



## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-1-3-10  
УДК 539.376

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH ARTICLE

### Выпучивание физически нелинейных пластин под действием динамических сдвигающих нагрузок

С.П. Иванов 

Поволжский государственный технологический университет, Йошкар-Ола, Российская Федерация  
Марийский государственный университет, Йошкар-Ола, Российская Федерация

✉ IvanovSP@volgatech.net

#### История статьи

Поступила в редакцию: 12 ноября 2021 г.  
Доработана: 21 января 2022 г.  
Принята к публикации: 11 февраля 2022 г.

#### Для цитирования

Иванов С.П. Выпучивание физически нелинейных пластин под действием динамических сдвигающих нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 3–10. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-3-10>

**Аннотация.** Исследование устойчивости пластин при сдвиге под действием динамических нагрузок – одна из важных проблем строительной механики. Пластины находят широкое применение в строительстве, машино-, судо- и авиастроении. Представлена методика расчета пластин на выпучивание при сдвиге с учетом физической нелинейности материала. Рассматривается пластина под действием сдвигающей динамической нагрузки по краям. В основу расчета положены гипотезы Кирхгофа – Лява и гипотеза о нелинейно упругом теле. Материал пластины принимается физически нелинейным. Диаграмма деформирования аппроксимируется в виде кубического полинома. Прогиб точек пластины определяется в виде разложений Власова – Канторовича. Основные нелинейные дифференциальные уравнения выводятся с использованием энергетического метода. Для получения разрешающих уравнений выпучивания пластины используются уравнения Лагранжа. На основе разработанной методики выполнен расчет на устойчивость физически нелинейной квадратной пластины под действием сдвигающей динамической нагрузки. Края пластины опираются шарнирно. Конечная система нелинейных дифференциальных уравнений интегрируется численно методом Рунге – Кутты. По результатам расчетов построены графики зависимости относительной величины прогиба центральной точки пластины от динамического коэффициента Кд (с учетом и без учета физической нелинейности материала). Изучено влияние степени физической нелинейности материала и параметра скорости изменения сдвигающей нагрузки на критерии динамической устойчивости квадратной пластины.

**Ключевые слова:** динамическая устойчивость, пластина, физическая нелинейность, сдвигающая нагрузка, метод Власова – Канторовича

Иванов Сергей Павлович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3; профессор кафедры электромеханики, Марийский государственный университет, Российская Федерация, 424000, Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 1; ORCID: 0000-0002-5206-9574, eLIBRARY SPIN-код: 5963-6739; IvanovSP@volgatech.net

© Иванов С.П., 2022



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

# Bulking of physically nonlinear plates under the action of dynamic shearing loads

Sergey P. Ivanov 

*Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russian Federation*

*Mari State University, Yoshkar-Ola, Russian Federation*

✉ IvanovSP@volgatech.net

## Article history

Received: November 12, 2021

Revised: January 21, 2022

Accepted: February 11, 2022

## For citation

Ivanov S.P. Bulking of physically nonlinear plates under the action of dynamic shearing loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):3–10. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-3-10>

**Abstract.** The study of the stability of plates under shear under the action of dynamic loads is one of the important problems of structural mechanics. The plates are widely used in construction, mechanical engineering, shipbuilding and aircraft building. The paper presents a method for calculating plates for shear buckling, taking into account the physical nonlinearity of the material. A plate is considered under the action of a shearing dynamic load along the edges. The calculation is based on the Kirchhoff – Love hypotheses and the hypothesis of a nonlinear elastic body. The plate material is assumed to be physically nonlinear. The deformation diagram is approximated as a cubic polynomial. The deflection of the plate points is determined in the form of Vlasov – Kantorovich expansions. Basic non-linear differential equations are derived using the energy method. Lagrange’s equations are used to obtain the resolving equations for plate buckling. On the basis of the developed technique, a calculation was made for the stability of a physically nonlinear square plate under the action of a shear dynamic load. The edges of the plate are hinged. The finite system of nonlinear differential equations is integrated numerically by the Runge – Kutta method. Based on the results of calculations, plots of the dependence of the relative value of the deflection of the central point of the plate on the dynamic coefficient  $K_d$  (with and without taking into account the physical nonlinearity of the material) are plotted. The influence of the degree of physical nonlinearity of the material, the parameter of the rate of change of the shear load on the criteria for the dynamic stability of a square plate is studied.

**Keywords:** dynamic stability, plate, physical non-linearity, shear load, Vlasov – Kantorovich method

## Введение

Исследования, связанные с выпучиванием пластин под действием динамических сдвигающих нагрузок, являются актуальными. При наличии нелинейных диаграмм деформирования материалов необходимо учитывать влияние физической нелинейности на динамическое выпучивание пластин. Такие явления могут возникать в панелях обшивок летательных аппаратов при прохождении акустической волны, в судовых конструкциях от воздействия волн, в строительных конструкциях под действием сейсмических нагрузок.

Большое количество публикаций посвящено расчету пластин и пластинчатых систем в статической и динамической постановках. В монографиях А.С. Вольмира [1; 2] рассматривались вопросы устойчивости и колебаний пластин и оболочек. В работе В.З. Власова [3] в линейной постановке были выполнены исследования устойчивости пластинчатых систем и пластин различной формы. В монографии П.А. Лукаша [4] в геометрически и физически нелинейной постановке исследованы пластины и оболочки. Результаты расчетов на устойчивость и колебания пластин и пластинчатых систем (типа призматических оболочек) с учетом физической и геометрической нелинейности ранее были представлены в [5–7]. Вопросам устойчивости пластин и оболочек в статической и динамической постановках (в том числе с учетом нелинейности) посвящены современные научные публикации в отечественных [8–12] и зарубежных журналах [13–19].

Целью работы является разработка методики расчета на выпучивание пластины под действием динамической сдвигающей нагрузки по краям пластины с учетом физической нелинейности материала.

*Sergey P. Ivanov*, Doctor of Science, Professor, Head of the Department of Strength of Materials and Applied Mechanics, Volga State University of Technology, 3 Ploshchad’ Lenina, Yoshkar-Ola, 424000, Russian Federation; Professor of the Department of Electromechanics, Mari State University, 1 Ploshchad’ Lenina, Yoshkar-Ola, 424000, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-5206-9574, eLIBRARY SPIN-code: 5963-6739; IvanovSP@volgatech.net

### Постановка задачи

Представим диаграмму деформирования материала пластины – зависимость между интенсивностями напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $e_i$  – в виде полинома:

$$\sigma_i = Ee_i - E_1 e_i^3, \quad (1)$$

где  $E$  и  $E_1$  – постоянные, которые определяются из экспериментальных данных [5].

Интенсивность деформаций  $e_i$  выразим через составляющие деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  в направлениях осей  $x, y$  и  $z$  соответственно:

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2}. \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\varepsilon_x = -zw_{xx}; \quad \varepsilon_y = -zw_{yy}; \quad \varepsilon_{xy} = -2zw_{xy}; \quad w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad w_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где  $w = w(x, y, t)$  – функция прогиба пластины ( $t$  – время).

Учитывая гипотезы Кирхгофа – Лява ( $\sigma_z = 0, \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ), выражаем объемную деформацию  $\theta$  и деформацию  $\varepsilon_z$  в направлении оси  $z$  через  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ :

$$\theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad (3)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (4)$$

### Методы

Для решения задачи (вывода конечных уравнений) используем энергетический метод. Запишем удельную энергию  $\Phi$  изменения объема и формы [4]:

$$\Phi = \frac{1}{2} K \theta^2 + \frac{2}{3} \int_0^{e_i} (1+\nu) \sigma_i de_i, \quad (5)$$

где  $K = E / [3(1-2\nu)]$  – модуль объемного сжатия;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Определим работу  $A$ , отнесенную к единице площади поверхности пластины,

$$A = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \Phi dz, \quad (6)$$

где  $\delta$  – толщина пластины.

Составим полную энергию  $L$  деформирования (состоит из потенциальной  $\Pi$  и кинетической  $T$  энергий) под действием по краям пластины динамической сдвигающей нагрузки  $S(t)$  (рис. 1):

$$L = \Pi + T, \quad (7)$$

$$\Pi = \iint [A - S(t)w_x w_y + qw] dx dy, \quad (8)$$

$$T = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho \delta}{g} (w_t)^2 dx dy. \quad (9)$$

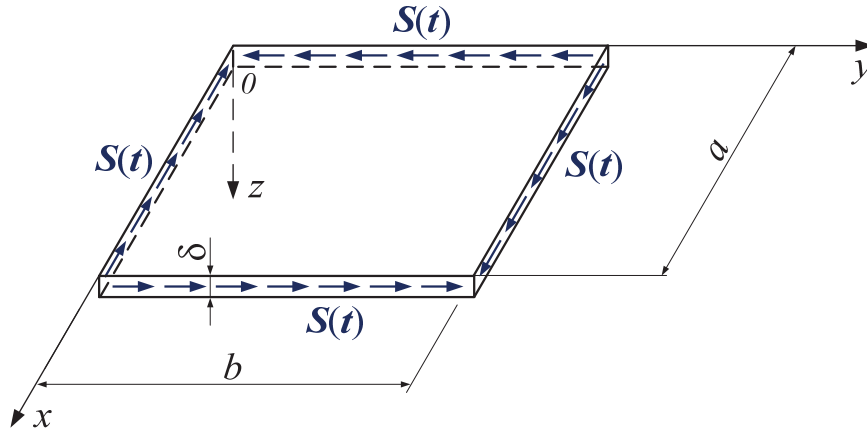


Рис. 1. Пластина под действием динамической сдвигающей нагрузки  $S(t)$   
 Figure 1. The plate under the action of dynamic shearing load  $S(t)$

В уравнениях (8), (9) индексы при  $w$  показывают частные производные по указанным переменным,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – объемный вес материала,  $q$  – поперечная нагрузка, которая вводится для учета начального несовершенства пластины.

Для того чтобы получить конечные уравнения, представим прогибы в виде ряда [3]:

$$w(x, y, t) = \sum_i W_i(t) f_i(x, y); \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Здесь  $W_i(t)$  – обобщенные перемещения, зависящие только от времени  $t$ . Координатные функции  $f_i(x, y)$  выбираются по виду деформированного состояния пластины.

Подставляя (10) в (9), выразим полную энергию  $L$  через  $W_i(t)$  и ее производные по времени  $t$ . Двойные интегралы от функций  $f_i(x, y)$  дают коэффициенты линейных и нелинейных частей уравнения. Определим экстремальное значение  $L$ , используя уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial W_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial W_{i,t}} = 0, \quad (11)$$

где  $W_{i,t} = dW_i/dt$ .

Раскрывая (11), получим уравнения колебательного движения точек пластины под действием динамической сдвигающей нагрузки:

$$\sum_i \left[ a_{ji} - 2b_{ji} + c_{ji} - \frac{S(t)r_{ji}}{D} \right] W_i - \frac{\rho}{gD} \sum_i d_{ji} W_{i,t} - G_j = \Phi_j^{\text{нел}}. \quad (12)$$

Правая часть уравнения (12) учитывает физическую нелинейность пластины и представлена в [5]. Коэффициенты левой части уравнения имеют вид

$$a_{ji} = \iint_{y,x} f_{i,xx} f_{j,xx} dx dy; \quad b_{ji} = \iint_{y,x} f_{i,xy} f_{j,xy} dx dy; \quad c_{ji} = \iint_{y,x} f_{i,yy} f_{j,yy} dx dy;$$

$$r_{ji} = \int \int_y^x f_{i,x} f_{j,y} dx dy; \quad d_{ji} = \int \int_y^x f_i f_j dx dy. \quad (13)$$

Здесь приняты обозначения производных:  $f_{i,xx} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}$ ,  $f_{i,yy} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}$ , ...

### Пример реализации задачи

В качестве примера рассмотрена квадратная в плане пластина со стороной  $a$ , толщиной  $\delta = 0,05a$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,32$ . Пусть на пластину по краям действуют динамические сдвигающие нагрузки  $S(t)$  (рис. 1), изменяющиеся по закону:

$$S(t) = kt, \quad (14)$$

где  $k$  – коэффициент, показывающий скорость изменения нагрузки.

Принимаем, что пластина опирается по краям шарнирно. Функцию прогиба по (10) запишем в виде

$$w(x, y, t) = W_1(t) f_1(x, y) + W_2(t) f_2(x, y), \quad (15)$$

где

$$f_1(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}; \quad f_2(x, y) = \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a}.$$

Введем следующие обозначения:

$$t^* = \frac{S(t)}{S_{кр}} = \frac{kt}{S_{кр}}; \quad \xi_1 = \frac{W_1}{\delta}; \quad \xi_2 = \frac{W_2}{\delta}; \quad S_{кр} = 9,34 \frac{\pi^2 D}{a^2 \delta}; \quad S^* = 3,56 \frac{\pi^2 k^2 g}{\rho \delta S_{кр}},$$

где  $S_{кр}$  – статическая критическая нагрузка при сдвиге.

После некоторых преобразований с учетом принятых обозначений и уравнения (15) система уравнений (12) принимает следующий вид:

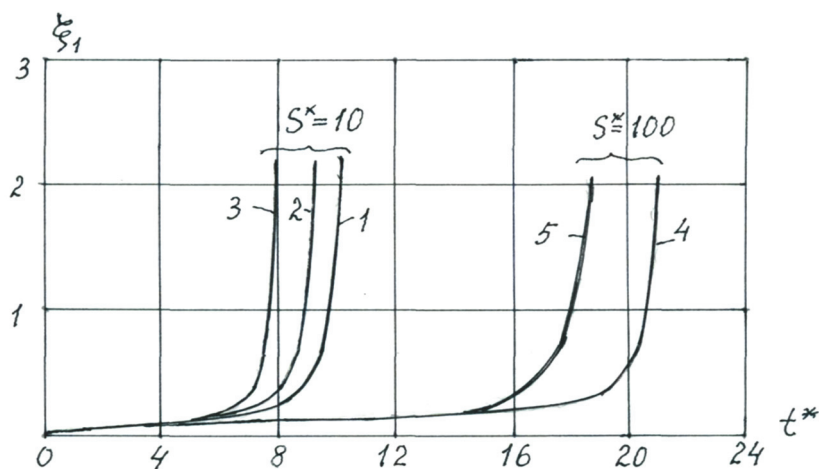
$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_1}{dt^{*2}} &= S^* [1,264 \xi_1 + t^* \xi_2 - 0,63 \delta^5 \frac{E_1}{E} (K_1 \xi_1^3 + K_2 \xi_1 \xi_2^2)]; \\ \frac{d^2 \xi_2}{dt^{*2}} &= S^* [1,264 \xi_2 + t^* \xi_1 - 0,63 \delta^5 \frac{E_1}{E} (K_3 \xi_2^3 + K_4 \xi_1^2 \xi_2)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь коэффициенты  $K_1$ – $K_4$  нелинейной части уравнений определяются подобно коэффициентам (13).

### Результаты

Интегрируются нелинейные дифференциальные уравнения (16) численным методом Рунге – Кутты с помощью программы, составленной на языке Фортран IV. По результатам расчета в безразмерных параметрах построены графики зависимости обобщенной величины прогиба  $\xi_1$  от обобщенной величины динамической сдвигающей нагрузки  $t^*$  (рис. 2). Изменение величины  $\xi_2$  идентично изменению  $\xi_1$ , поэто-

му на рис. 2 графики  $\xi_2 - t^*$  не представлены. Кривые 1 и 4 построены по линейной теории, 3 и 5 – с учетом физической нелинейности при следующих степенях физической нелинейности:  $E_1/E = 10^4$ , кривая 2 – при  $E_1/E = 10^3$ . Графики зависимости, построенные по линейной теории, совпадают с результатами расчета, полученными в [2].



**Рис. 2.** Графики зависимости параметра выпучивания  $\xi_1$  от величины  $t^*$   
**Figure 2.** Graphs of the dependence of the buckling parameter  $\xi_1$  on the value of  $t^*$

### Заключение

При увеличении скорости нагружения  $S^*$  динамическая критическая сдвигающая нагрузка значительно превышает статическую критическую нагрузку с учетом и без учета физической нелинейности (см. величину  $t^*$ ).

Учет физической нелинейности значительно снижает величину  $t^*$  (см. кривые 1 и 3 на рис. 2).

Если считать  $t^*$  за «динамический коэффициент»  $K_{\text{дин}}$ , то его значение сильно зависит от скорости нагружения  $S^*$ .

Выпучивание пластины происходит по диагонали с образованием одного гофра, согласно заданным функциям  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$ , что подтверждается экспериментально [2]. При быстром изменении нагрузки выпучивание может происходить с образованием нескольких гофров и этому вопросу будут посвящены дальнейшие исследования.

### Список литературы

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат, 1958. 502 с.
4. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
5. Иванов С.П., Иванова А.С. Приложение вариационного метода В.З. Власова к решению нелинейных задач пластинчатых систем: монография. Йошкар-Ола: ПГТУ, 2015. 248 с.
6. Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Устойчивость пластин под действием сдвигающих нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 6. С. 68–73.
7. Иванов С.П., Иванова А.С., Иванов О.Г. Устойчивость геометрически нелинейных пластинчатых систем под действием динамических нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 3. С. 219–225. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225>
8. Трушин С.И., Журавлева Т.А., Сысоева Е.В. Динамическая потеря устойчивости нелинейно-деформируемых сетчатых пластин из композиционного материала с различными конфигурациями решетки // Научное обозрение. 2016. № 4. С. 44–51.
9. Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е., Азина Е.О. Применение метода Бубнова – Галеркина для оценки устойчивости анизотропных пластин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 29–33. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-4-29-33>

10. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некротными критическими нагрузками // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 1. С. 54–61. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61>
11. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Геометрически нелинейный расчет на устойчивость подкрепленной пластины с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 1. С. 3–18. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>
12. Медведский А.Л., Мартыросов М.И., Хомченко А.В., Дедова Д.В. Численный анализ поведения трехслойной панели с сотовым наполнителем при наличии дефектов под действием динамической нагрузки // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 4. С. 357–365. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-357-365>
13. Breslavsky I.D., Amabili M., Legrand M. Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014. Vol. 58. Pp. 30–40. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.009>
14. Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads // *Composite Structures*. 2015. Vol. 127. Pp. 356–368. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1059528>
15. Nazarimofrad E., Barkhordar A. Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23. No. 10. Pp. 1144–1148. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1059528>
16. Srividhya S., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal nonlinear analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory // *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 125. Pp. 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.12.006>
17. Ruocco E., Reddy J.N. A closed-form solution for buckling analysis of orthotropic Reddy plates and prismatic plate structures // *Composites Part B: Engineering*. 2019. Vol. 169. Pp. 258–273. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.03.015>
18. Shiva K., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal buckling analysis of laminated composite plates considering surface stress effects // *Composite Structures*. 2019. Vol. 226. 111216. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111216>
19. Pagani A., Daneshkhan E., Xu X., Carrera E. Evaluation of geometrically nonlinear terms in the large-deflection and post-buckling analysis of isotropic rectangular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020. Vol. 121. 103461. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103461>

## References

1. Volmir A.S. *Stability of deformable systems*. Moscow: Nauka Publ.; 1967. (In Russ.)
2. Volmir A.S. *Non-linear dynamic of plats and shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1972. (In Russ.)
3. Vlasov V.Z. *Thin-walled spatial systems*. Moscow: Gosstrojizdat Publ.; 1958. (In Russ.)
4. Lukash P.A. *Fundamentals of nonlinear structural mechanics*. Moscow: Strojizdat Publ.; 1978. (In Russ.)
5. Ivanov S.P., Ivanova A.S. *Application of V.Z. Vlasov's variational method to solving nonlinear problems of plate systems*. Yoshkar-Ola: PGTU Publ.; 2015. (In Russ.)
6. Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. The stability of plates under the action of shearing loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;(6):68–73. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-6-68-73>
7. Ivanov S.P., Ivanova A.S., Ivanov O.G. The stability of geometrically nonlinear plate systems under the action of dynamic loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(3):219–225. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225>
8. Trushin S.I., Zhuravleva T.A., Sysoeva E.V. Dynamic buckling of nonlinearly deformable reticulate plates from composite material with different lattice configurations. *Scientific Review*. 2016;(4):44–51. (In Russ.)
9. Kolmogorov G.L., Melnikova T.E., Azina E.O. Application of the Bubnov – Galerkin method for assessment of stability of non-isotropic plates. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;(4):29–33. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-4-29-33>
10. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical analysis of stability of the stiffened plates subjected aliquant critical loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):54–61. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61>
11. Manuylov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):3–18. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>

12. Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V., Dedova D.V. Numerical analysis of the behavior of a three-layer honeycomb panel with interlayer defects under action of dynamic load. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(4):357–365. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-357-365>
13. Breslavsky I.D., Amabili M., Legrand M. Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014;58:30–40. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.009>
14. Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads. *Composite Structures*. 2015;127:356–368. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1059528>
15. Nazarimofrad E., Barkhordar A. Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016;23(10):1144–1148. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1059528>
16. Srividhya S., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal nonlinear analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory. *International Journal of Engineering Science*. 2018;125:1–22. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.12.006>
17. Ruocco E., Reddy J.N. A closed-form solution for buckling analysis of orthotropic Reddy plates and prismatic plate structures. *Composites Part B: Engineering*. 2019;169:258–273. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.03.015>
18. Shiva K., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal buckling analysis of laminated composite plates considering surface stress effects. *Composite Structures*. 2019;226:111216. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111216>
19. Pagani A., Daneshkhah E., Xu X., Carrera E. Evaluation of geometrically nonlinear terms in the large-deflection and post-buckling analysis of isotropic rectangular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020;121:103461. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103461>