

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2018 Том 14 № 2

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>

Обзорно-аналитический и научно-технический журнал
Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-19706 от 13 апреля 2005 г.
выдано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства
в сфере массовых коммуникаций и охране наследия

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

- Чиганова Н.М.* Нахождение экстремальных значений оперативной характеристики контроля качества строительных изделий 84
- Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.Н., Манченко М.М.* Принцип наложения как основополагающая ошибка теории ползучести и стандартов по железобетону 92
- Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами 105

РАСЧЕТ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

- Rekach F.V., Gbaguidi Aisse G.L.* Analysis of pressure stabilizer elliptic chambers on the deformed state by numerical method 112

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

- Агапов В.П., Николаев В.Б., Голованов Р.О.* Расчет железобетонных плит, усиленных композитными тканями, методом конечных элементов 120

РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

- Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С.* Динамическая устойчивость физически нелинейных пластинчатых систем при сжатии в двух направлениях 132

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

- Пономарев Н.К., Щесняк Л.Е.* Сопряжение вихревого водосброса с нижним бьефом путем отброса струи 142

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК

- Galishnikova V.V., Pahl P.J.* Constrained Construction of Planar Delaunay Triangulations without Flipping 154

ПАМЯТИ ТОВАРИЩА

- Виталий Михайлович Бондаренко (22.06.1925 – 22.02.2018) 175

ABOUT THE JOURNAL

ISSN 1815-5235 (print), 2587-8700 (online).

Published 6 times a year.

Website: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access).

Languages: Russian, English, French.

Indexed by RSCI (elibrary.ru), Cyberleninka, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory.

The Journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

Review-and-analytic and scientific-and-technical peer-reviewed journal "*Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illumines the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the Journal.

The Journal website operates on the Portal of RUDN University scientific journals: <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>. The website contains full information about the Journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the Journal since 2008 (Open Access).

EDITOR-IN-CHIEF

GALISHNIKOVA V.V., DSc, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITOR-IN-CHIEF

IVANOV V.N., DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

MAMIEVA I.A., RUDN University, Moscow, Russia

EDITORIAL STAFF:

VANIN V.V., DSc, Professor, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kiev, Ukraine

LISICHKIN S.E., DSc, Scientific Research Institute of Energy Structures, Moscow, Russia

ZVERYAEV E.M., DSc, Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia

OBOZOV V.I., DSc, Professor, Central Research Institute of Building Structures (TzNIISK im. V.V. Kucherenko, Moscow, Russia)

BUI XUAN NAM, PhD, Assoc. Professor, Hanoi University of Mining and Geology, Hanoi, Vietnam

SANJAROVSKY R.S., DSc, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

AGAPOV V.P., DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

EDITORIAL BOARD:

ANDREEV V.I., Chairman, Member of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

BAZHENOV V.A., Member of the National Academy of Educational Science of Ukraine, DSc, Professor, Kiev National University of Building and Architecture, Kiev, Ukraine

GOLIK V.I., Member of the Russian Academy of Sciences, DSc, Professor, North-Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University), Vladikavkaz, Russia

SACHSENHOFER REINHARD F., PhD, Professor, Montanuniversität Leoben, Austria

IVANOV S.P., DSc, Professor, Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russia

KARPENKO N.I., Member of the RAACS, DSc, Professor, NISF RAACS, Moscow, Russia

KOLCHUNOV V.I., Member of the RAACS, DSc, Professor, South-West State Univ., Kursk, Russia

MANDRONE GIUSEPPE, PhD, Ass. Prof. Engineering Geology, University of Torino, Italy

KRASIC SONJA, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

MAGOULÈS FREDÉRIC, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, France

LYAKHOVICH L.S., Member of the RAACS, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk, Russia

TRAVUSH V.I., Member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

YAKUPOV N.M., Corresponding Member of Russian Engineering Academy, DSc, Professor, Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Russia

Copy Editor Yu.A. Zaikina

Graphic Designer Yu.N. Efremova

Layout Designer Yu.A. Zaikina

Address of the Editorial Board:

RUDN University, Engineering Academy, Department of Architecture and Building

3 Ordzhonikidze St., Moscow, 115419, Russian Federation

Tel.: +7 (495) 955-08-58; fax: +7 (495) 955-08-58

E-mail: stmj@rudn.university; i_mamieva@mail.ru

Peoples Friendship University of Russia (RUDN University)

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

Publishing house of RUDN University:

3 Ordzhonikidze St., Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 2018

© Vasilyaka V.V., Photo on the cover of the Journal (the Stadium "Fisht", Sochi), 2018

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2018 VOLUME 14 No. 2

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics>

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTENTS

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

- Chiganova N.M.* Finding the extreme values of operating characteristics for quality control of construction products 84
- Sanzharovsky R.S., Ter-Emmanulyan T.N., Manchenko M.M.* Superposition principle as the fundamental error of the creep theory and standards of the reinforced concrete 92
- Kirsanov M.N.* Analytical calculation of the deflection of a beam truss with double bracing 105

ANALYSIS AND DESIGN OF MACHINE-BUILDING STRUCTURES

- Rekach F.V., Gbaguidi Aisse G.L.* Analysis of pressure stabilizer elliptic chambers on the deformed state by numerical method 112

NUMERICAL METHODS OF STRUCTURES' ANALYSIS

- Agapov V.P., Nikolaev V.B., Golovanov R.O.* The analysis of reinforced concrete slabs strengthened by composite fabrics by the finite element method 120

BUCKLING ANALYSIS

- Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S.* The dynamic stability of physically nonlinear plate systems under biaxial compression 132

MECHANICS OF LIQUIDS

- Ponomarev N.K., Schesnyak L.E.* The pairing of a swirling spillway to the lower pool through the thrown jets 142

GEOMETRICAL INVESTIGATIONS OF MIDDLE SURFACES OF SHELLS

- Galishnikova V.V., Pahl P.J.* Constrained Construction of Planar Delaunay Triangulations without Flipping 154

IN MEMORY OF THE FRIEND

- Vitalii Mikhailovich Bondarenko (22.06.1925 – 22.02.2018) 175

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 05.23.05, 01.01.05

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-84-91

**НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ОПЕРАТИВНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ
КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА СТРОИТЕЛЬНЫХ ИЗДЕЛИЙ**

Н.М. ЧИГАНОВА

Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет
Ярославское шоссе, 26, Москва, Россия, 129337*(поступила в редакцию: 04 декабря 2017 г.; принята к публикации: 05 марта 2018 г.)*

Задача планирования контроля по количественному признаку по сути дела есть обратная задача интервального оценивания. Поэтому при определении планов контроля (n – объем выборки, k – критерий приемлемости) используются результаты по интервальному оцениванию. Алгоритм интервального оценивания, предложенный Л.Н. Большевым и Э.А. Логиновым, предполагает нахождение верхней и нижней границ оперативной характеристики контроля качества, которая в свою очередь представляет собой вероятность приемки партии с уровнем качества, не превосходящим риска потребителя. При этом вероятность бракования партии не больше риска изготовителя. В настоящей статье сделана попытка найти в явном виде экстремальные значения оперативной характеристики. В результате получены формулы оперативной характеристики в явном виде, которые позволяют значительно упростить нахождение планов контроля при двухстороннем допуске на контролируемый параметр, характеризующий конкретное изделие. В качестве контролируемого параметра в строительной индустрии подразумевается любой признак, по которому характеризуется надежность строительного изделия.

Ключевые слова: контроль качества, строительные изделия, оперативная характеристика, параметры распределения

При решении задач контроля качества строительных изделий по количественному признаку [1; 8] возникает проблема нахождения экстремальных значений функции $Z_{n,k}(m, \delta)$, представляющей собой оперативную характеристику контроля [7; 9].

Известно [2], что она имеет вид

$$Z_{n,k}(m, \delta) = B \int_0^{-\frac{1}{2k}(u_1+u_2)} \eta^{n-2} e^{-\frac{n}{2}\eta^2} \{ \Phi[-(u_2 + \eta k)\sqrt{n}] - \Phi[(u_1 + \eta k)\sqrt{n}] \} d\eta \equiv l(\theta_1, \theta_2), \quad (1)$$

где $B = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$; $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $\theta_i = \Phi(u_i)$; $i = 1, 2$;

$u_1 = \frac{X_n - m}{\delta}$; $u_2 = \frac{m - X_b}{\delta}$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$; η – случайная величина, распределенная по закону; X_u – квадрат с $(n - 1)$ степенью свободы; m – математическое ожидание; δ^2 – дисперсия; (n, k) – план контроля [2].

Как важное обстоятельство отметим [10], что характеристика $Z_{n,k}(m, \delta)$ зависит от параметров m и δ через функции u_1 и u_2 , которые входят в формулу (1) не в виде комбинации $\Phi(u_1) + \Phi(u_2) = q$.

Поэтому в случае двухстороннего ограничения на контролируемый параметр оперативная характеристика $Z_{n,k}(m, \delta)$ не однозначно определяется долей q негодных изделий в партии, а зависит еще от параметров распределения m и δ^2 . В качестве контролируемого параметра в строительной индустрии подразумевается любой признак, по которому характеризуется надежность строительного изделия.

Если бы в технических условиях на параметр X было наложено одностороннее ограничение, например $X > X_H$, то $Z_{n,k}(q)$ однозначно определялось бы заданием q . В самом деле, полагая в формуле (1) $X_b = \infty$, получим

$$u_2 = -\infty, \theta_2 = \Phi(-\infty) = 0, q = \theta_1 = \Phi(u_1), u_1 = u_q \text{ и}$$

$$Z_{n,k}(m, \delta) = B \int_0^\infty \eta^{n-2} e^{-\frac{n}{2}\eta^2} \Phi[-(u_q + \eta k)\sqrt{n}] d\eta = Z_{n,k}(q).$$

Так как при двухстороннем ограничении на параметр вероятность приемки партии с уровнем качества q зависит от параметров распределения m и δ , то при определении плана контроля (n, k) необходимо вместо $Z_{n,k}(q)$ использовать нижнюю и верхнюю границы

$$\underline{Z}_{n,k}(q) = \min_{(m,\delta) \in Q} Z_{n,k}(m, \delta),$$

$$\bar{Z}_{n,k}(q) = \max_{(m,\delta) \in Q} Z_{n,k}(m, \delta).$$

Здесь

$$Q = \left\{ m, \delta \geq 0: \Phi\left(\frac{X_H - m}{\delta}\right) + \Phi\left(\frac{m - X_b}{\delta}\right) = q \right\}.$$

В настоящей статье сделана попытка найти в явном виде экстремальные значения функции $l(\theta_1, \theta_2)$.

Итак, перейдем к исследованию функции $l(\theta_1, \theta_2)$ на экстремум.

Заметим, что

$$\underline{Z}_{n,k}(q) = \min_{(\theta_1+\theta_2)=\theta} l(\theta_1, \theta_2), \bar{Z}_{n,k}(q) = \max_{(\theta_1+\theta_2)=\theta} l(\theta_1, \theta_2),$$

$$\theta = \{(\theta_1, \theta_2): 0 \leq \theta_i \leq 1, i = 1, 2, \theta_1 + \theta_2 = q\}.$$

Нахождение экстремумов функции $l(\theta_1, \theta_2)$ проведем по общепринятой классической схеме. Заменим переменную θ_2 через θ_1 .

Тогда получим

$$\underline{Z} = \min_{0 \leq \theta_1 \leq q} l(\theta_1, q - \theta_1), \bar{Z} = \max_{0 \leq \theta_1 \leq q} l(\theta_1, q - \theta_1).$$

Используя очевидные соотношения

$$\frac{du_1}{d\theta_1} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{u_1^2}{2}}, \frac{du_2}{d\theta_1} = -\sqrt{2\pi} e^{\frac{u_2^2}{2}},$$

после ряда преобразований находим

$$\text{sign} \frac{dl(\theta_1, q - \theta_1)}{d\theta_1} = \text{sign} \psi_n(u_1, u_2),$$

$$\psi_n(u_1, u_2) = \int_0^{-\frac{1}{2}(u_1+u_2)} x^{n-2} e^{-\frac{n}{2}x^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n-1}\right) \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{(n-1)}{2}\left(u_2 + \frac{nx}{n-1}\right)^2} - e^{-\frac{(n-1)}{2}\left(u_1 + \frac{nx}{n-1}\right)^2} \right] dx. \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что

$$-\psi_n(u_1, u_2) = \psi_n(u_1, u_2) \text{ и } \psi_n(u_1, u_2) = 0 \quad (3)$$

при $u_1 = u_2$.

В силу формулы (3) достаточно исследовать знак функции $\psi_n(u_1, u_2)$ при $u_1 < u_2$ для определения $\text{sign}\psi_n(u_1, u_2)$ на всем диапазоне изменения u_1 и u_2 .

Рассмотрим отдельный случай $n = 2$. Тогда формула (2) может быть записана так:

$$\psi_2(u_1, u_2) = \int_0^A G_2(x) H_2(x, u_1, u_2) dx, \quad (4)$$

где $G_2(x) = e^{(1-k^{-2})x^2}$; $H_2(x, u_1, u_2) = h_2(x, u_2) - h_2(x, u_1)$;

$$h_2(x, u_i) = e^{-\frac{1}{2}(2x+u_i)^2}; \quad i = 1, 2; \quad A = -\frac{1}{2}(u_1 + u_2).$$

Оценить знак функции ψ_2 позволяет следующая лемма.

Лемма I. Пусть функции f и g заданы на интервале $[a, b]$, $f \geq 0$ и

$$\int_a^c f dx = \int_c^b f dx, \quad c \in]a, b[, \quad (5)$$

тогда

$$\int_a^c g f dx > \int_c^b g f dx, \quad (6)$$

если g – строго убывающая функция.

Доказательство непосредственно следует из теоремы о среднем. Действительно,

$$\int_a^c g f dx = g(x_1) \int_a^c f dx, \quad x_1 \in]a, c[,$$

$$\int_c^b f dx = g(x_2) \int_c^b f dx, \quad x_2 \in]a, b[.$$

Поскольку $g(x_1) > g(x_2)$, то из условия (5) следует неравенство (6).

Следствие I. Если в условиях леммы I функция g строго возрастающая, то вместо неравенства (6) будет справедливо противоположное неравенство:

$$\int_a^c g f dx < \int_c^b g f dx.$$

В справедливости этого замечания можно убедиться, умножив неравенство (6) на (-1) и заменив функцию g на $-g$.

Применим *лемму I* для оценки функции ψ_2 . Заметим вначале, что при $u_1 < u_2$

$$H_2(x, u_1, u_2) = \begin{cases} > 0, & x < \frac{A}{2}, \\ = 0, & x = \frac{A}{2}, \\ < 0, & x > \frac{A}{2}, \end{cases}$$

и

$$\int_0^{\frac{A}{2}} h_2(x, u_2) dx = \int_{\frac{A}{2}}^A h_2(x, u_1) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\Phi\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right) - \Phi(u_2) \right],$$

$$\int_{\frac{A}{2}}^A h_2(x, u_1) dx = \int_0^{\frac{A}{2}} h_2(x, u_2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\Phi\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) - \Phi(u_1) \right].$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\int_A^{\frac{A}{2}} H_2 dx = - \int_{\frac{A}{2}}^A H_2 dx.$$

Положим в Лемме I $a = 0, c = \frac{A}{2}, b = A, g = G_2$ и

$$f(x) = \begin{cases} H_2(x), & x \leq \frac{A}{2}, \\ -H_2(x), & x > \frac{A}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, введенные функции удовлетворяют условиям Леммы I. Следовательно,

$$\psi_2 = \int_0^{\frac{A}{2}} G_2 H_2 dx + \int_{\frac{A}{2}}^A G_2 H_2 dx > 0,$$

если G_2 – строго убывающая функция, а это возможно, лишь когда $k < 1$.

Если G_2 – строго возрастающая функция ($k > 1$), то в силу следствия I $\psi_2(u_1, u_2) < 0$.

При $k = 1$ функция $G_2 = 1$, а значит $\psi_2 = 0$. Таким образом, при $n = 2$ и $u_1 < u_2$

$$\frac{dl(\theta_1, q - \theta_1)}{d\theta_1} \begin{cases} > 0, & k < 1, \\ = 0, & k = 1, \\ < 0, & k > 1. \end{cases}$$

Тем самым установлено, что оперативная характеристика контроля при $k < 1$ имеет минимум и максимум соответственно в точках $(\theta_1 = 0, \theta_2 = q)$ и $(\theta_1 = \theta_2 = \frac{q}{2})$. При $(k > 1)$ отмеченные точки минимума и максимума меняются местами. Запишем выражение оперативной характеристики в этих экстремальных точках. Полагая в формуле (1) $n = 2, (\theta_1 = 0, \theta_2 = q)$, т.е. $u_1 = -\infty, u_2 = u_q$, получаем

$$Z_{n,k}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} \Phi[-(u_q + k\eta)\sqrt{2}] d\eta.$$

При $n = 2, \theta_1 = \theta_2 = \frac{q}{2}$, т.е. $u_1 = u_2 = -\frac{1}{2}u_q$ формула (1) принимает вид

$$Z_{n,k}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{q}{2}} e^{-\eta^2} \left\{ 1 - 2\Phi \left[\frac{u_q}{2} + k\eta \right] \sqrt{2} \right\} d\eta.$$

Итак,

$$\underline{Z}_{2,k}(q) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} \Phi[-(u_q + k\eta)\sqrt{2}] d\eta, & k \leq 1, \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{q}{2}} e^{-\eta^2} \left\{ 1 - 2\Phi \left[\left(\frac{u_q}{2} + k\eta \right) \sqrt{2} \right] \right\} d\eta, & k \geq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Верхняя граница $\bar{Z}_{2,k}(q)$ записывается формулой (7), только условия $k \leq 1$ и $k \geq 1$ необходимо поменять местами.

Поскольку при $k = 1$ функция $\psi_2 = 0$, то имеют место следующие тождества:

$$\begin{aligned} & \int_0^{-\frac{1}{2}(u_1+u_2)} e^{-\xi^2} \{ \Phi[-(u_2 + \xi)\sqrt{2}] - \Phi[(u_1 + \xi)\sqrt{2}] \} d\xi = \\ & = \int_0^\infty e^{-\xi^2} \Phi[-(u_q + \xi)\sqrt{2}] d\xi = \\ & = \int_0^{\frac{q}{2}} e^{-\xi^2} \left\{ 1 - 2\Phi\left[\left(\frac{u_q}{2} + \xi\right)\sqrt{2}\right] \right\} d\xi, \end{aligned}$$

где

$$q = \Phi(u_1) + \Phi(u_2).$$

Рассмотрим теперь случай $n > 2$. Докажем следующее утверждение.

Теорема I. При $u_1 < u_2$ $\psi_n(u_1, u_2) > 0$ для всех $k < k^*$, где

$$k^* = \left\{ \frac{n}{(n-2) \left[\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \right]} + \frac{1}{n-1} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\psi_2(u_1, u_2) = \int_0^A G_n(x) H_n(x, u_1, u_2) dx,$$

где $G_n(x) = x^{n-2} e^{-\gamma x^2}$; $H_n(x, u_1, u_2) = h_n(x, u_2) - h_n(x, u_1)$;

$h_n(x, u_i) = \exp\left[-\frac{1}{2}(n-1)\left(u_i + \frac{nx}{n-1}\right)^2\right]$; $i = 1, 2$; $\gamma = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n-1}\right)$.

Нетрудно проверить, что при $u_1 < u_2$

$$H_n(x) \begin{cases} > 0, & 0 \leq x < \frac{n-1}{n}A, \\ = 0, & x = \frac{n-1}{n}A, \\ < 0, & x > \frac{n-1}{n}A; \end{cases} \quad (8)$$

а

$$\int_{\frac{n-2}{n}A}^{\frac{n-1}{n}A} h_n(x, u_2) dx = \int_{\frac{n-1}{n}A}^A h_n(x, u_1) dx,$$

$$\int_{\frac{n-2}{n}A}^{\frac{n-1}{n}A} h_n(x, u_1) dx = \int_{\frac{n-1}{n}A}^A h_n(x, u_2) dx.$$

Из последующих двух уравнений получаем, что

$$\int_{\frac{n-2}{n}A}^{\frac{n-1}{n}A} H_n dx = - \int_{\frac{n-1}{n}A}^A H_n dx.$$

Исследуем теперь функцию G_n . Заметим вначале, что

$$\gamma > 0 \quad \forall k \in [0, k^*].$$

Функция G_n строго возрастает на интервале $]0, X^*[$ и убывает на интервале $]X^*, \infty[$. $X^* = \left[\frac{(n-2)}{2\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $X^* < \frac{(n-2)}{n}A \quad \forall k \in [0, k^*]$. Следовательно, на интервале $\left[\frac{n-1}{n}A, A\right]$ функция G_n строго возрастает.

В силу формулы (8) имеем

$$\psi_n(u_1, u_2) > \int_{\frac{n-2}{n}A}^A G_n H_n dx. \quad (9)$$

Оценим знак интервала в неравенстве (9) с помощью леммы I. Положим

$$a = \frac{n-2}{n}A, \quad c = \frac{n-1}{n}A, \quad b = A, \quad g = G_n$$

и

$$f(x) = \begin{cases} H_n(x), & x \leq \frac{n-1}{n}A, \\ -H_n(x), & x > \frac{n-1}{n}A. \end{cases}$$

Введение функций f и g удовлетворяет условию следствия I.

Поэтому $\psi_n > 0$. Доказательство окончено.

Из теоремы I получаем следующий результат.

Следствие II. При $n > 2$

$$\underline{Z}_{n,k}(q) = B \int_0^\infty \xi^{n-2} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \Phi[-(u_q + k\xi)\sqrt{n}] d\xi, \quad (10)$$

$$\bar{Z}_{n,k}(q) = B^{-\frac{1}{k}u} \int_0^{\frac{q}{2}} \xi^{n-2} e^{-\frac{n\xi^2}{2}} \left\{ 1 - 2\Phi\left[\left(\frac{u_q}{2} + k\xi\right)\sqrt{n}\right] \right\} d\xi,$$

для всех $k \in [0, k_q^*]$, где

$$k_q^* = \left(\frac{n}{(n-2)} \frac{u_q^2}{2} + \frac{1}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы I и того факта, что функция $(u_1 + u_2)^2$ достигает минимального значения на множестве

$$\{u_1, u_2: \Phi(u_1) + \Phi(u_2) = q\}$$

в точке $u_1 = u_2 = \frac{u_q}{2}$.

Заключение. Таким образом, формулы (10) позволяют значительно упростить вычисления планов контроля (n, k) при двухстороннем допуске контролируемого параметра, характерного для конкретного строительного изделия.

© Чиганова Н.М., 2018

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
2. Карташов Г.Д., Чиганова Н.М. К обоснованию планов контроля по количественному признаку при двухстороннем допуске // Статистические методы. Пермь: Издательство Пермского государственного технического университета, 1980. С. 66–81.
3. Чиганова Н.М. Логарифмическая выпуклость по параметру некоторых распределений // Естественные и технические науки. 2015. № 6. С. 14 – 17.
4. Medvedev V., Pustovgar A. Influence of Chemical Additives on Radiation Stability of Concrete – Theoretical Basis and Evaluation Method, Applied Mechanics and Materials, 2015. Vol. 725–726. P. 377–382.
5. Chiganova Nadezhda. Reliability theory application for building structures reliability determination // MATEC Web of Conferences. 2016. Vol. 86. URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/20168602009> (дата обращения: 12.09.2017).

6. Кирьянова Л.В., Усманов А.Р. Оценка спектральной плотности аэродинамического коэффициента лобового сопротивления // Вестник МГСУ. 2012. № 10. С. 88–94.

7. Большев Л.Н., Логинов Э.А. Интервальные оценки при наличии мешающих параметров // Теория вероятности и ее применение. 1966. Т. 11. № 1. С. 94–107.

8. Гнеденко Б.Г., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. Изд. 2-е. М.: Наука, 2012. 582 с.

9. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников. М.: Физматгиз, 2006. 816 с.

10. Тарасов Д.В., Тарасов Р.В., Макарова Л.В., Ермишина Я.А. Совершенствование контроля качества продукции строительного назначения // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1–1. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=17591> (дата обращения: 12.09.2017).

Об авторе:

Чиганова Надежда Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. *Область научных интересов:* оценка качества и надежности изделий, планирование испытаний, интервальная оценка показателей надежности строительных изделий. *Контактная информация:* e-mail – chiganovanm.mgsu@gmail.com

Для цитирования:

Чиганова Н.М. Нахождение экстремальных значений оперативной характеристики контроля качества строительных изделий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 84–91. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-84-91.

FINDING OF EXTREME VALUES OF OPERATING CHARACTERISTICS FOR QUALITY CONTROL OF CONSTRUCTION PRODUCTS

N.M. CHIGANOVA

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

(received: December 04, 2017; accepted: March 05, 2018)

The matter of control planning by variables is essentially the inverse problem of interval estimation. Therefore, when determining control plans (“n” is the sample size, “k” is the eligibility criterion), the results of interval estimation are used. The algorithm of interval estimation, proposed by L.N. Bolshev and E.A. Loginov, presupposes finding the upper and lower bounds of the operational characteristic of quality control, which in turn represents the probability of acceptance of the batch with a quality level not exceeding the consumer risk. In this case, the probability of batch rejection is not more than the manufacturer risk. In this article, an attempt is made to find the extreme values of the operating characteristic in an explicit form. As a result, operative characteristics formulas were obtained in an explicit form, which made it possible to significantly simplify the determination of control plans with bilateral tolerance for the controlled parameter that characterizes a specific product. In construction industry, any sign on which the reliability of the construction product is characterized is implied as a controlled parameter.

Keywords: quality control, construction products, operating characteristics, distribution parameters

References

1. Kramer G. (1975). *Matematicheskie metody statistiki* [Mathematical methods of statistics]. Moscow: Mir Publ. 648. (In Russ.)

2. Kartashov G.D., Chiganova N.M. (1980). K obosnovaniyu planov kontrolya po kolichestvennomu priznaku pri dvuhstoronnem dopuske [A justification of sampling plans by variables in bilateral tolerance, Statistical Methods collection] // *Statisticheskie metody*, Perm': Izdatel'stvo Permskogo gosudarstvennogo universiteta, 66–81. (In Russ.)
3. Chiganova N.M. (2015). Logarifmicheskaya vypuklost' po parametru nekotorykh raspredeleniya [Logarithmic convexity in the parameter of certain distributions, Natural and technical sciences]. *Estestvennye i tehniczeskie nauki*, Vol. 6, 14–17. (In Russ.)
4. Medvedev V., Pustovgar A. (2015). Influence of Chemical Additives on Radiation Stability of Concrete – Theoretical Basis and Evaluation Method, *Applied Mechanics and Materials*, Vol 725–726, 377–382.
5. Chiganova N. (2016). Reliability theory application for building structures reliability determination, *MATEC Web of Conferences*, Vol 86. URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/20168602009> (Accessed 12.09.2017).
6. Kir'yanova L.V., Usmanov A.R. (2012). Assessment of spectral density of the aerodynamic factor of front resistance. *Vestnik MGSU*, No 10, 88–94. (In Russ.)
7. Bolshev L.N., Loginov E.A. (1966). Interval estimates in the presence of interfering parameters. *Theory of Probability and its applications*, 11 (1), 94–107. (In Russ.)
8. Gnedenko B.G., Belyaev Yu.K., Slov'ev A.D. (2010). Mathematical methods in the reliability theory. Moscow: Nauka Publ., Vol. 2, 582. (In Russ.)
9. Kobzar A.I. (2006). Applied mathematical statistics (For engineers and scientists). Moscow: Fizmatgiz, Vol. 1, 816. (In Russ.)
10. Tarasov D.V., Tarasov R.V., Makarova L.V., Ermishina Ya.A. (2015). Improvement of quality control of construction products. *Modern problems of science and education*, No 1–1. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=17591> (Accessed 12.09.2017). (In Russ.)

About the author:

Nadezhda M. Chiganova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU). *Research interests:* quality assessment and the reliability of products, test planning, interval estimation of parameters of reliability of building products. *Contact information:* e-mail – chiganovanm.mgsu@gmail.com

For citation:

Chiganova, N.M. (2018). Finding the extreme values of operating characteristics for quality control of construction products. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14 (2), 84–91. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-84-91.

УДК 624.012

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104

**ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ КАК ОСНОВОПОЛАГАЮЩАЯ ОШИБКА
ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАНДАРТОВ ПО ЖЕЛЕЗОБЕТОНУ**

Р.С. САНЖАРОВСКИЙ*, Т.Н. ТЕР-ЭММАНУИЛЬЯН**, М.М. МАНЧЕНКО***

* Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
ул. Сатпаева, 2, Астана, Республика Казахстан, 010000** Казахстанско-Британский технический университет
ул. Толе Би, 59, Алма-Ата, Республика Казахстан, 050000*** Крыловский государственный научный центр
Московское шоссе, 44, Санкт-Петербург, Российская Федерация, 196158

(поступила в редакцию: 23 декабря 2017 г.; принята к публикации: 04 марта 2018 г.)

Выявлены и исследуются ошибки основ современной теории ползучести железобетона, вызванные использованием принципа наложения, являющегося расширительным толкованием принципа (схемы) линейной суперпозиции Больцмана. Расширительное толкование возникает вследствие следующих обстоятельств: учета явления старения бетона; изменения кратковременных свойств бетона с возрастом t к моменту его загрузки; нелинейности деформации ползучести, начиная с самых низких уровней загрузки; использования «цепных моделей» в виде последовательного соединения нескольких тел, к примеру – теория Маслова, теория старения, вязкий элемент; присовокупления кратковременных свойств бетона к свойствам его ползучести; расширительного толкования функции податливости при разностных ядрах. В международных нормах ползучести железобетона учитывается только линейная ползучесть бетона и мгновенные линейные свойства; их авторы называют свои разработки «новым передовым форматом, разработанным в последние десятилетия международными институтами стандартизации». Однако эти оценки формата ошибочны. По данным Еврокода, кратковременная диаграмма бетона σ - ϵ имеет ниспадающий участок и ограниченную протяженность, а ползучесть бетона нелинейна. Основоположники теории – А.А. Гвоздев, Н.Х. Арутюнян, С.В. Александровский, П.И. Васильев – неоднократно указывают: «деформации ползучести бетона нелинейно зависят от напряжений, начиная с самых низких их уровней». Дополняются результаты анализа потери мгновенной нелинейности и принципа наложения при ползучести бетона, опубликованные авторами в журнале «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений» № 6 2017 г. и № 3 2016 г. Статья написана в соответствии с рекомендациями круглого стола, состоявшегося в РУДН 09.06.2016 г. под руководством д.т.н., проф. С.Н. Кривошапко.

Ключевые слова: упругопластические деформации бетона, теория ползучести бетона, длительное сопротивление железобетона, современные строительные нормы

Принцип наложения является основой как современной научной теории ползучести бетона, получившей у зарубежных ученых название «мирового гармонизированного формата», так и разработок «в последние десятилетия международных институтов стандартизации... для рекомендаций, норм и технических руководящих документов» [1–3]. Здесь же указывается, что Мак-Генри в США (1943 г.) «обосновал эту тенденцию экспериментальными исследованиями ползучести герметичных образцов по *принципу наложения*, свойственному теории Вольтерра».

Основной закон ползучести бетона приведем в оригинальных обозначениях [1].

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, t')d\sigma(t'), \quad (1a)$$

где $\varepsilon_{\sigma}(t)$ – полная деформация от напряжения $\sigma(t)$; $J(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\varphi(t, t')}{E_c(t')}$ – функция податливости; $E_c(t')$ – нестационарный модуль упругости; $\varphi(t, t')$ – нестационарная характеристика ползучести, учитывающая старение.

В научных публикациях обычно интегрируют в (1a) по частям, получая

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \frac{\sigma(t)}{E_c(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{1}{E_c(t')} + \frac{\varphi(t, t')}{E_c(t')} \right] dt'. \quad (1б)$$

Заметим, что слагаемое $\frac{\varphi(t, t')}{E_c(t')}$ является мерой ползучести бетона $C(t, t')$,

используемой в публикациях в нашей стране, что предпочтительнее применения характеристики ползучести при обработке экспериментов.

Подчеркнем, что в $\varphi(t, t')$ и $C(t, t')$ учитывается старение бетона, а модуль упруго-мгновенной деформации $E_c(t')$ существенно зависит от возраста бетона.

Уравнения (1a), (1б) обосновываются двумя основополагающими допущениями: принципом линейной связи между напряжениями и деформациями

$$\varepsilon_{\sigma}(t, t') = \sigma(t')J(t, t'); \quad (1в)$$

принципом наложения, словесно сформулированном в различных вариантах изложения в многочисленных общеизвестных публикациях по теории ползучести бетона, справочниках, например в [9].

Серьезные ошибки в (1a) делают нормативную теорию несоответствующей Еврокоду, ненадежной и неэкономичной. При годовом объеме 4 млрд. м³ применения в мире бетона и железобетона, потери от таких норм и расчетов составляют значительную величину. Напомним также о трагедии обрушения Трансвааль-парка (Москва, 2004 г.), обусловленной проблемами ползучести бетона.

Отметим, что статья не имеет отношения к «продолжающимся спорам, ...расхождениям и неопределенностям», существующим в данном разделе ползучести железобетона. Также здесь не идет речь об иной точке зрения. Авторы, пользуясь системой Еврокода, выявляют и анализируют ошибки в той области ползучести, где, как свидетельствуют руководители и разработчики норм, есть «установившийся консенсус» [1–3].

Главная математическая ошибка (1a) заключается в ее основе – принципе наложения, появившемся в теории железобетона после работы Мак-Генри. Этот принцип неверно строит ядро ползучести, неправильно описывает процессы изменения мгновенных деформаций и деформации ползучести. Ошибочность принципа наложения можно установить различными способами: построением и решением дифференциального уравнения, соответствующего линейной связи (1в); решением обратной задачи классической механики; анализом величины полной скорости деформации, соответствующей (1в).

На основании последнего способа имеем

$$v_{\sigma}(t, t') = \dot{\sigma}(t') \cdot J(t, t') + \sigma(t') \frac{\partial J(t, t')}{\partial t} + \sigma(t') \frac{\partial J(t, t')}{\partial t'}.$$

Отсюда видно, что в основном законе (1а) потеряны четыре слагаемых, вызванных скоростью изменения коэффициента податливости

$$-\sigma(t') \frac{\dot{E}_c(t')}{E_c^2(t')} + \sigma(t') \frac{1}{E_c(t')} \frac{\partial \varphi(t, t')}{\partial t} + \sigma(t') \frac{1}{E_c(t')} \frac{\partial \varphi(t, t')}{\partial t'} - \sigma(t') \varphi(t, t') \frac{\dot{E}_c(t')}{E_c^2(t')}, \quad (2)$$

причем по значимости они сопоставимы с оставшимся слагаемым. Эти потери вызывают значительные расхождения между теорией и экспериментами, описанные в научной литературе, например [7].

В принципе наложения совершаются с ошибками (и без надобности) противоположные математические действия над известным результатом (1в) классической теории: сначала его дифференцирование, затем интегрирование. В процессе дифференцирования теряются слагаемые: одно у мгновенных деформаций и несколько у деформаций ползучести; после интегрирования потери переходят в значения деформаций, а затем в теорию расчета конструкций.

Принцип наложения коверкает классического вида линейную связь (1в), вызывая три вида ошибок [4–5; 8], искажающих теорию ползучести бетона:

1. неверно определяет значения кратковременных линейных деформаций;
2. неправильно находит выражение ядра, описывающего процесс изменения деформаций линейной ползучести;
3. ошибочно причисляет к деформациям ползучести мгновенные упругие деформации.

Рассмотрим их подробнее.

1. Скорость упругой деформации равна

$$\dot{\varepsilon}_y(t') = \dot{\sigma}(t') \frac{1}{E_c(t')} + \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{E_c(t')}.$$

Интегрируя, имеем

$$\varepsilon_y(t) - \varepsilon_y(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{1}{E_c(t')} d\sigma(t') + \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{E_c(t')} dt'.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, найдем

$$\varepsilon_y(t) - \varepsilon_y(t_0) = \frac{\sigma(t)}{E_c(t)} - \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)} - \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{E_c(t')} dt' + \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{E_c(t')} dt'.$$

Отсюда кратковременная деформация равна

$$\varepsilon_y(t) = \frac{\sigma(t)}{E_c(t)}; \quad (3)$$

также видно, что первое слагаемое под знаком интеграла (1б) является лишним, а использование в (1а) и (1б) принципа наложения

$$\varepsilon_y(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)} - \int_{t_0}^t \frac{1}{E_c(t')} d\sigma(t') = \frac{\sigma(t)}{E_c(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{E_c(t')} dt' \quad (4)$$

глубоко ошибочно.

Принцип наложения ошибочно реконструирует фактическую, реальную упругую линейную модель бетона с модулем $E_c(t)$; он приделывает к ней несую-

шествующую и нереальную модель линейной вязкой жидкости с коэффициентом вязкости $K_1(t') = \frac{E_c^2(t')}{\dot{E}_c(t')}$, образуя таким способом схему Максвелла.

Рассмотрим пример: положив в (3), (4) $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$, получим $\varepsilon_y(t) = \frac{\sigma_0}{E_c(t)}$ и $\varepsilon_y(t_0) = \frac{\sigma_0}{E_c(t_0)} = \text{const}$. Сравнение этих деформаций показано на рис. 1.

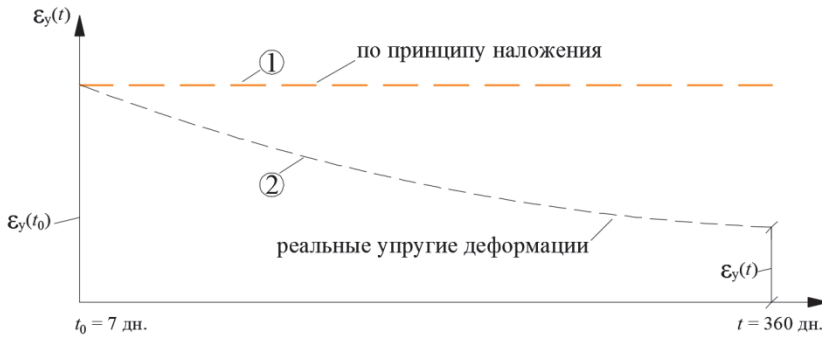


Рис. 1. Сравнение $\varepsilon_y(t_0)$ и $\varepsilon_y(t)$
[Fig. 1. Comparison $\varepsilon_y(t_0)$ and $\varepsilon_y(t)$]

Кривая 2 на рис. 1 соответствует данным ВНИИГ об изменении модуля упругости $E_c(t)$ во времени. Ошибки в значении упругой деформации при $t = 360$ дн. достигают $\approx 300\%$.

2. В области деформаций ползучести число добавочных (фиктивных) тел, возникающих ввиду неверной схемы построения ядра ползучести (наследственной функции I рода), существенно возрастает. Оно зависит от вида функции $\varphi(t, t')$, описывающей нестационарную характеристику ползучести в основном законе (1а). Запишем эту функцию в общеизвестном, широко используемом в научной литературе, виде

$$\frac{\varphi(t, t')}{E_c(t')} = \frac{\varphi_\infty(t') [1 - e^{-\gamma(t-t')}] }{E_c(t')}, \quad (5)$$

где $\varphi_\infty(t')$ – функция, учитывающая старение бетона.

В известной монографии И.Е. Прокоповича характеристика ползучести $\varphi(t, t')$ у зарубежных ученых имеет обозначение $\bar{C}(t, \tau)$ – это тождественные величины.

В случае (5) основной закон (1а) образует четыре лишних (фиктивных) тела: два тела типа Фойгта и два вязких элемента, соединенных последовательно между собой. Деформации этих тел равны

$$\varepsilon_{1\phi}(t) = \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{1}{\eta_{1\phi}(t')} e^{-\gamma(t-t')} dt', \quad \eta_{1\phi}(t') = \frac{E_c(t')}{\dot{\varphi}_\infty(t')}; \quad (6)$$

$$\varepsilon_{2\phi}(t) = \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{1}{\eta_{2\phi}(t')} dt', \quad \eta_{2\phi}(t') = \frac{E_c^2(t')}{\dot{E}_c(t') \varphi_\infty(t')}; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{3\phi}(t) = \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{1}{\eta_{3\phi}(t')} e^{-\gamma(t-t')} dt', \quad \eta_{3\phi}(t') = \frac{E_c^2(t')}{\dot{E}_c(t') \varphi_\infty(t')}; \quad (8)$$

$$\varepsilon_{4\phi}(t) = \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{1}{\eta_{4\phi}(t')} dt', \quad \eta_{4\phi}(t') = -\frac{E_c(t')}{\dot{\varphi}_\infty(t')}, \quad (9)$$

где $\eta_{1\phi}, \dots, \eta_{4\phi}$ – коэффициенты вязкости или коэффициенты внутреннего сопротивления фиктивных тел, причем тела (8) Фойгта и (9) вязкого элемента при сжатии расширяются.

Деформации ползучести (6–9), вызванные воздействием принципа наложения на классическую связь (1в), являются фикцией; они суммируются также с кратковременной фиктивной деформацией

$$\varepsilon_{5\phi}(t) = -\int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{E_c(t')} dt'; \quad (10)$$

$$\varepsilon_{\sigma\phi}(t) = \sum_{i=1}^5 \varepsilon_{i\phi}(t)$$

и вносят большие погрешности в значение полной деформации $\varepsilon_\sigma(t)$, определяемые законом ползучести (1б).

К примеру (Рекомендации, 1988 г.), при постоянных напряжениях ошибка от применения принципа наложения для деформаций ползучести доходит до 100%:

$$\frac{\varepsilon_{\sigma\phi}(t)_{\text{ошибка}}}{\varepsilon_{\sigma\phi}(t)_{\text{принцип}}} = 1 - \frac{t_0}{\int_{t_0}^t \Omega(\tau) f(t-\tau) d\tau} \frac{\int_{t_0}^t \Omega(\tau) f(t-\tau) d\tau}{\Omega(t_0) f(t-t_0)},$$

где $\Omega(\tau)$ – функция влияния старения на меру ползучести; $f(t-\tau)$ – функция, учитывающая нарастание во времени меры ползучести.

3. Факт появления в ядре ползучести интегрального уравнения (1б) единичной кратковременной деформации $\frac{1}{E_c(t')}$:

$$\frac{\partial}{\partial t'} [\varepsilon_{y,1}(t') + C(t, t')] = \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{\varepsilon_y(t')}{\sigma(t')} + C(t, t') \right]$$

привел к соблазну ошибочной подмены свойств кратковременной деформации $\varepsilon_{y,1}(t')$ свойствами деформаций наследственного типа $\varepsilon_{y,1}(t, t')$.

Ошибка подправляется совершением новых ошибок. Бетон имеет существенно нелинейные свойства при кратковременном и длительном нагружениях. Кратковременная диаграмма нагружения имеет ниспадающий участок и ограниченную протяженность (рис. 2). В основном законе (1а), (1б) учитывается только линейная деформация $\varepsilon_{л}(t) = \varepsilon_y(t)$ и игнорируется нелинейная деформация $\varepsilon_{н}(t)$ (рис. 2). С.В. Александровский указывает на причину этого обстоятельства: «Учесть одновременно зависимость модуля упругости от напряжений и от возраста бетона весьма трудно. Поэтому современная теория ползучести бетона учитывает только изменение модуля во времени...».

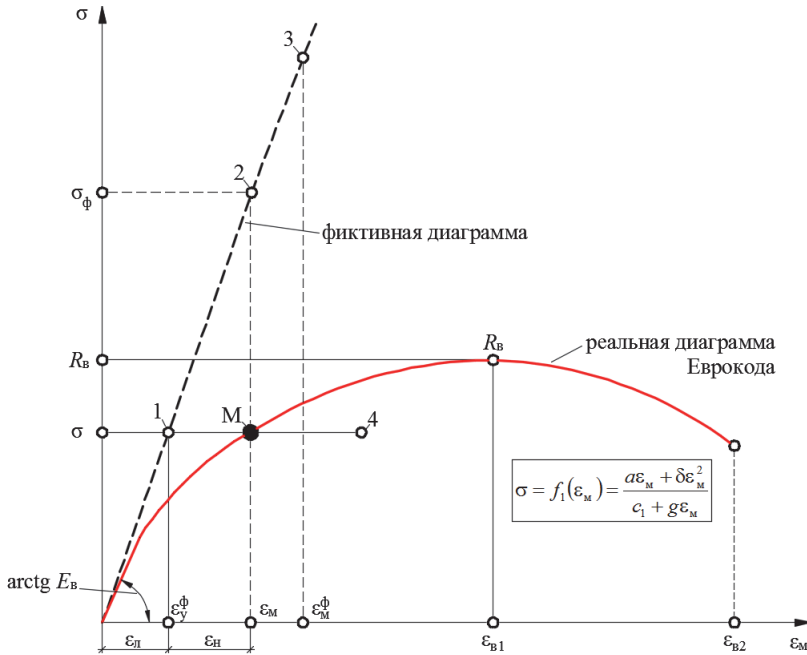


Рис. 2. Искажение диаграммы σ - ε бетона
[Fig. 2. The distortion of the σ - ε diagram of concrete]

Рассмотрим два типа такой подмены.

Первая подмена. На представительном форуме ставится ошибочная задача об «учете влияния предыстории деформирования на модуль упруго-мгновенных деформаций». Основное уравнение теории ползучести приобретает вид (в оригинальных обозначениях)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_c(t, t')} - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_c(t, \tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (11)$$

Появляется «экспериментально обоснованное» выражение для модуля упругой деформации бетона

$$E_{t, \tau} = E_t + a_{n, \tau} \Phi_t E_\tau,$$

где Φ_t – характеристика ползучести бетона.

Появляются и другие ошибочные формы основного закона ползучести

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(t, \tau) d\tau - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C^*(t, \tau) d\tau, \quad (12)$$

где $\frac{\partial}{\partial \tau} C^*(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right]$; $\chi(t, \tau)$ – имеет название «снижающая поправка... к текущим удельным упруго-мгновенным деформациям».

Вторая подмена. Нелинейная кратковременная деформация $\varepsilon_n(t)$ ошибочно наделяется свойствами деформации наследственного типа $\varepsilon_n(t, t')$, привлекается ошибочный принцип наложения, и, вместо простой алгебраической формулы $\varepsilon_n(t) = B_2(t) \sigma^2(t)$ (B_2 – известный коэффициент), измысливается интеграл

$$\varepsilon_H(t) = \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\varepsilon_H(t, t')}{\sigma(t')} dt' = \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{\partial}{\partial t'} C_H(t, t') dt', \quad (13)$$

где $C_H(t, t')$ – называется мерой быстронатекающей ползучести.

Мера быстронатекающей ползучести $C_H(t, t')$ складывается с обычной мерой ползучести

$$C(t, t') + C_H(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} [\varphi(t, t') + \varphi_H(t, t')], \quad (14)$$

учитываемой в (16). Грубые просчеты теории от такой подмены кратковременной нелинейности бетона мы рассмотрели в [4] и [8].

Известные зарубежные ученые переименовали «быстронатекающую ползучесть» в «минутную ползучесть», а ошибочную идею второй подмены преподносят как свое важное достижение.

Принцип наложения в теории ползучести бетона является математической ошибкой, совершаемой при расширительном толковании принципа линейной суперпозиции Больцмана. В международных нормах железобетона он оценивается неверно: якобы это «тенденция исследования ползучести... по принципу наложения, свойственному теории Вольтерра». Рассмотрим данную ситуацию подробнее.

Сущность и вторичность схемы Больцмана для теории ползучести бетона исследуем на примере бетона, рассматриваемого в известной работе Г.Н. Маслова под № 4. Здесь бетон имеет стационарные свойства, соответствующие классической теории. В обозначениях Г.Н. Маслова функция податливости имеет вид

$$J(t-t') = \Phi(t-\tau) = a - be^{-\beta(t-\tau)},$$

где $a = \frac{C_0 + E_0}{C_0 E_0}$; E_0 – модуль упругости; $b = \frac{1}{E_0}$; $\eta = \frac{C_0}{\beta}$, η – стационарный коэффициент линейной вязкости.

Основополагающее в теории ползучести решение соответствующего дифференциального уравнения, как известно, имеет вид

$$\varepsilon_\sigma(t) = \frac{\sigma(t)}{E_0} - \int_{t_0}^t \sigma(t') \frac{1}{E_0} \frac{\partial \varphi(t-t')}{\partial t'} dt', \quad (15a)$$

где $\varphi(t-t') = E_0 \frac{1}{C_0} [1 - e^{-\beta(t-t')}]$ – характеристика ползучести.

Случай Больцмана получается из решения (15a) путем ряда его преобразований, математически соответствующих лишь в условиях стационарных свойств

$$\varepsilon_\sigma(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_0} \varphi(t-t_0) \right] + \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_0} \varphi(t-t') \right] d\sigma(t'). \quad (15б)$$

В преобразовании (15б), в отличие от (15a), используется функция податливости, что привлекло внимание ученых. Однако, преобразование (15б) возможно только при существенных и весьма сильных отграничениях. При расширительном толковании податливости эти отграничения не учли, и теория ползучести бетона оказалась глубоко ошибочной.

Здесь, во-первых, мгновенной деформации с крайне простым физическим смыслом для произвольного t навязывается свойство процесса, создающего соблазн расширения теории и превращающегося в указанную выше грубую ошибку при нестационарных $E(t')$, сопровождающую нормативную линейную теорию ползучести бетона. В научной литературе даже имеется авторитетное утверждение, что «упруго-мгновенные деформации строго подчиняются... принципу наложения».

Во-вторых, нужно проинтегрировать (15а) по частям, что при расширительном толковании функции податливости в условиях старения бетона (1а) создает дополнительный соблазн, традиционно приводящий к еще одной грубой ошибке при нахождении ядра интегрального уравнения; как известно, при нестационарных свойствах бетона деформация ползучести получается из иного решения дифференциального уравнения, записываемого в более сложном виде

$$\varepsilon_{cc}(t) = e^{-F(t)} \left[\varepsilon_{c0} + \int_{t_0}^t \sigma(t) \frac{1}{\eta(t)} e^{F(t)} dt \right],$$

$$F(t) = \int_{t_0}^t \beta(t) dt,$$

когда параметры $\eta(t)$ и $\beta(t)$ в (15а) являются функциями времени.

В бетоне Г.Н. Маслова скорость деформации вырождается из-за разностного ядра. В случае же расширительного толкования коэффициента податливости применение принципа Больцмана обычно становится неверным. Нестационарная модель бетона Маслова с коэффициентом вязкости $\eta(t) = C_0(t)/\beta$ и модулем $E_0(t)$, зависящими от времени, демонстрирует следующее:

– удовлетворяет экспериментам с простым нагружением при низких уровнях $\sigma \approx 0,1R_{пр}$;

– удовлетворяет требования классической механики;

– не удовлетворяет условиям принципа Больцмана.

Принцип Больцмана коверкает сущность нестационарной модели Маслова. Одно классическое тело ползучести бетона он заменяет цепной моделью последовательно соединенных тел с набором ошибочных свойств.

В теории ползучести бетона присутствует случай, когда и при разностном ядре расширительное толкование функции податливости недопустимо. Например, ядро ползучести в ряде известных работ представляется в виде (второй случай)

$$K(t-t') = \frac{Ae^{-\beta(t-t')}}{(t-t')^{\alpha-1}}.$$

Этому кинематическому уравнению движения, в связи с решением обратной задачи механики, соответствуют определенные силы. Здесь из анализа дифференциального уравнения ползучести выявляется, что в этом ядре присутствует сила сопротивления с коэффициентом вязкости линейной модели, равным

$\eta(t, t') = \frac{1}{A}(t-t')^{\alpha-1}$, что невозможно, как в вышеотмеченном случае применения

наследственных свойств модуля упругости $E(t, t')$ и по тем же причинам.

Третий случай соответствует расширительному толкованию функции податливости в «цепной модели». Он присутствует в теоретической реологии, а как повторение – в нормах железобетона.

Предварительно запишем схему Больцмана для тела Максвелла в виде

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{\eta}(t - t_0) \right] + \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{\eta}(t - t') \right] d\sigma(t'), \quad (16)$$

где η – стационарный коэффициент вязкости.

При переменном коэффициенте вязкости $\eta(t) = \frac{E_0}{\dot{\varphi}(t)}$ получаем теорию старения бетона (Ф. Дишингер, Ч. С. Уитни): $\varphi(t) = \varphi_{\infty} (1 - e^{-bt})$, которая путем разложения в ряд дает функцию Фройденталя $\varphi(t) = \frac{\varphi_{\infty} t}{\frac{1}{b} + t}$, обоснованную опытами Дэвиса и Гленвилля.

В «цепной модели» путем последовательного соединения тел (15а) и (16) имеем расширительную запись функции податливости

$$J(t - t') = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_0} \varphi(t - t') + \frac{1}{\eta}(t - t'). \quad (17a)$$

Пару интегральных уравнений, соответствующих расширительной гипотезе (17а) и разрешенных либо относительно деформаций $\varepsilon_{\sigma}(t)$, либо относительно напряжений $\sigma(t)$, в теоретической реологии называют «уравнениями Больцмана – Вольтерры»; также указано, что эта пара «представляет полную математическую формулировку принципа линейной суперпозиции».

Однако такая цепная модель с расширительным толкованием коэффициента податливости является существенно ошибочной; об этом свидетельствует приведение ее к дифференциальной форме:

$$\ddot{\varepsilon}_{\sigma}(t) \frac{\eta}{\beta} + \dot{\varepsilon}_{\sigma}(t) \eta = \ddot{\sigma}(t) \frac{\eta}{E_0 \beta} + \dot{\sigma}(t) \left(\frac{\eta}{E_0} + \frac{1}{\beta} + \frac{\eta}{C_0} \right) + \sigma(t). \quad (17б)$$

Из (17б) видно, что в ней присутствует сила сопротивления $\ddot{\varepsilon}_{\sigma}(t) \frac{\eta}{\beta}$, пропорциональная ускорению, что несовместимо с классической механикой, и, в связи со ст. 5.1.1(3)Р Еврокода 0, цепная модель является несоответствующей расчетной моделью.

Составляющие силы расчетной модели могут быть функцией от положения $\varepsilon_{\sigma}(t)$, скорости $\dot{\varepsilon}_{\sigma}(t)$, времени и других величин. Если же присутствует (среди прочих) сила, пропорциональная ускорению $\ddot{\varepsilon}_{\sigma}(t)$, то оказывается нарушенным фундаментальный принцип механики о независимости действия сил. Известный ученый Л. Паре установил неприемлемость таких сил и в задачах механики, и в приложениях [6].

К сожалению, в научной литературе по бетону и международных нормах присутствует целый ряд ошибок, аналогичных описанной и состоящих в расширительном толковании функции податливости в виде цепной модели [1], в том числе для учета быстронатекающей ползучести.

Так, в случае последовательного соединения теории Г.Н. Маслова и теории старения бетона (Мак-Генри, А.В. Яшин, Т. Хансен, И.Е. Прокопович и И.И. Улицкий), уравнение ползучести имеет вид

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \beta \dot{\varepsilon}(t) = \ddot{\sigma}(t) \frac{1}{E_0} + \dot{\sigma}(t) \left(\frac{\dot{\varphi}_t}{E_0} + \frac{\beta}{E_0} + \frac{\beta}{C_0} \right) + \sigma(t) \left(\frac{\ddot{\varphi}_t}{E_0} + \frac{\dot{\varphi}_t}{E_0} \right).$$

Если к этой цепочке присоединить еще один вязкий элемент (с вязкостью $\eta(t) = \Delta e^{-\alpha_1 t}$) для учета быстронатекающей ползучести, что предполагалось разработчиками Еврокода до его утверждения, то мы получим еще один ошибочный вариант теории (записано без усреднения)

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \beta \dot{\varepsilon}(t) = \ddot{\sigma}(t) \frac{1}{E_0} + \dot{\sigma}(t) \left(\frac{\dot{\varphi}_t}{E_0} + \frac{\beta}{E_0} + \frac{1}{\eta(t)} \right) + \sigma(t) \left(\frac{\ddot{\varphi}_t}{E_0} + \frac{\beta \dot{\varphi}_t}{E_0} + \frac{\beta}{\eta(t)} - \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta^2(t)} \right).$$

При принятии Еврокода 2 из этой модели убрали теорию старения и вязкий элемент, ошибка аннулирована. В правилах Еврокода оставлен только классический бетон Г.Н. Маслова; из его характеристики ползучести получен нормативный коэффициент развития ползучести

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right]^{0,3},$$

где $\beta_H = 1/\beta$.

Он получен путем разложения $e^{-\beta(t-t_0)}$ в ряд с использованием двух членов. Показатель 0,3 степенной функции усредненно учитывает старение бетона.

В случае учета нелинейной ползучести и кратковременной нелинейности по Еврокоду применение схемы Больцмана также ошибочно. При нелинейной ползучести бетона Г.Н. Маслова (четвертый случай) в рамках общепринятых гипотез скорость деформации равна

$$v_{\sigma}(t, t', F[\mu(t'), t']) = \dot{\sigma}(t') \cdot F[\mu(t'), t'] \frac{1}{E_0} \varphi(t - t') + \sigma(t') \cdot \dot{\mu}(t') \frac{\partial F[\mu(t'), t']}{\partial \mu} \frac{1}{E_0} \varphi(t - t') + \sigma(t') \cdot \frac{\partial F[\mu(t'), t']}{\partial t'} \frac{1}{E_0} \varphi(t - t') + \sigma(t') \cdot F[\mu(t'), t'] \frac{1}{E_0} \left[\frac{\partial \varphi(t - t')}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t - t')}{\partial t'} \right],$$

что не учитывается в традиционной теории. Здесь $F[\mu(t'), t']$ – функция нелинейности, в которой в качестве параметра нелинейности обычно принимают (после работы У. Лидермана) напряжение $\mu(t') = \sigma(t')$, что является неверным: методы классической механики показывают, что такое допущение является весьма поверхностным предположением. Этой проблеме мы посвятим отдельную статью.

Например, при таком допущении ряд кратных интегралов Вольтерра – Фреше

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t J_1(t - t') d\sigma(t') + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t J_2(t - t', t - t'') d\sigma(t') d\sigma(t'') + \dots$$

является неинтегральной формой [10]

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = J_1(t)\sigma + J_2(t, t)\sigma^2 + J_3(t, t, t)\sigma^3 + \dots$$

В последнее время появились работы, разрабатывающие «модификацию принципа наложения деформаций для нелинейной ползучести» в виде

$$\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\sigma_c(\tau), \quad (18a)$$

где $\sigma_c(\tau) = S[\sigma(\tau)]$ – известная функция напряжений $\sigma[\tau]$.

Ошибочность этой записи аналогична той, которая применяется в (1а). Полная скорость деформации здесь равна

$$v_{\sigma}(t, \tau) = \dot{S}[\sigma(\tau)] \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] + S[\sigma(\tau)] \frac{d}{d\tau} \frac{1}{E(\tau)} + S[\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) + S[\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial t} C(t, \tau). \quad (18б)$$

Отсюда видно, что в (18а) потеряны три последних слагаемых из (18б). Значимость этих слагаемых тождественна той значимости, которую мы выше описали в пунктах 1–3. Нужно дополнительно обратить внимание, что неверной также является тождественность нелинейной функции $S[\sigma(\tau)]$ для кратковременных и длительных деформаций. Но, даже если применить другую функцию $S_g[\sigma(\tau)]$ для деформаций ползучести, то, как отмечено выше, такое допущение является весьма поверхностным предположением, не соответствующим реальной нелинейной теории ползучести бетона, которая будет опубликована позже. К принципу наложения эта теория не имеет никакого отношения.

© Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.Н., Манченко М.М., 2018

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Chiorino M.A. Analysis of structural effects of time – dependent behavior of concrete: an internationally harmonized format // Concrete and Reinforced concrete – Glance at Future. III All Russian (International) Conference on Concrete and Reinforced Concrete, Moscow – 2014. Vol. 7. Plenary papers. P. 338–350.
2. Fib Model Code for Concrete Structures 2010, Ernst & Sohn. 2013. 402 p.
3. ACI 209.3R-XX, Analysis of Creep and Shrinkage Effects on Concrete Structures, Final Draft, Chiorino M.A. (Chairm. of Edit. Team). ACI Committee 209. March 2011. 228 p.
4. Санжаровский Р.С., Манченко М.М. Ошибки в теории ползучести железобетона и современные нормы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 3. С. 25–32.
5. Sanjarovskiy, R., Ter-Emmanuilyan, T., and Manchenko, M. Creep of Concrete and Its Instant Nonlinear Deformation in the Calculation of Structures. CONCREEP 10: 2015. P. 238–247.
6. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.
7. Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций: состояние проблемы и перспективы развития / ГОССТРОЙ СССР; НИИЖБ. М.: Стройиздат, 1976. 351 с.
8. Санжаровский Р.С., Манченко М.М. Ошибки международных норм по железобетону и правила Еврокода // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 6. С. 25–36.
9. Верюжский Ю.В., Гольшев А.Б., Колчунов Вл.И., Ключева Н.В., Лисицин Б.М., Машков И.Л., Яковенко И.А. Справочное пособие по строительной механике: в 2 т. Т. I. М.: АСВ, 2014. С. 506–508.
10. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

Об авторах:

Санжаровский Рудольф Сергеевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева. *Область научных интересов:* разработка теории ползучести бетона с учетом мгновенной и длительной нелинейности, а также их учет в расчетах конструкций. *Контактная информация:* ул. Сатпаева, 2, Астана, Республика Казахстан, 010008.

Тер-Эммануильян Татьяна Николаевна – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Казахстанско-Британский технический университет. *Область научных интересов:* разработка новых численных методов расчета строительных конструкций с учетом ползучести материалов. *Контактная информация:* ул. Толе Би, 59, Алма-Ата, Республика Казахстан, 050000.

Манченко Максим Михайлович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Крыловский научный центр. *Область научных интересов:* ползучесть бетона с учетом мгновенной и длительной нелинейности; прочность корпусных конструкций кораблей из полимерных композиционных материалов. *Контактная информация:* Московское шоссе, 44, Санкт-Петербург, Российская Федерация, 196158.

Для цитирования:

Санжаровский Р.С., Тер-Эммануильян Т.Н., Манченко М.М. Принцип наложения как основополагающая ошибка теории ползучести и стандартов по железобетону // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 92–104. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104.

SUPERPOSITION PRINCIPLE AS THE FUNDAMENTAL ERROR OF THE CREEP THEORY AND STANDARDS OF THE REINFORCED CONCRETE

R. SANJAROVSKY*, T. TER-EMMANUILYAN**, M. MANCHENKO***

* L.N. Gumilyov Eurasian National University
2 Satpaev St., Astana, 010008, Republic of Kazakhstan

** Kazakh-British Technical University
59 Tole Bi St., Almaty, 050000, Republic of Kazakhstan

***Krylov State Research Centre
44 Moskovskoe Shosse, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

(received: December 23, 2017; accepted: March 04, 2018)

The errors in the foundations of the modern theory of creep of reinforced concrete caused by the use of the principle of superposition, which is an expansive interpretation of the principle (scheme) of the linear superposition of Boltzmann, are revealed and investigated. Extensive interpretation arises from the following circumstances: the phenomenon of aging of concrete; changes in the short-term properties of concrete with age τ at the time of its loading; nonlinearity of creep deformation, starting from the lowest loading levels; the use of “chain models” in the form of a series connection of several bodies, for example – the theory of Maslov, the theory of aging, a viscous element; addition of short-term properties of concrete to the properties of its creep; expanding interpretation of the compliance function for difference kernels. In the international norms of creep of reinforced concrete only linear creep of concrete and instantaneous linear properties are taken into account; their authors call their developments “a new advanced format developed in recent decades by international standards institutions”. However, these format estimates are erroneous. According to the Eurocode, a short-term diagram of concrete σ - ε has a descending section and a limited extent; and the floor-duchit of concrete is nonlinear. The founders of the theory are A.A. Gvozdev, N.Kh. Harutyunyan, S.V. Aleksandrovsky, P.I. Vasilyev – repeatedly indicate: “creep-concrete deformations are non-linearly dependent on stresses, starting from the lowest levels”.

The results of the analysis published by the authors in the journal of Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings No. 6 of 2017 and No. 3 of 2016 are supplemented. The article was written in accordance with the recommendations of the round table held in the RUDN University on June 9, 2016, under the direction of the D.Sc., prof. S.N. Krivosapko.

Keywords: elastoplastic deformation of concrete, theory for concrete creep, long-term resistance of reinforced concrete, modern building codes

References

1. Chiorino M.A. Analysis of structural effects of time – dependent behavior of concrete: an internationally harmonized format // Concrete and Reinforced concrete – Glance at Future. III All Russian (International) Conference on Concrete and Reinforced Concrete, Moscow – 2014. Vol. 7, plenary papers, 338–350.
2. Fib Model Code for Concrete Structures 2010, Ernst & Sohn, 2013, 402.
3. ACI 209.3R-XX, Analysis of Creep and Shrinkage Effects on Concrete Structures, Final Draft, Chiorino M.A. (Chairm. of Edit. Team), ACI Committee 209, March 2011, 228 p.
4. Sanzharovsky R., Manchenko M. Errors in the theory of creep of reinforced concrete and modern norms. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016. No 3. 25–32. (In Russ.)
5. Sanzharovskiy, R., Ter-Emmanuilyan, T., and Manchenko, M. (2015) Creep of Concrete and Its Instant Nonlinear Deformation in the Calculation of Structures. *CONCREEP 10*: 238–247.
6. Pars L.A. A treatise on Analytical Dynamics. Moscow: Nauka publ., 1971, 636. (In Russ.)
7. Polzuchest' i usadka betona i zhelezobetonnyh konstrukcij. Sostoyanie problemy i perspektivy razvitiya [Creep and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures. The state of the problem and prospects for development] / GOSSTROJ USSR; NIIZB. Moscow: Strojizdat publ., 1976, 351. (In Russ.)
8. Sanzharovskij R.S, Manchenko M.M. (2017). Errors of international standards on reinforced concrete and rules of the Eurocode. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No 6, 25–36. (In Russ.)
9. Veryuzhskij YU.V., Golyshev A.B., Kolchunov VI.I., Klyueva N.V., Lisicin B.M., Mashkov I.L., Yakovenko I.A. Spravochnoe posobie po stroitel'noj mekhanike [Reference Book for Structural Mechanics]: v 2 t. T. I. Moscow: ASV publ., 2014, 506–508. (In Russ.)
10. Rabotnov Yu.N. (1977). Elementy nasledstvennoj mekhaniki tverdyh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka publ., 1977, 383. (In Russ.)

About the authors:

Sanzharovsky Rudolf – Grand Ph.D., Prof., Principal Researcher, L.N. Gumilyov Eurasian National University. *Research Interests*: the development of the theory of creep of concrete with allowance for instantaneous and long-term nonlinearity, as well as their accounting in the calculations of structures. *Contact information*: 2 Satpaev St., Astana, 010008, Republic of Kazakhstan

Ter-Emmanuilyan Tatyana – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, Kazakh-British Technical University. *Research Interests*: development of new numerical methods for calculating of building structures, taking into account creep of materials. *Contact information*: 59 Tole Bi St., Almaty, 050000, Republic of Kazakhstan

Manchenko Maxim – Ph.D, Senior Researcher, Krylov State Research Centre. *Research Interests*: creep of concrete taking into account instantaneous and long-term nonlinearity; strength of hull structures of vessels made of composite materials. *Contact information*: 44 Moskovskoe shosse, Petersburg, 196158, Russian Federation

For citation:

Sanzharovsky, R.S., Ter-Emmanuilyan, T.N., Manchenko, M.M. (2018). Superposition principle as the fundamental error of the creep theory and standards of the reinforced concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14 (2), 92–104. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-92-104.

УДК 624.04

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА
БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ДВОЙНЫМИ РАСКОСАМИ**

М.Н. КИРСАНОВ

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Красноказарменная ул., 14, Москва, Россия, 111250*(поступила в редакцию: 11 ноября 2017 г.; принята к публикации: 05 марта 2018 г.)*

Статически определимая плоская ферма имеет прямолинейные пояса и треугольную решетку, состоящую из сдвоенных раскосов. Четыре опорные связи делают ее внешне статически неопределимой. Дается вывод формулы зависимости прогиба от ее размеров и числа панелей. Усилия в стержнях определяются в символьной форме методом вырезания узлов из решения системы линейных уравнений в системе компьютерной математики Maple. Для определения прогиба используется формула Максвелла – Мора. Стержни (кроме жестких опорных) предполагаются упругими с одинаковой жесткостью. Обобщение отдельных решений на произвольное число панелей производится методом индукции. Операторы системы Maple, опираясь на данные расчетов, дают линейные однородные рекуррентные уравнения для коэффициентов искомой формулы. Решениями этих уравнений являются общие члены полученных последовательностей. Получены и сопоставлены формулы для трех типов нагрузок (равномерная нагрузка узлов нижнего и верхнего поясов и сосредоточенная сила в середине пролета). Кривые зависимости прогиба от числа панелей имеют слабовыраженные минимумы. Выведены зависимости усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях от числа панелей. Даны асимптотические по числу панелей оценки решений при фиксированном пролете конструкции и заданной общей нагрузке.

Ключевые слова: ферма, решетка фермы, Maple, прогиб

Постановка задачи. Существующие пакеты символьной математики на основе известных алгоритмов позволяют сравнительно легко получать аналитические решения задач строительных конструкций. Однако, область применимости таких решений будет невелика, если в итоговых формулах имеются только размеры конструкции, нагрузка и параметры материала. В задачах о фермах важно учесть и число панелей, если ферма имеет регулярную структуру. Помимо универсальности такое решение приобретает еще одно свойство – возможность простого расчета конструкций с большим числом стержней без потери точности, характерной для численных методов. Обобщение решений на произвольное число панелей возможно методом индукции. Именно так были получены решения для прогиба плоских [1–7] и пространственных [8] ферм. Этим же методом рассчитывается прогиб предлагаемой конструкции балочной фермы на рис. 1.

Схема фермы. Решетка фермы состоит из сдвоенных раскосов длиной $c = \sqrt{h^2 + a^2}$, образующих жесткие треугольники со стержнями верхней и нижней панелей, и стоек длиной b . Кроме обычных для балочных ферм опор, ферма опирается на дополнительную горизонтальную боковую опору. Несмотря на это, задача статически определима. Действительно, в ферме с n панелями в половине пролета содержится $8n + 2$ соединительных узлов (шарниров) и

$m = 16n + 4$ стержней, включая четыре опорные. Таким образом, стандартная схема расчета фермы, по которой сначала определяются реакции опор (здесь их четыре), а потом последовательным вырезанием узлов находятся усилия в стержнях, не проходит. Для решения задачи необходимо составить уравнения равновесия всех узлов и найти решение системы линейных уравнений. Заметим также, что метод сечений Риттера в этой ферме применим только для крайних панелей.

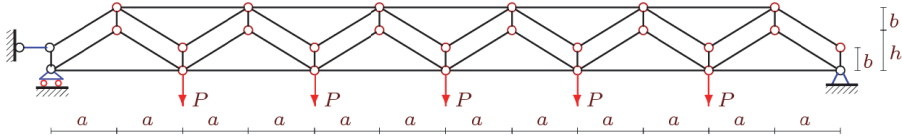


Рис. 1. Ферма при $n = 3$. Нагрузка на нижний пояс
[Fig. 1. Truss at $n = 3$. The load on the bottom chord of truss]

Система компьютерной математики Maple позволяет решить эту задачу в символьной форме. Пользуясь программой [9] и опытом ее применения [1–7] при решении аналогичных задач для плоских ферм, зададим координаты узлов. Начало координат выберем в левой подвижной опоре. Нумерация стержней и узлов применительно к случаю $n = 2$ дана на рис. 2. Соответствующий фрагмент программы на языке Maple имеет вид

```
> for i to 2*n+1 do
  x[i]:=2*a*i-2*a; y[i]:=0;
> x[i+2*n+1]:=2*a*i-2*a; y[i+2*n+1]:=b;
> end:
> for i to 2*n do
  x[i+4*n+2]:=2*a*i-a; y[i+4*n+2]:=h;
  x[i+6*n+2]:=2*a*i-a; y[i+6*n+2]:=h+b;
end:
```

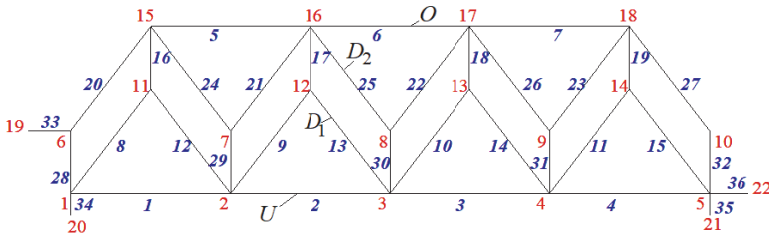


Рис. 2. Номера узлов и стержней при $n = 2$
[Fig. 2. Nodes and rods number at $n = 2$]

Структуру решетки зададим векторами, содержащими в своих координатах номера концов стержней:

```
> for i to 2*n do
> N[i]:=[i,i+1];
> N[i+4*n-1]:=[i+4*n+2,i];
> N[i+6*n-1]:=[i+4*n+2,i+1];
> N[i+8*n-1]:=[i+4*n+2,i+6*n+2];
> N[i+10*n-1]:=[i+2*n+1,i+6*n+2];
> N[i+12*n-1]:=[i+2*n+2,i+6*n+2];
> end:
> for i to 2*n-1 do N[i+2*n]:=[i+6*n+2,i+6*n+3]; end:
> for i to 2*n+1 do N[i+14*n-1]:=[i,i+2*n+1]; end:
```

Матрица уравнений равновесия состоит из направляющих косинусов усилий, вычисленных по координатам $\mathbf{N}[i][1]$, $\mathbf{N}[i][2]$, концов стержней и их длин $L[i]$. Заполнение матрицы идет в цикле по числу стержней m :

```
> for i to m do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
>   Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
>   L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2);
> for j to 2 do
>   k:=2*N[i][2]-2+j:
>   if k<=m then G[k,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>   k:=2*N[i][1]-2+j:
>   if k<=m then G[k,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
> od;
> od:
```

Определим по формуле Максвелла – Мора прогиб фермы под действием равномерной нагрузки, приложенной к узлам нижнего пояса. В формуле учитываются только продольные усилия:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-4} S_i s_i l_i / (EF) ,$$

где S_i – усилия от действия внешней нагрузки; s_i – усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к среднему узлу нижнего пояса (где измеряется вертикальное смещение); l_i – длины стержней; m – число стержней, включая опорные стержни.

Общий вид результата для разного числа панелей не меняется (свойство регулярности конструкции) и имеет вид

$$EF\Delta = PC_n(a^3 + 2bh^2 + c^3) / h^2 . \quad (1)$$

Коэффициент C_n образует последовательность 3, 52, 267, 848, 2075, 4308, 7987, 13632, 21843, 33300... . С помощью оператора **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple можно найти рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности:

$$C_n = 5C_{n-1} - 10C_{n-2} + 10C_{n-3} - 5C_{n-4} + C_{n-5} .$$

Решение этого уравнения дает оператор **rsolve**:

$$C_n = n^2(10n^2 - 1) / 3 .$$

Аналогичную форму (1) имеет решение в случае загрузки верхнего пояса (рис. 3). Коэффициент в формуле имеет вид

$$C_n = 2n^2(5n^2 + 1) / 3 .$$

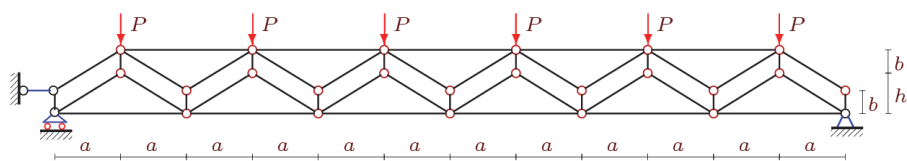


Рис. 3. Нагрузка на верхний пояс
[Fig. 3. The load on the upper belt]

При определении прогиба фермы от действия одной сосредоточенной силы в середине нижнего пояса формула Максвелла – Мора упрощается

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{m-4} s_i^2 l_i / (EF).$$

Коэффициент в (1) в этом случае имеет вид

$$C_n = n(8n^2 + 1) / 3.$$

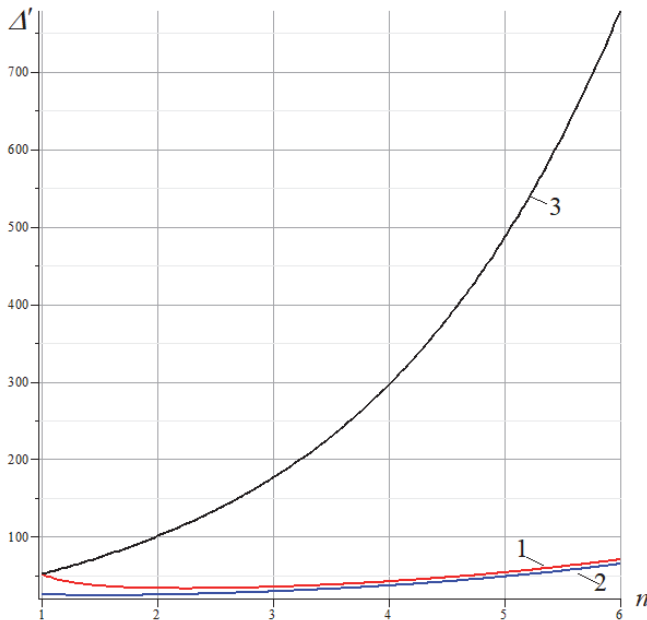


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей, $L = 100$ м, $b = 2$ м, $h = 5$ м:

1 – нижний пояс; 2 – верхний пояс; 3 – сосредоточенная сила

[Fig. 4. Dependence of the deflection on the number of panels, $L = 100$ m, $b = 2$ m, $h = 5$ m:

1 – lower belt; 2 – upper belt; 3 – concentrated force]

На рис. 4 даны кривые полученных зависимостей при фиксированной длине пролета $L = 4an = 100$ м и заданной общей нагрузке P_0 . При загрузке нижнего пояса $P_0 = P(2n - 1)$, верхнего пояса $P_0 = P(2n)$, для сосредоточенной силы $P_0 = P$. Введено обозначение для безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$.

Слабовыраженный минимум для случая распределенных нагрузок приходится на нереально малые числа панелей. В частности, для заданного пролета соответствующая длина панели должна быть равной 12 м. Однако для других сочетаний нагрузок и размеров фермы наличие этой особенности может оптимизировать конструкцию по жесткости.

Усилия в критических стержнях и асимптотика. Для оценки прочности и устойчивости фермы полезно иметь формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях конструкции. Критическими для данной фермы являются стержни в середине пролета. Выделим четыре стержня: сжатый стержень O в верхнем поясе, U – растянутый стержень в нижнем и два раскоса D_1, D_2 (рис. 2). Индукцией по результатам расчета всего шести ферм получаем следующие значения

$$O = -Pn^2 a / h, \quad U = P(2n^2 - 1)a / (2h), \quad D_1 = -P(2n^2 - 1)c / (2h), \quad D_2 = Pn^2 c / h.$$

Коэффициенты в этих формулах оказались достаточно простыми, и операторы системы Maple для их вывода привлекать не потребовалось.

С помощью операторов Maple можно найти и асимптотические свойства полученных решений для прогиба, показывающие общий характер зависимостей при фиксированной нагрузке и заданном пролете. Для распределенных нагрузок рост имеет кубический характер, для сосредоточенной – параболический четвертого порядка:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_1 / n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_2 / n^3 = 5(h + 2b) / (3L),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_3 / n^4 = 10(h + 2b) / (3L).$$

Обзор аналитических решений задач о прогибе плоских ферм приведен в [5].

Выводы. Предлагаемая схема статически определимой фермы является регулярной и допускает аналитическое решение для величины прогиба при различных нагрузках. Основным достоинством полученного решения является наличие простой функциональной зависимости от числа панелей. Это позволяет применять его для широкого класса подобных ферм, в том числе и для ферм с большим числом стержней, что актуально при современной тенденции строительства большепролетных сооружений.

© Кирсанов М.Н., 2018

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2–5.
2. Kirsanov M.N., Razananairina P.C. The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability. Postulat. 2017. No 9.
3. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol 46. № 1. P. 46–52.
4. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 4–3 (8). С. 7–8.
5. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
6. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68.
7. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. P. 14–17.
8. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52–58.
9. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во «Лань», 2012. 512 с.

Об авторе:

Кирсанов Михаил Николаевич – профессор, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор десяти монографий и учебных пособий по математике и механике, член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике. *Область научных интересов:* строительная механика, аналитические решения, Maple, дифференциальные уравнения, дискретная математика, методы искусственного интеллекта, реология. *Контактная информация:* e-mail – c216@ya.ru

Для цитирования:

Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105–111. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111.

R e f e r e n c e s

1. Kirsanov, M.N. (2016). Analytical calculation of truss girder with the «Butterfly» lattice. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, No 4, 2–5. (In Russ.)
2. Kirsanov, M.N., Razananairina, P.C. (2017). The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability. *Postulat*, No 9.
3. Tinkov, D.V., Safonov, A.A. (2017). Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Vol 46, No 1, 46–52.
4. Bolotina, T.D. (2016). The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*, No 4–3 (8), 7–8.
5. Tinkov, D.V. (2015). Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection. *Magazine of Civil Engineering*, No 5 (57), 66–73. (In Russ.)
6. Kirsanov, M.N. (2016). Static analysis and mounting diagram of flat truss. *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova [Bulletin of State University of Marine and River Fleet named after Admiral S.O. Makarov]*, 5 (39), 61–68. (In Russ.)
7. Kirsanov, M. (2016). An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*, 1 (3), 14–17.
8. Kirsanov, M.N. (2016). Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*, (4), 52–58. DOI: 10.5862/MCE.64.5. (In Russ.)
9. Kirsanov, M.N. (2012). Maple i Maple. Resheniya zadach mekhaniki [Maple and Maple. Solving the problems of mechanics], St. Petersburg: “Lan” Publ., 512. (In Russ.)

**ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEFLECTION
OF A BEAM TRUSS WITH DOUBLE BRACING**

M.N. KIRSANOV

National Research University “MPEI”

14 Krasnokazarmennaya St., Moscow, 111250, Russian Federation

(received: November 11, 2017; accepted: March 05, 2018)

A statically determinate planar truss has rectilinear belts and a triangular lattice consisting of double braces. The four links make it seemingly statically indeterminate. The derivation of the formula for the dependence of the deflection on its dimensions and the number of panels is given. Forces in rods are determined in symbolic form by cutting out nodes from the solution of a system of linear equations in the system of computer mathematics Maple. To determine the deflection, the Maxwell – Mohr’s formula is used. Rods (except all rigid support) are assumed to be elastic with the same rigidity. The generalization of individual solutions to an arbitrary number of panels is done by induction. Operators of the Maple system from the calculation data yield linear homogeneous recurrence equations for the coefficients of the desired formula. The solutions of these equations give the general terms of the obtained sequences. Formulas for three types of loads are obtained and compared (the uniform loading of the nodes of the lower and upper belts and the concentrated force in the middle of the span). Curves of the dependence of deflection on the number of panels have weakly expressed minima. The dependencies of the forces in the most compressed and stretched rods on the number of

panels are derived. Also given are asymptotic estimates for solutions in accordance with the number of panels in fixed spans of the construction and at a given total load.

Keywords: truss, lattice, Maple, deflection

About the authors:

Kirsanov Mikhail Nikolaevich – Professor, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Professor of M.V. Lomonosov Moscow State University. Author of ten monographs and textbooks on mathematics and mechanics, member of the Russian National Committee on Theoretical and Applied Mechanics. *Research interests:* structural mechanics, analytical solutions, Maple, differential equations, discrete mathematics, artificial intelligence methods, rheology. *Contact information:* e-mail – c216@ya.ru

For citation:

Kirsanov, M.N. (2018). Analytical calculation of the deflection of a beam truss with double bracing. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14 (2), 105–111. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111.

РАСЧЕТ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-112-119

**ANALYSIS OF PRESSURE STABILIZER ELLIPTIC CHAMBERS
ON THE DEFORMED STATE BY NUMERICAL METHOD**

F.V. REKACH*, G.L. GBAGUIDI AISSE**

* Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

** University of Abomey-Calavi (UAC)
02 BP 244 Cotonou, Republic of Benin

(received: December 12, 2017; accepted: March 04, 2018)

The question of pressure and flow rate stabilization is particularly relevant to short pipelines systems, which have high requirements for flow rate consistency of the working fluid. At medium and high pressures (up to 100 atmospheres and higher) the pressure stabilizer with elliptical elastic chambers provides conditions for normal operation of the corresponding equipment. For proper design of the stabilizer, especially deciding question of the liquid volume which the stabilizer can accommodate, it is necessary to carry out the calculation of the elliptical shell in the deformed state. The article provides the calculation of the elliptical shell in the deformed state by step by step loading method and checking the strength conditions at each step of loading. One of the main questions of the study is the question of what maximum load can withstand elliptical chambers. In this paper, we investigate the dependence of the maximum pressure at which the unit operates in the elastic area of deformation on the of the elliptical pipe wall thickness. If harmful oscillating discharge is known we should know the liquid volume which the camera can take. The dependence of the cross-sectional area increase coefficient on the thickness of the pipe wall is built. The article discusses some questions of pressure stabilizer designing.

Keywords: the pressure stabilizer, harmful pressure fluctuations, elastic camera

Introduction. Pipeline system, transporting fluid under pressure, generated by pumping units or creating conditions for gravity flow of the liquid, is an elastic construction. It consists of various elements, organizing and controlling the flow and fluid pressure. Among them are the straight pipe sections, devices controlling pressure and fluid discharge, turning of fluid flows, branching of liquid flows, means to protect the most vulnerable units and pipeline parts and so on. An important factor in ensuring the safety of the pipeline is the correct installation of fastening systems, both overground and underground parts of pipe line. Owing to the irregular operation of pumping units, changes in physical and (or) geometric conditions of the fluid motion unsteady movement occurs. It is often accompanied by a sudden increase of pressure (water hammer phenomenon) or harmful pressure fluctuations. The above phenomena can lead to the failure of certain devices, as well as pipe breaks with probable fatal accident.

In aircraft and rocket engines non-uniformity of flow and pressure in liquid fuel delivery systems are especially dangerous. The occurrence of discharge and pressure fluctuations in these systems is possible due to the complexity of the organization of working process of the pumping equipment, the inability to create fluid motion

without centripetal accelerations (flow turns, slope changes of motion). There is also the danger of vortex formation in a production environment, the occurrence of self-excited vibration and resonance condition. The amplitude of pressure and discharge in pipelines pump units can reach considerable values, especially for units of high pressure, powerful circulating pumps, turbines with high discharges of non-stationary streams. The mechanism of pressure fluctuations formation of liquid and gas is described in detail in the book by I. A. Czarnye [2].

Periodic fluctuations of liquid or gas pressure and discharge, resulting from the interaction between the flow and the pipe, may cause mechanical vibrations of the pipeline and its equipment and supporting structures. In the event of resonance of the pumping fluid or gas can be likely created longitudinal waves causing resonant vibrations of the entire pipeline system.

One the piping system protective means from the above-listed factors is the pressure stabilizer. For hydraulic systems supplying fuel at high pressure (above 60 atmospheres) and relatively small discharge amplitude oscillations for small pipe length there is an effective means to reduce harmful flow pressure and discharge pulsations. It is the pressure stabilizer with elastic elliptical chambers. This device is capable to work under pressures above 200 atmospheres. Similar calculations were considered in works [4–6].

Fig. 1 shows a diagram of the stabilizer with elastic chambers. It consists of a Central tube 1 of circular cross-section. Due to the uniformly distributed perforations 2, the fluid flows into the coaxial elastic chamber 3 of elliptical cross section 4 made of spring steel. The Central tube is connected to the main pipeline by means of flanges 6. The length of coaxial elliptical segment is designed depending on the desired range of dynamic processes of a hydraulic system correction.

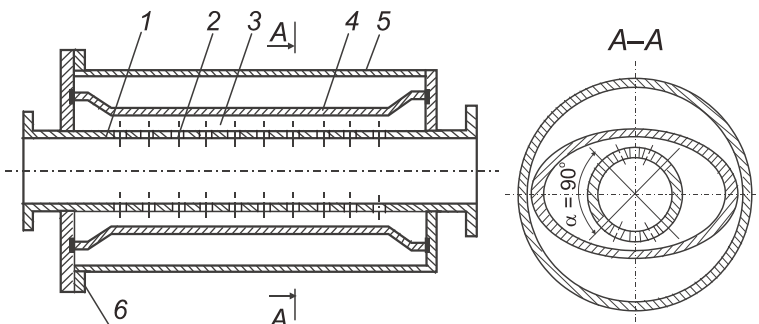


Fig. 1. Design of the stabilizer with elastic chambers

In the event of fluctuations in the pipeline due to elastic deformation of a coaxial camera and distributed perforation the dissipation of energy of oscillations pressure of working environment takes place. By selection of appropriate parameters of a coaxial camera and distributed perforations tone can achieve the necessary degree of reduction of pressure fluctuations and changes in the natural frequencies of the system.

The main part. Calculation of the elliptical chamber on the strength and compliance is necessary to perform on the deformed state, as the difference in the results compared to linear analysis can reach a considerable value.

From the elliptical pipe is cut out a part of the pipe 1 meter length. Consider a quarter of an ellipse with smilaxes a_0 and b_0 . On the edges are two reactions of the supports: in point B – horizontal reaction and moment; in the point A – vertical reaction and moment (Fig. 2). The arc $\overset{\frown}{AB}$ is divided into rectilinear segments l_1, l_2, \dots, l_n . The pressure in the ellipse is added step by step, with a step Δp . It is

considered as a distributed load perpendicular to the counter \bar{AB} and transferred to nodes 2,..., n (forces F) and to nodes 1 and n+1 (forces $F/2$).

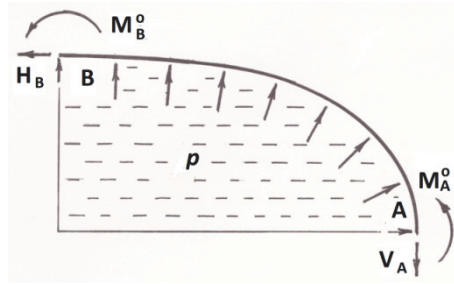


Fig. 2. Calculation diagram

Fig. 3 shows a moment diagram from the internal pressure Δp in the basic statically determinate system. As an unknown support reaction Z is assumed moment in the point A .

Fig. 4 shows a diagram of the moments from the unit unknown reactions $\bar{Z} = 1$.

Displacements in the direction of the reaction Z from the unit reaction $\bar{Z} = 1$ and from the load Δp in the basic system are calculated by the formulas (1):

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} ds, \quad \Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} ds. \quad (1)$$

The unknown Z is found from the equation:

$$\delta_{11} Z + \Delta_{1F} = 0. \quad (2)$$

After Z is found, the moment diagram in statically indeterminate system is built by the formula: $M = M_F + Z\bar{M}_1$. Then vertical and horizontal unit forces are put at all nodes of the basic system in turn and horizontal and vertical displacements of all nodes are found.

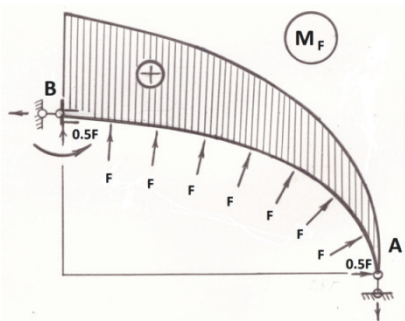


Fig. 3. Moments diagram from pressure Δp in basic system

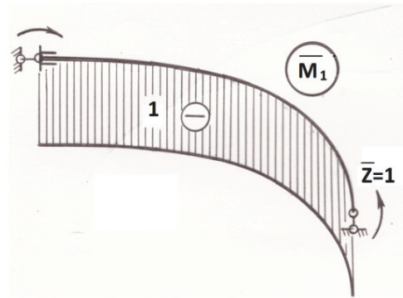


Fig. 4. Diagram from unit unknown \bar{Z}

Horizontal and vertical displacements of the nodes are calculated by the formulas:

$$\Delta_{j\Delta p}^H = \int_0^l \frac{\bar{M}_j^H M}{EI} ds \quad \text{and} \quad \Delta_{j\Delta p}^V = \int_0^l \frac{\bar{M}_j^V M}{EI} ds, \quad (3)$$

where $\Delta_{j\Delta p}^H$ and $\Delta_{j\Delta p}^V$ – horizontal and vertical displacements in the node j from moment M in statically indeterminate system from load Δp ; \bar{M}_j^H and \bar{M}_j^V – moments from unit horizontal and vertical force applied in the node j .

At each load step the coordinates of the nodes are corrected, i.e. the geometry of the pipe cross section is changing. Since adding the load ellipse will tend to "transform" into a circle, the expected limit load will be more. Check of the ellipse contour strength is calculated as follows:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_{adm}],$$

where σ_{\max} is calculated by the formula: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max}$; $M_{\max} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) \cdot \frac{EI}{2(1-\nu^2)}$;

$1/R_0$ – the initial curvature of the ellipse point; $1/R_1$ – the curvature of an ellipse points after load application [3].

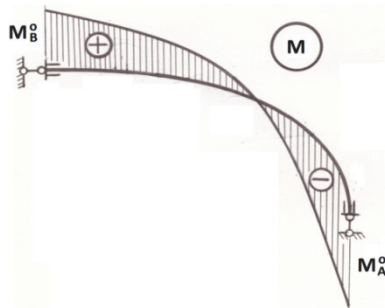


Fig. 5. Moments diagram in statically indeterminate system from load Δp

Moments diagram in statically indeterminate system is shown in fig. 5

Calculations and main results. The analysis of numerical calculation convergence.

The calculation program was compiled in C++.

Phase 1. Convergence of the solution on the number of segments n , when cutting an arc $\overset{\frown}{AB}$ by parts l_1, l_2, \dots, l_n .

Numerical experiments showed that the difference in the solution with $n_1 = 50$ and $n_2 = 100$ is less than 0.7%. Is assumed $n = 100$.

Phase 2. Convergence of the solution on the number of load steps.

Numerical experiments showed that the difference in the solution when the number of steps on load $ns_1 = 50$ and $ns_2 = 100$ is less than 0.8%. Is assumed $ns = 100$.

Problem 1. Data: Elliptical section of the pipe with big and small semiaxis $a_0 = 0.03 \text{ м}$ and $b_0 = 0.012 \text{ м}$, pipe wall thickness $h_0 = 0.001 \text{ м}$. The material is steel with modulus of elasticity $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, permissible stress $[\sigma_{adm}] = 2.57 \cdot 10^2 \text{ МПа}$, the Poisson's ratio $\nu = 0.3$.

Fig. 6 shows a quarter of the pipe cross section before and after deformation.

Figures 7 and 8 show the moments diagram and the normal stress diagram at the counter of the ellipse from point B to point A relative to the axis oX .

Calculations show that the maximum internal pressure p_0 which the pipe can resist on $[\sigma_{adm}]$ is 0.353 МПа . It is obvious that by increasing the wall thickness of the pipe h_0 , the pipe will resist greater pressure. However, this will reduce the points

displacements of the pipe, and thus to the reduction of the cross-sectional area increase ratio $k_A = \frac{A_1}{A_0}$, where A_0 is the cross-sectional area before deformation, A_1 is the cross – sectional area after deformation.

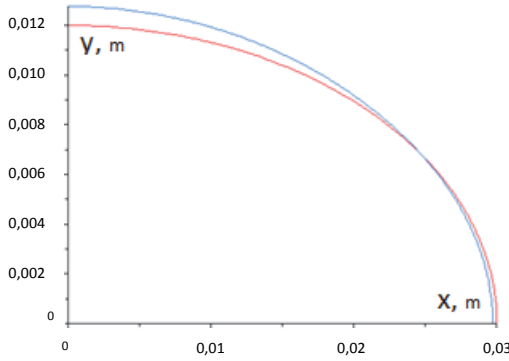


Fig. 6. A quarter of the elliptical cross-section before and after deformation

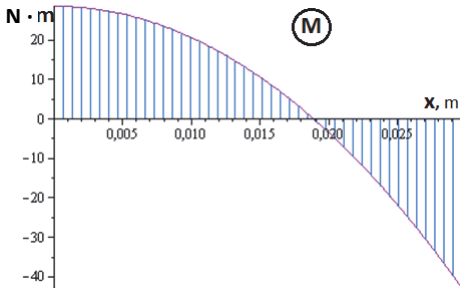


Fig. 7. Moments diagram for the quarter of the ellipse

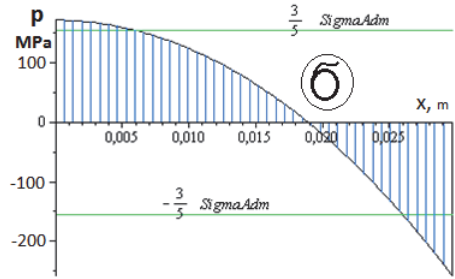


Fig. 8. Normal stresses diagram for the quarter of the ellipse

Problem 2. The research of the maximum internal pipe pressure p_{max} dependence on its thickness was carried out (Fig. 9). All entrance data were taken same as in problem 1.

The calculations showed that pipe thickness should be taken depending on the given maximum pressure in the pipe p_{max} .

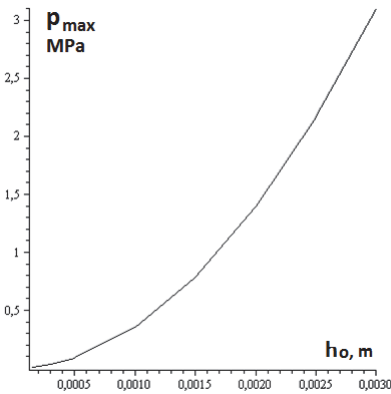


Fig. 9. Dependence of maximum pressure on the pipe thickness

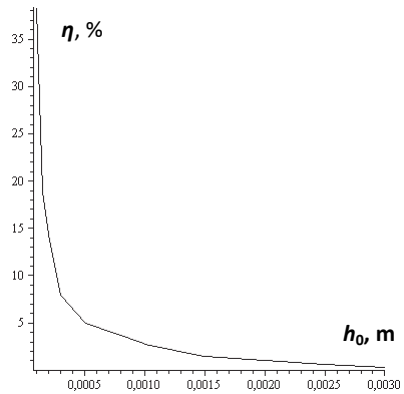


Fig. 10. Dependence of the relative increase ratio of the cross-sectional area of the pipe η on its thickness

Problem 3. These researches confirmed necessity for the calculation on the deformed state (Fig. 10). All data were taken the same as in problem 1.

Numerical analysis shows that relative error $\eta\%$ of calculations on the deformed and undeformed state may exceed 35%. When calculating on deformed state the limit load increases, since each step changes the geometry of the cross section towards "transformation" of the ellipse into a circle.

Problem 4. The research of cross sectional increase ratio area k_A of the pipe on the thickness of the pipe was carried out (Fig. 11). All entrance data were taken the same as in problem 1.

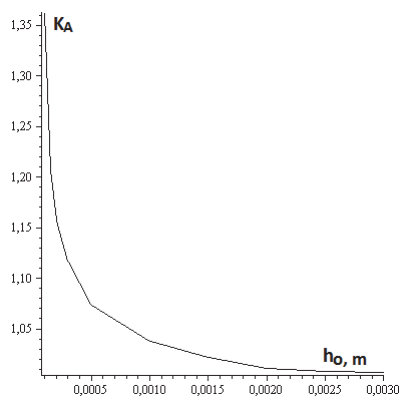


Fig. 11. Dependence of the cross-sectional increase ratio area k_A of the pipe on the thickness of the pipe

This parameter (k_A) effects on the projected length of the elliptical pipe when oscillation amplitude of the fluid flow is given.

Conclusions. 1. For the correct calculation of bending moment at each load step, we need to use a formula that takes into account the change of curvature of the cross section.

2. The choice of the elliptical pipe thickness (at the accepted cross section) should be performed depending on the maximum pressure which can resist the pipeline.

3. When calculating on the deformed state the maximum load that can resist the pipeline increases comparing with the undeformed analysis. The difference of results can reach 35%.

4. The thinner is the pipe wall, the greater is the additional volume of liquid (when pressure increases) which the pipe section of elliptical cross-section can hold. Depending on h_0 the total length is designed.

5. For better design of the pipeline it is also necessary to consider the various ratios b_0/a_0 .

© Rekach F.V., Gbaguidi Aisse G.L., 2018

References

1. Chucherov, A.I., Galyuk, V.X., Nizamov, H.N. (1991). Pul'satsii davleniya v truboprovodakh i sposoby ikh ustraneniya [The pulsations of pressure in the pipes and their solutions] // *VNIIOENG Overview. Series "Transport and storage of oil"*. Moscow: VNIIOENG, 1991, 88. (In Russ.)

2. Charnye I. A. (1975). Neustanovivsheesya dvizhenie real'noi zhidkosti v trubakh [Unsteady motion of a real fluid in pipes. 2nd ed.]. 2-e izd. Moscow: Nedra Publ., 296.

3. Fedos'ev V.I. (1940). Raschet tonkostennykh trubok Burdona ellipticheskogo secheniya energeticheskim metodom [Analyses of thin Bourdon elliptic tubes by energy method]. Moscow: Oborongiz Publ., 94.

4. Shambina S.L., Kazarian A.A. (2015). Application of bionic forms and approaches of analytical geometry to modern architectural design. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings and facilities engineer*. No 1, 3–11. (In Russ.)

5. Vanin V.V., Shambina S.L., Virchenko G.I. (2015). Variant computer shell prototyping based on polyparameterization of middle surfaces. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings and facilities engineer*. No 6, 3–8. (In Russ.)

6. Siyanov, A.I., Rynkovskaya, M.I., Abu Mahadi, M. I., Mathieu, G. O. (2017). Improving the performance parameters of metal cylindrical grid shell structures. *J. Fundam. Appl. Sci.*, 9 (7), 365–376.

About the author:

Fedor V. Rekach – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of Architecture and Construction, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Research Interests*: application of mathematics to mechanics (structural mechanics, dynamics of pipelines, numerical solutions), differential equations with small parameter, design of board and computer games. *Contact information*: e-mail – rekfedor@yandex.ru

Gbaguidi Aisse Gérard Léopold – Senior Lecturer, Department of Civil Engineering, University of Abomey-Calavi (UAC). Director of the Graduate School of Civil Engineering VERECHAGUINE A.K. Director of Laboratory of Materials and Structures (LAMS), Republic of Benin. *Research Interests*: vegetal fibers, materials engineering, reinforced concrete structures. *Contact information*: e-mail – gbaguidi.gerard@yahoo.fr

For citation:

Rekach, F.V., Gbaguidi Aisse, G.L. (2018). Analysis of pressure stabilizer elliptic chambers on the deformed state by numerical method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14 (2), 112–119. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-112-119.

РАСЧЕТ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УПРУГИХ КАМЕР СТАБИЛИЗАТОРА ДАВЛЕНИЯ ПО ДЕФОРМИРОВАННОМУ СОСТОЯНИЮ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Ф.В. РЕКАЧ*, Ж.Л. ГБАГУИДИ АЙССЕ**

* Российский университет дружбы народов (РУДН)
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

** Университет Абомей-Калави
02 BP 244 Котону, Республика Бенин

(поступила в редакцию: 12 декабря 2017 г.; принята к публикации: 04 марта 2018 г.)

Вопрос стабилизации давления и расхода жидкости особенно актуален в системах коротких трубопроводов, где предъявляются повышенные требования к равномерности подачи рабочей жидкости. В условиях средних и высоких давлений (до 100 атмосфер и выше) стабилизатор давления с эллиптическими упругими камерами создает условия для нормальной работы соответствующего оборудования. Для грамотного проектирования стабилизатора, особенно при решении вопроса об объеме жидкости, который способен вместить стабилизатор, необходимо проводить расчет эллиптической оболочки по деформированному состоянию. В статье приводится расчет эллиптической оболочки по деформированному состоянию методом пошагового нагружения и проверки условий прочности на каждом шаге нагружения. Одним из основных вопросов исследо-

вания является вопрос о том, какую максимальную нагрузку могут выдерживать эллиптические камеры. В работе исследуется зависимость максимального давления при котором конструкция работает в упругой области деформирования от толщины стенки эллиптической трубы. Если в ходе гидравлических расчетов становится известен расход жидкости, который необходимо погасить, то необходимо знать, какой объем жидкости способна «принять» камера. В работе приведена зависимость коэффициента увеличения площади поперечного сечения от толщины стенки трубы. Рассмотрены некоторые вопросы проектирования стабилизатора давления.

Ключевые слова: стабилизатор давления, вредные колебания давления, упругие камеры

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Чучеров А.И., Галюк В.Х., Низамов Х.Н. и др. Пульсации давления в трубопроводах и способы их устранения // Обзорная информация ВНИИОЭНГ. Серия: Транспорт и хранение нефти. М.: ВНИИОЭНГ, 1991.

2. Чарный И.А. Неуставившееся движение реальной жидкости в трубах. 2-е изд. М.: Недра, 1975. 296 с.

3. Федосьев В.И. Расчет тонкостенных трубок Бурдона эллиптического сечения энергетическим методом. М.: Оборонгиз, 1940. 96 с.

4. Шамбина С.Л., Казарян А.А. Применение бионических форм и аппарата аналитической геометрии в современном архитектурном дизайне // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 1. С. 3–11.

5. Ванин В.В., Шамбина С.Л., Вирченко Г.И. Вариантное компьютерное моделирование оболочек на основе полипараметризации средних поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 3–8.

6. Siyanov A.I., Rynkovskaya, M.I., Abu Mahadi M. I., Mathieu G. O. Improving the performance parameters of metal cylindrical grid shell structures // J. Fundam. Appl. Sci., 2017. 9 (7S), 365–376.

Об авторе:

Рекач Федор Владимирович – кандидат технических наук, доцент департамента архитектуры и строительства, Российский университет дружбы народов (РУДН). *Область научных интересов:* приложения математики к механике (строительная механика, динамика трубопроводных систем, численные решения), дифференциальные уравнения с малым параметром, создание настольных и компьютерных игр. *Контактная информация:* e-mail – rekfedor@yandex.ru

Гбагуди Айссе Жерар Леопольд – доктор наук, профессор факультета гражданского строительства, Университет Абомей-Калави (ОАК). Директор Высшей школы гражданского строительства им. А.К. Верещагина, заведующий лабораторией материалов и конструкций, Республика Бенин. *Область научных интересов:* растительные волокна, материаловедение, железобетонные конструкции. *Контактная информация:* e-mail – gbaguidi.gerard@yahoo.fr

Для цитирования:

Rekach F.V., Gbaguidi Aisse G.L. Analysis of pressure stabilizer elliptic chambers on the deformed state by numerical method // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 112–119. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-112-119.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-120-131

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ, УСИЛЕННЫХ КОМПОЗИТНЫМИ ТКАНЯМИ, МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.П. АГАПОВ*, В.Б. НИКОЛАЕВ**, Р.О. ГОЛОВАНОВ*

*Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет
Ярославское шоссе, 26, Москва, Россия, 129337

**АО «Атомэнергопроект»
ул. Бакунинская, 7, стр. 1, Москва, Россия, 105005

(*поступила в редакцию: 02 декабря 2017 г.; принята к публикации: 05 марта 2018 г.*)

Рассматривается конечно-элементная методика расчета железобетонных плит, усиленных композитными тканями на основе углеродных волокон, реализованная в программе ПРИНС. Методика предназначена для анализа напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций при возникновении трещин в бетоне и пластических деформаций в арматуре. Расчет ведется в приращениях, причем на каждом шаге нагружения используется переменная матрица жесткости. Постоянная ее часть представляет матрицу жесткости в начале шага нагружения, а переменная вычисляется с учетом напряженно-деформированного состояния в конце текущей итерации. Переменная часть матрицы жесткости, будучи умноженной на вектор перемещений, найденный на предыдущей итерации, переносится в правую часть системы уравнений и рассматривается как дополнительная нагрузка. При возникновении трещин или при появлении пластических деформаций напряжения корректируются в соответствии с заданными диаграммами деформирования. Поэтому в конце шага нагружения проверяются условия равновесия. При необходимости производится уравнивание внешних и внутренних сил. При учете пластических деформаций в бетоне и арматуре используется теория пластического течения и критерий текучести Губера – Мизеса, модифицированный на основании экспериментальных исследований Купфера и др. Приводится пример расчета железобетонной плиты с разными вариантами усиления композитом и без усиления. Анализируются результаты расчета. Показывается возможность исследования напряженно-деформированного состояния на всем пути нагружения железобетонных плит вплоть до разрушения.

Ключевые слова: железобетонные плиты, композитные ткани, метод конечных элементов, программные комплексы

Современные строительные материалы позволяют облегчить ремонт инженерных конструкций и сооружений и увеличить срок их эксплуатации. К числу таких материалов относятся, в частности, ткани на основе углеродных волокон. Промышленность выпускает широкий ассортимент таких тканей [1–3], а строительные организации освоили методики их применения [4–5]. Различными ведомствами разработаны рекомендации по ремонту и усилению железобетонных конструкций (см., например, [6]), которые основаны на общепринятых, в основном экспериментальных, сведениях о работе подобных конструкций, но не пред-

полагают точного анализа напряжено-деформированного состояния исследуемых объектов. Поэтому упомянутые рекомендации содержат большое количество поправочных коэффициентов с целью обеспечения запаса прочности, который может оказаться и избыточным. Более точный анализ может быть выполнен методом конечных элементов с помощью компьютерных программ, в которых этот метод реализован в линейной и нелинейной постановках. К таким программам относятся хорошо известные NASTRAN [7], ANSYS [8], ABAQUS [9] и ряд других. Следует отметить, однако, что расчеты физически нелинейных конструкций в упомянутых программах проводятся с помощью физических соотношений, основанных на тех или иных экспериментах, а возникающие при этом разрешающие уравнения для конструкции в целом решаются приближенными методами. Для повышения достоверности результатов подобные расчеты следует проводить с использованием нескольких программ. Поэтому проектировщики должны иметь в своем арсенале несколько доступных расчетных инструментов. В связи с этим разработка альтернативных расчетных методик и соответствующих программ остается до сих пор актуальной задачей [10–12].

В данной работе рассматривается конечно-элементная методика расчета железобетонных плит, в том числе усиленных композитными тканями, с учетом пластических деформаций в арматуре и трещинообразования в бетоне, описывается программная реализация методики в вычислительном комплексе ПРИНС и приводится пример расчета плиты.

Расчет физически нелинейных конструкций с помощью ВК ПРИНС ведется методом конечных элементов в приращениях [1] по уравнению

$$K_{NL}\Delta u = \Delta P, \quad (1)$$

где K_{NL} – полная нелинейная матрица жесткости, связывающая приращения узловых сил и перемещений; Δu и ΔP – приращения узловых перемещений и узловых сил конечно-элементной модели соответственно.

Матрица K_{NL} в интервале нагружения непрерывно изменяется, поэтому, чтобы получить точное решение, необходимо в формуле (1) перейти к интегрированию:

$$\int_{u_0}^{u_K} K_{NL} du = \Delta P, \quad (2)$$

где u_0 и u_K – значения перемещений в начале и конце интервала нагружения соответственно.

Однако вести вычисления по формуле (2) практически невозможно, так как не существует аналитического выражения для K_{NL} , а верхняя граница интервала интегрирования неизвестна. Вычисляя интеграл по правилу трапеций, получаем

$$\frac{1}{2}(K_0 + K_1)\Delta u = \Delta P, \quad (3)$$

где K_0 и K_1 – матрицы жесткости, вычисляемые в начале и конце шага нагружения соответственно.

Запишем уравнение (3) в виде

$$(K_0 + \Delta K)\Delta u = \Delta P, \quad (4)$$

где $\Delta K = \frac{1}{2}(K_1 - K_0)$.

Уравнение (4) решается итерационным способом:

$$K_0 \Delta u_i = \Delta P - \Delta K_{i-1} \Delta u_{i-1}, \quad (5)$$

где i – номер итерации.

При достижении сходимости итерационного процесса находятся полные значения перемещений и напряжений по формулам:

$$u = u_0 + \Delta u; \quad \sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma. \quad (6)$$

Приращения напряжений находятся по формуле

$$\Delta \sigma = C_{ep} \Delta \varepsilon, \quad (7)$$

где C_{ep} – упруго-пластическая матрица характеристик материала, определяемая ниже. Эта матрица на шаге нагружения не остается постоянной. Строго говоря, напряжения должны находиться интегрированием выражения (7), т.е.

$$\Delta \sigma = \int_0^{\Delta \varepsilon} C_{ep} d\varepsilon. \quad (8)$$

Однако в изгибаемых железобетонных конструкциях существенное влияние на прочность оказывает трещинообразование, поэтому на каждом шаге нагружения приходится анализировать напряженное состояние и при возникновении трещины корректировать напряжения с учетом диаграммы деформирования для растянутой зоны. Это требует проведения процесса уравнивания конструкции, следовательно применение приближенной формулы (7) оказывается вполне оправданным.

Матрица жесткости K для отдельного конечного элемента находится по формуле [13]

$$K = \int_V B^T C B dV,$$

где B – матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений; C – матрица, связывающая компоненты напряжений с компонентами деформаций.

Вектор узловых нагрузок конечного элемента находится из соотношения

$$f = - \int_V N^T p dV,$$

где N – матрица функций формы, выражающая перемещения внутренних точек конечных элементов с узловыми перемещениями; p – вектор, составленный из компонентов распределенной нагрузки.

Методика вычисления геометрической матрицы B хорошо известна (см., например, [13]).

При построении физической матрицы в данной работе используются диаграммы деформирования бетона и арматуры в виде, показанном на рис. 1. При этом предполагается, что бетон деформируется линейно в сжатой зоне до достижения предела текучести σ_T , а в растянутой зоне – до достижения предела трещинообразования σ_{cr} . Вид диаграммы в растянутой зоне определяется параметрами σ_{cr} , α и ε_m и в зависимости от этих параметров может быть различным.

Разгрузка происходит по линейному закону с начальным модулем упругости в сжатой зоне и модулем $E_p = \sigma_o / \varepsilon_o$ в растянутой зоне.

Диаграммы деформирования арматуры в растянутой и сжатой зонах принимаются одинаковыми.

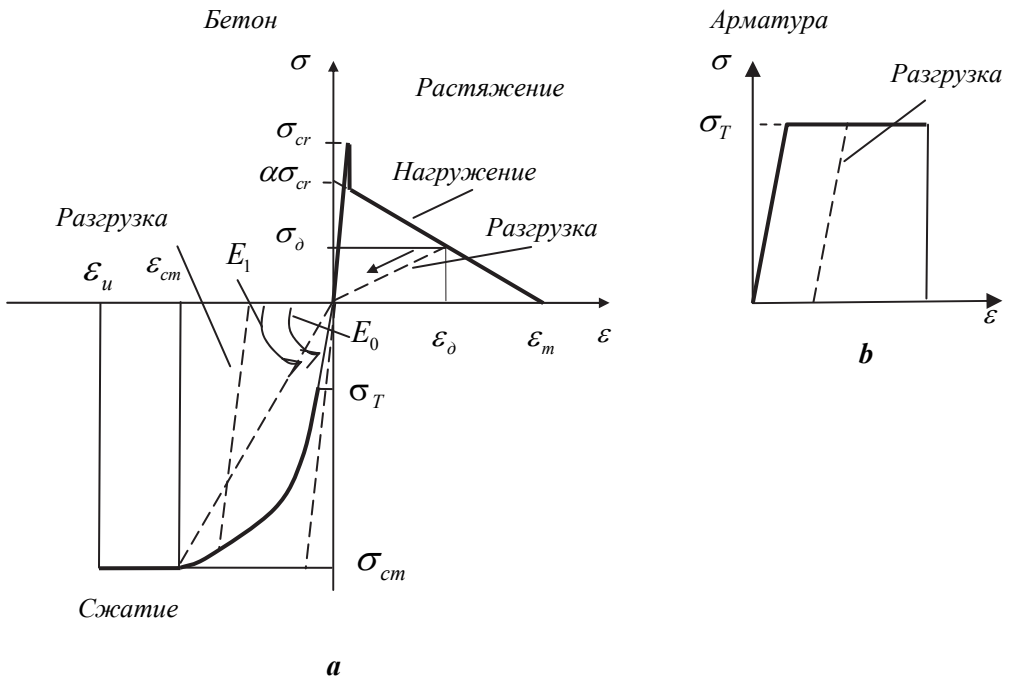


Рис. 1. Диаграммы деформирования бетона и арматуры
[Fig. 1. Diagrams of deformation of concrete and reinforcement]

Для двухмерного напряженного состояния графики рис. 1 трактуются как диаграммы зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций.

В интервале от σ_T до σ_{cm} для сжатой зоны бетона принимается закон деформирования, рекомендованный Еврокомиссией по бетону, имеющий вид [14]

$$\sigma = \frac{\frac{E_0}{E_1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_0}{E_1} - 2\right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cm}}} \sigma_{cm} \quad \text{при } |\varepsilon| < |\varepsilon_{cm}|, \quad (9)$$

где σ и ε – напряжения и деформации в сжатой зоне бетона соответственно; E_0 – начальный модуль упругости; E_1 – секущий модуль от начала до пикового значения напряжения σ_{cm} ; ε_{cm} – деформация, соответствующая пиковому значению напряжения.

Используются многослойные конечные элементы изгибаемых пластин, построенные с использованием гипотезы Кирхгофа и подробно описанные в работе [15].

Для получения зависимости между приращениями напряжений и деформациями для сжатой и сжато-растянутой зон при $\sigma_1 < \sigma_{cr}$ используется теория пластического течения. Критерий текучести бетона сжатой зоны принимается в виде, предложенном в работе [16],

$$f(I_1, J_2) = [\beta(3J_2) + \alpha I_1]^{1/2} = \sigma_0, \quad (10)$$

где I_1 – первый инвариант тензора напряжений; J_2 – второй инвариант девиатора напряжений; α и β – коэффициенты, принимаемые с учетом экспериментов Купфера и др. [17] равными $\alpha = 0,355\sigma_0$ и $\beta = 1,355$.

Отметим, что при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ условие (5) превращается в известный критерий пластичности Губера – Мизеса [17].

Физическая матрица находится при этом из соотношения (см., например, [13; 15; 18])

$$[C_{ep}] = \left[[C] - [C]\{a\} \frac{\{a\}^T [C]}{H' + \{a\}^T [C]\{a\}} \right],$$

где $[C]$ – матрица коэффициентов обобщенного закона Гука для плоского напряженного состояния; $\{a\}$ – вектор течения; H' – касательный модуль кривой «интенсивность напряжения – приращение интенсивности пластических деформаций».

Вектор течения находится дифференцированием функции течения по компонентам напряжений, т.е.

$$\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3\}^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \right\}^T.$$

В алгоритме, реализованном в программе ПРИНС, кривая $\sigma(\varepsilon)$ перестраивается по точкам в диаграмму $\sigma(\varepsilon_p)$, по которой и определяется параметр H' . Процесс перестроения иллюстрируется на рис. 2. Эта же диаграмма определяет и правило упрочнения.

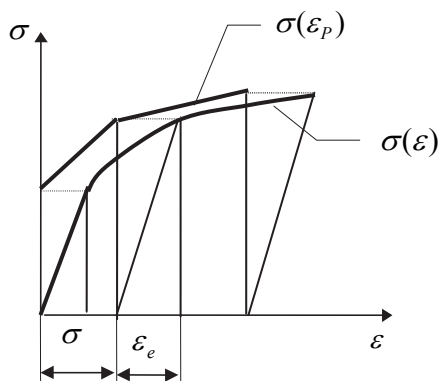


Рис. 2. Построение диаграммы «напряжение – пластическая деформация»
[Fig. 2. Construction of a stress–plastic strain diagram]

Зависимость между напряжениями и деформациями в растянутой зоне принимается линейной до возникновения трещины. Момент возникновения трещины фиксируется по главным напряжениям. При возникновении трещины модуль упругости в направлении, перпендикулярном трещине, принимается равным нулю, а модули сдвига в направлении, параллельном трещине, корректируются в соответствии с рекомендациями, приведенными в работе [16]. Исползованные рекомендации учитывают агрегатное взаимодействие в зоне трещины,

нагильный эффект и другие факторы, влияющие на работу треснувшего бетона на сдвиг. Нормальные напряжения в направлении трещины скачком уменьшаются до величины, определяемой по диаграмме рис. 1,а для растянутой зоны.

Физические уравнения при возникновении трещины формируются сначала в главных осях, а затем пересчитываются к глобальным осям.

Физические уравнения для арматуры и для углеродной ткани с однонаправленными волокнами принимаются на основе диаграммы Прандтля по методике, описанной в работе [15].

Использование линейризованных уравнений на шаге нагружения приводит к нарушению условий равновесия. Поэтому в конце каждого шага нагружения вычисляется вектор P_σ узловых сил, статически эквивалентный полным значениям внутренних напряжений, находится вектор невязки как разность между полным вектором внешней нагрузки P и вектором P_σ , решение корректируется с учетом этой невязки.

Для иллюстрации возможностей предложенной методики рассчитан фрагмент железобетонной стены одного из сооружений атомной станции, в которой были обнаружены трещины и которой может потребоваться усиление. Оно может быть выполнено с использованием углеродных тканей [19]. Чтобы убедиться в достоверности получаемых результатов, в данной работе был рассчитан фрагмент стены в виде сильно вытянутой в одном направлении полосы, шарнирно опертой вдоль коротких сторон (рис. 3). Для сравнения был также выполнен расчет плиты без усиления композитом.

Конечно-элементная расчетная схема плиты приведена на рис. 4. Использовалась неравномерная сетка конечных элементов со сгущением к середине пролета. Сетка содержит три группы элементов 1, 2 и 3. Центральная группа 3 состоит из одного ряда элементов.

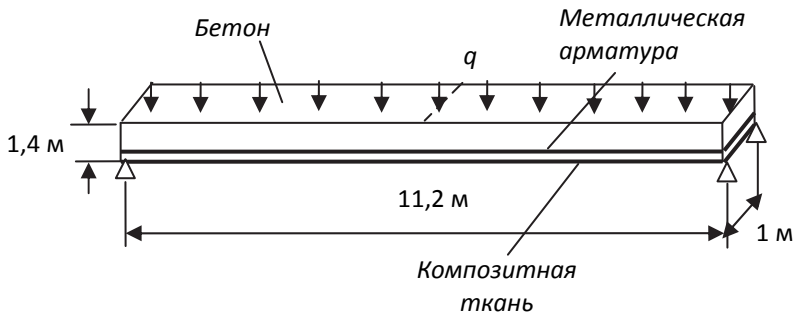


Рис. 3. Фрагмент железобетонной плиты, усиленной композитной тканью
 [Fig. 3. Fragment of reinforced concrete slab reinforced with composite fabric]

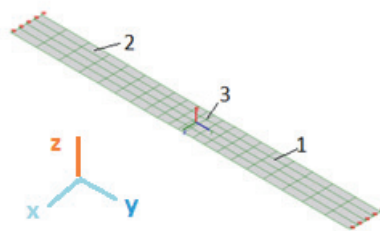


Рис. 4. Конечно-элементная расчетная схема плиты
 [Fig. 4. Finite element calculation scheme of slab]

Разбивка плиты на слои по толщине отражена в табл. 1. Слои 1, 12 и 29 имеют нулевую толщину. Слой 12 является базовым, а слои 1 и 29 – фиктивными. Фиктивные слои вводятся для получения возможности вывода напряжений на нижней и верхней поверхностях в постпроцессоре.

Таблица 1

**Характеристики слоев
[Layer characteristics]**

Номер слоя	Толщина, см	Материал
2–11	7	Бетон
13–22	6,25	Бетон
23	0,21	Сталь
24–25	3,5	Бетон
26–28	0,1	Композитная ткань

Использовались следующие материалы: бетон класса В20, арматура класса А400 и композитная ткань с однонаправленными волокнами. Для ткани принимались следующие характеристики: модуль упругости $E_K = 6,3 \times 10^7$ кПа, предел прочности $R_K = 7 \times 10^5$ кПа, остаточная деформация $\varepsilon_{ост} = 2\%$.

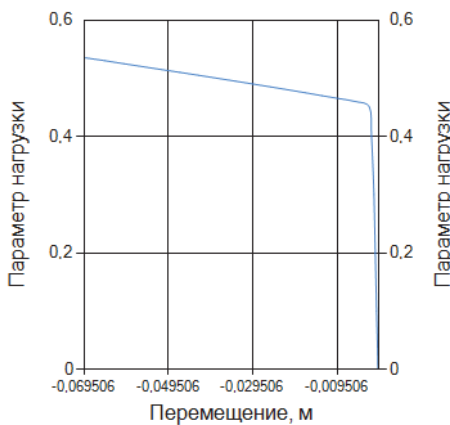
Плита нагружалась равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 100$ кПа. Множители нагрузки приведены в табл. 2.

Таблица 2

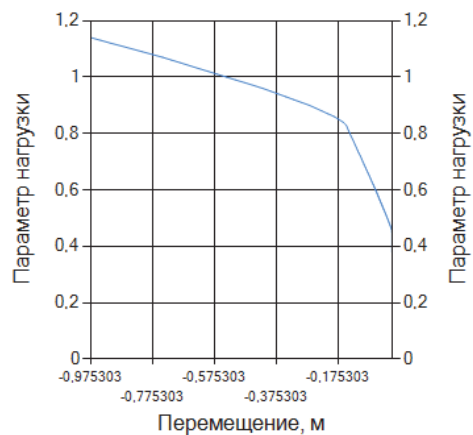
**Распределение нагрузки по шагам
[Load distribution by steps]**

Номер шага	1–16	17–32	33–40	41 и далее
Множитель нагрузки	0,1	0,05	0,025	0,01

На рис. 5 и 6 показаны кривые равновесных состояний для плиты без композитного усиления и с усилением.



**Рис. 5. Равновесная кривая для плиты без усиления
[Fig. 5. The equilibrium curve for plate without strengthening]**



**Рис. 6. Равновесная кривая для плиты с композитным усилением
[Fig. 6. The equilibrium curve for plate with composite strengthening]**

На рис. 7 и 8 приведены значения предельных моментов для двух вариантов расчета. Предельное состояние для плиты без усиления было достигнуто при нагрузке $q = 53$ кПа, а для усиленной плиты – при $q = 114$ кПа. Теоретическое значение изгибающих моментов при таких нагрузках составляет 831 кНм/м и 1788 кНм/м соответственно.

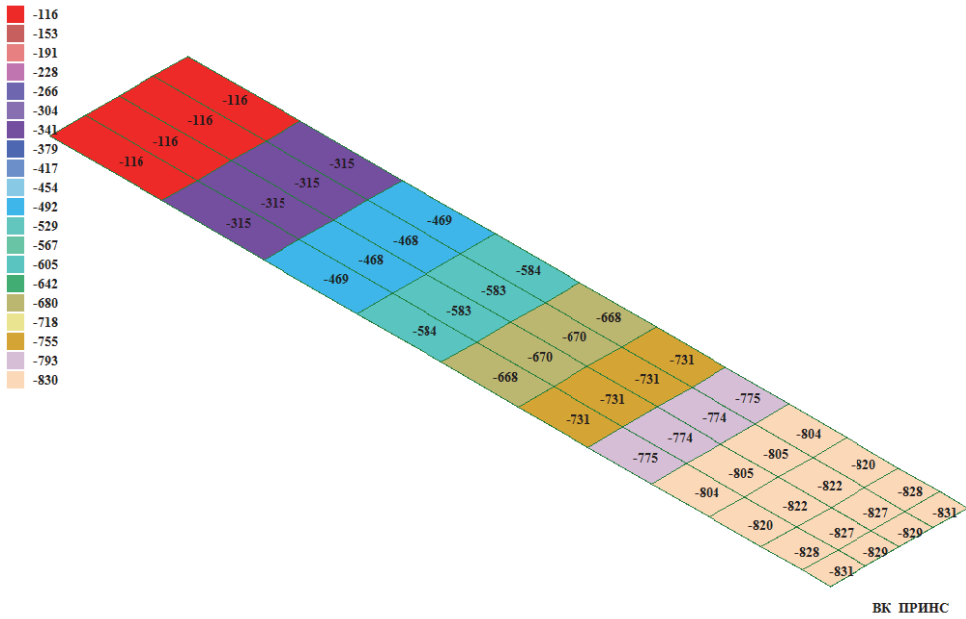


Рис. 7. Предельные изгибающие моменты для плиты без усиления
 [Fig. 7. Limit bending moments for a plate without strengthening]

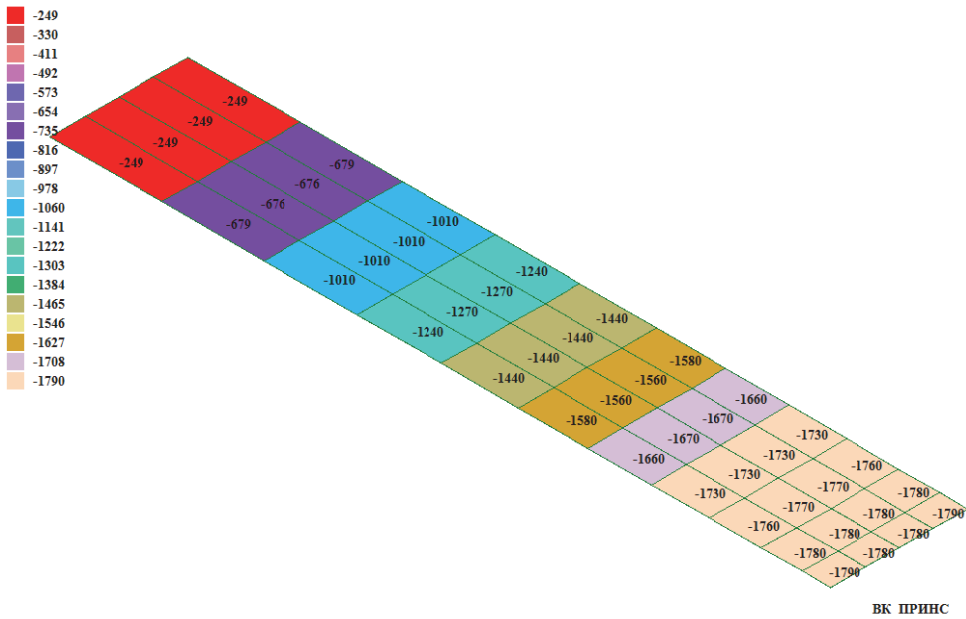


Рис. 8. Предельные изгибающие моменты для плиты с усилением
 [Fig. 8. Limit bending moments for a plate with strengthening]

Предельные значения моментов, найденные по программе ПРИНС, составили 830 кНм/м и 1790 кНм/м, что практически равно теоретическим значениям.

При принятом усилении плиты предельное значение изгибающего момента увеличилось по сравнению с исходным вариантом на 116%.

Следует отметить, что значения внутренних изгибающих моментов находятся в программе ПРИНС относительно срединной поверхности плиты.

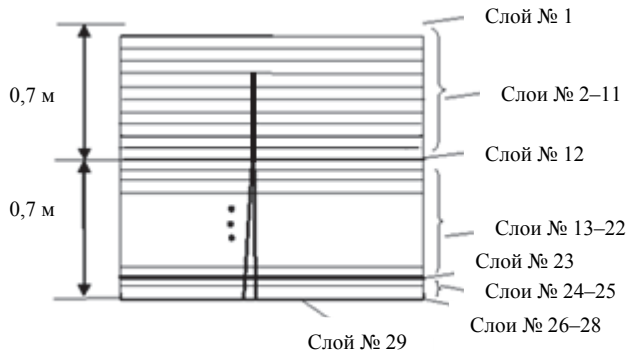


Рис. 9. Глубина трещины для плиты, усиленной композитом
[Fig. 9. The depth of a crack for a plate reinforced with a composite]

На рис. 9 показана глубина проникновения трещины для плиты, усиленной композитом, в состоянии, предшествующем разрушению.

При увеличении числа слоев композита в два раза предельная нагрузка достигла значения $q = 221$ кПа, т.е. увеличилась по сравнению с исходным вариантом на 93,8%.

В результате расчета определялись также усилия и напряжения в композитной ткани, исследовались процессы трещинообразования в бетоне и пластического деформирования арматуры. Размеры статьи не позволяют привести полученные результаты в полном объеме.

Выводы. Проведенные в настоящей работе исследования показали, что методика физически нелинейного расчета, реализованная в программе ПРИНС, дает возможность детально анализировать процессы деформирования железобетонных плит как с традиционным армированием, так и усиленных композитными тканями. Строгое соблюдение условий равновесия при сложном характере напряженного состояния, отмеченное в различных вариантах решения задач, свидетельствует о достоверности получаемых результатов. Программа ПРИНС доступна широкому кругу специалистов и может быть полезна при расчете и проектировании железобетонных плит.

© Агапов В.П., Николаев В.Б., Голованов Р.О., 2018

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. *Кальянова Е.Е.* Новые инновационные технологии: преимущества продуктов Sika // Строительство. 2014. № 8. С. 54–58.
2. FRP Repair Materials and Methods. Concrete International – 2005. Vol 27. № 1. P. 66.
3. *Cardolin A.* Carbon Fibre Reinforced Polymers for Strengthening of Structural Elements. Division of Structural Engineering, Department of Civil and Mining Engineering, Lulea University of Technology. Sweden, 2003. 194 p.

4. Чернявский В.Л., Аксельрод Е.З. Применение углепластиков для усиления железобетонных конструкций промышленных зданий // Промышленное и гражданское строительство. 2004. № 3. С. 37–38.

5. Рекомендации по применению тканевых композиционных материалов при ремонте железобетонных конструкций мостовых сооружений. Федеральное дорожное агентство (Росавтодор). М., 2013. 55 с.

6. Руководство по усилению железобетонных конструкций композитными материалами. М.: НИИЖБ, 2012. 48 с.

7. MSC NASTRAN 2016. Nonlinear User's Guide. SOL 400. MSC Software Corporation. 2016. 790 p.

8. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. М.: Изд-во «ДМК-Пресс», 2005. 637 с.

9. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia. 2011.

10. Nabil F. Grace, Singh S.B. Durability Evaluation of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Strengthened Concrete Beams: Experimental Study and Design // ACI Structural Journal. January-February, 2005. Vol 102. No 1. P. 40–53.

11. Бокарев С.А., Смердов Д.Н. Нелинейный анализ железобетонных изгибаемых конструкций, усиленных композиционными материалами // Вестник ТГАСУ. 2010. № 2. С. 113–125.

12. Cedolin L., Deipoli S. Finite element studies of shear-critical R/C beams // ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division. June 1977. Vol. 103. No. EM3. P. 395–410.

13. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p.

14. Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code, 1990. Thomas Telford House, London, 1993.

15. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: АСВ, 2005. 245 с.

16. Owen D.R.J., Figueiras J.A., Damjanic F. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1983. 41. P. 323–366.

17. Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rusch H., Behavior of concrete under biaxial stresses // ACI Journal Proceedings. August 1969. Vol. 66. No. 8. P. 656–666.

18. Chen W.F. Plasticity in Reinforced Concrete. McGraw-Hill. New York, 1982. 261 p.

19. Руководство по ремонту бетонных и железобетонных конструкций и гидротехнических сооружений атомных станций. ОАО «Концерн Росэнергоатом». М., 2012. 114 с.

Об авторах:

Агапов Владимир Павлович – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной механики и математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. *Область научных интересов:* расчет конструкций на прочность, устойчивость и колебания методом конечных элементов; разработка программного обеспечения прочностных расчетов. *Контактная информация:* e-mail – agarovpb@mail.ru

Николаев Валерий Борисович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, АО «Атомэнергопроект». *Область научных интересов:* теория массивных железобетонных конструкций энергетических сооружений. *Контактная информация:* e-mail – agarovpb@mail.ru

Голованов Роман Олегович – кандидат технических наук, доцент, кафедра прикладной механики и математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет. *Область научных интересов:* экспериментальные и расчетные исследования пространственных стержневых систем неканонической формы. *Контактная информация:* e-mail – agarovpb@mail.ru

Для цитирования:

Агапов В.П., Николаев В.Б., Голованов Р.О. Расчет железобетонных плит, усиленных композитными тканями, методом конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 120–131. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-120-131.

THE ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE SLABS STRENGTHENED BY COMPOSITE FABRICS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

V.P. AGAPOV*, V.B. NIKOLAEV**, R.O. GOLOVANOV*

* Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

**AO “Atomenergoproekt”
7 Bakuninskaya St., bldg. 1, Moscow, 107996, Russian Federation

(received: December 02, 2017; accepted: March 05, 2018)

The finite element method of calculation of reinforced concrete slabs strengthened with composite fabrics based on carbon fibers, implemented in the PRINS program, is considered. The method is designed for analyzing the stress-strain state of reinforced concrete structures when cracks in concrete and plastic deformations in the reinforcement arise. The calculation is carried out in increments, and at each stage of loading a variable stiffness matrix is used. Its constant part represents the stiffness matrix at the beginning of the loading stage, and the variable one is calculated taking into account the stress-strain state at the end of the current iteration. The variable part of the stiffness matrix, multiplied by the displacement vector found at the previous iteration, is transferred to the right side of the equation system and is considered to be an additional load. When cracks occur or when plastic strains appear, the stresses are corrected in accordance with the specified deformation diagrams. Therefore, at the end of the loading step the equilibrium conditions are checked. If necessary, the external and internal forces are balanced. When considering plastic deformations in concrete and reinforcement, the theory of plastic flow and the Huber – Mises yield criterion, modified taking into account the experimental studies of Kupfer et al., are used. An example of the reinforced concrete slab analysis with different variants of strengthening by composite and without strengthening is given. The results of the calculation are analyzed. The possibility of studying the stress-strain state throughout the entire path of loading of reinforced concrete slabs up to destruction is shown.

Keywords: reinforced concrete slabs, composite fabrics, finite element method, software

R e f e r e n c e s

1. Kalyanova E.E. (2014). Novyie innovatsionnyie tehnologii: preimuschestva produktov Sika [New innovative technologies: advantages of Sika products]. *Stroitelstvo*. No 8, 54–58. (In Russ.)
2. FRP Repair Materials and Methods. *Concrete International*. (2005), 27 (1), 66.
3. Cardolin A. (2003). Carbon Fibre Reinforced Polymers for Strengthening of Structural Elements. Division of Structural Engineering, Department of Civil and Mining Engineering, Lulea University of Technology, Sweden, 194. (In Russ.)
4. Chernyavskiy V.L., Akselrod E.Z. (2004). Primenenie ugleplastikov dlya usileniya zhelezobetonnyih konstruksiy promyshlennyih zdaniy [The use of carbon plastics to reinforce the reinforced concrete structures of industrial buildings]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo*, No 3, 37–38. (In Russ.)
5. Rekomendatsii po primeneniyu tkanevyih kompozitsionnyih materialov pri remonte zhelezobetonnyih konstruksiy mostovyih sooruzheniy. Federalnoe Dorozhnoe Agentstvo (Rosavtodor) [Recommendations on the use of fabric composite materials for the repair of reinforced concrete structures of bridge structures. Federal Road Agency (Rosavtodor)]. Moscow, 2013, 55. (In Russ.)

6. Rukovodstvo po usileniyu zhelezobetonnykh konstruktsiy kompozitnymi materialami [Guidelines for reinforcing reinforced concrete structures with composite materials]. NIIJB, (2012). Moscow, 48. (In Russ.)
7. MSC NASTRAN (2016). Nonlinear User's Guide. SOL 400. MSC Software Corporation, 790.
8. Basov K.A. (2005). ANSYS: Spravochnik polzovatelya [ANSYS. User's guide]. Moscow: "DMK-Press" Publ., 637. (In Russ.)
9. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia. 2011.
10. Nabil F. Grace and Singh S.B. (2005). Durability Evaluation of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Strengthened Concrete Beams: Experimental Study and Design. *ACI Structural Journal*. 102 (1), 40–53.
11. Bokarev S.A., Smerdov D.N. (2010). Nelineyniy analiz zhelezobetonnykh izgibaemykh konstruktsiy, usilennykh kompozitsionnymi materialami [Nonlinear analysis of reinforced concrete bending structures reinforced with composite materials]. *Vestnik TGASU*, No 2, 113–125. (In Russ.)
12. Cedolin L. and Deipoli S. (June 1977). Finite element studies of shear-critical R/C beams. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 103 (EM3), 395–410.
13. Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. (2005). The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 631.
14. Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code, 1990. Thomas Telford House, London, 1993.
15. Agapov V.P. (2005). Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti konstruktsiy [Finite Element Method in Static, Dynamics and Stability of Constructions]. Moscow: ASV Publ., 245. (In Russ.)
16. Owen D.R.J., Figueiras J.A. and Damjanic F. (1983). Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 41, 323–366.
17. Kupfer H., Hilsdorf H.K. and Rusch H. (August 1969). Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal Proceedings*. 66 (8), 656–666.
18. Chen W.F. (1982). *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, New York, 261.
19. Rukovodstvo po remontu betonnykh i zhelezobetonnykh konstruktsii i gidrotekhnicheskikh sooruzhenii atomnykh stantsii. OAO «Kontsern Rosenergoatom» [Guide to repair of concrete and reinforced concrete structures and hydraulic facilities of nuclear power plants. Rosenergoatom Concern]. (2012), Moscow, 114. (In Russ.)

About the author:

Vladimir P. Agapov – Dr. Sc. (Technical), Prof., Department of Applied Mechanics and Mathematics. Moscow State University of Civil Engineering (National Research University). Russia. *Research interests:* static, buckling and dynamic analysis of structures by finite element method; development of software for strength analysis. *Contact information:* e-mail – agapovpb@mail.ru

Valerii B. Nikolaev – Dr. Sc. (Technical), Prof., Chief Researcher, Atomenergoproekt. *Research interests:* theory of solid reinforced concrete structures. *Contact information:* e-mail – agapovpb@mail.ru

Roman O. Golovanov – Cand. Sc. (Technical), Associate Professor, National Research Moscow State University of Civil Engineering. *Research interests:* experimental and computational studies of spatial rod systems of noncanonical form. *Contact information:* e-mail – agapovpb@mail.ru

For citation:

Agapov, V.P., Nikolaev, V.B. Golovanov, R.O. (2018). The analysis of reinforced concrete slabs strengthened by composite fabrics by the finite element method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14 (2), 120–131. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-120-131.

РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

УДК 539.376

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-132-141

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИНЧАТЫХ СИСТЕМ ПРИ СЖАТИИ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

С.П. ИВАНОВ*,**, О.Г. ИВАНОВ*,**, А.С. ИВАНОВА*

*Поволжский государственный технологический университет
*пл. Ленина, 3, Йошкар-Ола, Россия, 424000***Марийский государственный университет
*пл. Ленина, 1, Йошкар-Ола, Россия, 424000**(поступила в редакцию: 10 сентября 2017 г.; принята к публикации: 05 марта 2018 г.)*

В работе представлен метод расчета на динамическую устойчивость пластинчатых систем с несмещающимися ребрами. Рассмотрена пластинчатая система, на которую в двух взаимно перпендикулярных направлениях действуют динамические сжимающие нагрузки. В основе расчетов учитываются гипотезы Кирхгофа – Лява, гипотеза о нелинейно-упругом теле. Материал пластинчатой системы принимается физически нелинейным, диаграмма деформирования аппроксимируется в виде кубического полинома. Перемещение точек в нормальном направлении к срединной плоскости пластин представлено в виде разложения по Власову. Для вывода основных дифференциальных уравнений устойчивости используется энергетический метод и вариационный метод Власова. Экстремальное значение полной энергии системы определяется с использованием уравнения Эйлера – Лагранжа, после раскрытия которого получена система основных нелинейных дифференциальных уравнений для исследования потери устойчивости пластинчатой системы с несмещающимися ребрами под действием динамических сжимающих нагрузок. В качестве примера выполнен расчет на устойчивость физически нелинейной Т-образной пластинчатой системы, края которой закреплены шарнирно по контуру. Потеря устойчивости пластинчатой системы в продольном направлении происходит по одной полуволне синусоиды. При решении задачи в первом приближении выведено нелинейное дифференциальное уравнение, численное интегрирование которого проводилось методом Рунге – Кутты. По результатам расчетов построены графики зависимости относительной величины прогиба от динамического коэффициента. Исследовано влияние на динамический критерий потери устойчивости пластинчатой системы степени физической нелинейности материала, скорости изменения динамической сжимающей нагрузки и других параметров.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, физическая нелинейность, пластина, пластинчатая система, сжимающая нагрузка, энергетический метод, вариационный метод Власова

Исследование устойчивости пространственных пластинчатых систем (тонкостенных конструкций) – одна из важных проблем строительной механики. К настоящему моменту в области расчетов на устойчивость тонкостенных конструкций накоплен значительный опыт: построено большое число математических моделей деформирования пластин и оболочек, разработаны эффективные аналитические и численные методы решения задач. Но, несмотря на достиже-

ния в теории и практике, имеется еще много нерешенных вопросов. Проблеме расчета на устойчивость пластин и оболочек при статических и динамических воздействиях посвящены работы многих авторов [1–7].

Цель настоящей работы заключается в разработке метода расчета на устойчивость пластинчатых систем с несмещающимися ребрами под действием динамических сжимающих нагрузок в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рассматривается общий случай действия сжимающих нагрузок) с учетом физической нелинейности материала.

Рассмотрим пластинчатую систему (рис. 1), на которую в двух взаимно перпендикулярных направлениях действуют сжимающие нагрузки $P(t)$ и $\alpha P(t)$. Динамическая нагрузка $P(t)$ прикладывается к ребрам пластинчатой системы в поперечном направлении, $\alpha P(t)$ – в продольном направлении, $\alpha = 1, 2, \dots, n$.

Принимаем, что сжимающая нагрузка быстро изменяется во времени t по следующему закону:

$$P(t) = s \cdot t, \tag{1}$$

где s – величина, характеризующая скорость изменения динамической нагрузки.

Обозначаем: $w = w(x, y, t)$ – перемещение точек в нормальном направлении к срединной плоскости пластин.

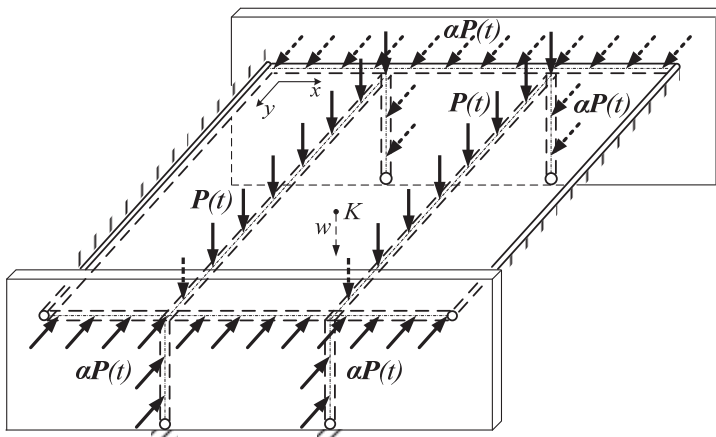


Рис. 1. Общая схема пластинчатой системы с действующими нагрузками [Fig. 1. General diagram of plate system under the action of loads]

Результаты испытаний различных конструкционных материалов (композитов, сплавов, цветных металлов) показывают, что для таких материалов характерна физическая нелинейность, т.е. они имеют нелинейную диаграмму деформирования. Зависимость между интенсивностями напряжений σ_i и интенсивностями деформаций e_i можно принять в виде кубического полинома:

$$\sigma_i = E \cdot e_i - E_1 e_i^3, \tag{2}$$

где E – начальный модуль упругости материала; E_1 – постоянная, учитывающая степень физической нелинейности материала [8].

В основе расчетов используем гипотезы Кирхгофа – Лява и гипотезу о нелинейно-упругом теле.

Принимаем соотношения между деформациями и перемещениями в виде

$$\varepsilon_x = -z\chi_x; \quad \varepsilon_y = -z\chi_y; \quad \varepsilon_{xy} = -2z\chi_{xy}, \tag{3}$$

$$\text{где } \chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Определяем интенсивность деформаций e_i и объемную деформацию θ (с учетом гипотез Кирхгофа – Лява и сжимаемости материала ($\sigma_z = 0$, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{yz} = 0$)):

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2}, \quad (4)$$

$$\theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad (5)$$

где деформация

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (6)$$

Используем энергетический метод. Записываем выражение полной энергии системы:

$$L = \Pi + \Gamma, \quad (7)$$

где потенциальную энергию Π определяем по формуле

$$\Pi = \iint \left[A - \frac{1}{2} P(t) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \alpha P(t) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + q \cdot w \right] dx dy, \quad (8)$$

кинетическая энергия равна:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho \cdot \delta}{g} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy. \quad (9)$$

В выражениях (8), (9) введены следующие обозначения: ρ – объемный вес материала; δ – толщина элементов, составляющих пластинчатую систему; g – ускорение свободного падения; $P(t)$ и $\alpha P(t)$ – динамические сжимающие нагрузки; q – интенсивность нагрузки, которая действует в нормальном направлении к срединной плоскости пластин и позволяет учитывать начальное несовершенство системы; A – работа внутренних сил, отнесенная к единице площади поверхности пластинчатой системы, определяющаяся так:

$$A = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \Phi dz. \quad (10)$$

Здесь Φ – удельная энергия изменения объема и формы [9]:

$$\Phi = \frac{1}{2} K \cdot \theta^2 + \frac{2}{3} \int_0^{e_i} (1+\nu) \cdot \sigma_i \cdot de_i, \quad (11)$$

где $K = E/[3(1-2\nu)]$ – модуль объемного сжатия; ν – коэффициент Пуассона.

Перемещение w представим в виде разложений по В.З. Власову [10]:

$$w(x, y, t) = \sum_k W_k(t) f_k(x, y), \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (12)$$

где обобщенные перемещения $W_k(t)$ – функции, которые определяются из решения задачи и зависят от переменной t (t – время). Выбор координатных функций $f_k(x, y)$ осуществляется по виду деформированного состояния системы.

Учитывая соотношение (12), определяем минимум функционала (7), составляя для него уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial W_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial W_{k,t}} = 0, \quad (13)$$

где индексы после запятой обозначают частные производные от обобщенных перемещений по соответствующим переменным.

После раскрытия уравнения (13) приходим к системе нелинейных дифференциальных уравнений для исследования устойчивости пластинчатых систем (под действием динамических сжимающих нагрузок $P(t)$ и $\alpha P(t)$):

$$\sum_k \left[a_{ik} \left(1 - \frac{\alpha P(t)}{a^* D} \right) - 2b_{ik} + c_{ik} \left(1 - \frac{P(t)}{l^* D} \right) \right] \cdot W_k + \frac{\rho}{g \cdot D} \sum_k d_{ik} W_{k,tt} - G_i = \Phi_i^{нел.}, \quad (14)$$

где a^* – длина контура пластинчатой системы, на который действует нагрузка $\alpha P(t)$; l^* – суммарная длина ребер пластинчатой системы, на которые действует нагрузка $P(t)$; D – цилиндрическая жесткость пластин системы; G_i – величина нагрузки, которая позволяет учитывать начальное несовершенство системы.

Величины D и G_i определяются по формулам:

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}, \quad G_i = \iint_{x y} \frac{q}{D} f_i dx dy. \quad (15)$$

Правая часть уравнений (14) $\Phi_i^{нел.}$ учитывает физическую нелинейность материала и имеет вид:

$$\Phi_i^{нел.} = \iint_{x y} N_{1,xx} f_i dx dy + \iint_{x y} N_2 f_{i,yy} dx dy - \iint_{x y} N_{3,x} f_i dx dy, \quad (16)$$

где $N_{i,x} = \partial N_i / \partial x$; $N_{i,xx} = \partial^2 N_i / \partial x^2, \dots$; $i = 1, 2, 3$.

Величины N_1, N_2, N_3 в выражении (16) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} N_1 &= D \cdot c \cdot (\nu_1 \chi_x + 0,5\nu_2 \chi_y); \\ N_2 &= D \cdot c \cdot (\nu_1 \chi_y + 0,5\nu_2 \chi_x); \\ N_3 &= D \cdot c \cdot \chi_{xy}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $D = 0,9E_2 \cdot \delta^2$; $E_2 = \frac{E_1 \cdot (1-\nu)}{E \cdot (1+\nu)^2}$; $c = \nu_1(\chi_x^2 + \chi_y^2) + \nu_2 \chi_x \chi_y + \chi_{xy}^2$;

$$\nu_1 = \frac{1}{3} \left[\frac{\nu}{(1+\nu)^2} + 1 \right]; \quad \nu_2 = \frac{1}{3} \left[\frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1 \right].$$

Коэффициенты уравнения (14) записываются в виде:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \iint_{y x} f_{k,xx} f_{i,xx} dx dy; & b_{ik} &= \iint_{y x} f_{k,xy} f_{i,xy} dx dy; \\ c_{ik} &= \iint_{y x} f_{k,yy} f_{i,yy} dx dy; & d_{ik} &= \iint_{y x} f_k f_i dx dy. \end{aligned} \quad (18)$$

В качестве примера выполним расчет на устойчивость Т-образной пластинчатой системы под действием динамических сжимающих нагрузок $P(t)$ и $\alpha P(t)$ в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 2). Края пластинчатой системы закреплены шарнирно по контуру. Геометрические параметры: толщина пластин $\delta = 0,1a$; длина $l = a$.

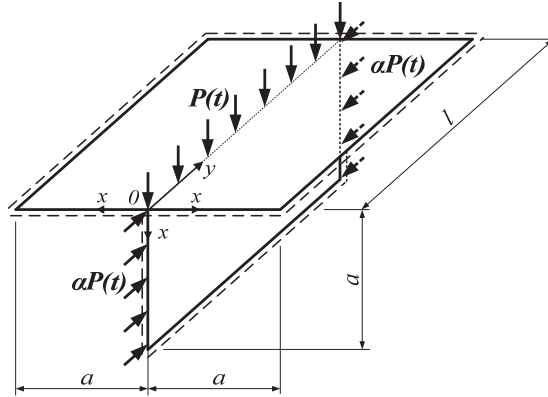


Рис. 2. Схема Т-образной пластинчатой системы
 [Fig. 2. The diagram of T-shaped plate system]

При решении задачи в первом приближении, согласно граничным условиям, координатная функция (форма потери устойчивости в поперечном направлении x) (рис. 3) имеет вид

$$f_1(x) = \frac{x}{a} \left(-1 + \frac{3x}{2a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (19)$$

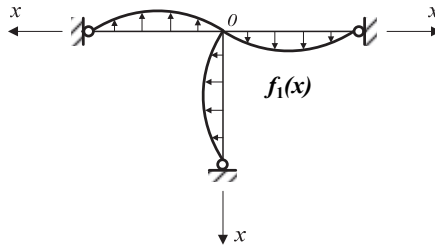


Рис. 3. Вид координатной функции
 [Fig. 3. Formula for a coordinate function]

При потере устойчивости в продольном направлении y по одной полуволне синусоиды прогибы определяются по формуле

$$w(x, y, t) = W_1(t) f_1(x, y) = W_1(t) \frac{x}{a} \left(-1 + \frac{3x}{2a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right) \sin \frac{\pi y}{l}. \quad (20)$$

Тогда дифференциальное уравнение (14) принимает следующий вид

$$\left[a_{11} \left(1 - \frac{\alpha P(t)}{a \cdot D} \right) - 2b_{11} + c_{11} \left(1 - \frac{P(t)}{l \cdot D} \right) \right] \cdot W_1 + \frac{\rho}{g \cdot D} d_{11} W_{1,tt} - G_1 = \Phi_1^{hel}. \quad (21)$$

Вводим обозначение для параметра времени:

$$t^* = \frac{P(t)}{P_{кр}} = \frac{st}{P_{кр}}. \quad (22)$$

Для пластинчатой системы, составленной из квадратных пластин ($l = a$), величина погонной статической критической нагрузки составляет [11]

$$P_{кр.} = \frac{P_{кр.}}{a} = 23,5 \frac{D}{a^2}. \quad (23)$$

Параметр времени t^* принимаем за динамический коэффициент K_δ . После преобразований дифференциальное уравнение (21) запишем с новой переменной t^* в виде

$$\left[1 - K_1(1 + \alpha) \cdot t^*\right] \cdot W_1 + \frac{1}{S^*} W_{1,t^* t^*} = Q + K \cdot W_1^3, \quad (24)$$

где приняты следующие обозначения:

$$K_1 = \frac{(a_{11} + c_{11}) \cdot P_{кр}}{a \cdot (a_{11} - 2b_{11} + c_{11}) \cdot D}; \quad K = \frac{\Phi_1^{нел.}}{a_{11} - 2b_{11} + c_{11}}; \quad (25)$$

$$S^* = \frac{(a_{11} - 2b_{11} + c_{11}) \cdot g \cdot D \cdot P_{кр}^2}{\rho \cdot d_{11} \cdot s^2}; \quad Q = \frac{G_1}{a_{11} - 2b_{11} + c_{11}}.$$

Величину $\Phi_1^{нел.}$ определяем, используя формулы (16) и (17), а коэффициенты уравнения (21) вычисляем по формулам (18).

Интегрирование дифференциального уравнения (24) выполнено численным методом Рунге – Кутты на ПЭВМ.

По результатам расчетов построены графики зависимости относительной величины прогиба $W^* = W_1 / \delta$ от динамического коэффициента $K_\delta = t^*$ (при различных значениях параметров E_1/E , S^* , α) (рис. 4, табл. 1). Для всех графиков параметр $Q = 0,0001$.

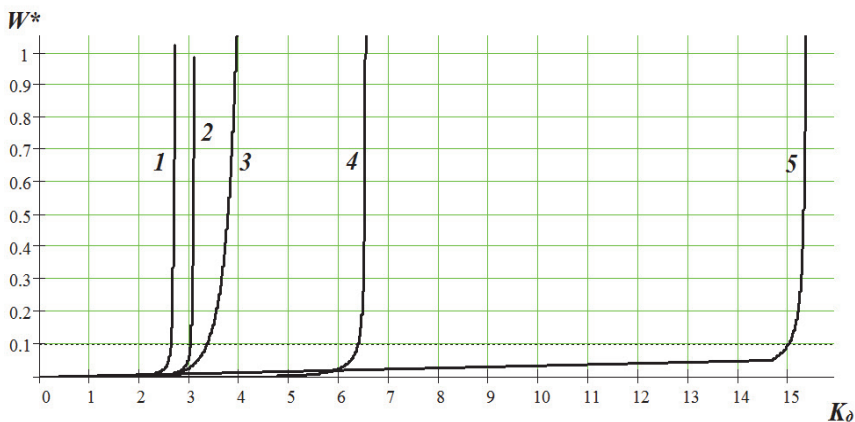


Рис. 4. Графики зависимости относительной величины прогиба W^* от динамического коэффициента K_δ
[Fig. 4. Graphs of the relative magnitude of deflection W^* against the dynamic coefficient K_δ]

Таблица 1

Номер графика [Graph number]	Степень физической нелинейности [Degree of physical nonlinearity] E_1/E	Коэффициент [Coefficient] α	Параметр [Parameter] S^*	Динамический коэффициент K_D при $W^* = 0,1$ [Dynamic coefficient K_D at $W^* = 0,1$]
1	$5 \cdot 10^6$	2	10	$\approx 2,7$
2	10^6	1	10	$\approx 3,0$
3	10^3	1	1,0	$\approx 3,4$
4	10^6	1	0,1	$\approx 6,5$
5	10^6	0	0,1	$\approx 15,0$

Рассмотрим влияние на критерии динамической устойчивости пластинчатой системы степени физической нелинейности материала, параметра S^* (зависит от скорости изменения сжимающей нагрузки), величины коэффициента α .

С увеличением степени физической нелинейности материала график зависимости W^* от K_D смещается влево, т.е. динамический коэффициент K_D уменьшается (см. графики 3, 2, 1 на рис. 4). Таким образом, чем больше степень физической нелинейности материала, тем меньше динамическая «критическая» нагрузка, т.е. при меньшем значении динамической нагрузки $P(t)$ происходит бурное выпучивание пластин системы.

При уменьшении параметра S^* от 10 до 0,1 (что соответствует увеличению скорости изменения динамической нагрузки в 10 раз при прочих равных условиях) динамический коэффициент K_D увеличивается от 3,0 до 6,5 при $W^* = 0,1$ (сравниваем графики 2 и 4 на рис. 4).

Если сжимающая динамическая нагрузка $P(t)$ действует только в одном направлении (при $\alpha = 0$, см. график 5), то динамический коэффициент принимает в несколько раз большее значение ($K_D \approx 15$ при $W^* = 0,1$), чем при действии $P(t)$ и $\alpha P(t)$ в двух направлениях (при прочих равных условиях, см. график 4).

Выводы. Разработанный метод позволяет рассчитывать на устойчивость пластинчатой системы с несмещающимися ребрами под действием динамических сжимающих нагрузок в двух направлениях, учитывая физическую нелинейность материала. Из результатов проведенных исследований видно, что на критерии динамической устойчивости пластинчатой системы значительное влияние оказывают скорость изменения динамической сжимающей нагрузки и степень физической нелинейности материала.

© Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С., 2018

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. Трушин С.И., Журавлева Т.А., Сысоева Е.В. Динамическая потеря устойчивости нелинейно деформируемых сетчатых пластин из композиционного материала с различными конфигурациями решетки // Научное обозрение. 2016. № 4. С. 44–51.
3. Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads // Composite Structures. 2015. Vol. 127. P. 356–368.

4. *Nazarimofrad E., Barkhordar A.* Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23. № 10. P. 1144–1148.
5. *Хамитов Т.К., Фатыхова Р.Р.* Об устойчивости упругопластической цилиндрической оболочки при продольном ударе // *Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета*. 2016. № 4 (38). С. 490–496.
6. *Cao G., Chen Z., Yang L., Fan H., Zhou F.* Analytical Study on the Buckling of Cylindrical Shells With Arbitrary Thickness Imperfections Under Axial Compression // *Journal of Pressure Vessel Technology Transactions of the ASME*. 2014. Vol 137. № 1. DOI: 10.1115/1.4027179.
7. *Трушин С.И., Журавлева Т.А., Сысоева Е.В.* Устойчивость нелинейно деформируемых цилиндрических оболочек из композиционного материала при действии неравномерных нагрузок // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2013. № 2. С. 3–10.
8. *Иванов С.П., Иванова А.С.* Приложение вариационного метода В.З. Власова к решению нелинейных задач пластинчатых систем: монография. Йошкар-Ола: ПГТУ, 2015. 248 с.
9. *Лукаш П.А.* Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
10. *Власов В.З.* Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат, 1958. 502 с.
11. *Иванов С.П., Иванова А.С.* Статическая устойчивость пластин и пластинчатых систем с несмещающимися ребрами при сжатии в двух направлениях // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2015. № 4. С. 63–67.

Об авторах:

Иванов Сергей Павлович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет; профессор кафедры электромеханики, Марийский государственный университет. Опубликовал 147 научных статей, 2 монографии, 4 учебника, 20 наименований учебно-методической литературы. *Область научных интересов:* расчеты на прочность, устойчивость и колебания физически и геометрически нелинейных стержней, пластин и пластинчатых систем. *Контактная информация:* e-mail – sp-ivanov@mail.ru

Иванов Олег Геннадьевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет. Опубликовал 35 научных статей, 1 монографию и 6 наименований учебно-методической литературы. *Область научных интересов:* расчеты на прочность и устойчивость физически нелинейных пластин и пластинчатых систем, контактирующих с упругой средой. *Контактная информация:* e-mail – IvanovOG@volgatche.net

Иванова Анастасия Сергеевна – аспирант, старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет. Научный руководитель – д.т.н., проф. С.П. Иванов, Поволжский государственный технологический университет. В настоящее время работает над кандидатской диссертацией «Динамическая устойчивость физически нелинейных стержней, пластин и пластинчатых систем» по специальности 05.23.17 – Строительная механика. Опубликовала 15 научных статей и 1 учебное пособие. *Область научных интересов:* расчеты на устойчивость физически нелинейных стержней, пластин и пластинчатых систем. *Контактная информация:* e-mail – ivanova-a-s@list.ru

Для цитирования:

Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Динамическая устойчивость физически нелинейных пластинчатых систем при сжатии в двух направлениях // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2018. Т. 14. № 2. С. 132–141. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-132-141.

References

1. Volmir, A.S. (1967). *Stability of deformable systems*, Moscow: Science, 984 p. (In Russ.)
2. Trushin, S.I., Zhuravleva, T.A., Sysoeva, E.V. (2016). Dynamic buckling of nonlinearly deformable reticulate plates from composite material with different lattice configurations, *Nauchnoe Obozrenie*, No 4, p. 44–51. (In Russ.)

3. Vescovini, R., Dozio, L. (2015). Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads, *Composite Structures*, Vol. 127, p. 356–368.
4. Nazarimofrad, E., Barkhordar, A. (2016). Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 23, No 10, p. 1144–1148.
5. Khamitov, T.K., Fatykhova, R.R. (2016). On stability of elastic-plastic cylindrical shell under longitudinal impact, *News of the Kazan State University of Architecture and Engineering*, No 4 (38), p. 490–496. (In Russ.)
6. Cao, G., Chen, Z., Yang, L., Fan, H., Zhou, F. (2015). Analytical study on the buckling of cylindrical shells with arbitrary thickness imperfections under axial compression, *Journal of Pressure Vessel Technology Transactions of the ASME*, Vol. 137, No 1.
7. Trushin, S.I., Zhuravleva, T.A., Sysoeva, E.V. (2013). The stability of nonlinear deformable cylindrical composite shells under non-uniform loads, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 2, p. 3–10. (In Russ.)
8. Ivanov, S.P., Ivanova, A.S. (2015). *Prilozheniye variacionnogo metoda V.Z. Vlasova k resheniyu nelineynykh zadach plastinchatykh sistem*: Monographiya, Yoshkar-Ola: PGTU, 248 p. (In Russ.)
9. Lukash, P.A. (1978). *Osnovy nelinejnoj stroitel'noj mekhaniki*, Moscow: Strojizdat, 204 p. (In Russ.)
10. Vlasov, V.Z. (1958). *Tonkostennye prostranstvennyye sistemy*, Moscow: Gosstrojizdat, 502 p. (In Russ.)
11. Ivanov, S.P., Ivanova, A.S. (2015). The static stability of plates and plate systems with nonshifting ribs under biaxial compression, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, No 4, p. 63–67. (In Russ.)

THE DYNAMIC STABILITY OF PHYSICALLY NONLINEAR PLATE SYSTEMS UNDER BIAXIAL COMPRESSION

S.P. IVANOV*;** , O.G. IVANOV*;** , A.S. IVANOVA*

*Volga State University of Technology
3 Lenin Sq., Yoshkar-Ola, 424000, Russian Federation

**Mari State University
1 Lenin Sq., Yoshkar-Ola, 424000, Russian Federation

(received: September 10, 2017; accepted: March 05, 2018)

The article presents the method of dynamic stability analysis of plate systems with non-shifting ribs. A plate system under the biaxial dynamic compression loads is considered. The Kirchhoff – Love hypotheses, the nonlinear-elastic body hypothesis are considered the basis of the calculations. The material of the plate system is assumed to be physically nonlinear, stress-deformation diagram is approximated in the form of a cubic polynomial. The displacement of points in normal direction to middle plane of plates is presented in the form of Vlasov expansion. To derive the basic differential equations of stability, the strain-energy method and Vlasov's variation method are used. The extreme value of total energy of the system is defined using Euler – Lagrange equation, after solving of which the set of basic nonlinear differential equations of buckling of the plate system with non-shifting ribs under dynamic compression loads is given. As an example, the stability calculation of physically nonlinear T-shaped plate system hinge-supported along the contour is carried out. Buckling of the plate system occurs longitudinally on one half-wave of sinusoid. At the solution of a task in the first approximation, a nonlinear differential equation is derived, the numerical integration of which was carried out by the Runge – Kutta method. Based on the results of the calcu-

lations, graphs of the relative magnitude of deflection against the dynamic coefficient are plotted. The influence of the degree of physical nonlinearity of the material, the rate of change of the dynamic compressive load on the dynamic criterion of buckling of the plate system was studied.

Keywords: dynamic stability, physical nonlinearity, plate, plate system, compression load, strain-energy method, variation method of Vlasov

About the authors:

Ivanov Sergey Pavlovich – Doctor of Science, Professor, Head of Department of Strength of Materials and Applied Mechanics, the Volga State University of Technology; Professor of Department of Electro-Mechanics, the Mari State University. He is the author of 147 scientific articles, 2 monographs, 4 textbooks, 20 names of educational literature. *General research interests:* strength, stability and vibrations analyses of the physically and geometric nonlinear rods, plates and plate systems. *Contact information:* 3 Lenin Sq., Yoshkar-Ola, 424000, the Republic of Mari El, Russia, e-mail – sp-ivanov@mail.ru

Ivanov Oleg Gennadevich – Cand. Sc, Assistant Professor, Associate Professor of the Department of Strength of Materials and Applied Mechanics, the Volga State University of Technology. He is the author of 35 scientific articles, 1 monograph, 6 names of educational literature. *General research interests:* strength and stability analyses of the physically nonlinear plates and plate systems resting on elastic foundation. *Contact information:* 3 Lenin Sq., Yoshkar-Ola, 424000, the Republic of Mari El, Russia, e-mail – IvanovOG@volgatech.net

Ivanova Anastasia Sergeevna – Aspirant, Senior Lecturer of the Department of Strength of Materials and Applied Mechanics, the Volga State University of Technology. At the present time she works on the Candidate's dissertation «The dynamic stability of physically nonlinear rods, plates and plate systems» in the specialty 05.23.17 – Structural Mechanics. She is the author of 15 scientific articles, 1 name of educational literature. *General research interests:* stability analyses of the physically nonlinear rods, plates and plate systems. *Contact information:* e-mail – ivanova-a-s@list.ru

For citation:

Ivanov, S.P., Ivanov, O.G., Ivanova, A.S. (2018). The dynamic stability of physically nonlinear plate systems under biaxial compression. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14 (2), 132–141. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-132-141.

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

УДК 626-31

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-142-153

СОПРЯЖЕНИЕ ВИХРЕВОГО ВОДОСБРОСА С НИЖНИМ БЬЕФОМ ПУТЕМ ОТБРОСА СТРУИ

Н.К. ПОНОМАРЕВ, Л.Е. ЩЕСНЯК

Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198*(поступила в редакцию: 01 декабря 2017 г.; принята к публикации: 05 марта 2018 г.)*

В современной практике гидротехнического строительства напоры гидроузлов достигают $H \geq 200$ м. В этих условиях наиболее эффективным водосбросным сооружением является вихревой шахтный водосброс. В данной статье авторы рассматривают сопряжение закрученного потока на выходе из отводящего водовода с нижним бьефом путем отброса струи с остаточной закруткой. В схеме с отбросом струи остаточная закрутка потока при выпуске из вихревого водосброса способствует расширению струи в воздухе, уменьшению удельного расхода, а также уменьшает динамические нагрузки на нижний бьеф. Проведено сравнение со струей, отброшенной с носка водосливной плотины, при одинаковых скоростных параметрах (т.е. при скорости на носке 20–25 м/с). Получена формула, достаточно просто определяющая плановое очертание отброшенной струи. Предложена схема сопряжения струи с поверхностью нижнего бьефа, а также расчетная схема к определению удельных расходов ниспадающей закрученной струи. Отброс закрученной струи от сооружения позволяет избежать недостатков, возникающих при схеме с длинным отводящим водоводом, связанных с высокой динамической нагрузкой при распаде течения в пределах проточного тракта, и погасить механическую энергию потока путем его аэрации и распыления в атмосфере, а также в месте падения в воронке размыва на дне нижнего бьефа.

Ключевые слова: вихревой шахтный водосброс, параметр закрутки, остаточная закрутка, нижний бьеф, число Фруда, водовоздушная смесь, тангенциальная скорость, отброс струи

Введение. Конструкция вихревого шахтного водосброса связана с высокими напорами и скоростями сбросного потока. В этих условиях возникает опасность размыва русла нижнего бьефа и кавитационных разрушений бетонных поверхностей сооружений. Как следствие осложняются технические проблемы сопряжения с нижним бьефом, решение которых требует новых подходов. К числу основных проблем относятся: защита русла реки и береговых склонов от обрушения и защита обтекаемой бетонной поверхности от кавитации [1–3]. Необходимо оценивать условия сопряжения вихревого шахтного водосброса с нижним бьефом с учетом особенностей выпускаемого из сооружения потока, как то: наличия остаточной закрутки, больших удельных расходов ($q = 200\text{--}250 \text{ м}^3/\text{с}$), сравнительно умеренной для высоконапорных сооружений средней продольной скорости на выходе из отводящего водовода ($V_{cp} = 20\text{--}25 \text{ м/с}$) после гашения избыточной энергии потока внутри сооружения.

В этой статье авторы рассматривают сопряжение потока путем отброса струи с носка отводящего водовода (рис. 1).

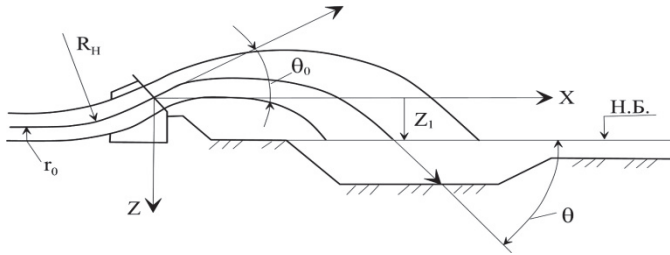


Рис. 1. Схема отброса струи
[Fig. 1. Jet drop scheme]

В схеме с отбросом струи остаточная закрутка потока при выпуске из водосброса играет положительную роль, способствуя расширению струи после выхода из вихревого водосброса и уменьшению удельных расходов, а также воздействует на нижний бьеф после расширения струи в воздухе, что уменьшает динамические нагрузки. В последнем случае с нижним бьефом взаимодействует водовоздушная смесь (с малым удельным весом и плотностью) по расширенной площади, которая до 20–25 раз (при $\Pi = 0,35$) может превосходить первоначальную площадь живого сечения струи. Столь интенсивное расширение связано с вынужденным движением частиц по касательному направлению к окружности, на которой они вращались до выхода из отводящего водовода. Такое движение обусловлено тем, что после выхода из отводящего водовода оно продолжается в воздушной среде с существенно меньшей плотностью ρ и динамической вязкостью μ .

Заметим, что методы расчета рассматриваемых струй отсутствуют. Здесь правомерно также использовать инженерный метод расчета применительно к вихревым водосбросам, который приводится ниже.

Сопряжение вихревого водосброса с нижним бьефом путем отброса струи.

Рассмотрим модель струи. Положим, что расширяющееся пространство струи заполняется водовоздушной смесью с плотностью, уменьшающейся вдоль продольной оси. В струю проникает воздух через ее боковые границы, который смешивается с частицами жидкости, образуя двухфазную среду – водовоздушную смесь.

Вследствие трения о воздух скорость частиц жидкости уменьшается. Влияние трения можно учесть с помощью поправочного коэффициента K в соответствующих формулах. К ним относятся формулы, содержащие продольную скорость, которая в 3–5 раз превосходит скорость в касательном направлении [10].

Свойства жидкости в струе существенно отличаются от свойств воды в отводящем канале. Будем полагать, что процесс расширения струи после выхода из вихревого водосброса и насыщения ее воздухом определяется в основном остаточной закруткой Π , а дополнительный эффект от влияния на этот процесс распада осевой струи при отсутствии закрутки идет в запас прочности (его в первом приближении можно не учитывать).

Погрешность принятия такой предпосылки можно оценить по увеличению площади поперечного сечения в конце струи при наличии закрутки и без нее.

Можно предположить, что влияние от распада осевой струи без закрутки на рассматриваемые процессы незначительно.

Проведем сравнение со струей, отброшенной с носка водосливной плотины. Для такой струи [2] рекомендуется принимать $K = 1,0$ при числах Фруда $Fr < 35$ и $K = 0,8–0,9$ – при числах Фруда $Fr > 35$. В нашем случае числа Фруда незначительны и изменяются в пределах $Fr = 5–10$. Однако учитывая, что струя с остаточной закруткой расширяется более интенсивно (и следовательно трение о воздух увеличивается), можно, несмотря на небольшие числа Фруда, принять значения $K = 0,9–0,95$.

При отбросе струи с носка водосливной плотины без закрутки потока (т.е. при скорости на носке $V = 20–25$ м/с) она расширяется менее интенсивно, что существенно меньше, чем для струи с остаточной закруткой.

Сформулируем требования к выходному участку отводящего водовода вихревого водосброса – начальному участку струи, которые можно свести к следующему:

1) отметка дна выходного сечения приподнятого носка должна быть не менее отметки потолка горизонтального конечного участка отводящего водовода (рис. 1) – для исключения смены режимов работы (напорного – безнапорного) при регулировании сбросных расходов и для облегчения условий выпуска воздуха. Эти режимы подлежат специальному рассмотрению;

2) угол наклона оси водовода в конце носка к горизонту должен составлять $\theta_0 = 30^\circ–35^\circ$ – для обеспечения максимального отброса струи;

3) радиус закругления оси водовода на носке должен находиться в пределах $R_H / r_0 \geq 3,0–4,0$ (r_0 – радиус отводящего водовода) – для обеспечения угла наклона струи к горизонту, равного углу наклона оси водовода θ_0 [2];

4) остаточная закрутка на выходе из отводящего водовода должна составлять $\Pi = 0,1–0,35$ (Π – параметр закрутки [1], характеризующий остаточную закрутку) и находится из расчета вихревого водосброса.

Отдельные параметры струи определяются по аналогии со струей, отбрасываемой с носка водосливной плотины [2]. В частности, для осевой струйки, имеющей только осевую скорость, и наименьшей тангенциальной скорости ($V_u = 0$) в первом приближении можно использовать апробированные существующие зависимости, по которым находят дальность отброса струи L и угол входа центральной струйки θ на отметке нижнего бьефа (рис. 1).

$$L = K * \frac{V_m^2 * \sin 2\theta_0}{2 * g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{Z_1 * 2 * g}{V_m^2 * \sin^2 \theta_0}} \right), \quad (1)$$

где K – коэффициент, учитывающий влияние трения о воздух $K = (0,9–0,95)$; Z_1 – превышение центра выходного сечения водовода над расчетным уровнем нижнего бьефа; θ_0 – угол между горизонтальной плоскостью и осью водовода на выходе из отводящего водовода вихревого водосброса.

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta_0 + \frac{Z_1 * 2 * g}{(V_m * \cos \theta_0)^2}}. \quad (2)$$

Выясним условия расширения струи, для чего выберем произвольное сечение. Будем полагать, что в этом сечении продольная скорость $V_0 = \text{const}$ равна средней продольной скорости $V_{cp} = 4Q/\pi d^2$ и постоянна по сечению, а окружная скорость V_u подчиняется закону вращения твердого тела или параболическому закону в зависимости от остаточной закрутки Π в конце водовода. Экспе-

риментально установлено, что при $\Pi < 0,2$ окружная скорость изменяется по закону вращения твердого тела, а при $0,25 < \Pi < 0,35$ – по параболическому закону [2; 4]. Таким образом, граничные условия в начальном сечении струи будем рассматривать для двух случаев.

Случай I при $\Pi < 0,2$:

$$\begin{aligned} V_0 &= const, \\ V_u &= \bar{r}^n \cdot V_{u0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Случай II при $0,25 < \Pi < 0,35$:

$$\begin{aligned} V_0 &= const, \\ V_u &= V_0 \cdot \Pi \cdot \bar{r}^{-n}, \end{aligned} \tag{3a}$$

где $\bar{r} = r/r_0$ – безразмерный радиус; V_{u0} – окружная скорость на границе потока в выходном сечении водовода (определяется по остаточной закрутке на выходе из отводящего водовода).

Экспериментально установлено, что значение n в формулах (3), (3a) равно:

- $n = 1$ при $\Pi < 0,2$,
- $n = 0,6$ при $\Pi < 0,25$,
- $n = 0,4$ при $\Pi < 0,3$.

Заметим, что принятые предпосылки (3), (3a) близки к фактической картины распределения скорости.

За время t через начальное сечение струи ω_0 (рис. 2) и произвольное сечение струи ω проходит одинаковая масса воды.

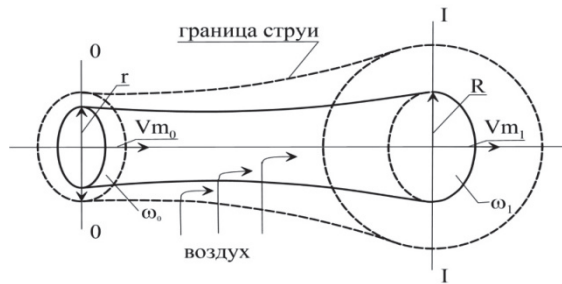


Рис. 2. Расчетная схема
[Fig. 2. Design diagram]

Будем полагать, что плотность водовоздушной смеси в данном сечении струи есть величина постоянная, что близко к реальности.

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} \rho_0 2\pi r dr Vm_0 &= \int_0^R \rho 2\pi r dr Vm_1. \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \frac{\int_0^{r_0} r dr}{\int_0^R r dr} = \frac{r_0^2}{R^2} = \frac{\bar{r}_0^2}{R^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Граничными условиями для боковых границ струи являются $\bar{r}_0 = 1$, $R_{zp} = R$. Здесь ρ_0 и ρ – плотность водовоздушной смеси в начальном и произвольном сечении струи ($\rho_0 = \text{const}$); V_x – горизонтальная проекция продольной скорости частиц воды (без учета трения о воздух) $V_x = V_0 \cos \theta_0$.

Радиусы r и R связаны соотношением

$$R = \frac{r}{\cos \alpha} = r \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}, \quad (4a)$$

где $\text{tg} \alpha$ (угол скоса α) можно определить из треугольника, одним катетом которого является расстояние, пройденное частицей воды за время t по перпендикулярному направлению касательной после выхода из водовода, а другим катетом – радиус r (рис. 2).

$$\text{tg} \alpha = \frac{V_u t}{r} = \frac{V_0 \Pi t r^{-n}}{r_0 r} \quad t = \frac{V_0 \Pi}{r_0} r^{-(n-1)} t. \quad (4б)$$

Здесь для V_u тангенциальной скорости принято распределение

$$V_u = V_0 \cdot \Pi \cdot \bar{r}^{-n} \quad (n \leq 1,0), \quad (4в)$$

которое дает хорошее совпадение с экспериментом.

Подставляя (4в) в (4б) получим

$$\frac{R}{r} = \frac{\bar{R}}{r} = \left[1 + (k_1 t)^2 r^{-2(n-1)} \right]^{0,5}, \quad (4г)$$

где $\bar{R} = \frac{R}{r_0}$; $k_1 = \frac{V_0 \Pi}{r_0}$.

Время t определяется из формулы

$$t = x V_0 \cos \theta_0 \sqrt{k t}, \quad (4д)$$

где x – горизонтальное расстояние до рассматриваемого поперечного сечения от начала струи (считая по центральной струйке).

При $\bar{r} = 1$ и $\bar{R} = \bar{R}_{zp}$. (граничный радиус)

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_{zp} = \frac{1}{\bar{R}^2}. \quad (4е)$$

Здесь относительная плотность водовоздушной смеси $\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_{zp}$ понимается

как плотность на границе струи.

Выясним, как распределяется плотность смеси в сечении струи. С этой целью используем (4г) и (4е), получим:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{\bar{r}}{\bar{R}} \right)^2 = \frac{1}{\left[1 + (k_1 t)^2 r^{-2(n-1)} \right]}. \quad (5)$$

С учетом (5) и (4г) получим выражение для отношения удельного веса водовоздушной смеси $\gamma_{см}$ к удельному весу воды $\gamma_в$.

$$\frac{\gamma_{см}}{\gamma_в} = \frac{1}{1 + \left(\frac{V_{u0}t}{r_0} \right)^2}, \quad (6)$$

где

$$t = \frac{l}{\sqrt{K} \cdot V_m \cos \theta_0}; \quad (6a)$$

l – расстояние от носка до центра произвольного сечения струи по горизонтали.

Из (6) и (6a) видно, что удельный вес водовоздушной смеси в сечении струи постоянен и изменяется при переходе от сечения к сечению по длине струи. Можно, однако, предположить, что содержание воды в водовоздушной

смеси, т.е. величина $\frac{\gamma_{см}}{\gamma_в}$ в центральной области поперечного сечения струи,

будет несколько больше, т.к. при расширении струи в центральную область из периферийной вместе с воздухом поступает и водовоздушная смесь, увеличивая содержание воды в смеси. С помощью формул (6) и (6a) можно установить ха-

рактер изменения $\frac{\gamma_{см}}{\gamma_в}$ вдоль струи. Расчет изменения величины $\frac{\gamma_{см}}{\gamma_в}$ для ха-

рактерных параметров струи выполнен в табл. 1. Из формул (4) и (4б) имеем $R = r\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Приведем эту формулу к виду, удобному для расчета. Граничный радиус в конечном сечении струи:

$$R_{к(зр)} = r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{V_{u0}t}{r_0} \right)^2}. \quad (7)$$

Полученная формула позволяет достаточно просто рассчитать плановое очертание отброшенной струи $X = V_m \sqrt{K} \cos \theta_0 t = Lt$.

Параметры струи влияют на удельные расходы. С определенной предосторожностью будем полагать, что струя воздействует на нижний бьеф по расчетной площади, которая равна площади круга концевое сечения струи с радиусом R_K , вычисленной по параметрам центральной струйки (рис. 2). Погрешность такого предположения по сравнению с площадью следа струи на свободной поверхности нижнего бьефа составляет около 5% и идет в запас при расчетах.

Выясним, как распределяются удельные расходы. С этой целью в расчетном концевом сечении струи выделим вертикальную элементарную площадку (рис. 4), положение которой характеризуется расстоянием R от оси. Площадь площадки равна $\Delta\omega = b\Delta R$. Принимая ширину площадки равной единице длины $\Delta R = 1$ и подставляя выражение $b = 2\sqrt{R_K^2 - R^2}$, имеем:

$$\Delta\omega = 2\sqrt{R_K^2 - R^2}. \quad (8)$$

Расход, собираемый с этой площадки от ниспадающей струи будет представлять собой удельный расход q на данном радиусе. С учетом полученного

выше равенства $\frac{\gamma_{см}}{\gamma_6} = \text{const}$ в данном поперечном сечении и удельного расхода воды,

собираемого с единицы площади концевое сечения $q_\omega = \frac{Q}{\pi R_K^2}$, можно записать:

$$q = \Sigma \Delta \omega \cdot q_\omega = \frac{2Q}{\pi R_K} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_K}\right)^2}. \quad (9)$$

Из формулы видно, что удельный расход q в отводящем русле имеет максимальное значение на оси струи и равен нулю при $R = R_K$ на ее границе. Максимальные значения удельного расхода для вихревых водосбросов могут изменяться в пределах $q_{\max} = 50\text{--}70$ м/с, что является приемлемым. Эпюра q (рис. 4) имеет параболическую форму, что позволяет устраивать яму размыва с переменной глубиной h_y по длине и ширине отводящего русла. Расчет глубины ямы размыва производится по полученной эпюре q на основе известных расчетных методов.

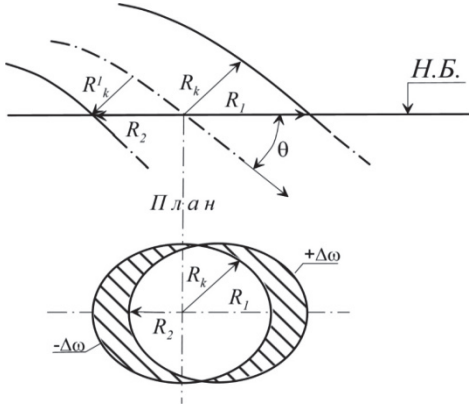


Рис. 3. Схема сопряжения струи с поверхностью нижнего бьефа
[Fig. 3. The scheme of interaction of the jet with the surface of the downstream]

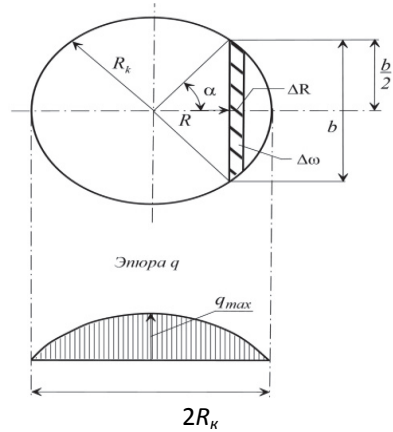


Рис. 4. Расчетная схема к определению удельных расходов
[Fig. 4. The calculated scheme to definition of specific rate of flow]

Найдем для нашего случая дальность отлета струи:

$$L = K * \frac{V_m^2 * \sin 2\theta_0}{2 * g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{Z_1 * 2 * g}{V_m^2 * \sin^2 \theta_0}} \right) = 31,72 \text{ м},$$

где K – коэффициент, учитывающий влияние трения о воздух $K = (0,9\text{--}0,95)$; Z_1 – превышение центра выходного сечения водовода над расчетным уровнем нижнего бьефа; $Z_1 = 4,5$ м; θ_0 – угол между горизонтальной плоскостью и осью водовода на выходе из отводящего водовода вихревого водосброса ($\theta_0 = 30^\circ$).

Найдем тангенс угла входа центральной струйки:

$$\text{tg } \theta = \sqrt{\text{tg}^2 \theta_0 + \frac{Z_1 * 2 * g}{(V_m * \cos \theta_0)^2}} = 0,83,$$

$$V_0 = 18,08 \text{ м/с},$$

$$\Pi = 0,265,$$

следовательно в нашем случае используем формулу (3а) для случая II (при $0,25 < II < 0,35$):

$$V_0 = const,$$

$$V_u = V_0 \cdot II \cdot r^{-n},$$

$$n = 0,6 \text{ при } II < 0,25,$$

$$n = 0,4 \text{ при } II < 0,3.$$

Принимаем $n = 0,5$ при $II = 0,265$:

$$V_u = V_0 \cdot II \cdot r^{-n} = 18,08 \cdot 0,265 \cdot 1^{0,5} = 4,79 \text{ м/с.}$$

Рассчитаем изменение величины $\frac{\gamma_{см}}{\gamma_в}$ вдоль струи.

Таблица 1

Определение зависимости $\frac{\gamma_{см}}{\gamma_в} = f\left(\frac{l}{L}; II\right)$

[Numerical Determination of Dependence $\frac{\gamma_{см}}{\gamma_в} = f\left(\frac{l}{L}; II\right)$]

$l, \text{ м}$	l/L	$t, \text{ с}$	$\frac{\gamma_{см}}{\gamma_в}$
6,34	0,2	0,43	0,81
12,69	0,4	0,85	0,55
19,03	0,6	1,28	0,35
25,38	0,8	1,71	0,23
31,72	1,0	2,13	0,162

Содержание воды в водовоздушной смеси составляет 16,2%.

Из формул (3) и (3б) имеем граничный радиус в конечном сечении струи:

$$R_k = 4,5 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{4,79}{4,5} \cdot 2,13\right)^2} = 11,82 \text{ м,}$$

$$\Delta\omega = 2\sqrt{R_k^2 - R^2} = 2\sqrt{11,82^2 - 4,5^2} = 21,86 \text{ м}^3.$$

Удельный расход в отводящем русле:

$$q = \Sigma\Delta\omega \cdot q_\omega = \frac{2Q}{\pi R_k} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_k}\right)^2} = \frac{2 \cdot 1150}{3,14 \cdot 11,82} \sqrt{1 - \left(\frac{4,5}{11,82}\right)^2} = 57,30 \text{ м}^3/\text{с.}$$

Отношение площадей конечного и начального сечения струи:

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = \left(\frac{R_k}{r_0}\right)^2 = \left(\frac{11,82}{4,5}\right)^2 = 6,9 \text{ или отношение радиусов } \frac{R_k}{r_0} = \frac{11,82}{4,5} = 2,627,$$

$$\omega_k = 438,70.$$

Выясним, как изменяется конечный радиус струи R_K при следующих, характерных для вихревого водосброса, параметрах (табл. 2, рис. 5): $\Pi = 0,3$; $V_{cp} = 23$ м/с; $Vu = 7,23$ м/с; $d = 9$ м.

Таблица 2

L	L/d	$z_1, \text{ м}$	t	$\frac{\gamma_{cm}}{\gamma_e}$	ω_K	R_K
27	3	9	1,43	0,16	399,73	11,28
36	4	118	1,91	0,096	662,34	14,52
45	5	27	2,38	0,064	994,26	17,79

$$\frac{\omega_K}{\omega_0} = \left(\frac{R_K}{r_0}\right)^2 = \left(\frac{11,28}{4,5}\right)^2 = 6,283 \text{ или отношение радиусов } \frac{R_K}{r_0} = \frac{11,28}{4,5} = 2,507,$$

$$\frac{\omega_K}{\omega_0} = \left(\frac{R_K}{r_0}\right)^2 = \left(\frac{14,52}{4,5}\right)^2 = 10,41 \text{ или отношение радиусов } \frac{R_K}{r_0} = \frac{14,52}{4,5} = 3,227,$$

$$\frac{\omega_K}{\omega_0} = \left(\frac{R_K}{r_0}\right)^2 = \left(\frac{17,79}{4,5}\right)^2 = 15,63 \text{ или отношение радиусов } \frac{R_K}{r_0} = \frac{27,06}{4,5} = 3,95$$

при $\Pi = 0,2$; $V_{cp} = 23$ м/с; $Vu = 4,69$ м/с опыт показывает, что $d = 8–10$ м оптимален для таких водосбросов.

Принимаем $d = 9$ м.

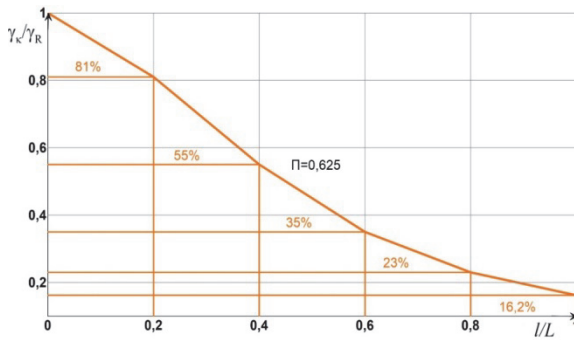


Рис. 5. Зависимость $\frac{\gamma_{cm}}{\gamma_e} = f\left(\frac{l}{L}; \Pi\right)$

[Fig. 5. Relationship $\frac{\gamma_{cm}}{\gamma_e} = f\left(\frac{l}{L}; \Pi\right)$]

Таблица 3

L	L/d	$z_1, \text{ м}$	t	$\frac{\gamma_{cm}}{\gamma_e}$	ω_K	R_K
27	3	9	1,43	0,31	204,90	8,076
36	4	18	1,91	0,20	315,42	10,02
45	5	27	2,38	0,14	454,65	12,03

$$\frac{\omega_{\kappa}}{\omega_0} = \left(\frac{R_{\kappa}}{r_0} \right)^2 = \left(\frac{8,076}{4,5} \right)^2 = 3,22 \text{ или отношение радиусов } \frac{R_{\kappa}}{r_0} = \frac{9,71}{4,5} = 1,795 ,$$

$$\frac{\omega_{\kappa}}{\omega_0} = \left(\frac{R_{\kappa}}{r_0} \right)^2 = \left(\frac{10,02}{4,5} \right)^2 = 4,958 \text{ или отношение радиусов } \frac{R_{\kappa}}{r_0} = \frac{18,65}{4,5} = 2,227 ,$$

$$\frac{\omega_{\kappa}}{\omega_0} = \left(\frac{R_{\kappa}}{r_0} \right)^2 = \left(\frac{12,03}{4,5} \right)^2 = 7,147 \text{ или отношение радиусов } \frac{R_{\kappa}}{r_0} = \frac{27,68}{4,5} = 2,67 .$$

Выводы. Обзор существующих исследований показывает, что методы расчета струи с остаточной закруткой и ее сопряжения с нижним бьефом отсутствуют.

Разработан и предложен метод расчета рассматриваемых струй, основанный на теоретическом рассмотрении. Для проверки полученных результатов требуется постановка специального эксперимента.

Преимущество выпуска струи в воздух с остаточной закруткой заключается в том, что струя сначала расширяется в воздухе, превращаясь в водовоздушную смесь, плотность которой уменьшается по длине струи, и в результате струя взаимодействует с нижним бьефом на большей площади (за счет ее расширения и меньшей плотности водовоздушной смеси), что уменьшает динамическое воздействие на нижний бьеф.

© Пономарев Н.К., Щесняк Л.Е., 2018

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Животовский Б.А. Водосбросные и сопрягающие сооружения с закруткой потока. М.: Изд-во РУДН, 1995.
2. Слисский С.М. Гидравлические расчеты высоконапорных гидротехнических сооружений. М.: Энергия, 1979.
3. Волианник В.В., Зуйков А.Л., Мордасов А.П. Закрученные потоки в гидротехнических сооружениях. М.: Энергоиздат, 1990.
4. Щукин В.К., Халатов А.А. Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. М.: Машиностроение, 1982.
5. A. H. Algifri, R. K. Bhardwaj, Y. V. N. Rao (December 1988). Eddy viscosity in decaying swirl flow in a pipe. *Journal Applied Scientific Research*, Springer Netherlands, Vol. 45, No 4.
6. Osami Kitoh. (1991). Experimental study of turbulent swirling flow in a straight pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, Vol 225.
7. Senoo Yasutoshi, Nagata Tetuzou. (1990). Vortex flow in long pipes with different roughness. *Bulletin of JSME (The Japan Society of Mechanical Engineers)* [Journal Detail], 15 (90), 1514–1521.
8. Лунаци М.Э., Новикова И.С. К вопросу об определении гидравлических характеристик водосбросных сооружений с закруткой потока // Гидротехническое строительство. НТА «Энергопрогресс», 1995. № 9.
9. Руководство по расчету высоконапорных вихревых водосбросов. М.: Союзгипроводхоз, 1984.
10. Кривченко А.С., Остроумов С.Н. Водосбросное устройство для напорных вододерживающих сооружений // Бюллетень изобретений (БИ). 1970. № 17.
11. Гидравлические расчеты водосбросных гидротехнических сооружений: справочное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1987.

Об авторах:

Пonomарев Николай Константинович – кандидат технических наук, профессор департамента архитектуры и строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Научные интересы:* гидравлика сооружений, речная гидравлика, проблемы использования водных ресурсов. *Контактная информация:* e-mail – ponomarev_nk@rudn.university

Щесняк Леонид Евгеньевич – аспирант департамента архитектуры и строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Научные интересы:* гидравлика сооружений, речная гидравлика. *Контактная информация:* e-mail – schesnyak_le@rudn.university

Для цитирования:

Пonomарев Н.К., Щесняк Л.Е. Сопряжение вихревого водосброса с нижним бьефом путем отброса струи // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 142–153. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-142-153.

THE PAIRING OF A SWIRLING SPILLWAY TO THE LOWER POOL THROUGH THE THROWN JETS

N.K. PONOMAREV, L.E. SCHESNYAK

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

(received: December 01, 2017; accepted: March 05, 2018)

In the modern practice of hydraulic engineering pressure hydrosystems reach $H \geq 200$ m. In these conditions the most efficient spillway structure is the vortex shaft spillway. In this paper, the authors consider the conjugation of the swirled flow at the outlet of the discharge conduit with downstream by thrown jet with a residual twist. In the scheme with jet drop, the residual twist of the flow during the release from the vortex spillway contributes to the expansion of the jet in the air, reducing the specific flow rate, as well as reducing the dynamic loads on the lower bed. The comparison with the jet thrown from the sock of the drainage dam at the same speed parameters (i.e. at the speed of 20–25 m/s on the lip) is carried out. The formula obtained is simple enough to determine the planned outline of the discarded jet. The scheme of conjugation of the jet with the surface of the lower tail water, as well as the calculation scheme to determine the specific discharge of the downward swirling jet.

Keywords: vortex shaft spillway, setting twist, the residual twist, the downstream, the Froude number, water-air mixture, tangential velocity, thrown jets

References

1. Zhivotovsky B.A. Spillway and the interfacing facilities with the spin-current. M.: PFUR Publ., 1995.
2. Slaski S.M. Hydraulic analysis of high pressure hydraulic engineering structures. Moscow: Energy, 1979.
3. Volshanik V.V., Zuykov A.L., Mordasov A.P. Swirling flows in hydraulic structures. Moscow: Energoizdat, 1990.
4. Shchukin V.K., Khalatov A.A. Heat exchange, mass transfer and hydrodynamics of swirling-tion flows in axisymmetric channels. M.: Mechanical Engineering, 1982.
5. A. H. Algifri, R. K. Bhardwaj, Y. V. N. Rao. (December 1988). Eddy viscosity in decaying swirl flow in a pipe. *Journal Applied Scientific Research*, Springer Netherlands, Vol 45, No 4.
6. Osami Kitoh. (1991). Experimental study of turbulent swirling flow in a straight pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, Vol 225.

7. Yasutoshi Senoo, Nagata Tetuzou. (1990). Vortex flow in long pipes with different roughness. *Bulletin of JSME (the Japan Society of Mechanical Engineers)* [Journal Detail], 15 (90), p. 1514–1521.

8. Lunati, M.E., Novikov I.S. (1995). To the question about the determination of hydraulic characteristics of spillway structures with the swirling flow. NTA Energoprogress, *Journal of Hydraulic Engineering*, No 9.

9. Guidelines for the calculation of high-pressure vortex spillways. M.: Soushi-provokes, 1984.

10. Krivchenko A.C., Ostroumov S.N. A water discharge device for pressure water-retaining structures // *Byulleten' izobretenii (BI)* [Bulletin of inventions (BI)], 1970, No. 17.

11. Hydraulic calculations of spillway hydraulic structures. A special allowance. Moscow: Energoatomizdat, 1987.

About the authors:

Nikolaj K. Ponomarev – Candidate of Technical Science, Professor of Department of Architecture and Civil Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* hydraulics of structures, river hydraulics, problems of water resources. *Contact information:* e-mail – ponomarev_nk@rudn.university

Leonid E. Schesnyak – PhD Student of Department of Architecture and Civil Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University). *Scientific interests:* hydraulics of structures, river hydraulics. *Contact information:* e-mail – schesnyak_le@rudn.university

For citation:

Ponomarev N.K., Schesnyak L.E. (2018). The pairing of a swirling spillway to the lower pool through the thrown garbage. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 14 (2), 142–153. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-142-153.

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-154-174

CONSTRAINED CONSTRUCTION OF PLANAR DELAUNAY TRIANGULATIONS WITHOUT FLIPPING

VERA GALISHNIKOVA*, PETER JAN PAHL**

* Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

** Technische Universität Berlin
17 Juni Str., 135, 10623, Berlin, Germany

(received: January 15, 2018; accepted: March 15, 2018)

The construction of Voronoi diagrams and Delaunay triangulations finds wide application in many branches of science. Delaunay triangulations have properties which make them more desirable than other triangulations for the same node set. Delaunay has characterized his triangulations by the empty circle property. The partitioning and flipping methods which have been developed for digital construction of Voronoi diagrams and Delaunay triangulations only make indirect use of this property. A novel method of construction is proposed, which is based directly on the empty circle property of Delaunay. The geometry of the steps of the algorithm is simple and can be grasped intuitively. The method can be applied to constrained triangulations, in which a triangulation domain and some of the edges are prescribed. A data structure for triangulations of concave and multiply-connected domains is presented which permits convenient specification of the constraints and the triangulation. The method is readily implemented, efficient and robust.

Keywords: Delaunay, Voronoi, empty circle, shortest diagonal, triangulation theorem, partitioning, flipping, constrained, half edge, dihedral cycle

1. Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations

Over centuries, outstanding scientists have considered the following problem: Given a set of sites in a plane, partition the plane into regions in such a way that all points of a region are at least as near to a particular site as to any other site of the set. This problem has arisen in many applications [1] [2] [3]. Johannes Kepler (1571-1639) encountered Voronoi diagrams when he considered the densest packing of spheres, René Descartes (1596-1650) when he investigated the distribution of matter relative to fixed stars, Johann Dirichlet (1805-1859) when he constructed integer lattices, John Snow (1813-1853) when he related the outbreak of cholera in London to the location of water pumps, Georges Voronoi (1868-1908) when he extended the Dirichlet tessellations to higher dimensions and Boris Delaunay (1890-1980) when he generalized Voronoi diagrams and their duals to irregularly spaced sites in d -dimensional space. Many additional examples of Voronoi diagrams have been reported, for example in gold mining, crystallography, metallurgy and meteorology. Today diagrams which relate sets of nearest points to sites in a plane are known as Voronoi diagrams, sometimes also as Dirichlet tessellations. Extensions of the nearness concept to weighted tessellations

by Dirichlet [4] have been studied by Aurenhammer [5] and are today known as power diagrams. Extensions to power diagrams are not treated in this paper.

The concept of triangulation has been related to the concept of sets of nearest points by Voronoi [2]. The relationship was deepened when Delaunay [3] distinguished the triangulation, which is derived from a Voronoi diagram, from other triangulations for the same set of sites by defining the empty circle property as follows: A triangulation is Delaunay if, and only if, the interior of the circumscribed circles none of its triangles contains sites. Triangulations with the empty circle property are today called Delaunay triangulations. They have applications in many branches of science, for example in computational geometry and in the networks for discrete methods of physical analysis such as the finite element method.

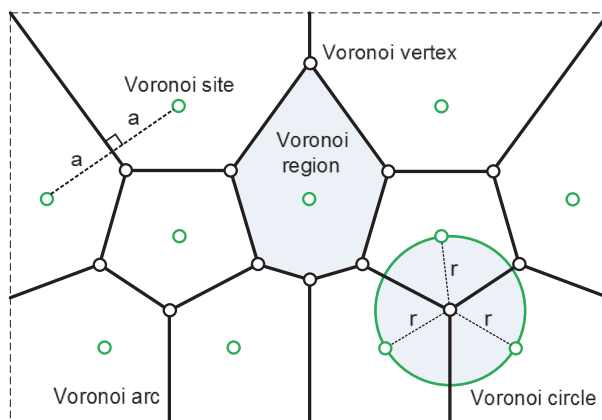


Figure 1: Voronoi diagram in a plane

Figure 1 shows an example of a set of sites in a plane and the corresponding Voronoi diagram. The straight line segment that is a boundary between two Voronoi regions is called a Voronoi arc. An intersection of Voronoi arcs is called a Voronoi vertex. A Voronoi circle can be drawn with a Voronoi vertex as midpoint such that it passes through the sites of the Voronoi regions that meet at the Voronoi vertex. Voronoi diagrams have distinctive properties [6]. Each Voronoi region is convex. The diagram contains bounded and unbounded regions. At least three arcs and at least three regions meet at a Voronoi vertex, and the distances of a Voronoi vertex from the sites of the regions which meet at the vertex are equal.

Figure 2 shows the Delaunay triangulation for the set of sites in figure 1. If a Voronoi circle passes through exactly three sites, these sites are the corners of a Delaunay triangle and are called Delaunay nodes. If the circle passes through more than 3 sites, the sites define a convex polygon that can be decomposed into Delaunay triangles. The decomposition is not unique. The straight line segment connecting two nodes of a Delaunay triangle is called a Delaunay edge. The Delaunay triangulation is the convex hull of the set of sites in the Voronoi diagram. While the Delaunay triangulation is not the only possible triangulation of the sites of the Voronoi diagram, it is the triangulation for which the magnitude of the smallest angle of all triangles is at a maximum. This property is advantageous for discrete analysis, for example by the finite element method, where the use of nearly equilateral triangles increases the accuracy of the solution.

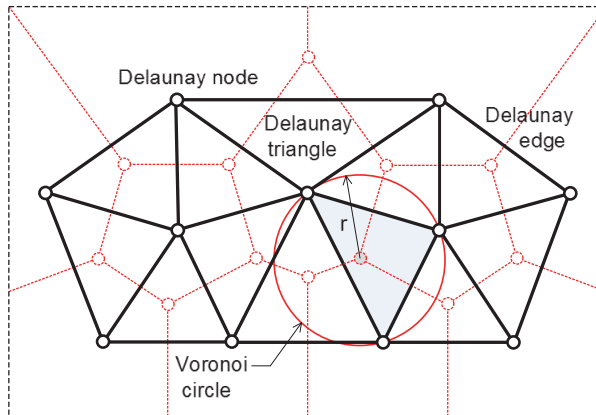


Figure 2: Delaunay triangulation for the Voronoi sites in Figure 1

A triangulation for a set of sites is called *unconstrained*, if neither the boundary of the area covered by the triangles is prescribed, nor any of its interior edges. The boundary of an unconstrained triangulation is the convex hull of the given set of sites. The two main classes of algorithms, which have been developed for unconstrained triangulation, make use of partitioning of the set of sites and of edge flipping respectively.

If a subdomain of the area covered by the convex hull is prescribed for the triangulation, or if any of its internal edges is prescribed, the triangulation is called *constrained*. The goal of the research, which is reported in this paper, is to determine whether it is promising to extend one of the two conventional methods to include constraints, or whether the problem can be solved more advantageously with a novel approach. For this purpose, the relationships between the existing methods of unconstrained triangulation are analyzed. It will be shown that they are all based on the same basic property, which was discovered by Delaunay. A novel method of constrained analysis, which is based directly on this property, will be presented.

2. Duality of Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations

Voronoi diagrams and Delaunay triangulations are related by the concept of *duality*. Duality is a concept which is encountered in mathematics in many different forms. In the context of Voronoi diagrams and Delaunay triangles, duality is a bijective mapping which reverses the inclusion relationships. This mapping will now be defined.

A Delaunay triangulation is a planar subdivision whose element set D consists of nodes, edges and triangles. It is arbitrarily named the *primal* subdivision of the plane, and its elements are called *primal elements*. The Voronoi diagram is a planar subdivision whose element set V consists of vertices, arcs and regions. It is called the *dual* subdivision of the plane and its elements are called *dual elements*. Consider a mapping f of the set of elements D of the Delaunay triangulation to the set of elements V of the Voronoi diagram:

$$f : D \rightarrow V \quad (1)$$

- f bijective mapping for duality (set of ordered pairs)
- D elements of the Delaunay triangulation (domain of the mapping)
- V elements of the Voronoi diagram (target of the mapping)

The bijective mapping function is defined as follows:

$$\begin{aligned}
 f(\text{primal node } n_i) &= \text{dual region } r_i & f^{-1}(\text{dual region } r_i) &= \text{primal node } n_i & (2) \\
 f(\text{primal edge } e_k) &= \text{dual arc } a_k & f^{-1}(\text{dual arc } a_k) &= \text{primal edge } e_k \\
 f(\text{primal cell } c_m) &= \text{dual vertex } v_m & f^{-1}(\text{dual vertex } v_m) &= \text{primal cell } c_m
 \end{aligned}$$

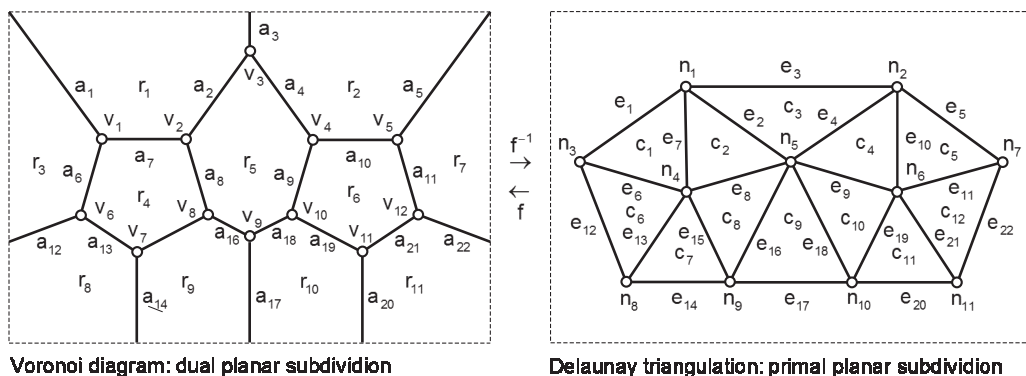


Figure 3: Duality between a Voronoi diagram and a Delaunay triangulation

Figure 3 shows mapping (2) for the Voronoi diagram in figure 1 and the Delaunay triangulation in figure 2. The reversal of the inclusion relationship is illustrated for cell c_2 in the primal subdivision, which contains nodes n_1, n_4 and n_5 . Mapping f yields the following images:

$$f(c_2) = v_2 \quad f(n_1) = r_1 \quad f(n_4) = r_4 \quad f(n_5) = r_5 \quad (3)$$

Regions r_1, r_4 and r_5 , which are the duals of the nodes n_1, n_4 and n_5 contained in cell c_2 , all contain vertex v_2 , which is the dual of cell c_2 . The reversal of the inclusion is illustrated by edge e_8 in the primal subdivision, which contains nodes n_4 and n_5 . Mapping f yields the following images:

$$f(e_8) = a_8 \quad f(n_4) = r_4 \quad f(n_5) = r_5 \quad (4)$$

Regions r_4 and r_5 , which are the duals of nodes n_4 and n_5 contained in edge e_8 in the primal subdivision, all contain arc a_8 , which is the dual of edge e_8 .

3. Graphical Construction of Delaunay Triangulations

The historic development from Voronoi diagrams to Delaunay triangulations suggests an intuitive approach to the construction of Delaunay triangulations. Using paper, pencil and the capability of human vision to analyze shape, the graphic construction proceeds as shown in figure 4.

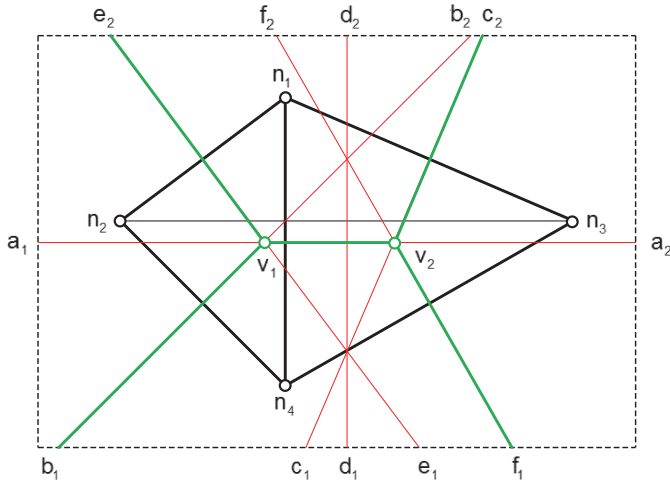


Figure 4: Graphical construction of a Delaunay triangulation

Let the coordinates of a set of sites be given. Following the empty circle concept of Delaunay, an empty circle passing through three of the sites is chosen by inspection. The midpoint v_1 of this circle is a Voronoi vertex. The edges of the triangle are Delaunay edges and the sites at the corners of the triangle are Delaunay nodes. The three bisectors of the edges pass through v_1 and contain Voronoi arcs with v_1 as end point. The left diagram in figure 5 shows the empty circle and the right diagram the subdivision of the plane into three point sets, each of which is nearest to one of the sites of the initial Delaunay triangle.

The second vertex of the Delaunay arcs radiating from v_1 is determined next. For this purpose the bisectors of the line segments connecting the given sites are constructed as shown in figure 4. For example, the bisector of line segment n_1n_4 is a_1a_2 . Let the bisector leaving v_1 in the direction of point a_2 be followed. This bisector is the boundary that separates points that are nearer to site n_1 from points that are nearer to site n_4 . After this arc has reached the point of intersection with bisector f_1f_2 , it enters a set of points which are closer to site n_2 than to sites n_1 and n_4 . The point of intersection is therefore the second vertex v_2 of the arc. If the arc leaving v_1 in the direction of point e_2 is followed, none of the bisectors in figure 4 is intersected. This arc is infinite. Similarly, the arc leaving v_1 in the direction of point b_2 is infinite. The bisectors which are overlaid by the constructed arcs are removed, because the Voronoi regions are convex, such that each bisector can overlay only one arc of the Voronoi diagram.

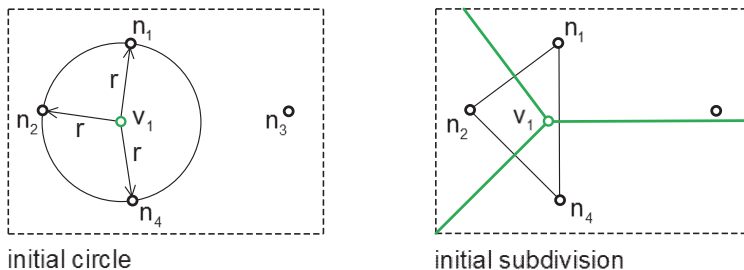


Figure 5: Initial step of the graphical construction

The vertices, which are constructed on the bisectors leaving the first vertex, are collected in a list. After all bisectors at node v_1 have been treated, one of the vertices in the list is chosen and removed from the list. The remaining bisectors leaving this vertex are traversed in the direction of the line segment which they bisect. If they intersect another bisector, a Voronoi vertex is constructed at the point of intersection. It is the second vertex of the arc and is added to the list. If none of the remaining bisectors is intersected, the arc is infinite. The bisector is removed from the diagram in figure 4. The procedure ends if the vertex list is empty after the bisectors at a vertex have been treated.

The line segment connecting two nodes is an edge of the triangulation if it is bisected by one of the Voronoi arcs that are constructed. For example, segment $\overline{n_1 n_4}$ is an edge because it is bisected by arc $\overline{v_1 v_2}$. Segment $\overline{n_2 n_3}$ is not an edge of the Delaunay diagram because it is not bisected by any of the arcs that have been constructed.

The graphical construction shows how the duality mapping in figure 3 can be derived. Arc a_k overlays the bisector of edge e_k . Nodes n_s and n_t of edge e_k are the duals of regions r_s and r_t whose common boundary is arc a_k . Vertices v_g and v_h of arc a_k are the duals of cells c_g and c_h whose common boundary is edge e_k . The end of an infinite arc is the dual of the infinite area consisting of the difference of the area of the infinite plane and the areas of the Delaunay triangles.

4. Construction of Delaunay Triangulations by Partitioning

The graphical method of construction in section 3 suffers from the disadvantage that the intersection of the bisector leaving a Voronoi vertex must be tested with all other bisectors of the diagram. While human vision readily solves this problem, digital testing of the bisections is expensive. Algorithms which reduce the problem by partitioning the set of sites into subsets, whose Voronoi diagram can be determined by inspection, and merge these diagrams pairwise until only the desired Voronoi diagram remains, are called “divide and conquer” algorithms. An algorithm of this type by Guibas [7] has been used by many researchers as basis for diverse modified algorithms of similar type, which differ primarily in the merge operation. Many contributions to the topic have been made, for example by Shamos [8] and Skvortsov [9] [10]. A modified version of the Guibas algorithm is presented in figure 6.

The given sites are decomposed into sets of two or three sites, such that coordinates x_1 of the sites in the first group are less than the coordinates x_1 of all other sites, the coordinates x_1 of the sites in the second group are less than the coordinates x_1 of the remaining sites, and so on. Figure 6 shows a given set of 6 sites n_i in diagram D1 and their decomposition into two groups of 3 sites each. The Delaunay triangle for each group of 3 sites is constructed by inspection. The triangles can be highly distorted if the coordinates x_2 of the three nodes differ significantly. It is assumed that the sites are not collinear. Special methods are required if the sites are collinear.

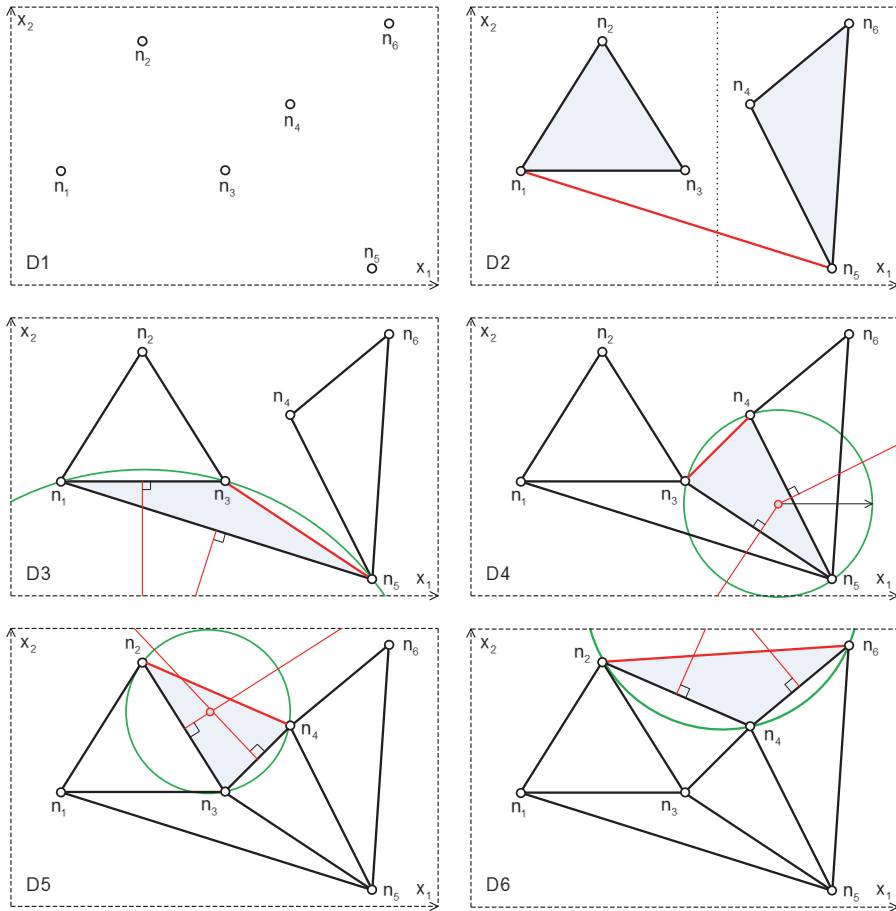


Figure 6: Construction of a Delaunay triangulation by partitioning and merging

In order to merge the two groups, a base line segment connecting a node of the left group with a node of the right group is determined such that all nodes lie on or above the base line. In diagram D2, the base line connects nodes n_1 and n_5 . The gap between the two triangles in diagram D2 is triangulated such that a single triangulation results, which is convex.

Diagram D3 shows that this is achieved by constructing bisectors $b_{1|3}$ and $b_{1|5}$, where $b_{k|m}$ denotes the bisector of the line segment connecting sites n_k and n_m . The bisectors intersect in a Voronoi vertex (not shown in D3) which is the midpoint of a circle through sites n_1, n_3 and n_5 . The triangle with corners n_1, n_3 and n_5 is a Delaunay triangle because the circle is empty. Diagrams D4 to D6 show the analogous construction of the other Delaunay triangles for the merge operation. If there are more than 6 nodes, additional groups are formed in diagram D2 and there will be more than a single level of merge operations. For a set of $3^{10} = 59049$ sites, $10 - 1 = 9$ levels of merging are required. The complexity of the method is $O(n \log(n))$.

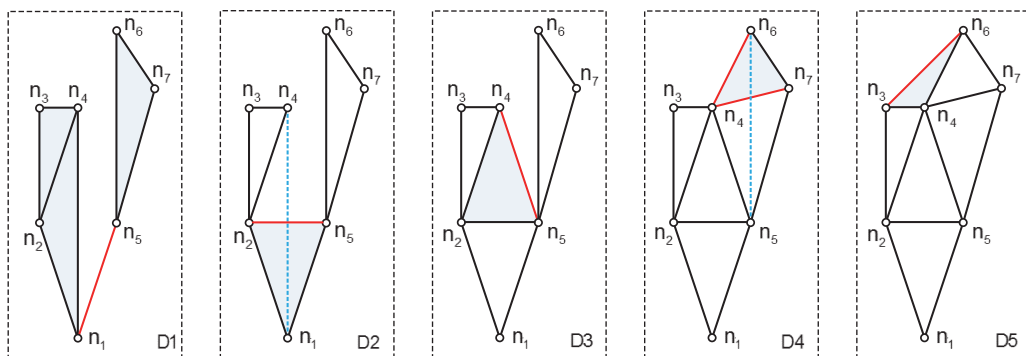


Figure 7: Flipping of edges in the merge operation

5. Construction of Delaunay Triangulations by Flipping

Figure 7 shows that part of the merging process can be achieved by selecting a quadrangle and replacing its diagonal by the other diagonal. In diagram D2 of figure 7 diagonal $e_{1|4}$ can be replaced by diagonal $e_{2|5}$ in the quadrangle with nodes n_1, n_5, n_4 and n_2 , where $e_{k|m}$ is the edge connecting nodes n_k and n_m . In the literature, this operation is referred to as edge flipping in the quadrangle. Diagram D4 in the same figure shows that flipping can be accompanied by the construction of an additional edge.

The concept of edge flipping was first presented by Lawson [11] and developed further by Joe [12], de Loera [13] and many others. The basic concept is to construct an arbitrary triangulation for the given set of nodes and then to flip edges until the circumscribed circles of all triangles are empty as required by Delaunay. The convergence of this procedure is proved by studying the effect of edge flipping on a triangulation which is not yet Delaunay.

Angle vector: Different triangulations are compared by means of an angle vector. Let the number of triangles in the triangulation be m . The $3m$ angles of the triangles are arranged in ascending order in a vector \mathbf{t} which is called the angle vector of the triangulation. The angle vector \mathbf{t} of a triangulation T is compared row-wise with the angle vector $\bar{\mathbf{t}}$ of another triangulation \bar{T} of the same node set. The angles in vectors \mathbf{t} and $\bar{\mathbf{t}}$ are denoted by α_i and $\bar{\alpha}_i$. The comparison starts in with the entries in row 0. The first pair of angles $(\alpha_k, \bar{\alpha}_k)$ which are not equal determines the lexicographic order of the two vectors. If $\alpha_k > \bar{\alpha}_k$, then vector \mathbf{t} is larger than vector $\bar{\mathbf{t}}$.

$$\mathbf{t} = \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_k \\ \dots \\ \alpha_{3m} \end{matrix} \quad \bar{\mathbf{t}} = \begin{matrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \dots \\ \bar{\alpha}_k \\ \dots \\ \bar{\alpha}_{3m} \end{matrix} \quad \mathbf{t} > \bar{\mathbf{t}} \Rightarrow \bigvee_{i < k} (\alpha_i = \bar{\alpha}_i) \wedge \alpha_k > \bar{\alpha}_k \quad (5)$$

Triangulation T is considered to be better than triangulation \bar{T} if vector \mathbf{t} is larger than vector $\bar{\mathbf{t}}$. The optimal triangulation maximizes the smallest angle that occurs in the triangles.

Regular edge: In order to prove the existence of optimal triangulations, the effect of flipping edges in an existing triangulation is studied. Figure 8 shows the effect of flipping an edge in a convex quadrilateral of a triangulation. Let \mathbf{t} be the angle vector for triangles abc and adb in the triangulation with edge ab. Let $\bar{\mathbf{t}}$ be the angle vector for the triangulation with edge cd. Edge ab is called regular if vector \mathbf{t} is lexicographically larger than or equal to vector $\bar{\mathbf{t}}$.

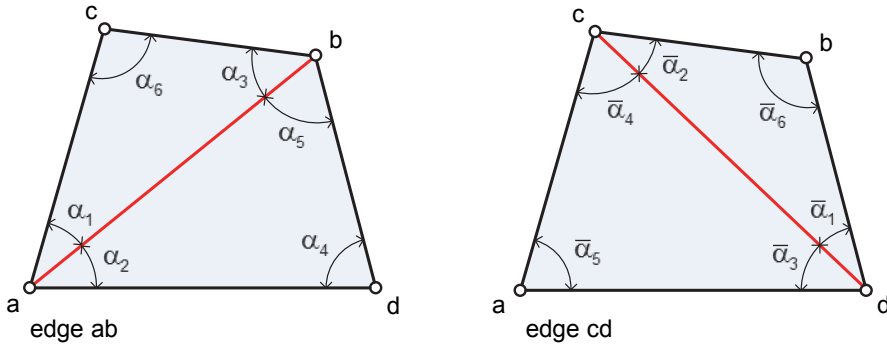


Figure 8: Flipping edge ab to edge cd in a quadrilateral abcd

$$\mathbf{t} \geq \bar{\mathbf{t}} \Rightarrow \text{edge ab is regular} \quad (6)$$

If abcd is a rectangle, both edges are regular. Otherwise, one edge is regular and the other edge is irregular.

Proof: Figure 9 shows two triangulations for a quadrilateral with nodes n_k . The triangles formed by diagonal n_1n_3 are shown in diagram (a), the triangles formed by diagonal n_2n_4 in diagram (b). Diagram (a) contains the circumscribed circle of triangle $n_1n_2n_3$. Diagram (b) contains the circumscribed circle for triangle $n_1n_2n_4$. The extended diagonals n_1n_3 and n_2n_4 intersect the circumscribed circles in point u. It will be shown that one of the edges n_1n_3 and n_2n_4 is regular and the other irregular.

Edge n_2n_4 of triangulation (b) is regular if the six angles $a + e, b, h, c, d + f, g$ of the two triangles in (b) are larger than the smallest angle φ in triangulation (a). The geometry of the triangles and of the circumscribed circle of triangle $n_1n_2n_3$ yields the following relations between the angles in triangulation (a):

$$\begin{aligned} e + x &= c & x + d &= h \\ f + y &= b & y + a &= g \end{aligned} \quad (7)$$

Similarly, the geometry of the triangles and the circumscribed circle of triangle $n_1n_2n_4$ yield the following relations between the angles in triangulation (b):

$$\begin{aligned} c - s &= e & s + d &= h \\ g - t &= a & t + f &= b \end{aligned} \quad (8)$$

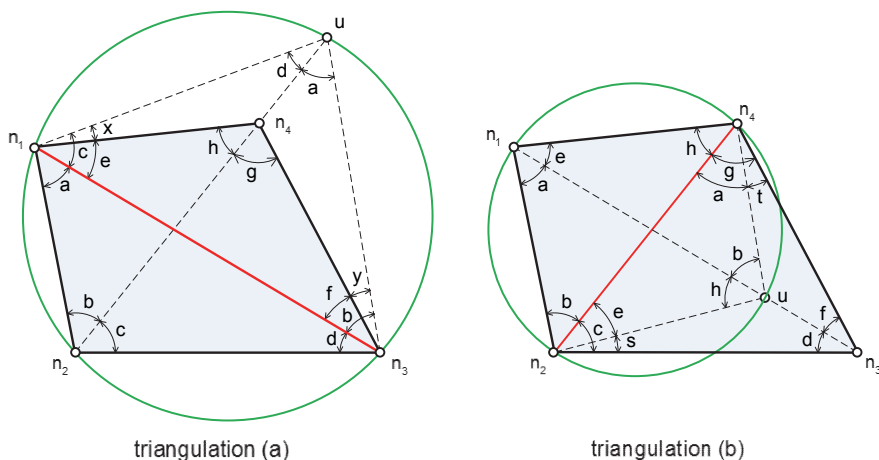


Figure 9: Regularity test for the diagonals of a convex quadrilateral

It follows from (8) that angles $b + c$ and $g + h$ cannot be the smallest angle in triangulation (a):

$$\begin{aligned} b + c &= e + f + x + y > e \\ g + h &= a + d + x + y > a \end{aligned} \tag{9}$$

Each of the remaining four angles a, d, e, f can be the smallest angle in triangulation (a). It will now be shown that in all four cases, each of the six angles $a + e, b, h, c, d + f, g$ in triangulation (b) is larger than the smallest angle in triangulation (a).

Case 1: $\varphi = a < d, e, f$: (10) Case 2: $\varphi = d < a, e, f$: (11)

$\begin{aligned} a + e &> a \\ b &= f + y > a + y > a \\ h &= s + d > d > a \\ c &= e + x > a + x > a \\ d + f &> d > a \\ g &= t + a > a \end{aligned}$	$\begin{aligned} a + e &> d + e > d \\ b &= f + y > d + y > d \\ h &= s + d > d \\ c &= e + x > d + x > d \\ d + f &> d \\ g &= t + a > t + d > d \end{aligned}$
--	--

Case 3: $\varphi = e < a, d, f$: (12) Case 4: $\varphi = f < a, d, e$: (13)

$\begin{aligned} a + e &> d + e > e \\ b &= f + y > e + y > e \\ h &= s + d > s + e > e \\ c &= e + x > e \\ d + f &> e + f > e \\ g &= t + a > t + e > e \end{aligned}$	$\begin{aligned} a + e &> f + e > f \\ b &= f + y > f \\ h &= s + d > s + f > f \\ c &= e + x > f + x > f \\ d + f &> f \\ g &= t + a > t + f > f \end{aligned}$
--	--

The proof shows that edge n_2n_4 is regular. Generally, the regular edge in a quadrilateral can be recognized by two attributes:

Empty circle: Edge n_1n_3 in triangulation (a) is irregular. Node n_4 lies inside the circumscribed circle and the circle is therefore not an empty circle. Edge n_2n_4 in triangulation (b) is regular. Node n_3 lies outside the circumscribed circle, which does not contain any nodes and is therefore an empty circle.

Shortest diagonal: The regular diagonal n_2n_4 is shorter than the irregular diagonal n_1n_3 . This follows from triangulation (a) where triangles $n_1n_2n_3$ and n_1n_2u are congruent, such that chords n_1n_3 and n_2u are of equal length. Node n_4 is an inner point of chord n_2u such that the length of n_2n_4 is less than the length of n_2u , and therefore less than the length of n_1n_3 .

Total flip algorithm: The total flip algorithm is based on the property derived above, that a diagonal of a quadrangle formed by two neighboring triangles is a regular edge if it is shorter than the other diagonal of the quadrangle. The algorithm is initiated by constructing an arbitrary triangulation for the given node set.

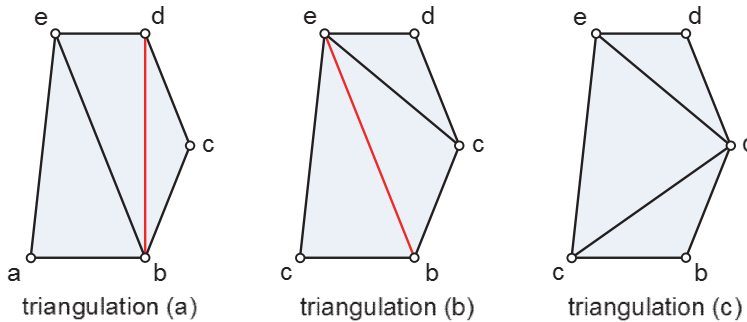


Figure 10: Flipping edges in a the total flip algorithm

The quadrilaterals in the triangulation are traversed. If the diagonal of a convex quadrilateral is not a regular edge, it is flipped such that it becomes regular. Flipping of a diagonal in a quadrilateral can destroy the regularity in adjoining quadrilaterals as shown in figure 10. In triangulation (a) the diagonal be of quadrilateral abde is regular, whereas diagonal bd of quadrilateral bcde is irregular. Diagonal bd is flipped to create triangulation (b). In triangulation (b) the diagonal be in quadrilateral abcd is irregular, whereas diagonal ce in quadrilateral bcde is regular. Diagonal be is flipped to create triangulation (c). Diagonals ac and ce are regular in triangulation (c), which is the Delaunay triangulation.

The traversal of the quadrilaterals of the triangulation must be continued until all diagonals are regular (the circumscribed circles of all triangles are empty). Unfortunately, the algorithm converges slowly for large node sets and is therefore not suitable for application.

Incremental flip algorithm: An envelope triangle is constructed whose interior contains all nodes of the given set. The given nodes are added to the triangle one at a time, as shown in figure 11. After each node addition, edge flipping is applied until the circumscribed circles of all triangles in the triangulation are empty. Joe [12] and Edelsbrunner [14] have shown that the incremental flip algorithm always converges. Figure 11 shows an example of the edge flipping in the envelope triangle after nodes have been added.

Node a_1 is inserted and edges a_1n_1, a_1n_2 and a_1n_3 are constructed. Because the circles passing through $(n_1, n_2, a_1), (n_2, n_3, a_1)$ and (n_3, n_1, a_1) are empty, the three edges are regular and there is no flipping. Node a_2 is inserted and edges a_1a_2, n_2a_2 and n_3a_2 are constructed. The circles passing through (a_1, a_2, n_3) and (n_2, n_3, a_2) are empty such that edges a_1n_3 and n_2n_3 are regular. The circle passing through (a_1, a_2, n_2) contains node n_1 such that edge a_1n_2 must be flipped. Node n_3 is inserted and edges $(n_1a_3), (n_2a_3)$ and (a_2a_3) are constructed. The circles passing through (n_1, a_3, n_2) and (n_2, a_2, a_3) are empty such that edges n_1n_2 and n_2a_2 are regu-

lar. The circle passing through (a_2, a_3, n_1) contains nodes a_1 and n_3 such that edge $n_1 a_2$ must be flipped. The procedure can be continued by inserting additional nodes.

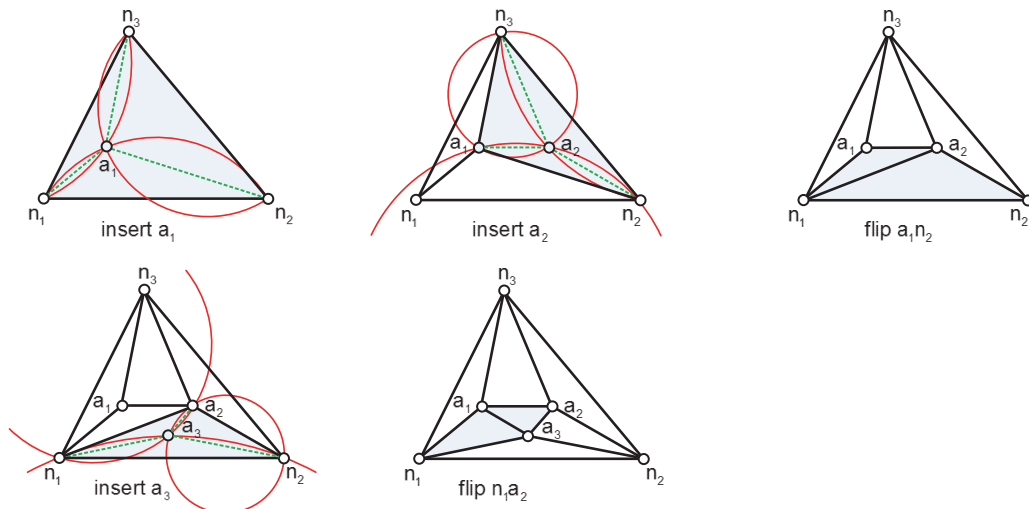


Figure 11: Insertion of nodes a_1, a_2 and a_3 in the envelope triangle (n_1, n_2, n_3)

The insertion of a node and construction of edges inside a triangle can make edges of neighboring triangles irregular. These edges must be identified and tested. A data structure is required in which the edges, whose regularity has not yet been tested, are administered. Baudson [15] has shown that this data structure is complex and expensive. In addition, not every edge, which should be flipped, is flippable. If the union of the triangles adjacent to the edge is not a convex quadrangle, the edge is not flippable. It can, however, be shown [16] that the incremental flip algorithm converges because the search for locally irregular edges is finite and does not cycle, and because at least one of the locally irregular edges is flippable.

6. Constrained Delaunay Triangulation

Evaluation and novel concept: The analysis of the existing methods of unconstrained Delaunay triangulation has shown that the methods are all based on the empty circle property which Delaunay discovered. The methods differ in the application of the property. The fundamental problem is evident in the graphical construction in section 3. Because all n sites must be traversed, and the number of bisectors to be tested per site is proportional to n , the complexity of the graphical method is $O(n^2)$.

Partitioning of the set of the sites reduces the complexity of the triangulation to $O(n \log(n))$, but the initial set of triangles is highly deformed and special cases must be considered to make the algorithms robust. The merging operation can be based directly on the empty circle property as shown, though Lawson [11] proceeded differently by constructing and merging Voronoi diagrams. The flipping, which is required in the merge operations of the partitioning method, is the primary operation of the second class, the flip triangulation algorithms. Their theory is well developed, but special effort is required to make the method robust, and complex data structures and procedures must be developed when then method is implemented. As shown above, the flip triangulation algorithm also uses the empty circle property.

On the basis of this evaluation, it was decided to base the constrained Delaunay triangulation on two foundations. The first is a data structure which permits convenient and explicit specification of the constraints and is adaptable as the triangulation develops. The second is direct application of the Delaunay empty circle property based on the triangulation theorem.

Data structure: Unconstrained Delaunay triangulation of a node set is confined to a domain of the plane, which is the convex hull of the node set. The triangulation is called constrained if it is restricted by one or both of the following conditions:

- The triangulation is restricted to a subdomain of the convex hull, which is called its face.
- Edges are prescribed between pairs of nodes in the given set.

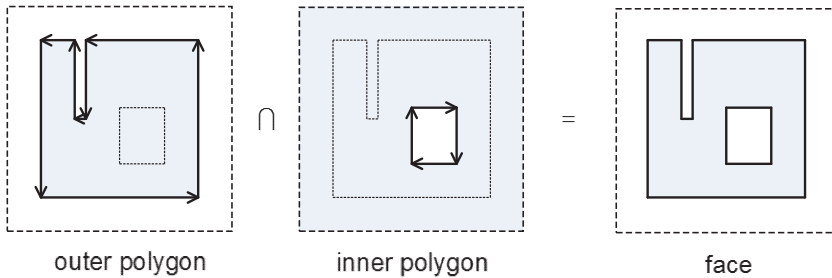


Figure 12: Description of a face as the intersection of the interiors of polygons

A face is defined by means of a set of polygons as shown in figure 12. The oriented polygons are not self-intersecting and do not intersect or touch each other. The outer polygon contains all of the inner polygons. An inner polygon does not contain any other polygon. The area of the face is defined as the intersection of the inner point sets of the polygons. The edges which are prescribed in the face may not intersect each other or a polygon of the face.

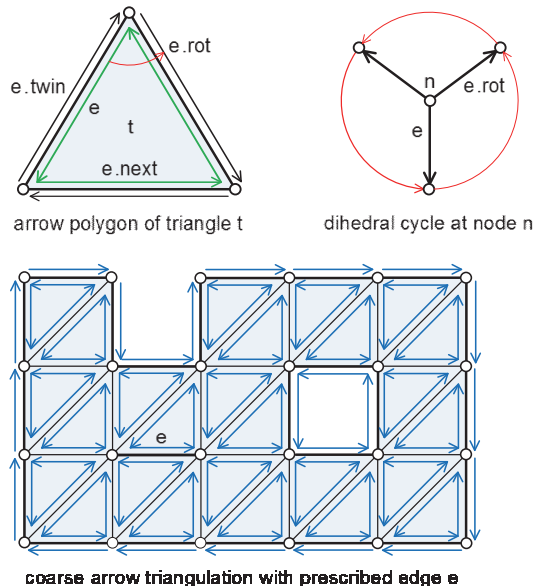


Figure 13: Arrow data structure for a triangulation

A data structure is required to relate the triangulation algorithm to the prescribed constraints. It is created by splitting each edge of the triangulation into two half-edges [7], which are called arrows. The arrow objects of the closed polygon on the boundary of a triangle are connected by a pointer next, as shown in figure 13. The arrows leaving a node of the triangulation are ordered by their dihedral angle about the normal vector of the plane. The arrows of a dihedral cycle are connected by a pointer rot, as shown in figure 13. This data structure can also be used to describe the dual Voronoi diagram. Quadedge data structures [17] have been developed which combine the description of the Delaunay and Voronoi subdivisions for a node set.

Triangulation theorem: If nodes R, S, T are the corners of a triangle D_1 , whose circumscribed circle is empty, and A is an arbitrary node outside the circumscribed circle, then a triangle D_2 can be constructed with node A and two of the nodes of set $\{R,S,T\}$ as corners, such that the circumscribed circle of D_2 does not contain the third node in the set. Figure 14 shows an example of triangles D_1 and D_2 and their circumscribed circles.

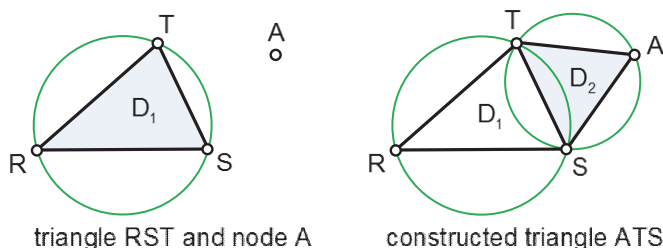


Figure 14: Given triangle D_1 and constructed triangle for the triangulation theorem

Proof: The midpoint M_1 of the circumscribed circle of the given triangle D_1 is chosen as origin of a Cartesian coordinate system (x,y) . The corners of triangle D_1 are named R,S,T in the anti-clockwise direction. Choose an edge ST of triangle D_1 such that the third corner R and point A are located on opposite sides of the line containing edge ST, as shown in figure 15. Axis x points from origin M_1 to the midpoint M_2 of edge ST.

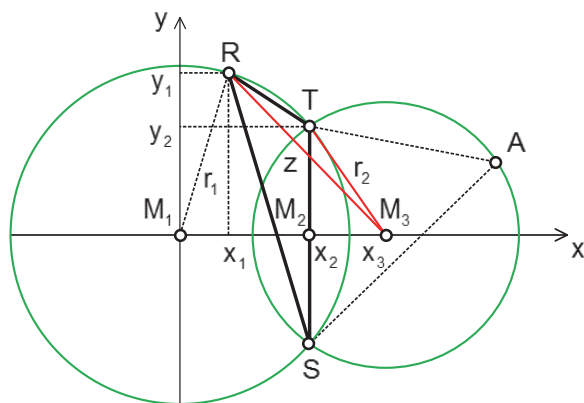


Figure 15: Geometric construction for the proof of the triangulation theorem

The midpoint of the circle which passes through points A, T and S is denoted by M_2 . The radii of the circles with midpoints M_1 and M_3 are denoted by r_1 and r_2 , the distance between points R and M_3 by z . Point R is located outside the circumscribed circle of triangle ATS if the condition $z > r_2$ is satisfied. The rule of Pythagoras is used in the following derivations.

$$\begin{aligned}
 z^2 &= (x_3 - x_1)^2 + y_1^2 \\
 &= x_3^2 - 2x_1x_3 + (x_1^2 + y_1^2) \\
 &= x_3^2 - 2x_1x_3 + r_1^2 \\
 r_2^2 &= (x_3 - x_2)^2 + y_2^2 \\
 &= x_3^2 - 2x_2x_3 + (x_2^2 + y_2^2) \\
 &= x_3^2 - 2x_2x_3 + r_1^2 \\
 z^2 - r_2^2 &= 2x_3(x_2 - x_1)
 \end{aligned} \tag{14}$$

The counter-clockwise orientation of boundary RST and the choice of the coordinate system assure that $x_2 > x_1$. Because edge ST was chosen such that points R and A lie on opposite sides of the line passing through points S and T, and because point A is located outside the circumscribed circle of triangle RST, coordinate x_3 of the midpoint of the circumscribed circle of triangle AST is positive. It follows from expression (14) that $|z| > |r_2|$, such that point R lies outside the circumscribed circle AST. This proves the theorem.

Basic construction step: Let a domain, which is to be triangulated, be described by a set of nodes $N = \{n_0, \dots, n_{m-1}\}$ and a set of arrows $E = \{e_0, \dots, e_{q-1}\}$ on its boundary. Assume without loss of generality that arrow e_0 points from node n_0 to node n_1 . A node $n_v \in N - \{n_0, n_1\}$ is to be determined such that the circumscribed circle of triangle $n_0n_1n_v$ is empty.

A Cartesian local coordinate system with axes s and t is constructed with the midpoint U of arrow n_0n_1 as origin. Unit basis vector \mathbf{g}_1 points in the direction from n_0 to n_1 , and unit basis vector \mathbf{g}_2 is constructed such that $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ and the normal vector \mathbf{n} of the plane form a right hand system.

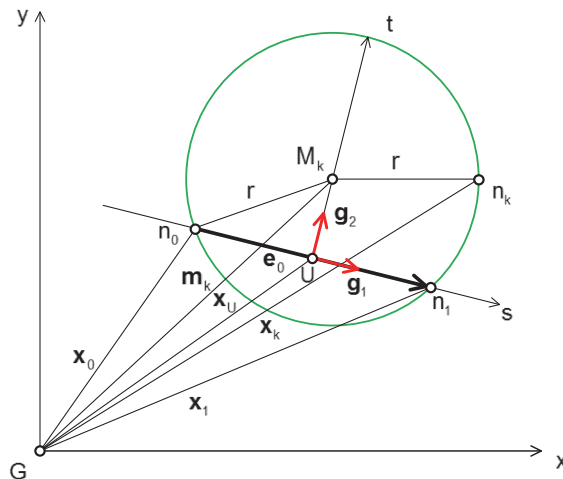


Figure 16: Geometric construction for the basic triangulation step

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -d \\ c \end{bmatrix} \quad (15)$$

A node $n_k \in N - \{n_0, n_1\}$ is chosen and the circle through nodes n_0, n_1 and n_k with midpoint M_k is constructed as shown in figure 16. Because n_k must be an interior point of the face, only points to the left of axis s are considered. Node n_k is therefore rejected if the area of triangle n_0, n_1, n_k is negative. Depending on the shape of the face, not all points to the left of axis s are interior points. However, the point left to axis s , which is nearest to edge \mathbf{e}_0 , is an interior point.

Let the vector from the global origin G to midpoint M_k be denoted by \mathbf{m}_k . The distance from midpoint M_k to nodes n_0 and n_k is equal. This leads to the following equation for the circle:

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}_k - \mathbf{x}_0)^T (\mathbf{m}_k - \mathbf{x}_0) &= (\mathbf{m}_k - \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{m}_k - \mathbf{x}_k) \\ 2(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{m}_k &= \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (16)$$

Vector \mathbf{m}_k from origin G to midpoint M_k equals the sum of vector \mathbf{x}_u from G to the midpoint U of arrow \mathbf{e}_0 , and vector $t_k \mathbf{g}_2$, where t_k is the t -coordinate of midpoint M_k :

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{x}_u + t_k \mathbf{g}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) + t_k \mathbf{g}_2 \quad (17)$$

Substitution of \mathbf{m}_k from equation (17) into equation (16) yields an expression for t_k :

$$t_k = \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1)}{2(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_2} \quad (18)$$

Algorithm: The triangulation is initiated by choosing a boundary arrow \mathbf{e}_0 of the outer polygon with nodes n_0 and n_1 , and a node $n_2 \in N - \{n_0, n_1\}$ is selected. Coordinate t_2 is computed with expression (18). Triangle n_0, n_1, n_2 is called the trial triangle. The next test point n_3 is chosen in set $N - \{n_0, n_1, n_2\}$ and its coordinate t_3 is computed. The values of t_2 and t_3 determine whether triangle n_0, n_1, n_3 replaces n_0, n_1, n_2 as trial triangle. The test is illustrated in figure 17:

- If $t_3 > t_2$ the circumscribed circle of triangle n_0, n_1, n_3 is not empty because it contains node n_2 . Triangle n_0, n_1, n_2 remains the trial triangle.
- If $t_2 > t_3$ the circumscribed circle of triangle n_0, n_1, n_2 is not empty because it contains node n_3 . Triangle n_0, n_1, n_3 is empty and becomes the new trial triangle.
- If $t_2 = t_3$ the four nodes lie on a common circle. Either of the triangles can be chosen as trial triangle.

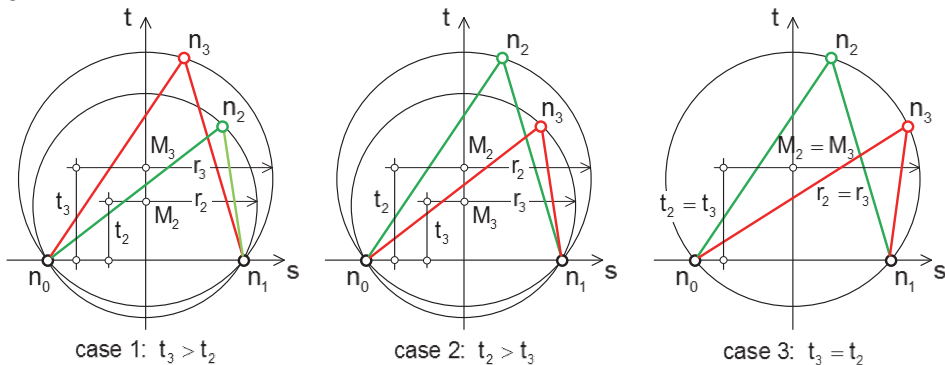


Figure 17: Empty circle test for a trial triangle

The procedure is repeated for the remaining nodes in set N . After the node with the smallest coordinate t_k has been determined, the corresponding triangle is added to the triangulation. This operation modifies the boundary of the face. Nodes and edges, which no longer are part of the area of the face that has not yet been triangulated, are removed. The first edge without a neighboring triangle which succeeds e_0 in the new boundary is treated in a similar manner. The process is repeated and terminates after the outer polygon has been traversed. Each of the inner polygons is then treated by analogy.

After the first traversal of the outer polygon and all inner polygons, the number of inner polygons may differ from the initial specification. If the modified face is not completely triangulated, a second traversal is initiated with the outer polygon. The traversals are repeated until the face is completely triangulated. The algorithm is illustrated in figure 20.

The addition of one triangle by the described method described can lead to the automatic creation of another triangle. It is not guaranteed that the automatically created triangle has an empty circumscribed circle. This deviation from the empty circle property is due to the constraints that have been specified, and cannot be avoided. The simplest case of automatic generation of triangles is shown in figure 18 with only 4 nodes.

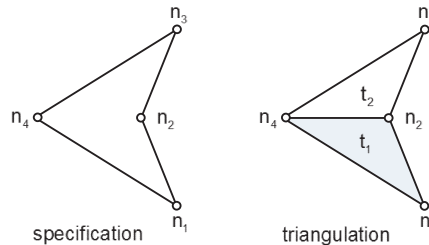


Figure 18: Automatic creation of triangle t_2 after the construction of triangle t_1

Lens: The number of nodes, for which the coordinate t_k is computed, is reduced significantly by introducing a lens. Only the nodes which are located inside the lens are considered in the search. Point n_2 is chosen freely. After a trial triangle has been determined, the circumferential circle of the triangle determines the lens as shown in figure 19. With each improvement of the trial triangle, the size of the lens decreases. The points within the lens can be determined at low cost, for example by storing the node set in a quadtree [18]. The quadtree can be used to choose one of the neighbors of nodes n_0 or n_1 as first trial node n_2 . The complexity of the construction of a quadtree with n entries is $O(n \log(n))$.

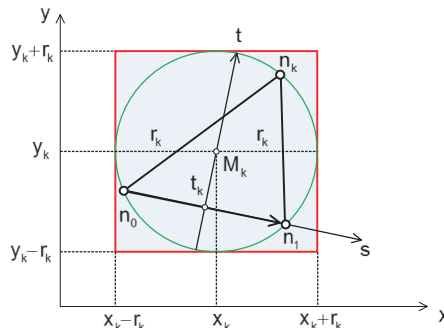


Figure 19: Lens for trial triangle $n_0n_1n_k$

Example: Figure 20 shows a set of measuring stations at a lake with an island. The stations are treated as nodes of a constrained Delaunay triangulation, which is to be restricted to the water surface. Figure 20 illustrates the growth of the triangulation in the traversals of the polygons of its boundary. The time required for the triangulation and its graphical presentation on a conventional laptop computer is hardly noticeable.

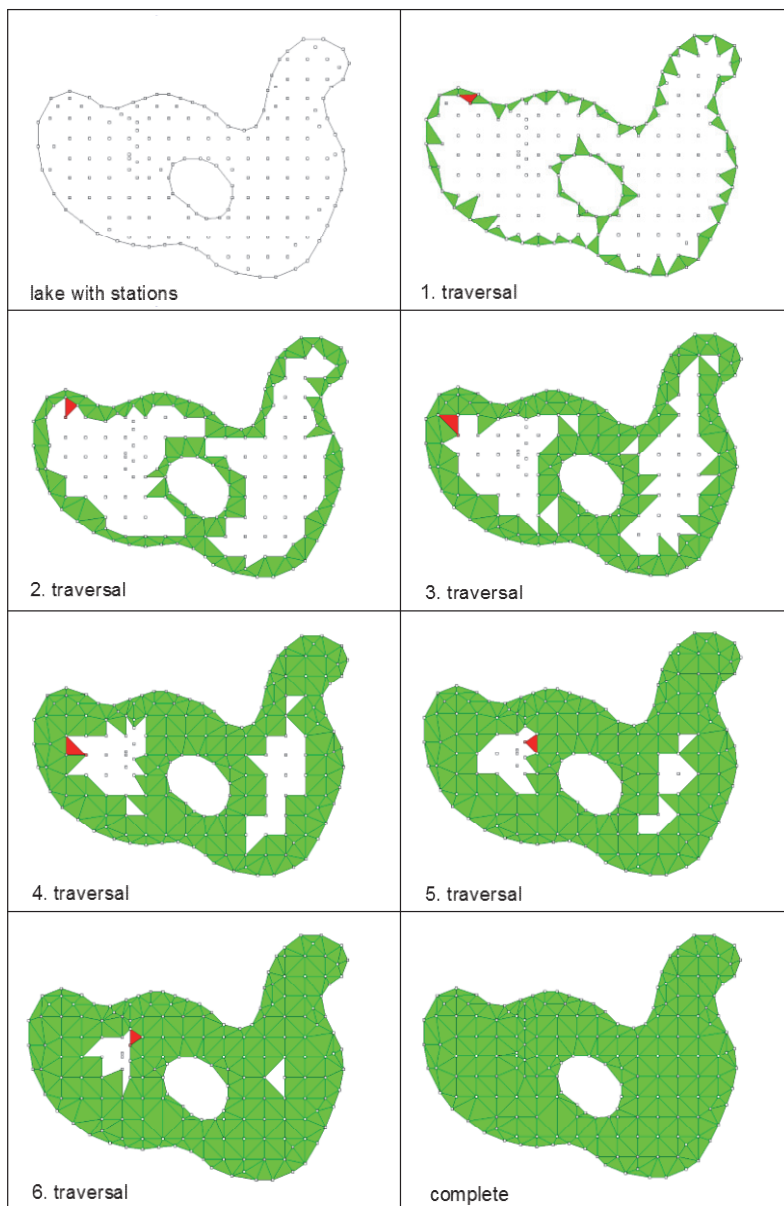


Figure 20: Triangulation of measuring stations at a lake

7. Results and Conclusions

It has been shown that the complexity of the partitioning and the flip algorithms, and some of the problems encountered with their robustness, can be avoided by returning to the empty circle property of Delaunay and using the bisector concept illustrated in the graphical example to construct constrained triangulations incrementally. The complexity of the novel method depends on the complexity of the process which determines the subset of the given nodes that lies within a lens. Quadtrees are one of the possible tools for this task.

The extension of the method presented in this paper to polyhedral subdivisions of three-dimensional space containing the points nearest to given sites is a promising area of research. This will require the replacement of the empty circle property by an empty sphere property, which has also been discovered by Delaunay. The half-edge structure for the description of the triangulation and its constraints will be replaced by a half-face structure, where the dihedral cycles at the nodes are replaced by dihedral cycles at the edges. The three-dimensional cells will be described by the intersection of an oriented outer polyhedron with a set of inner polyhedra. The circular lens will be replaced by a spherical lens, and quadtrees will be replaced by octrees to collect the nodes located inside the lens.

The data structure required for the description of three-dimensional Voronoi diagrams and Delaunay triangulations can also be useful for the description of polyhedral subdivisions of space when original buildings are mapped to digital models in building information modeling (BIM). This is an area of great practical importance and intensive current research.

© Vera Galishnikova, Peter Jan Pahl, 2018

References

1. Liebling T.M., Pournin L. (2010). *Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations: Ubiquitous Siamese Twins*. Documenta Mathematica. Mathematics Subject Classification: 01A65, 49-03, 52C99, 68R99, 70-08, 92-08.
2. Voronoi G. (1908). *Nouvelles applications des paramètres continues à la théorie des forms quadratiques*. J. Reine Angew. Math. 134, 198-287.
3. Delaunay B.N. (1932). *Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie*. Z. Kristallographie, 84, 109-149.
4. Dirichlet G.L. (1850). Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, J. Reine Angew. Math. 40, 209–227.
5. Aurenhammer F. (1987). *Power diagrams: properties, algorithms and applications*. SIAM J. Comput. 16, 1, 78-96.
6. Galishnikova V., Pahl P.J. (2013). *Computational Geometry*. Lecture Notes.
7. Guibas L., Stolfi J. (1985). *Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Regions*. ACM Trans. on Graphics. V4, No. 2, April 1985.
8. Shamos M.I., Hoey D. (1975). *Closest-point problems*. In Proceedings of the 16th Annual IEEE Symposium on FOCS, 151–162.
9. Skvortsov A.V. (2002). *Delaunay Triangulation and its applications*. Tomsk State University, 128 p. (in Russ.).

10. Skvortsov A.V., Mirza N.S. (2006). *Algorithms for construction and analysis of triangulation*. Tomsk State University Publ., 168 p. (in Russ.).
11. Lawson C.L. (1972). *Transforming triangulations*, Discrete Math. 3, 365–372.
12. Joe B. (1991). *Construction of three-dimensional Delaunay triangles using local transformations*. Comput. Aided Geom. Design 8, 123-142.
13. de Loera J.A., Rambau J., Santos F. (2010). *Triangulation: structures for triangulations and applications*. Algorithms and Computation in Mathematics 25, Springer.
14. Edelsbrunner H., Shah N.R. (1996). *Incremental topological flipping works regular triangulations*. Algorithmica 15, 223-241.
15. Baudson C., Klein E. (2006). *Berechnung und Visualisierung von Voronoi-Diagrammen in 3D*. Diplomarbeit, p. 1-138. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
16. Pahl, P.J. (2011). *Theory and Application of Polytopes*. Lecture notes. Chair of Bauinformatik, Technische Universität Berlin, 107 p.
17. Mäntylä, M. (1988). *Introduction to Solid Modeling*. W.H. Freeman & Co. New York. ISBN: 0-88175-108-1.
18. de Berg M., van Krefeld M., Overmars M., Schwarzkopf O. (1997). *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Chapter 14. Springer. ISBN 3-540-61270-X. 363 p.

About the authors:

Vera V. Galishnikova – Associate Professor, Director of the Department of Architecture and civil engineering, Engineering Academy, RUDN University. **Research Interests:** Computational Civil Engineering, Building information modeling, Topological computer models of buildings, Computational geometry, Computational mechanics of complex steel structural systems – latticed plates and shells, thin-walled plate and plate-rod structures. Nonlinear finite element analysis of space frames. Nonlinear stability of structures. **Contact information:** e-mail – galishni@gmail.com

Pahl Peter Jan — Prof. Dr. Dr. h. c. mult., Department of Civil Engineering, Technical University Berlin (TUB). **Research Interests:** Mathematical modeling and optimization of complex structural systems, Computational Civil Engineering, Building information modeling, Topological computer models of buildings, Computational geometry, Computational mechanics of complex steel structural systems – latticed plates and shells, thin-walled plate and plate-rod structures. Nonlinear finite element analysis of space frames. Nonlinear stability of structures. **Contact information:** e-mail – pahl@ifb.bv.tu-berlin.de

For citation:

Vera Galishnikova, Peter Jan Pahl (2018). Constrained Construction of Planar Delaunay Triangulations without Flipping. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14 (2). 154–174. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-154-174.

ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНАРНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ДЕЛОНЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ФЛИПА

В.В. ГАЛИШНИКОВА*, П.Я. ПАЛЬ**

* Российский университет дружбы народов
117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

** Берлинский технический университет
D-10623, Федеративная республика Германия, Берлин, ул. 17 июня, д. 135,

(*поступила в редакцию: 15 января 2018 г.; принята к публикации: 15 марта 2018 г.*)

Построение диаграмм Вороного и триангуляций Делоне широко применяется во многих отраслях науки. Триангуляции Делоне за счет своих особых свойств более предпочтительны, чем другие триангуляции для одного и того же множества узлов. Триангуляция Делоне характеризуется круговым критерием. Методы деления и флипа, которые были разработаны для цифрового конструирования диаграмм Вороного и триангуляций Делоне, только косвенно используют этот критерий. Авторами предложен принципиально новый метод построения, который основан на прямом использовании кругового критерия триангуляции Делоне. Геометрия шагов алгоритма проста и интуитивно понятна. Метод может применяться для триангуляций с ограничениями, где заранее заданы область триангуляции и некоторые ребра. Представлена структура данных для невыпуклых и многосвязных множеств, которая позволяет удобно обуславливать ограничения и триангуляцию. Предлагаемый метод отличается простотой реализации, эффективностью работы и надежностью.

Ключевые слова: Делоне, Вороной, круговой критерий, наименьшая диагональ, теорема триангуляции, разбиение, флип, ограничение, полуреберный, диздральный цикл

Об авторах:

Галишникова Вера Владимировна – доктор технических наук, директор департамента архитектуры и строительства инженерной академии, Российский университет дружбы народов. *Область научных интересов:* вычислительная строительная инженерия, информационное моделирование зданий, топологические компьютерные модели зданий, вычислительная механика сложных стержневых систем, нелинейные конечно-элементные модели и программные комплексы для расчета пространственных стержневых систем, нелинейная устойчивость конструкций. *Контактная информация:* e-mail – galishni@gmail.com

Петер Ян Паль – доктор наук, профессор кафедры инженерно-строительных наук, Берлинский технический университет (ТУБ) (D-10623, Берлин, ул. 17 июня, д. 135, Федеративная республика Германия). *Область научных интересов:* математическое моделирование и оптимизация сложных конструктивных систем, вычислительная строительная инженерия, информационное моделирование зданий, топологические компьютерные модели зданий, вычислительная механика сложных стержневых систем, нелинейные конечно-элементные модели и программные комплексы для расчета пространственных стержневых систем, нелинейная устойчивость конструкций. *Контактная информация:* e-mail – pahl@ifb.bv.tu-berlin.de

Для цитирования:

Galishnikova V.V., Pahl P.J. Constrained Construction of Planar Delaunay Triangulations without Flipping // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 154–174. DOI:10.22363/1815-5235-2018-14-2-154-174.

ПАМЯТИ ТОВАРИЦА**ВИТАЛИЙ МИХАЙЛОВИЧ БОНДАРЕНКО****22.06.1925****22.02.2018**

22 февраля 2018 года на 93-м году ушел из жизни крупнейший ученый в области строительных конструкций, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, заслуженный деятель науки и техники РФ, лауреат премии РФ в области науки и техники, заслуженный инженер России, почетный строитель России, почетный работник высшего профессионального образования РФ, почетный доктор и профессор ряда высших учебных заведений РФ, действительный член РИА, иностранный член Академии строительства Украины и Британского института гражданских инженеров, член международной ассоциации писателей и публицистов, доктор технических наук, профессор **Виталий Михайлович Бондаренко**.

Виталий Михайлович – ветеран Великой Отечественной войны. Участвовал в Воронежском прорыве, битве на Курской дуге, в боях за освобождение Украины, Польши, Чехословакии, Германии. Награжден многочисленными орденами и медалями, в том числе орденом Отечественной войны I степени, двумя медалями «За отвагу». Виталий Михайлович прошел славный жизненный путь: фронтовик – рабочий – инженер – руководитель строительных организаций – ученый – руководитель вуза и научно-проектного института – заведующий кафедрой, академик-секретарь отделения строительных наук и вице-президент РААСН. Но самое главное в его многогранной жизни и деятельности – это наука. Им были разработаны: прикладная теория режимного и наследственного силового сопротивления строительных конструкций, диссипативная теория силового сопротивления железобетонных конструкций и конструктивной безопасности сооружений.

В.М. Бондаренко – автор более 400 научных трудов, в том числе учебников и учебных пособий для вузов, монографий и книг исторического содержания. Родина высоко оценила заслуги Виталия Михайловича и в мирное время, отметив его деятельность различными государственными наградами: орденом

«За заслуги перед Отечеством» IV степени, персональной благодарностью президента Российской Федерации «За большой вклад в развитие отечественной фундаментальной строительной науки», Большой медалью РААСН.

Светлая память о Виталии Михайловиче навсегда сохранится в наших сердцах.

*Коллектив
Научно-исследовательского института строительной физики
Российской академии архитектуры и строительных наук
(НИИСФ РААСН)*