

Энергетическая концепция силового сопротивления элементов железобетонных конструкций

Е.А. Ларионов¹✉, В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{1,2}, Е.А. Гринько¹

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ markovich-as@rudn.ru

Поступила в редакцию: 9 апреля 2026 г.

Доработана: 1 июня 2026 г.

Принята к публикации: 12 июня 2026 г.

Аннотация. Материал (бетон, сталь, дерево, пластмасса) образуется объединением его фракций в результате их массового и энергетического обмена с окружающей средой. Этот синергетический процесс влечет накопление в единичном объеме материала энергии, связывающей фракции в единое целое и являющейся его удельной энергией целостности. Разрушение материала в энергетическом аспекте представляет обратный к образованию его целостной структуры процесс исчерпания энергии целостности. Вопросы расчета железобетонных конструкций сопряжены с прочностью бетона и стали, динамика которой для оценки текущего и длительного ресурса силового сопротивления железобетонных элементов является существенной в прогнозировании безопасности и живучести этих конструкций. На основе понятия энергии целостности как параметра энергетического состояния материала выявлены оценки длительной прочности и несущей способности по изгибу бетонных элементов и энергетическая оценка конструктивной безопасности железобетонных стержневых систем. Предложенный подход связан с диссипацией энергии целостности при силовых нагружениях и воздействиях окружающей среды.

Ключевые слова: диссипация энергии, коррозионная диссипация, прочность бетона, деформирование железобетона

Вклад авторов. Ларионов Е.А. — научное руководство, общая концепция исследования; Агапов В.П. — концепция исследования, научное рецензирование и редактирование; Маркович А.С. — концепция исследования, анализ научной литературы, написание текста; Гринько Е.А. — редактирование текста. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: Ларионов Е.А., Агапов В.П. Маркович А.С., Гринько Е.А. Энергетическая концепция силового сопротивления элементов железобетонных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 4. С. 331–347. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-331-347> EDN: LPXCUE

Ларионов Евгений Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры технологии строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY AuthorID: 365207, ORCID: 0000-0002-4906-5919; e-mail: evgenylarionov39@yandex.ru

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологии строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, доктор технических наук, доцент кафедры технологии строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434; ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Гринько Елена Алексеевна, ассистент кафедры машиностроительных технологий, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 5360-7164, ORCID: 0000-0002-0459-8359; e-mail: grinko-ea@rudn.ru

© Ларионов Е.А., Агапов В.П. Маркович А.С., Гринько Е.А., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Energy Concept of the Force Resistance of Elements of Reinforced Concrete Structures

Evgeny A. Larionov¹, Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich^{1,2}, Elena A. Grinko¹

¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation

² Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ markovich-as@rudn.ru

Received: April 9, 2026

Revised: June 1, 2026

Accepted: June 12, 2026

Abstract. A material (concrete, steel, wood, plastic) is formed by combining its fractions as a result of their mass and energy exchange with the environment. This synergetic process entails the accumulation of energy in a unit volume of the material, binding the fractions into a single whole and being its specific energy of integrity. The failure of a material in the energy aspect represents the reverse process to the formation of its integral structure — the depletion of the integrity energy. The issues of calculating reinforced concrete structures are related to the strength of concrete and steel, the dynamics of which, in order to assess the current and long-term life of the mechanical resistance of reinforced concrete elements, is essential in predicting the safety and survivability of these structures. Based on the concept of integrity energy as a parameter of the energy state of the material, the article identifies estimates of the long-term strength and bending bearing capacity of concrete elements and an energy assessment of the structural safety of reinforced concrete frames. The proposed approach is related to the dissipation of integrity energy under mechanical loads and environmental exposure.

Keywords: energy dissipation, corrosive dissipation, strength of concrete, deformation of reinforced concrete

Authors' contribution. Larionov E.A. — supervision, conceptualization; Agapov V.P. — conceptualization, writing — review and editing; Markovich A.S. — conceptualization, literature review, writing — original draft; Grinko E.A. — writing — original draft and editing. All the authors have read the final version of the article and approved it.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Larionov EA, Agapov VP, Markovich AS, Grinko EA. Energy concept of the force resistance of elements of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):331–347. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-331-347> EDN: LPXCUE

1. Введение

В бетонной смеси, как и во всякой термодинамической системе, происходит непрерывный обмен вещества и энергии с окружающей средой, сопровождаемый образованием связей, определяющих прочность бетона $R(t)$. Отвечающая $R(t)$ аккумулированная в единице объема энергетическая мера сопротивления разрушению называется энергией целостности $W(t)$. Параметр $W(t)$ характеризует энергетическое состояние бетона и равен работе $A(t)$ разрушения его единичного объема при

Evgeny A. Larionov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY AuthorID: 365207, ORCID: 0000-0002-4906-5919; e-mail: evgenylarionov39@yandex.ru

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Engineering Academy, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Metal and Timber Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Elena A. Grinko, Assistant of the Department of Mechanical Engineering Technologies, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5360-7164, ORCID: 0000-0002-0459-8359; e-mail: grinko-ea@rudn.ru

мгновенном деформировании. Для упругих материалов удельная работа $A(t)$ внешних сил порождает равную ей удельную потенциальную энергию $\Phi(t)$ и согласно $\Phi(t) = A(t)$ имеет место совпадение величин $\Phi(t)$ и $A(t)$. Динамика энергии целостности реальных материалов, обладающих свойством ползучести, существенно определяется как режимом нагружения и интенсивностью воздействия окружающей среды, так и предысторией их существования. Значимым результатом внешних воздействий являются коррозионные повреждения материалов. Предложенный в работе метод основан на концепции инвариантности начальной энергии целостности от режима ее исчерпания при силовых и средовых воздействиях [1; 2].

Энергия целостности бетона в результате физико-химических процессов увеличивается до определенного момента времени t_0 — это отвечает так называемому старению бетона, в течение которого он набирает прочность. Вопросы длительной прочности бетона рассматриваются для $t \geq t_0$, когда проявляется деградация его прочности, выражаемая уменьшением его энергии целостности вследствие порождаемых ползучестью и коррозионными повреждениями диссипативных потерь.

Если $W_g(t)$ диссипативно рассеянная к моменту t часть начальной энергии целостности $W(t_0)$, то по закону сохранения энергии

$$W(t_0) = W(t) + W_g(t), \quad (1)$$

где величина $W(t) = W(t_0) - W_g(t)$ энергии целостности представляет текущий энергетический ресурс сопротивления.

Равенство

$$W(t_p) = A(t_p) \quad (2)$$

выражает энергетический критерий разрушения, порождаемый работой $A(t_p)$ при мгновенном деформировании. Энергетическому ресурсу $W(t)$ отвечает ресурс $R(t)$ силового сопротивления при одноосном нагружении и ресурс $M(t)$ моментного силового сопротивления при изгибе железобетонного элемента [3; 4].

По концепции прочностной структуры бетон рассматривается как совокупность фракций, объединенных связями со статистически распределенными прочностями $R_i(t)$ [5–7].

Согласно этой концепции, выводится нелинейное реологическое уравнение механического состояния

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{S^0 \sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \theta(\tau) S^0(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

при одноосном неубывающем нагружении [8; 9].

В (3) $S^0(t)$ — функция нелинейности напряжений; $\sigma(t)$ — нормальное напряжение; $C_0^*(t, \tau) = C(\infty, 28) \left[1 - e^{-\gamma(t-t_0)} \right]$ — мера ползучести идеального (нестареющего) бетона; $\theta(\tau)$ — функция старения. При неубывающем нагружении $\mathcal{N}(t)$ бетонного элемента его связи с прочностью $R_i(t) < \sigma(t)$ теряют способность к силовому сопротивлению и происходит перераспределение напряжений с этих разрушенных связей на целые связи с прочностью $R_i(t) \geq \sigma(t)$. Перераспреде-

ние нагружения $\mathcal{N}(t)$ с площади A нормального сечения на ее работоспособную часть $A(t)$ порождает так называемое структурное напряжение:

$$\sigma_c(t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{A(t)} = \frac{A}{A(t)} \frac{\mathcal{N}(t)}{A} = S^0(t) \sigma(t). \quad (4)$$

Согласно (3) и (4)

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \theta(\tau) \sigma_c(\tau) \frac{\partial C_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5)$$

Структурное напряжение представляет нормальное напряжение, необходимое для реализации деформации $\varepsilon(t, t_0)$ при условии равнопрочности всех силовых связей элемента. В приложениях используется функция [10]:

$$S^0(t) = S^0 \left(\frac{\sigma(t)}{R(t)} \right) = 1 + V \left[\frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]^m, \quad (6)$$

где V и m эмпирические параметры.

Полагая $A = A(t) + A_a(t)$, получим $S^0(t) = \frac{A(t) + A_a(t)}{A(t)} = 1 + \frac{A_a(t)}{A(t)}$ и величина $V \left[\frac{\sigma(t)}{R(t)} \right]^m$ от-

вечает отношению суммарных площадей нормальных сечений разрушенных и целых связей.

Напряженно-деформированное состояние механической системы, например железобетонной конструкции, тесно связано с динамикой энергий целостности составляющих ее элементов. Потеря целостности части элементов влечет уменьшение энергии целостности оставшихся, что может привести к разрушению части конструкции или к последовательно прогрессирующему лавинообразному разрушению всей конструкции. Результатом мгновенного разрушения части конструктивных элементов под действием неубывающей нагрузки является импульсное догружение сохранивших несущую способность элементов и возникает задача определения динамических напряжений и моментов в их сечениях. В [11] она решена для упругохрупкого элемента энергетическим методом на основе постоянства полной потенциальной энергии элементов.

В прогнозных расчетах безопасности существен учет ползучести, и в данной работе динамические внутренние усилия элементов определяются согласно инвариантности их энергии целостности от режима нагружения.

Введенные в [1; 11] энергетические подходы оценок силового сопротивления применяются в расчетах долгосрочной безопасности, живучести и устойчивости железобетонных конструкций и их элементов [12–14].

Замечание 1. Энергетические оценки в теории разрушения упругих тел впервые появились в [15] при анализе зарождения трещин. Аналогичные оценки в вопросах разрушения упругопластичных тел возникают, например, в [16; 17].

В [18–20] энергетическим методом оценивается продольная критическая сила, влекущая потерю устойчивости железобетонного стержня.

При этом в [21] наряду с диссипацией его энергии целостности учитывается ее инвариантность при бифуркации равновесных форм.

Замечание 2. В [23; 24] динамический эффект внезапного разрушения элемента конструкции моделируется учетом коэффициента динамичности, а в [25] определяется динамическим расчетом.

В [26] приведен анализ этих подходов и обоснована их приемлемость наряду с сопоставляемым им энергетическим подходом для расчетов по защите сооружений от прогрессирующего обрушения.

Замечание 3. Энергетический подход используется в сейсмическом проектировании. При этом сейсмические силы представляются через так называемую входную сейсмическую энергию [27].

Значимый вклад в диссипативную теорию силового сопротивления железобетона, включающую оценки гистерезисных энергетических потерь и их конструктивную минимизацию, внес В.М. Бондаренко¹. Впервые энергетические соображения для получения оценок динамических напряжений в упруго-хрупких стержневых конструкциях при импульсных нагружениях привлечены Г.А. Гениевым и В.И. Колчуновым [11].

2. Энергия целостности конструктивного элемента

Накопленная в конструктивном элементе энергия целостности исчерпывается в результате работы внутренних сил при его деформировании и воздействиях окружающей среды. Ее величина $W(t)$ полагается [1; 2] инвариантной от режима нагружения и способов воздействия среды.

Эта концепция влечет, в частности, равенство $W(t)$ работе $A(t)$ внутренних сил элемента при его мгновенном (кратковременном) деформировании до предельной деформации ε_u , приводящей к разрушению.

Таким образом, энергия целостности $W(t)$ является интегральным параметром элемента, равным работе внутренних сил при его мгновенном разрушении [1]. Величина $W(t) = \frac{W(t)}{V}$, где V — объем элемента, представляет среднюю плотность энергии целостности.

При изоэнергетическом напряженном состоянии элемента плотность $W_s(t)$ постоянна и является его удельной энергией целостности. На рис.1 приводится геометрическая интерпретация рассматриваемых величин согласно полной диаграмме $\sigma - \varepsilon$ бетонного образца при его деформировании до ε_u .

Площади S фигур на рис. 1 представляют:

$S_{OA^*B^*}$ — предельную плотность энергии, являющейся удельной энергией целостности $W_s^*(t)$;

S_{OAB} — текущую плотность энергии, являющейся рассеянной частью $W_{sd}^*(t)$ энергии $W_s^*(t)$;

$S_{BA^*B^*} = S_{OA^*B^*} - S_{OAB}$ — остаточный ресурс $\tilde{W}_s^*(t) = W_s^*(t) - W_{sd}^*(t)$;

S_{OAC} — разность $\Delta W(t) = \bar{W}(t) - \bar{W}(t)$ энергий, затраченных на осуществление удельных работ внутренних сил элемента при его нагружении и последующем разгрузении.

Для упругопластических тел величина $\Delta W(t)$ является присущей им гистерезисной потерей части энергии $\bar{W}(t)$. Согласно рис. 1, $\bar{W}(t) = W_{sd}^*(t)$.

Замечание 4. Энергия целостности конструктивного элемента является его максимальной энергией сопротивления разрушению. Рассеянная часть этой энергии, затраченная на работу внутренних сил, представляет энергетическую меру диссипации силового сопротивления. При длительном

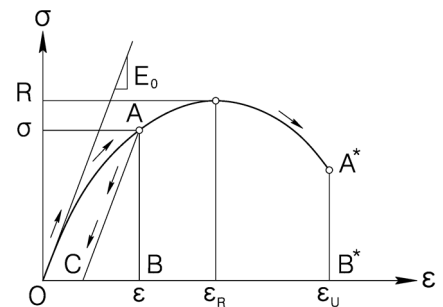


Рис. 1. Текущая и предельная плотность энергии

Источники: выполнено Е.А. Ларионовым, А.С. Марковичем.

Figure 1. Current and ultimate energy density

Source: made by E.A. Larionov, A.S. Markovich.

¹ Бондаренко В.М., Римшин В.И. Диссипативная теория силового сопротивления железобетона : учеб. пособие. Москва : ТИД «Студент», 2015. 111 с. ISBN 978-5-4363-0052-8 EDN: VSMWDX

деформировании часть энергии целостности затрачивается на реализацию деформации ползучести и пластичности. Эта часть энергии является существенной при определении длительной прочности элемента. Значимый вклад в рассеянную часть энергии целостности вносят коррозионные повреждения, влекущие деградацию силового сопротивления элементов.

Рассматриваемые при проектировании задачи определения оптимальных форм конструкций сопряжены с накапливаемой при деформировании потенциальной энергии и сходимостью энергетических функционалов к минимуму по соответствующей последовательности исследуемых форм. При нелинейном расчете шагово-итерационным методом уравнение равновесия конструкции записывается в виде [28]

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma)_j \Delta \mathbf{u}_j^{(i)} = \Delta \mathbf{P}_j - \Delta \mathbf{K}_j^{(i-1)} \Delta \mathbf{u}_j^{(i-1)}, \quad (7)$$

где $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}_\sigma$ — матрицы жесткости и начальных напряжений; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; j — номер шага нагружения; i — номер итерации на данном шаге.

Вектор перемещений $\Delta \mathbf{u}_j^{(i)}$ должен удовлетворять закону сохранения энергии. Поэтому для каждого шага нагружения должно выполняться равенство

$$W_{j-1,j-1} + W_{j-1,j} + W_{j,j} + A_{j-1,j-1} + A_{j-1,j} + A_{j,j} = 0, \quad (8)$$

где $A_{j-1,j-1}$ и $W_{j-1,j-1}$ — работа внешних и внутренних сил начального состояния на начальных перемещениях $\Delta \mathbf{u}_{j-1}$; $A_{j-1,j}$ и $W_{j-1,j}$ — работа внешних и внутренних сил начального состояния на дополнительных (возможных) перемещениях $\Delta \mathbf{u}_j$; $A_{j,j}$ и $W_{j,j}$ — работа дополнительных внешних и внутренних сил на дополнительных перемещениях $\Delta \mathbf{u}_j$.

Исходя из принципа возможных перемещений $W_{j-1,j} + A_{j-1,j} = 0$. Следовательно, $W_{j,j} + A_{j,j} = 0$.

Потребуем, чтобы решение уравнения равновесия на i -й итерации, удовлетворяло условию $W_{j,j}^{(i)} + A_{j,j}^{(i)} = 0$, для чего введем к перемещениям $\Delta \mathbf{u}_j^{(i)}$ поправочный коэффициент c : $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)} = c \Delta \mathbf{u}_j^{(i)}$.

В этом случае работа дополнительных внутренних сил на перемещениях $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j$ равна

$$W_{j,j} = \bar{W}_{j,j} + \bar{\bar{W}}_{j,j}, \text{ где } \bar{W}_{j,j} = -\frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{K}_0 \Delta \bar{\mathbf{u}}_j - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{K}_\sigma \Delta \bar{\mathbf{u}}_j; \bar{\bar{W}}_3 = -\frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^T \Delta \mathbf{K} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j.$$

В свою очередь, внешние силы $\Delta \mathbf{P}_j$ на перемещениях $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j$ совершают работу $A_{j,j} = \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^T \Delta \mathbf{P}_j$.

Подставляя $\Delta \bar{\mathbf{u}}_j = c \Delta \mathbf{u}_j$ в выражения работ внешних и внутренних сил, приходим к алгебраическому уравнению третьей степени, корнем которого является искомый поправочный коэффициент c :

$$b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + b_3 c^3 = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } b_0 = \frac{1}{2} (\Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)})^T \Delta \mathbf{P}_j; b_1 = \frac{1}{2} (\Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)})^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)}; b_2 = 0; b_3 = \frac{1}{2} (\Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)})^T \Delta \mathbf{K} \Delta \bar{\mathbf{u}}_j^{(i)}.$$

3. Длительная прочность и ресурс силового сопротивления бетона

При расчете железобетонных конструкций на прочность возникает вопрос о максимально возможных нагрузках, не влекущих их разрушения в период эксплуатации. При этом существенными характеристиками бетона являются его призмная R_b и так называемая длительная прочность $R_{дл}$ —

максимальный уровень постоянных напряжений, при которых он не разрушается при любой их длительности. Для обычного бетона полагается оценка $R_{дл} < 0,8 R_{кр}$, где $R_{кр}$ — его кратковременная прочность, превышение которой влечет разрушение. Снижение длительной прочности (по сравнению с кратковременной) связывается с развитием микротрещин и преодолением некоторого энергетического барьера в процессе деформирования материала. В аспекте энергетической концепции это явление сопряжено с диссипацией энергии целостности $W_{(t_0)}$.

Рассеянная к моменту t часть этой энергии:

$$W_d(t) = W_{ds}(t) + W_{dc}(t), \quad (10)$$

где слагаемые $W_{ds}(t)$ и $W_{dc}(t)$ порождаются соответственно силовыми и средовыми воздействиями, среди которых значимы учитываемые в этой работе химкоррозионные воздействия.

1. Рассмотрим сначала случай $W_d(t) = W_{dc}(t)$.

Пусть $R(t_0)$ — прочность бетона в момент t_0 , а $R(t, t_0)$ — максимальное постоянное напряжение, которое он выдерживает в течение промежутка

$T = [t_0, t]$. Удельные работы разрушения в моменты t_0 и t согласно (1) и (10) соответственно равны:

$$\tilde{W}(t_0) = R(t_0)\varepsilon(t_0) = R(t_0) \frac{S^0[R(t_0)]R(t_0)}{E(t_0)} = \frac{(1+V)R^2(t_0)}{E(t_0)}, \quad (11)$$

$$\tilde{W}(t, t_0) = R(t, t_0)\varepsilon(t, t_0) = \frac{(1+V)R^2(t, t_0)}{E(t)} [1 + E(t)C^*(t, t_0)]. \quad (12)$$

Поскольку по энергетической концепции $\tilde{W}(t_0) = \tilde{W}(t, t_0)$, то

$$R(t, t_0) = \sqrt{\frac{E(t)}{E(t_0)[1 + E(t)C^*(t, t_0)]}} R(t_0), \quad (13)$$

Множитель $R(t, t_0) = \sqrt{E(t)/E(t_0)[1 + E(t)C^*(t, t_0)]}$ определяется динамикой модуля упругости и меры ползучести $E(t) = E(1 - \beta e^{-at})$ и $C^*(t, t_0) = C(\infty, 28)(1 - e^{-\gamma(t-t_0)})$.

Для достаточно больших промежутков $[t_0, t]$ допустима оценка:

$$R_{дл} = \frac{R_{кр}}{\sqrt{1 + \varphi}}, \quad (14)$$

где $\varphi = E(28)C(\infty, 28)$ — характеристика ползучести. Например, для бетона

B60 $E = 4010^3$ МПа; $(\infty, 28) = 40 \cdot 10^{-3}$ МПа⁻¹; $\eta \approx 0,77$ и $R_{дл} \approx 0,77 R_{кр}$.

Пусть $\sigma(\tau \leq \sigma_0)$ — неубывающее на промежутке $[t_0, t]$ нагружение. Совершаемая им работа $A[\sigma(t)]$ представляет часть энергии $W(t_0)$ и по энергетической концепции:

$$W(t_0) = \hat{W}[\sigma(\tau)] + A[\sigma(\tau)], \quad (15)$$

где $\hat{W}[\sigma(\tau)]$ — резерв целостности при нагружении $\sigma(\tau)$.

Если $\sigma(\tau) = \sigma_0$ на промежутке $[t_0, t]$, то

$$W(t_0) = \hat{W}[\sigma_0] + A[\sigma_0]. \quad (16)$$

При $\sigma(\tau) \leq \sigma_0$ имеет место соотношение

$$A[\sigma(t)] \leq A(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^2}{E(t)} [1 + E(t) C^*(t, t_0)],$$

влекущее с учетом (12) и (13) оценку

$$\hat{W}(\sigma_0) \leq \hat{W}[\sigma(\tau)]. \quad (17)$$

Согласно (17) при статическом нагружении $\sigma(\tau) = \sigma_0$ получается нижняя оценка величины $\hat{W}[\sigma(\tau)]$ при всех режимах нагружения $\sigma(\tau) \leq \sigma_0$. Это означает, что для целостности на промежутке $[t_0, t]$ бетонной компоненты элемента допустимы все нагружения $\sigma(\tau) \leq R(t, t_0)$. При $\sigma(\tau) = R(t, t_0)$ согласно (12) и (13) $\hat{W}[R(t, t_0)] = 0$ и происходит разрушение элемента. Когда $\sigma(\tau) \leq R(t, t_0)$, возможное на некоторых интервалах времени разгружение влечет уменьшение $W_{ds}(t)$.

Замечание 5. Для оценки прочности при режиме нагружения $\sigma(\tau)$ необходима оценка диссипативно рассеянной части $W_{ds}(t)$ энергии целостности. В [1] приведены оценки для характерных неубывающих на $[0, t]$ режимов $\sigma(\tau) = \sigma_0(1 - \alpha e^{-\gamma\tau})$; $\alpha > 0$; $\gamma > 0$ и $\sigma(\tau) = a, t, a > 0$.

2. Коррозионные воздействия влекут значительную деградацию несущей способности железобетонных элементов конструкций. Результатом химических реакций, инициированных агрессивными по отношению к компонентам конструктивных элементов факторами внешней среды, является изменение физико-механических характеристик бетона и стали. Это порождает существенное уменьшение энергии целостности вследствие увеличения рассеянных ее частей. При одностороннем контакте бетона со средой выявлена послойность химкоррозионных повреждений, начинающихся на поверхности Σ_0 контакта, слабеющих при их углублении и обнуляющихся на некоторой поверхности Σ_t — подвижной границе нейтрализации, где концентрация $C(z, t)$ агрессора равна нулю [28]. Мера влияния этих повреждений по глубине определяется динамикой концентрации $C(z, t)$, меняющейся в переходной зоне толщины $\delta(t)$ от величины C_p в зоне полного разрушения толщины $z^*(t)$ до нуля в неповрежденной зоне толщины $p_{(t)}$. Согласно этим предпосылкам относительная концентрация $\hat{C}(z, t) = C(z, t) / C_p$ удовлетворяет условиям:

$$\hat{C}[z^*, t] = 1; \hat{C}[z^*(t) + \delta(t)] = 0; \frac{d\hat{C}[z^*(t) + \delta(t)]}{dz} = 0, \quad (18)$$

и при аппроксимации $\hat{C}(z, t) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ в случае $z^*(t) = 0$ получим

$$\hat{C}(z, t) = \frac{z^2}{\delta^2(t)} - \frac{2z}{\delta(t)} + 1.$$

Пусть $R(z, t)$ и $E(z, t)$ – прочность и модуль упругости слоя толщиной dz на глубине $z(t)$ переходной зоны. Продвижение коррозионных повреждений порождает одновременное уменьшение концентрации $\hat{C}(z, t)$ и увеличение $R(z, t)$ и $E(z, t)$. Эта сопряженность изменения величин $R(z, t)$ и $E(z, t)$ с дефицитом $K(z, t) = 1 - \hat{C}(z, t)$ концентрации $\hat{C}(z, t)$ позволяет принять равенства:

$$R(z, t) = K(z, t) R(t); \quad (19)$$

$$E(z, t) = K(z, t) E(t). \quad (20)$$

Множитель $K(z, t)$ называется функцией сохранения [3].

Величина $\int_0^{\delta} b(z) K(z, t) dz$ представляет часть площади $S(t)$ нормального сечения переходной зоны элемента ширины $b(z)$.

Согласно равенству

$$R(t) \int_0^{\delta} b(z) K(z, t) dz = \int_0^{\delta} b(z) R(z, t) dz \quad (21)$$

часть сечения с площадью $\int_0^{\delta} b(z) K(z, t) dz$, полагаемая неповрежденной (сохраненной), оказывает такое же силовое сопротивление, как все сечение. Эквивалентное в силовом аспекте приведение поврежденного сечения к расчетному используется в определении остаточного силового $R^*(t)$ и моментного $M^*(t)$ сопротивления [3; 4].

Полагая изменение меры ползучести $C^*(z, t, t_0)$ по переходной зоне обратно пропорциональной дефициту $K(z, t)$, принимают равенство

$$C^*(z, t, t_0) = \frac{C^*(t, t_0)}{K(z, t)}. \quad (22)$$

Согласно (20) и (22) имеет место соотношение

$$E(z, t) C^*(z, t, t_0) = E(t) C^*(t, t_0) = \varphi(t, t_0), \quad (23)$$

означающее инвариантность характеристики ползучести от коррозионных повреждений. Поскольку величина $\varphi(t, t_0)$ является характеристикой неравновесности силовых нагрузок и не связана с коррозионными повреждениями, равенство (23) является естественным и обосновывает представление меры $C^*(z, t, t_0)$ в виде (22).

Среди определяющих глубину нейтрализации $\delta^*(t) = z^*(t) + \delta(t)$ факторов значим уровень $\eta(t) = \delta(t)/R(t)$ напряжения, влияние которого при постоянном уровне η выражается параметрами $m(\eta)$ и $\alpha(\eta)$ в дифференциальном уравнении

$$\frac{d[\Delta\delta(t, t_0)]}{dt} = \alpha(\eta) [\Delta\delta(t, t_0)]^{m(\eta)}. \quad (24)$$

Здесь $\Delta\sigma(t, t_0) = \frac{\delta_{кр}(t, t_0) - \delta(t, t_0)}{\delta_{кр}(t, t_0)}$ — относительный дефицит глубины повреждений, а функции $m(\eta)$ и $d(\eta)$ задаются в виде [30]:

$$m(\eta) = \sum_{i=0}^3 m_i \eta^i; \alpha(\eta) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \eta^i. \quad (25)$$

Нахождение коэффициентов сопряжено с ожидаемыми предельными значениями $\delta^*(\infty, t_0)$ при характерных напряжениях $\delta_{л}$ и $\delta_{т}$, определяющих динамику по $\delta(t)$ относительных объемных деформаций $V(\sigma)/V(0)$ в процессе образования и развития трещин [30].

В [29] на основе экспериментов получена зависимость

$$\delta_0(\eta) = \sum_{i=0}^2 a_i \eta^i \quad (26)$$

между предельной глубиной δ_0 и уровнем η , где коэффициенты a_i выражаются через предельную глубину δ_* при $\sigma = 0$, наименьшую предельную глубину $\delta_{0,\min}$ при $\sigma = \sigma_{л}$ и предельную глубину $\delta_{0,\tau}$ при $\sigma = \sigma_{т}$.

В [1; 32] функция $\delta(t, t_0)$ представляется в виде

$$\delta(t, t_0) = \gamma[t, t_0, \eta(t)] \delta_0(t, t_0), \quad (27)$$

где $\delta(t, t_0)$ описывает динамику продвижения без учета силовых нагружений, а $\gamma[t, t_0, \eta(t)]$ — их влияние на этот процесс. Независимость от времени характерных плотностей $\rho[\sigma_{л}(t)]$ и $\rho[\sigma_{т}(t)]$ бетона влечет инвариантность от времени величин отношения $\delta(t, t_0)/\delta_0(t, t_0)$ при уровнях

$$\eta_{л} = \delta_{л}(t)/R(t) \text{ и } \eta_{т} = \frac{\delta_{т}(t)}{R(t)},$$

что позволяет определять коэффициенты γ_i функции $\gamma(t, t_0, \eta(t)) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \eta(t)^i$ по ее текущим экспериментальным значениям и свойствам $\gamma(0) = 1; \min \gamma(\eta) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \eta_{л}^i; \max \gamma(\eta) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \eta_{т}^i$ решением системы алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \gamma_1 \eta_{л} + \gamma_2 \eta_{л}^2 + \gamma_3 \eta_{л}^3 = \gamma(\eta_{л}) \\ 1 + \gamma_1 \eta_{т} + \gamma_2 \eta_{т}^2 + \gamma_3 \eta_{т}^3 = \gamma(\eta_{т}) \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 \eta_{л} + 3\gamma_3 \eta_{л}^2 = 0 \end{array} \right\}. \quad (28)$$

Замечание 6. Влияние уровня напряжений порождается динамикой появления и развития трещин, что сопряжено с разрывом связей и уменьшением энергии целостности бетонной компоненты конструктивных элементов.

Учет влияния уровня напряжений функцией $\gamma(\eta)$ проще и теснее связан с этой динамикой, нежели ее описание параметрами $\alpha(\eta), m(\eta)$.

Коррозионные повреждения влекут значительное уменьшение энергии целостности бетона. С учетом (19) для слоя на уровне z переходной зоны получим аналогичные (12) и (14) соотношения:

$$R^*(z, t, t_0) = \sqrt{\frac{K(z, t)E(t)}{K(z, t_0)E(t_0)[1 + E(t)C^*(t, t_0)]}} R^*(z, t_0); \quad (29)$$

$$R_{\text{дл}}^*(z) = \frac{R_{\text{кр}}^*(z)}{\sqrt{1 + \varphi}}. \quad (30)$$

Поскольку $W^*(z, t, t_0) = \frac{(1+V)R^2(z, t, t_0)}{E^*(t)} = \frac{(1+V)E^*(t)R^2(z, t_0)}{E^*(t)[1 + E(t)C^*(t, t_0)]E^*(t_0)}$,

а $W^*(z, t_0) = \frac{(1+V)R^2(z, t_0)}{E^*(t_0)}$, то получим равенство

$$W^*(z, t, t_0) = \frac{W^*(t_0, z)}{1 + E(t)C^*(t, t_0)}. \quad (31)$$

4. К вопросу конструктивной безопасности сооружений

Рассмотрим модель сооружения как стержневую систему $(C)_n$, нагруженную пульсационной нагрузкой $P(t)$ (рис. 2) и содержащую n связей C_i , последовательное удаление которых приводит к статически определимой системе C_0 .

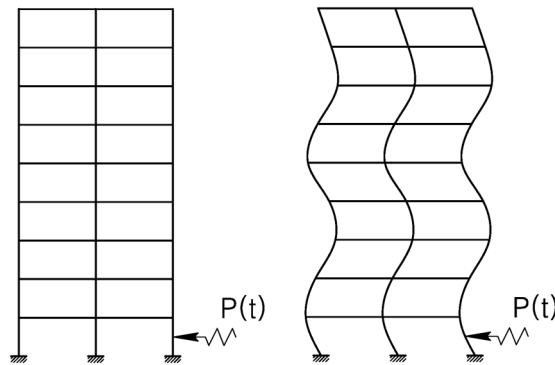


Рис. 2. Стержневая система под действием нагрузки $P(t)$

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Ларионовым, А.С. Марковичем.

Figure 2. Frame subjected to load $P(t)$

S o u r c e: made by E.A. Larionov, A.S. Markovich.

Под действием пульсационной нагрузки $P(t)$ система совершает вынужденные колебания, уравнения которых в приращениях получено в работе [33] и имеет вид

$$M\ddot{u}(t + \Delta t) + D\dot{u}(t + \Delta t) + (K_0 + K_\sigma)\Delta u = \Delta P + M\ddot{u}(t) + D\dot{u}(t), \quad (32)$$

где $\mathbf{M}$ — матрица масс; $\mathbf{D}$ — матрица демпфирования; $\Delta \mathbf{P}$ и $\Delta \mathbf{u}$ — векторы приращений нагрузки и перемещений при переходе конструкции из состояния в момент времени t в состояние в момент времени $t + \Delta t$.

При учете нелинейности деформирования усилия на каждом шаге должны корректироваться с учетом принятых моделей деформирования материалов, что может привести к нарушению условий равновесия. Возникающая при этом невязка может быть минимизирована с помощью итерационного процесса, который представляется в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{K}\Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t). \quad (33)$$

Вектор невязки $\mathbf{P}_{err,i-1}$ в момент времени $t + \Delta t$ находится как разность между текущим значением нагрузки $\mathbf{P}(t + \Delta t)$ и статическим эквивалентом внутренних сил, т. е.

$$\mathbf{P}_{err,i-1} = \mathbf{P}(t + \Delta t) - [\mathbf{P}_\sigma(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]. \quad (34)$$

Решение уравнения (33) с использованием метода Ньюмарка получено в работе [34].

Задача конструктивной безопасности сооружений должна решаться во временной области с учетом причины импульсного воздействия $\mathbf{P}(t)$ (удар, взрыв и т.д.), вызывающего вынужденные колебания сооружения и возможный отказ того или иного элемента конструкции. Без учета причины такого воздействия рассматриваемая задача лишена физического смысла.

Пусть в некоторый момент

$$\hat{W}_k(t) = W_k(t) - A_k(t) = 0 \quad (35)$$

и элемент C_k разрушается. При этом нагружение, приложенное к нему, догружает остальные элементы и возникает необходимость оценки внутренних усилий в их сечениях. Величина $\hat{W}_k(t)$ представляет энергетический резерв целостности и не зависит от режима разрушения C_k .

При медленном статическом разгрузении элемента C_k до нуля статическое напряжение $\sigma_n^c(t)$ и деформация $\varepsilon_n^c(t)$ целого элемента C_i возрастает до $\sigma_{n-1}^c(t)$ и $\varepsilon_{n-1}^c(t)$, а его внутренние силы согласно диаграмме $\sigma - \varepsilon$ совершают работу:

$$A_i^{sl}(t) = \int_{\varepsilon_n^c(t)}^{\varepsilon_{n-1}^c(t)} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (36)$$

Мгновенное разрушение связи C_k влечет импульсное догружение элементов системы $(C)_{n-1}$ и возрастание напряжения $\sigma_n^c(t)$ до импульсного напряжения $\sigma_{n-1}^u(t)$, порождающего импульсное приращение $\Delta \varepsilon^u$ к деформации ε_n^c . При этом совершается работа $A_i^u = \sigma_{n-1}^u \Delta \varepsilon^u$, влекущая уменьшение $\Delta \hat{W}_i$ резерва целостности $\hat{W}_i$ элемента C_i на величину A_i^u . Согласно диаграмме $\sigma - \varepsilon$:

$$\Delta \hat{W}_i = \int_{\varepsilon_n^c}^{\varepsilon_{n-1}^d} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon; \varepsilon_{n-1}^d = \varepsilon_n^c + \Delta \varepsilon^u \quad (37)$$

равенство

$$\int_{\varepsilon_n^c}^{\varepsilon_{n-1}^d} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \sigma_{n-1}^u \Delta \varepsilon^u \quad (38)$$

позволяет определение приращения $\Delta \varepsilon^u$, деформации ε_{n-1}^d и напряжения $\varepsilon_{n-1}^d = \sigma(\varepsilon_{n-1}^d)$. Величина $\Delta \sigma^d = \sigma_{n-1}^d - \sigma_n^c$ представляет динамическое догружение.

При импульсном догружении ΔM^u аналогично получим равенство

$$\int_{\varepsilon_n^c}^{\varepsilon_{n-1}^d} M(\varepsilon) d\varepsilon = M_{n-1}^u \Delta \varepsilon^u \quad (39)$$

для определения $\Delta \varepsilon^u$, M_{n-1}^d и ΔM^d .

В первом приближении обобщенные диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ и $M(\varepsilon)$ описываются квадратной параболой [11; 14; 22].

При $W_i(t) = A_i^{sl}(t) = \sigma_{n-1}^c(t) [\varepsilon_{n-1}^c(t) - \varepsilon_n^c(t)]$ согласно (35) $\hat{W}_i^c(t) = 0$ и элемент C_i разрушается при медленном разгрузке C_k .

Медленное или мгновенное распределение нагружения $P_{i,n-1}(t)$ на целые элементы $n-2$ кратно статически неопределимой системы $(C)_{n-2}$, порождая уменьшение резерва целостности $\hat{W}_{j,n-1}(t)$ элемента C_j ; $j \neq i, k$ на величину $A_j^{sl}(t) = \sigma_{n-2}^c(t) [\varepsilon_{n-2}^c(t) - \varepsilon_{n-1}^c(t)]$ или $A_j^d(t) = \sigma_{n-2}^d(t) [\varepsilon_{n-2}^d(t) - \varepsilon_{n-1}^c(t)]$ и при $\hat{W}_{j,n-1}(t) = 0$ элемент C_j также разрушится.

Таким образом, разрушение каждого элемента влечет уменьшение резерва целостности всех остальных элементов системы и может привести к исчерпанию (обнулению) резерва целостности еще некоторых элементов. Это обстоятельство порождает вероятность прогрессирующего характера разрушения системы $(C)_n$, инициированного обнулением резерва целостности $\hat{W}_k(t)$. Если $W_i(t) > A_i^d(t)$ для всех $i \neq k$, то все элементы из $(C)_{n-1}$ остаются целыми при мгновенном (и тем более медленном) обнулении $\hat{W}_k(t)$. В этом случае разрушение C_k является локальным. При $W_i(t) > A_i^d(t)$ для всех $i \neq k$ все элементы из $(C)_{n-1}$ также разрушаются и возможно имеет место полное разрушение конструкции.

Если разрушение элемента системы влечет последующее по времени разрушение еще некоторых ее элементов, возникает прогрессирующий процесс исчерпания резерва целостности конструкции.

Такой процесс при последовательных мгновенных разрушениях имеет лавинный характер. Возможные разрушения конструкции определяются энергиями целостности ее элементов и динамической распределения внешних (силовых и моментных) нагружений.

Возникшее вследствие импульсного догружения напряжение $\sigma_{n-1}^u(t)$ порождает импульсное приращение $\Delta \varepsilon_i^u(t)$ к деформации $\varepsilon_n^c(t)$. Сумма $\varepsilon_n^c + \Delta \varepsilon^u$ представляет динамическую деформацию $\varepsilon_{n-1}^d(t)$, которой согласно принятой диаграмме $\sigma_d - \varepsilon$ отвечает динамическое напряжение $\sigma_{n-1}^d(t)$. При динамическом догружении совершается работа $A_i^d(t)$, приводящая к тому же резерву целостности элемента C_i .

Согласно энергетической концепции, этот резерв не зависит от способа его достижения, что влечет равенство работ внутренних сил при импульсном и динамическом режимах.

В качестве количественной характеристики конструктивной безопасности элемента C_i и системы C_i $(C)_n$ вводятся функции [21]:

$$K_i(t) = \frac{\hat{W}_i(t)}{W_i(t)}; \quad (40)$$

$$K(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\hat{W}_i(t)}{W_i(t)}. \quad (41)$$

В (41) α_i — весовой коэффициент элемента C_i ; $\alpha_i = \frac{P_i(t)}{P}$ или $\alpha_i = \frac{M_i(t)}{M}$; P и M — постоянное силовое и моментное нагружения.

5. Результаты

Энергетические подходы в теории железобетона сопряжены с понятием энергии целостности.

1. Оценка безопасности конструкции определяется ее сопоставлением максимальной энергии сопротивления разрушению — энергии целостности, включающей в себя диссипацию вследствие работы внешних сил и коррозионных воздействий.

2. Энергия целостности представляет интегральный параметр состояния, и ее текущее значение отражает наличный ресурс силового сопротивления конструкции, а диссипация отражает уменьшения этого ресурса.

3. Процессу диссипации силового сопротивления сопоставляется динамика уменьшения энергии целостности. При этом остаточному силовому сопротивлению соответствует определяемый внешними силами и коррозионными воздействиями резерв целостности.

4. Для упругих материалов энергия целостности совпадает с накопленной при деформировании максимальной потенциальной энергией — энергетическим барьером, преодоление которого инициирует разрушение. Энергия целостности представляет энергетический барьер для упругопластичных тел, превышение которого над энергетическим барьером упругих тел влечет замедление процесса разрушения за счет пластических деформаций.

6. Заключение

В статье обсуждены вопросы длительного ресурса силового сопротивления железобетонных элементов для прогнозирования безопасности и живучести строительных конструкций и сооружений. На основе понятия энергии целостности как параметра энергетического состояния материала получены оценки длительной прочности и несущей способности по изгибу бетонных элементов и энергетическая оценка конструктивной безопасности железобетонных стержневых систем. Рассмотрена проблема коррозионного воздействия, влекущая значительную деградацию несущей способности железобетонных конструкций при неубывающем нагружении. Предложенный подход связан с диссипацией энергии целостности при силовых нагружениях и воздействиях окружающей среды.

Список литературы

1. Ларионов Е.А. К вопросу длительной прочности бетона // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2005. № 8. С. 28–33. EDN: PFAILF
2. Ларионов Е.А. Длительное силовое сопротивление и безопасность сооружений : дис. ... д-ра техн. наук. Москва, 2005. EDN: MEIJWK
3. Бондаренко В.М. Элементы диссипативной теории силового сопротивления железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 2. С. 47–57. EDN: RZRQOF
4. Бондаренко В.М., Колчунов В.И., Ключева Н.В. Еще раз о конструктивной безопасности и живучести зданий // Вестник отделения строительных наук РААСН. 2007. № 11. С. 81–86. EDN: VTCEFX

5. Бондаренко В.М., Ларионов Е.А. Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях элементов конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 2. С. 16–22. EDN: NUCYYV
6. Ларионов Е.А., Ларионов А.Е. К теории нелинейной ползучести // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 56–65. EDN: TQATUF
7. Ларионов Е.А., Ларионов А.Е. К теории нелинейной ползучести материалов // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 4. С. 35–39. EDN: ZBKRID
8. Ларионов Е.А., Рынковская М.И., Гринько Е.А. Реологические уравнения состояния бетона и релаксация напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 1. С. 22–34. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34> EDN: WXGEUF
9. Larionov E.A., Nazarenko V.G., Rynkovskaya M.I., Grinko E.A. Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 534–543. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543> EDN: HZXEBV
10. Васильев П.И. К вопросу выбора феноменологической теории ползучести бетона // Ползучесть строительных материалов и конструкций : Сборник статей. Москва : ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1964. С. 106–114.
11. Гениев Г.А., Колчунов В.И., Ключева Н.В., Никулин А.Н., Пятикрестовский К.П. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях. Москва : АСВ. 2004. 216 с. ISBN 5-93093-290-5
12. Ключева Н.В. Основы теории живучести железобетонных конструктивных систем при запроектных воздействиях. Дис. д.т.н., Москва, 2009. EDN: QEMFAR
13. Ключева Н.В. Расчет живучести коррозионно поврежденных железобетонных рам с односторонними связями // Academia. Архитектура и строительство. 2008. № 1. С. 94–99. EDN: ISIBGD
14. Колчунов В.И., Воробьев Е.Д. К анализу деформирования и разрушения эксплуатируемых балочных конструкций при запроектных воздействиях // Третья Международная научно-практическая конференция. Москва, 2005. С. 331–339.
15. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Proceedings of the Royal Society of London, Philosophical Transactions of the Royal Society. 1920. Vol. 221. P. 163. <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
16. Irwin G.R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24. No. 3. P. 361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
17. Orawan E.O. Some problems in ship construction // Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland. 1945. Vol. 89. P. 165.
18. Бондаренко В.М. Учет энергетической и коррозионной диссипации силового сопротивления при оценке устойчивости строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 2. С. 31–57. EDN: NSIXOD
19. Ларионов Е.А., Римшин В.И., Василькова Н.Т. Энергетический метод оценки устойчивости сжатых железобетонных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 77–81. EDN: OUWXYB
20. Ларионов Е.А. Устойчивость сжатого стержня с учетом диссипации энергии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 4. С. 48–57. EDN: TWQYTT
21. Ларионов Е.А., Бондаренко В.М. К вопросу конструктивной безопасности сооружений // Промышленное и гражданское строительство. 2006. № 1. С. 55–57. EDN: HTCQBJ
22. Бондаренко В.М., Ларионов Е.А. Оценка динамических напряжений и моментов в конструктивных элементах сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2006. № 2. С. 93–97. EDN: JSISSN
23. Алмазов В.О., Као З.К. Динамика прогрессирующего разрушения монолитных многоэтажных каркасов. Москва ; АСВ, 2014. 128 с. ISBN 978-5-93093-940-8
24. Алмазов В.О., Плотников А.И., Росторгуев Б.С. Проблемы сопротивления зданий прогрессирующему разрушению // Вестник МГСУ. 2011. № 2-1. С. 16–20. EDN: OUVYJV
25. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev Y.V. Dynamic effects in the beam on an elastic foundation caused by the sudden transformation of supporting condition // Inc. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14. No. P. 27–47. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-4-27-47> EDN: VPKHLB
26. Савин С.Ю., Федорова Н.В. Сопоставление методов расчета несущие системы на внезапный отказ одного из ее элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022 Т. 18. № 4. С. 329–340. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-329-340> EDN: WHZYBW
27. Housner G.W. Limit design of structures to resist earthquakes // I World Conference on Earthquake Engineering USA. 1956. Vol. V. P. 1–13.
28. Agapov V.P., A.S. Markovich. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable // South Florida Journal of Development. 2021. Vol. 2. No. 4. P. 5034–5048.

29. Селяев В.П., Окишина Л.М. Химическое сопротивление цементных композитов при совместном действии нагрузок и агрессивных сред. Саранск : Мордовский университет, 1997. 150 с. ISBN 5-7103-0631-2
30. Бондаренко В.М. Некоторые фундаментальные вопросы развития теории железобетона // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 2. С. 5–14. EDN: LDFSUR
31. Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. Москва : Стройиздат, 1962. 96 с. URL: <https://djvu.online/file/rHJaThqsWD6NS?ysclid=mq81vha7dg725663057> (Дата обращения: 27.03.2026).
32. Бондаренко В.М., Ларионов Е.А. К вопросу о глубине коррозионных повреждений бетона // Бетон и железобетон. 2005. № 4. С.18–21.
33. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. Москва : АСВ, 2004. 247 с. ISBN 5-93093-303-0
34. Агапов В.П., Маркович А.С., Жаззан М., Пхеаром К. Расчет на вынужденные колебания с учетом нелинейности деформирования: теория и реализация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 1. С. 16–27. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-22-1-16-27> EDN: IDQWOZ

References

1. Larionov EA. On the issue of long-term strength of concrete. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2005;(8):28–33. (In Russ.) EDN: PFAILF
2. Larionov EA. *Long-term mechanical resistance and safety of structures*. Dissertation, Doctor of Technical Sciences, Moscow, 2005. (In Russ.) EDN: MEIJWK
3. Bondarenko VM. The elements of dissipative theory of force resistance of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2014;2:47–57. (In Russ.) EDN: RZRQOF
4. Bondarenko VM, Kolchunov VI, Klyueva NV. Once again on the structural safety and survivability of buildings. *Bulletin of the Department of Construction Sciences of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences*. 2007;(11):81–86. (In Russ.) EDN: VTCEFX
5. Larionov EA, Bondarenko VM. Strains superposition principle when construction elements have structural damages. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2011;(2):16–22. (In Russ.) EDN: NUCYYV
6. Larionov EA, Larionov AE. Towards the theory of nonlinear creep. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2015;(2):56–65. (In Russ.) EDN: TQATUF
7. Larionov EA, Larionov AE. On the theory of nonlinear creep of materials. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2017;(4):35–39. (In Russ.) EDN: ZBKRID
8. Larionov EA, Rynkovskaya MI, Grinko EA. Rheological equations of concrete state and relaxation of stress. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(1):22–34. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-1-22-34> EDN: WXGEUF
9. Larionov EA, Nazarenko VG, Rynkovskaya MI, Grinko EA. Relaxation of stress in elements of reinforced concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):534–543. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-534-543> EDN: HZXEBC
10. Vasiliev PI. On the issue of choosing a phenomenological theory of concrete creep. *Creep of Building Materials and Structures: Collection of articles*. Moscow: V.A. Kucherenko Central Research Institute of Building Structures; 1964. p. 106–114. (In Russ.)
11. Geniev GA, Kolchunov VI, Klyueva NV, Nikulin AN, Pyatikrestovsky KP. *Strength and deformability of reinforced concrete structures in beyond-design-basis events*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.) ISBN 5-93093-290-5
12. Klyueva NV. *Fundamentals of the theory of survivability of reinforced concrete structural systems in beyond-design-basis events*. Doctoral thesis, Moscow, 2009. (In Russ.)
13. Klyueva NV. Calculation of survivability of corrosion-damaged reinforced concrete frames with unilateral connections. *Academia. Architecture and Construction*. 2008;(1):94–99. (In Russ.) EDN: ISIBGD
14. Kolchunov VI, Vorobyov ED. On the analysis of deformation and destruction of operated beam structures under out-of-design impacts. *Third International Scientific and Practical Conference*. Moscow, 2005. p. 331–339. (In Russ.)
15. Griffith AA. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Philosophical Transactions of the Royal Society*. 1920;221:163. <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
16. Irwin GR. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957;24(3):361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
17. Orawan EO. Some problems in ship construction. *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland*. 1945;89:165.
18. Bondarenko VM. Accounting of energy and corrosive dissipation of power resistance while estimating stability of building structures. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2011;(2):31–57. (In Russ.) EDN: NSIXOD
19. Larionov EA, Rimshin VI, Vasilkova NT. Energy method of estimation of stability of pressed reinforced concrete elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012;(2):77–81. (In Russ.) EDN: OUWXYB

20. Larionov EA. Taking into account the energy dissipation for compressed rod stability. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015;(4):48–57. (In Russ.) EDN: TWQYTT
21. Larionov EA, Bondarenko VM. On the issue of structural safety of buildings. *Industrial and Civil Engineering*. 2006;(1):55–57. (In Russ.) EDN: HTCQBJ
22. Bondarenko VM, Larionov EA. Estimation of dynamic stresses and moments in structural elements of buildings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2006;(2):93–97. (In Russ.) EDN: JSISSN
23. Almazov VO, Kao ZK. *Dynamics of progressive failure of cast-in-situ multi-storey structures*. Moscow: ACB Publ.; 2014. (In Russ.) ISBN 978-5-93093-940-8
24. Almazov VO, Plotnikov AI, Rostorguev BS. Problems of building's strength to progressive collapse. *Vestnik MGSU*. 2011;2-1:16–20. (In Russ.) EDN: OUVYJV
25. Travush VI, Gordon VA, Kolchunov VI, Leontiev YV. Dynamic effects in the beam on an elastic foundation caused by the sudden transformation of supporting condition. *Inc. Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018;14(4):27–47. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-4-27-47> EDN: VPKHLB
26. Savin SYu, Fedorova NV. Comparison of methods for analysis of structural systems under sudden removal of a member. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):329–340. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-329-340> EDN: WHZYBW
27. Housner GW. Limit design of structures to resist earthquakes. *I World Conference on Earthquake Engineering USA*. 1956;V:1–13.
28. Agapov VP, Markovich AS. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048.
29. Selyaev VP, Okshina LM. *Chemical resistance of cement composites under the combined action of loads and aggressive media*. Saransk: Mordovian University; 1997. (In Russ.) ISBN 5-7103-0631-2
30. Bondarenko VM. Some fundamental issues of the development of the theory of reinforced concrete. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2010;(2):5–14. (In Russ.) EDN: LDFSUR
31. Berg OYa. *The physical foundations of the theory of strength of concrete and reinforced concrete*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1962. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/rHJaThqsWD6NS?ysclid=mq81vha7dg725663057> (accessed: 27.03.2026).
32. Bondarenko VM, Larionov EA. On the issue of the depth of corrosion damage to concrete. *Concrete and Reinforced Concrete*. 2005;(4):18–21. (In Russ.)
33. Agapov VP. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.) ISBN 5-93093-303-0
34. Agapov VP, Markovich AS, Jazzan M, Phearom K. Analysis of forced vibrations taking into account nonlinear deformation: Theory and implementation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1): 16–27. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-22-1-16-27> EDN: IDQWOZ