

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-459-468
УДК 539.3
EDN: DTMAGZ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Снижение чувствительности к начальным несовершенствам при помощи изменения бифуркационных диаграмм

Г.А. Мануйлов , С.Б. Косицын , И.Е. Грудцына ✉

Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация
✉ grudtsyna_ira90@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 5 июля 2023 г.
Доработана: 14 сентября 2023 г.
Принята к публикации: 25 сентября 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Представлен подход к построению диаграмм равновесных состояний с целью снижения чувствительности к начальным несовершенствам для задачи устойчивости подкрепленных пластин (перенос точки бифуркации, соответствующей волнообразованию ребер и обшивки). Получены новые соотношения геометрических параметров для двух вариантов подкрепленных пластин, при которых первой по величине является критическая нагрузка общей формы потери устойчивости, а следующая критическая нагрузка соответствует местной форме волнообразования (ребер или обшивки). Для решения поставленных задач использовался конечноэлементный комплекс MSC PATRAN — NASTRAN. Для моделирования использованы плоские четырехузловые конечные элементы. Проведены расчеты с учетом геометрической нелинейности. Материал считался абсолютно упругим. Построены кривые чувствительности критических нагрузок к амплитудам начальных несовершенств. Результаты показали, что перенос точек бифуркации волнообразования пластины или ребер позволил получить кривые с менее выраженным падением критической нагрузки по сравнению с исходными, и, следовательно, представленный алгоритм изменения геометрических параметров подкрепленных пластин, полученных в соответствии с новыми диаграммами равновесных состояний, реализует возможность рационального проектирования упомянутых тонкостенных систем.

Ключевые слова: устойчивость равновесия, подкрепленная пластина, начальные геометрические несовершенства, критическая нагрузка

Для цитирования

Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Снижение чувствительности к начальным несовершенствам при помощи изменения бифуркационных диаграмм // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 459–468. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-459-468>

Мануйлов Гайк Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0009-0002-4170-586X; E-mail: gajk.manuilov@yandex.ru

Косицын Сергей Борисович, доктор технических наук, советник РААСН, заведующий кафедрой теоретической механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-3241-0683; E-mail: kositsyn-s@mail.ru

Грудцына Ирина Евгеньевна, ассистент кафедры теоретической механики, Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-6319-3909; E-mail: grudtsyna_ira90@mail.ru

© Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е., 2023




This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Reducing sensitivity to initial imperfections by changing bifurcation diagrams

Gaik A. Manuylov , Sergey B. Kositsyn , Irina E. Grudtsyna  

Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

 grudtsyna_ira90@mail.ru

Article history

Received: July 5, 2023

Revised: September 14, 2023

Accepted: September 25, 2023

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. An approach to the construction of equilibrium state diagrams is presented in order to reduce the sensitivity to initial imperfections for the problem of stability for reinforced plates (transfer of the bifurcation point corresponding to the wave formation of ribs and cladding). New ratios of geometric parameters for two variants of strengthened plates have been obtained, where the first critical load of the general form of stability loss is the first by value, and the next critical load corresponds to the local form of wave formation of ribs or cladding. The finite element complex MSC PATRAN — NASTRAN was used to solve the stated above problems. Flat four-node finite elements were applied for modeling. The calculations were performed with account of geometric nonlinearity. The material was considered to be absolutely elastic. Curves of critical load sensitivity to the amplitudes of the initial imperfections were generated. The results demonstrate that transposition of bifurcation points of wave formation in the plate or ribs enabled to obtain curves with less significant decrease of critical load as compared to the initial ones. Consequently, the presented algorithm for changing the geometric parameters of reinforced plates obtained in accordance with new equilibrium state diagrams implements the possibility of rational design of the specified thin-walled systems.

Keywords: equilibrium stability, reinforced plate, initial geometric imperfections, critical load

For citation

Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Reducing sensitivity to initial imperfections by changing bifurcation diagrams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):459–468. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-459-468>

1. Введение

Теория устойчивости играет ключевую роль в современном инженерном деле, так как почти все известные конструктивные разрушения содержат в себе элементы явления неустойчивости равновесия. Понимание докритического и послекритического поведения тонкостенных элементов конструкций позволяет оценивать их реальную несущую способность, а также чувствительность к начальным несовершенствам. За последние три десятилетия проведены обширные численные и экспериментальные исследования устойчивости и предельной несущей способности тонких подкрепленных пластин с продольными ребрами жесткости [1–3]. Одной из основополагающих работ по данной теме является статья В. Твергарда [4], в которой рассмотрено равновесие бесконечно широкой пластины, ученые ЦАГИ [5; 6] за последние годы провели ряд численных и экспериментальных расчетов устойчивости и взаимодействия собственных форм стрингерных панелей из углепластика с учетом влияния начальных несовершенств, авторами [7–12] исследовано докритическое и начальное послекритическое равновесие упругих тонких подкрепленных пластин с учетом взаимодействия собственных форм, а также представлена классификация нелинейных решений задачи устойчивости упомянутых пластин.

Несмотря на большое количество работ в этом направлении, решения по изменению геометрии таких систем с целью снижения чувствительности критической нагрузки к влиянию начальных несовершенств металлических подкрепленных пластин показаны не были. В [13] приводятся интересные экспе-

Gaik A. Manuylov, Ph.D., Associate Professor, Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0009-0002-4170-586X; E-mail: gajk.manuilov@yandex.ru

Sergey B. Kositsyn, D.Sc. in Engineering, Counselor of RAACS, Head of the Department “Theoretical Mechanics”, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-3241-0683; E-mail: kositsyn-s@mail.ru

Irina E. Grudtsyna, Assistant Professor, Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-6319-3909; E-mail: grudtsyna_ira90@mail.ru

риментальные исследования сжатых подкрепленных пластин, в [14–17] показаны основы численного и аналитического методов расчета на устойчивость подкрепленных пластин, в [18] показаны решения задач устойчивости для подкрепленных пластин конечных размеров при нагружении сжимающими силами и изгибающим моментом, в [19] исследованы подкрепленные пластины с ребрами z-образного сечения, получены матрицы жесткости для решения краевых задач.

Согласно асимптотической теории В.Т. Койтера [20] различают следующие случаи потери устойчивости:

- простое выпучивание (несвязанное), когда одному собственному значению соответствует одна собственная форма;
- сложное выпучивание (связанное), когда две или более собственных форм имеют одно или близкие собственные значения.

Развитие явления сложного (связанного) выпучивания в результате взаимодействия собственных форм зачастую является причиной неустойчивого послекритического поведения тонкостенных систем. Взаимодействие форм порождает большую чувствительность к начальным геометрическим несовершенствам. Это резко снижает несущую способность системы, что особенно заметно в задачах устойчивости тонких подкрепленных пластин. Во избежание данного эффекта предложен алгоритм изменения диаграмм равновесных состояний, который заключается в следующем:

- 1) перенести точки бифуркации, соответствующие местному волнообразованию, выше значения критической нагрузки бифуркации, отвечающей общей потере устойчивости, путем соответствующего изменения геометрических параметров подкрепленных пластин;
- 2) провести оценку критических нагрузок из линейного расчета, соответствующих общей форме потери устойчивости и местной форме волнообразования (в ребрах или пластине). Критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости, должна быть выше по значению критической нагрузки, соответствующей общей форме. Чем более существенна разница между критической нагрузкой волнообразования (в ребрах или пластине) по отношению к критической нагрузке общей формы, тем менее выражен эффект влияния взаимодействия форм.

Подход к построению диаграмм равновесных состояний (перенос точки бифуркации, соответствующей волнообразованию ребер и пластины) показан на рис. 1 и 2.

При решении данных задач учитывалось взаимодействие общей формы потери устойчивости с каждой местной формой в отдельности.

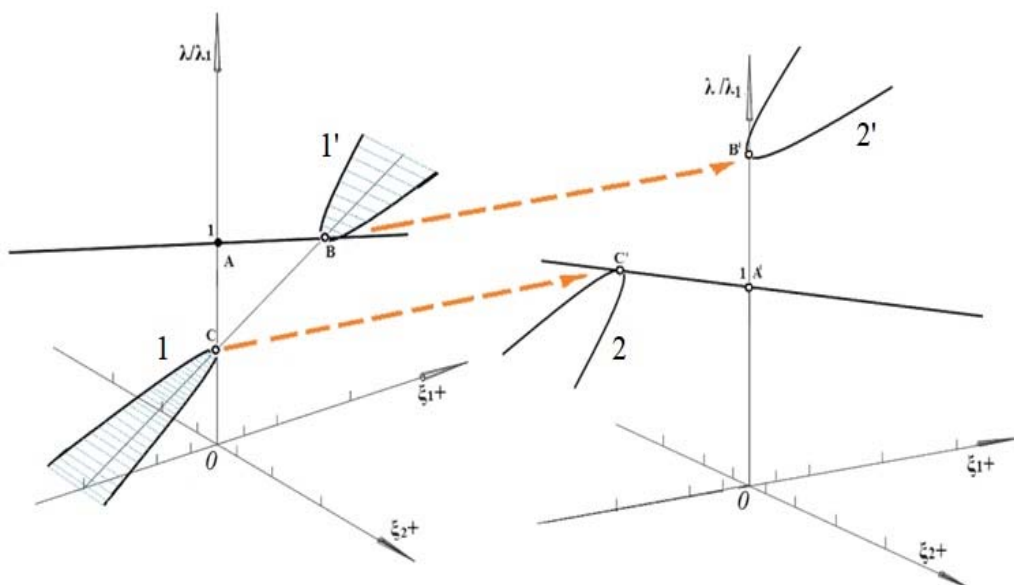


Рис. 1. Представление подхода к построению диаграмм равновесных состояний (перенос точки бифуркации, соответствующей волнообразованию ребер)

Figure 1. Representation of the approach to the generation of equilibrium state diagrams (transposition of the bifurcation point corresponding to the wave formation in ribs)

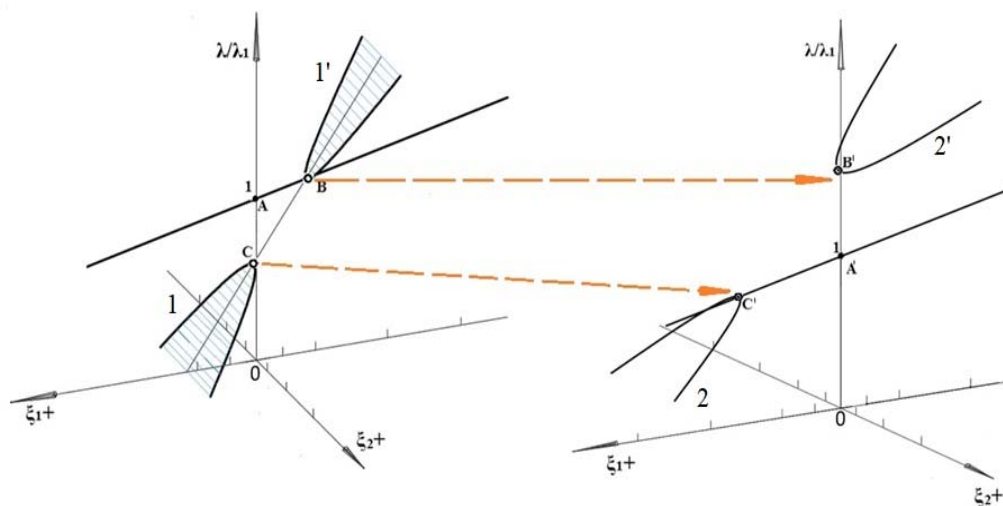


Рис. 2. Представление подхода к построению диаграмм равновесных состояний (перенос точки бифуркации, соответствующей волнообразованию пластины)
Figure 2. Representation of the approach to the generation of equilibrium state diagrams (transposition of the bifurcation point corresponding to the wave formation in a plate)

2. Методы и материалы

Рассматривается бесконечно широкая регулярная подкрепленная пластина (см. рис. 1), сжатая центрально приложенными силами.

Физические характеристики материала: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\nu = 0,3$.

Граничные условия: пластина шарнирно опята по торцам, продольные края — свободные.

Это позволяет исследовать устойчивость подкрепленной пластины при помощи анализа равновесия одного регулярного Т-образного фрагмента (по аналогии с В. Твергардом и А.И. Маневичем [4; 21], равноустойчивого с остальными Т-образными фрагментами (рис. 3).

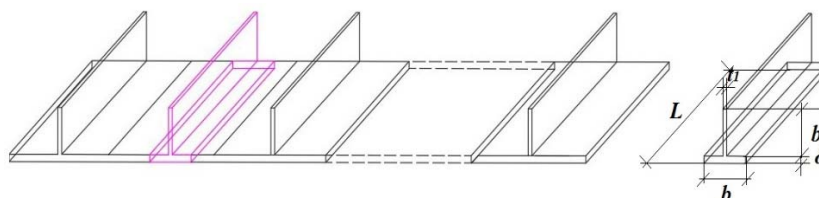


Рис. 3. Поперечное сечение подкрепленной пластины
Figure 3. Cross-section of a strengthened plate

Размеры Т-образного фрагмента пластины следующие: b — ширина (расстояние между ребрами в осях), δ — толщина пластины, b_1 — высота ребра, t_1 — толщина ребра, L — длина фрагмента (подкрепленной пластины).

Граничные условия Т-образного фрагмента пластины: шарнирное опирание вдоль коротких сторон, вдоль длинных сторон — плавающие заделки. Нагрузка приложена в виде сосредоточенной силы в центре тяжести сечения (рис. 4).

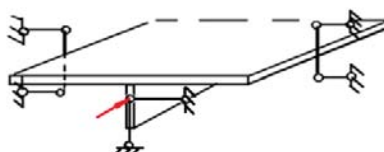


Рис. 4. Граничные условия и нагружение Т-образного фрагмента
Figure 4. Boundary conditions and loading of the T-shaped fragment

Введем безразмерный параметр:

$$\mu_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad (1)$$

где λ — параметр нагрузки, λ_1 — критический параметр нагрузки, полученный из линейного расчета для общей формы выпучивания по типу эйлеровой стойки.

Рассмотрим пример реализации построения новых диаграмм равновесных состояний с целью снижения чувствительности критических нагрузок подкрепленных пластин к начальным несовершенствам. Исходными геометрическими соотношениями Т-образного фрагмента являются:

$$\frac{b}{h} = 25; \quad \frac{b_1}{t_1} = 20; \quad \frac{b_1 t_1}{bh} = \frac{1}{5}; \quad \frac{L}{b} = 5.$$

При данных геометрических параметрах Т-образного фрагмента первой критической нагрузкой потери устойчивости является нагрузка, соответствующая местной форме волнообразования в ребре, а следующей — нагрузка, соответствующая общей форме потери устойчивости, относительная нагрузка, соответствующая численному нелинейному решению, составила $\mu_1 = 0,758$. Будем варьировать соотношения $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$. Соотношение $\frac{b}{h}$ управляет формой волнообразования, а соотношение $\frac{L}{b}$ управляет критической нагрузкой, соответствующей общей форме. В итоге получим новые соотношения геометрических параметров, при которых первой по величине является критическая нагрузка общей формы потери устойчивости ($P_{кр}^3 = 980,91$ кН), а следующая критическая нагрузка соответствует волнообразования ребра ($P_{кр}^B = 1655,61$ кН).

$$\frac{b}{h} = 35; \quad \frac{b_1}{t_1} = 20; \quad \frac{b_1 t_1}{bh} = \frac{1}{5}; \quad \frac{L}{b} = 7,$$

и новые геометрические параметры Т-образного фрагмента:

$$h = 1 \text{ см}, \quad b = 35 \text{ см}, \quad t_1 = 0,6 \text{ см}, \quad b_1 = 12 \text{ см}, \quad L = 245 \text{ см}.$$

Изменение геометрических параметров с помощью вариаций соотношений $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$ позволило получить разницу значений критических нагрузок общей формы потери устойчивости и местной формы волнообразования в ребре в 1,7 раза.

Аналогичное представление геометрических параметров регулярного фрагмента реализовано для случая взаимодействия общей формы потери устойчивости с местной формой волнообразования пластины.

Исходными геометрическими соотношениями Т-образного фрагмента являются

$$\frac{b}{h} = 100; \quad \frac{b_1}{t_1} = 20; \quad \frac{b_1 t_1}{bh} = \frac{1}{5}; \quad \frac{L}{b} = 6,67.$$

Соотношения геометрических параметров с учетом варьирования $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$:

$$\frac{b}{h} = 90; \quad \frac{b_1}{t_1} = 20; \quad \frac{b_1 t_1}{bh} = \frac{1}{5}; \quad \frac{L}{b} = 10.$$

Новые геометрические параметры Т-образного фрагмента подкрепленной пластины для случая, когда осуществлен перенос точки бифуркации волнообразования пластины:

$$h = 1 \text{ см}, \quad b = 90 \text{ см}, \quad t_1 = 0,95 \text{ см}, \quad b_1 = 19 \text{ см}, \quad L = 900 \text{ см}.$$

Из линейного расчета получены значения критических нагрузок. Значение нагрузки, соответствующее общей форме потери устойчивости, составило $P_{кр}^3 = 465,6$ кН.

Для местной формы волнообразования пластины значение критической нагрузки $P_{кр}^B = 681,60$ кН. Изменение геометрических параметров позволило получить разницу значений критических нагрузок в 1,5 раза.

3. Результаты и обсуждение

Решение в программном комплексе с учетом геометрической нелинейности показало следующие результаты: нагрузка в предельной точке $P_{кр}$ на рис. 5. Значения критических нагрузок из линейных расчетов представлены в [9]. $P_{кр} = 979,21$ кН ($\mu_1 = 0,998$). Прогиб развивается в сторону пластины. Следовательно, ребро оказывается в сжатой зоне, однако бифуркации волнообразования не наблюдается, так как она достаточно далеко. Значение максимального прогиба в предельной точке составило $\xi_1 = -1,5$ см. Для построения кривой равновесий взята точка на оси симметрии Т-образного фрагмента в середине пластины. Деформированный вид пластины и кривая равновесных состояний представлены на рис. 5.

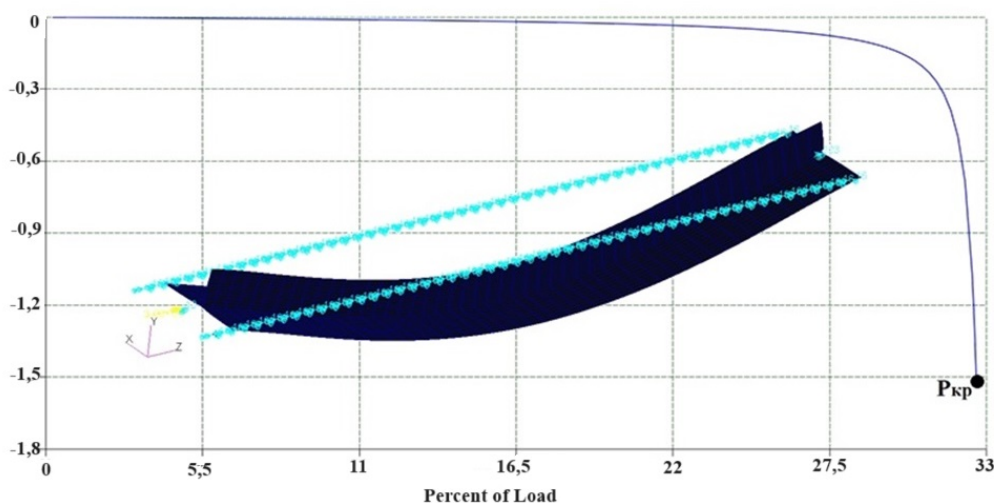


Рис. 5. Деформированный вид пластины и кривая равновесных состояний из решения задачи с учетом изменения геометрических параметров Т-образного фрагмента (исключение бифуркации ребер)

Figure 5. Deformed view of the plate and the equilibrium curve from the solution of the problem with account of changes in the geometric parameters of the T-shaped fragment (excluding rib bifurcations)

В табл. 1 приведены значения относительных нагрузок μ_1 в зависимости от величины начального прогиба, полученные в результате численных нелинейных решений для двух вариантов соотношений геометрических параметров Т-образного фрагмента (исходного и с учетом варьирования $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$). На рис. 6 приведены кривые чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам в зависимости от их амплитуд, построенные по результатам численных нелинейных решений при исходных параметрах, и решения для плиты с параметрами, измененными при помощи предложенного алгоритма.

Проведем аналогичное исследование чувствительности критических нагрузок волнообразования пластины к начальным геометрическим несовершенствам и сравним результаты численных нелинейных решений для двух вариантов геометрических соотношений Т-образного фрагмента подкрепленной пластины.

Для другой пластины решение той же задачи в геометрически нелинейной постановке позволило получить значение критической нагрузки в предельной точке: $P_{кр} = 456,25$ кН, $\mu_1 = 0,979$. Прогиб развивается в сторону ребра. Таким образом, пластина оказывается в сжатой зоне. Максимальное значение прогиба в предельной точке составило: $\xi_1 = 14,7$ см. Для построения кривой равновесий взята точка на оси симметрии Т-образного фрагмента в середине пластины. Деформированный вид пластины и кривая равновесных состояний из решения задачи с учетом изменения геометрических параметров Т-образного фрагмента (исключение бифуркации пластины) представлены на рис. 7.

Таблица 1 / Table 1

Значения относительных нагрузок μ_1 / Values of relative loads μ_1

$\bar{\xi}_1$				
0	0,3	0,5	0,8	1
При исходных геометрических соотношениях / At the initial geometrical ratios				
μ_1				
0,758	0,48	0,417	0,384	0,319
При измененных геометрических соотношениях / At the modified geometrical ratios				
μ_1				
0,998	0,853	0,816	0,767	0,686

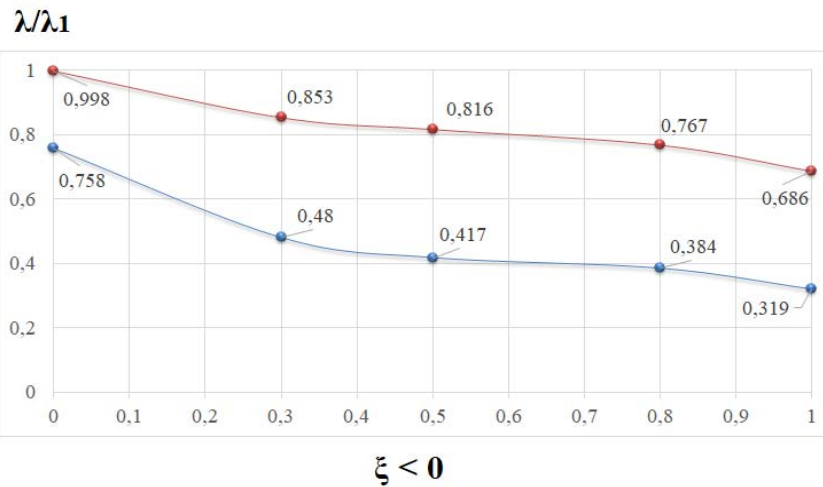


Рис. 6. Кривые чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам в зависимости от их амплитуд
Figure 6. Curves of critical loads sensitivity to initial imperfections as a function of their amplitudes

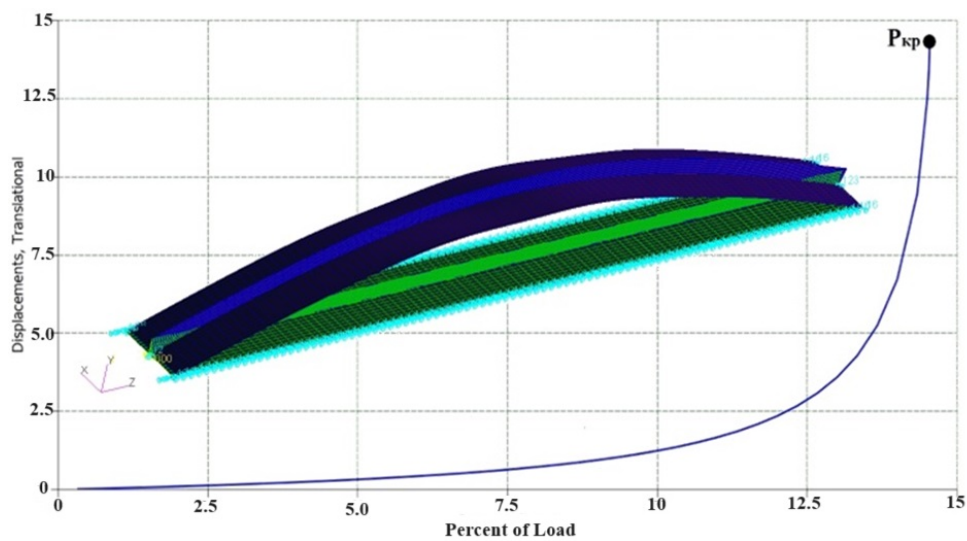


Рис. 7. Деформированный вид пластины и кривая равновесных состояний
Figure 7. Deformed view of the plate and the equilibrium curve

В табл. 2 приведены значения относительных нагрузок μ_1 в зависимости от величины начального прогиба, полученные в результате численных нелинейных решений для двух вариантов соотношений геометрических параметров Т-образного фрагмента; исходного и с учетом варьирования $\frac{b}{h}$ и $\frac{L}{b}$. На рис. 8 приведены кривые чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам в зависимости от их амплитуд, построенные по результатам численных решений при исходных параметрах и решения для плиты с параметрами, измененными при помощи предложенного алгоритма.

Таблица 2 / Table 2

Значения относительных нагрузок μ_1 в зависимости от величины начального прогиба / Values of relative loads μ_1 depending on the value of the initial deflection

$\bar{\xi}_1$				
0	0,3	0,5	0,8	1
При исходных геометрических соотношениях / At the initial geometrical ratios				
μ_1				
0,785	0,732	0,71	0,687	0,672
При измененных геометрических соотношениях / At the modified geometrical ratios				
μ_1				
0,979	0,952	0,921	0,894	0,883

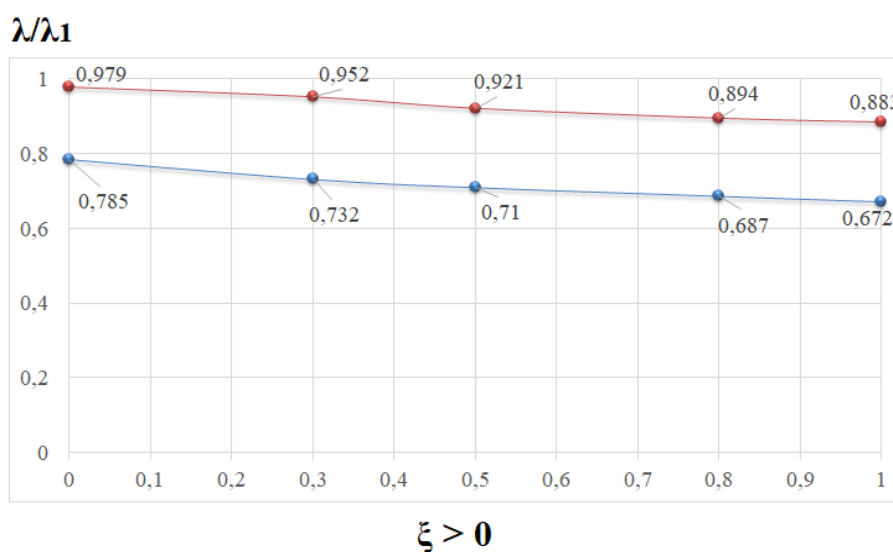


Рис. 8. Кривые чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам в зависимости от их амплитуд

Figure 8. Curves of critical loads sensitivity to initial imperfections as a function of their amplitudes

4. Заключение

Анализируя результаты, приходим к выводу, что перенос точки бифуркации волнообразования в ребре позволил получить кривую чувствительности критических нагрузок к начальным несовершенствам с менее выраженным падением критических нагрузок.

1. Падение критической нагрузки для Т-образного фрагмента подкрепленной пластины с исходными геометрическими параметрами составило 57,92 %, тогда как падение критической нагрузки с измененными геометрическими параметрами составило 31,26 %.

2. Аналогичные результаты получены при переносе точек бифуркации волнообразования пластины (см. рис. 2). Падение критической нагрузки для Т-образного фрагмента подкрепленной пластины с исходными геометрическими параметрами составило 11,34 %, тогда как падение критической нагрузки с измененными геометрическими параметрами составило 9,8 %.

Это показывает, что подкрепленная пластина, в которой возможно волнообразование в обшивке, менее чувствительна к влиянию начальных несовершенств, чем аналогичная пластина, в которой возможно волнообразование в ребрах.

Тем не менее результаты решения с учетом переноса точек бифуркации волнообразования показали, что чем выше значение нагрузки местной потери устойчивости волнообразования по отношению к нагрузке общей формы, тем меньше эффект взаимодействия форм и, соответственно, чувствительность упомянутой пластины к влиянию начальных несовершенств.

Список литературы

1. Aalberg A., Langseth M., Larsen P.K. Stiffened Aluminium Panels Subjected to Axial Compression // *Thin-Walled Structures*. 2001. Vol. 39. Issue 10. P. 861–885. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(01\)00021-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(01)00021-0)
2. Byklum E.A., Steen E., Amdahl J. Semi-analytical model for global buckling and post buckling analysis of stiffened panels // *Thin-Walled Structures*. 2004. Vol. 42. Issue 5. P. 701–717. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2003.12.006>
3. Cox H.L., Riddell J.R. Buckling of a Longitudinally Stiffened Flat Panel // *Aeronaut.* 1949. Vol. 1. P. 225–244. <https://doi.org/10.1017/S0001925900000172>
4. Tvergaard V. Imperfection sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression // *International Journal of Solids and Structures*. 1973. Vol. 9. Issue 1. P. 177–192. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(73\)90040-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90040-1)
5. Дударьков Ю.И., Лимонин М.В., Левченко Е.А. Некоторые особенности оценки несущей способности стрингерных панелей из ПКМ // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2019. Т. 25. № 2. С. 192–206. EDN: XBAWCT
6. Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., Шевченко А.В. Расчетные исследования влияния некоторых видов эксплуатационно-технологических повреждений на несущую способность стрингерных панелей из ПКМ // *Труды МАИ*. 2019. № 106. С. 2. EDN: NLSATO
7. Sridharan S., Zeggane M. Stiffened Plates and Cylindrical Shells under Interactive Buckling // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2001. Vol. 38. Issue 2. P. 155–178. [https://doi.org/10.1016/s0168-874x\(01\)00056-7](https://doi.org/10.1016/s0168-874x(01)00056-7)
8. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ критического равновесия гибкой подкрепленной пластины с учетом влияния начальных геометрических несовершенств // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. № 1. С. 30–36. EDN: FFRKDX
9. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Геометрически нелинейный расчет на устойчивость подкрепленной пластины с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 1. С. 3–18. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>
10. Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical and analytical investigation of the stability of the reinforced plate // *Communications — Scientific Letters of the University of Žilina*. 2021. Vol. 23 (4). P. 102–111. <https://doi.org/10.26552/com.C.2021.4.B278-B287>
11. Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Stability Investigation of a Stiffened Plate by Using Numerical Methods // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series*. Moscow, 2020. Vol. 1425. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012031>
12. Manuylov G.A., Kosytsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometric representations of equilibrium curves of a compressed stiffened plate // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021. № 17(3). P. 83–93. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-3-83-93>
13. Maquoi R., Massonnet C. Interaction between local plate buckling and overall buckling in thin-walled compression members -Theories and Experiments // *Part of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1976. P. 365–382. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50992-6_28
14. Pignatoro M., Gioncu V. Phenomenological and Mathematical modelling of structural instability. Part of the book series: CISM International Centre for Mechanical Sciences. New York: Springer Publ., 2005.
15. Kubiak T. Static and Dynamic Buckling of Thin-Walled Plate Structures. Springer International Publishing Switzerland, 2013. 188 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00654-3>
16. Bloom F., Coffin D.W. Handbook of thin plate buckling and postbuckling. Chapman & Hall, Boca Raton, 2001. 786 p. <https://doi.org/10.1201/9780367801649>
17. Beg D., Kuhlmann U., Davaine L., Braun B. Design of Plated Structures: Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-5: Design of Plated Structures. First Edition. 2011. 290 p. <https://doi.org/10.1002/9783433601143.fmatter>
18. Sheikh I.A., Elwi A.E., Grondin G.Y. Stiffened steel plates under combined compression and bending // *Journal of Constructional Steel Research*. 2003. Vol. 59. Issue 7. P. 1061–1080. [https://doi.org/10.1016/s0143-974x\(02\)00079-2](https://doi.org/10.1016/s0143-974x(02)00079-2)

19. Wittrick W.H. A Unified Approach to the Initial Buckling of Stiffened Panels in Compression // *Aeronautical Quarterly*. 1968. Vol. 19. Issue 3. P. 265–283. <https://doi.org/10.1017/S0001925900004662>
20. Koiter's W.T. *Elastic stability of solids and structures*. Cambridge University Press, 2009. 230 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546174>
21. Маневич А.И. Нелинейная теория устойчивости подкрепленных пластин и оболочек с учетом взаимодействия форм выпучивания: дис. ... д-ра тех. наук: 01.02.04. Днепропетровск, 1986. 423 с.

References

1. Aalberg A., Langseth M., Larsen P.K. Stiffened Aluminium Panels Subjected to Axial Compression. *Thin — Walled Structures*. 2001;39(10):861–885. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(01\)00021-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(01)00021-0)
2. Byklum E.A., Steen E., Amdahl J. Semi-analytical model for global buckling and post buckling analysis of stiffened panels. *Thin-Walled Structures*. 2004;42(5):701–717. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2003.12.006>
3. Cox H.L., Riddell J.R. Buckling of a Longitudinally Stiffened Flat Panel. *Aeronaut.* 1949;1(3):225–244. <https://doi.org/10.1017/S0001925900000172>
4. Tvergaard V. Imperfection sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression. *International Journal of Solids and Structures*. 1973;9(1):177–192. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(73\)90040-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90040-1)
5. Dudarkov Y.I., Levchenko E.A., Limonin M.V. Some features of CFRP stringer panels load bearing capacity estimation. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii [Journal on composite mechanics and design]*. 2019;25(2):192–206. (In Russ.) EDN: XBAWCT
6. Dudarkov Yu.I., Levchenko E.A., Limonin M.V., Shevchenko A.V. Computational studies of some types of operational and technological damages impact on bearing capacity of stringer panels made of composite fiber reinforced plastic. *Trudy MAI [Works of MAI]*. 2019;106:2. EDN: NLSATO
7. Sridharan S., Zeggane M. Stiffened Plates and Cylindrical Shells under Interactive Buckling. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2001;38(2):155–178. [https://doi.org/10.1016/s0168-874x\(01\)00056-7](https://doi.org/10.1016/s0168-874x(01)00056-7)
8. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical analysis critical equilibrium of flexible supported plate with allowance for influence initial geometrical imperfections. *Structural mechanics and analysis of constructions*. 2020; 1:30–36. (In Russ.) EDN: FFRKDX
9. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):3–18. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>
10. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical and analytical investigation of the stability of the reinforced plate. *Communications — Scientific Letters of the University of Zilina*. 2021;23(4):B278–B287. <https://doi.org/10.26552/com.C.2021.4.B278-B287>
11. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):3–18. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>
12. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometric representations of equilibrium curves of a compressed stiffened plate. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021;17(3):83–93. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-3-83-93>
13. Maquoi R., Massonnet C. Interaction between local plate buckling and overall buckling in thin-walled compression members — Theories and Experiments. *Part of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1976:365–382. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50992-6_28
14. Pignatoro M., Gioncu V. Phenomenological and Mathematical modelling of structural instability. Part of the book series: CISM International Centre for Mechanical Sciences. New York: Springer Publ.; 2005.
15. Kubiak T. *Static and Dynamic Buckling of Thin-Walled Plate Structures*. Springer International Publishing Switzerland. 2013. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00654-3>
16. Bloom F., Coffin D.W. *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*. Chapman & Hall, Boca Raton; 2001. <https://doi.org/10.1201/9780367801649>
17. Beg D., Kuhlmann U., Davaine L., Braun B. *Design of Plated Structures: Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-5: Design of Plated Structures*, First Edition. 2011. <https://doi.org/10.1002/9783433601143.fmatter>
18. Sheikh I.A., Elwi A.E., Grondin G.Y. Stiffened steel plates under combined compression and bending. *Journal of Constructional Steel Research*. 2002;58(7):1061–1080. [https://doi.org/10.1016/s0143-974x\(02\)00079-2](https://doi.org/10.1016/s0143-974x(02)00079-2)
19. Wittrick W.H. A Unified Approach to the Initial Buckling of Stiffened Panels in Compression. *Aeronautical Quarterly*. 1968;19(3):265–283. <https://doi.org/10.1017/S0001925900004662>
20. Koiter's W.T. *Elastic stability of solids and structures*. Cambridge University Press; 2009. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546174>
21. Manevich A.I. *Nonlinear theory of stability of the reinforced plates and shells taking into account the interaction of convexity forms*: Cand. Sci. 01.02.04. Dnepropetrovsk; 1986. (In Russ.)