

DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-1-73-83
EDN: FYSMCV
УДК 539.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

Статика и динамика криволинейных стержней на основе гипотез Бернулли и соотношений для прямолинейного стержня

М.Н. Серазутдинов 

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Российская Федерация

✉ serazmn@mail.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 19 октября 2022 г.

Доработана: 28 января 2023 г.

Принята к публикации: 30 января 2023 г.

Для цитирования

Серазутдинов М.Н. Статика и динамика криволинейных стержней на основе гипотез Бернулли и соотношений для прямолинейного стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 73–83. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-73-83>

Аннотация. Описывается и подробно обосновывается метод расчета статики и динамики криволинейных стержней, основанный на соотношениях для прямолинейного стержня. Используются гипотезы Бернулли и вариационный метод. Основное достоинство и особенность используемых соотношений состоит в том, что для расчетов криволинейных стержней применяются простейшие формулы, справедливые для прямолинейных стержней. В эти формулы не входят параметры, характеризующие кривизну продольной оси стержня. Данная особенность является существенным фактором при расчете криволинейных стержней, информация о продольной оси которых задается дискретно, так как не требуется использование специальных методов аппроксимации дискретно заданных данных, позволяющих получать информацию о радиусе-векторе продольной оси стержня и его производных с требуемой высокой точностью. Представлены решения тестовых статических и динамической задач. Рассмотрены изгиб стержня с продольной осью в виде окружности, естественно закрученного стержня и колебания пружины. Сравнение результатов расчета с опубликованными в литературе данными иллюстрирует достоверность и высокую точность получаемых решений.

Ключевые слова: криволинейные стержни, гипотезы Бернулли, статика, динамика, метод расчета

Statics and dynamics of curved rods based on Bernoulli hypotheses and relations for a rectilinear rod

Murat N. Serazutdinov 

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation

✉ serazmn@mail.ru

Article history

Received: October 19, 2022

Revised: January 28, 2023

Accepted: January 30, 2023

Abstract. Method for calculating the statics and dynamics of curved rods, based on the equations for a rectilinear rod, is described and justified in detail. Bernoulli's hypotheses and the variational method are applied. The main advantage and special feature of these formulas is that the simplest formulas that are valid

Серазутдинов Мурат Нуриевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры основ проектирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Российская Федерация, 420015, Казань, ул. Карла Маркса, д. 68; ORCID: 0000-0001-7222-1935, Scopus Author ID: 6506446566, ResearcherID: HKF-2636-2023, eLIBRARY SPIN-код: 9043-5123; serazmn@mail.ru
Murat N. Serazutdinov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Fundamentals of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, 68 Karla Marksa St, Kazan, 420015, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7222-1935, Scopus Author ID: 6506446566, ResearcherID: HKF-2636-2023, eLIBRARY SPIN-code: 9043-5123; serazmn@mail.ru

© Серазутдинов М.Н., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

For citation

Serazutdinov M.N. Statics and dynamics of curved rods based on Bernoulli hypotheses and relations for a rectilinear rod. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):73–83. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-73-83>

for rectilinear rods are used for the calculations of curved rods. These formulas do not contain parameters characterizing the curvatures of the longitudinal axis of the rod. This feature is an essential factor in the calculation of curved rods, where the information about their longitudinal axis is given discretely, since no special methods of approximation of discretely given data are required, which enable to obtain information about the radius-vector of the rod longitudinal axis and its derivatives with the required high accuracy. Solutions of test static and dynamic problems are provided. Bending of a rod with a longitudinal axis in the form of a circle, a naturally twisted rod, and a spring fluctuation are considered. Comparison of the calculation results with the data published in the literature illustrates the reliability and high accuracy of the solutions obtained.

Keywords: curved rods, Bernoulli hypotheses, statics, dynamics, calculation method

Введение

В настоящее время теория и методы расчета статики и динамики стержневых систем достаточно разработаны и отражены в ряде монографий [1–5]. Однако криволинейные стержни имеют очень широкий круг приложений (арки, пилоны мостов, композитные стержневые криволинейные структуры, пружины, сверла, трубопроводы, упругие подвески вибраторов, лопатки турбомашин упругие амортизаторы) и при их расчете возникают особенности, требующие отдельного внимания. Последнее связано с тем, что традиционно используемые вариационные принципы и уравнения равновесия криволинейных стержней содержат производные не ниже второго порядка от радиуса-вектора продольной оси стержня. Во многих случаях исходные данные о геометрии стержней сложной формы задаются дискретно, поэтому при расчетах используются аппроксимирующие функции, построение которых требует разработки специальных методов, позволяющих получать информацию о радиусе-векторе продольной оси стержня и его производных с требуемой точностью [6–9]. Кроме того, следует иметь в виду, что в настоящее время остаются актуальными вопросы расчета криволинейных стержней, так как возникает ряд особенностей при моделировании технологических процессов [10–12], исследовании контактных взаимодействий, хаотических колебаний и динамической потери устойчивости [13–17], при расчете больших перемещений, когда прямолинейный стержень при деформировании становится криволинейным стержнем сложной формы [18; 19], при расчете влияния ребер жесткости на напряженно-деформированное состояние оболочек сложной формы [20; 21]. Остаются не до конца исследованными вопросы влияния принятых при моделировании стержней гипотез на результаты расчетов сложных динамических процессов [22–25].

Представлен метод расчета криволинейных стержней, основанный на использовании гипотез Бернулли и соотношений для прямолинейного стержня. Приводятся обоснование метода и результаты расчетов. Особенность используемых для расчетов криволинейных стержней соотношений состоит в том, что в них не входят кривизны продольной оси стержня. Ранее подобный метод использовался для решения линейных и нелинейных задач статики стержней с использованием соотношений, полученных на основе гипотез Коссера – Тимошенко [26–28].

Основные соотношения

Рассмотрим стержневую систему, состоящую из прямолинейных и криволинейных стержней. Полагаем, что возникающие в стержневой системе деформации являются малыми, справедливы гипотезы Бернулли, зависимость между деформациями и напряжениями определяется законом Гука, криволинейные стержни являются стержнями малой кривизны, для которых отношением h/R можно пренебречь по сравнению с единицей (h – толщина сечения, R – радиус кривизны продольной оси).

Разобьем систему на N участков таким образом, чтобы на каждом из них направляющие косинусы касательного к продольной оси стержня вектора и ортов главных осей поперечных сечений изменялись непрерывно.

Воспользуемся принципом Гамильтона – Остроградского, в соответствии с которым должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{l_n} [\delta K(s, t) - \delta \Pi(s, t) + \delta' W(s, t)] dl_n(s) \right\} dt = 0, \quad (1)$$

где l_n – линия продольной оси стержня на n -м участке; $K, \Pi, \delta'W$ – кинетическая, потенциальная энергии деформации и элементарная работа внешних сил; t – время; s – параметр, используемый для описания линии l_n .

При исследовании статики и динамики сложных стержневых систем часто используются алгоритмы решения, в которых интегралы в условии (1) вычисляются численно. При использовании численного интегрирования выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I [\delta K(s_i, t) - \delta \Pi(s_i, t) + \delta' W(s_i, t)] H_{ni} \right\} dt = 0, \quad (2)$$

где s_i – координаты узлов интегрирования; H_{ni} – множители, величина которых зависит от формы линии l_n и от используемой при интегрировании квадратурной формулы.

Соотношения для прямолинейного стержня. Для описания деформации прямолинейного стержня используем декартову систему координат $Oxyz$ с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Полагаем, что ось Ox направлена вдоль продольной оси, а Oy, Oz – главные центральные оси поперечного сечения стержня. В этом случае $s = x$.

Введем вектор перемещения точек продольной оси стержня $\bar{U}(x, t) = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k}$ и вектор углов поворота поперечных сечений $\bar{\varphi}(x, t) = \varphi_1 \bar{i} + \varphi_2 \bar{j} + \varphi_3 \bar{k}$.

При использовании гипотезы Бернулли

$$\varphi_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x}; \quad \varphi_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$\bar{U} = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k}; \quad \bar{\varphi} = \varphi_1 \bar{i} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \bar{j} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \bar{k}. \quad (3)$$

Вектор перемещения стержня определяется по формуле

$$\bar{W}_\rho = \bar{U} + \bar{\varphi} \bar{\rho},$$

где $\bar{\rho} = y \bar{j} + z \bar{k}$.

Учитывая выражения для $\bar{U}, \bar{\varphi}, \bar{\rho}$, получаем

$$\bar{W}_\rho = \left(u_1 - z \frac{\partial u_3}{\partial x} - y \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \bar{i} + (u_2 - z \varphi_1) \bar{j} + (u_3 + y \varphi_1) \bar{k}. \quad (4)$$

Линейные и угловые деформации вычисляются по формулам

$$\varepsilon = \frac{\partial u_1}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_3}{\partial^2 x} - z \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x}; \quad \gamma_{xy} = z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = y \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}. \quad (5)$$

Напряжения и деформации связаны законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon; \quad \tau_1 = G\gamma_1; \quad \tau_2 = G\gamma_2, \quad (6)$$

где E, G – модули упругости и сдвига; $\gamma_1 = f_1(y, z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$; $\gamma_2 = f_2(y, z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$; $f_1(y, z), f_2(y, z)$ – функции, выражающие закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению стержня, вид этих функций зависит от формы сечения стержня, например для круглого сечения $f_1 = z, f_2 = y$.

С учетом соотношений (3)–(6) и того, что Oy, Oz – главные центральные оси поперечного сечения, выражения для вариаций кинетической и потенциальной энергий деформации можно записать следующим образом:

$$\delta K = -\rho_0 \iint_A \frac{\partial^2 \bar{w}_\rho}{\partial t^2} \delta \bar{w}_\rho dA = -\rho_0 \left[A \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \delta u_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \delta u_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \delta u_3 \right) + J_p \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \delta \varphi_1 + J_z \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + J_y \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right]; \quad (7)$$

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \delta \iint_A [\sigma \varepsilon + \tau_1 \gamma_1 + \tau_2 \gamma_2] dA = \frac{1}{2} \delta \left[EA \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + EJ_y \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 + EJ_z \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + GJ_{кр} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 \right],$$

где A, J_y, J_z – площадь, главные моменты инерции поперечного сечения; $J_{кр}$ – момент инерции при кручении.

Элементарная работа внешних сил

$$\delta' W = q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_3 \delta u_3 + M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \frac{\partial u_3}{\partial x} + M_3 \delta \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (8)$$

где q_i, M_i – компоненты внешних сил и моментов функции ($i = 1, 2, 3$).

Величины q_i, M_i являются функциями координат x и t , вид которых определяется характером распределения по стержню и во времени действующих внешних сил.

Основные соотношения для криволинейного стержня. Выделим некоторый участок криволинейного стержня, продольная ось которого l_n лежит на поверхности Ω_n . Введем декартову систему координат $Oxuz$ с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Выберем такие размеры выделенного участка, чтобы поверхность Ω_n можно было описать уравнением $z = Z(x, y)$. Зададим линию l_n в параметрическом виде:

$$x = x(s); y = y(s); z = Z(x(s); y(s)). \quad (9)$$

Радиус-вектор поверхности Ω_n

$$\bar{R}_\Omega = x \bar{i} + y \bar{j} + Z(x, y) \bar{k}.$$

Если в последнее соотношение подставить выражения (9), то получим радиус-вектор линии l_n

$$\bar{r} = x(s) \bar{i} + y(s) \bar{j} + Z(x(s), y(s)) \bar{k}. \quad (10)$$

В поперечных сечениях стержня введем репер с началом в центре тяжести O_1 :

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}; \bar{v}_2 = \frac{d\bar{r}}{dx} \cdot \frac{d\bar{r}}{dy}; \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \bar{\tau}. \quad (11)$$

Вектор $\bar{\tau}$ направлен по касательной к l_n , а \bar{v}_2 – по нормали к Ω_n . В направлении векторов \bar{v}_1, \bar{v}_2 введем оси координат $O_1 \xi_1$ и $O_1 \xi_2$. В этой системе координат радиус вектор точек поперечных сечений стержня

$$\bar{\rho} = \xi_1 \bar{v}_1 + \xi_2 \bar{v}_2.$$

Векторы перемещения точек продольной оси стержня и углов поворота поперечных сечений определяются по формулам

$$\bar{U}(s, t) = u_1 \bar{\tau} + u_2 \bar{v}_1 + u_3 \bar{v}_2; \bar{\varphi}(s, t) = \varphi_1 \bar{\tau} - \frac{\partial u_3}{\partial s} \bar{v}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial s} \bar{v}_2.$$

Вектор перемещения стержня

$$\bar{W}_\rho = \bar{U} + \bar{\varphi}\bar{\rho},$$

где $\bar{\rho} = \xi_1 \bar{j} + \xi_2 \bar{k}$.

С учетом выражений для \bar{U} , $\bar{\varphi}$, $\bar{\rho}$ получается, что вектор перемещения точек стержня при деформировании

$$\bar{W}_\rho = \bar{U} + \bar{\varphi}\bar{\rho} = \left(u_1 - \xi_2 \frac{\partial u_3}{\partial s} + \xi_1 \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{i} + (u_2 - \xi_2 \varphi_1) \bar{v}_1 + (u_3 + \xi_1 \varphi_1) \bar{v}_2.$$

Радиусы-векторы точек стержня до и после деформации вычисляются по формулам

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\rho} = x(s) \bar{i} + y(s) \bar{j} + Z(x(s), y(s)) \bar{k} + \xi_1 \bar{v}_1(s) + \xi_2 \bar{v}_2(s);$$

$$\bar{R}^* = \bar{R} + \bar{W}_\rho.$$

Используя выражения (10), (11) и учитывая, что

$$\frac{d\bar{r}}{dx} = \bar{i} + \frac{dZ}{dx} \bar{k}; \quad \frac{d\bar{r}}{dy} = \bar{j} + \frac{dZ}{dy} \bar{k},$$

находим

$$\bar{v}_1 = \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dZ}{ds} \bar{k}; \quad \bar{v}_2 = -\frac{dZ}{dx} \bar{i} - \frac{dZ}{dy} \bar{j} + \bar{k}.$$

$$\bar{v}_1 = -\left(\frac{dy}{ds} + \frac{dZ}{ds} \frac{dZ}{dy} \right) \bar{i} + \left(\frac{dx}{ds} + \frac{dZ}{ds} \frac{dZ}{dx} \right) \bar{j} + \left(\frac{dZ}{dy} \frac{dx}{ds} - \frac{dZ}{dx} \frac{dy}{ds} \right) \bar{k}.$$

Рассмотрим стержни малой кривизны, для которых должны выполняться условия

$$\left| \xi_1 \frac{d^2 x}{ds^2} \right| \ll 1; \quad \left| \xi_1 \frac{d^2 y}{ds^2} \right| \ll 1; \quad \left| \xi_2 \frac{d^2 Z}{ds^2} \right| \ll 1.$$

Используя приведенные в статье соотношения для $d\bar{R}^*$, $d\bar{R}$, получаем

$$d\bar{R}^* d\bar{R}^* - d\bar{R} d\bar{R} = 2d\bar{R} d\bar{W}_\rho = 2 \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} ds ds + 2 \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_1} \right) ds d\xi_1 + 2 \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_2} \right) ds d\xi_2.$$

Следовательно, компоненты деформации будут вычисляться по формулам

$$\varepsilon = \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s}; \quad \gamma_{\tau i} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_i}; \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} &= \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dZ}{ds} \bar{k} + \xi_1 \frac{d\bar{v}_1}{ds} + \xi_2 \frac{d\bar{v}_2}{ds} = \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dZ}{ds} \bar{k} - \xi_1 \left[\left(\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{d^2 Z}{ds^2} + \frac{dZ}{ds} \frac{d^2 Z}{ds dy} \right) \bar{i} - \right. \\ &\left. - \left(\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dZ}{dx} \cdot \frac{d^2 Z}{ds^2} + \frac{dZ}{ds} \cdot \frac{d^2 Z}{dx ds} \right) \bar{j} - \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2 Z}{dy ds} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2 Z}{dx ds} - \frac{dZ}{ds} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2} \right) \bar{k} \right] - \xi_2 \left[\frac{d^2 Z}{ds dx} \bar{i} + \frac{d^2 Z}{ds dy} \bar{j} \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} = - \left(\frac{dy}{ds} + \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{dZ}{ds} \right) \bar{i} + \left(\frac{dx}{ds} + \frac{dZ}{dx} \cdot \frac{dZ}{ds} \right) \bar{j} + \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dZ}{dy} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dZ}{dx} \right) \bar{k}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} = - \frac{dZ}{dx} \bar{i} - \frac{dZ}{dy} \bar{j} + \bar{k};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial s} = & \frac{\partial u_1}{\partial s} \bar{i} + \frac{\partial u_2}{\partial s} \bar{j} + \frac{d\theta}{ds} \bar{k} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial s} \bar{\rho} + \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial s} = \frac{\partial u_1}{\partial s} \bar{i} + \frac{\partial u_2}{\partial s} \bar{j} + \frac{\partial u_3}{\partial s} \bar{k} - \xi_1 \left[\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{d^2 Z}{ds dy} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial s} + \frac{d^2 x}{ds^2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{i} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{d^2 Z}{ds dy} \varphi_1 + \frac{d^2 y}{ds^2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{j} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} - \frac{d^2 x}{ds^2} \varphi_1 + \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) \bar{k} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \xi_2 \left[\left(- \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + \frac{d^2 Z}{ds dy} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} + \frac{d^2 Z}{ds dy} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) \bar{j} - \left(\frac{d^2 Z}{ds dy} \varphi_1 + \frac{d^2 Z}{ds dy} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) \bar{k} \right];$$

$$\frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_1} = - \frac{\partial u_2}{\partial s} \bar{i} - \frac{\partial u_3}{\partial s} \bar{k}; \quad \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_2} = - \frac{\partial u_3}{\partial s} \bar{i} - \varphi_1 \bar{j}.$$

Как видно из соотношений (12)–(13), выражения для компонентов деформации являются сравнительно громоздкими и справедливы в случае, когда продольная ось стержня l_n находится на пологой поверхности Ω_n . Кроме того, коэффициенты перед искомыми функциями в (13) являются первой и второй производной уравнения поверхности $z = Z(x, y)$, поэтому в общем случае, когда линия продольной оси стержня l_n имеет недостаточно простой вид, эти коэффициенты будут переменными величинами и для их определения с нужной точностью необходимо использовать специальные алгоритмы [1–5].

Отметим, что указанные особенности в выражениях для компонентов деформации имеются и в классических теориях криволинейных стержней [6–9].

Для существенного упрощения указанных формул и снятия ограничения, связанного с пологостью Ω_n , поступаем следующим образом.

Введем две декартовы системы координат, глобальную – $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ и локальную – $Oxyz$. Начало локальной системы координат совместим с точкой продольной оси стержня, находящейся в сечении, для которого нужно вычислить деформации. Обозначим координату этой точки s_i . Совместим направления ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ локальной системы координат $Oxyz$ с направлением векторов репера $\bar{\tau}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2$. В этом случае в точке начала координат при $s = s_i$

$$\frac{dx}{ds} = 1; \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dZ}{ds} = \frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dy} = 0; \quad \xi_1 = y; \quad \xi_2 = z. \quad (14)$$

С учетом (14) соотношения (13) существенно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial s} = \bar{i}; \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} = \bar{j}; \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} = \bar{k};$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial s} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \bar{j} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \bar{k} - \xi_1 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \bar{i} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \bar{k} \right) - \xi_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \bar{i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \bar{j} \right);$$

$$\frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \bar{k}; \quad \frac{\partial \bar{W}_\rho}{\partial \xi_2} = - \frac{\partial u_3}{\partial x} \bar{i} - \varphi_1 \bar{j}.$$

Подставляя эти выражения в соотношения (12), получим формулы для вычисления деформаций, такие же как формулы для прямолинейного стержня в виде (5).

Таким образом показано, что для криволинейного стержня компоненты деформации в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ определяются такими же соотношениями, как и для прямолинейно-

го стержня. Деформации вычисляются по формуле (5). Вариации потенциальной и кинетической энергии деформации, работа внешних сил определяются соотношениями (7), (8).

При проведении расчетов следует ввести вектор перемещения

$$\{\tilde{U}\}^T = \{\tilde{u}_1(s, t), \tilde{u}_2(s, t), \tilde{u}_3(s, t)\}$$

и вектор углов поворота поперечных сечений стержня

$$\{\tilde{\varphi}\}^T = \left\{ \tilde{\varphi}_1(s, t), -\frac{\partial \tilde{u}_3(s, t)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{u}_2(s, t)}{\partial x} \right\}$$

с компонентами, определенными в глобальной декартовой системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$. Перемещения $\{U\}^T = \{u_1(s, t), u_2(s, t), u_3(s, t)\}$ и повороты $\{\varphi\}^T = \{\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t), \varphi_3(s, t)\}$ в локальной системе координат $Oxuz$ будут выражаться через $\{\tilde{U}\}$ и $\{\tilde{\varphi}\}$ по формулам

$$\{U\} = [A_u]\{\tilde{U}\}; \{\varphi\} = [A_u]\{\tilde{\varphi}\}, \quad (15)$$

где $[A_u]$ – матрица направляющих косинусов n_{ij} ($i, j = 1, 3$) локальной системы координат.

Вследствие того, что при дифференцировании по направлению Ox направляющие косинусы n_{ij} являются константами, справедливы равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\{U\} = [A_u]\frac{\partial}{\partial x}\{\tilde{U}\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\varphi\} = [A_u]\frac{\partial}{\partial x}\{\tilde{\varphi}\}. \quad (16)$$

При вычислении деформаций и напряжений, а также при записи условия (2) следует, с учетом (15), (16), все величины выражать через компоненты векторов $\{\tilde{U}\}$, $\{\tilde{\varphi}\}$, определенные в глобальной системе координат.

Для проведения расчетов на основе описанной математической модели использовался вариационный метод. Опишем методику расчета.

На каждом их участков стержневой системы с продольной осью l_n введем вектор $\bar{U}_n(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ и угол поворота $\tilde{\varphi}_n(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)$ с компонентами в глобальной системе координат.

С учетом соотношений (7), (8), (6), (16) условие (1) можно записать следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_i^I [\delta K(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}_n(s_i, t)) - \delta \Pi(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}_n(s_i, t)) + \delta' W(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}_n(s_i, t)) H_{ni}] \right\} = 0. \quad (17)$$

Представим перемещения и угол поворота $\tilde{\varphi}_1(t, s)$ в виде рядов

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k(t, s) &= \sum_{m=1}^M A_{km}^n(t) f_m(s), k = \overline{1, 3}; \\ \tilde{\varphi}_1(t, s) &= \sum_{m=1}^M B_m^n(t) f_m(s), \end{aligned} \quad (18)$$

где $A_{km}^n(t)$, $B_m^n(t)$ – функции, подлежащие определению из решения; $0 \leq s \leq 1$; $f_1(s) = (1 - s^2)^2$; $f_2(s) = [s(2 - s)]^2$; $f_3(s) = s(s - 1)^2$; $f_4(s) = s^2(s - 1)$; $f_j(s) = [(1 - s^2)s^2]s^{j-1}$; $j = \overline{1, M - 4}$.

Значению $s = 0$ соответствует начало участка стержня, значению $s = 1$ – конец.

Функции $f_m(s)$ таковы, что на концах отрезка $0 \leq s \leq 1$ выполняются равенства

$$\tilde{u}_k(0, t) = A_{k1}^n(t); \quad \tilde{u}_k(1, t) = A_{k2}^n(t);$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_k(0, t)}{\partial s} = A_{k3}^n(t); \quad \frac{\partial \tilde{u}_k(1, t)}{\partial s} = A_{k4}^n(t); \quad k = \overline{1, 3};$$

$$\tilde{\varphi}_1(0, t) = B_1^n(t); \quad \tilde{\varphi}_1(1, t) = B_2^n(t);$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1(0, t)}{\partial s} = B_3^n(t); \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(1, t)}{\partial s} = B_4^n(t).$$

Следовательно, $A_{k1}^n(t)$, $A_{k2}^n(t)$, $A_{k3}^n(t)$, $A_{k4}^n(t)$, $B_1^n(t)$, $B_2^n(t)$, $B_3^n(t)$, $B_4^n(t)$ – это значения функций $\tilde{u}_k(t, s)$, $\tilde{\varphi}_1(t, s)$ и их первых производных при $s = 0$ и при $s = 1$. Использование аппроксимирующих функций в виде (18) позволяет легко удовлетворять геометрическим граничным условиям для искомых функций и их производной. Например, для удовлетворения условий $\tilde{u}_1 = 1$ при $s = 0$, $\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial s} = 0$ при $s = 1$ следует положить $A_{11}^n = 1$, $A_{14}^n = 0$.

Использование аппроксимирующих функций в виде (18) также позволяет легко осуществить стыковку перемещений и углов поворота на концах участков стержневой системы. Так, если положить $A_{k2}^n = A_{k1}^{n+1}$, $A_{k4}^n = A_{k3}^{n+1}$, то будет выполнено условие стыковки концов двух стержней с номерами n и $n + 1$ для перемещений и первых производных от перемещений.

Поэтому при проведении расчетов часть коэффициентов рядов (18) находится из геометрических граничных условий, а также из условий стыковки перемещений и первых производных от перемещений на границах участков стержней.

Подставляя выражение (18) в условие (17), получим систему уравнений для определения $A_{km}^n(t)$, $B_m^n(t)$:

$$[M]\{\ddot{C}\} + [K]\{C\} = \{F\}, \quad (19)$$

где $[M]$, $[K]$ – матрицы масс и жесткости стержневой системы; $\{C\} = \{A_{11}, A_{12}, \dots, B_M^N\}^T$ – вектор функция; $\{F\}$ – вектор, зависящий от действующей внешней нагрузки; точка над обозначением означает дифференцирование по времени.

При свободных колебаниях конструкции внешние силы равны нулю и система уравнений (19) записывается следующим образом:

$$[M]\{\ddot{C}\} + [K]\{C\} = 0.$$

Полагая $\{C\} = \sin(\omega t) \{V\}$, получаем

$$[K]\{V\} + \omega^2[M]\{V\} = 0.$$

Для статической задачи уравнения (20) принимают вид

$$[K]\{C\} = \{F\}.$$

Результаты расчетов

Представим примеры сравнения результатов расчета по описанному методу с опубликованными в литературе данными. Эти примеры показывают достоверность и высокую точность получаемых решений.

На рис. 1, а схематически показан стержень с продольной осью в виде окружности радиуса $R = 50$ см, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой $q = 0,1$ н/см. Один конец стержня зашцеplen, другой – свободен. Поперечное сечение – квадрат со стороной $h = 1$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $N = 1$, $M = 14$. В результате решения получено $u_3 = 1,3$ см (при $\alpha = 90^\circ$), $\sigma_{\max} = -29,5$ МПа ($\alpha = 180^\circ$). На основе классической теории криволинейных стержней [29] получается $u_3 = 1,4$ см, $\sigma_{\max} = -29,8$ МПа.

Представленные здесь соотношения являются справедливыми и для естественно закрученных стержней. Приведем решение задачи изгиба сосредоточенным моментом M_0 равномерно закрученного консольного стержня (рис. 1, б). На одном конце стержня заделка, а на другом конце, в плоскости $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{z}$ дей-

стствует момент M_0 . При расчетах полагалось $M_0 = 1,28 \cdot 10^5$ н · см, $l = 100$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $N = 1$, $M = 8$. Поперечное сечение стержня – прямоугольник со сторонами $b = 4$ см, $h = 6$ см. Рассмотрены случаи, когда вдоль продольной оси стержня угол закручивания $\alpha(\tilde{x})$ изменяется по линейному закону, а на конце – $\alpha(l) = 45^\circ$ и $\alpha(l) = 90^\circ$. Получены расчетные значения перемещения на конце стержня $\tilde{u}_1 = -0,94$ см и $\tilde{u}_1 = -0,83$ см. Эти величины с точностью до двух значащих цифр совпали с данными, приведенными в [29].

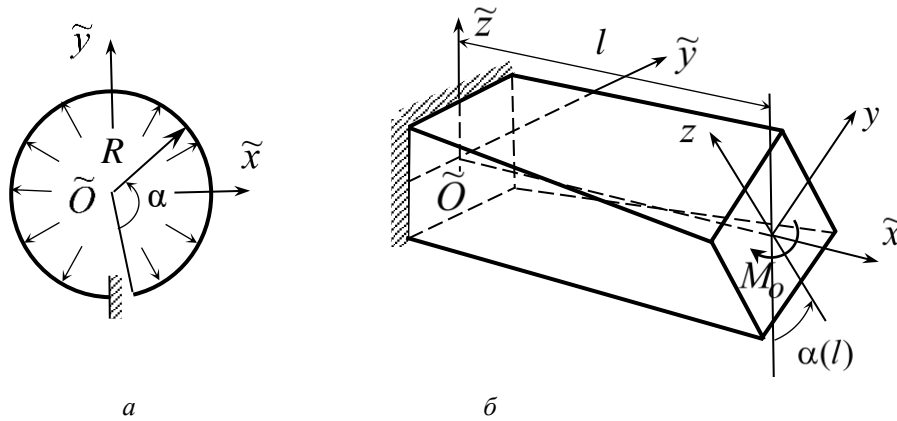


Рис. 1. Стержень с продольной осью в виде окружности (а), естественно закрученный стержень (б)
 Figure 1. A rod with a longitudinal axis in the form of a circle (a), naturally twisted rod (б)

Частоты собственных колебаний пружины с сосредоточенной на конце массой M^* (рис. 2) представлены во втором столбце таблицы. В последнем столбце таблицы приводятся данные из [29]. При расчетах полагалось, что длина пружины $l = 50$ см, радиус поперечного сечения $r = 0,5$ см, радиус винтовой оси $R = 10$ см, $\alpha = 15^\circ$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $\rho = 8 \cdot 10^{-7}$ н сек²/см⁴, $M^* = 4,19 \cdot 10^{-5}$ н сек²/см, $N = 3$, $M = 6$.

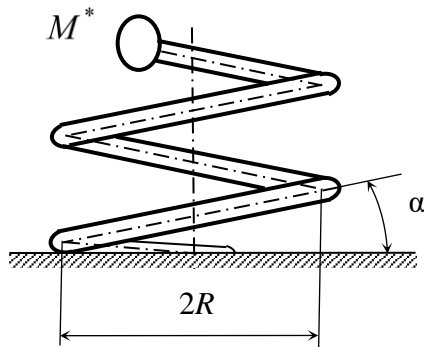


Рис. 2. Пружина
 Figure 2. Spring

Частоты колебаний пружины
 Spring vibration frequencies

ω , Гц / Hz	Расчетные данные / Calculating data	Данные из [29] / Data from [29]
ω_1	5,6	5,79
ω_2	7,3	7,04
ω_3	15,8	14,31

Отметим, что в [29] результаты расчетов представлены в виде графиков, поэтому в последнем столбце таблицы данные могут иметь погрешность.

Заключение

Представлен метод расчета криволинейных стержней, основанный на использовании соотношений для прямолинейного стержня и гипотез Бернулли. Основное достоинство и особенность метода состоит в том, что для расчетов криволинейных стержней используются простейшие соотношения, в которые не входят кривизны продольной оси стержня. Как показывают численные расчеты тестовых задач, метод позволяет с высокой точностью получать решения задач статики и динамики криволинейных стержней.

Список литературы

1. Шулькин Ю.Б. Теория упругих стержневых конструкций: монография. М.: Наука, 1984. 271 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней: монография: в 2 ч. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1987. 320 с.
3. Светлицкий В.А. Механика стержней: монография: в 2 ч. Ч. 2. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
4. Грудев И.Д. Колебания криволинейных стержней: монография. М.: МИК, 2007. 254 с.
5. Левин В.Е., Пустовой Н.В. Механика деформирования криволинейных стержней: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. 208 с.
6. Серазутдинов М.Н., Недорезов О.А. Об аппроксимации срединной поверхности оболочки. Исследования по теории оболочек // Исследования по теории оболочек: труды семинара. Казань: Казанск. физ.-техн. ин-т КНЦ АН СССР, 1990. Вып. 25. С. 97–102.
7. Хайруллин Ф.С., Серазутдинов М.Н. Метод параметризации срединной поверхности тонкостенного элемента конструкции // Известия вузов. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 14–16.
8. Сахбиев О.М., Хайруллин Ф.С. Об одном из методов изогометрической аппроксимации кубическими сплайнами // Вестник технологического университета. 2022. Т. 25. № 5. С. 111–114.
9. Квасов Б.И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами: монография. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 360 с.
10. Кривошапко С.Н. О параболическом изгибании плоского металлического листа в торсовую конструкцию // Технологии машиностроения. 2020. № 11. С. 14–24.
11. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 6. С. 553–561. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>
12. Papkova I.V., Krysko A.V., Krysko V.A. Theory and methods for studying the nonlinear dynamics of a beam – plate nano resonator taking into account the temperature and strain fields connection in additive color noise // Proceedings of the 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2020. <http://doi.org/10.23919/ICINS43215.2020.9133824>
13. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Deterministic chaos in one dimensional continuous system. World Scientific Publishing, 2016.
14. Papkova I.V., Krysko A.V., Saltykova O.A., Krysko V.A., Zakharova A.A. Contact interaction of flexible Timoshenko beams with small deflections // Journal of Physics: Conference Series. 2018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012087>
15. Saltykova O.A., Papkova I.V., Krysko V.A. Chaotic dynamics of two beams described by the kinematic hypothesis of the third approximation in the case of small clearance // Journal of Physics: Conference Series. 2018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012102>
16. Krysko V.A., Yakovleva T.V., Papkova I.V., Saltykova O.A., Pavlov S.P. The contact interaction of size-dependent and multi-modulus rectangular plate and beam // Journal of Physics: Conference Series. 2019. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032021>
17. Papkova I.V., Krylova E.Yu., Krysko A.V. Contact interaction of NEMS shell elements in a color noise field // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020;747(1):012059. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/747/1/012059>
18. Артюхин Ю.П. Приближенный аналитический способ исследования деформаций пространственных криволинейных стержней // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2012. Т. 154. № 3. С. 97–111.
19. Артюхин Ю.П. Произвольный изгиб консольного стержня консервативной силой // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. Т. 155. № 2. С. 144–157.
20. Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии: монография. Казань: ИММ РАН, 1993. 206 с.
21. Кривошапко С.Н. Оболочки и стержневые структуры в форме аналитически задаваемых поверхностей в современной архитектуре // Строительство и реконструкция. 2020. № 3 (89). С. 20–30.
22. Papkova I.V., Krysko A.V., Barulina M.A., Krysko V.A. Mathematical modeling of the nonlinear dynamics components of nanoelectromechanical sensors taking into account thermal, electrical and noise impacts // Proceedings of the 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2019. <http://doi.org/10.23919/ICINS.2019.8769406>
23. Tebyakin A., Papkova I.V., Krysko V.A. The variational iterations method for the three-dimensional equations analysis of mathematical physics and the solution visualization with its help // CEUR Workshop Proceedings. 2020;l:2744.
24. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Saltykova O.A. Analysis of the nonlinear dynamics of flexible two-layer beams, with account for their stratification // Engineering Dynamics and Life Sciences / ed. by J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, J. Mrozowski, P. Olejnik. Lodz: DAB&M of TUL Press, 2017. Pp. 297–308.
25. Saltykova O.A., Papkova I.V., Vetsel S.S., Krysko V.A. Investigation of the influence of changing the boundary conditions along the side of the plate on its chaotic dynamics // Journal of Physics Conference Series. 2019. Vol. 1158. No. 4. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042008>
26. Серазутдинов М.Н., Хайруллин Ф.С. Метод расчета криволинейных стержней // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1991. № 5. С. 104–108.
27. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Вариационный метод расчета прямолинейных и криволинейных тонкостенных стержней: монография. Казань: Изд-во КНИТУ, 2016. 144 с.
28. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. The method of calculating inelastic elements of rod structures under loading, unloading and reloading regimes // Journal of Physics Conference Series. 2019. Vol. 1158. No. 4. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042014>
29. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания: справочник: в 3 т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 821 с.

References

1. Shulkin Yu.B. *Theory of elastic rod structures*. Moscow: Nauka Publ.; 1984. (In Russ.)
2. Svetlitsky V.A. *Mechanics of rods* (part 1). Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1987. (In Russ.)
3. Svetlitsky V.A. *Mechanics of rods* (part 2). Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1987. (In Russ.)
4. Grudev I.D. *Vibrations of curved rods*. Moscow: MIK Publ.; 2007. (In Russ.)
5. Levin V.E., Pustovoy N.V. *Mechanics of deformation of curved rods*. Novosibirsk: NSTU Publ.; 2008. (In Russ.)
6. Serazutdinov M.N., Nedorezov O.A. On the approximation of the median surface of the shell. *Research on the Theory of Shells: Proceedings of the Seminar*. 1990;(25):97–102. (In Russ.)
7. Khairullin F.S., Serazutdinov M.N. Method of parametrization of the median surface of a thin-walled structural element. *Izvestiya Vuzov. Aviation Equipment*. 2006;(4):14–16. (In Russ.)
8. Sakhbiev O.M., Khairullin F.S. About one of the methods of isogeometric approximation by cubic splines. *Bulletin of the Technological University*. 2022;25(5):111–114. (In Russ.)
9. Kvasov B.I. *Methods of isogeometric approximation by spline*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.)
10. Krivoshapko S.N. On parabolic bending of a flat metal sheet into a torso structure. *Technology of Mechanical Engineering*. 2020;(11):14–24. (In Russ.)
11. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):553–561. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561>
12. Papkova I.V., Krysko A.V., Krysko V.A. Theory and methods for studying the nonlinear dynamics of a beam – plate nano resonator taking into account the temperature and strain fields connection in additive color noise. *Proceedings of the 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. 2020. <http://doi.org/10.23919/ICINS43215.2020.9133824>
13. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. *Deterministic chaos in one dimensional continuous system*. World Scientific Publishing; 2016.
14. Papkova I.V., Krysko A.V., Saltykova O.A., Krysko V.A., Zakharova A.A. Contact interaction of flexible Timoshenko beams with small deflections. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012087>
15. Saltykova O.A., Papkova I.V., Krysko V.A. Chaotic dynamics of two beams described by the kinematic hypothesis of the third approximation in the case of small clearance. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012102>
16. Krysko V.A., Yakovleva T.V., Papkova I.V., Saltykova O.A., Pavlov S.P. The contact interaction of size-dependent and multimodulus rectangular plate and beam. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032021>
17. Papkova I.V., Krylova E.Yu., Krysko A.V. Contact interaction of NEMS shell elements in a color noise field. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;747(1):012059. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/747/1/012059>
18. Artyukhin Yu.P. The analytical method for studying deformations of spatial curved rods. *Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 2012;154(3):97–111. (In Russ.)
19. Artyukhin Yu.P. Arbitrary bending of a cantilever rod by conservative force. *Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 2013;155(2):144–157. (In Russ.)
20. Yakupov N.M., Serazutdinov M.N. *Calculation of elastic thin-walled structures of complex geometry*. Kazan; 1993. (In Russ.)
21. Krivoshapko S.N. Shells and rod structures in the form of analytically undefined surfaces in modern architecture. *Construction and Reconstruction*. 2020;(3):20–30. (In Russ.)
22. Papkova I.V., Krysko A.V., Barulina M.A., Krysko V.A. Mathematical modeling of the nonlinear dynamics components of nanoelectromechanical sensors taking into account thermal, electrical and noise impacts. *Proceedings of the 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. 2019. <http://doi.org/10.23919/ICINS.2019.8769406>
23. Tebyakin A., Papkova I.V., Krysko V.A. The variational iterations method for the three-dimensional equations analysis of mathematical physics and the solution visualization with its help. *CEUR Workshop Proceedings*. 2020;(1):2744.
24. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Saltykova O.A. Analysis of the nonlinear dynamics of flexible two-layer beams, with account for their stratification. In: Awrejcewicz J., Kaźmierczak M., Mrozowski J., Olejnik P. (eds.) *Engineering Dynamics and Life Sciences* (pp. 297–308). Lodz: DAB&M of TUL Press; 2017.
25. Saltykova O.A., Papkova I.V., Vetsel S.S., Krysko V.A. Investigation of the influence of changing the boundary conditions along the side of the plate on its chaotic dynamics. *Journal of Physics Conference Series*. 2019;1158(4):042008. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042008>
26. Serazutdinov M.N., Khairullin F.S. Method of calculating curved rods. *News of Universities. Construction and Architecture*. 1991;(5):104–108. (In Russ.)
27. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. *Variational method of calculation of rectilinear and curved thin-walled rods*. Kazan: KNITU Publ.; 2016. (In Russ.)
28. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. The method of calculating inelastic elements of rod structures under loading, unloading and reloading regimes. *Journal of Physics Conference Series*. 2019;1158(4):042014. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042014>
29. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Strength, stability, fluctuations* (vol. 1). Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1968. (In Russ.)