

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-4-317-330

EDN: LKNCQZ

Научная статья / Research article

Конечноэлементное моделирование динамического деформирования двухнаправленных функционально градиентных балок

И.Н. Вассерман[✉], И.О. Глот^{id}, И.Н. Шардаков^{id}

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

✉ igorw@icmm.ru

Поступила в редакцию: 4 июня 2026 г.

Доработана: 22 июля 2026 г.

Принята к публикации: 25 июля 2026 г.

Аннотация. Представлен конечно-элементный алгоритм численного решения краевых задач о деформационном состоянии упругих балок из функционально градиентных материалов. Предполагается, что плотность и упругие свойства балки зависят от координат поперечного сечения и от координаты вдоль продольной оси. Данная постановка допускает возможность решения статических и динамических задач. Для описания деформированного состояния балки использована модель Эйлера — Бернулли и модель третьего порядка Редди. В балочном конечном элементе применена эрмитова аппроксимация. С помощью вариационного принципа Гамильтона получено уравнение движения балки в матричном виде. Численная реализация полученного конечно-элементного алгоритма осуществлена на языке Python с использованием библиотек Numpy и Scipy. В качестве примера осуществлен численный анализ решения задачи о частотах собственных колебаний двухнаправленной функционально-градиентной консольной балки. Продемонстрирована численная сходимость полученных решений и их достоверность. Показана возможность взаимосвязи продольных колебаний балки с поперечными при некоторых распределениях физических свойств материала в поперечном сечении балки. Показано, что распределение свойств материала вдоль продольной оси позволяет улучшить динамические свойства балки.

Вклад авторов. Нераздельное соавторство. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Ключевые слова: функционально градиентные материалы, теории балок, метод конечных элементов.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в опубликованную статью.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

Для цитирования: Вассерман И.Н., Глот И.О., Шардаков И.Н. Конечноэлементное моделирование динамического деформирования двухнаправленных функционально градиентных балок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 4. С. 317–330. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-317-330> EDN: LKNCQZ

Вассерман Игорь Николаевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Российская Федерация, 614000, г. Пермь, ул. Ленина, д.13А; eLIBRARY SPIN-код: 1961-6243, ORCID: 0000-0001-7799-7521; e-mail: igorw@icmm.ru
Глот Ирина Олеговна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Российская Федерация, 614000, г. Пермь, ул. Ленина, д.13А; eLIBRARY SPIN-код: 3231-7996, ORCID: 0000-0002-2842-7511; e-mail: glot@icmm.ru
Шардаков Игорь Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Российская Федерация, 614000, г. Пермь, ул. Ленина, д.13А; eLIBRARY SPIN-код: 4809-4776, ORCID: 0000-0001-8673-642X; e-mail: shardakov@icmm.ru

© Вассерман И.Н., Глот И.О., Шардаков И.Н., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Finite Element Modeling of Dynamic Deformation of Bidirectional Functionally Graded Beams

Igor N. Vasserman[✉], Irina O. Glot^{ID}, Igor N. Shardakov^{ID}

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (UB RAS), Perm, Russian Federation
✉ igorw@icmm.ru

Received: June 4, 2026

Revised: July 22, 2026

Accepted: July 25, 2026

Abstract. This article presents a finite element algorithm for the numerical solution of boundary value problems for the deformation state of elastic beams made of functionally graded materials. The presented algorithm assumes that the density and elastic properties of the beam depend on the coordinates of the cross-section and on the coordinate along the longitudinal axis. The presented formulation allows to solve static and dynamic problems. The Euler-Bernoulli model and the third-order Reddy model are used to describe the deformation state of the beam. The beam finite element utilizes a Hermitian approximation. Using Hamilton's variational principle, the beam equation of motion is obtained in matrix form. The numerical implementation of the resulting finite element algorithm is carried out in Python using the Numpy and Scipy libraries. As an example, a numerical analysis of the solution to the problem of the natural frequencies of vibrations of a bidirectional functionally graded cantilever beam is performed. The numerical convergence and reliability of the obtained solutions are demonstrated. The possibility of coupling of the longitudinal and transverse vibrations of a beam is demonstrated for certain distributions of the physical properties of the material in the beam's cross-section. It is shown that distributing the material properties along the longitudinal axis improves the beam's dynamic properties.

Keywords: functionally gradient materials, beam theories, finite element method

Authors' contribution. Undivided co-authorship. All authors have read and approved the final version of the manuscript.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the published article.

Funding. The research was carried out under the state assignment, the registration number of the topic is 124020700047-3.

For citation: Vasserman IN, Glot IO, Shardakov IN. Finite element modeling of dynamic deformation of bidirectional functionally graded beams. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(4):317–330. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-4-317-330> EDN: LKNCQZ

1. Введение

Функционально градиентные материалы (FGM) представляют собой класс композитов, свойства которых могут изменяться непрерывно и гладко, по крайней мере, в одном пространственном направлении. Изменения свойств могут быть обусловлены составом, пористостью, микроструктурой. Эти материалы позволяют сочетать оптимальным образом свойства компонентов, минимизировать концентрацию напряжений в зоне контакта разных материалов [1; 2]. В отличие от слоистых композитов они лучше сопротивляются развитию трещин и расслоению [3].

Концепция функционально градиентных материалов была предложена еще в 70-х гг. прошлого века [4]. Однако эта идея в то время еще не получила практического развития из-за отсутствия соответствующих технологий. Она нашла практическое воплощение в следующем десятилетии в Японии в работах над аэрокосмическим проектом [5; 6], в котором требовалось создание термического барьера в стенке конструкции на толщине 10 мм. В настоящее время функционально градиентные материалы привлекают все большее внимание исследователей во всем мире.

Примеры применения функционально градиентных материалов можно найти в [7]. Среди них протезы, сочетающие механическую прочность во внутренних и биосовместимость во внешних слоях [8], функционально градиентные лопатки турбомашин и ветрогенераторов [9], укрепление стенок горных выработок [10], пьезоэлектрические элементы вибрационного контроля конструкций [11], микросенсоры и микроактюаторы, в нано- и микроэлектромеханических системах [12].

В последнее время возрос интерес к использованию функционально градиентных материалов в строительных конструкциях [13]. В частности, большое внимание уделяется созданию конструкций из

функционально градиентного бетона. Рациональное распределение содержания цемента в конструкции позволяет снизить ее себестоимость и затраты энергии на изготовление [14], уменьшить технологические напряжения и предотвратить растрескивание в процессе застывания [15]. Аддитивные технологии и 3D-печать, часто используемые при создании градиентных материалов [16; 17], вполне естественны для конструкций из бетона [18–20].

Часто неоднородность функционально градиентных материалов, применяемых в строительных конструкциях, обусловлена пористостью [21]. Конструкции из таких материалов обладают хорошим соотношением вес/прочность, а также хорошими вибро- и шумопоглощающими свойствами. Вместе с тем теории функционально градиентных пористых материалов могут использоваться при моделировании распределенных дефектов.

Элементы строительных конструкций часто представляют собой балки прямоугольного сечения, как правило, малой и средней длины. Рассмотрение их как пространственных трехмерных конструкций приводит к неоправданным вычислительным затратам. Самой ранней и наиболее распространенной теорией балок является классическая теория Эйлера — Бернулли, в которой поперечное сечение предполагается перпендикулярным к нейтральной оси балки. В ней не учитывается сдвиг поперечного сечения, она пригодна для длинных гибких балок с большим отношением продольного размера к поперечным. Для балок малой и средней длины, а также для случаев, когда предполагаемая форма деформирования нейтральной оси балки сопоставима с размерами ее поперечного сечения, этой теории недостаточно. Теория балок первого порядка (Тимошенко) позволяет исследовать такие объекты. Однако для нее требуется знание дополнительного параметра — коэффициента сдвиговой коррекции, который не может быть найден в рамках этой теории. Кроме того, поскольку сдвиговая деформация в сечении предполагается постоянной, граничные условия отсутствия касательных напряжений на границе поперечного сечения не выполняются [22]. Все упомянутые проблемы особенно актуальны для неоднородных, в том числе функционально градиентных балок.

От многих недостатков избавлены теории сдвиговой деформации высшего порядка. В них распределение перемещений по сечению нелинейно и обеспечивает равенство нулю сдвиговых напряжений на свободной границе [23–25]. Одной из таких теорий является теория третьего порядка Редди [26].

Приведенный обзор свидетельствует о возросшей необходимости в разработке и реализации эффективных численных алгоритмов решения статических и динамических краевых задач деформирования конструкций из функционально градиентных материалов. Возможности известных программных средств ANSYS, COMSOL для решения таких задач являются весьма ограниченными.

Большинство статей по динамике рассматриваемых конструкций посвящено однонаправленным функционально градиентным балкам. Двухнаправленные функционально градиентные балки исследуются в небольшом числе работ [27–30]. В них используется аппроксимация перемещений и углов поворота рядами функций, заранее удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Такой подход обеспечивает хорошую точность, но сильно уменьшает универсальность численного метода. Это особенно важно, если балка рассматривается не как уединенный объект, а часть более сложной конструкции. Метод конечных элементов дает единый подход для балок с разными граничными условиями.

В данном исследовании представлена вариационная формулировка и реализован метод конечных элементов для балок из функционально градиентных материалов. Рассмотрена неоднородная балка, физические свойства которой могут изменяться как в поперечном сечении, так и вдоль продольной оси. Будем называть ее двухнаправленной функционально градиентной балкой. Для описания деформированного состояния этой балки использованы модель Эйлера — Бернулли и модель третьего порядка Редди [26]. В балочном конечном элементе использована эрмитова аппроксимация. Численная реализация полученного конечно-элементного алгоритма осуществлена на языке Python. Осуществлен численный анализ решения задачи о собственных формах и частотах колебаний двухнаправленной функционально градиентной балки. Продемонстрирована численная сходимость полученных решений и их достоверность. Показана возможность взаимосвязи продольных колебаний балки с поперечными при определенных видах распределения физических свойств материала в поперечном сечении балки.

2. Методы

В строительной практике широко распространены балки прямоугольного сечения (рис. 1). На рисунке показаны оси координат и характерные размеры конструкции.

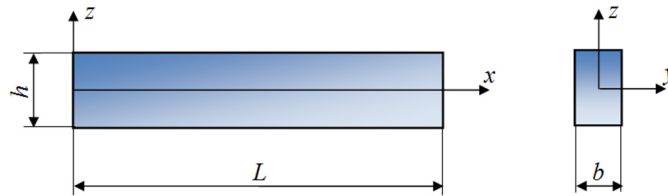


Рис. 1. Двухнаправленная функционально градиентная балка прямоугольного сечения

И с т о ч н и к: выполнено И.Н. Вассерманом, И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

Здесь L — длина балки; h и b — высота и ширина. Направление координатных осей: x — направлена вдоль продольной оси балки; z — в плоскости изгиба перпендикулярно оси балки; y — перпендикулярно плоскости изгиба.

2.1. Свойства функционально градиентного материала

Типичный функционально градиентный материал представляет собой композит, состоящий из частиц с заданным непрерывным распределением объемных фракций составляющих фаз. В случае изотропных фаз материал является изотропным, но неоднородным.

Среди моделей, описывающих эффективные свойства материала на основе свойств его компонент, самой распространенной и простой является модель Фойхта (правило смесей):

$$P_f = P_1 V_1 + P_2 V_2, \quad (1)$$

где P_f — эффективное свойство материала; P_i — свойство чистой i -й компоненты материала; V_i — объемное содержание чистой i -й компоненты материала. Выполняется соотношение $V_1 + V_2 = 1$. В качестве свойства P могут выступать модуль Юнга материала E , его модуль сдвига G и массовая плотность ρ . Существует и ряд других моделей описания эффективных свойств материала, их обзор можно найти в [31].

При умеренной пористости можно также использовать теорию смесей:

$$P_f = P_{f0}(1 - V_0), \quad (2)$$

где P_{f0} — эффективное свойство материала без пор, вычисляемое согласно (1), V_0 — объемная доля пор. Более сложные зависимости свойств материала от пористости, учитывающие структуру пор, можно найти в [13, табл. 3] и в [21].

2.2. Модели деформирования балок

В классической теории Эйлера — Бернулли распределение перемещений по сечению имеет вид

$$u_x(x, z) = u^0(x) - z w_{,x}^0(x); \quad (3)$$

$$u_z(x, z) = w^0(x). \quad (4)$$

Здесь u_x и u_z — продольное и поперечное перемещения произвольной точки стержня; u^0 и w^0 — продольное и поперечное перемещения точки центральной оси стержня.

Энергия деформирования и кинетическая энергия для них записываются в соответствии с [32], как

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[D_{11} (u_{,x}^0)^2 + 2D_{12} (u_{,x}^0) (w_{,xx}^0) + D_{22} (w_{,xx}^0)^2 \right] dx \quad (5)$$

И

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_{11} (\dot{u}^0)^2 + I_{11} (\dot{w})^2 + 2I_{12} (\dot{u}^0) (\dot{w}_{,x}^0) + I_{22} (\dot{w}_{,x}^0)^2 \right] dx, \quad (6)$$

где D_{11} , D_{12} , D_{22} , I_{11} , I_{12} , I_{22} — интегральные характеристики сечения, вычисляемые как

$$D_{11}(x) = \int_A E(x, z) dA; \quad D_{12}(x) = - \int_A E(x, z) z dA; \quad D_{22}(x) = \int_A E(x, z) z^2 dA, \quad (7)$$

$$I_{11}(x) = \int_A \rho(x, z) dA; \quad I_{12}(x) = - \int_A \rho(x, z) z dA; \quad I_{22}(x) = \int_A \rho(x, z) z^2 dA. \quad (8)$$

Видно, что, в отличие от однородных балок, в случае несимметричного распределения материала по высоте появляются члены, связывающие продольные и поперечные колебания.

В теориях высшего порядка распределение перемещений по сечению может быть представлено следующим образом [22–26]:

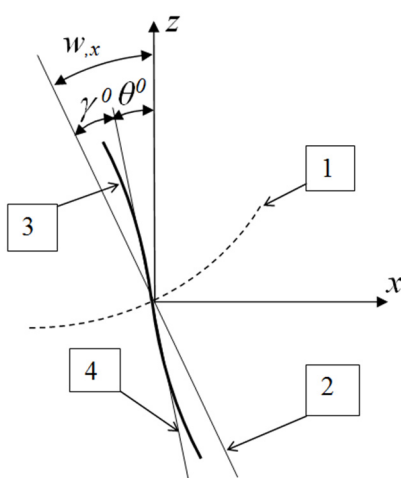


Рис. 2. Деформация поперечного сечения балки:

1 — срединная линия; 2 — нормальная плоскость; 3 — деформированное поперечное сечение; 4 — плоскость, касательная к деформированному поперечному сечению в точке ее пересечения со срединной линией

И с т о ч н и к: выполнено И.Н. Вассерманом,
И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

$$u_x(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) + \Phi(z)\gamma^0(x), \quad (9)$$

$$u_{\tau}(x, z) = w^0(x). \quad (10)$$

Здесь

$$\gamma^0(x) = w_x^0(x) - \theta^0(x) \quad (11)$$

— поперечная сдвиговая деформация точки на нейтральной оси балки; θ^0 — общее изгибное вращение поперечного сечения на нейтральной оси; $\Phi(z)$ — корректирующая функция. Углы θ^0 и γ^0 показаны на рис. 2.

Функция $\Phi(z)$ зависит от поперечного сечения и выбирается так, чтобы удовлетворялись условия равенства нулю сдвиговых напряжений на границе. Если $\Phi(z)=0$, то получается теория Эйлера — Бернулли, если $\Phi(z)=z$ — теория Тимошенко. Для теории третьего порядка Редди [26] корректирующая функция имеет вид

$$\Phi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right). \quad (12)$$

Энергия деформирования балки прямоугольного сечения может быть представлена в виде [24]

$$U_R = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{xx} (u_{,x}^0)^2 - 2B_{xx} (u_{,x}^0) (w_{,xx}^0) + 2E_{xx} (u_{,x}^0) (\gamma_{,x}^0) + D_{xx} (w_{,xx}^0)^2 - \right. \\ \left. - 2F_{xx} (w_{,xx}^0) (\gamma_{,x}^0) + H_{xx} (\gamma_{,x}^0)^2 + A_{xz} (\gamma^0)^2 \right] dx, \quad (13)$$

соответственно, кинетическая энергия:

$$K_R = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_A (\dot{u}^0)^2 - 2I_B (\dot{u}^0) (\dot{w}_{,x}^0) + 2I_E (\dot{u}^0) (\dot{\gamma}^0) + I_D (\dot{w}_{,x})^2 - \right. \\ \left. - 2I_F (\dot{w}_{,x}^0) (\dot{\gamma}^0) + I_H (\dot{\gamma}^0)^2 + I_A (\dot{w}^0)^2 \right] dx, \quad (14)$$

где A_{xx} , B_{xx} , D_{xx} , I_A , I_B , I_D — интегральные характеристики сечения, аналогичные величинам D_{11} , D_{12} , D_{22} , I_{11} , I_{12} , I_{22} для балок Бернулли:

$$A_{xx}(x) = \int_A E(x, z) dA; \quad B_{xx}(x) = \int_A E(x, z) z dA; \quad D_{xx}(x) = \int_A E(x, z) z^2 dA, \quad (15)$$

$$I_A(x) = \int_A \rho(x, z) dA; \quad I_B(x) = \int_A \rho(x, z) z dA; \quad I_D(x) = \int_A \rho(x, z) z^2 dA. \quad (16)$$

где E_{xx} , F_{xx} , H_{xx} , I_E , I_F , I_H — интегральные характеристики сечения, содержащие корректирующую функцию $\Phi(z)$:

$$E_{xx}(x) = \int_A E(x, z) \Phi(z) dA; \quad F_{xx}(x) = \int_A E(x, z) \Phi(z) z dA; \quad H_{xx}(x) = \int_A E(x, z) (\Phi(z))^2 dA; \quad (17)$$

$$I_E(x) = \int_A \rho(x, z) \Phi(z) dA; \quad I_F(x) = \int_A \rho(x, z) \Phi(z) z dA; \quad I_H(x) = \int_A \rho(x, z) (\Phi(z))^2 dA, \quad (18)$$

где A_{xz} — интегральная характеристика сечения, относящаяся к вкладу сдвиговых деформаций, содержащая производную корректирующей функции по z :

$$A_{xz}(x) = \int_A G(x, z) (\Phi_{,z}(z))^2 dA. \quad (19)$$

В выражениях (5, 6, 13, 14) члены D_{12} , I_{12} , B_{xx} , I_B , E_{xx} , I_E осуществляют связь продольных и поперечных колебаний. В случае симметричного относительно центральной оси распределения материала по поперечному сечению они равны нулю, и соответствующие колебания оказываются несвязанными. При асимметричном распределении свойств материала распределение продольных напряжений также будет асимметричным, что приводит к связыванию изгиба и растяжения балки. Если рассматривать изгиб не вокруг геометрического центра сечения, а вокруг физического z_c , для которого $\int_A E(z)(z - z_c) dA = 0$, то изгиб и растяжение для статических задач можно развязать. Подход, позволяю-

щий развязать изгиб и растяжение для теории изгиба высшего порядка, предложен в [33]. Однако для динамических задач привести таким образом к нулю одновременно D_{12} и I_{12} , B_{xx} и I_B , E_{xx} , и I_E можно, только если отношение модуля Юнга к плотности является постоянным по сечению. В общем случае взаимодействие изгиба и растяжения будет иметь место независимо от выбора срединной линии. Упомянутое взаимодействие следует отличать от тесно связанного с эйлеровой неустойчивостью влияния продольной нагрузки на частоту свободных поперечных колебаний.

2.3. Конечноэлементная аппроксимация и численное решение

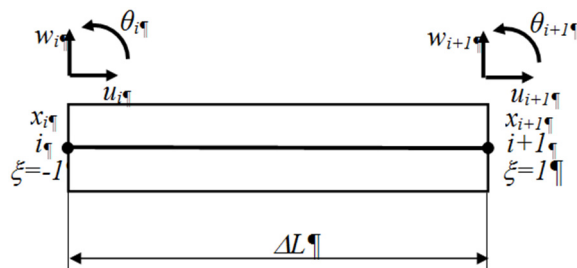


Рис. 3. Балочный элемент с двумя узлами

Источник: выполнено И.Н. Вассерманом.

И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

Для численного решения задачи о свободных колебаниях используется метод конечных элементов. Схема элемента показана на рис. 3.

В каждом узле представлены u_i , w_i , $w'_i = (\partial w / \partial x)_i$. В модели Редди к узловым неизвестным добавлены либо общее изгибное вращение в узле θ_i , либо поперечная сдвиговая деформация точки на нейтральной оси γ_i . Будем эти варианты модели Редди называть θ — версией и γ — версией соответственно.

Для конечноэлементной аппроксимации продольных перемещений и общих изгибных вращений сечения принята аппроксимация Лагранжа, для поперечных перемещений — аппроксимация Эрмита.

$$u^0 = u_1 N_1 + u_2 N_2, \quad (20)$$

$$\phi^0 = \phi_1 N_1 + \phi_2 N_2, \text{ или } \gamma^0 = \gamma_1 N_1 + \gamma_2 N_2, \quad (21)$$

$$w^0 = w_1 H_1 + w_2 H_3 + w'_1 \hat{H}_2 + w'_2 \hat{H}_4. \quad (22)$$

Здесь

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (23)$$

$$H_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3); \quad H_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3); \quad H_3 = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3); \quad H_4 = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3). \quad (24)$$

Используя выражения для энергии деформации, кинетической энергии (4, 5, 11, 12), принцип Гамильтона и конечноэлементную аппроксимацию, уравнение движения можно привести к матричному виду:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (25)$$

где $\mathbf{K}$ — матрица жесткости; $\mathbf{M}$ — матрица масс; $\mathbf{q}(t)$ — вектор узловых перемещений, $\mathbf{F}(t)$ — вектор внешних сил. При рассмотрении свободных колебаний вектор внешних сил равен нулю, а вектор узловых перемещений может быть представлен как

$$\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}} \cos(\omega t + \varphi), \quad (26)$$

где ω — круговая частота собственных колебаний балки, φ — фаза, вектор $\tilde{\mathbf{q}}$ не зависит от времени. В результате можно получить частотное уравнение в виде

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

Локальные матрицы жесткости и масс элемента вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Delta L} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dL, \quad (28)$$

$$\mathbf{m}^e = \int_{\Delta L} \mathbf{N}^T \mathbf{I}_\rho \mathbf{N} dL. \quad (29)$$

Сборка глобальных матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ из локальных матриц $\mathbf{k}^e$ и $\mathbf{m}^e$ производится стандартным образом [34].

Для модели Бернулли:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\mathbf{I}_\rho = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & I_{12} \\ 0 & I_{11} & 0 \\ I_{12} & 0 & I_{22} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & \hat{H}_2 & 0 & H_3 & \hat{H}_4 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ & H''_1 & \hat{H}''_2 & & H''_3 & \hat{H}''_4 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Для моделей высшего порядка:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} A_{xx} & -B_{xx} & E_{xx} & 0 \\ -B_{xx} & D_{xx} & -F_{xx} & 0 \\ E_{xx} & -F_{xx} & H_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{xz} \end{bmatrix}; \quad (34)$$

$$\mathbf{I}_\rho = \begin{bmatrix} I_A & -I_B & I_E & 0 \\ -I_B & I_D & -I_F & 0 \\ I_E & -I_F & I_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_A \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Матрицы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$ для θ — версии вычисляются как

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & 0 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 & 0 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & -N_1 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 & -N_2 \\ 0 & H_1 & \hat{H}_2 & 0 & 0 & H_3 & \hat{H}_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H''_1 & \hat{H}''_2 & 0 & 0 & H''_3 & \hat{H}''_4 & 0 \\ 0 & H''_1 & \hat{H}''_2 & -N'_1 & 0 & H''_3 & \hat{H}''_4 & -N'_2 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & -N_1 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 & -N_2 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

а для γ -версии:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H'_1 & \hat{H}'_2 & 0 & 0 & H'_3 & \hat{H}'_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \\ 0 & H_1 & \hat{H}_2 & 0 & 0 & H_3 & \hat{H}_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H''_1 & \hat{H}''_2 & 0 & 0 & H''_3 & \hat{H}''_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Здесь $\hat{H} = \frac{\Delta L}{2}$, $N' = \frac{\partial N}{\partial x}$, $H' = \frac{\partial H}{\partial x}$, $H'' = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$, где ΔL — длина элемента.

Программа на основе метода конечных элементов была реализована на языке Python (версия 2.7.13) с использованием библиотек NumPy (версия 1.11.3) и SciPy (версия 0.18.11). В качестве прототипа ис-

пользовались программы из [34]. Из этой книги была взята общая структура программ сборки матриц конечных элементов с заменой матричных операций Matlab на соответствующие функции Numpy. Переход от Matlab к Python объясняется свободным доступом к последнему. В качестве решателя задачи на собственные значения была взята функция *scipy.linalg.eig* с установками по умолчанию. Интегрирование матриц конечных элементов (28, 29) проводилось с помощью схемы Гаусса с числом точек $np = 2$. Вычисление характеристик поперечного сечения (7, 8, 15–19) осуществлялось с помощью схемы интегрирования Гаусса — Лагранжа (аналог схемы Гаусса, включающий в себя точки по краям интервала) с числом точек $nh = 11$.

3. Результаты и обсуждение

В приведенных ниже примерах продемонстрированы результаты решения задачи о собственных колебаниях консольной балки из функционально градиентного материала, свойства которого изменяются как в поперечном, так и в продольном направлении. Балка имеет прямоугольное сечение. В общем пространственное распределение свойств материала балки описывается формулами:

$$E(x, z) = f_E(z) \exp\left(\frac{\tilde{\beta}x}{L}\right); \quad \rho(x, z) = f_\rho(z) \exp\left(\frac{\tilde{\beta}x}{L}\right), \quad (40)$$

где $\tilde{\beta}$ — характеристика, определяющая интенсивность изменения свойств материала балки вдоль ее оси; $f_E(z) = E(0, z)$ и $f_\rho(z) = \rho(0, z)$ — функции, характеризующие изменение модуля Юнга и массовой плотности в поперечном направлении; L — длина балки.

Здесь экспоненциальное уменьшение модуля Юнга и массовой плотности в направлении x от сечения с заделкой к свободному концу согласно (2) может быть обусловлено увеличением пористости в этом направлении по закону

$$V_0 = 1 - \exp\left(\frac{\tilde{\beta}x}{L}\right) \quad (41)$$

при $\tilde{\beta} < 0$.

В направлении оси z изменение свойств материала обусловлено различным содержанием компонент и является асимметричным относительно центральной линии балки. Функции f_E , f_ρ вычислялись в соответствии с (1), где содержание компонент изменялось согласно степенному закону:

$$V_2 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \quad V_1 = 1 - V_2, \quad (42)$$

где k — неотрицательный показатель степени. На нижней поверхности материал представлен только первой компонентой, на верхней — только второй.

Для балки, рассчитываемой по модели Редди, коэффициент Пуассона ν считался постоянным, а модуль сдвига вычислялся как

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (43)$$

Получены безразмерные частоты

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{B}{D}}, \quad (44)$$

где ω — круговая частота собственных колебаний балки, L — длина балки, B , D — интегральные характеристики сечения, вычисляемые по формулам

$$B = b \int_{-h/2}^{h/2} f_p dz, \quad D = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 f_E dz, \quad (45)$$

где b и h — ширина и высота балки соответственно.

В рассмотренных примерах для описания материала балки были использованы материальные константы [32], соответствующие свойствам стали на нижней поверхности и окиси алюминия на верхней: $E_l = 210$ ГПа, $\rho_l = 7800$ кг/м³, $E_u = 390$ ГПа, $\rho_u = 3980$ кг/м³. Коэффициент Пуассона был взят равным 0,3, показатель степени k в соотношении (42) равен 3.

Далее представлены результаты расчета приведенных частот собственных колебаний балки, полученные с использованием различных моделей.

Табл. 1 содержит значения собственных частот для балки, неоднородной в двух направлениях ($\beta = -1$), полученные без учета перекрестной связи продольных и поперечных колебаний. Численное решение по упрощенной модели Бернулли (без учета инерции вращения поперечного сечения относительно нейтральной оси балки) практически совпадает с результатом аналитического решения [30]. Учет инерции вращения в случае коротких балок приводит к значительному снижению собственных частот, особенно для высших мод.

Таблица 1. Безразмерные собственные частоты поперечных колебаний (модель Бернулли) ($\beta = -1$)

Мода	Аналитическое решение [30]	Конечноэлементное решение по упрощенной модели	С учетом инерции вращения $L/h = 5$	С учетом инерции вращения $L/h = 10$	С учетом инерции вращения $L/h = 20$
1	4,7349	4,7349	4,6924	4,7242	4,7323
2	24,2018	24,2018	23,049	23,8984	24,1250
3	63,8645	63,8645	57,2544	61,9988	63,3825
4	123,0979	123,0981	102,2526	116,6982	121,4002

И с т о ч н и к: выполнено И.Н. Вассерманом, И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

Асимметричное относительно срединной линии распределение физических свойств материала приводит к взаимному увязыванию продольных и поперечных колебаний. В табл. 2 приведены частоты собственных колебаний функционально градиентной балки. В столбцах 1 и 2 выписаны значения, полученные по модели, пренебрегающей взаимным влиянием изгибных и продольных колебаний, а в столбце 3 — по модели, учитывающей этот фактор. В столбце 4 сопоставлены амплитуды продольных и поперечных колебаний, вычисленные по полной модели Бернулли. Из таблицы видно, что учет взаимного влияния продольных и изгибных колебаний неоднородной балки приводит к уменьшению значений собственных частот, и этот фактор более значим для высших мод.

Таблица 2. Взаимодействие продольных и поперечных колебаний (модель Бернулли) $\beta = -1$

Мода	Поперечные колебания с учетом инерции вращения	Продольные колебания	Полная модель Бернулли	$ u _{\max}$
1	4,6924		4,6143	0,016
2	23,049		22,5405	0,09
3		31,8648	32,0069	4,6
4	57,2544		55,6523	0,12
5		81,0948	81,7920	4,4
6	102,2526		98,5168	0,24

И с т о ч н и к: выполнено И.Н. Вассерманом, И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

Расчет собственных колебаний неоднородной балки с использованием модели Редди также дает более низкие значения собственных частот. В табл. 3 приведены значения собственных частот, полученные с использованием полной модели Бернулли и модели Рэдди 2-го порядка (θ -версия).

Таблица 3. Собственные частоты неоднородной балки ($\beta = -1$), полученные по полной модели Бернулли и модели Редди 1

Мода	Бернулли $L/h = 5$	Редди $L/h = 5$	$ u _{\max}$ (Редди $L/h = 5$)	Бернулли $L/h = 10$	Редди $L/h = 10$	Бернулли $L/h = 20$	Редди $L/h = 20$
1	4,6143	4,4792	0,015	4,6484	4,6120	4,6570	4,6478
2	22,5405	19,7516	0,073	23,4913	22,5459	23,7304	23,4780
3	32,0069	31,8974	7,4	60,7498	55,7234	62,3378	60,7801
4	55,6523	44,2526	0,08	63,8790	63,7661	119,2573	114,0833
5	81,7920	72,3770	0,13	114,3008	99,3542	—	—
6	98,5168	80,4830	4,9	—	—	—	—

И с т о ч н и к: выполнено И.Н. Вассерманом, И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

На рис. 4 и 5 продемонстрирована сходимость разработанного конечноэлементного алгоритма. Графики (рис. 4) показывают изменение полученных значений собственной частоты в зависимости от степени дискретизации. Даже при достаточно грубом разбиении на конечные элементы точность полученного решения удовлетворительна. Так, разбиение балки на 8 узловых элементов обеспечивает точность 0,03 %, для первой частоты и 0,4 % для третьей. Решения, полученные с использованием двух разновидностей алгоритма (θ - и γ -версии), несколько отличаются, особенно при грубом разбиении. При этом в θ -версии алгоритма решение с желаемой точностью достигается на более грубой сетке. Графики (рис. 5) показывают, что результаты двух вариантов алгоритма сближаются с ростом числа узловых элементов. Разность значений собственных частот, полученных с помощью θ - и γ -версий алгоритма (Ω_t и Ω_g), более значима для высших частот. Третья мода является в основном продольной (табл. 3), вклад сдвиговых деформаций незначителен, и поэтому решения, полученные с использованием двух версий алгоритма, практически совпадают.

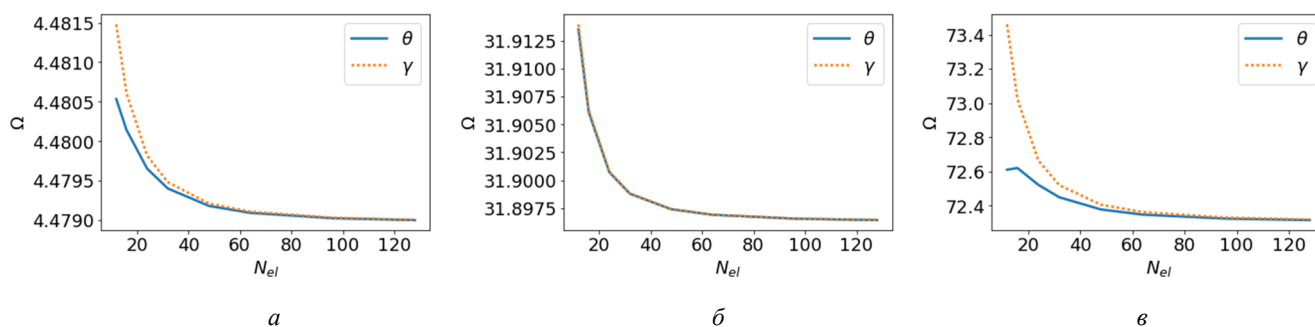


Рис. 4. Сходимость численного решения для (а) — первой, (б) — третьей и (в) — пятой моды

И с т о ч н и к: выполнено И.Н. Вассерманом, И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

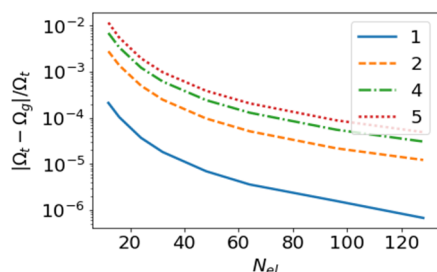


Рис. 5. Относительная разность частот, полученных с помощью двух версий алгоритма. Цифрой показан номер моды

И с т о ч н и к: выполнено И.Н. Вассерманом, И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

Таблица 4. Сравнение собственных частот двунаправленной ($\beta = -1$) и однородной по длине балки ($\beta = 0$)

Мода	Бернулли $\beta = -1$	Редди $\beta = -1$	Бернулли $\beta = 0$	Редди $\beta = 0$
1	4,6143	4,4792	3,4330	3,3510
2	22,5405	19,7516	20,4895	17,9510
3	32,0069	31,8974	26,4676	26,3736
4	55,6523	44,2526	53,8033	42,7835
5	81,7920	72,3770	79,6095	71,1021

И с т о ч н и к: выполнено И.Н. Вассерманом, И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

Результаты, приведенные в табл. 4, позволяют оценить, насколько значимым фактором является учет неоднородности свойств балки при вычислении собственных частот. В таблице сведены решения, полученные для однородной по длине балки ($\beta = 0$) длиной $L/h = 5$ и балки, свойства которой изменяются в продольном и поперечном направлении ($\beta = -1$). Решения получены на основе полной модели Бернулли и модели Редди. Из данных (табл. 4) видно, что учет неоднородности распределения физико-механических характеристик консольной балки в продольном направлении приводит к увеличению частот свободных колебаний, а следовательно, к увеличению динамической жесткости в дорезонансной области.

С целью тестирования данной конечноэлементной реализации модели Редди также рассматривалось альтернативное распределение свойств материала, представленное в [28], где модуль Юнга и массовая плотность изменяются по экспоненте в обоих направлениях:

$$E(x, z) = E_m \exp\left(p_x \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right) + p_z \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right); \quad \rho(x, z) = \rho_m \exp\left(p_x \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right) + p_z \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)\right). \quad (46)$$

Полученные безразмерные собственные частоты

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (47)$$

сравнивались с вычисленными в [28] при следующих значениях параметров: $E_m = 210$ ГПа, $\rho_m = 7850$ кг/м³,

$$p_x = 1, \quad p_z = 1.$$

Результаты приведены в табл. 5.

Расхождение для первых трех частот не превышает 0,1 %.

Таблица 5. Сравнение собственных частот с [28]

Мода	Karamanli [28]	Данная модель
1	0,7055	0,7055
2	4,7302	4,7273
3	6,3414	6,3415

Источники: выполнено И.Н. Вассерманом, И.О. Глот, И.Н. Шардаковым.

4. Заключение

Предложен вариант конечно-элементного алгоритма решения задач о статическом и динамическом деформировании двунаправленных функционально градиентных балок и конструкций из них в рамках балочных теорий Бернулли и Редди. В качестве примера представлены результаты численного решения задачи о собственных формах и частотах колебаний консольной двунаправленной функционально градиентной балки. На основании приведенных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Установлена сходимость получаемых значений собственных частот с увеличением числа конечных элементов в численном решении. В частности, для упрощенной модели Бернулли, без учета инерции вращения поперечных сечений и перекрестной связи продольной силы с изгибающим моментом, полученные численные значения собственных частот хорошо согласуются со значениями аналитического решения.

2. Для коротких балок ($L/h \leq 5$) учет инерции вращения приводит к значительному снижению собственных частот, особенно для высших мод.

3. Представлены численные результаты, демонстрирующие зависимость собственных частот от асимметрии распределения физических свойств материала балки в поперечном сечении относительно ее осевой линии. Интересным результатом является полученная взаимозависимость продольных и поперечных колебаний балки при несимметричном относительно срединной линии распределении жесткостных свойств в поперечных сечениях. Это взаимодействие не имеет отношения к геометрической или физической нелинейности, и его следует отличать от тесно связанного с эйлеровой неустойчивостью влияния продольной нагрузки на частоту свободных поперечных колебаний. Этот результат принципиально отличается колебания функционально градиентных балок от однородных.

4. Использование модели высшего порядка Редди также приводит к снижению вычисляемых собственных частот. Для низших частот длинных балок эта разница менее заметна.

5. Показано, что увеличение пористости материала к свободному концу консольной балки приводит к увеличению частот свободных колебаний, а следовательно, к уменьшению динамических перемещений в дорезонансной области.

6. Таким образом, градиентное пространственное распределение физических свойств материала балки в двух направлениях существенным образом расширяет диапазон управления параметрами динамического и статического деформационного поведения.

Список литературы

1. Матвеев В.П., Федоров А.Ю., Шардаков И.Н. Анализ сингулярности напряжений в особых точках упругих тел из функционально-градиентных материалов // ДАН. 2016. Т. 466. № 1. С. 38–42. <https://doi.org/10.7868/S0869565216010102> EDN: VCPQTB
2. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Investigation of stress behavior in the vicinity of singular points of elastic bodies made of functionally graded materials // ASME Journal of Applied Mechanics. 2018. Vol. 85. No. 6. Article no. 061008. <https://doi.org/10.1115/1.4039619> EDN: OSQKPB
3. Meguid S.A., Wang X.D., Jiang L.Y. On the Dynamic Propagation of a Finite Crack in Functionally Graded Materials // Engineering Fracture Mechanics. 2002. Vol. 69. No. 14–16. P. 1753–1768, [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00046-2](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00046-2) EDN: AYEQFZ
4. Bever M.B., Duwez P.E. Gradients in composite materials // Materials Science and Engineering. 1972. Vol. 10. P. 1–8. [https://doi.org/10.1016/0025-5416\(72\)90059-6](https://doi.org/10.1016/0025-5416(72)90059-6)
5. Miyamoto Y., Koizumi M., Yamada O. High-pressure self-combustion sintering for ceramics // Journal of the American Ceramic Society. 1984. Vol. 67. No. 11. P. 224–225. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1984.tb19488.x>
6. Niino M., Hirai T., Watanabe R., The functionally gradient materials // Journal of the Japan Society for Composite Materials. 1987. Vol. 13. No. 1. P. 257–264. <https://doi.org/10.6089/jscm.13.257>
7. Birman V., Bird L.W. Modelling and analysis of functionally graded materials and structures // ASME Applied Mechanics Reviews. 2007. Vol. 60. P. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164> EDN: SFXRPV
8. Pompe W., Worch H., Eppe M., Friess W., Gelinsky M., Greil P., Hempel U., Scharnweber D., Schulte K. Functionally graded materials for biomedical applications // Materials Science and Engineering: A. 2003. Vol. 362. No. 1–2. P. 40–60. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00580-X](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00580-X) EDN: KLHYOD
9. Oh S.Y., Librescu L., Song O. Vibration of turbomachinery rotating blades made-up of functionally graded materials and operating in a high temperature field // Acta Mechanica. 2003. Vol. 166. P. 69–87. <https://doi.org/10.1007/s00707-003-0049-y> EDN: EUNGWR
10. Zhang N., Lu A., Charlie C., Li C.C., Zhou J., Zhang X., Wang S., Chen X. Support performance of functionally graded concrete lining // Construction and Building Materials. 2017. Vol. 147. P. 35–47. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.04.161>
11. Rubio W.M., Vatanabe S.L., Paulino G.H., Silva E.C.N. Functionally graded piezoelectric material systems — a multiphysics perspective // Advanced Computational Materials Modeling: From Classical to Multi-Scale Techniques. 2010. p. 301–339. <https://doi.org/10.1002/9783527632312.ch8>
12. Le C.I., Dang N.D., Bui T.T.H., Nguyen D.K. Size-dependent large deformation analysis of microscale functionally graded beams and frames // Acta Mechanica. 2025. Vol. 236. P. 1991–2010. <https://doi.org/10.1007/s00707-025-04265-1> EDN: CAGRMM
13. Guo L., Zhao S., Guo Z., Yang J., Kitipornchai S., Functionally graded engineering structures: An overview // Engineering Structures. 2026. Vol. 351. Article no. 121995. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.121995> EDN: EJHCQB
14. Torelli G., Fernández M.G., Lees J.M., Functionally graded concrete: Design objectives, production techniques and analysis methods for layered and continuously graded elements // Construction and Building Materials. 2020. Vol. 242. Article no. 118040. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118040> EDN: HUGIZI
15. Strieder E., Hilber R., Stierschneider E., Bergmeister K. FE-Study on the Effect of Gradient Concrete on Early Constraint and Crack Risk // Applied Sciences. 2018. Vol. 8. No. 2. Article no. 246. <https://doi.org/10.3390/app8020246>
16. Nian Y., Wan S., Avcar M., Yue R., Li M. 3D printing functionally graded metamaterial structure: Design, fabrication, reinforcement, optimization // International Journal of Mechanical Sciences. 2023. Vol. 258. Article no. 108580. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108580> EDN: OXRZKO
17. Ma Z., Liu W., Li W., Liu H., Song J. et al. Additive manufacturing of functional gradient materials: A review of research progress and challenges // Journal of Alloys and Compounds. 2024. Vol. 971. Article no. 172642. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2023.172642> EDN: GZIBML
18. Lim S., Buswell R.A., Le T.T., Austin S.A., Gibb A.G.F., Thorpe T. Developments in construction-scale additive manufacturing processes // Automation in Construction. 2012. Vol. 21. P. 262–268. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2011.06.010>
19. Gosselin C., Duballet R., Roux P., Gaudillière N., Dirrenberger J., Morel P. Large-scale 3D printing of ultra-high performance concrete — a new processing route for architects and builders // Materials & Design. 2016. Vol. 100. P. 102–109. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.03.097>
20. Tay Y.W.D., Lim J.H., Li M., Tan M.J., Creating functionally graded concrete materials with varying 3D printing parameters // Virtual and Physical Prototyping. 2022. Vol. 17. No. 3. P. 662–681, <https://doi.org/10.1080/17452759.2022.2048521> EDN: GMGOJI

21. *Chen D., Gao K., Yang J., Zhang L.* Functionally graded porous structures: Analyses, performances, and applications — A Review // *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 191. Article no. 111046. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111046> EDN: IMYZRY
22. *Shetty R.A., Dushyanthkumar G.L., Deepak S.A.* Classical and refined beam and plate theories: A brief technical review // *Sahyadri International Journal of Research*. 2018. Vol. 4. No. 2. P. 27–32. URL: https://sijr.sahyadri.edu.in/Articles/Volume%204/Issue%202/december_2018_6.pdf (дата обращения: 11.03.2026).
23. *Thai H.-T., Vo T.P.* Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012. Vol. 62. No. 1. P. 57–66. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014>
24. *Şimşek M.* Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories // *Nuclear Engineering and Design*. 2010. Vol. 240. No. 4. P. 697–705. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.12.013>
25. *Emam S.A.* Analysis of shear-deformable composite beams in postbuckling // *Composite Structures*. 2011. Vol. 94. No. 1. P. 24–30. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.024>
26. *Heyliger P.R., Reddy J.N.* A higher order beam element for bending and vibration problems // *Journal of Sound and Vibration*. 1988. Vol. 126. P. 309–326. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(88\)90244-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90244-1)
27. *Şimşek M.* Bi-directional functionally graded materials (BDFGMS) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions // *Composite Structures*. 2015. Vol. 133. P. 968–976. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.021>
28. *Karamanli A.* Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory // *Composite Structures*. 2018. Vol. 189. P. 127–136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.060>
29. *Tang Y., Lv X., Yang T.* Bi-directional functionally graded beams: asymmetric modes and nonlinear free vibration // *Composites Part B: Engineering*. 2019. Vol. 156. P. 319–331. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.140> EDN: YKHWNF
30. *Wang Z.-H., Wang X.-H., Xu G.-D., Cheng S., Zeng T.* Free vibration of two-directional functionally graded beams // *Composite Structures*. 2016. Vol. 135. P. 191–198. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.013>
31. *Boggarapu V., Gujjala R., Ojha Sh., Acharya Sk., Venkateswara babu P., Chowdary S., kumar Gara D.* State of the art in functionally graded materials // *Composite Structures*. 2021. Vol. 262. Article no. 113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596> EDN: YLQYWC
32. *Alshorbagy A.E., Eltaher M.A., Mahmoud F.F.* Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method // *Applied Mathematical Modelling*. 2011. Vol. 35. No. 1. P. 412–425. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.006>
33. *Pei Y.L., Geng P.S., Li L.X.* A modified higher-order theory for FG beams // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2018. Vol. 72. P. 186–197. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.05.008>
34. *Ferreira A.J.M.* MATLAB codes for finite element analys. Springer; 2009. 235 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-47952-7>