

ГЕОМЕТРИЯ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОЛОЧЕК GEOMETRICAL MODELING OF SHELL FORMS

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-84-93

EDN: GFIGAE

УДК 69:624.074:624.012.4

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Геометрия и статический расчет тонких оболочек в форме поверхности диагонального переноса велароидального типа

О.О. Алёшина 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ xiaofeng@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 8 октября 2022 г.

Доработана: 24 декабря 2022 г.

Принята к публикации: 27 декабря 2022 г.

Для цитирования

Алёшина О.О. Геометрия и статический расчет тонких оболочек в форме поверхности диагонального переноса велароидального типа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 84–93. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-84-93>

Аннотация. Представлены результаты изучения геометрии и напряженно-деформированного состояния поверхности с каркасом из трех плоских кривых в координатных плоскостях, нашедших на сегодняшний день применение в основном в судостроительной промышленности. Цель исследования – выявление с точки зрения напряженно-деформированного состояния от действия постоянной равномерно распределенной нагрузки оптимальной оболочки диагонального переноса велароидального типа с одинаковым главным каркасом из трех суперэллипсов. Статический расчет выполнен с помощью программы SCAD на базе метода конечных элементов, предназначенной для выполнения прочностных расчетов различного вида и назначения конструкций. Показано влияние параметрических уравнений задания поверхности в зависимости от образующего семейства однотипных сечений на картину распределения нормальных напряжений и изгибающих моментов. Полученные результаты могут помочь архитекторам и конструкторам с выбором формы оболочек для новых проектов.

Ключевые слова: алгебраическая поверхность, параметрические уравнения поверхности, суперэллипс, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов

Geometry and static analysis of thin shells in the form of a diagonal translation surface of the velaroidal type

Olga O. Aleshina 

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

✉ xiaofeng@yandex.ru

Article history

Received: October 8, 2022

Revised: December 24, 2022

Accepted: December 27, 2022

Abstract. The author presents the results of a study of the geometry and stress-strain state of a surface with a frame of three flat curves in coordinate planes, which have found application today mainly in the shipbuilding industry. The purpose of the work is to identify from the point of view of the stress-strain state

Алёшина Ольга Олеговна, кандидат технических наук, ассистент, департамент строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0000-0001-8832-6790, Scopus Author ID: 6506458086, eLIBRARY SPIN-код: 8550-4986; xiaofeng@yandex.ru

Olga O. Aleshina, PhD, Assistant, Department of Civil Engineering, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8832-6790, Scopus Author ID: 6506458086, eLIBRARY SPIN-code: 8550-4986; xiaofeng@yandex.ru

© Алёшина О.О., 2023

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>



For citation

Aleshina O.O. Geometry and static analysis of thin shells in the form of a diagonal translation surface of the velaroidal type. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):84–93. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-84-93>

from the action of a constant uniformly distributed load the most optimal shell of a diagonal transfer of a velaroidal type with the same main frame of three superellipses. The static calculation was performed using the SCAD program based on the finite element method, designed to perform strength calculations of various types and purposes of structures. The influence of parametric equations for defining a surface depending on the generative family of the same type of cross sections on the distribution pattern of normal stresses and bending moments is shown. The results obtained can help architects and designers with choosing the shape of shells for new projects.

Keywords: algebraic surface, parametric equations, surface, superellipse, stress-strain state, finite element method

Введение

В [1] впервые рассматриваются обобщенные алгебраические поверхности с каркасом из трех суперэллипсов [2]. Подтверждено, что имея один и тот же каркас из трех плоских суперэллипсов, можно получить три алгебраические поверхности разных порядков. Суперэллипсы как образующие кривые поверхностей переноса с пространственной направляющей линией на цилиндре применяются для построения поверхностей в [3].

Известны *поверхности диагонального переноса*. Они образуются по принципу переноса конгруэнтной плоской кривой по направляющей так, что при скольжении образующей кривой по плоскому неподвижному контуру две ее симметричные точки непрерывно его касаются [4]. Приведенное определение не совсем точно идентифицирует изучаемые поверхности. *Велароидальной* называется *поверхность переноса* на плоском прямоугольном плане с образующей кривой переменной кривизны. Таким образом, поверхность ограничена четырьмя взаимно ортогональными контурными прямыми, лежащими в одной плоскости [5]. Это определение также не совсем корректно для рассматриваемых поверхностей. Известна также группа *поверхностей велароидального типа* [6]. По-видимому, рассматриваемые поверхности должны быть выделены в особую группу *поверхностей диагонального переноса велароидального типа с главным каркасом из трех плоских кривых*.

В [7] впервые предложено использовать алгебраические поверхности с каркасом из трех плоских кривых в координатных плоскостях, нашедших применение в судостроительной промышленности [8] и в строительной отрасли в качестве оболочек для перекрытия больших площадей.

Цель исследования – выявить с точки зрения напряженно-деформированного состояния от действия постоянной равномерно распределенной нагрузки оптимальную оболочку диагонального переноса велароидального типа с одинаковым главным каркасом из трех суперэллипсов.

Метод***Геометрия поверхностей диагонального переноса велароидального типа с главным каркасом из трех плоских кривых***

Пусть три плоских суперэллипса, лежащие в трех главных координатных плоскостях, формируют главный каркас исследуемой поверхности, то есть:

– кривая 1 в плоскости $z = 0$:

$$|y|^r = W^r \left(1 - \frac{|x|^t}{L^t} \right); \quad (1)$$

– кривая 2 в плоскости $x = 0$:

$$z^n = T^n \left(1 - \frac{|y|^m}{W^m} \right); \quad (2)$$

– кривая 3 в плоскости $y = 0$:

$$z^s = T^s \left(1 - \frac{|x|^k}{L^k} \right), \quad (3)$$

где для выпуклых кривых $r, t, n, m, s, k > 1$; для вогнутых кривых $r, t, n, m, s, k < 1$.

В этом случае, как указывалось во введении, можно получить явные алгебраические уравнения трех разных поверхностей, содержащих одинаковые плоские кривые (1)–(3) [1]. Эти явные алгебраические уравнения поверхностей легко перевести в параметрическую форму с образующим семейством однотипных сечений:

– $x = \text{const}$:

$$\begin{aligned} x &= x(u) = \pm uL; \quad y = y(u, v) = vW[1 - u^t]^{1/r}; \\ z &= z(u, v) = T[1 - u^k]^{1/s}[1 - |v|^m]^{1/n}; \end{aligned} \quad (4)$$

– $y = \text{const}$:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = vL[1 - u^r]^{1/t}; \quad y = y(u) = \pm uW; \\ z &= z(u, v) = T[1 - u^m]^{1/n}[1 - |v|^k]^{1/s}; \end{aligned} \quad (5)$$

– $z = \text{const}$:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = vL[1 - u^s]^{1/k}; \quad y = y(u, v) = \pm W[1 - u^n]^{1/m}[1 - |v|^t]^{1/r}; \\ z &= z(u) = uT, \end{aligned} \quad (6)$$

где $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$; u, v – безразмерные параметры.

Для дальнейшего рассмотрения примем

$$L = 10 \text{ м}; \quad W = 7 \text{ м}; \quad T = 10 \text{ м}; \quad s = k = 2; \quad n = m = 2; \quad r = t = 1,5. \quad (7)$$

На рис. 1 изображены три поверхности, имеющие один и тот же главный каркас (1)–(3), но заданные тремя разными системами параметрических уравнений (4)–(6).

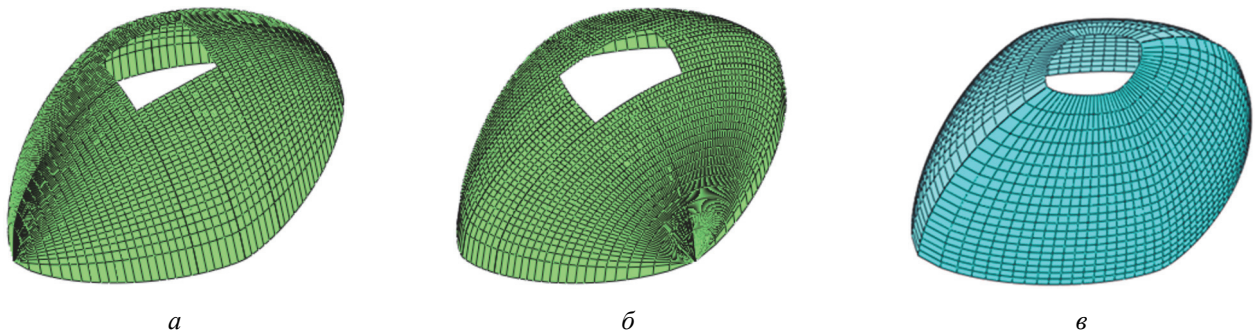


Рис. 1. Поверхности, описываемые параметрическими уравнениями (4)–(6),

$$L = 10 \text{ м}; \quad W = 7 \text{ м}; \quad T = 10 \text{ м}; \quad s = k = 2; \quad n = m = 2; \quad r = t = 1,5:$$

a – поверхность построена по формулам (4); b – поверхность построена по формулам (5); v – поверхность построена по формулам (6)

Figure 1. Surfaces governed by parametric equations (4)–(6),

$$L = 10 \text{ м}; \quad W = 7 \text{ м}; \quad T = 10 \text{ м}; \quad s = k = 2; \quad n = m = 2; \quad r = t = 1,5:$$

a – the surface is constructed according to the formulae (4); b – the surface is constructed according to the formulae (5);

v – the surface is constructed according to the formulae (6)

Пусть поверхность на рис. 1, a имеет отверстие в вершине с полуразмером вдоль оси y , равным $y_0 = 2$ м. Тогда из формулы (2) находим

$$z_0 = T \left(1 - \left(\frac{y_0}{W} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

то есть $z_0 = 9,583$ м.

Из формулы (3) определяем полуразмер отверстия в направлении оси x :

$$x_0 = L \left(1 - \left(\frac{z_0}{T} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

то есть $x_0 = 2,86$ м.

Таким образом, отверстие в вершине имеет размеры в осях $2x_0 \times 2y_0 = 2 \cdot 2,86 \times 2 \cdot 2$ м.

Поверхности на рис. 1, б, в также имеют аналогичные фонарные отверстия в вершинах. Края отверстий совпадают с координатными линиями. Поверхность на рис. 1, в имеет отверстие в вершине, совпадающее с координатной линией $u_0 = 0,958$, с размерами $2x_0$ и $2y_0$, равными $2 \cdot 2,86$ м и $2 \cdot 2$ м соответственно. Края отверстия совпадают также с линией пересечения поверхности, задаваемой параметрическими уравнениями (6), с горизонтальной плоскостью $z_0 = 9,583$ м.

Можно запроектировать отверстия так, чтобы их края на поверхностях, задаваемых уравнениями (4), (5), совпадали с линиями пересечения этих поверхностей с горизонтальной плоскостью $z_0 = \text{const}$, причем $z_0 < T$. В этом случае из явных уравнений рассматриваемых поверхностей, приведенных в [1; 7], находится явное уравнение линии пересечения поверхности (4) с плоскостью $z_0 = \text{const}$:

$$y = \pm W \left(1 - \frac{x^{3/2}}{L^{3/2}} \right)^{2/3} \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{T^2 \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)}}, \quad (10)$$

а также явное уравнение линии пересечения поверхности (5) с плоскостью $z_0 = \text{const}$:

$$x = \pm L \left(1 - \frac{y^{3/2}}{W^{3/2}} \right)^{2/3} \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{T^2 \left(1 - \frac{y^2}{W^2} \right)}}. \quad (11)$$

На рис. 2 изображены две поверхности, имеющие один и тот же главный каркас (1)–(3), но заданные двумя разными системами параметрических уравнений (4), (5). Края фонарных отверстий совпадают с линиями пересечения этих поверхностей с горизонтальной плоскостью $z_0 = 9,583$ м = const. Третья поверхность с отверстием в вершине, показанная на рис. 1, в, будет одинакова для обоих случаев. В последних двух формулах $-2,86$ м $\leq x \leq 2,86$ м, -2 м $\leq y \leq 2$ м.

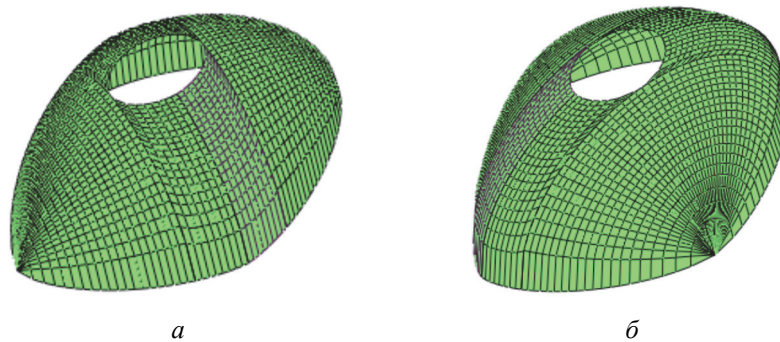


Рис. 2. Поверхности, описываемые параметрическими уравнениями (4), (5) с фонарными отверстиями, совпадающими с линией пересечения поверхности с горизонтальной плоскостью $z_0 = 9,583$ м; $L = 10$ м; $W = 7$ м; $T = 10$ м; $s = k = 2$; $n = m = 2$; $r = t = 1,5$:

a – поверхность построена по формулам (4); *б* – поверхность построена по формулам (5)

Figure 2. Surfaces governed by parametric equations (4), (5)

with lantern holes coinciding with the line of intersection of the surface with the horizontal plane

$z_0 = 9,583$ м; $L = 10$ м; $W = 7$ м; $T = 10$ м; $s = k = 2$; $n = m = 2$; $r = t = 1,5$:

a – the surface is constructed according to the formulae (4); *б* – the surface is constructed according to the formulae (5)

Статический расчет трех оболочек с одинаковым главным каркасом

Рассчитаем оболочки, представленные на рис. 1, на действие нагрузки типа собственного веса $q = 4$ кН/м², действующего в направлении, обратном направлению неподвижной координатной оси Oz . Геометрические параметры L , W , T и показатели степеней в уравнениях (4)–(6) срединных поверхностей оболочек даны в виде (7). Кроме того, примем постоянную толщину оболочек, равную $h = 7$ см, модуль упругости материала оболочки $E_b = 32\,500$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,17$. Будем считать, что обо-

лочка закреплена в основании по контуру $z = 0$. В вершине оболочек предусмотрено отверстие $2x_0 \times 2y_0$ со свободным контуром $z = z_0 = \text{const}$. Для получения результатов используем вычислительный комплекс SCAD¹ [9] на базе метода конечных элементов² [10] в перемещениях.

На рис. 3 и 4 представлены результаты расчета тонкой оболочки, изображенной на рис. 1, а. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки (рис. 1, а) выполнен с помощью программы SCAD. Для этого создана конечно-элементная математическая модель, собранная из восьми моделей-схем при автоматическом разбиении на различные сетки (разное количество разбиений по криволинейным координатным линиям поверхности u и v) для получения относительно равномерной аппроксимации срединной поверхности исследуемой оболочки плоскими четырехугольными конечными элементами (КЭ). При выполнении данной операции в нижней области оболочки со стороны оси Ox наблюдается сгущение сетки (рис. 1, а), при этом четырехугольные КЭ вырождаются в слишком вытянутые треугольные КЭ, и программа не может выполнить расчет. В связи с этим проблемная зона сгущения сетки была удалена и с помощью режима генерации сетки произвольной формы проведена локальная триангуляция. Однако в протоколе выполнения расчета выведена ошибка о наличии недопустимых углов в КЭ, то есть расчет не выполнен. После этого проведена трудоемкая работа по нанесению пользовательской сетки КЭ, результат представлен на рис. 3 и 4. Более того, для корректного отображения изополей напряжений и изгибающих моментов (рис. 3) необходимо выполнить выравнивание направлений выдачи результатов напряженного состояния. Количество конечных элементов в расчетной схеме 6066, узлов – 6078.

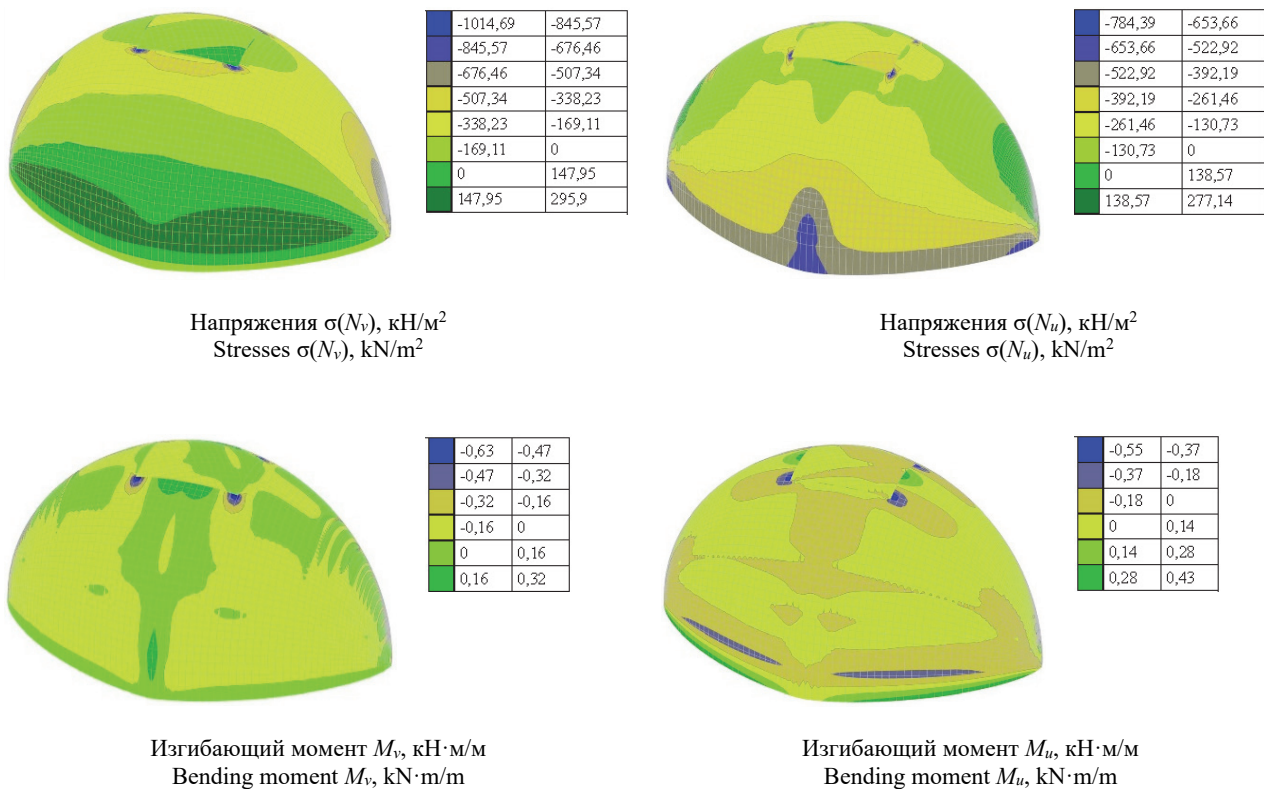


Рис. 3. Пример 1. Нормальные напряжения и внутренние изгибающие моменты
Figure 3. Example 1. Normal stresses and internal bending moments

На рис. 5 и 6 представлены результаты расчета тонкой оболочки, изображенной на рис. 1, б. Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки (рис. 1, б) выполнен также в программе SCAD. По аналогии с примером 1 (рис. 1, а, 3 и 4) для примера 2 (рис. 1, б) создана конечно-элементная математическая модель, собранная из восьми моделей-схем. При построении расчетной схемы оболочки по

¹ Семенов А.А., Маляренко А.А., Порываев И.А., Нафиков К.Д. Вычислительный комплекс SCAD в строительном вузе (примеры и задачи): учебное пособие. М.: Изд-во АСВ: СКАД СОФТ, 2021. 395 с.

² Сидоров В.Н., Вершинин В.В. Метод конечных элементов в расчете сооружений. Теория, алгоритм, примеры расчетов в программном комплексе SIMULIA Abaqus: учебное пособие. М.: Изд-во АСВ, 2015. 288 с.

уравнениям (5) сгущение сетки образуется в нижней области со стороны оси Oy (рис. 1, б), при этом четырехугольные КЭ также вырождаются в вытянутые треугольные КЭ. Данная зона сгущения сетки была заменена на пользовательскую сетку КЭ (рис. 5 и 6). Количество конечных элементов в расчетной схеме 2896, узлов – 2942.

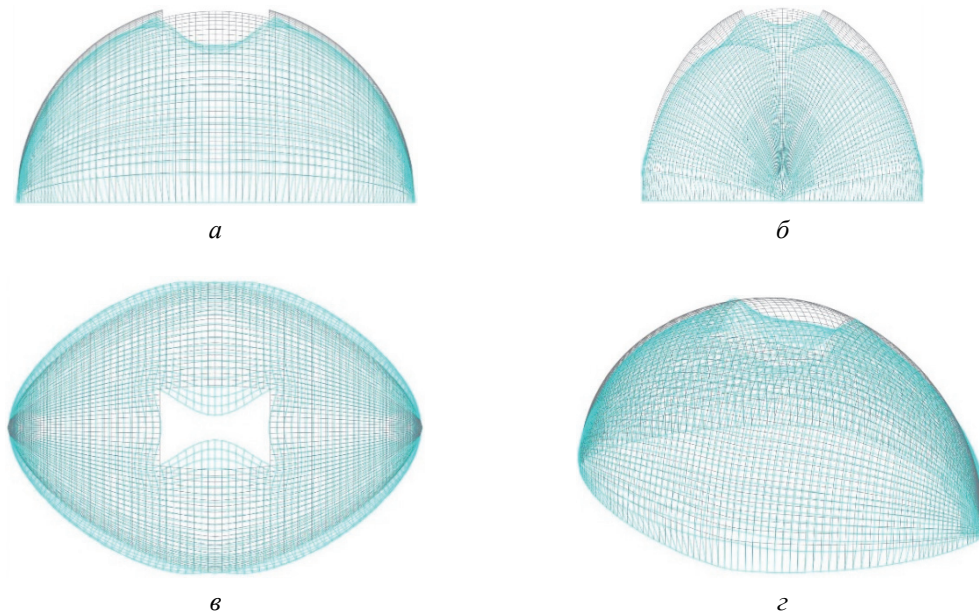


Рис. 4. Пример 1. Деформация срединной поверхности оболочки от внешней нагрузки типа собственного веса:
 а – вид со стороны оси Oy ; б – вид со стороны оси Ox ; в – вид сверху со стороны оси Oz ;

Figure 4. Example 1. Deformation of the middle surface of the shell from an external load of its own weight type:
 а – view from the Oy axis; б – view from the Ox axis; в – top view from the Oz axis; г – isometry of the deformed middle surface of the shell

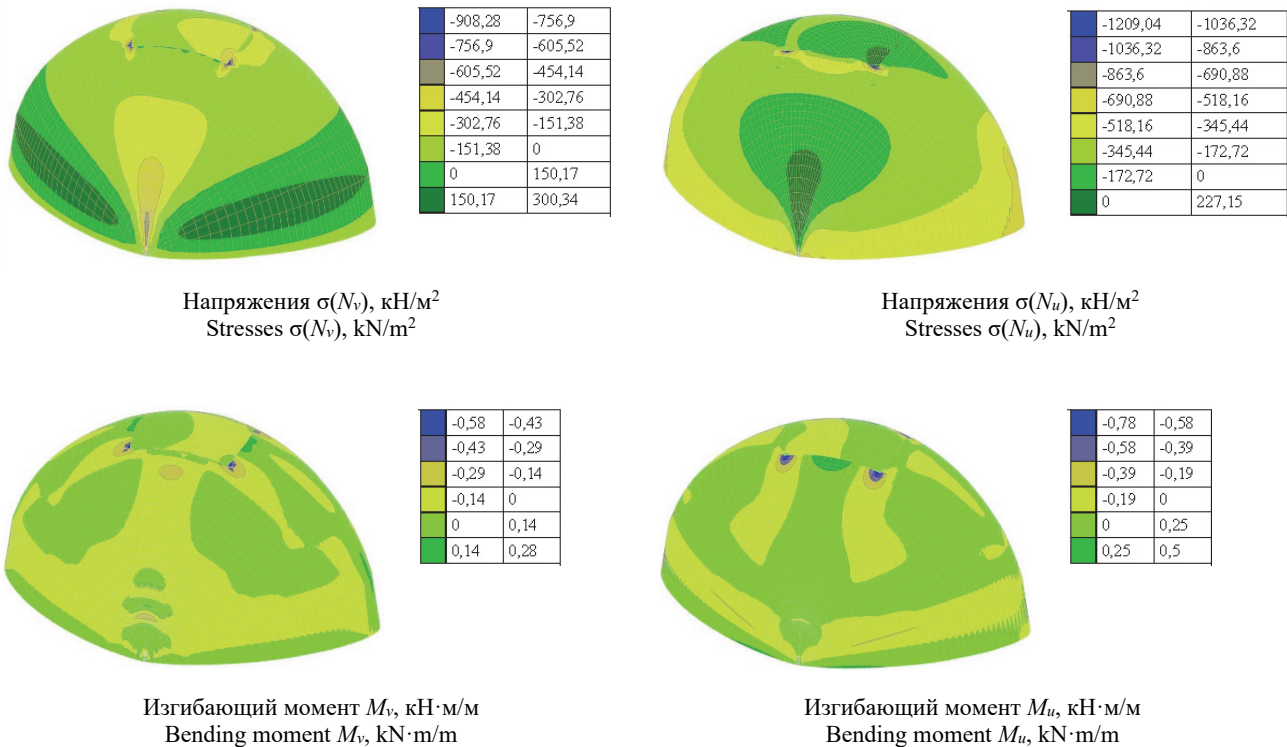


Рис. 5. Пример 2. Нормальные напряжения и внутренние изгибающие моменты
Figure 5. Example 2. Normal stresses and internal bending moments

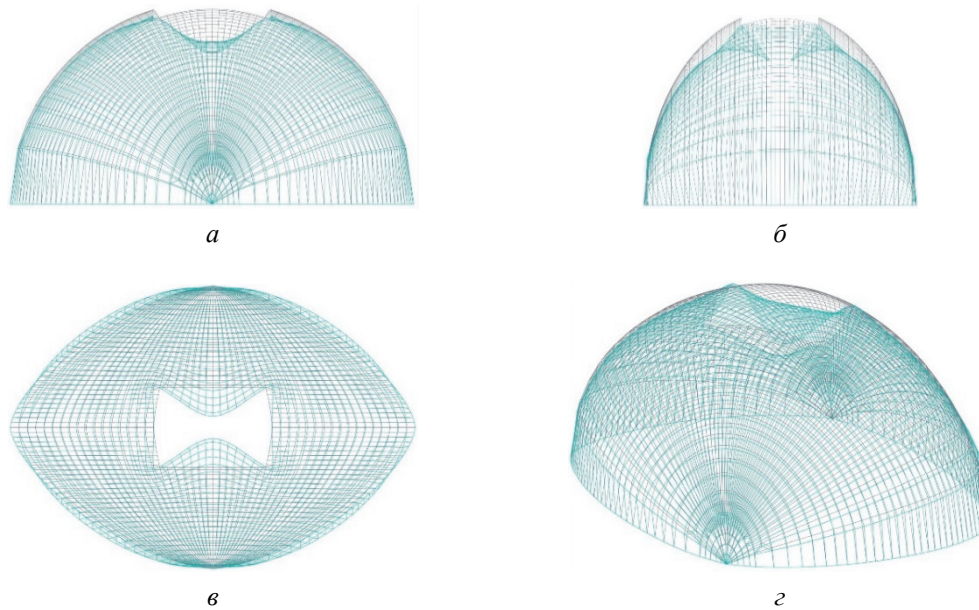


Рис. 6. Пример 2. Деформация срединной поверхности оболочки от внешней нагрузки типа собственного веса:

a – вид со стороны оси *Oy*; *б* – вид со стороны оси *Ox*; *в* – вид сверху со стороны оси *Oz*;

z – изометрия деформированной срединной поверхности оболочки

Figure 6. Example 2. Deformation of the middle surface of the shell from an external load of its own weight type:
a – view from the *Oy* axis; *б* – view from the *Ox* axis; *в* – top view from the *Oz* axis; *z* – isometry of the deformed middle surface of the shell

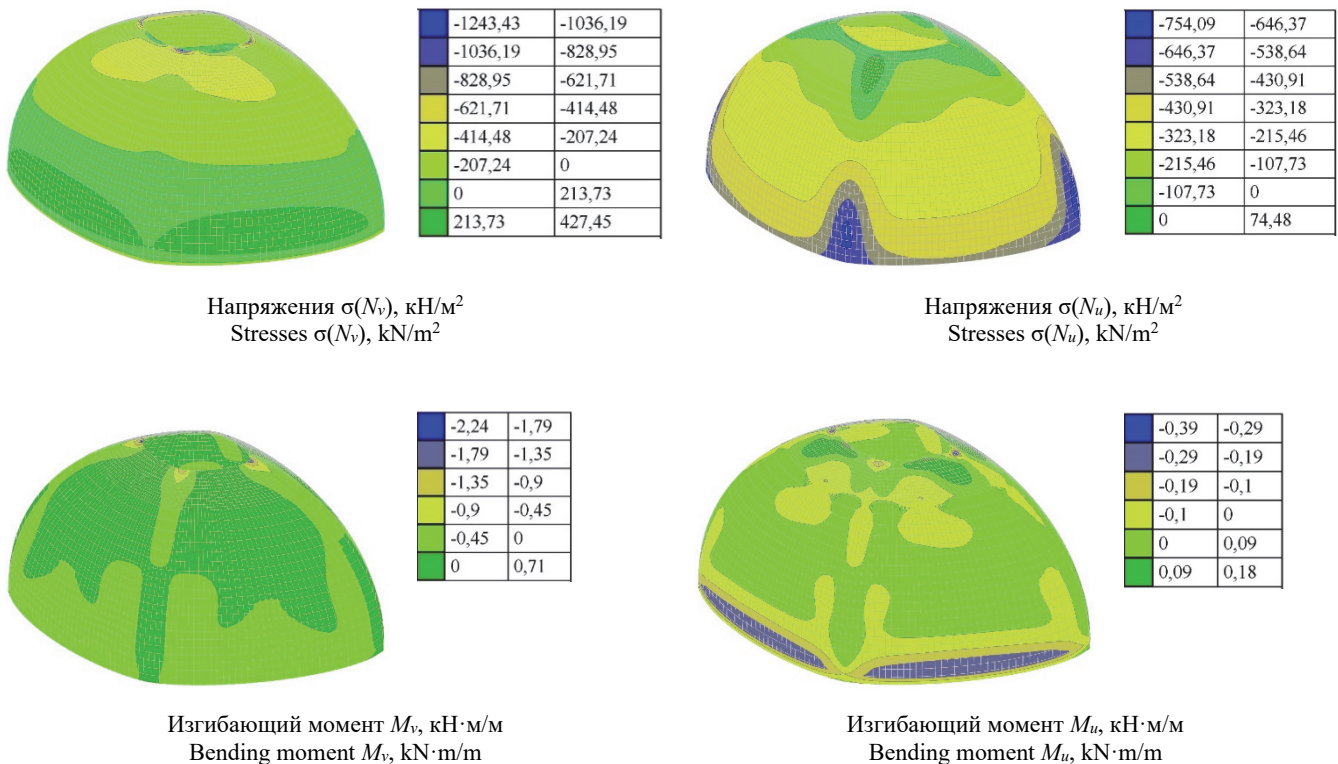


Рис. 7. Пример 3. Нормальные напряжения и внутренние изгибающие моменты

Figure 7. Example 3. Normal stresses and internal bending moments

На рис. 7 и 8 представлены результаты расчета тонкой оболочки, изображенной на рис. 1, в. Рис. 7 и 8 взяты из ранее опубликованной статьи [7], где рассматривались оболочки с теми же геометрическими параметрами $L = 10$ м, $W = 7$ м, $T = 10$ м, но с разными показателями степеней в формулах

суперэллипсов (1)–(3). Сделана попытка выяснить оптимальные оболочки в той группе тонких оболочек. При построении расчетной схемы оболочки на рис. 1, *в* по параметрическим уравнениям (6) в вычислительном комплексе SCAD область сгущения сетки КЭ находится в верхней части (зона отверстия) [7].

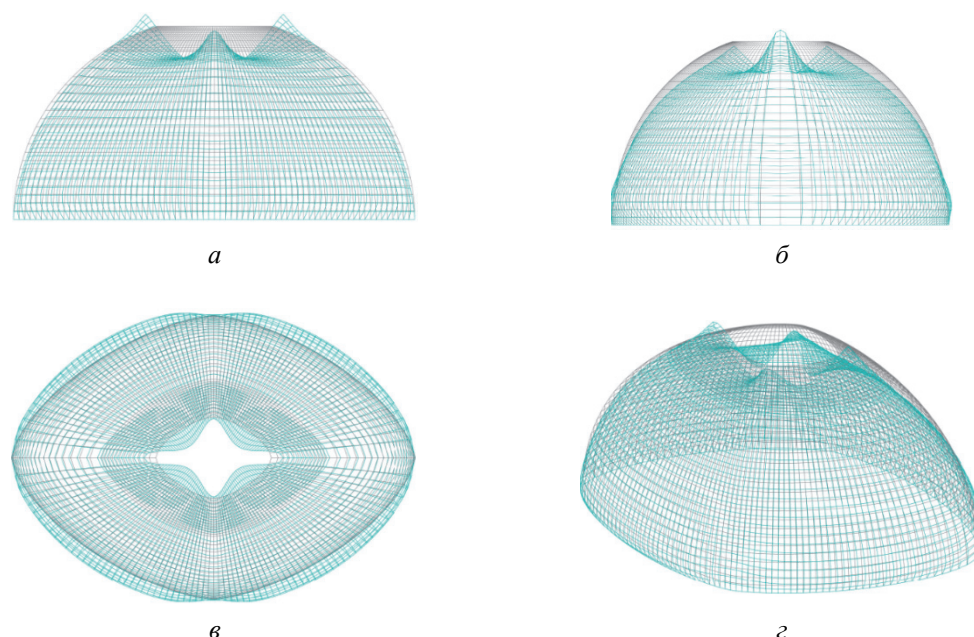


Рис. 8. Пример 3. Деформация срединной поверхности оболочки от внешней нагрузки типа собственного веса:
a – вид со стороны оси *Oy*; *б* – вид со стороны оси *Ox*; *в* – вид сверху со стороны оси *Oz*;
z – изометрия деформированной срединной поверхности оболочки

Figure 8. Example 3. Deformation of the middle surface of the shell from an external load of its own weight type:
a – view from the *Oy* axis; *б* – view from the *Ox* axis; *в* – top view from the *Oz* axis; *z* – isometry of the deformed middle surface of the shell

Результаты и обсуждение

Анализ полученных результатов напряженного состояния трех исследуемых оболочек (рис. 1) показывает, что в них при действии нагрузки типа собственного веса возникают как сжимающие, так и растягивающие напряжения.

Вдоль координатной линии *v* при действии рассматриваемого типа нагрузки в примере 1 (рис. 1, *a*) числовые значения напряжений $\sigma(Nv)$ при растяжении от 0,00 до 295,90 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в нижней части оболочки со стороны оси *Oy* (рис. 3), а со стороны оси *Ox* – сжимающие напряжения $\sigma(Nv)$ (в зоне сгущения сетки КЭ). Значения напряжений $\sigma(Nv)$ при сжатии от –676,46 до 0,00 кН/м², в области отверстия в верхней части оболочки значения от –1014,69 до –676,46 кН/м² (рис. 3). В примере 2 (рис. 1, *б*) числовые значения напряжений $\sigma(Nv)$ при растяжении от 0,00 до 300,34 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в нижней части оболочки со стороны оси *Ox* (рис. 5), а со стороны оси *Oy* – сжимающие напряжения $\sigma(Nv)$ (в зоне сгущения сетки КЭ). Значения напряжений $\sigma(Nv)$ при сжатии от –605,52 до 0,00 кН/м², в области отверстия в верхней части оболочки значения от –908,28 до –605,52 кН/м². В примере 3 (рис. 1, *в*) числовые значения напряжений $\sigma(Nv)$ при растяжении от 0,00 до 427,45 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в нижней части оболочки по всей длине координатной линии *v* ($-1 \leq v \leq 1$) (рис. 7). Значения напряжений $\sigma(Nv)$ при сжатии от –621,71 до 0,00 кН/м², в области отверстия в верхней части оболочки значения от –1243,43 до –621,71 кН/м².

Вдоль координатной линии *u* при действии заданного типа нагрузки в примере 1 (рис. 1, *a*) числовые значения напряжений $\sigma(Nu)$ при растяжении от 0,00 до 277,14 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в оболочке со стороны оси *Ox* (в зоне сгущения сетки КЭ) (рис. 3). Значения напряжений $\sigma(Nu)$ при сжатии от –653,66 до 0,00 кН/м², в области отверстия в верхней части оболочки значения от –784,39 до –653,66 кН/м² (рис. 3). В примере 2 (рис. 1, *б*) числовые значения напряжений $\sigma(Nu)$ при растяжении от 0,00 до 227,15 кН/м², зона растягивающих напряжений располагается в оболочке со стороны оси *Oy* (в зоне сгущения сетки КЭ) (рис. 5). Значения напряжений $\sigma(Nu)$ при сжатии от –690,88 до 0,00 кН/м²,

в области отверстия в верхней части оболочки значения от $-1209,04$ до $-690,88$ кН/м². В примере 3 (рис. 1, в) вдоль криволинейной координатной линии u в срединной поверхности оболочки возникают сжимающие напряжения $\sigma(Nu)$ от $-754,09$ до $0,00$ кН/м², а растягивающие напряжения локализованы в верхней части оболочки около отверстия (рис. 7).

Исследование оболочек (рис. 1) в настоящей работе выполнено с помощью программы SCAD на базе метода конечных элементов, предназначенной для выполнения прочностных расчетов различного вида и назначения конструкций и сооружений, в том числе оболочечных конструкций [11; 12].

Поверхности диагонального переноса велароидального типа с главным каркасом из трех суперэллипсов значительно расширяют число поверхностей, пригодных к внедрению, несмотря на то что в настоящее время имеется значительный резерв форм, ждущих своего применения [13]. Предложенную методику поиска оптимальных оболочек среди троек оболочек с одинаковым главным каркасом можно использовать для случаев, когда суперэллипсы вырождаются в ромбы [14].

Интересные предложения даны в [15]. А.В. Коротич считает, что новые нетрадиционные формы оболочек могут стать альтернативой в традиционной архитектуре [16]. Оболочки в форме поверхностей диагонального переноса велароидального типа также можно использовать как составные фрагменты новых архитектурных оболочек [17]. В [18] показывается, что нет в мире страны, где бы не было построено хотя бы несколько большепролетных оболочек.

Заключение

Анализ полученных результатов напряженного состояния трех исследуемых оболочек (рис. 1) показывает, что в них при действии нагрузки типа собственного веса возникают как сжимающие, так и растягивающие напряжения.

Результаты полученных данных позволяют говорить об относительно схожих интервалах числовых значений нормальных напряжений $\sigma(Nv)$ и $\sigma(Nu)$ в оболочках в примерах 1–3, возникающих от действия нагрузки типа собственного веса. Как видно на рис. 1 формы каркасов трех оболочек одинаковые. При этом немного отличается картина распределения сжимающих и растягивающих напряжений в зависимости от параметрических уравнений (4)–(6) для построения поверхностей.

Список литературы

1. *Кривошапко С.Н.* Алгебраические судовые поверхности с каркасом из трех плоских кривых в координатных плоскостях // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 3. С. 207–212. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-3-207-212>
2. *Gardner M.* “Piet Hein’s Superellipse”, *Mathematical Carnival*. A new round-up of tantalizers and puzzles from scientific American. New York: Vintage Press, 1977. Pp. 240–254.
3. *Alborova L.A., Strashnov S.V.* Surfaces of congruent sections of pendulum type on cylinders with generatrix superellipses // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-64-72>
4. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. М.: Либроком, 2010. 560 с.
5. *Алборова Л.А.* Возможности велароидальных оболочек // Инженерные системы – 2020: труды научно-практической конференции с международным участием, посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов: в 2 т. Т. 1. М.: РУДН, 2020. С. 59–65.
6. *Krivoshapko S.N., Gil-Oulbe M.* Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids // *International Journal of Soft Computing and Engineering*. 2013. Vol. 3. Issue 3. Pp. 71–73.
7. *Кривошапко С.Н., Алёшина О.О., Иванов В.Н.* Статический расчет оболочки, очерченной по поверхности с каркасом из трех заданных суперэллипсов в координатных плоскостях // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 6 (305). С. 18–27. <http://doi.org/10.37538/0039-2383.2022.6.18.27>
8. *Карневич В.В.* Построение гидродинамических поверхностей каркасами из кривых Ламе на примере корпуса подводной лодки // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 1. С. 30–37. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-1-30-37>
9. *Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маларенко А.А., Микитаренко М.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.* Вычислительный комплекс SCAD. М.: СКАД СОФТ, 2021. 656 с.
10. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Vol. 1. The basis. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 707 p.
11. *Алёшина О.О., Иванов В.Н., Кахамарка-Сунига Д.* Анализ напряженного состояния оболочки одинакового ската при действии равномерно распределенной касательной нагрузки различными методами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 51–62. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>

12. Aleshina O., Cajamarca D., Barbecho J. Numerical comparative analysis of a thin-shell spatial structure for the Candela's Cosmic Rays Pavilion // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2021. Vol. 174. Pp. 741–752.
13. Adriaenssens S., Block P., Veenendaal D., Williams C.J.K. Shell structures for architecture: form finding and optimization. London, 2014. 340 p. <http://doi.org/10.4324/9781315849270>
14. Мамиева И.А. Линейчатые алгебраические поверхности с главным каркасом из трех суперэллипсов // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2022. Т. 18. № 4. С. 387–395. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-387-395>
15. Мингалимова В.Р. Применение поверхности переноса для образования составных оболочек // *Дни студенческой науки: сборник докладов научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ студентов Института цифровых технологий и моделирования в строительстве (ИЦТМС) НИУ МГСУ*. М., 2022. С. 104–107.
16. Коротич А.В. Инновационные решения архитектурных оболочек: альтернатива традиционному строительству // *Академический вестник УралНИИпроект РААСН*. 2015. № 4. С. 70–75.
17. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures // *Строительство и реконструкция*. 2019. № 5 (85). С. 23–34.
18. Кривошапко С.Н. Оболочечные структуры и оболочки в начале XXI в. // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 6. С. 553–561. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>

References

1. Krivoschapko S.N. Algebraic ship hull surfaces with a main frame from three plane curves in coordinate planes. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2022;23(3):207–212. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-3-207-212>
2. Gardner M. “Piet Hein's Superellipse”, *Mathematical Carnival*. A new round-up of tantalizers and puzzles from scientific American. New York: Vintage Press; 1977. p. 240–254.
3. Alborova L.A., Strashnov S.V. Surfaces of congruent sections of pendulum type on cylinders with generatrix superellipses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):64–72. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-64-72>
4. Krivoschapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of analytical surfaces*. Moscow: Librocom Publ.; 2010. (In Russ.)
5. Alborova L.A. Opportunities of velaroidal shells // *Engineering Systems – 2020: Proceedings of the Scientific and Practical Conference with International Participation Dedicated to the 60th Anniversary of the Peoples' Friendship University of Russia* (vol. 1, pp. 59–65). Moscow: RUDN University; 2020. (In Russ.)
6. Krivoschapko S.N., Gil-Oulbe M. Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids. *International Journal of Soft Computing and Engineering*. 2013;3(3):71–73.
7. Krivoschapko S.N., Alyoshina O.O., Ivanov V.N. Static analysis of shells with middle surfaces containing the main frame from three given superellipses. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2022;(6):18–27. <http://doi.org/10.37538/0039-2383.2022.6.18.27>
8. Carnevich V.V. Generating hydrodynamic surfaces by families of Lamé curves for modelling submarine hulls. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2022;23(1):30–37. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-1-30-37>
9. Karpilovskii V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Mikitarenko M.A., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. *Computer system SCAD*. Moscow: SCAD SOFT; 2021.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. Vol. 1. The basis*. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2000.
11. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):51–62. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62>
12. Aleshina O., Cajamarca D., Barbecho J. Numerical comparative analysis of a thin-shell spatial structure for the Candela's Cosmic Rays Pavilion. *Advances in the Astronautical Sciences*. 2021;174:741–752.
13. Adriaenssens S., Block P., Veenendaal D., Williams C.J. K. *Shell structures for architecture: form finding and optimization*. London; 2014. <http://doi.org/10.4324/9781315849270>
14. Mamieva I.A. Ruled algebraic surfaces with a main frame from three superellipses. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):387–395. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-387-395>
15. Mingalimova V.R. Application of the transfer surface for the formation of composite shells. *Days of Student Science: Proceedings of the Scientific and Technical Conference on the Results of Research Work of Students of the Institute of Digital Technologies and Modeling in Construction (ICTMS) NRU MGSU*. Moscow; 2022. p. 104–107. (In Russ.)
16. Korotich A.V. Innovative solutions for architectural shells: an alternative to traditional construction. *Academic Bulletin UralNIIProekt RAASN*. 2015;(4):70–75. (In Russ.)
17. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures. *Building and Reconstruction*. 2019;(5):23–34.
18. Krivoschapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):553–561. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>