 2014. С. 448–458.
7. *Звездов А.И., Санжаровский П.С., Рыбнов Е.И.* О национальных стандартах по железобетону и путях их совершенствования // Бетон и железобетон. 2012. № 2. С. 19–20.
8. *Санжаровский П.С., Манченко М.М.* Ошибки международных норм по железобетону и правила Еврокода // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 6. С. 25–36.
9. *Залесов А.С., Пацанин А.А.* Расчет прочности железобетонных балок с использованием объемных конечных элементов в развитие норм по проектированию железобетонных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 4. С. 66–71.
10. *Старчоус И.В., Буцеф В.М.* Расчет изгибаемых железобетонных элементов по прочности нормальных сечений с использованием деформационной модели // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. 2016. № 1. С. 449–452.
11. *Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Фёдоров И.В.* Конечно-элементное моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения элементов железобетонных конструкций // Морские интеллектуальные технологии. 2011. № 3 (13). С. 102–105.

12. Азанов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций: учебное пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. М., 2004. 247 с.

13. Азанов В.П., Бардышева Ю.А., Минаков С.А. Учет физической и геометрической нелинейности в расчетах железобетонных плит и оболочек переменной толщины методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 5. С. 62–66.

14. Agapov V.P. Nonlinear static and buckling analysis of thin plates and shells by finite element method. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2007. Vol. 3. No 2. Pp. 13–19.

15. Городецкий Д.А., Барабаиш М.С., Водопьянов Р.Ю., Титок В.П., Артамонова А.Е. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2013: учебное пособие / под ред. акад. РААСН А.С. Городецкого. М., 2013. 376 с.

### References

1. Murashev V.I. (1938). *Raschet zhelezobetonnykh elementov po stadii razrusheniya* [Calculation of reinforced concrete elements by the stage of destruction]. Moscow – Leningrad: Gosstroizdat, 184. (In Russ.)

2. Code of Practice 52-103-2007 (2007). *Concrete monolithic building structures*. The Research Center of Construction, Moscow. (In Russ.)

3. Code of Practice 63.13330.2012. (2013). *Concrete and reinforced concrete structures. Design requirements*. The Research Center of Construction, Moscow. (In Russ.)

4. Code of Practice 52-101-2003. (2005). *Manual for the design of concrete and reinforced concrete structures from heavy concrete without prestressing of reinforcement*. The Research Center of Construction, Moscow. (In Russ.)

5. Sanzarovskij R.S. (2012). Mistakes of the standards for the design of reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (3), 57–65. (In Russ.)

6. Sanzarovskij R.S., Musabaev T.T. (2014). About non-compliance the Eurocode and the standard for the design of concrete and reinforced concrete structures. *Concrete and reinforced concrete – looking into the future*. Scientific works of III All-Russian (II International) Conference on concrete and reinforced concrete, in 7 volumes, 6, 448–458. (In Russ.)

7. Zvezdov A.I., Sanzharovskij R.S., Rybnov E.I. (2012). On national standards for reinforced concrete and ways to improve them. *Concrete and reinforced concrete*, (2), 19–20. (In Russ.)

8. Sanzharovskij R.S., Manchenko M.M. (2017). Errors of international standards on reinforced concrete and rules of the Eurocode. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (6), 25–36. (In Russ.)

9. Zalesov A.S., Pashchanin A.A. (2011). Calculation of the strength of reinforced concrete beams with the use of volumetric finite elements in the development of standards for the design of reinforced concrete structures. *Construction mechanics and calculation of structures*, (4), 66–71. (In Russ.)

10. Starchous I.V., Burtsev V.M. (2016). Calculation of flexible reinforced concrete elements by strength of

normal sections with the use of a deformation model. *Russian Far East: problems of development of the architectural and construction complex*, (1), 449–452. (In Russ.)

11. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G., Fedorov I.V. (2011). Finite element modeling of the processes of inelastic deformation and fracture of elements of reinforced concrete structures. *Marine intelligent technologies*, 3(13), 102–105. (In Russ.)

12. Agapov V.P. (2004). *Finite Element Method in Static, Dynamics and Stability of Structures*. Textbook. 2<sup>nd</sup> Edition. Publishing House of Educational Civil Engineering Institutions, Moscow. (In Russ.)

13. Agapov V.P., Bardysheva Y.A., Minakov S.A. (2010). Accounting for physical and geometric nonlinearity in the calculation of reinforced concrete slabs and shells of variable thickness by the finite element method. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (5), 62–66. (In Russ.)

14. Agapov V.P. (2007). Nonlinear static and buckling analysis of thin plates and shells by finite element method. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 3(2), 13–19.

15. Gorodetskij D.A., Barabash M.S., Vodopyanov R.Y., Titok V.P., Artamonova A.E. (2013). *The program complex LIRA-SAPR 2013*. Textbook. Edited by A.S. Gorodetskij. Electronic edition, Moscow. (In Russ.)

### Об авторах

**Маркович Алексей Семенович** – кандидат технических наук, доцент департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: строительная механика, численные методы расчета сооружений, компьютерное моделирование. *Контактная информация*: e-mail – markovich.rudn@gmail.com.

**Абу Махади Мохаммед Ибрагим** – кандидат технических наук, доцент департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: механика грунтов, основания и фундаменты, строительные материалы, численные методы расчета сооружений. *Контактная информация*: e-mail – moham\_d@mail.ru.

**Милосердова Дарья Александровна** – магистрант департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: расчет и проектирование зданий и сооружений. *Контактная информация*: e-mail – milos-dasha@yandex.ru.

**Акифьева Кристина Сергеевна** – магистрант департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: расчет и проектирование зданий и сооружений. *Контактная информация*: e-mail – kristina\_akifeva\_svna@mail.ru.

**Асад Мохаммад Сухаил Али** – магистрант департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов*: расчет и проектирование зданий и сооружений. *Контактная информация*: e-mail – moh\_664@yahoo.com.

**About the authors**

**Markovich Alexey** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* structural mechanics, numerical methods for calculating structures, computer modeling. *Contact:* e-mail – markovich.rudn@gmail.com.

**Abu Makhadi Mokhammed Ibragim** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* soil mechanics, foundations, building materials, numerical methods for calculating structures. *Contact:* e-mail – moham\_d@mail.ru.

**Miloserdova Darya** – Master's Degree Student of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* calculation and design of buildings and structures. *Contact:* e-mail – milos-dasha@yandex.ru.

**Akifjeva Kristina** – Master's Degree Student of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* calcu-

lation and design of buildings and structures. *Contact:* e-mail – kristina\_akifjeva\_svna@mail.ru.

**Asad Mohamad Suhail Al** – Master's Degree Student of the Department of Architecture and Civil Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* calculation and design of buildings and structures. *Contact:* e-mail – moh\_664@yahoo.com.

**Для цитирования**

Маркович А.С., Абу Махади М.И., Милосердова Д.А., Акифьева К.С., Асад М. Проблема численного анализа жесткости изгибаемых железобетонных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 233–241. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-233-241.

**For citation**

Markovich A.S., Abu Mahadi M.I., Miloserdova D.A., Akifjeva K.S., Asad M. (2018). Problem of numerical analysis of deformation of binded reinforced concrete elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14(3), 233–241. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-233-241.

## **Геометрические исследования срединных поверхностей тонких оболочек**

УДК 513.073

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-242-247

### **ЭПИ-ГИПОЦИКЛОИДЫ И ЭПИ-ГИПОЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КАНАЛОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ**

В.Н. ИВАНОВ

Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Российская Федерация, 117198*(поступила в редакцию: 12 января 2018 г.; принята к публикации: 5 марта 2018 г.)*

В статье рассматриваются кривые – эпи- и гипоциклоиды, образующиеся движением точек, связанных с окружностями одинакового радиуса, катящимися одновременно по внешней и внутренней сторонам неподвижной окружности. Показывается взаимосвязь этих кривых. Рассматривается качение окружностей с постоянным углом наклона к плоскости неподвижной окружности. При полном вращении подвижной окружности вокруг касательной к неподвижной окружности точка, связанная с подвижной окружностью, описывает окружность вокруг касательной к неподвижной окружности. При этом начальная точка в горизонтальной плоскости, принадлежащая эпициклоиде, при повороте на  $180^\circ$  переходит в точку гипоциклоиды. При качении подвижной окружности и полном вращении вокруг касательной в каждой точке касания к подвижной окружности образуются эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности. В статье доказывается, что окружности эпи-гипоциклоидальных циклических поверхностей являются линиями главных кривизн, и, следовательно, поверхности относятся к классу каналовых поверхностей. Приводятся рисунки эпи-гипоциклоид и эпи-гипоциклоидальных циклических поверхностей с различными параметрами – отношением радиусов подвижной и неподвижной окружностей, положением точки, описывающей эпи-гипоциклоиды.

**Ключевые слова:** эпи-гипоциклоиды, циклические поверхности, каналовые поверхности, эпи-гипоциклоидальные каналовые поверхности

### **EPI-HYPOCYCLOIDS AND EPI-HYPOCYCLOIDAL CANAL SURFACES**

V.N. IVANOV

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russia*(received: January 12, 2018; accepted: March 05, 2018)*

In the article are regarded the curves – epi- and hypocycloids, which are formed by the moving of the generating points, linked with the circles of the same radius and which are at the same time outside and inside of the unmoving circle. There is shown the relation of those curves. The moving of the circles with constant angle to the plane of the unmoving circle is also regarded. At full rotation of the moving circle the generating point linked with moving circle described a circle around the tangent of the unmoving circle. And the initial point laying in horizontal plane on epicycloid moving to the point on hypocycloid when the moving circle rotates on around the tangent of the unmoving circle. When the circle made a full rotation around the unmoving circle with full rotation around the tangent to the unmoving circle the epi-hypocycloidal cyclic surfaces are formed. In the article is proofed that the circles of the epi-hypocycloidal cyclic surfaces are the coordinate lines of the main curvatures of the surface and so the surfaces belongs to the class of canal surfaces. The drawings of the epi-hypocycloidal canal surfaces with different parameters – relation of the radius of the moving and unmoving circles  $\lambda$ , the position of the generating point  $\mu$  – are shown.

**Keywords:** epi-hypocycloids, cyclic surfaces, canal surfaces, epi-hypocycloidal canal surfaces

При качении окружности радиуса  $a$  по неподвижной окружности радиуса  $b$  точка, связанная с подвижной окружностью, описывает эпициклоиду, если подвижная окружность катится с внешней стороны неподвижной окружности, и гипоциклоиду при качении с внутренней стороны [1–3]. Обычно в литературе приводятся отдельно уравнения эпициклоид и гипоциклоид [1] с образующей точкой, находящейся на подвижной окружности. В монографии [3] показана взаимосвязь уравнений эпи- и гипоциклоид и получено их обобщенное уравнение. Ниже приведено уравнение эпи-гипоциклоид при произвольном положении образующей точки в плоскости подвижной окружности (рис. 1).

Пусть образующие точки 1, 2 находятся на расстоянии  $\mu a$  от центра подвижной окружности радиуса  $a$ . После качения подвижных окружностей до точки касания с неподвижной окружностью с образующие точки переходят в положение 1', 2'. Положение точек 1', 2' определяется суммированием векторов (рис. 1, б):

$$\begin{aligned} \overline{oc} &= bh(u); & \overline{od} &= -aT(u)n(u); \\ \overline{d1'} &= aR(u)n(u); & \overline{d2'} &= -aR(u)n(u), \end{aligned}$$

где  $h(u) = i \cos u + j \sin u$ ;  $n(u) = -i \sin u + j \cos u$  – единичные ортогональные вектора в горизонтальной плоскости;  $T(u) = \mu \sin \lambda u$ ,  $R(u) = 1 - \mu \cos \lambda u$ .

Следовательно, обобщенное векторное уравнение эпи-гипоциклоид получаем в виде

$$r(u) = a[\lambda h(u) - T(u)n(u) + pR(u)h(u)], \lambda = b/a, \quad (1)$$

где  $p$  – единичный параметр: при  $p = 1$  получаем уравнение эпициклоиды; при  $p = -1$  получаем уравнение гипоциклоиды. Эпи- и гипоциклоиды, полученные качением окружностей одинакового радиуса  $a$ , точками, расположенными на одинаковом расстоянии  $\mu a$  от центра, будем далее называть идентичными эпи- и гипоциклоидами.

Из рис. 1, б видно, что точки эпициклоиды и гипоциклоиды при качении подвижных окружностей одинакового радиуса находятся на одинаковом расстоянии  $-aR(u)$  от касательной к неподвижному кругу. Кривая

$$rc(u) = a[\lambda h(u) - T(u)n(u)] \quad (2)$$

является срединной линией однотипных эпи- и гипоциклоид.

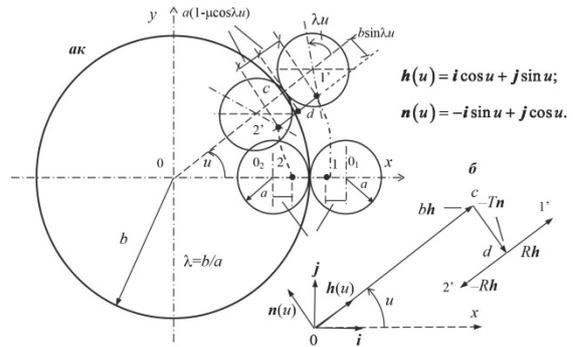


Рис. 1. Образование эпи-гипоциклоид [Fig. 1. Formation of epi-hypocycloid]

Эпи- и гипоциклоиды относятся к классу классических кривых, которым посвящено много работ, содержащих рисунки и описания особенностей этих кривых при изменении параметров. Поэтому далее будем рассматривать циклические поверхности на основе идентичных эпи-гипоциклоид.

Учитывая равноудаленность точек эпи-гипоциклоид от срединной линии (2) и принимая срединную линию за линию центров циклической поверхности (2), получаем уравнение эпи-гипоциклоидальной циклической поверхности с переменным радиусом  $aR(u)$

$$\begin{aligned} \rho(u, v) &= rc(u) + aR(u)e(u, v) = \\ &= a[\lambda h(u) - T(u)n(u) + R(u)e(u, v)], \quad (3) \end{aligned}$$

где  $e(u, v) = h(u) \cos v + k \sin v$  – уравнение окружности единичного радиуса в вертикальной плоскости с начальным направляющим вектором  $h(u)$ .

Отметим некоторые частные случаи.

Если образующие точки совпадают с центром подвижных окружностей ( $\mu = 0$ ), то эпи- и гипоциклоиды являются окружностями радиуса  $b + a$  для эпициклоиды и  $b - a$  для гипоциклоиды, а циклической поверхностью будет тор.

Если радиус подвижной окружности равен радиусу неподвижной окружности  $\lambda = 1$ , то внутренняя окружность не перемещается (не катится) и гипоциклоида вырождается в точку. Циклическая поверхность образуется вращением переменного радиуса вокруг касательной, проходящей через точку (вырожденную гипоциклоиду). Получаемая циклическая поверхность относится к классу каналовых поверхностей Иоахимстеля – циклических поверхностей с окружностями, являющимися линиями главных кривизн поверхности и лежащих в плоскостях пучка. Радиус точки диаметра образующей окружности, перпендику-

лярной оси вращения, описывает эпитрохоидальную кривую и циклическая поверхность называется эпитрохоидальной каналовой поверхностью [5; 6].

На рис. 2 приведены виды эпитрохоидальных поверхностей с различным положением образующей точки  $\mu = 1; 0,75; 2,75$ . В нижнем ряду показаны эпитрохоиды, неподвижная окружность и срединная кривая – линия центров окружностей циклической поверхности. Для эпитрохоидальных поверхностей срединная линия аналогична по форме эпитрохоиде. При  $\mu > 1$  (образующая точка расположена с внешней стороны подвижной окружности) эписциклоида описывает самопересекающуюся кривую (аналогично и срединную кривую). Циклические поверхности образуются двумя отсеками циклических поверхностей – внешней и внутренней, соприкасающихся на оси вращения образующих. На рисунке показаны половины отсеков в интервале изменения углового параметра  $0 \leq \nu \leq \pi$ .

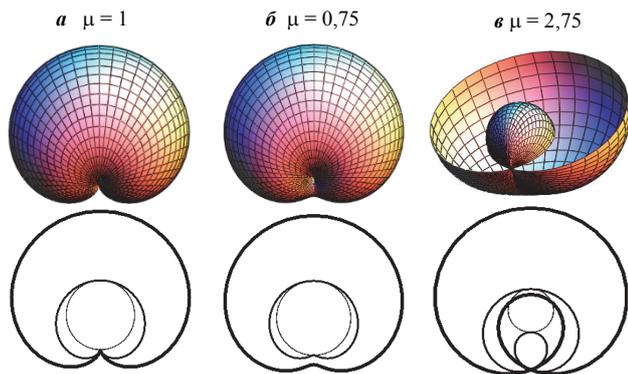


Рис. 2. Эпитрохоидальные кривые и поверхности  $\lambda = 1$  [Fig. 2. Epitrochoidal curves and surfaces  $\lambda = 1$ ]

При радиусе подвижной окружности, равном половине радиуса неподвижной окружности  $\lambda = 2$ , и положении образующей точки на подвижной окружности  $\mu = 1$  гипоциклоида вырождается в отрезок прямой – диаметр неподвижной окружности. При  $\mu \neq 1$  гипоциклоида описывает овальную кривую. Срединная кривая при  $\mu \leq 1$  отклоняется от неподвижной окружности на небольшие расстояния, при  $\mu > 1$  – образуется самопересекающаяся кривая сложной формы.

На рис. 3 представлены эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности и кривые с образующей точкой в пределах подвижной окружности.

На рис. 4 показан рисунок эпи-гипоциклоидальной поверхности с образующей точкой вне пределов подвижной окружности  $\mu = 2,75$  и кривые:

выше:  $\bar{b}$  – эписциклоида с гипоциклоидой,  $\bar{v}$  – гипоциклоида,  $\bar{z}$  – срединная кривая. Рисунки кривых показаны совместно с неподвижной окружностью.

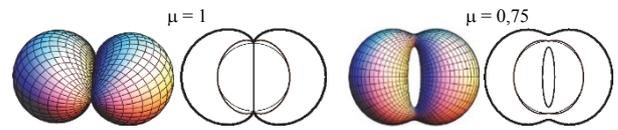


Рис. 3. Эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности  $\lambda = 2$  [Fig. 3. Epi-hypocycloidal cyclic surfaces  $\lambda = 2$ ]

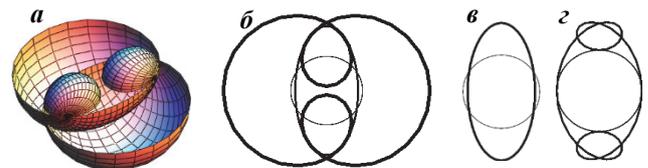


Рис. 4. Эпи-гипоциклоидальная циклическая поверхность  $\lambda = 2$  с образующей точкой вне пределов подвижной окружности  $\mu = 2,75$  [Fig. 4. Epi-hypocycloidal cyclic surface  $\lambda = 2$  with a generating point out of the limits of the moving circle  $\mu = 2,75$ ]

На рис. 5. представлены эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с целочисленным отношением радиусов подвижной и неподвижной окружностей с образующей точкой на подвижной окружности. В нижнем ряду показаны совместные рисунки эписциклоиды, гипоциклоиды неподвижной окружности и срединной кривой. Отличие срединной кривой от окружности при  $\lambda > 3$  на рисунке масштабно незаметно, но это различные кривые.

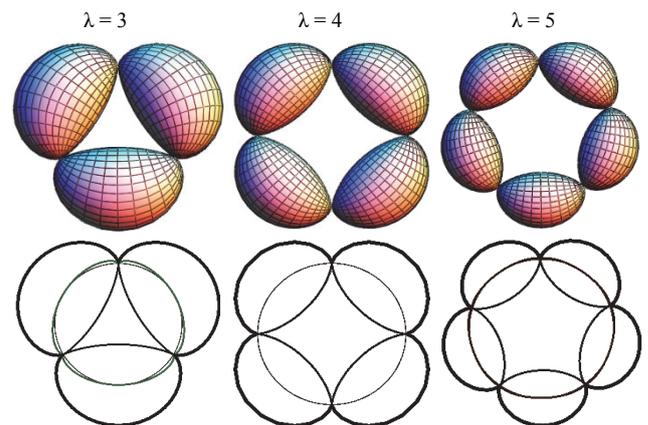
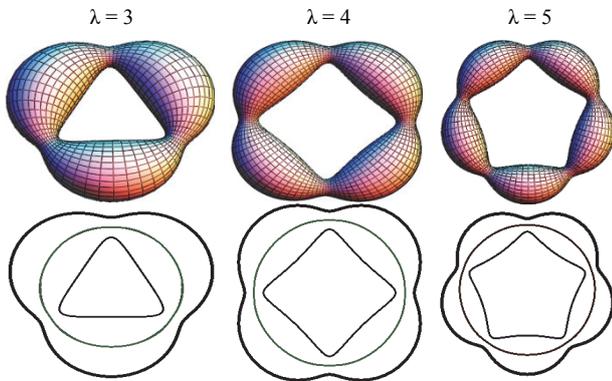
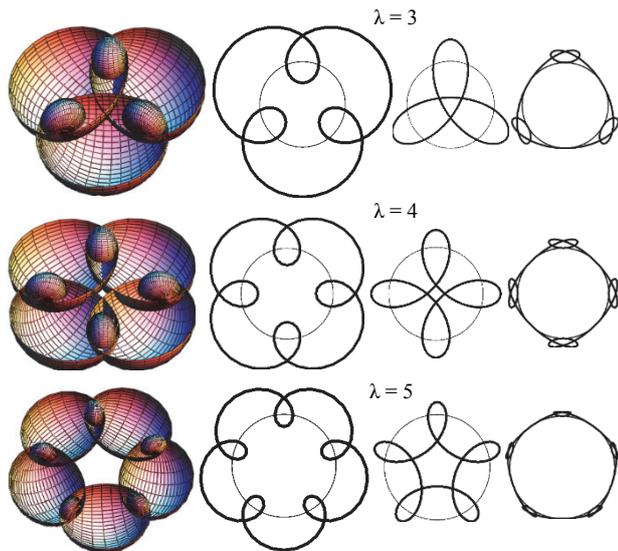


Рис. 5. Эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с образующей точкой на подвижной окружности [Fig. 5. Epi-hypocycloidal cyclic surfaces with a generating point on a moving circle]

На рис. 6 изображены эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с образующей точкой внутри подвижной окружности  $\mu = 0,65$ . В нижнем ряду рисунка – эпициклоиды, гипоциклоиды неподвижной окружности и срединной кривой.



**Рис. 6. Эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с образующей точкой внутри подвижной окружности  $\mu = 0,65$**   
 [Fig. 6. Epi-hypocycloidal cyclic surfaces with a generating point inside the moving circle  $\mu = 0.65$ ]



**Рис. 7. Эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с образующей точкой вне подвижной окружности  $\mu = 2,65$**   
 [Fig. 7. Epi-hypocycloidal cyclic surfaces with a generating point outside the moving circle  $\mu = 2.65$ ]

Из приведенных рисунков видно, что эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с целочисленным отношением радиусов неподвижной и подвижной окружностей ( $\lambda = b/a = n$ ) формируются из  $n$  однотипных отсеков с угловым диапазоном  $2\pi/n$ . При  $\mu = 1$  (образующая точка на подвижной окружности) отсеки соприкасаются в крайних конических точках отсеков. При  $\mu < 1$

(образующая точка внутри подвижной окружности) отсеки сопрягаются в сечениях с минимальным радиусом  $R = b(1 - \mu)$ . Как отмечалось выше, при  $\mu = 0$  эпи-гипоциклоидальная циклическая поверхность является тором радиуса  $R = b$ .

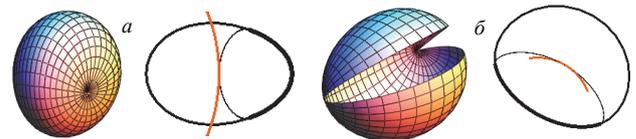
При  $\mu > 1$  (образующая точка вне подвижной окружности) эпи- и гипоциклоиды имеют зоны пересечения, где отсеки эпициклоид оказываются внутри неподвижной окружности, а отсеки гипоциклоид – вне подвижной окружности. Отсеки эпи-гипоциклоидальных циклических поверхностей в этих зонах взаимно пересекаются и разделяются на отсеки внешней и внутренней поверхностей (рис. 7). Очевидно, зона перехода внутреннего отсека поверхности во внешний определяется точками пресечения эпи- и гипоциклоиды. Приравнявая уравнения (1) эпи- ( $p = 1$ ) и гипоциклоиды ( $p = -1$ ), получаем формулу для определения углового параметра  $u_p$  точек пересечения:

$$R(u_p) = 1 - \mu \cos \lambda u_p = 0, \quad u_{pk} = \pm u_0 + k \frac{\pi}{\lambda},$$

$$u_0 = \frac{1}{\lambda} \arccos \left( \frac{1}{\mu} \right) \quad k = 0 \dots \lambda.$$

Таким образом, 1-й внутренний отсек поверхности определяется координатным диапазоном  $u = (-u_0, u_0)$ , для внешнего отсека  $u = (u_0, \pi/\lambda - u_0)$ .

На рис. 8. представлены внутренний (а) и внешний (б) отсеки поверхности, а также показаны отрезки эпи- и гипоциклоид, срединной кривой и неподвижной окружности в соответствующих диапазонах параметра  $u$ .



**Рис. 8. Отсеки эпи-гипоциклоидальных циклических оболочек  $\mu = 2,65$**   
 [Fig. 8. Compartments of epi-hypocycloidal cyclic shells  $\mu = 2.65$ ]

Как видно из рисунков, форма внешнего отсека аналогична отсекам при  $\mu = 1$ . Форма внутреннего отсека отличается от формы внешних отсеков.

Выше рассмотрены эпи-гипоциклоидальные циклические поверхности с целочисленным отношением  $\lambda$  радиусов неподвижной и подвижной окружностей. Уравнение поверхностей (3) пригодно для поверхностей с произвольным параметром  $\lambda$ . Из геометрии эпи- и гипоциклоид с дробным параметром  $\lambda$  известно, что эти кривые являются сложными взаимно пересекающимися кривыми [3, 4]. В данной работе ограничимся

рассмотрением эллипсоидальные циклические поверхности с целочисленным параметром  $\lambda$ .

Выше было отмечено, что при  $\lambda = 1$  поверхности относятся к классу каналовых поверхностей Иоахимстала. Чтобы выяснить к какому классу относятся эллипсоидальные циклические поверхности общего типа, получим коэффициенты квадратичных форм. Предварительно рассмотрим свойства функциональных параметров уравнения поверхности (3). Частные производные функций и векторов будем обозначать соответствующим индексом.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_u &= -i \sin u + j \cos u = \mathbf{n}; \\ \mathbf{n}_u &= -i \cos u - j \sin u = -\mathbf{h}; \\ \mathbf{e}_u &= \mathbf{n} \cos u; \quad \mathbf{e}_v = -\mathbf{h} \sin v + \mathbf{k} \cos v = \mathbf{g}(u, v); \\ \mathbf{g}_u &= -\mathbf{n} \sin u; \quad \mathbf{g}_v = -\mathbf{h} \cos v - \mathbf{k} \sin v = -\mathbf{e}; \\ \mathbf{h} &= \mathbf{e} \cos v - \mathbf{g} \sin v; \\ R_u &= \lambda \mu \sin \lambda u = \lambda T; \quad T_u = \lambda \mu \cos u; \\ \lambda - T_u &= \lambda R. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитываем также ортогональность единичных векторов:  $\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{k}$  и  $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{g}$ .

Учитывая соотношения (4), получим:

$$\begin{aligned} \rho_u &= a [T\mathbf{h} + R(\lambda + \cos v)\mathbf{n} + \lambda T\mathbf{e}]; \quad \rho_v = aR\mathbf{g}; \\ \rho_{uv} &= a \{ [T' - R(\lambda + \cos v)]\mathbf{h} + T(1 + 2\lambda \cos v + \lambda^2)\mathbf{n} + \lambda T'\mathbf{e} \}; \\ \rho_{uv} &= a [-R \sin v \mathbf{n} + \lambda T\mathbf{g}]; \quad \rho_{vv} = -aR\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты квадратичных форм:

$$\begin{aligned} E &= a^2 [(1 + 2\lambda \cos v + \lambda^2)T^2 + R^2(\lambda + \cos v)^2]; \\ F &= -a^2 RT \sin v; \quad G = a^2 R^2. \\ \Sigma &= \sqrt{EG - F^2} = a^2 R(\lambda + \cos v)\sigma; \\ \sigma &= \sqrt{(T^2 + R^2)} = \sqrt{(1 - 2\mu \cos \lambda u + \mu^2)}; \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{\Sigma} (\rho_u \times \rho_v) = \frac{1}{\sigma} [R\mathbf{e} - T\mathbf{n}]. \\ L &= (\mathbf{m} \rho_{uv}) = \\ &= \frac{a}{\sigma} \{ R(1 + \cos v)[\lambda - R(1 + \cos v)] - T^2(1 + 2\lambda \cos v + \lambda^2) \}; \\ M &= (\mathbf{m} \rho_{vv}) = \frac{a}{\sigma} TR \sin v; \quad N = (\mathbf{m} \rho_{vv}) = -\frac{a}{\sigma} R^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Из формул видно, что выполняется равенство  $MG = NF$  или  $MG - NF = 0$ . Это является услови-

ем, что система координат  $u = \text{const}$  (система окружностей) является системой линий кривизны поверхности [3; 7; 8], и, следовательно, эллипсоидальные циклические поверхности относятся к классу каналовых поверхностей.

© Иванов В.Н., 2018

## Список литературы

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике: для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: ГИФизМатлит, 1962. 608 с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Изд-во «Наука», 1965. 480 с.
3. Иванов В.Н., Романова В.А. Конструктивные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCad, AutoCad: монография. М.: Изд-во АСВ, 2016. 412 с.
4. Lawrence J. Dennis. A catalog of special plane curves. Dover Publications, 1972. Pp. 161, 168–170, 175.
5. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 752 p.
6. Иванов В.Н., Махмуд Х.С. Координатная сеть линий кривизны эпитрохоидальной поверхности // Исследования по строительной механике пространственных систем. М.: Изд-во УДН, 1990. С. 38–44.
7. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: ГИФМЛ, 1963. 540 с.
8. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: монография. М.: Изд-во РУДН, 2010. 540 с.

## References

1. Bronshtain I.N., Semendyaev K.A. (1962). *Spravochnik po matematike* [Reference book of higher mathematics]. For engineers and students of the VTUZes. Moscow, GIFizMatlit Publ., 608. (In Russ.)
2. Smirnov V.I. (1965). *Kurs vysshei matematiki* [Course of higher mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1, 480. (In Russ.)
3. Ivanov V.N., Romanova V.A. (2016). *Konstruktsionnye formy prostranstvennykh konstruksii. Vizualizatsiya poverkhnostei v sistemakh MathCad, AutoCad* [Constructive forms of the space constructions. Visualization of the surfaces in the systems of MathCad and UutuCad]. Monograph. Moscow, FSV Publ., 412. (In Russ.)
4. Lawrence J. Dennis. (1972). *A catalog of special plane curves*. Dover Publications, 161, 168–170, 175.
5. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Switzerland: Springer International Publishing, 752.
6. Ivanov V.N., Mahmud H.S. (1990). Koordinatnaya set' linii krivizny epitro-khoidal'noi poverkhnosti [Coordinate system of the curvature lines of the epitrochoidal surface]. *Investigation of structural mechanics of the space systems*. Moscow, UDN Publ., 38–44. (In Russ.)

7. Shulikovskiy V.I. (1963). *Klassicheskaya differentsial'naya geometriya* [Classic differential geometry]. Moscow, GIFML Publ., 540. (In Russ.)

8. Ivanov V.N., Krivoshepko S.N. (2010). *Analiticheskie metody rascheta obolochek nekanonicheskoi formy* [Analytical methods of analyses of the shells of non-canonical form]. Moscow, RUDN Publ., 540. (In Russ.)

**Об авторе**

**Иванов Вячеслав Николаевич** – доктор технических наук, профессор департамента архитектуры и строительства Инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов:* геометрия, формообразование поверхностей и методы расчета тонкостенных конструкций сложных форм. *Контактная информация:* e-mail – i.v.ivn@mail.ru.

**About the author**

**Ivanov Vyacheslav N.** – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Architecture and Civil

Engineering, Engineering Academy, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* geometry, surface shaping and methods for calculating thin-walled structures of complex shapes. *Contact:* e-mail – i.v.ivn@mail.ru.

**Для цитирования**

*Иванов В.Н.* Эпи-гипоциклоиды и эпи-гипоциклоидальные каналовые поверхности // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3 . С. 242–247. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-242-247.

**For citation**

Ivanov V.N. (2018). Epi-hypocycloids and epi-hypocycloidal canal surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14(3), 242–247. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-242-247.

## Теория упругости

УДК 539.375

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-248-257

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ВОЛОКНИСТОМ КОМПОЗИТЕ ПРИ ИЗГИБЕ

Ш.Г. ГАСАНОВ

Азербайджанский технический университет  
пр. Г. Джавида, д. 25, Баку, Азербайджан, AZ 1073*(поступила в редакцию: 4 января 2018 г.; принята к публикации: 30 апреля 2018 г.)*

Проектирование армированного волокнами композита минимальной материалоемкости при гарантированной надежности и долговечности требует учета случаев, когда в связующем могут возникать трещины. Чтобы знать предельные изгибающие нагрузки, при которых в связующем произойдет образование трещин, необходимо проводить предельный анализ композита. На основе предложенной расчетной модели, учитывающей в волокнистом композите наличие повреждений (зон ослабленных межчастичных связей материала), разработан метод расчета параметров композита, при которых появляются трещины. Рассмотрена тонкая пластина из упругой изотропной среды (матрицы) и распределенных в ней включений (волокон) из другого упругого материала при изгибе. Считается, что при нагружении происходит зарождение трещин и разрушение композита. Для прогнозирования появления трещин в волокнистом композите при изгибе в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и волокна построена замкнутая система нелинейных алгебраических уравнений. Сформулирован критерий зарождения трещин в композите при действии изгибающих нагрузок. Размер предельных минимальных зон ослабленных межчастичных связей материала, при которых происходит трещинообразование, рекомендуется рассматривать как проектную характеристику материала связующего.

**Ключевые слова:** связующее, волокно, изгиб, зоны предразрушения, композитная пластина, трещинообразование

### MODELING OF CRACKS NUCLEATION IN FIBER COMPOSITE UNDER BENDING

SH.H. HASANOV

Azerbaijan Technical University  
25 H. Javid Ave, Baku, AZ 1073, Azerbaijan*(received: January 04, 2018; accepted: April 30, 2018)*

Design of fiber-reinforced composite of minimum material consumption at guaranteed reliability and durability requires consideration of cases when cracks may appear in the binder. To know the limit bending loads at which cracks will occur in the binder, it is necessary to carry out the limit analysis of the composite. Proposed design model takes into account the presence of damages (zones of weakened inter-particle bonds of the material) in the fiber composite. Based on this design model a calculation method has been developed for composite parameters at which cracks appear. A thin plate of elastic isotropic medium (matrix) and inclusions (fibers) of another elastic material distributed in the matrix is considered. The plate is bending. It is assumed that at the loading of composite, the cracks initiation and fracture of the composite occur. A closed system of nonlinear algebraic equations is constructed. Solution of the obtained system allows to predict the cracking in composite under bending, depending on geometric and mechanical characteristics of the binder and fiber. A criterion of the cracks nucleation in the composite under the action of bending loads is formulated. Size of limit minimal zones of weakened inter-particle bonds of the material at which the cracks nucleation occurs is recommended to be considered as a design characteristic of the binder material.

**Keywords:** binder, fiber, bending, prefraction zones, composite plate, cracking

**Введение.** Создание новых композиционных материалов, обладающих высокой прочностью, жесткостью и надежностью, открывает большие возможности их широкого применения в различных областях строительства и машиностроения. Такими материалами, в частности, являются волокнистые композиты.

Решение различных задач техники требует объективной информации о напряженно-деформированном состоянии в элементах конструкций из композиционных материалов. Эту информацию можно получить только при учете основных особенностей этих материалов. При проектировании новых конструкций из композитных материалов необходимо учитывать возможность появления в материале трещин. Поэтому необходимо проводить предельный анализ, чтобы установить, что предполагаемые исходные повреждения, расположенные максимально неблагоприятно, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы. Одно из основных мест в механике композитных материалов занимают проблемы, связанные с особенностями из структуры. В частности, при исследовании различного рода вопросов механики составных тел важно учитывать повреждения в их структурах. Такие повреждения могут быть вызваны самим построением композитных материалов, технологическими процессами или действием различных факторов. Следует отметить, что успешное применение на практике композитных материалов в значительной мере связано с решением задач определения их напряженно-деформированного состояния с учетом структурных особенностей, в том числе повреждений в связующем и волокнах. Поэтому исследования напряженно-деформированного состояния в волокнистых композитах с повреждениями следует признать весьма актуальными. Этим вопросам посвящено большое число работ [1–27] и др. Разработка математической модели, позволяющей прогнозировать напряженно-деформированное состояние композита в стадии предразрушения (образования трещин), имеет большое значение.

Цель работы состоит в разработке расчетной модели для составного тела «связующее – волокно», позволяющей рассчитать предельные внешние изгибающие нагрузки, при которых происходит образование трещин в волокнистом композите.

**Постановка задачи.** Пусть неограниченная составная пластина (волокнистый композит) подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности)  $M_x = M_x^\infty$ ,  $M_y = M_y^\infty$ ,  $H_{xy} = 0$ .

При нагружении композита в материале связующего будут возникать зоны предразрушения. Зоны предразрушения моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала, где при нагружении композита имеет место пластическое течение. Зоны предразрушения ориентированы в направлении максимальных растягивающих напряжений. Исследования [28–30] показывают, что в начальной стадии нагружений зоны предразрушения представляют собой узкий вытянутый слой, а затем с ростом внешней нагрузки внезапно появляется вторичная система зон ослабленных межчастичных связей материала.

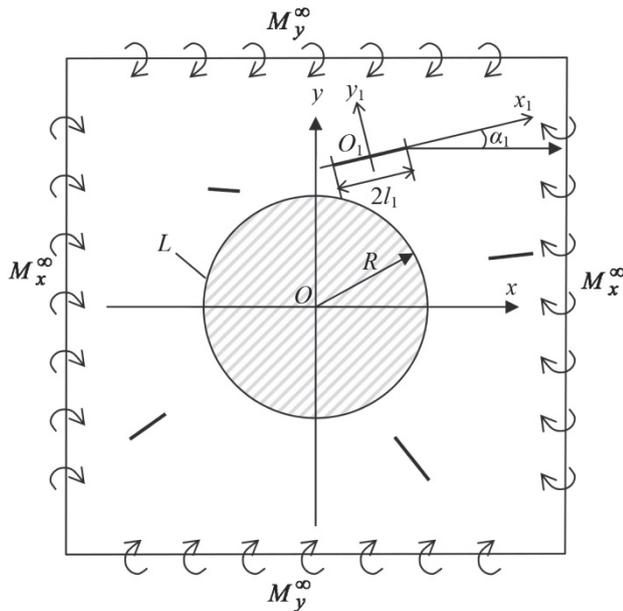
Пусть внешняя изгибающая нагрузка изменяется таким образом, что в зонах ослабленных межчастичных связей материала связующего осуществляется пластическое деформирование. После некоторого числа циклов нагружения композита возможность пластического деформирования в зонах ослабленных межчастичных связей материала исчерпывается и резко возрастает раскрытие берегов зон пластического течения. Когда раскрытие берегов зоны предразрушения в точке максимальной концентрации достигнет предельного значения  $\delta_c$  для данного материала связующего, в этой точке образуется трещина (происойдет разрыв межчастичных связей материала) [31].

В процессе нагружения композита изгибающими моментами в материале связующего будет возникать зона предразрушения. Для математического описания взаимодействия берегов зоны предразрушения принято, что в этой зоне между берегами имеются связи, которые сдерживают раскрытие берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется с помощью введения между берегами линий пластического скольжения (вырожденных полос пластических деформаций). Местоположение и размеры зон пластического течения зависят от вида материала связующего и нагружения. Считается, что в зонах предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. При этом местоположение и размер зон предразрушения изначально неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи.

Анализ взаимодействия связующего и волокон проводится на основе модели с одним волокном. Остальные волокна «размазываются», а материал вне выделенного волокна принимается однородным и изотропным с соответствующими эффективными упругими постоянными (по правилу смесей). Взаимодействие размазанных волокон и зон предразрушения осуществляется через соот-

ветствующие эффективные упругие постоянные. При этом нет ограничений на расположение и относительные размеры волокон и зон предразрушения, но принято, что зоны предразрушения не пересекаются между собой и волокном.

Начало системы координат  $Oxy$  совпадает с геометрическим центром волокна в срединной плоскости композитной пластины (рис. 1). В круговое отверстие связующего вставлено волокно из другого, также упругого материала. Принято, что всюду на границе соединения  $L$  ( $\tau = R \exp(i\theta)$ ) имеет место жесткое сцепление различных материалов.



**Рис. 1. Расчетная схема образования трещин в связующем композита при изгибе**  
**[Fig. 1. Design diagram of cracks nucleation in the composite binder subject to bending]**

Рассмотрим случай, когда в связующем вблизи волокна в процессе изгиба имеется  $N$  прямолинейных зон предразрушения длиной  $2l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). В центрах прямолинейных зон предразрушений разместим начала локальных систем координат  $O_k x_k y_k$ . Оси  $x_k$  совпадают с линиями зон предразрушения и составляют ось  $x$  углы  $\alpha_k$ . На контуре раздела сред должны выполняться условия:

$$w = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w_0}{\partial n}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w_0}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial n \partial t},$$

где  $w$  и  $w_0$  прогибы связующего и волокна соответственно;  $n$  и  $t$  натуральные координаты (нормаль и касательная к контуру  $L$ ).

Соотношения (1) являются следствием непрерывности прогибов в композите, углов наклона касательной и величин изгибающих моментов.

При нагружении композита внешними изгибающими моментами в связях, соединяющих берега зон предразрушения, будут возникать нормальные  $\sigma_{y_k} = \sigma_s$  и касательные напряжения  $\tau_{x_k y_k} = \tau_s$  ( $\sigma_s$  – предел текучести материала при растяжении,  $\tau_s$  – предел текучести материала на сдвиг).

Граничные условия на берегах зон предразрушения будут иметь вид:

$$M_n = M_s, \quad N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial t} = H_s, \quad (2)$$

где  $M_s = \frac{\sigma_s h^2}{4}$ ;  $H_s = \frac{\tau_s h^2}{4}$ ;  $h$  – толщина композитной пластины;  $M_n, H_{nt}$  – удельные изгибающий и крутящий моменты;  $N_n$  – удельная поперечная сила.

Для определения значений внешней изгибающей нагрузки, при которой произойдет появление трещин в связующем, необходимо постановку задачи дополнить условием трещинообразования (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимается критерий предельного раскрытия берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала:

$$\left| (v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-) \right| = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (3)$$

Здесь  $\delta_c$  – характеристика сопротивления материала связующего трещинообразованию;  $(v_k^+ - v_k^-)$  – нормальная составляющая раскрытия берегов  $k$ -той зоны предразрушения;  $(u_k^+ - u_k^-)$  – касательная составляющая раскрытия (сдвига) берегов  $k$ -той зоны предразрушения.

Дополнительное условие (3) позволяет установить параметры композитной пластины, при которых произойдет появление трещин в связующем.

Моменты  $M_x, M_y, H_{xy}$ , поперечные силы  $N_x, N_y$  и прогиб  $w$  в технической теории изгиба пластин можно представить с помощью комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили [32]. На границе раздела сред имеем

$$\varphi(\tau) + \tau \overline{\Phi(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \varphi_0(\tau) + \tau \overline{\Phi_0(\tau)} + \overline{\Psi_0(\tau)}, \quad (4)$$

$$n_k \varphi(\tau) + \tau \overline{\Phi(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \{ n_0 \varphi_0(\tau) + \tau \overline{\Phi_0(\tau)} + \overline{\Psi_0(\tau)} \}. \quad (5)$$

Здесь  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  и  $\varphi_0(\tau)$ ,  $\psi_0(\tau)$  – комплексные потенциалы для связующего и волокна соответственно;  $\tau = \exp(i\theta)$  – переменная точка на границе раздела сред;  $n_* = -(3 + \nu)/(1 - \nu)$ ;  $D$  и  $D_0$  – цилиндрическая жесткость связующего и волокна соответственно;  $\nu$  и  $\nu_0$  – коэффициенты Пуассона материала связующего и волокна;  $n_0 = -(3 + \nu_0)/(1 - \nu_0)$ .

Рассматриваемая краевая задача механики композитных материалов оказывается задачей теории упругости с неизвестной границей и ее требуется определить в процессе решения краевой задачи. На берегах прямолинейных зон предразрушения имеем следующие условия

$$n_*\Phi(x_k) + \overline{\Phi(x_k)} + x_k \overline{\Phi'(x_k)} + \overline{\Psi(x_k)} = f_k^0 + iC_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (6)$$

где  $f_k^0 = M_s - iH_s$ ;  $x_k$  – аффикс точек  $k$ -той зоны предразрушения;  $C_k$  – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи из условий равенства нулю скачка прогиба в вершинах зон предразрушения.

В принятых предположениях теории Кирхгофа рассматриваемая задача определения напряженно-деформированного состояния композитной пластины сводится к отысканию двух пар функций  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$  и  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$ , аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих краевым условиям (4)–(6).

Комплексные потенциалы  $\varphi_0(\tau)$  и  $\psi_0(\tau)$ , описывающие напряженно-деформированное состояние волокна, ищем в виде

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi_0(z) = \sum_{k=1}^b b_k z^k. \quad (7)$$

Обозначим левую часть краевого условия (4) как  $f_1 + if_2$  и примем, что на контуре  $L$  эта комплексная функция разлагается в ряд Фурье:

$$f_1 + if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}. \quad (8)$$

На основании краевого условия (4) и соотношений (7), (8), используя метод степенных рядов [32], находим коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$  функций  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$ :

$$a_n = \frac{A_n}{R^n} \quad (n > 1), \quad \operatorname{Re} a_1 = \frac{A_1}{2R}, \quad (9)$$

$$b_n = \frac{\overline{A_{-n}}}{R^n} - (n+2) \frac{A_{n+2}}{R^n} \quad (n \geq 0).$$

Величины коэффициентов  $A_n$  ищем в ходе решения задачи для связующего. С помощью комплексных потенциалов  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  после некоторых элементарных преобразований граничные условия на контуре  $\tau = R \exp(i\theta)$  раздела сред запишем в виде

$$\varphi(\tau) + \tau \overline{\varphi(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}, \quad (10)$$

$$n_*\varphi(\tau) + \tau \overline{\varphi(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \left\{ n_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k e^{ik\theta} + \overline{a_1} \operatorname{Re} e^{i\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \overline{a_{k+2}} R^{2k+2} e^{-ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{b_k} R^k e^{-ik\theta} \right\}. \quad (11)$$

Решение граничной задачи (6), (10), (11) ищем в виде

$$\Phi(z) = \varphi_1'(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \psi_1'(z) + \Psi_2(z), \quad (12)$$

$$\varphi_1(z) = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1+\nu)D} z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k},$$

$$\psi_1(z) = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1+\nu)D} z + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k}, \quad (13)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i(1+\kappa)} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g_k(t)}{t-z_k} dt, \quad (14)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi i(1+\kappa)} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-l_k}^{l_k} \left[ \frac{\overline{\kappa g_k(t)}}{t-z_k} - \frac{\overline{T_k} e^{i\alpha_k}}{(t-z_k)^2} g_1(t) \right] dt, \quad (15)$$

где  $T_k = t e^{i\alpha_k} + z_k^0$ ;  $z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0)$ ;  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ ;  $g_k(x_k)$  – искомые функции, характеризующие разрыв углов поворота срединной плоскости пластины при переходе через линию зоны предразрушения

$$\pm g_k(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^\pm}{\partial x_k} + i \frac{\partial W_k^\pm}{\partial y_k} \right).$$

Удовлетворяя функциями (12), (13) и (14) граничным условиям (10), (11) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$ , получим алгебраические уравнения для нахождения коэффициентов  $c_k$ ,  $d_k$  и  $A_k$ . Эти соотношения позволяют получить формулы для  $c_k$ ,  $d_k$  и  $A_k$  в явном виде через функции  $g_k(x_k)$ .

Удовлетворяя краевым условиям на берегах зон предразрушения (6), получим систему  $N$  комплексных сингулярных интегральных урав-

нений относительно неизвестных функций  $g_k(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \left[ R_{nk}(t, x) g_n^*(t) + S_{nk}(t, x) \overline{g_n^*(t)} \right] dt = \pi F_n(x), \quad (16)$$

$$|x| \leq l_n \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

где  $l_n$ ,  $t$ ,  $x$  и  $z_n^0$  – безразмерные величины, отнесенные к  $R$ ;  $g_k^*(t) = \frac{g_k(t)}{i(1+\kappa)}$ ;  $R_{nk}$ ,  $S_{nk}$  определяются по известным соотношениям [33, формулы VI. 62];

$$F_n(x) = f_n^0 + iC_n - \left[ n_* \Phi_1(x_n) + \Phi_1(x_n) + x_n \overline{\Phi_1'(x_n)} + \overline{\Psi_1(x_n)} \right].$$

К системе сингулярных интегральных уравнений (16) для внутренних зон предразрушения добавляются равенства, которые обеспечивают однозначность углов поворота срединной плоскости композитной пластины при обходе контуров зон предразрушения

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k^*(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (17)$$

Для определения постоянных  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) имеем соотношения [34], обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах зон предразрушения

$$\operatorname{Re} \int_{-l_k}^{l_k} \operatorname{tg} g_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (18)$$

Система комплексных сингулярных интегральных уравнений (16) при дополнительных условиях (17) сводится [28; 33] к конечной системе  $N \times M$  алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций  $g_k^*(x_k)$  в узловых точках:

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^N l_k \left[ g_k^*(t_m) R_{nk}(l_k t_m, l_n, x_n) + \overline{g_k^*(t_m)} S_{nk}(l_k t_m, l_n, x_n) \right] = F_n(x_r),$$

$$\sum_{m=1}^M g_n^*(t_m) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1; n = 1, 2, \dots, N). \quad (19)$$

Если в системе (19) перейти к комплексно сопряженным величинам, то получим еще одну систему  $N \times M$  алгебраических уравнений.

Решение системы сингулярных интегральных уравнений ищется в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Поэтому к системе (19) необходимо добавить условия ограниченности напряжений на концах зон пластического

течения  $x_k = \pm l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Эти  $2N$  условий имеют следующий вид

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_k^*(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (20)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_k^*(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

$2N$  комплексных уравнений (20) служат для определения координат вершин зон пластического течения. Алгебраическая система (19), (20) из-за неизвестных размеров зон предразрушения является нелинейной. Полученные разрешающие системы уравнений относительно  $c_k$ ,  $d_k$ ,  $A_k$ ,  $g_k^*(t_m)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ ) позволяют для заданной внешней изгибающей нагрузки исследовать напряженно-деформированное состояние композита при наличии в материале связующего произвольного числа зон предразрушения. Для решения нелинейной объединенной алгебраической системы используется метод последовательных приближений. Ее численное решение позволяет найти координаты вершин (местоположение) и размеры зон предразрушения, значения  $c_k$ ,  $d_k$ ,  $A_k$ ,  $g_k^*(t_m)$ . Очевидно, что, определив координаты вершин всех зон предразрушения, по известным формулам аналитической геометрии можно найти координаты  $z_k^0$  центров зон предразрушения и углы  $\alpha_k$  с осью  $x$  (рис. 1). После нахождения значений искомых функций  $g_k^*(t_m)$  вычислялось раскрытие берегов зон предразрушения. С помощью критерия предельного раскрытия берегов зон предразрушения найдено условие, определяющее критический уровень внешней изгибающей нагрузки в связующем для каждой зоны предразрушения. Значение внешней изгибающей нагрузки, вызывающей появление трещины в  $k$ -той зоне предразрушения, определяется из следующего соотношения

$$\left| - \int_{-l_k}^{x_k^0} g_k^*(x_k) dx_k \right| = \delta_c \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (21)$$

где  $x_k^0$  – координаты точки зон предразрушения, в которых происходит разрыв межчастичных связей материала связующего.

Критическим значением изгибающей нагрузки в связующем будет минимальное среди величин, определяемых соотношением (21).

Результаты расчетов приведены на рис. 2.

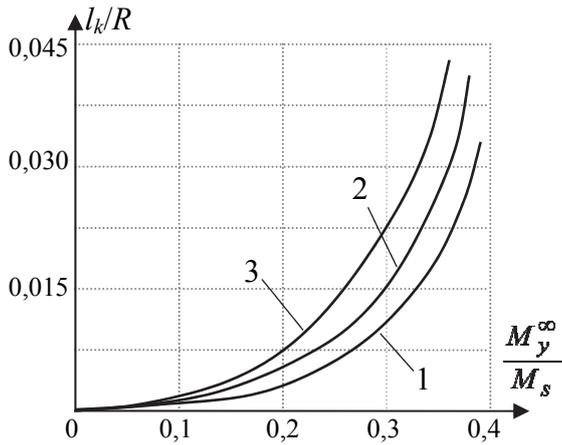


Рис. 2. Зависимость длин зон предразрушения от внешней изгибающей нагрузки  
[Fig. 2. Dependence of the prefracture zones lengths on external bending load]

мерного значения изгибающего момента  $M_y^\infty / M_s$  для различных углов ориентации ( $\alpha_1 = 11^\circ$ ,  $\alpha_2 = 36^\circ$ ,  $\alpha_3 = 48^\circ$ ). В расчетах было принято  $M = 30$ .

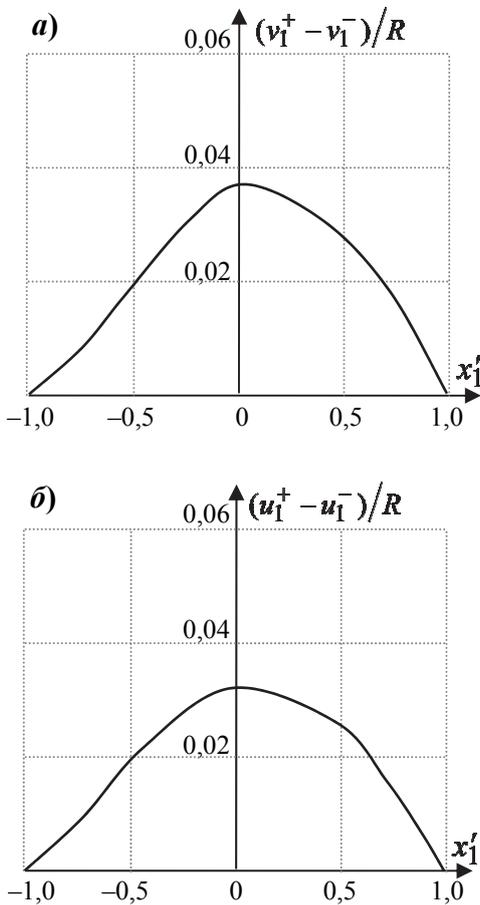


Рис. 3. Распределение нормальных (а) и касательных (б) составляющих вектора перемещений для угла ориентации  $\alpha_1 = 11^\circ$   
[Fig. 3. Distribution of the normal (a) and tangential (б) components of displacement vector for orientation angle  $\alpha_1 = 11^\circ$ ]

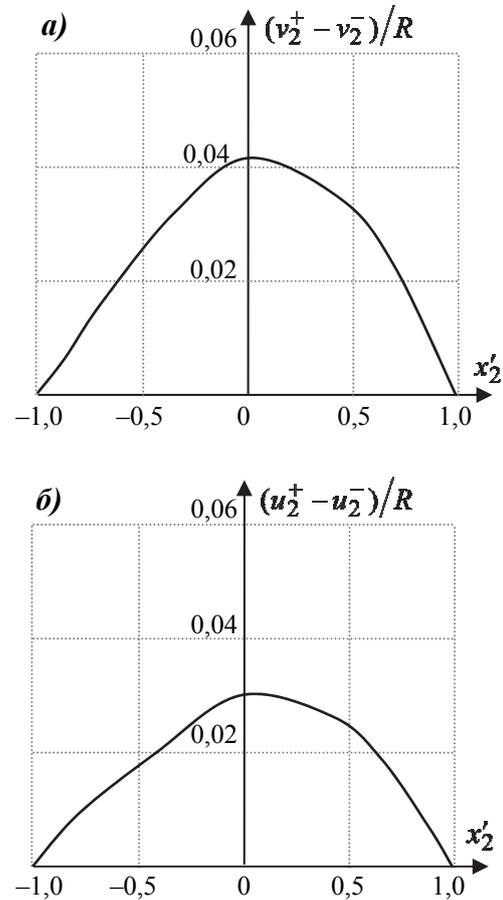


Рис. 4. Распределение нормальных (а) и касательных (б) составляющих вектора перемещений для угла ориентации  $\alpha_1 = 36^\circ$   
[Fig. 4. Distribution of the normal (a) and tangential (б) components of displacement vector for orientation angle  $\alpha_1 = 36^\circ$ ]

На рис. 3–5 представлены графики распределения нормальных  $(v_k^+ - v_k^-) / R$  и касательных  $(u_k^+ - u_k^-) / R$  составляющих вектора перемещений. При расчетах были использованы безразмерные координаты  $x'_k = x_k / l_k$ .

На рис. 2 представлены зависимости длины зоны предразрушения  $l_k / R$  ( $k = 1, 2, 3$ ) от безраз-

Существенное влияние на раскрытие берегов зон пластического течения играет местоположение зон предразрушения. Когда зоны пластического течения расположены близко друг к другу, то расчеты показывают как увеличение размеров зон предразрушения и раскрытие их берегов, так и уменьшение раскрытия берегов и размеров зон предразрушения. Различие видов вза-

имного влияния повреждений (зон ослабленных межчастичных связей материалов) объясняется различиями их расположения.

Полученная объединенная алгебраическая система уравнений задачи позволяет получить решение с любой наперед заданной точностью.

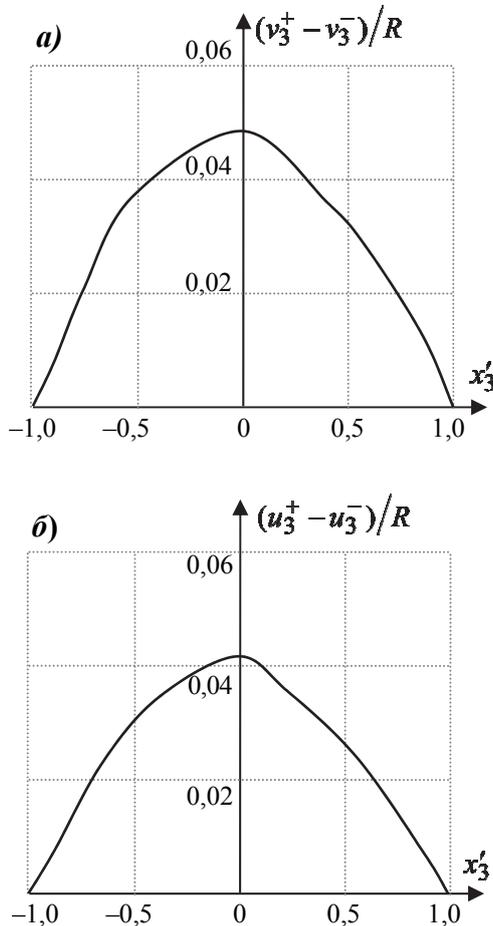


Рис. 5. Распределение нормальных (а) и касательных (б) составляющих вектора перемещений для угла ориентации  $\alpha_1 = 48^\circ$   
 [Fig. 5. Distribution of the normal (a) and tangential (б) components of displacement vector for orientation angle  $\alpha_1 = 48^\circ$ ]

Анализ модели образования трещин в связующем волокнистого композита в процессе нагружения изгибающей нагрузкой сводится к параметрическому совместному исследованию объединенной разрешающей алгебраической системы задачи и критерия появления трещин (21) при различных значениях свободных параметров композитной пластины. Это различные геометрические и механические характеристики материалов связующего и армирующих волокон.

На некотором этапе нагружения пластины возможно одновременное существование в материале связующего зон пластического течения и

образовавшихся трещин. Метод решения задачи теории изгиба пластины в этом случае объединяет одновременный учет повреждений и трещин с концевыми зонами пластических деформаций.

**Выводы.** Практика использования армированных волокнами композитов показывает, что на стадии проектирования следует принимать во внимание возможное появление в связующем трещин. Существующие методы прочностного расчета волокнистого композита, как правило, игнорируют это обстоятельство. Такое положение делает невозможным проектирование композита минимальной материалоемкости при гарантированной надежности и долговечности. Поэтому необходим предельный анализ композита, чтобы знать предельные изгибающие нагрузки, при которых в связующем происходит образование трещин. Размер предельных минимальных зон ослабленных межчастичных связей материала, при которых происходит трещинообразование, рекомендуется рассматривать как проектную характеристику материала связующего.

На основе предложенной расчетной модели, учитывающей в армированном волокнами композите наличие повреждений (зон ослабленных межчастичных связей материала), разработан метод расчета параметров композита, при которых появляются трещины. Зная основные значения предельных параметров формирования трещин и влияние на них свойств материалов, можно обоснованно управлять явлением образования трещин путем конструкторско-технологических решений на стадии проектирования композита.

© Гасанов Ш.Г., 2018

#### Список литературы

1. Мурсалимов В.М., Бахъишов Ф.А. Обратная задача механики разрушения составной перфорированной пластины при изгибе // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 5. С. 28–37.
2. Li S., Thouless M.D., Waas A.M., Schroeder J.A., Zavattieri P.D. Use of a cohesive-zone model to analyze the fracture of a fiber-reinforced polymer–matrix composite // Composites Science and Technology. 2005. Vol. 65. Pp. 537–549.
3. Бахъишов Ф.А., Мурсалимов В.М. Обратная двоякопериодическая задача теории изгиба пластины с упругими включениями // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47. № 4. С. 153–161.
4. Lü N.C., Cheng Y.H., Si H.L., Cheng J. Dynamics of asymmetrical crack propagation in composite materials // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2007. Vol. 47. Issue 3. Pp. 260–273.

5. *Мирсалимов В.М.* Оптимальное проектирование составной пластины, ослабленной периодической системой трещин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2007. № 1. С. 75–86.
6. *Savastano Jr. H., Santos S.F., Radonjic M., Soboyejo W.O.* Fracture and fatigue of natural fiber-reinforced cementitious composites // Cement and Concrete Composites. 2009. Vol. 31. Issue 4. Pp. 232–243.
7. *Lü N., Li X., Cheng Y., Cheng J.* An asymmetrical dynamic crack model of bridging fiber pull-out of composite materials. *Fibers and Polymers*. 2011. 12 (1). Pp. 79–88.
8. *Ko Y.F., Ju J.W.* Effects of fiber cracking on elastoplastic-damage behavior of fiber-reinforced metal matrix composites // *Int. J. of Damage Mechanics*. 2013. Vol. 22. Pp. 48–67.
9. *Greco F., Leonetti L., Lonetti P.* A two-scale failure analysis of composite materials in presence of fiber/matrix crack initiation and propagation // *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. Pp. 582–597.
10. *Mirsalimov V.M., Hasanov F.F.* Interaction between periodic system of rigid inclusions and rectilinear cohesive cracks in an isotropic medium under transverse shear // *Acta Polytechnica Hungarica*. 2014. Vol. 11. Issue 5. Pp. 161–176.
11. *Гасанов Ф.Ф.* Разрушение композита, армированного однонаправленными волокнами // Механика композитных материалов. 2014. Т. 50. № 5. С. 829–842.
12. *Мирсалимов В.М., Гасанов Ф.Ф.* Взаимодействие периодической системы инородных упругих включений, поверхность которых равномерно покрыта однородной цилиндрической пленкой, и двух систем прямолинейных трещин с концевыми зонами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. Т. 43. № 5. С. 70–78.
13. *Hao W., Yao X., Ma Y., Yuan Y.* Experimental study on interaction between matrix crack and fiber bundles using optical caustic method // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 134. Pp. 354–367.
14. *Гасанов Ф.Ф.* Моделирование зарождения трещины сдвига в волокне композита, армированного однонаправленными волокнами // Проблемы машиностроения. 2014. Т. 17. № 2. С. 17–25.
15. *Гасанов Ф.Ф.* Зарождение трещин в изотропной среде с периодической системой круговых отверстий, заполненных жесткими включениями, при продольном сдвиге // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 3. С. 44–50.
16. *Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н.* Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 157. Кн. 4. С. 112–132.
17. *Мирсалимов В.М., Гасанов Ф.Ф.* Взаимодействие периодической системы инородных включений и когезионных трещин при продольном сдвиге // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 2. С. 18–28.
18. *Полилов А.Н.* Механизмы уменьшения концентрации напряжений в волокнистых композитах // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 1. С. 187–197.
19. *Мирсалимов В.М., Аскаров В.А.* Минимизация параметров разрушения в композите при изгибе // Механика композитных материалов. 2015. Т. 51. № 6. С. 1049–1060.
20. *Mokhtari A., Ouali M.O., Tala-Ighil N.* Damage modelling in thermoplastic composites reinforced with natural fibres under compressive loading // *Int. J. of Damage Mechanics*. 2015. Vol. 24. Pp. 1239–1260.
21. *Мирсалимов В.М., Аскаров В.А.* Минимизация коэффициентов интенсивности напряжений для композита, армированного однонаправленными волокнами при изгибе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 105–116.
22. *Mirsalimov V.M., Hasanov F.F.* Nucleation of cracks in an isotropic medium with periodic system of rigid inclusions under transverse shear // *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 226. Pp. 385–395.
23. *Круминьш Я., Зесерс А.* Экспериментальное исследование разрушения бетона, армированного гибридными волокнами // Механика композитных материалов. 2015. Т. 51. № 1. С. 37–46.
24. *Takeda T., Narita F.* Fracture behavior and crack sensing capability of bonded carbon fiber composite joints with carbon nanotube-based polymer adhesive layer under Mode I loading // *Composites Science and Technology*. 2017. № 146. Pp. 26–33.
25. *Ju J.W., Wu Y.* Stochastic micromechanical damage modeling of progressive fiber breakage for longitudinal fiber-reinforced composites // *Int. J. of Damage Mechanics*. 2016. Vol. 25. Pp. 203–227.
26. *Bakhshan H., Afrouzian A., Ahmadi H., Taghavi-mehr M.* Progressive failure analysis of fiber-reinforced laminated composites containing a hole // *Int. J. of Damage Mechanics*. 2017. URL: <https://doi.org/10.1177/1056789517715088>.
27. *Mirsalimov V.M.* Minimization of stress state of compound body weakened with cracks // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2018. URL: <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1444220>.
28. *Мирсалимов В.М.* Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
29. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1991. 416 с.
30. *Rusinko A., Rusinko K.* Plasticity and creep of metals. Berlin: Springer, 2011. 434 p.
31. *Мирсалимов В.М.* Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 2. С. 35–45.
32. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
33. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
34. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

## References

1. Mirsalimov V.M., Bakhyshev F.A. (2005). Inverse problem of the fracture mechanics of a composite perforated plate during bending. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 34(5), 28–37.
2. Li S., Thouless M.D., Waas A.M., Schroeder J.A., Zavattieri P.D. (2005). Use of a cohesive-zone model to analyze the fracture of a fiber-reinforced polymer–matrix composite. *Composites Science and Technology*, 65, 537–549.
3. Bakhyshev F.A., Mirsalimov V.M. (2006). Inverse doubly periodic problem of the theory of bending of a plate with elastic inclusions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 47(4), 588–595.
4. Lü N.C., Cheng Y.H., Si H.L., Cheng J. (2007). Dynamics of asymmetrical crack propagation in composite materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 47(3), 260–273.
5. Mirsalimov V.M. (2007). Optimal design of a compound plate weakened by a periodic crack system. *Mechanics of Solids*, 42(2), 231–240.
6. Savastano Jr H., Santos S.F., Radonjic M., Soboyejo W.O. (2009). Fracture and fatigue of natural fiber-reinforced cementitious composites. *Cement and Concrete Composites*, 31, 232–243.
7. Lü N., Li X., Cheng Y., Cheng J. (2011). An asymmetrical dynamic crack model of bridging fiber pull-out of composite materials. *Fibers and Polymers*, 12(1), 79–88.
8. Ko Y.F., Ju J.W. (2013). Effects of fiber cracking on elastoplastic-damage behavior of fiber-reinforced metal matrix composites. *International Journal of Damage Mechanics*, 22, 48–67.
9. Greco F., Leonetti L., Lonetti P. A two-scale failure analysis of composite materials in presence of fiber/matrix crack initiation and propagation. *Composite Structures*, 2013, 95, 582–597.
10. Mirsalimov V.M., Hasanov F.F. (2014). Interaction between periodic system of rigid inclusions and rectilinear cohesive cracks in an isotropic medium under transverse shear. *Acta Polytechnica Hungarica*, 11(5), 161–176.
11. Hasanov F.F. (2014). Fracture of a composite reinforced by unidirectional fibers. *Mechanics of Composite Materials*, 50(5), 593–602.
12. Mirsalimov V.M., Hasanov F.F. (2014). Interaction of a periodic system of foreign elastic inclusions whose surface is uniformly covered with a homogeneous cylindrical film and two systems of straight line cracks with end zones. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 43(5), 408–415.
13. Hao W., Yao X., Ma Y., Yuan Y. (2015). Experimental study on interaction between matrix crack and fiber bundles using optical caustic method. *Engineering Fracture Mechanics*, 134, 354–367.
14. Hasanov F.F. (2014). Modelling of crack nucleation in the fibre of composite reinforced with unidirectional fibres under shear. *Journal of Mechanical Engineering*, 17(2), 17–25. (In Russ.)
15. Hasanov F.F. (2014). Nucleation of cracks in isotropic medium with periodic system of the circular holes filled with rigid inclusions at longitudinal shear. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (3), 44–50. (In Russ.)
16. Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. (2015). Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. *Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*, 157(4), 112–132. (In Russ.)
17. Mirsalimov V.M., Hasanov F.F. (2015). Interaction of periodic system heterogeneous inclusions and cohesive cracks under longitudinal shear. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (2), 18–28. (In Russ.)
18. Polilov A.N. (2014). Mechanisms of stress concentration reduction in fiber composites. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 55(1), 154–163.
19. Mirsalimov V.M., Askarov V.A. (2016). Minimization of fracture parameters of a composite at bending. *Mechanics of Composite Materials*, 51(6), 737–744.
20. Mokhtari A., Ouali M.O., Tala-Ighil N. (2015). Damage modelling in thermoplastic composites reinforced with natural fibres under compressive loading. *International Journal of Damage Mechanics*, 2015, 24, 1239–1260.
21. Mirsalimov V.M., Askarov V.A. (2016). Minimization of stress intensity factors for composite reinforced by unidirectional fibers at bending. *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a Limit State*, 3(29), 105–116. (In Russ.)
22. Mirsalimov V.M., Hasanov F.F. (2015). Nucleation of cracks in an isotropic medium with periodic system of rigid inclusions under transverse shear. *Acta Mechanica*, 226, 385–395.
23. Krūmiņš J., Zesers A. (2015). Experimental investigation of the fracture of hybrid-fiber-reinforced concrete. *Mechanics of Composite Materials*, 51(1), 25–32.
24. Takeda T., Narita F. (2017). Fracture behavior and crack sensing capability of bonded carbon fiber composite joints with carbon nanotube-based polymer adhesive layer under Mode I loading. *Composites Science and Technology*, 146, 26–33.
25. Ju J.W., Wu Y. (2016). Stochastic micromechanical damage modeling of progressive fiber breakage for longitudinal fiber-reinforced composites. *International Journal of Damage Mechanics*, 25, 203–227.
26. Bakhshan H., Afrouzian A., Ahmadi H., Taghavi-mehr M. (2017). Progressive failure analysis of fiber-reinforced laminated composites containing a hole. *International Journal of Damage Mechanics*, <https://doi.org/10.1177/1056789517715088>.
27. Mirsalimov V.M. (2018). Minimization of stress state of compound body weakened with cracks. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1444220>.
28. Mirsalimov V.M. (1987). *Neodnomernye Uprugoplasticheskie Zadachi* [Non-one-dimensional Elastoplastic Problems]. Moscow, Nauka, 256. (In Russ.)
29. Panasyuk V.V. (1991). *Mehanika Kvazihrupkogo Razrusheniya Materialov* [Mechanics of Quasibrittle Fracture of Materials]. Kiev, Naukova Dumka, 416. (In Russ.)
30. Rusinko A., Rusinko K. (2011). *Plasticity and Creep of Metals*. Berlin; Springer, 434.

31. Mirsalimov V.M. (2005). Nucleation of crack type defect in the hub of a contact pair. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 17(2), 35–45.

32. Muskhelishvili N.I. (1977). *Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity*. Amsterdam: Kluwer Academic, 707.

33. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshyn A.P. (1976). *Raspredelenie Naprjazhenij okolo Treshhin v Plastinah i Obolochkah* [The Stress Distribution around Cracks in Plates and Shells]. Kiev, Naukova Dumka, 443. (In Russ.)

34. Savruk M.P. (1981). *Dvumernye Zadachi Uprugosti dlja Tel s Treshhinami* [Two-dimensional Problem of Elasticity for Bodies with Cracks]. Kiev, Naukova Dumka, 324. (In Russ.)

#### **Об авторе**

Гасанов Шахин Гумбат оглы – доктор технических наук, профессор кафедры организации автомобильных перевозок и дорожного движения, Азербайджанский технический университет. *Научные интересы*: прочность дорожных покрытий, механика разрушения конструкций и сооружений. *Контактная информация*: e-mail – hssh3883@gmail.com.

#### **About the author**

Shahin H. Hasanov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Automobile Transportation and Organization of Transport Department, Azerbaijan Technical University. *Scientific interests*: strength of road covering, fracture mechanics of structures and constructions. *Contact*: e-mail – hssh3883@gmail.com.

#### **Для цитирования**

Гасанов Ш.Г. Моделирование трещинообразования в волокнистом композите при изгибе // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 3. С. 248–257. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-248-257.

#### **For citation**

Hasanov SH.H. (2018). Modeling of cracks nucleation in fiber composite under bending. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14(3), 248–257. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-248-257.

Для ЗАМЕТОК

---

---