

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES


DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449

УДК 539.3

EDN: FKHYLG

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений

Е.М. Зверяев¹, М.И. Рынковская¹, В.Д. Хоа²¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация² Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация zveriaev@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 28 апреля 2023 г.

Доработана: 18 августа 2023 г.

Принята к публикации: 28 августа 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.


Аннотация. Дано систематическое изложение модифицированного классического полуобратного метода Сен-Венана как итерационного на примере построения решения дифференциальных уравнений теории упругости для длинной слоистой полосы. Дифференциальные уравнения первого порядка плоской задачи сводятся к безразмерному виду и заменяются интегральными уравнениями относительно поперечной координаты подобно тому, как это делается в методе простых итераций Пикара. При этом в интегральных уравнениях перед знаком интеграла появляется как множитель малый параметр, с помощью которого обеспечивается сходимость решений в соответствии с принципом сжатых отображений Банаха. Уравнения и соотношения упругости преобразовываются к виду, позволяющему вычислять неизвестные последовательно, таким образом, что вычисленные в одном уравнении неизвестные являются входящими для следующего уравнения и т.д. Выполнение граничных условий на длинных краях приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для медленно и быстро меняющихся сингулярных компонент решения с шестнадцатью эффективными коэффициентами жесткости, определенными интегралами от заданных как ступенчатая функция модулей Юнга каждого слоя. Интегрирование этих обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет записать формулы для всех искомым неизвестных задачи, в том числе не определяемые в классической теории балки поперечные напряжения и решения типа краевого эффекта, и выполнить все граничные условия задачи теории

Зверяев Евгений Михайлович, профессор департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-8097-6684; E-mail: zveriaev@mail.ru

Рынковская Марина Игоревна, кандидат технических наук, доцент департамента строительства, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0003-2206-2563; E-mail: rynkovskaya-mi@rudn.ru

Хоа Ван Донг, аспирант кафедры проектирования сложных механических систем, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0002-8188-9408; E-mail: dong.hoavan@yandex.ru

© Зверяев Е.М., Рынковская М.И., Хоа В.Д., 2023

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>





упругости на коротких сторонах. Представлено решение трех краевых задач теории упругости полосы: двухслойная полоса со слоями одинаковой толщины и различной толщины и полоса с произвольным числом слоев. Получены формулы для всех неизвестных задачи.

Ключевые слова: метод Сен-Венана — Пикара — Банаха, принцип сжатых отображений, малый параметр, слоистая полоса, итерации, композит, краевой эффект

Для цитирования

Зверьяев Е.М., Рынковская М.И., Хоа В.Д. Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 5. С. 421–449. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449>

Generation a solution to the equations of elasticity theory for a layered strip basing on the principle of compressed mappings²

Evgeny M. Zveryaev¹  , Marina I. Rynkovskaya¹ , V. Dong Hoa² 

¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation

² Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ zveriaev@mail.ru

Article history

Received: April 28, 2023

Revised: August 18, 2023

Accepted: August 28, 2023

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. A systematic presentation of the modified classical semi-inverse Saint-Venant method as an iterative one is given on the example of generating a solution to the differential equations of elasticity theory for a long layered strip. The first-order differential equations of the plane problem are reduced to the dimensionless form and replaced by integral equations with respect to the transverse coordinate, just as it is done in the Picard method of simple iterations. In this case, a small parameter appears in the integral equations before the integral sign as a multiplying factor, which is used to ensure convergence of solutions in accordance with the Banach's principle of compressed mappings. The equations and elasticity relations are converted to a form that enables to calculate the unknowns consecutively, so that the unknowns being calculated in one equation are the inputs for the next equation, and etc. Fulfillment of the boundary conditions at the long edges leads to ordinary differential equations for slowly and rapidly changing singular components of the solution with sixteen effective stiffness coefficients that are defined by integrals from the given ones as a stepped function of Young's moduli for each layer. Integrating of these ordinary differential equations makes it possible to obtain the formulas for all the required unknowns of the problem, including transverse stresses that are not defined in the classical theory of the beam and solutions of the edge effect type, and to fulfill all the boundary conditions for the elasticity theory problem. The solution of three boundary value problems of the strip elasticity theory is provided such as for a two-layer strip with layers of the same thickness and different thicknesses, and a strip with an arbitrary number of layers. Formulas for all unknowns of the problem are obtained.

Keywords: Saint-Venant — Picard — Banach method, mapping contraction principle, small parameter, layered strip, iterations, composite, edge effect

For citation

Zveryaev E.M., Rynkovskaya M.I., Hoa V.D. Generation a solution to the equations of elasticity theory for a layered strip basing on the principle of compressed mapping. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):421–449. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449>

Evgeny M. Zveryaev, DSc. In Engineering, Full Professor, Department of Construction, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8097-6684; E-mail: zveriaev@mail.ru

Marina I. Rynkovskaya, PhD, Associate Professor, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-2206-2563; E-mail: rynkovskaya-mi@rudn.ru

Van Dong Hoa, PhD student, Department of Design of Complex Technical Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-8188-9408; E-mail: dong.hoavan@yandex.ru

1. Введение

Изучение различных подходов к построению теорий тонкостенных тел позволяет рассматривать пластины, криволинейные и плоские балки как частные случаи некоторых общих построений. За последние четыре десятилетия было представлено значительное количество теорий композитных многослойных тонкостенных тел. Эти теории можно классифицировать по разным моделям, таким как эквивалентные однослойные, квазислойные и послойные модели. При этом теории разрабатывались в основном для пластин, реже для оболочек и в меньшей мере для такого тела, как балка.

Изотропные и анизотропные балки и плиты находят широкое применение в конструкциях, подверженных различным нагрузкам в суровых термических условиях, создающих в них дополнительные высокие термические напряжения. Чтобы описать правильную термическую реакцию тонких и толстых пластин, включая эффекты деформации сдвига, требуются уточненные теории. Считается, что классическая теория пластин неточна для толстых пластин из-за пренебрежения напряжениями сдвига. Чтобы преодолеть ограничения классической теории, обычно учитывается сдвиговая деформация с помощью дополнительных членов в перемещениях.

Методика образования уточненной сдвиговой теории балок и пластин была разработана Рейсснером [1] и Миндлином [2]. Поскольку в этих теориях поперечное распределение напряжения сдвига берется постоянным по толщине, в уточненной сдвиговой теории пластин, требуется поправочный коэффициент сдвига, который считается неадекватным для предсказания точных решений, например, для толстой изотропной пластины или тонкой, но анизотропной. Отсюда делается вывод, что необходимо построение теорий, учитывающих сдвиговую деформацию более высокого порядка. Кроме того, доступно множество исследований по построению уточненных сдвиговых теорий высокого порядка для слоистых пластин, например [3; 4], с помощью так называемой гиперболической сдвиговой теории. В [5; 6] предложены уточненные теории пластин экспоненциального типа. В [7] встречается изучение влияния теории деформации гиперболического сдвига на изгиб изотропных балок.

Статическое поведение балок из композиционного материала при использовании различных уточненных сдвиговых теорий произведено с помощью метода конечных элементов в [8; 10]. В [11–13] построены уточненные теории для решения задач пластин и оболочек, в том числе многослойных, переменной толщины, и приведено решение ряда примеров. За исключением [10–12] используются гипотезы Кирхгоффа для перехода к задачам уменьшенной размерности. Это приводит к проблемам при выполнении граничных условий, так как вследствие приближенного описания дифференциальные уравнения задач уменьшенной размерности не удовлетворяют всем граничным условиям и имеют решения, в которых могут наблюдаться разрывы, быстрые переходы, неоднородности и т. п.

Понижение порядка дифференциальных уравнений приближенных теорий в сочетании с потерей части граничных условий приводит к изучению асимптотических явлений. Цель асимптотического анализа задачи заключается в описании решения граничной задачи внутри переходного слоя [13]. Потребность в таких уточненных теориях связана с необходимостью более полного понимания самой классической теории после того, как становятся видны ее обобщения. Уточненные теории позволяют лучше охарактеризовать погрешность классических теорий. Однако построение тех или иных теорий последовательных приближений в смысле учета всех малых одного порядка крайне трудно осуществить, не располагая регулярными методами [14].

Считается, что возникающие при построении теории пластин и оболочек противоречия отсутствуют в задаче построения теории изгиба стержня. В основе такого представления лежит различие в методах построения классических определяющих уравнений. Если построение теорий пластин и оболочек осуществлялось на основе математической теории упругости путем упрощения ее уравнений с помощью гипотез Кирхгоффа, то построение теории балок выполнено на основе физических и геометрических соображений в усилиях и моментах без использования уравнений теории упругости. Однако, если эти теории тонкостенных тел, балок, пластин и оболочек строить на одной математической основе с помощью метода простых итераций, удовлетворяющего принципу сжатых отображений, и не переходить от уравнений в напряжениях к уравнениям в усилиях и моментах, различие исчезает [15].

Истоки метода простых итераций при желании можно найти еще и в полуобратном методе Сен-Венана [16]. Если в методе Сен-Венана использовать обычно принятые допущения в качестве величин

начального приближения, по которым вычисляются остальные искомые неизвестные, можно по полученным величинам вычислить поправку к величинам начального приближения, и по тому, является ли эта поправка существенной или малой, сделать вывод о применимости исходных допущений. Малость поправки говорит о том, что начальные величины выбраны удачно и данные вычисления могут быть рассмотрены как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Построенный таким образом итерационный процесс нуждается в обосновании своей сходимости. Поскольку Сен-Венан применил свою идею к решению задачи кручения и изгиба длинного и узкого стержня, можно оценить сходимость вычислений к некоторому решению, используя наличие присущего стержню малого параметра, обеспечивающего асимптотическую сходимость. Таким образом, приходим к методу простых итераций, принципу сжатых отображений и теореме Банаха о неподвижной точке.

Теорема Банаха используется в теории дифференциальных уравнений для доказательства существования и единственности решения некоторых классов краевых задач. В теории интегральных уравнений теорема используется для доказательства существования и единственности решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода, некоторых видов нелинейных интегральных уравнений. Широкое применение теорема находит в численных методах, таких как метод Якоби, метод Гаусса — Зейделя. Метод Ньютона также можно рассматривать с позиции теоремы Банаха и понимать как абстрактную формулировку метода последовательных приближений Пикара [17; 18].

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений, формулируются в функциональном анализе в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений [19].

Отображение $y = Ay$ метрического пространства M в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\varepsilon < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \leq \varepsilon \rho(x, y)$, где ρ — метрика пространства M . Точка y называется неподвижной точкой отображения, если $y = Ay$. Иначе говоря, неподвижные точки — это решения уравнения $y = Ay$. Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения $y_{(0)}$. Если оператор A является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению y , независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)} \dots$ находятся с помощью формулы $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$.

Используемый в настоящей работе метод простых итераций сводится к последовательному применению метода Пикара для решения дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, разрешенного относительно производной. Это дифференциальное уравнение с условием $y(t_0) = y_0$ равносильно интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y(t))] dt + y_0. \quad (1)$$

Для него на основании принципа сжатых отображений строится итерационный процесс по следующей схеме:

$$y_{(n+1)}(x) = \int_{x_0}^x f[t, (y_{(n)}(t))] dt + y_0.$$

Метод позволяет построить последовательность функций $y_{(n)}(t)$, сходящихся к решению уравнения, и эти функции получаются гладкими.

Ниже метод простых итераций, с помощью которого решен ряд задач теории упругости тонкостенных тел [20–23], описывается как общий метод Сен-Венана — Пикара — Банаха (SVPB) на примере наиболее простой задачи для прямоугольника — деформации длинной тонкой упругой слоистой полосы, уравнения которой содержат малый параметр, обеспечивающий асимптотическую сходимость метода в соответствии с принципом сжатых отображений.

2. Произвольно нагруженная по длинным сторонам слоистая полоса

Длинная прямоугольная полоса рассматривается в прямоугольной системе координат x^* , z^* , так что $0 \leq x^* \leq l$, $-h \leq z^* \leq h$. Длинные стороны полосы $z^* = \pm h$ несут произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть закреплены или нагружены. Известные уравнения плоской задачи теории упругости, записанные в отмеченных звездочкой размерных величинах

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} &= 0, & \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} &= 0, \\ E^* \varepsilon_x &= \sigma_x^* - \nu \sigma_z^*, & E^* \varepsilon_z &= \sigma_z^* - \nu \sigma_x^*, & \gamma &= \frac{2(1+\nu)}{E^*} \tau^*, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, & \gamma &= \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}, \end{aligned}$$

описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы в безразмерных координатах $x = x^*/l$, $z = z^*/h$, перемещениях $u = u^*/h$, $w = w^*/h$ вдоль осей x^* , z^* , соответственно, и нормальных $\sigma_x = \sigma_x^*/E$, $\sigma_z = \sigma_z^*/E$ и касательных $\tau = \tau^*/E$ напряжениях принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \tau' &= 0, & \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \sigma_x' &= 0; \\ \sigma_x &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z), & \tau &= \frac{1}{2(1+\nu)} \gamma, & \sigma_z &= \frac{1}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x); \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_x &= \varepsilon u', & \gamma &= \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon w', \end{aligned} \quad (2)$$

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона, считающиеся для анизотропного или композитного материала функциями координат; $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ — безразмерные продольная и поперечная деформации; γ — сдвиг. Штрихом обозначена операция дифференцирования по безразмерному аргументу x , и введено обозначение для малого параметра $\varepsilon = h/l$.

Примем

$$E^* = E(z) E_h,$$

где E_h — некоторое характерное постоянное среднее значение модуля Юнга; $E(z)$ — безразмерная ступенчатая функция, заданная по слоям, $E(z) \sim \varepsilon^0$. Входящий в соотношение упругости безразмерный коэффициент Пуассона также можно в общем случае считать заданным ступенчатой функцией $\nu = \nu(z)$.

Расположив уравнения системы (2) в определенной последовательности и задав в качестве известных величин начального приближения

$$w_{(0)} = w_0(x), \quad \tau_{(0)} = \tau_0(x), \quad (3)$$

можно свести вычисления к методу последовательных приближений в соответствии со следующей схемой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} &= -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_0, & \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} &= -\varepsilon \tau_0', & \varepsilon_{x(0)} &= \varepsilon u_{(0)}', \\ \sigma_{x(0)} &= E\varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, & \varepsilon_{z(0)} &= -\nu \varepsilon_{x(0)} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z(0)}, \\ \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} &= \varepsilon_{z(0)}, & \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} &= -\varepsilon \sigma_{x(0)}', & \frac{\partial \sigma_{z(1)}}{\partial z} &= -\varepsilon \tau_{(1)}', \end{aligned} \quad (4)$$

где производные по координате z помещены в левых частях дифференциальных уравнений и в них нет малых параметров, но они есть в правых. Нижним индексом в скобках здесь и далее обозначен номер приближения.

Выбор величин начального приближения в форме (3) вытекает из тех соображений, что, записав уравнения (2) в интегральной форме

$$\begin{aligned} u &= -\varepsilon \int_0^z w' dz + \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} \tau dz + u_0(x), \\ \sigma_z &= -\varepsilon \int_0^z \tau' dz + \sigma_{z0}(x), & \varepsilon_x &= \varepsilon u', \\ \sigma_x &= E\varepsilon_x + \nu \sigma_z, & \varepsilon_z &= -\nu \varepsilon_x + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_z, \\ w &= \int_0^z \varepsilon_z dz + w_0(x), & \tau &= -\varepsilon \int_0^z \sigma_x' dz + \tau_0(x), \\ \sigma_z &= -\varepsilon \int_0^z \tau' dz + \sigma_{z0}(x), \dots, \end{aligned}$$

получаем произволы интегрирования $u_0(x)$, $\sigma_{z0}(x)$, $w_0(x)$, $\tau_0(x)$, любых двух из которых достаточно для организации итерационного процесса вида (1).

В силу независимости величин начального приближения от z , все неизвестные вычисляются в результате интегрирования по z :

$$\begin{aligned} u_{(0)} &= -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0(x), \\ \varepsilon_{x(0)} &= -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0', \\ \sigma_{z(0)} &= -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}(x), \\ \sigma_{x(0)} &= -E\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] + E\varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z(0)} &= \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[\nu \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \frac{1-\nu^2}{E} z \right] - \nu \varepsilon u_0' + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z_0}, \\ w_{(1)} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^{\bar{z}} \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[\int_0^{\bar{z}} \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^{\bar{z}} \nu \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] + \sigma_{z_0} \int_0^{\bar{z}} \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^{\bar{z}} \nu dz + w_0(x), \\ \tau_{(1)} &= \varepsilon^3 w_0''' \int_0^{\bar{z}} E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^{\bar{z}} E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{\bar{z}} \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^{\bar{z}} E dz - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^{\bar{z}} \nu dz + \tau_0(x), \\ \sigma_{z(1)} &= -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu z dz dz \right] + \\ &+ \varepsilon^3 u_0''' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z_0}. \end{aligned}$$

Нижним индексом 0 без скобок обозначены произвольные функции интегрирования $u_0 = u_0(x)$, $\sigma_{z_0} = \sigma_{z_0}(x)$, $w_0 = w_0(x)$, $\tau_0 = \tau_0(x)$, зависящие только от продольной координаты. Две из них w_0 , τ_0 были ранее выбраны в качестве величин начального приближения (3) в первых двух уравнениях системы (4).

В списке формул (5) заданные величины начального приближения $w_0(x)$ и $\tau_0(x)$ вычисляются также в первом приближении $w_{(1)}(x)$ и $\tau_{(1)}(x)$ с тем, чтобы вычислить поправку к величинам нулевого (начального) приближения и выполнить граничные условия на длинных сторонах с помощью выражений, содержащих все новые основные неизвестные τ_0 , σ_{z_0} , w_0 , u_0 . Величины τ , σ_z , w записаны в первом приближении, остальные — в нулевом. При этом все неизвестные выражены в зависимости от произвольных функций интегрирования $\tau_0(x)$, $\sigma_{z_0}(x)$, $w_0(x)$, $u_0(x)$, относительные порядки которых по ε будут определены из граничных условий на длинных сторонах и концах полосы.

3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы

На лицевых поверхностях полосы $z^* = \pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения.

В безразмерном виде эти условия записываются как

$$\begin{aligned} \sigma_z &= Z_+(x), \quad \tau = X_+(x) \quad \text{при } z=1, \\ \sigma_z &= Z_-(x), \quad \tau = X_-(x) \quad \text{при } z=-1, \end{aligned} \tag{6}$$

где безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость E_h . Нагрузки считаются медленно изменяющимися функциями координаты x . Условия (6) будем удовлетворять величинами первого приближения из общих решений (5), в предположении, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины. Полученная таким образом система уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' \int_0^1 E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^1 E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^1 E dz - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^1 \nu dz + \tau_0 &= X_+, \\ \varepsilon^3 w_0''' \int_0^{-1} E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^{-1} E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^{-1} E dz - \varepsilon \sigma_{z_0}' \int_0^{-1} \nu dz + \tau_0 &= X_-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon^4 w_0''' \int_0^1 \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
 & + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^1 \int_0^z E dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^1 \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+, \\
 & -\varepsilon^4 w_0''' \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
 & + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^{-1} \int_0^z E dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^{-1} \int_0^z \nu dz dz + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-.
 \end{aligned} \tag{7}$$

может быть разрешена относительно основных неизвестных $\tau_0(x)$, $\sigma_{z_0}(x)$, $w_0(x)$, $u_0(x)$ после вычисления в общем случае шестнадцати интегральных коэффициентов

$$\left\{ \begin{array}{cc} \int_0^1 E z dz & \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz & \int_0^1 E dz & \int_0^1 \nu dz \\ \int_0^{-1} E z dz & \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz & \int_0^{-1} E dz & \int_0^{-1} \nu dz \\ \int_0^1 \int_0^z E z dz dz & \int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz & \int_0^1 \int_0^z E dz dz & \int_0^1 \int_0^z \nu dz dz \\ \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z E dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z \nu dz dz \end{array} \right\} \tag{8}$$

от заданных функций $E(z)$ и $\nu(z)$.

4. Двухслойная полоса со слоями одинаковой толщины

Рассмотрим случай полосы, состоящей из двух слоев одинаковой толщины (рис. 1).

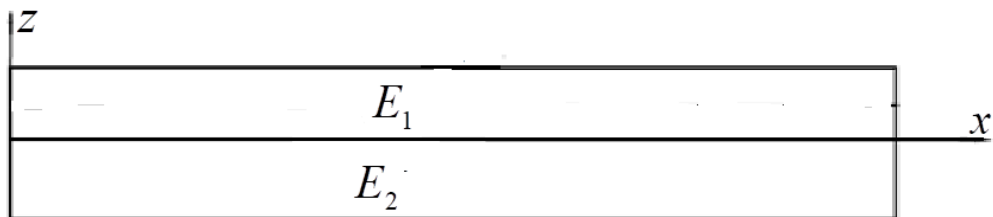


Рис. 1. Полоса из двух слоев одинаковой толщины
 Figure 1. Strip of two layers with equal thickness

Примем, что верхний слой при $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_1 и в общем случае коэффициент Пуассона ν_1 , нижний при $0 \leq z \leq -1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_2 и коэффициент Пуассона ν_2 , E_1 и E_2 — константы, $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$. Положим для сокращения вычислений $\nu_1 = \nu_2 = \nu = const$. Вычислим входящие в уравнения (7) интегральные коэффициенты (8):

$$\int_0^1 E_1 z dz = \frac{1}{2} E_1, \quad \int_0^1 E_1 \int_0^z \frac{2(1+v)}{E_1} dz dz - \int_0^1 v z dz = \frac{2+v}{2}, \quad \int_0^1 E_1 dz = E_1, \quad \int_0^1 v dz = v,$$

$$\int_0^{-1} E_2 z dz = \frac{1}{2} E_2, \quad \int_0^{-1} E_2 \int_0^z \frac{2(1+v)}{E_2} dz dz - \int_0^{-1} v z dz = \frac{2+v}{2}, \quad \int_0^{-1} E_2 dz = -E_2, \quad \int_0^{-1} v dz = -v,$$

$$\int_0^1 \int_0^z E_1 z dz dz = \frac{1}{6} E_1, \quad \int_0^1 \int_0^z E_1 \int_0^z \frac{2(1+v)}{E_1} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z v z dz dz = \frac{2+v}{6}, \quad \int_0^1 \int_0^z E_1 dz dz = \frac{1}{2} E_1, \quad \int_0^1 \int_0^z v dz dz = \frac{1}{2} v,$$

$$\int_0^{-1} \int_0^z E_2 z dz dz = -\frac{1}{6} E_2, \quad \int_0^{-1} \int_0^z E_2 \int_0^z \frac{2(1+v)}{E_2} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z v z dz dz = -\frac{2+v}{6}, \quad \int_0^{-1} \int_0^z E_2 dz dz = \frac{1}{2} E_2, \quad \int_0^{-1} \int_0^z v dz dz = \frac{1}{2} v,$$

и подставим их в уравнения

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+v}{2} - \varepsilon^2 u_0'' E_1 - v \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_2 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+v}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_2 + v \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+v}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + v \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+,$$

$$\varepsilon^4 w_0'''' E_2 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+v}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_2 \frac{1}{2} + v \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-.$$

Сложив и вычтя попарно первые два и последние два уравнения и поменяв порядок записи уравнений, получим

$$\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} (E_1 + E_2) - (2+v) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 - E_2) + 2\tau_0 = X_+ + X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} (E_1 + E_2) + \frac{1}{3} (2+v) \varepsilon^3 \tau_0''' + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - 2\varepsilon \tau_0' = Z_+ - Z_-,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 + E_2) - 2v \varepsilon \sigma_{z_0}' = X_+ - X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} (E_1 - E_2) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' (E_1 + E_2) + v \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_-.$$

Примем в соответствии с описанием метода SVPB [23] $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ в первой паре уравнений, где τ_0^s — медленно меняющаяся функция, τ_0^q — быстро меняющаяся функция. (Медленно меняющейся функцией называется такая функция, применение к которой оператора $\frac{d}{dx}$ не меняет ее асимптотического порядка по ε . Быстро меняющейся функцией называется такая, применение к которой оператора $\varepsilon \frac{d}{dx}$ также не меняет ее асимптотического порядка по ε .)

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2}(E_1 + E_2) - (2 + \nu)\varepsilon^2 \tau_0'' - (2 + \nu)\varepsilon^2 \tau_0^{q''} - \varepsilon^2 u_0''(E_1 - E_2) + 2\tau_0^s + 2\tau_0^q = X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6}(E_1 + E_2) + \frac{1}{3}(2 + \nu)\varepsilon^3 \tau_0''' + (2 + \nu)\varepsilon^3 \tau_0^{q'''} + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2}(E_1 - E_2) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} - 2\varepsilon \tau_0^{q'} = (Z_+ - Z_-). \end{aligned}$$

и запишем их отдельно для быстро меняющихся

$$\begin{aligned} -(2 + \nu)\varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \\ (2 + \nu)\varepsilon^3 \tau_0^{q'''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

отмеченных верхним индексом q , и медленно меняющихся неизвестных

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2}(E_1 + E_2) - \varepsilon^2 u_0''(E_1 - E_2) + 2\tau_0^s = X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6}(E_1 + E_2) + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2}(E_1 - E_2) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} = (Z_+ - Z_-), \\ \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2}(E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0''(E_1 + E_2) - 2\nu\varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} = X_+ - X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6}(E_1 - E_2) + \frac{1}{2}\varepsilon^3 u_0'''(E_1 + E_2) + 2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_-, \end{aligned} \tag{10}$$

отмеченных верхним индексом s . Первые два уравнения дают

$$\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{3}(E_1 + E_2) - \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2}(E_1 - E_2) = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon(X_+' + X_-').$$

Из четвертого уравнения следует, что $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$. Поэтому в третьем уравнении величина $2\nu\varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} \sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^6 w_0^s$ и может быть отброшена как малая второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда это уравнение

$$\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2}(E_1 - E_2) - \varepsilon^2 u_0''(E_1 + E_2) = X_+ - X_- \tag{11}$$

с отброшенным членом $2\nu\varepsilon \sigma_{z_0}^{s'}$ и третье из системы (10) сводятся к двум разрешающим

$$\varepsilon^4 C w_0'''' = Z_+ - Z_- + \varepsilon(X_+' + X_-') - \varepsilon \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)}(X_+' - X_-'), \tag{12}$$

где $C = \frac{1}{3}(E_1 + E_2) \left[1 - \frac{3(E_1 - E_2)^2}{4(E_1 + E_2)^2} \right]$ и

$$\varepsilon^2 u_0''(E_1 + E_2) = \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2}(E_1 - E_2) - (X_+ - X_-). \tag{13}$$

Если в уравнении (12) отбросить производные от продольной нагрузки и принять $Z_- = X_- = X_+ = 0$, $Z_+ = p$, $E_1 = E_2 = E$, $w_0^s = y$, получим классическое уравнение изгиба изотропной балки $\varepsilon^4 \frac{2}{3} E y'''' = p$, нагруженной распределенной нагрузкой p , где w_0^s — перемещение поперечного сечения полосы как жесткого целого для фиксированного значения аргумента z заменено величиной прогиба оси балки y .

Неизвестные σ_{z0}^s и τ_0^s находятся из первого и четвертого уравнений системы (10)

$$\begin{aligned} 2\sigma_{z0}^s &= Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{6} (E_1 - E_2) - \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0^{s''''} (E_1 + E_2), \\ 2\tau_0^s &= X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 + E_2) + \varepsilon^2 u_0^{s''''} (E_1 - E_2) \end{aligned} \quad (14)$$

прямыми действиями без интегрирования.

Из уравнений (12)–(14) вытекают асимптотические оценки искомых величин относительно нагрузки Z (при $X_+ = X_- = 0$):

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-4} Z, \quad u_0^s \sim \varepsilon w_0^s \wedge \varepsilon^{-3} Z, \quad \sigma_{z0}^s \sim Z, \quad \tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^{s''''}. \quad (15)$$

Для уравнений (12), (13) надо сформулировать условия на концах полосы $x=0$ и $x=1$. Примем их как условия жесткого защемления: перемещения $u = w = 0$ в каждой точке $z \in [-1; 1]$ поперечного края $x = 0, 1$. С помощью формул (8) запишем условия

$$\begin{aligned} u_{(0)} \Big|_{x=0,1} &= -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu) \tau_0 \int_0^z \frac{1}{E} dz + u_0 = 0, \\ w_{(1)} \Big|_{x=0,1} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z 2(1+\nu) dz dz \right] + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + w_0 = 0. \end{aligned}$$

Этими выражениями задаются перемещения как при $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} -\varepsilon w_0' z + \frac{2(1+\nu)}{E^+} \tau_0 z + u_0 &= 0, \\ \nu \varepsilon^2 w_0'' \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' \left[\frac{1-\nu^2}{E^+} + 2\nu(1+\nu) \right] \frac{z^2}{2} + \sigma_{z0} \frac{1-\nu^2}{E^+} z - \nu \varepsilon u_0' z + w_0 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

так и при $z \leq 0$:

$$\varepsilon w_0' z - \frac{2(1+\nu)}{E^-} \tau_0 z + u_0 = 0 \quad \nu \varepsilon^2 w_0'' \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' \left[\frac{1-\nu^2}{E^-} + 2\nu(1+\nu) \right] \frac{z^2}{2} - \sigma_{z0} \frac{1-\nu^2}{E^-} z + \nu \varepsilon u_0' z + w_0 = 0. \quad (17)$$

Теперь потребуем обращения каждого коэффициента при различных степенях z в ноль в выражениях (16) при $z \geq 0$:

$$u_0 = 0, \quad (18)$$

$$-\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E^+} \tau_0 = 0, \quad (19)$$

$$w_0 = 0, \tag{20}$$

$$\sigma_{z0} \frac{1-\nu^2}{E^+} - \nu \varepsilon u_0' = 0, \tag{21}$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \left[\frac{1-\nu^2}{E^+} + 2\nu(1+\nu) \right] = 0, \tag{22}$$

и (17) при $z \leq 0$

$$u_0 = 0, \tag{23}$$

$$\varepsilon w_0' - \frac{2(1+\nu)}{E^-} \tau_0 = 0, \tag{24}$$

$$w_0 = 0, \tag{25}$$

$$-\sigma_{z0} \frac{1-\nu^2}{E^-} + \nu \varepsilon u_0' = 0, \tag{26}$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \left[\frac{1-\nu^2}{E^-} + 2\nu(1+\nu) \right] = 0. \tag{27}$$

Перепишем условия (19) и (22) с учетом того, что $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$,

$$-\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E^+} (\tau_0^s + \tau_0^q) = 0, \tag{28}$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon (\varepsilon \tau_0^{s'} + \varepsilon \tau_0^{q'}) \left[\frac{1-\nu^2}{E^+} + 2\nu(1+\nu) \right] = 0 \tag{29}$$

и обратим внимание на то, что на основании последней оценки из (15) члены с τ_0^s могут быть отброшены как малые второго порядка по сравнению с главными в обоих уравнениях. В то же время τ_0^q и $\varepsilon \tau_0^{q'}$ являются величинами одного порядка. Для того чтобы уравнения (28) и (29) были совместными, надо принять $\tau_0^q \sim \varepsilon^2 w_0$. И тогда также будет $\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 w_0$. Следовательно, в уравнении (28) член τ_0^q можно отбросить как малый по сравнению с первым $\varepsilon w_0'$. Полученная оценка быстро меняющейся неизвестной

$$\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 w_0 \vee \varepsilon^{-2} Z \tag{30}$$

дополняет ранее полученные оценки (15) для медленно меняющихся неизвестных.

Окончательно условия (28) и (29) при $z \geq 0$ переписутся так:

$$w_0' = 0, \tag{31}$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0^{q'} \left[\frac{1-\nu^2}{E^+} + 2\nu(1+\nu) \right] = 0. \tag{32}$$

Точно такие же рассуждения справедливы для условий (24) и (27) при $z \leq 0$.

Условия (20), (25), (31) при $x = 0,1$ имеют одну и ту же запись и при $z \geq 0$, и при $z \leq 0$, образуя таким образом вместе с уравнением (12) разрешимую w -задачу. Так, например, приняв, что верхний край $z = 1$ несет только равномерно распределенную нагрузку $Z_+ = p$, получим решение w -задачи:

$$w_0^s = \frac{p}{\varepsilon^4 C} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} \right)$$

и сформированной из уравнения (13) с условиями (18) и (24) решение u -задачи

$$u_0^s = \frac{p}{\varepsilon^3 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right).$$

При известных w_0^s и u_0^s выражения (14) принимают вид

$$2\sigma_{z0}^s = p - \frac{1}{12} \frac{p}{C} (E_1 - E_2),$$

$$2\tau_0^s = -\frac{p}{2\varepsilon C} \left(x - \frac{1}{2} \right) (E_1 + E_2) \left[1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right].$$

Вклад величины $\sigma_{z0} \sim \varepsilon^0 Z$ в выполнение условий (21) и (26) по сравнению с величиной $\varepsilon u_0' = \varepsilon^{-3} Z$ в рассматриваемом приближении пренебрежим. Можно показать, что условия $u_0' = 0$ можно выполнить в следующем приближении, где появляется еще одно быстроменяющееся решение u_0^q .

Условия вида (32) выполняются за счет величины краевого эффекта τ_0^q , являющейся решением первого уравнения (9). Следуя [23], запишем его решение:

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_1 \exp(-kx/\varepsilon) & \text{при } x = 0 \\ C_2 \exp(k(1-x)/\varepsilon) & \text{при } x = 1 \end{cases}, \quad k^2 = 2/(2+\nu) \quad (33)$$

для участка края $x = 0, z \geq 0$

$$\tau_0^{q+} = C_1^+ \exp(-kx/\varepsilon)$$

и для участка края $x = 0, z \leq 0$

$$\tau_0^{q-} = C_1^- \exp(-kx/\varepsilon).$$

Подставив $\varepsilon \tau_0^{q+}$ в условие (32), получим

$$C_1^+ = -\frac{\nu p E^+}{12\varepsilon^2 C k (1+\nu) (1-\nu + 2\nu E^+)}.$$

Таким же путем находим

$$C_1^- = -\frac{\nu p E^-}{12\varepsilon^2 C k (1+\nu)(1-\nu+2\nu E^-)}.$$

Подставив C_1^+ и C_1^- в выражение (33) для τ_0^q , получим выражение для краевого эффекта

$$\tau_0^q = -\frac{\nu p}{12\varepsilon^2 C k (1+\nu)} \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) \begin{cases} \frac{E^+}{1-\nu+2\nu E^+} \\ \frac{E^-}{1-\nu+2\nu E^-} \end{cases}$$

на защемлённом краю $x=0$. Решение краевого эффекта на краю $x=1$ записывается аналогично.

Из последней формулы следует асимптотическая оценка краевого эффекта

$$\tau_0^q \sim \varepsilon^{-2} p. \tag{34}$$

Наибольший вклад краевого эффекта имеет место в напряжении σ_x . Вкладом в остальные искомые величины можно пренебречь [23]. Окончательно для σ_x имеем формулы:

при $z \geq 0$

$$\sigma_{x(0)} = -E^+ \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \varepsilon \tau_0^{q+} (2+\nu) z + E^+ \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right)' + \nu \sigma_{z0}$$

и при $z \leq 0$

$$\sigma_{x(0)} = -E^- \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \varepsilon \tau_0^{q-} (2+\nu) z + E^- \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{E_1 - E_2}{2(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right)' + \nu \sigma_{z0}$$

дает вклад, соизмеримый с первым членом в силу условия (32). Из этих выражений следует оценка $\tau_0^{q+} \wedge \tau_0^{q-} \sim \varepsilon^{-2} p$.

Подстановка вычисленных величин w_0^s , u_0^s , τ_0^s , σ_{z0} в формулы (5) дает выражения для всех остальных неизвестных рассмотренного примера: напряжений, деформаций и перемещений:

$$u_{(0)} = -\frac{p}{\varepsilon^3 C} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right) z + \frac{p(E_1 + E_2)}{4\varepsilon C} \left[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right] \left(x - \frac{1}{2} \right) \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz +$$

$$+ \frac{p}{2\varepsilon^3 C} \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right),$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\frac{p}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \left[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right] \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + 9$$

$$+ \frac{p}{2\varepsilon^2 C} \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right),$$

$$\sigma_{z(0)} = -\frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \left[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right] z + \frac{p}{2} \left(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right),$$

$$\sigma_{x(0)} = -E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z + \frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \left[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right] \left[E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] +$$

$$+ E \frac{p}{2\varepsilon^2 C} \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) + \nu \frac{p}{2} \left(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right),$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) z - \frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \left[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right] \left[\nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \frac{1-\nu^2}{E} z \right] -$$

$$- \nu \frac{p}{2\varepsilon^2 C} \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{p}{2} \left(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right),$$

$$w_{(1)} = \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) \int_0^z \nu z dz - \frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \left[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right] \left[\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \nu \int_0^z 2(1+\nu) dz dz \right] +$$

$$+ \frac{p}{2} \left(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right) \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \frac{p}{2\varepsilon^2 C} \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) \int_0^z \nu dz + \frac{p}{\varepsilon^4 C} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} \right),$$

$$\tau_{(1)} = \frac{p}{\varepsilon C} \left(x - \frac{1}{2} \right) \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz \right] -$$

$$- \frac{p}{2\varepsilon C} \left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \int_0^z E dz + \frac{p(E_1 + E_2)}{4\varepsilon C} \left[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right] \left(x - \frac{1}{2} \right),$$

$$\sigma_{z(1)} = -\frac{p}{C} \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] +$$

$$+ \frac{p}{2C} \frac{(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)} \int_0^z \int_0^z E dz dz - \frac{p(E_1 + E_2)}{4C} \left[-1 + \frac{(E_1 - E_2)^2}{(E_1 + E_2)^2} \right] z + \frac{p}{2} \left(1 - \frac{E_1 - E_2}{12C} \right).$$

5. Двухслойная полоса со слоями различной толщины

Рассмотрим случай полосы, состоящей из двух слоев различной толщины, как на рис. 2.

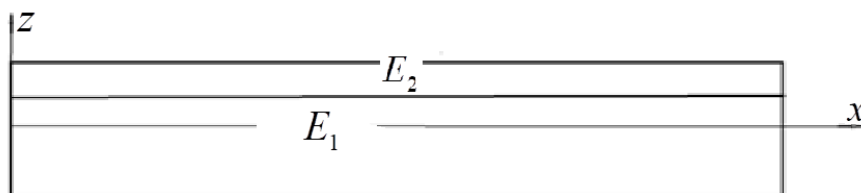


Рис. 2. Полоса из двух слоев различной толщины
Figure 2. Strip made of two layers with different thickness

Примем, что нижний слой при $-1 \leq z \leq z_1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_1 , верхний слой при $z_1 \leq z \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_2 ; E_1 и E_2 — константы, $E_1, E_2 \sim \varepsilon^0$. Положим опять для сокращения вычислений $\nu = \text{const}$ во всей полосе. Вычислим входящие в уравнения (7) интегральные коэффициенты (8) при искомым неизвестных w_0 , u_0 , τ_0 и σ_{z_0} при $z \geq 0$:

$$\int_0^1 E z dz = (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2}, \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz = \frac{2+\nu}{2},$$

$$\int_0^1 E dz = (E_1 - E_2) z_1 + E_2, \int_0^1 \nu dz = \nu;$$

при $z \leq 0$

$$\int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} E_1, \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz = \frac{2+\nu}{2}, \int_0^{-1} E dz = -E_1, \int_0^{-1} \nu dz = -\nu;$$

при $z \geq 0$

$$\int_0^z \int_0^z E z dz dz = (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6}, \int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz = \frac{2+\nu}{6},$$

$$\int_0^z \int_0^z E dz dz = \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2}, \int_0^z \int_0^z \nu dz dz = \frac{1}{2} \nu;$$

при $z \leq 0$

$$\int_0^{-z} \int_0^{-z} E z dz dz = -\frac{1}{6} E_1, \int_0^{-z} \int_0^{-z} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-z} \int_0^{-z} \nu z dz dz = -\frac{2+\nu}{6}, \int_0^{-z} \int_0^{-z} E_1 dz dz = \frac{1}{2} E_1, \int_0^{-z} \int_0^{-z} \nu dz dz = \frac{1}{2} \nu;$$

и подставим их в уравнения (7)

$$\varepsilon^3 w_0''' \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} - \varepsilon^2 u_0'' \left[(E_1 - E_2) z_1 + E_2 \right] - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_1 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' \left[\frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2} \right] + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+,$$

$$\varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-.$$

Сложив и вычтя их попарно, получим, изменив порядок записи, уравнения

$$\varepsilon^3 w_0''' \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] - (2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 - E_2)(z_1 + 1) + 2\tau_0 = X_+ + X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2 + \nu}{3} +$$

$$+\varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon \tau_0' = Z_+ - Z_-,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 - (E_1 - E_2)] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' = X_+ - X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) +$$

$$+\varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} [(E_1 - E_2)(2 - z_1) z_1 + E_1 + E_2] + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_-.$$

Примем $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ в первой паре уравнений

$$\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} [(E_1 - E_2) z_1^2 + (E_1 + E_2)] - (2 + \nu) \varepsilon^2 (\tau_0^{s''} + \tau_0^{q''}) -$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 + E_1 + E_2] + 2(\tau_0^s + \tau_0^q) = X_+ + X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \frac{2 + \nu}{3} \varepsilon^3 (\tau_0^{s'''} + \tau_0^{q'''}) +$$

$$+\varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) = Z_+ - Z_-.$$

и запишем их, как и в предыдущем параграфе, отдельно для быстрых

$$-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0,$$

$$(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q'''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0$$

и медленных неизвестных

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2) z_1 + E_1 + E_2] + 2\tau_0^s = X_+ + X_-, \quad (35)$$

$$-\varepsilon^4 w_0^{s''''} \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 u_0^{s'''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} = Z_+ - Z_-, \quad (36)$$

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2) z_1 + (E_1 + E_2)] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} = X_+ - X_-, \quad (37)$$

$$-\varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) + \varepsilon^3 u_0^{s''''} [(E_1 - E_2)(2 - z_1)z_1 + (E_1 + E_2)] + 2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_- \quad (38)$$

Продифференцируем первое уравнение по x и умножим на ε . Затем исключим τ_0^s из первых двух

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 w_0^{s''''} \left[(E_1 + E_2) + (E_1 - E_2) \frac{1}{3} \left(z_1^3 - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] + \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left[(E_1 - E_2) \left(2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right] = \\ = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-') \end{aligned} \quad (39)$$

Так же как и в предыдущем параграфе, из четвертого уравнения (38) следует, что $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$. Поэтому в уравнении (37) величина $\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'}$ $\sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^6 w_0^s$ и может быть отброшена как малая второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда это уравнение

$$\varepsilon^3 w_0^{s''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)] = X_+ - X_-$$

с отброшенным членом $2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'}$ вместе с уравнением (39) сводятся к двум разрешающим

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)] = \varepsilon^3 w_0^{s''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - (X_+ - X_-), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 C w_0^{s''''} = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-') + \\ + \left[(E_1 - E_2) \left(2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right] \frac{\varepsilon (X_+' - X_-')}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$C = (E_1 + E_2) + (E_1 - E_2) \frac{1}{3} \left(z_1^3 - \frac{z_1^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[(E_1 - E_2) \left(2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right] \frac{(E_1 - E_2)(z_1^2 - 1)}{(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)}.$$

Полученные уравнения (40) и (41) имеют тот же смысл, что и уравнения (12) и (13).

Неизвестные $\sigma_{z_0}^s$ и τ_0^s находятся из уравнений системы (35) и (38):

$$\begin{aligned} 2\tau_0^s = X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''} \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] + \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2], \\ 2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) - \varepsilon^3 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)(2 - z_1)z_1 + (E_1 + E_2)] \end{aligned} \quad (42)$$

прямыми действиями без интегрирования. Заметим, что и в этом случае остаются справедливыми оценки основных неизвестных w_0^s , u_0^s , τ_0^s , $\sigma_{z_0}^s$ по формулам (15). Решение уравнений (40) и (41) находится, так же как и в предыдущем параграфе, при соответствующих граничных условиях.

6. Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины

Полосу отнесем, как и в предыдущих примерах, к системе безразмерных прямоугольных координат x, z (рис. 3), считая, что ее верхняя часть при $0 \leq z \leq 1$ состоит из n слоев различных толщин и различных жесткостей E_i , $i = 1 \div n$, границы которых заданы координатами $z_i = z_0 \div z_n$. При этом будет $z_0 = 0$ и $z_n = 1$. Примем, что нижняя часть полосы $-1 \leq z \leq 0$ состоит из m слоев различных толщин и различных жесткостей E_i , $i = 1 \div m$, границы которых заданы координатами $z_i = (-z_0) \div (-z_m)$. При этом будет $z_m = -1$. То есть значения координат берутся по модулю и присваивается знак минус.

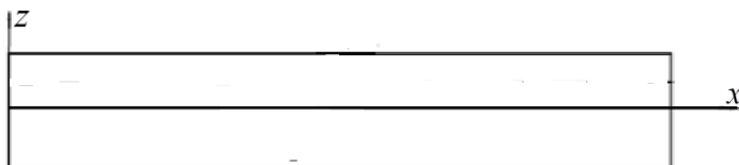


Рис. 3. Полоса с произвольным количеством слоев различной толщины
 Figure 3. Strip of an arbitrary number of layers with different thickness

Для решения системы уравнений (7) надо вычислить коэффициенты (8) для случая произвольного числа слоев. Предположим, как и в предыдущих параграфах, что коэффициент Пуассона ν не зависит от координаты z . Таким образом остается вычислить четыре коэффициента $\int_0^1 Edz$, $\int_0^1 Ezdz$, $\int_0^1 \int_0^z Edzdz$, $\int_0^z \int_0^z Ezdzdz$ для верхней части полосы при $1 \geq z \geq 0$ и соответственно четыре $\int_0^{-1} Edz$, $\int_0^{-1} Ezdz$, $\int_0^{-1} \int_0^z Edzdz$, $\int_0^{-z} \int_0^z Ezdzdz$ для нижней части $-1 \leq z \leq 0$. После вычислений для них можно записать следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_z^+ &= \int_0^1 Ezdz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i h_i^2, \quad \tilde{E}^+ = \int_0^1 Edz = \sum_{i=1}^n E_i h_i; \\
 \tilde{E}_z^- &= \int_0^{-1} Ezdz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i^2, \quad \tilde{E}^- = \int_0^{-1} Edz = -\sum_{i=1}^m E_i h_i; \\
 \tilde{\tilde{E}}_z^+ &= \int_0^1 \int_0^z Ezdzdz = (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^3}{6} + \frac{z_1^2}{2} h_2 \right) + E_2 \frac{1}{6}; \\
 \tilde{\tilde{E}}_z^- &= \int_0^{-1} \int_0^z Ezdzdz = -(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^3}{6} + \frac{z_1^2}{2} h_2 \right) - E_2 \frac{1}{6}; \\
 \tilde{\tilde{E}}^+ &= \int_{z_0}^1 \int_{z_0}^z Edzdz = \frac{1}{2} E_1 h_1^2 + E_1 h_1 h_2 + \frac{1}{2} E_2 h_2^2; \\
 \tilde{\tilde{E}}^- &= \int_{z_0}^{-1} \int_{z_0}^z Edzdz = \frac{1}{2} E_1 h_1^2 + E_1 h_1 h_2 + \frac{1}{2} E_2 h_2^2.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Запишем уравнения (7), воспользовавшись введенными обозначениями для интегральных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' \tilde{E}_z^+ - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2}(2+\nu) - \varepsilon^2 u_0'' \tilde{E}^+ - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_+, \\ \varepsilon^3 w_0''' \tilde{E}_z^- - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2}(2+\nu) + \varepsilon^2 u_0'' \tilde{E}^- + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 &= X_-; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^4 w_0'''' \tilde{E}_z^+ + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6}(2+\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' \tilde{E}^+ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} &= Z_+, \\ \varepsilon^4 w_0'''' \tilde{E}_z^- - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6}(2+\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon^3 u_0''' \tilde{E}^- + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} &= Z_-. \end{aligned} \quad (45)$$

Сложим и вычтем первые два и последние два уравнения попарно и запишем их в следующем порядке:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) - (2+\nu) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) + 2\tau_0 &= X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \frac{1}{3}(2+\nu) \varepsilon^3 \tau_0''' + \varepsilon^3 u_0''' (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) - 2\varepsilon \tau_0' &= Z_+ - Z_-; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^2 u_0'' (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' &= X_+ - X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{3}(2+\nu) + \varepsilon^3 u_0''' (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} &= Z_+ + Z_-. \end{aligned} \quad (47)$$

Примем, так же как и в случае с двухслойной полосой, в соответствии с описанием метода SVPB $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ в первой паре уравнений, где τ_0^s — медленно меняющаяся функция, τ_0^q — быстро меняющаяся функция:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) - (2+\nu) (\varepsilon^2 \tau_0^{s''} + \varepsilon^2 \tau_0^{q''}) - \varepsilon^2 u_0'' (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) + 2(\tau_0^s + \tau_0^q) &= X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \frac{1}{3}(2+\nu) \varepsilon^3 (\varepsilon^2 \tau_0^{s'''} + \varepsilon^2 \tau_0^{q'''}) + \varepsilon^3 u_0''' (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) - 2(\varepsilon \tau_0^{s'} + \varepsilon \tau_0^{q'}) &= Z_+ - Z_- \end{aligned}$$

и запишем уравнения для быстро меняющихся функций

$$\begin{aligned} -(2+\nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q &= 0, \\ (2+\nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q'''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

и медленно меняющихся

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) + 2\tau_0^s &= X_+ + X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0'''' (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \varepsilon^3 u_0^{s'''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} &= Z_+ - Z_-, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0^{s'''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} &= X_+ - X_-, \\ -\varepsilon^4 w_0^{s''''} (\tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^-) + \varepsilon^3 u_0^{s'''} (\tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^-) + \varepsilon^2 \nu \sigma_{z_0}^{s''} + 2\sigma_{z_0}^s &= Z_+ + Z_-. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений получаем

$$\varepsilon^4 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- - \tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^-) - \varepsilon^3 u_0^{s'''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^-) = Z_+ - Z_- + \varepsilon (X_+' + X_-'). \quad (50)$$

Из четвертого уравнения, как и ранее в п. 3, следует, что $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^3 u_0^s \wedge \varepsilon^4 w_0^s$. Поэтому в третьем уравнении величина $2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'}$ $\sim \varepsilon^4 u_0^s \wedge \varepsilon^6 w_0^s$ и может быть отброшена как малая второго порядка по сравнению с главными членами. Тогда это уравнение

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) = X_+ - X_-$$

с отброшенным членом $2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'}$ и уравнение (50) сводятся к двум разрешающим

$$\varepsilon^4 C w_0^{s''''} = Z_+ - Z_- + \varepsilon (X_+' + X_-') + \varepsilon \frac{1}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} (X_+' - X_-'), \quad (51)$$

$$\text{где } C = \left[(\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^- - \tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^-) + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^- - \tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^-) \right]$$

и

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-) = \varepsilon^3 w_0^{s'''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - (X_+ - X_-). \quad (52)$$

Неизвестные $\sigma_{z_0}^s$ и τ_0^s находятся из первого и четвертого уравнений системы (49):

$$\begin{aligned} 2\sigma_{z_0}^s &= Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} (\tilde{\tilde{E}}_z^+ - \tilde{\tilde{E}}_z^-) - \varepsilon^3 u_0^{s'''} (\tilde{\tilde{E}}^+ + \tilde{\tilde{E}}^-), \\ 2\tau_0^s &= X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s'''} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-) \end{aligned} \quad (53)$$

прямыми действиями без интегрирования. Вытекающие из формул (51)—(53) оценки основных неизвестных совпадают с оценками в выражении (15).

7. Условия на коротких сторонах полосы

Пример. Рассмотрим консольную полосу, жестко закрепленную на конце $x=0$. Конец $x=1$ будем считать свободным от какой-либо нагрузки. Верхний край $z=1$ несет только равномерно распределенную нагрузку $Z_+ = p$. Для простоты изложения рассмотрим четырехслойную полосу (рис. 4) и примем одинаковыми коэффициенты Пуассона каждого слоя.

Разрешающие уравнения (51)—(53) приводятся к виду

$$\varepsilon^4 C w_0^{s''''} = p, \quad (54)$$

$$\varepsilon^2 u_0^{s''} = \varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-}. \quad (55)$$

$$2\sigma_{z_0}^s = p + \varepsilon^4 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-) - \varepsilon^3 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-), \quad (56)$$

$$2\tau_0^s = -\varepsilon^3 w_0^{s''''} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) + \varepsilon^2 u_0^{s''} (\tilde{E}^+ - \tilde{E}^-).$$

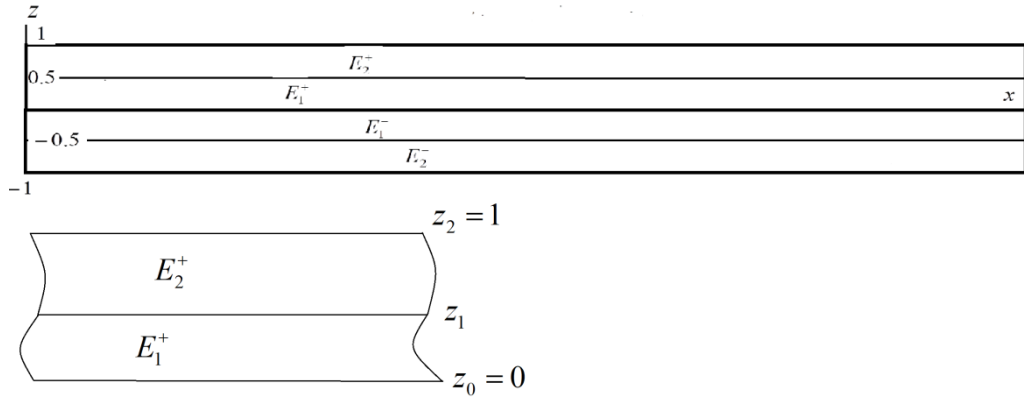


Рис. 4. Консольная полоса
Figure 4. Cantilever strip

На конце $x = 0$ на основании формул (5) запишем условия защемления

$$u_{(0)}|_{x=0} = \left[-\varepsilon w_0' z + \tau_0 2(1+\nu) \int_0^z \frac{1}{E} dz + u_0 \right]_{x=0} = 0, \quad (57)$$

$$w_{(1)}|_{x=0} = \left\{ \nu \varepsilon^2 w_0'' \frac{z^2}{2} - \varepsilon \tau_0' \left[(1-\nu^2) \int_0^z \frac{1}{E} z dz + 2\nu(1+\nu) \frac{z^2}{2} \right] + (1-\nu^2) \sigma_{z_0} \int_0^z \frac{1}{E} dz - \varepsilon u_0' \nu z + w_0 \right\}_{x=0} = 0 \quad (58)$$

и на конце $x = 1$ — условия свободного края

$$\sigma_{x(0)}|_{x=1} = \left\{ \left[-E \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0' (2+\nu) \right] z + E \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z_0} \right\}_{x=1} = 0, \quad (59)$$

$$\tau_{(1)}|_{x=1} = \left\{ \varepsilon^3 w_0^{s''''} \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' (2+\nu) \frac{z^2}{2} - \varepsilon^2 u_0^{s''} \int_0^z E dz - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' z + \tau_0 \right\}_{x=1} = 0. \quad (60)$$

Запишем условия (57), (58) для первого слоя $z_0 \leq z \leq z_1$ при $x = 0$:

$$\left[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu) \tau_0 \frac{1}{E_1} \right] (z - z_0) + u_0 = 0, \quad (61)$$

$$\left\{ \nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \left[\frac{1}{E_1} (1-\nu^2) + 2\nu(1+\nu) \right] \right\} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left[(1-\nu^2) \sigma_{z_0} \frac{1}{E_1} - \nu \varepsilon u_0' \right] (z - z_0) + w_0 = 0 \quad (62)$$

и для второго слоя $z_1 \leq z \leq z_2$ при $x = 0$:

$$-\varepsilon w_0' \left[(z_1 - z_0) + (z - z_1) \right] + 2(1 + \nu) \tau_0 \left[\frac{1}{E_1^+} (z_1 - z_0) + \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) \right] + u_0 = 0, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & \nu \varepsilon^2 w_0'' \left[\left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] - \\ & - \varepsilon \tau_0' \left\{ (1 - \nu^2) \left[\frac{1}{E_1^+} \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \frac{1}{E_2^+} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] + 2\nu(1 + \nu) \left[\left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} \right) + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) \right] \right\} \\ & + \left[(1 - \nu^2) \sigma_{z_0} - \nu \varepsilon u_0' \right] \left[\frac{1}{E_1^+} (z_1 - z_0) + \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) \right] + w_0 = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Вычитая из уравнения (63) уравнение (61) и из уравнения (64) уравнение (62) при $z = z_1$, получим условия на конце $x = 0$ для второго слоя:

$$\left[-\varepsilon w_0' + 2(1 + \nu) \tau_0 \frac{1}{E_2^+} \right] (z - z_1) + u_0 = 0, \quad (65)$$

$$\left\{ \nu \varepsilon^2 w_0'' - \varepsilon \tau_0' \left[(1 - \nu^2) \frac{1}{E_2^+} + 2\nu(1 + \nu) \right] \right\} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) + \left[(1 - \nu^2) \sigma_{z_0} - \nu \varepsilon u_0' \right] \frac{1}{E_2^+} (z - z_1) + w_0 = 0. \quad (66)$$

Сравнивая условия (61), (62) с условиями (65), (66), замечаем, что они однотипны. То есть условия заземления ставятся для каждого слоя. Легко видеть, что эти рассуждения могут быть продолжены для полосы с произвольным числом слоев как при $z > 0$, так и при $z < 0$.

Таким образом, для слоев при $z > 0$ имеем восемь условий на концах полосы:

$$u_0 = 0, \quad (67)$$

$$-\varepsilon w_0' + \frac{2(1 + \nu)}{E_i^+} (\tau_0^s + \tau_0^q) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (68)$$

$$w_0 = 0, \quad (69)$$

$$\sigma_{z_0} \frac{1 - \nu^2}{E_i^+} - \nu \varepsilon u_0' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (70)$$

$$\nu \varepsilon^2 w_0'' - \left(\varepsilon \tau_0^{s'} + \varepsilon \tau_0^{q'} \right) \left[\frac{1 - \nu^2}{E_i^+} + 2\nu(1 + \nu) \right] = 0, \quad i = 1, 2, \quad (71)$$

где условия (68), (70), (71) записаны для первого и второго слоев. Здесь, как и ранее, предполагается, что $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$. Из выражения (56) следует, что $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0$ и поэтому в уравнениях (68) и (71) член τ_0^s может быть отброшен как величина порядка ε^2 по сравнению с w_0^s . Кроме того, поскольку в уравнении (71) $\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \nu \varepsilon^2 w_0''$, в уравнении (68) второй член τ_0^q также может быть отброшен. Это дает возможность использовать условия

$$w_0 = w_0' = u_0 = 0 \tag{72}$$

на конце $x = 0$ при нахождении решения уравнений (54), (55).

Условия свободного края (59), (60) в рассматриваемом приближении представляются в следующем виде:

$$-E_i \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^q (2 + \nu) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{73}$$

$$E_i \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{74}$$

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0, \tag{75}$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz - \nu \varepsilon \sigma_{z0}' z = 0, \tag{76}$$

$$\varepsilon^3 w_0''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2 + \nu) \frac{z^2}{2} = 0. \tag{77}$$

Здесь, как и ранее, в условиях жесткого защемления член τ_0^s отброшен в условиях (73) и (77) как величина ε^2 по сравнению с w_0^s , поскольку в силу оценок (15) $u_0^s \sim \varepsilon^{-3} Z$, $\sigma_{z0}^s \sim Z$, в условии (74) величина σ_{z0}^s может быть отброшена по сравнению с $\varepsilon u_0'$. Из таких же соображений в условии (76) величина $\varepsilon \sigma_{z0}'$ может быть отброшена по сравнению с $\varepsilon^2 u_0''$. После отбрасывания и вычисления интегралов получим:

$$-E_1 \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^q (2 + \nu) = 0 \quad \text{при } 0 \leq z \leq z_1, \tag{78}$$

$$-E_2 \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^q (2 + \nu) = 0 \quad \text{при } z_1 \leq z \leq 1, \tag{79}$$

$$E_1 \varepsilon u_0' = 0, \quad \text{при } 0 \leq z \leq z_1, \tag{80}$$

$$E_2 \varepsilon u_0' = 0 \quad \text{при } z_1 \leq z \leq 1, \tag{81}$$

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0 \quad \text{при } 0 \leq z \leq 1, \tag{82}$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' E_1 = 0 \quad \text{при } 0 \leq z \leq z_1, \tag{83}$$

$$-\varepsilon^2 u_0'' E_2 = 0 \quad \text{при } z_1 \leq z \leq 1, \tag{84}$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2 + \nu) = 0 \quad \text{при } 0 \leq z \leq z_1, \tag{85}$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 - \varepsilon^2 \tau_0^{q''} (2 + \nu) = 0 \quad \text{при } z_1 \leq z \leq 1. \tag{86}$$

Условия (83) и (84) выполняются, если $u_0'' = 0$, что на основании формулы (55) приводит к условию

$$w_0''' = 0. \tag{87}$$

После этого перепишем условия (78)—(86), справедливые на конце для $x=1$ при $0 \leq z \leq 1$:

$$w_0'' = 0, \quad (88)$$

$$u_0' = 0, \quad (89)$$

$$\tau_0^s = 0, \quad (90)$$

$$\tau_0^q = 0. \quad (91)$$

Последнее условие показывает, что краевой эффект на свободном краю отсутствует. Условие (90) в силу соотношения (55) совпадает с условием (87). В итоге оставшихся трех условий (87)—(90) на конце $x=1$ и трех условий (72) на конце $x=0$ достаточно для определения шести постоянных интегрирования уравнений (54) и (55). После вычислений получим основные неизвестные

$$w_0^s = \frac{p}{\varepsilon^4 C} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right), \quad u_0^s = \frac{p}{\varepsilon^3 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} \right),$$

$$\tau_0^s = -\frac{p}{2\varepsilon C} (x-1)(\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-), \quad \sigma_{z0}^s = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right).$$

Подстановка этих выражений в формулы (5) дает выражения для всех неизвестных рассмотренного примера: напряжений, деформаций и перемещений:

$$u_{(0)} = \frac{p}{C} \left[-\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) z - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (x-1)(\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} \right) \right],$$

$$\varepsilon_{x(0)} = -\frac{p}{\varepsilon^2 C} \left[\left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \right) z - \varepsilon^2 \frac{1}{2} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right) \right],$$

$$\sigma_{z(0)} = \frac{p}{2} \left(\frac{\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-}{C} z + 1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{2C} \right),$$

$$\sigma_{x(0)} = -E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \right) z - \frac{p}{2C} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) (2+\nu) z +$$

$$+ E \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right) + \nu \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right), \quad (92)$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \frac{p}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \right) z - \frac{p}{2C} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) \left[\nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \frac{1-\nu^2}{E} z \right] -$$

$$- \nu \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right),$$

$$w_{(1)} = \frac{p\nu}{\varepsilon^2 C} \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} \right) \frac{z^2}{2} + \frac{p}{2C} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) \left[\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + 2\nu(1+\nu) \frac{z^2}{2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right) \int_0^z \frac{1 - \nu^2}{E} dz - \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \right) \int_0^z \nu dz + \frac{p}{\varepsilon^4 C} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right), \\
 \tau_{(1)} & = \frac{p}{\varepsilon^2 C} (x-1) \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' (2 + \nu) \frac{z^2}{2} - \\
 & - \frac{p}{\varepsilon^4 C} (x-1) \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \int_0^z E dz - \frac{p}{2 \varepsilon C} (x-1) (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-), \\
 \sigma_{z(1)} & = - \frac{p}{C} \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' (2 + \nu) \frac{z^3}{6} + \\
 & + \frac{p}{\varepsilon^2 C} \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{\tilde{E}^+ + \tilde{E}^-} \int_0^z \int_0^z E dz dz + \frac{p}{2C} (\tilde{E}_z^+ + \tilde{E}_z^-) - \varepsilon \tau_0' z + \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\tilde{E}_z^+ - \tilde{E}_z^-}{C} \right),
 \end{aligned}$$

в которых вычисленные по формулам (43) коэффициенты жесткости имеют значения

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_z^+ & = \int_0^1 E z dz = \frac{1}{2} (E_1^+ h_1^2 + E_2^+ h_2^2), \quad \tilde{E}^+ = \int_0^1 E dz = E_1^+ h_1 + E_2^+ h_2, \\
 \tilde{E}_z^- & = \int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} (E_1^- h_1^2 + E_2^- h_2^2), \quad \tilde{E}^- = \int_0^{-1} E dz = -E_1^- h_1 - E_2^- h_2, \\
 \tilde{\tilde{E}}_z^+ & = \int_0^1 \int_0^z E z dz dz = (E_1^+ - E_2^+) \frac{z_1^3}{6} + (E_1^+ - E_2^+) \frac{z_1^2}{2} h_2 + E_2^+ \frac{1}{6}, \\
 \tilde{\tilde{E}}^+ & = \int_{z_0}^1 \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} E_1^+ h_1^2 + E_1^+ h_1 h_2 + \frac{1}{2} E_2^+ h_2^2, \\
 \tilde{\tilde{E}}_z^- & = \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz = -(E_1^- - E_2^-) \frac{z_1^3}{6} - (E_1^- - E_2^-) \frac{z_1^2}{2} h_2 - E_2^- \frac{1}{6}, \\
 \tilde{\tilde{E}}^- & = \int_{z_0}^{-1} \int_{z_0}^z E dz dz = \frac{1}{2} E_1^- h_1^2 + E_1^- h_1 h_2 + \frac{1}{2} E_2^- h_2^2.
 \end{aligned}$$

8. Заключение

Полубратный метод Сен-Венана предполагает построение решения уравнений теории упругости путем задания части неизвестных из каких-либо соображений и вычисления по ним остальных неизвестных. В статье он продолжен до итерационного, совпадающего с методом простых итераций. Для этого оператор исходных уравнений преобразован так, чтобы он позволял вычислять неизвестные величины последовательно: вычисленные в одном уравнении величины входят в следующее уравнение как известные, при этом умноженные на малый параметр. Такая последовательность обеспечивается операторами Пикара и выбором величин начального приближения, не зависящих от поперечной координаты, называемыми гипотезами Кирхгофа или гипотезами недеформируемой нормали. В течение одной итерации вычисляются путем прямого интегрирования все неизвестные задачи, содержащие четыре произвольные функции интегрирования, зависящие от продольной координаты и играющие роль коэффициентов в полиномах по степеням поперечной координаты. В случае изотропного материала уравнения, описываю-

щие изгиб и растяжение — сжатие, разделяются. Заметим, что для случая произвольного слоистого материала разделения не происходит.

В процессе последовательного вычисления неизвестных в течение нулевой итерации имеет место четырехкратное интегрирование по поперечной координате и четырехкратное дифференцирование по продольной. Однако это дифференцирование имеет символический характер, так как при выполнении граничных условий на длинных сторонах производные приравняются к нагрузке, которая считается величиной $O(1)$, и соответствующие уравнения интегрируются, обеспечивая вместе с однородными сингулярно возмущенными уравнениями непрерывность и ограниченность решения в любом случае. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление исходного сложного оператора на четыре оператора относительно поперечной координаты и четыре — относительно продольной. Близость полученного решения к точному решению оценивается порядком первого отброшенного члена по ε . Предложенное решение свободно от недостатков классической теории, построенной на гипотезах и допущениях:

- 1) в возможности пренебрежения поперечными напряжениями;
- 2) «гипотезы прямой нормали» для перемещений в полосе;
- 3) об эквивалентности замены напряжений исходной задачи на принятые в сопротивлении материалов усилия и моменты;
- 4) в возможности пренебрежения граничными условиями на длинных сторонах;
- 5) в пренебрежении быстро затухающими компонентами решений на торцевых поверхностях;
- 6) в пренебрежении понижения порядка системы дифференциальных уравнений и невыполнении части граничных условий вследствие этого;
- 7) в силу большей общности описанный метод позволяет однообразно рассматривать новые задачи как для изотропного, так анизотропного и композиционного материала.

Список литературы

1. *Reissner E.* Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics. London: Jones & Bartlett Publishers, Inc. 1996. 624 p. ISBN 0867209682
2. *Mindlin R.D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *Journal Applied Mechanics* // *Transaction of American Society of Mechanical Engineers*. 1951. Vol. 18. Issue 1. P. 31–38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>
3. *Ghugal Y.M., Kulkarni S.K.* Thermal stress analysis of cross-ply laminated plates using refined shear deformation theory // *Journal of Experimental and Applied Mechanics*. 2011. Vol. 2. P. 47–66. <https://doi.org/10.1504/IJAUTOC.2016.078100>
4. *Ghugal Y.M., Pawar M.D.* Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear deformation theory // *Journal of Aerospace Engineering & Technology*. 2011. Vol. 1–1. P. 1–12. URL: <https://techjournals.stmjournals.in/index.php/JoAET/article/view/724> (дата обращения: 12.02.2023).
5. *Sayyad A.S., Ghugal Y.M.* Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory // *Applied and Computational Mechanics*. 2012. Vol. 6. Issue 1. P. 65–82. URL: <https://www.kme.zcu.cz/acm/acm/article/view/171> (дата обращения: 22.11.2022).
6. *Sayyad A.S., Ghugal Y.M.* Buckling analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory // *Applied and Computational Mechanics*. 2012. Vol. 6. Issue 2. P. 185–196. URL: <https://www.kme.zcu.cz/acm/acm/article/view/185> (дата обращения: 22.11.2022).
7. *Sayyad A.S., Ghugal Y.M.* Flexure of thick beams using new hyperbolic shear deformation theory // *International Journal of Mechanics*. 2011. Vol. 5–3. P. 113–122. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252011000200005>
8. *VoT.P., Thai H.-T.* Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories // *Composite Structures*. 2012. Vol. 94. Issue 8. P. 2513–2522. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.010>
9. *Lyu Y.-T., Hung T.-P., Ay H.-C., Tsai H.-A., Chiang Y.-C.* Evaluation of Laminated Composite Beam Theory Accuracy // *Materials*. 2022. Vol. 15. <https://doi.org/10.3390/ma15196941>
10. *Фирсанов Вал.В., Фам В.Т., Чан Н.Д.* Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // *Труды МАИ*. 2020. № 114. С. 1–26. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07>
11. *Firsanov V.V.* Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016. Vol. 5. Issue 6. P. 515–522. <https://doi.org/10.3103/S1052618816060078>
12. *Фирсанов В.В., Зоан К.Х.* Краевое напряженное состояние круглой пластины переменной толщины при термомеханическом нагружении на основе уточненной теории // *Тепловые процессы в технике*. 2020 Т. 12. №. 1. С. 39–48. <https://doi.org/10.34759/tpt-2020-12-1-39-48>

13. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1955. Vol. 61. Issue 6. P. 485–504. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1955-09976-2>
14. Григолюк Э.И. Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек. Серия «Механика твердого деформируемого тела». М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. 272 с. URL: <https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm> (дата обращения: 22.11.2022).
15. Zveryayev Ye.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beams and plates // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003. Vol. 67. Issue 3. P. 425–434. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90026-8](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90026-8)
16. Love A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927. 662 p. URL: <https://archive.org/details/atreatiseonmath01lovegoog/page/n12/mode/2up> (дата обращения: 12.02.2023).
17. Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Band I*. Leipzig. 1942, 642 p. (in Deutsch) URL: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.362343/page/n1/mode/2up> (дата обращения: 12.02.2023).
18. Zveryaev E.M. Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method. In: Pietraszkiewicz W., Szymczak C. (eds.) *Shell Structures: Theory and Application*. London: Taylor & Francis Group; 2006. P. 191–198.
19. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Dover: Dover Books on Mathematics Publ.; 1999. 128 p. URL: https://archive.org/details/elementsoftheory0000kolm_1712/page/140/mode/2up (дата обращения: 12.02.2023).
20. Zveryayev E.M. A consistent theory of thin elastic shells // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. April 2017. Vol. 80. Issue 5. P. 409–420. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech>
21. Зверьяев Е.М., Олехова Л.В. Сведения трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2014. № 95. С. 1–29. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ipmp&paperid=1947&option_lang=rus EDN: TBEVXL
22. Zveryayev E.M., Makarov G.I. A general method for constructing Timoshenko-type theories // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008. Vol. 72. Issue 2. P. 197–207. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.004>
23. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity // *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. Issue 7. P. 1042–1050. <https://doi.org/10.3103/S0025654420070225>

References

1. Reissner E. *Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics*. London. Jones & Bartlett Publ.; 1996. ISBN 0867209682
2. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *American Society of Mechanical Engineers Journal Applied Mechanics*. 1951;18(1):31–38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>
3. Ghugal Y.M., Kulkarni S.K. Thermal stress analysis of cross-ply laminated plates using refined shear deformation theory. *Journal of Experimental and Applied Mechanics*. 2011;2:47–66. DOI:10.1504/IJAUTOC.2016.078100
4. Ghugal Y.M., Pawar M.D. Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear deformation theory. *Journal of Aerospace Engineering & Technology*. 2011;1–1:1–12. Available from: <https://techjournals.stmjournals.in/index.php/JoAET/article/view/724> (accessed: 12.02.2023).
5. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Applied and Computational Mechanics*. 2012;6(1):65–82. Available from: <https://www.kme.zcu.cz/acm/acm/article/view/171> (accessed: 12.02.2023).
6. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Buckling analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory. *Applied and Computational Mechanics*. 2012;6(2):185–196. Available from: <https://www.kme.zcu.cz/acm/acm/article/view/185> (accessed: 12.02.2023).
7. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Flexure of thick beams using new hyperbolic shear deformation theory. *International Journal of Mechanics*. 2011;5–3:113–122. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252011000200005>
8. Vo T.P., Thai H.-T. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories. *Composite Structures*. 2012;94 (8):2513–2522. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.010>
9. Lyu Y.-T., Hung T.-P., Ay H.-C., Tsai H.-A., Chiang Y.-C. Evaluation of Laminated Composite Beam Theory Accuracy. *Materials*. 2022;15:6941. <https://doi.org/10.3390/ma15196941>
10. Firsanov Val.V., Pham V.T., Tran N.D. Strain-stress state analysis of multilayer composite spherical shells based on the refined theory. *Trudy MAI [Works of MAI]*. 2020;114:1–26. (In Russ.) <https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07>
11. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016;45(6):515–521. <https://doi.org/10.3103/S1052618816060078>
12. Firsanov V.V., Zoan K.Kh. Edge stress state of a circular plate of variable thickness under thermo-mechanical loading on the basis of refined theory. *Teplovye processy v tekhnike [Thermal processes in engineering]*. 2020;12(1):39–48. (In Russ.) <https://doi.org/10.34759/tpt-2020-12-1-39-48>
13. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1955;61(6):485–504. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1955-09976-2>

14. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Nonclassical theories of the vibrations of beams, plates, and shells. In: *Progress in Science and Technology: Mechanics of Deformable Solids* (vol. 5). Moscow; 1973. (In Russ.) Available from: <https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm> (accessed: 12.02.2023).
15. Zveryayev Ye.M. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beams and plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003;67(3):425–434. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90026-8](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90026-8)
16. Love A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927. Available from: <https://archive.org/details/atreatiseonmath01lovegoog/page/n12/mode/2up> (accessed: 12.02.2023).
17. Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Band I. Leipzig. 1942. (In Deutsch) Available from: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.362343/page/n1/mode/2up> (accessed: 12.02.2023).
18. Zveryaev E.M. Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method. In: Pietraszkiewicz W., Szymczak C. (eds.) *Shell Structures: Theory and Application*. London: Taylor & Francis Group; 2006. P. 191–198.
19. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Mineola, N.Y.: Dover Publ.; 1999. Available from: https://archive.org/details/elementsoftheory0000kolm_1712/page/140/mode/2up (accessed: 12.02.2023).
20. Zveryayev E.M. A consistent theory of thin elastic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. April 2017;80(5):409–420. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech>
21. Zveriaev E.M., Olekhova L.V. Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle. *Keldysh institute preprints*. 2014;95:1–29. (In Russ.) Available from: https://www.mathnet.ru/php/Ėarchive.phtml?wshow=paper&jrmid=ipmp&paperid=1947&option_lang=rus (accessed: 12.02.2023).
22. Zveryayev E.M., Makarov G.I. A general method for constructing Timoshenko-type theories. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008;72(2):197–207. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.004>
23. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity. *Mechanics of Solids*. 2020;55(7):1042–1050. <https://doi.org/10.3103/S0025654420070225>