

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-235-252
EDN: LFEAKE

Научная статья / Research article

Изгиб ортотропной тонкой пластинки, свободно опертой по всем сторонам

К.Ф. Шагивалеев^{ID}, Д.А. Сурнин^{ID}, Е.К. Сурнина^{ID}

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация

✉ eksurnina@mail.ru

Поступила в редакцию: 24 марта 2026 г.

Доработана: 12 мая 2026 г.

Принята к публикации: 25 мая 2026 г.

Аннотация. Эффективность использования композиционных материалов в различных конструкциях в первую очередь зависит от совершенства расчетных методов и точности проектирования. Учитывая широкое применение пластин из композиционных материалов в инженерных конструкциях, задачи, связанные с их изгибом под действием нагрузки, решаются с использованием различных математических методов. Рассмотрена тонкая прямоугольная пластинка постоянной толщины. Материал пластинки упругий и ортотропный. В качестве исходного уравнения используется уравнение классической теории изгиба тонких анизотропных пластин, в основе которой лежит известная гипотеза недеформируемых нормалей. Поставлена задача построения аналитических решений для тонкой ортотропной пластинки, шарнирно опертой по всем сторонам и находящейся под действием статической нагрузки, приложенной на ограниченной области. Представлены два варианта нагружения: первый — действие полосовой нагрузки, второй — действие нагрузки, приложенной в пределах прямоугольной области. Для решения уравнения статического изгиба пластинки применяется операционное исчисление, связанное с преобразованием Лапласа. Приведены примеры расчетов. В качестве тестовых задач рассмотрена пластинка из углепластика под действием нагрузки, равномерно приложенной по прямоугольной области. Численные расчеты выполнены с использованием пакета компьютерной алгебры MathCAD. Проведены сравнительные исследования для проверки достоверности полученных результатов.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, композиционный материал, упругость, статическая нагрузка, дифференциальное уравнение, операционное исчисление, аналитическое решение

Вклад авторов: Шагивалеев К.Ф. — концепция исследования, рецензирование и выводы; Сурнин Д.А. — расчет, обработка результатов, написание текста; Сурнина Е.К. — обзор литературы, редактирование. Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Для цитирования: Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К. Изгиб ортотропной тонкой пластинки, свободно опертой по всем сторонам // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 235–252. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-235-252> EDN: LFEAKE

Шагивалеев Камиль Фатыхович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных материалов, конструкций и технологий, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 9726-5456, ORCID: 0009-0001-6962-9355; e-mail: kfshag@yandex.ru

Сурнин Дмитрий Аркадьевич, аспирант кафедры транспортного строительства, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 9654-2120, ORCID: 0009-0005-5373-8804; e-mail: dasurnin98@mail.ru

Сурнина Елена Камилевна, кандидат технических наук, доцент кафедры транспортного строительства, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 5584-2282, ORCID: 0000-0003-2500-1256; e-mail: eksurnina@mail.ru

© Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Bending of an Orthotropic Thin Plate Simply Supported on all Sides

Kamil F. Shagivaleev^{ID}, Dmitry A. Surnin^{ID}, Elena K. Surnina^{✉ ID}

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

✉ ekurnina@mail.ru

Received: March 24, 2026

Revised: May 12, 2026

Accepted: May 25, 2026

Abstract. The effectiveness of using composite materials in various structures primarily depends on the sophistication of the calculation methods and design accuracy. Considering the widespread use of plates made of composite materials in engineering structures, problems associated with their bending under load are solved using various mathematical methods. The present study considers a thin rectangular plate of constant thickness. The plate material is elastic and orthotropic. The underlying equation is the equation of the classical theory of bending of thin anisotropic plates, which is based on the well-known hypothesis of non-deformable normal lines. The objective is to construct analytical solutions for a thin orthotropic plate, simply supported on all sides and subjected to a static load applied over a limited area. Two loading cases are considered: the first is the action of a strip load, the second is the action of a load applied over a rectangular area. To solve the equation of static bending of the plate, operational calculus associated with the Laplace transform is used. Examples of calculations are given. A carbon fiber plate under the action of a uniformly distributed load over a rectangular area is considered as a test problem. Numerical calculations were performed using the MathCAD computer algebra software. Comparative studies for verification of the reliability of the obtained results were carried out.

Keywords: rectangular plate, composite material, elasticity, static load, differential equation, operational calculus, analytical solution

Authors' contribution: *Shagivaleev K.F.* — conceptualization, review and conclusions; *Surnin D.A.* — analysis, processing of results, writing; *Surnina E.K.* — literature review, editing. All the authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

For citation: Shagivaleev KF, Surnin DA, Surnina EK. Bending of an orthotropic thin plate simply supported on all sides. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(3):235–252. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-235-252> EDN: LFEAKE

1. Введение

Современные композиционные материалы благодаря своей высокой удельной прочности и жесткости позволяют создавать легкие, прочные и долговечные конструкции, которые используют в различных отраслях промышленности. В отличие от изотропных материалов (сталь, алюминий), свойства которых одинаковы во всех направлениях, композиты часто имеют три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, то есть являются ортотропными материалами. Это позволяет максимально эффективно использовать прочность волокон в направлении главных напряжений. Ортотропная прямоугольная пластина считается классическим примером применения композиционных материалов в машиностроении, гражданском строительстве, судостроении, нефтегазовой и авиакосмической промышленности. Поэтому исследования поведения ортотропных пластин под действием разных видов нагрузок вызывают неослабевающий интерес ученых и инженеров на протяжении уже многих лет.

Kamil F. Shagivaleev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Materials, Structures and Technologies, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9726-5456, ORCID: 0009-0001-6962-9355; e-mail: kfsag@yandex.ru

Dmitry A. Surnin, Postgraduate student of the Department of Transport Construction, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9654-2120, ORCID: 0009-0005-5373-8804; e-mail: dasurnin98@mail.ru

Elena K. Surnina Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Transport Construction, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5584-2282, ORCID: 0000-0003-2500-1256; e-mail: ekurnina@mail.ru

Обзор литературы показывает, что для исследования напряженно-деформированного состояния пластин широко применяются численные методы, такие как метод конечных элементов [1; 2], метод конечных разностей [3], метод граничных элементов [4], бессеточный метод [5] и др., с помощью которых можно проанализировать изгиб пластин с различными краевыми условиями, схемами нагружения и свойствами материала. Однако, хотя вышеупомянутые численные методы удовлетворяют инженерным требованиям с приемлемой погрешностью, они дают приближенное решение, что является их главным недостатком.

Поэтому исследователи продолжают изучать аналитические и полуаналитические методы для более достоверного анализа рассматриваемой задачи и разработки точных аналитических решений для проверки численных (приближенных) решений [6–21].

Для анализа изгиба прямоугольных тонких пластин применяют классические традиционные полуобратные методы, такие как решение Навье и решение Леви [6], с помощью которых можно решать только статические задачи изгиба пластины с двумя противоположными шарнирно-опорными краями. Полуобратный метод обычно не позволяет получить единый алгоритм решения, поскольку требует подбора пробных функций для каждого случая, удовлетворяющих как разрешающему уравнению, так и граничным условиям. Для исследования пластин используют также метод суперпозиции [7; 8], метод симплектической суперпозиции [8–10], расширенный метод Канторовича [11; 12], метод конечного интегрального преобразования [13–18] и др.

Метод симплектической суперпозиции [8–10] широко используется для решения задач изгиба пластин. Однако метод включает в себя сложные математические операции, требующие квалифицированных специалистов в области математики и механики.

Метод конечного интегрального преобразования – эффективный математический метод, который успешно применяется для решения задач изгиба с различными граничными условиями. Этот метод позволяет получить аналитическое решение напрямую из дифференциального уравнения изгиба пластины. В [13] для исследования изгиба пластин с различными сложными граничными условиями авторы применяют двойное интегральное конечное синус-преобразование Фурье. В [14] изучают изгиб ортотропных пластин с комбинированными граничными условиями, используя двойные общие интегральные преобразования. Авторы работы [17] используют двумерный обобщенный метод конечного интегрального преобразования для получения новых аналитических решений изгиба ортотропных прямоугольных тонких фундаментных плит. В [18] для изучения поведения при изгибе прямоугольных тонких пластин с линейно изменяющейся толщиной, расположенных на двухпараметрическом основании, авторы предлагают обобщенный метод интегрального преобразования.

Цель исследования — с использованием метода интегрального преобразования (преобразования Лапласа) продолжить исследования изгиба ортотропных тонких прямоугольных пластин, начатые в [19].

Задачи исследования:

- получить аналитические решения изгиба ортотропных прямоугольных тонких пластин, шарнирно опертых по всему контуру и находящихся под действием полосовой равномерно распределенной нагрузки и нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольной области;
- исследовать напряженно-деформированное состояние пластины при действии нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольной области;
- проверить достоверность и точность получаемых по этому методу результатов на основе сравнения их с данными, опубликованными в научной литературе.

2. Постановка задачи и метод решения

В [19] выведены решения для ортотропной прямоугольной пластинки, свободно опертой по всем сторонам при действии нагрузки, распределенной по полосе по $q_0 \sin \frac{n\pi y}{b}$ (рис. 1).

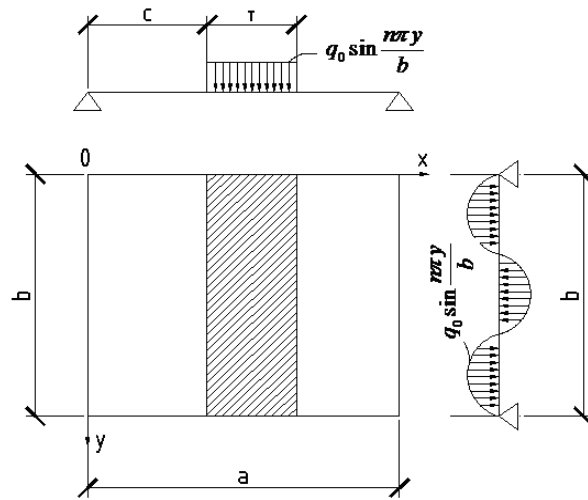


Рис. 1. Схема пластинки при действии полосовой нагрузки
И с т о ч н и к: выполнено К.Ф. Шагивалеевым и др. [19].

Figure 1. Diagram of a plate under the action of a strip load
S o u r c e: by K.F. Shagivaleev et al. [19].

При расчете пластинки использовалось дифференциальное уравнение классической теории анизотропных пластинок [20]:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < c; \\ q_0 \sin \frac{n\pi y}{b}, & \text{при } c \leq x \leq c + \tau; \\ 0, & \text{при } c + \tau < x \leq a, \end{cases} \quad (1)$$

где $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}$; $D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}$; $D_k = G \frac{h^3}{12}$; $D_3 = D_1\mu_2 + 2D_k$; E_1, E_2 — модули упругости; μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона; G — модуль сдвига; h — толщина пластинки; $n = 1, 3, 5, \dots$

Для решения дифференциального уравнения (1) применили операционное исчисление, связанное с преобразованием Лапласа.

Решения дифференциального уравнения (1) имеют вид:

■ при $r > s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{2s^4 \gamma D_1} \left\{ \left[2\gamma + P_2^2 chP_1(x-c) - P_1^2 chP_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[2\gamma + P_2^2 chP_1(x-c-\tau) - P_1^2 chP_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - \right. \\ \left. - P_2^2 k_1 shP_1x + P_1^2 k_2 shP_2x \right\} \sin \lambda y, \quad (2)$$

где $k_1 = \frac{chP_1(a-c) - chP_1(a-c-\tau)}{shP_1a}$; $k_2 = \frac{chP_2(a-c) - chP_2(a-c-\tau)}{shP_2a}$; $\gamma = \sqrt{r^4 - s^4}$; $P_1 = \sqrt{r^2 + \gamma}$;

$P_2 = \sqrt{r^2 - \gamma}$; $r^2 = \frac{D_3}{D_1} \lambda^2$; $s^4 = \frac{E_2}{E_1} \lambda^4$; $\lambda = \frac{n\pi}{b}$; $\eta(x-c)$ — единичная функция, которая при $x \geq c$ равна 1 и при $x < c$ равна 0; $\eta(x-c-\tau)$ — единичная функция, которая при $x \geq c + \tau$ равна 1 и при $x < c + \tau$ равна 0.

Обращаем внимание на то, что единичные функции $\eta(x-c)$ и $\eta(x-c-\tau)$ приняты только для сокращения записи выражений. Они указывают, с какого значения координаты x появляется в выражении данное слагаемое.

■ При $r = s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{r^4 D_1} \left\{ \left[1 - \operatorname{chr}(x-c) + \frac{1}{2} r(x-c) \operatorname{shr}(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[1 - \operatorname{chr}(x-c-\tau) + \frac{1}{2} r(x-c-\tau) \operatorname{shr}(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + \right. \\ \left. + k_3 \operatorname{shr} x + k_4 r x \operatorname{chr} x \right\} \sin \lambda y, \quad (3)$$

где

$$k_3 = \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 r a} \left\{ (2 \operatorname{shr} a + r a \operatorname{chr} a) [\operatorname{chr}(a-c) - \operatorname{chr}(a-c-\tau)] - \right. \\ \left. - r \operatorname{shr} a [(a-c) \operatorname{shr}(a-c) - (a-c-\tau) \operatorname{shr}(a-c-\tau)] \right\}; \\ k_4 = -\frac{1}{2 \operatorname{shr} a} [\operatorname{chr}(a-c) - \operatorname{chr}(a-c-\tau)].$$

■ При $r < s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{2 s^4 \gamma_1 \gamma_2 D_1} \left[(2 \gamma_1 \gamma_2 - 2 \gamma_1 \gamma_2 Y_1 + r^2 Y_4) \eta(x-c) - \right. \\ \left. - (2 \gamma_1 \gamma_2 - 2 \gamma_1 \gamma_2 \bar{Y}_1 + r^2 \bar{Y}_4) \eta(x-c-\tau) + \right. \\ \left. + (-r^2 \eta_1 + 2 \gamma_1 \gamma_2 \eta_2) X_2 + (r^2 \eta_2 + 2 \gamma_1 \gamma_2 \eta_1) X_3 \right] \sin \lambda y, \quad (4)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(s^2 + r^2)}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(s^2 - r^2)}; \\ X_1 = \cos \gamma_2 x \operatorname{ch} \gamma_1 x; \quad Y_1 = \cos \gamma_2 (x-c) \operatorname{ch} \gamma_1 (x-c); \\ X_2 = \sin \gamma_2 x \operatorname{ch} \gamma_1 x; \quad Y_2 = \sin \gamma_2 (x-c) \operatorname{ch} \gamma_1 (x-c); \\ X_3 = \cos \gamma_2 x \operatorname{sh} \gamma_1 x; \quad Y_3 = \cos \gamma_2 (x-c) \operatorname{sh} \gamma_1 (x-c); \\ X_4 = \sin \gamma_2 x \operatorname{sh} \gamma_1 x; \quad Y_4 = \sin \gamma_2 (x-c) \operatorname{sh} \gamma_1 (x-c); \\ \bar{Y}_1 = \cos \gamma_2 (x-c-\tau) \operatorname{ch} \gamma_1 (x-c-\tau); \quad \bar{Y}_3 = \cos \gamma_2 (x-c-\tau) \operatorname{sh} \gamma_1 (x-c-\tau); \\ \bar{Y}_2 = \sin \gamma_2 (x-c-\tau) \operatorname{ch} \gamma_1 (x-c-\tau); \quad \bar{Y}_4 = \sin \gamma_2 (x-c-\tau) \operatorname{sh} \gamma_1 (x-c-\tau); \\ \eta_1 = [A_2 (B_4 - C_4) + A_3 (B_1 - C_1)] (A_2^2 + A_3^2)^{-1}; \\ \eta_2 = [A_2 (B_1 - C_1) - A_3 (B_4 - C_4)] (A_2^2 + A_3^2)^{-1};$$

$$A_1 = \cos \gamma_2 a \operatorname{ch} \gamma_1 a ;$$

$$A_2 = \sin \gamma_2 a \operatorname{ch} \gamma_1 a ;$$

$$A_3 = \cos \gamma_2 a \operatorname{sh} \gamma_1 a ;$$

$$A_4 = \sin \gamma_2 a \operatorname{sh} \gamma_1 a ;$$

$$C_1 = \cos \gamma_2 (a - c - \tau) \operatorname{ch} \gamma_1 (a - c - \tau) ;$$

$$C_2 = \sin \gamma_2 (a - c - \tau) \operatorname{ch} \gamma_1 (a - c - \tau) ;$$

$$B_1 = \cos \gamma_2 (a - c) \operatorname{ch} \gamma_1 (a - c) ;$$

$$B_2 = \sin \gamma_2 (a - c) \operatorname{ch} \gamma_1 (a - c) ;$$

$$B_3 = \cos \gamma_2 (a - c) \operatorname{sh} \gamma_1 (a - c) ;$$

$$B_4 = \sin \gamma_2 (a - c) \operatorname{sh} \gamma_1 (a - c) ;$$

$$C_3 = \cos \gamma_2 (a - c - \tau) \operatorname{sh} \gamma_1 (a - c - \tau) ;$$

$$C_4 = \sin \gamma_2 (a - c - \tau) \operatorname{sh} \gamma_1 (a - c - \tau) .$$

В [19] было отмечено, что полученные решения можно использовать при исследовании изгиба ортотропной пластинки при действии нагрузки, распределенной вдоль оси y по любому закону.

В данной работе поставлена задача получения аналитических выражений для определения перемещений, усилий и моментов в прямоугольной тонкой пластинке ($a \times b$), свободно опертой по всем сторонам и находящейся под действием статической нагрузки, приложенной на ограниченной области: полосовой равномерно распределенной нагрузки (рис. 2) и нагрузки, действующей по ограниченной прямоугольной области (рис. 3). Материал пластинки упругий ортотропный.

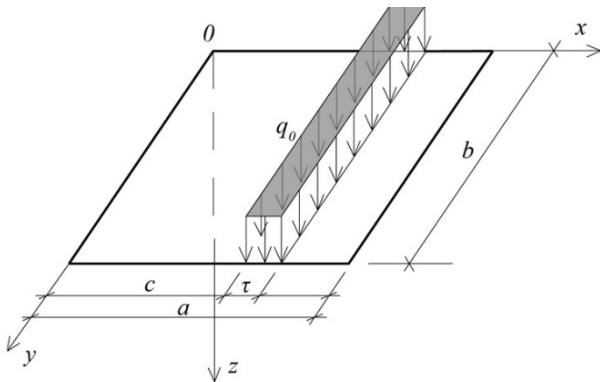


Рис. 2. Схема пластинки при действии полосовой равномерно распределенной нагрузки

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным.

Figure 2. Diagram of a plate under the action of a uniformly distributed strip load

S o u r c e: made by D.A. Surnin.

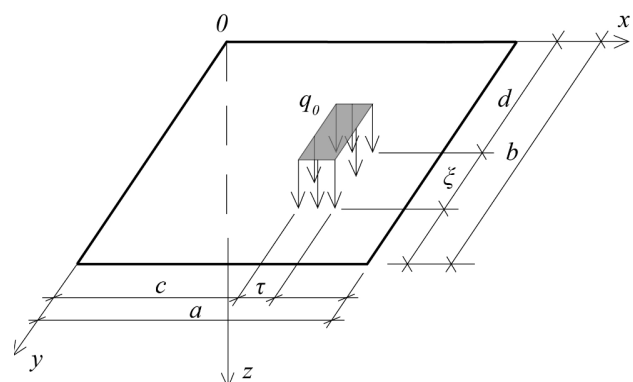


Рис. 3. Схема пластинки при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0 , равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами τ и ξ

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным.

Figure 3. Diagram of a plate under the action of a continuous load of intensity q_0 , uniformly distributed over a rectangle with sides τ and ξ

S o u r c e: made by D.A. Surnin.

В первом случае рассмотрена прямоугольная ортотропная пластинка, на которую действовала полосовая равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q_0 (рис. 2).

Нагрузку разложили в тригонометрический ряд по переменной y :

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < c; \\ q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..n} \frac{1}{n} \sin \lambda y, & \text{при } c \leq x \leq c + \tau; \\ 0, & \text{при } c + \tau < x \leq a. \end{cases} \quad (5)$$

Используя приведенные решения (2–4), получили выражения для определения перемещения, усилий и моментов при действии рассматриваемой нагрузки (5).

■ При $r > s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D_1} \frac{2}{\pi_{1,3,5} s^4 \gamma n} \left\{ \left[2\gamma + P_2^2 ch P_1(x-c) - P_1^2 ch P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[2\gamma + P_2^2 ch P_1(x-c-\tau) - P_1^2 ch P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - P_2^2 k_1 sh P_1 x + P_1^2 k_2 sh P_2 x \right\} \sin \lambda y,$$

$$M_x = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ = -q_0 \frac{2}{\pi_{1,3,5} \gamma n} \left\{ \left[-2\gamma \frac{\mu_1}{\lambda^2} + \Omega_2 ch P_1(x-c) - \Omega_1 ch P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[-2\gamma \frac{\mu_1}{\lambda^2} + \Omega_2 ch P_1(x-c-\tau) - \Omega_1 ch P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - \Omega_2 k_1 sh P_1 x + \Omega_1 k_2 sh P_2 x \right\} \sin \lambda y;$$

$$M_y = -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ = -q_0 \frac{E_2}{E_1} \frac{2}{\pi_{1,3,5} \gamma n} \left\{ \left[-2\gamma \frac{\lambda^2}{s^4} + \Omega_4 ch P_1(x-c) - \Omega_3 ch P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[-2\gamma \frac{\lambda^2}{s^4} + \Omega_4 ch P_1(x-c-\tau) - \Omega_3 ch P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - \Omega_4 k_1 sh P_1 x + \Omega_3 k_2 sh P_2 x \right\} \sin \lambda y;$$

$$Q_x = - \left(D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\ = -q_0 \frac{2}{\pi_{1,3,5} s^2 n} \left\{ \left[P_2 sh P_1(x-c) + P_1 sh P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[P_2 sh P_1(x-c-\tau) + P_1 sh P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - P_2 k_1 ch P_1 x - P_1 k_2 ch P_2 x \right\} \sin \lambda y;$$

$$Q_y = - \left(D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = \\ = -q_0 \frac{2}{\pi_{1,3,5} \lambda n} \left\{ \left[-2 + ch P_1(x-c) + ch P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[-2 + ch P_1(x-c-\tau) + ch P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - k_1 sh P_1 x - k_2 sh P_2 x \right\} \cos \lambda y;$$

$$H_{xy} = -2 D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\ = -q_0 \frac{2}{\pi_{1,3,5} \gamma \lambda n} \left(\frac{r^2}{s^2} - \mu_1 \frac{s^2}{\lambda^2} \right) \left\{ \left[P_2 sh P_1(x-c) - P_1 sh P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[P_2 sh P_1(x-c-\tau) - P_1 sh P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - P_2 k_1 ch P_1 x + P_1 k_2 ch P_2 x \right\} \cos \lambda y, \quad (6)$$

$$\text{где } \Omega_1 = 1 - \frac{\mu_1}{\lambda^2} P_1^2; \quad \Omega_2 = 1 - \frac{\mu_1}{\lambda^2} P_2^2; \quad \Omega_3 = \mu_1 - \frac{\lambda^2}{s^4} P_1^2; \quad \Omega_4 = \mu_1 - \frac{\lambda^2}{s^4} P_2^2.$$

■ При $r = s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D_1} \frac{4}{\pi_{1,3,5}} \frac{1}{r^4 n} \left\{ \left[1 - chr(x-c) + \frac{1}{2} r(x-c) shr(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[1 - chr(x-c-\tau) + \frac{1}{2} r(x-c-\tau) shr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + k_3 shr x + k_4 r x chr x \right\} \sin \lambda y;$$

$$M_x = -q_0 \frac{4}{\pi_{1,3,5..}} \frac{1}{r^2 n} \left\{ \left[-\mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2} (1 - chr(x-c)) + \frac{1}{2} \Omega_5 r(x-c) shr(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[-\mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2} (1 - chr(x-c-\tau)) + \frac{1}{2} \Omega_5 r(x-c-\tau) shr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + \right. \\ \left. + \Omega_5 k_3 shr x + (2 shr x + \Omega_5 r x chr x) k_4 \right\} \sin \lambda y;$$

$$M_y = q_0 \frac{4}{\pi_{1,3,5..}} \frac{1}{\lambda^2 n} \left\{ \left[1 - chr(x-c) + \frac{1}{2} \Omega_5 r(x-c) shr(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left[1 - chr(x-c-\tau) + \frac{1}{2} \Omega_5 r(x-c-\tau) shr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + \right. \\ \left. + \Omega_5 k_3 shr x - \left(2\mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2} shr x - \Omega_5 r x chr x \right) k_4 \right\} \sin \lambda y;$$

$$Q_x = -q_0 \frac{4}{\pi_{1,3,5..}} \frac{1}{r n} \left\{ \left[shr(x-c) \right] \eta(x-c) - \left[shr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + 2k_4 chr x \right\} \sin \lambda y;$$

$$Q_y = q_0 \frac{4}{\pi_{1,3,5..}} \frac{1}{\lambda n} \left\{ \left[1 - chr(x-c) \right] \eta(x-c) - \left[1 - chr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - 2k_4 shr x \right\} \cos \lambda y;$$

$$H_{xy} = -q_0 \frac{4}{\pi_{1,3,5..}} \frac{1}{r \lambda n} \Omega_5 \left\{ \frac{1}{2} \left[-shr(x-c) + r(x-c) chr(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[-shr(x-c-\tau) + r(x-c-\tau) chr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + \right. \\ \left. + k_3 chr x + (chr x + r x shr x) k_4 \right\} \cos \lambda y, \quad (7)$$

где $\Omega_5 = 1 - \mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2}.$

■ При $r < s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D_1} \frac{2}{\pi_{1,3,5}} \frac{1}{s^4 \gamma_1 \gamma_2 n} \left[\left(2\gamma_1 \gamma_2 - 2\gamma_1 \gamma_2 Y_1 + r^2 Y_4 \right) \eta(x-c) - \right. \\ \left. - \left(2\gamma_1 \gamma_2 - 2\gamma_1 \gamma_2 \overline{Y_1} + r^2 \overline{Y_4} \right) \eta(x-c-\tau) + \right. \\ \left. + \left(-r^2 \eta_1 + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta_2 \right) X_2 + \left(r^2 \eta_2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta_1 \right) X_3 \right] \sin \lambda y,$$

$$\begin{aligned}
M_x &= -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 n} \left\{ \left[-\Omega_6 (1 - Y_1) + \Omega_5 Y_4 \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[-\Omega_6 (1 - \bar{Y}_1) + \Omega_5 \bar{Y}_4 \right] \eta(x-c-\tau) - \Omega_5 (\eta_1 X_2 - \eta_2 X_3) - \Omega_6 (\eta_2 X_2 + \eta_1 X_3) \right\} \sin \lambda y; \\
M_y &= -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 n} \left\{ \left[-\Omega_7 (1 - Y_1) + \Omega_8 Y_4 \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[-\Omega_7 (1 - \bar{Y}_1) + \Omega_8 \bar{Y}_4 \right] \eta(x-c-\tau) - \Omega_8 (\eta_1 X_2 - \eta_2 X_3) - \Omega_7 (\eta_2 X_2 + \eta_1 X_3) \right\} \sin \lambda y; \\
Q_x &= -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 n} \left\{ \left[\Omega_9 \gamma_1 Y_2 + \Omega_{10} \gamma_2 Y_3 \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[\Omega_9 \gamma_1 \bar{Y}_2 + \Omega_{10} \gamma_2 \bar{Y}_3 \right] \eta(x-c-\tau) + \Omega_9 (\gamma_1 \eta_2 X_1 - \gamma_1 \eta_1 X_4) - \Omega_{10} (\gamma_2 \eta_1 X_1 + \gamma_2 \eta_2 X_4) \right\} \sin \lambda y; \\
Q_y &= q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\lambda n} \left[(1 - Y_1) \eta(x-c) - (1 - \bar{Y}_1) \eta(x-c-\tau) + \eta_2 X_2 + \eta_1 X_3 \right] \cos \lambda y; \\
H_{xy} &= -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 \lambda n} \left(\frac{r^2}{s^2} - \mu_1 \frac{s^2}{\lambda^2} \right) \left[(\gamma_1 Y_2 - \gamma_2 Y_3) \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - (\gamma_1 \bar{Y}_2 - \gamma_2 \bar{Y}_3) \eta(x-c-\tau) + (\gamma_2 \eta_1 + \gamma_1 \eta_2) X_1 - (\gamma_1 \eta_1 - \gamma_2 \eta_2) X_4 \right] \cos \lambda y, \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\text{где } \Omega_6 = \mu_1 \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\lambda^2}; \quad \Omega_7 = \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\lambda^2}; \quad \Omega_8 = \mu_2 - \frac{r^2}{\lambda^2}; \quad \Omega_9 = 1 - \frac{r^2}{s^2}; \quad \Omega_{10} = 1 + \frac{r^2}{s^2}.$$

Положив во всех приведенных выражениях $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, можно получить решения для изотропной пластинки.

Во втором случае на прямоугольную ортотропную пластинку действовала сплошная нагрузка интенсивностью q_0 , равномерно распределенная по прямоугольнику со сторонами τ и ξ (см. рис. 3).

Разложили нагрузку в тригонометрический ряд по переменной y :

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < c; \\ q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^n \frac{1}{n} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y, & \text{при } c \leq x \leq c + \tau; \\ 0, & \text{при } c + \tau < x \leq a, \end{cases} \tag{9}$$

$$\text{где } \xi_1 = d + \frac{\xi}{2}.$$

Используя приведенные решения (2–4), получили выражения для определения перемещения, усилий и моментов при действии рассматриваемой нагрузки (9).

■ При $r > s$:

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \frac{q_0}{D_1} \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{s^4 \gamma n} \left\{ \left[2\gamma + P_2^2 \operatorname{ch} P_1(x-c) - P_1^2 \operatorname{ch} P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[2\gamma + P_2^2 \operatorname{ch} P_1(x-c-\tau) - P_1^2 \operatorname{ch} P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - \right. \\
&\quad \left. - P_2^2 k_1 \operatorname{sh} P_1 x + P_1^2 k_2 \operatorname{sh} P_2 x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma n} \left\{ \left[-2\gamma \frac{\mu_1}{\lambda^2} + \Omega_2 ch P_1(x-c) - \Omega_1 ch P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[-2\gamma \frac{\mu_1}{\lambda^2} + \Omega_2 ch P_1(x-c-\tau) - \Omega_1 ch P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - \right. \\
&\quad \left. - \Omega_2 k_1 sh P_1 x + \Omega_1 k_2 sh P_2 x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ; \\
M_y &= -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -q_0 \frac{E_2}{E_1} \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma n} \left\{ \left[-2\gamma \frac{\lambda^2}{s^4} + \Omega_4 ch P_1(x-c) - \Omega_3 ch P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[-2\gamma \frac{\lambda^2}{s^4} + \Omega_4 ch P_1(x-c-\tau) - \Omega_3 ch P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - \right. \\
&\quad \left. - \Omega_4 k_1 sh P_1 x + \Omega_3 k_2 sh P_2 x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ; \\
Q_x &= - \left(D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{s^2 n} \left\{ \left[P_2 sh P_1(x-c) + P_1 sh P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[P_2 sh P_1(x-c-\tau) + P_1 sh P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - P_2 k_1 ch P_1 x - P_1 k_2 ch P_2 x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ; \\
Q_y &= - \left(D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\lambda n} \left\{ \left[-2 + ch P_1(x-c) + ch P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\lambda n} \left\{ \left[-2 + ch P_1(x-c) + ch P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[-2 + ch P_1(x-c-\tau) + ch P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - k_1 sh P_1 x - k_2 sh P_2 x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda y ; \right. \\
H_{xy} &= -2 D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -q_0 \frac{2}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\gamma \lambda n} \left(\frac{r^2}{s^2} - \mu_1 \frac{s^2}{\lambda^2} \right) \left\{ \left[P_2 sh P_1(x-c) - P_1 sh P_2(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[P_2 sh P_1(x-c-\tau) - P_1 sh P_2(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) - \right. \\
&\quad \left. - P_2 k_1 ch P_1 x + P_1 k_2 ch P_2 x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda y.
\end{aligned} \tag{10}$$

■ При $r = s$:

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \frac{q_0}{D_1} \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{r^4 n} \left\{ \left[1 - chr(x-c) + \frac{1}{2} r(x-c) shr(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
&\quad \left. - \left[1 - chr(x-c-\tau) + \frac{1}{2} r(x-c-\tau) shr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + \right. \\
&\quad \left. + k_3 shr x + k_4 r x chr x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x = & -q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{r^2 n} \left\{ \left[-\mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2} (1 - chr(x-c)) + \frac{1}{2} \Omega_5 r(x-c) shr(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
& - \left[-\mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2} (1 - chr(x-c-\tau)) + \frac{1}{2} \Omega_5 r(x-c-\tau) shr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + \\
& + \Omega_5 k_3 shrx + (2 shrx + \Omega_5 r x chr x) k_4 \} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ; \\
M_y = & q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 n} \left\{ \left[1 - chr(x-c) + \frac{1}{2} \Omega_5 r(x-c) sh r(x-c) \right] \eta(x-c) - \right. \\
& - \left[1 - chr(x-c-\tau) + \frac{1}{2} \Omega_5 r(x-c-\tau) shr(x-c-\tau) \right] \eta(x-c-\tau) + \\
& + \Omega_5 k_3 shrx - \left(2\mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2} shrx - \Omega_5 r x chr x \right) k_4 \} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ; \\
Q_x = & -q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{r n} \{ [sh r(x-c)] \eta(x-c) - [sh r(x-c-\tau)] \eta(x-c-\tau) + \\
& + 2k_4 chr x \} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ; \\
Q_y = & q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{\lambda n} \{ [1 - chr(x-c)] \eta(x-c) - [1 - chr(x-c-\tau)] \eta(x-c-\tau) - \\
& - 2k_4 shrx \} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda y ; \\
H_{xy} = & -q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{r \lambda n} \Omega_5 \left\{ \frac{1}{2} [-sh r(x-c) + r(x-c) chr(x-c)] \eta(x-c) - \right. \\
& - \frac{1}{2} [-sh r(x-c-\tau) + r(x-c-\tau) chr(x-c-\tau)] \eta(x-c-\tau) + \\
& + k_3 chr x + (chr x + r x shrx) k_4 \} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda y .
\end{aligned} \tag{11}$$

■ При $r < s$:

$$\begin{aligned}
w(x, y) = & \frac{q_0}{D_2} \frac{4a^4}{\pi^5} \left(\frac{b}{a} \right)^4 \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[(1 - Y_1 + \Omega Y_4) \eta(x-c) - (1 - \bar{Y}_1 + \Omega \bar{Y}_4) \eta(x-c-\tau) + (-\Omega \eta_1 + \eta_2) X_2 + \right. \\
& + (\Omega \eta_2 + \eta_1) X_3 \left. \right] \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ; \\
M_x = & -q_0 \frac{4a^2}{\pi^3 \gamma_3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left\{ [-\Omega_6 (1 - Y_1) + \Omega_5 Y_4] \eta(x-c) - \right. \\
& - [-\Omega_6 (1 - \bar{Y}_1) + \Omega_5 \bar{Y}_4] \eta(x-c-\tau) - \Omega_5 (\eta_1 X_2 - \eta_2 X_3) - \Omega_6 (\eta_2 X_2 + \eta_1 X_3) \} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y = & -q_0 \frac{4a^2}{\pi^3 \gamma_3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left\{ \left[-\Omega_7 (1 - Y_1) + \Omega_8 Y_4 \right] \eta(x - c) - \right. \\
& - \left[-\Omega_7 (1 - \bar{Y}_1) + \Omega_8 \bar{Y}_4 \right] \eta(x - c - \tau) - \Omega_8 (\eta_1 X_2 - \eta_2 X_3) - \\
& \left. - \Omega_7 (\eta_2 X_2 + \eta_1 X_3) \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y; \\
Q_x = & -q_0 \frac{4a}{\pi^2 \gamma_3} \left(\frac{b}{a} \right) \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \left[\Omega_9 \zeta_1 Y_2 + \Omega_{10} \zeta_2 Y_3 \right] \eta(x - c) - \right. \\
& - \left[\Omega_9 \zeta_1 \bar{Y}_2 + \Omega_{10} \zeta_2 \bar{Y}_3 \right] \eta(x - c - \tau) + \Omega_9 \zeta_1 (\eta_2 X_1 - \eta_1 X_4) - \\
& \left. - \Omega_{10} \zeta_2 (\eta_1 X_1 + \eta_2 X_4) \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y; \\
Q_y = & q_0 \frac{4a}{\pi^2} \left(\frac{b}{a} \right) \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[(1 - Y_1) \eta(x - c) - (1 - \bar{Y}_1) \eta(x - c - \tau) + \eta_2 X_2 + \eta_1 X_3 \right] \times \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda y; \\
H_{xy} = & q_0 \frac{4a^2}{\pi^3 \gamma_3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{\gamma_8}{\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[(\zeta_1 Y_2 - \zeta_2 Y_3) \eta(x - c) - \right. \\
& \left. - (\zeta_1 \bar{Y}_2 - \zeta_2 \bar{Y}_3) \eta(x - c - \tau) + (\zeta_2 \eta_1 + \zeta_1 \eta_2) X_1 - (\zeta_1 \eta_1 - \zeta_2 \eta_2) X_4 \right] \times \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda y, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(s^2 + r^2)} = \lambda \gamma_4; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(s^2 - r^2)} = \lambda \gamma_5; \quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{E_2}{E_1} - \left(\frac{D_3}{D_1} \right)^2}; \quad \gamma_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{16}}; \quad \gamma_5 = \sqrt{-\frac{1}{2} \Omega_{15}};$$

$$\Omega = \frac{r^2}{2\gamma_1\gamma_2} = \frac{D_3}{\gamma_3}; \quad \Omega_5 = 1 - \mu_1 \frac{r^2}{\lambda^2} = 1 - \mu_1 \frac{D_3}{D_1}; \quad \Omega_6 = \mu_1 \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\lambda^2} = \mu_1 \gamma_3;$$

$$\Omega_7 = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\lambda^2} = \gamma_3; \quad \Omega_8 = \mu_2 - \frac{r^2}{\lambda^2} = \mu_2 - \frac{D_3}{D_1};$$

$$\Omega_9 = 1 - \frac{r^2}{s^2} = 1 - \frac{\frac{D_3}{D_1}}{\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}; \quad \Omega_{10} = 1 + \frac{r^2}{s^2} = 1 + \frac{\frac{D_3}{D_1}}{\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}; \quad \Omega_{15} = \frac{D_3}{D_1} - \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}; \quad \Omega_{16} = \frac{D_3}{D_1} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}};$$

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} + \frac{D_3}{D_1} \right)}; \quad \zeta_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} - \frac{D_3}{D_1} \right)}; \quad \frac{D_3}{D_1} = \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2) \frac{G}{E_1}.$$

При больших значениях необходимо перейти от гиперболических функций к показательным.

Решения (10–12) получены в общем виде. Они позволяют рассчитать ортотропную прямоугольную пластинку, свободно опертую по всем сторонам, при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0 , равномерно распределенной по прямоугольной области при разных размерах площадки нагружения, при любом расположении площадки нагружения на поверхности пластинки, при разных размерах прямоугольной пластинки, при разных упругих характеристиках материала пластинки.

3. Результаты и обсуждение

В качестве примера для исследования напряженно-деформированного состояния пластинки рассмотрена ортотропная прямоугольная пластинка со следующими геометрическими параметрами: отношение сторон пластинки $\frac{b}{a}=1,5$.

Нагрузка интенсивностью q_0 равномерно распределена по прямоугольнику со сторонами $\tau = 0,2a$ и $\xi = 0,2a$. Центр площадки нагружения совпадал с серединой пластинки.

Материал пластинки — углепластик, имеющий следующие характеристики [24]:

$$\begin{aligned} E_1 &= 1,4 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2; \quad E_2 = 0,097 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2; \\ G &= 0,55 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2; \quad \mu_1 = 0,29; \quad \mu_2 = 0,02. \end{aligned} \quad (13)$$

Главные направления упругости совпадали с направлениями сторон пластинки.

Таблица 1. Результаты расчета ортотропной пластинки при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0 , равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами τ и ξ

Table 1. The results of the calculation of an orthotropic plate under the action of a continuous load with an intensity q_0 evenly distributed over a rectangle with sides τ and ξ

x	$w\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$M_x\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$M_y\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$Q_x\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$Q_y\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$H_{x,y}\left(x, \frac{b}{2}\right)$
0	0	0	0	0,0331649	0	0
0,1a	0,0000285	0,0027625	0,00061233	0,0349372	0	0
0,2a	0,0000550	0,0058880	0,00125763	0,0410292	0	0
0,3a	0,0000774	0,0098894	0,00195391	0,0540592	0	0
0,4a	0,0000931	0,0156032	0,00264889	0,0788915	0	0
0,5a	0,0000989	0,0190189	0,00298238	0	0	0
0,6a	0,0000931	0,0156032	0,00264889	-0,0788915	0	0
0,7a	0,0000774	0,0098894	0,00195391	-0,0540592	0	0
0,8a	0,0000550	0,0058880	0,00125763	-0,0410292	0	0
0,9a	0,0000285	0,0027625	0,00061233	-0,0349372	0	0
a	0	0	0	-0,0331649	0	0

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным / Source: made by D.A. Surnin.

Таблица 2. Максимальные значения перемещения, моментов и перерезывающей силы в ортотропной пластинке при разном числе удерживающих членов ряда

Table 2. Maximum values of displacement, moments and shear force in an orthotropic plate for different numbers of holding row members

Число членов ряда / Number of row members	$w_{\max}$	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(Q_x)_{\max}$	$Q_y\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$H_{x,y}\left(x, \frac{b}{2}\right)$
1	0,0000682	0,0110209	0,00051772	0,025891	0	0
3	0,0000930	0,0159260	0,00159281	0,045363	0	0
5	0,0000989	0,0177488	0,00226380	0,059084	0	0
7	0,0001006	0,0186042	0,00257293	0,068530	0	0
9	0,0001013	0,0190189	0,00284236	0,074444	0	0
11	0,0001013	0,0192012	0,00294444	0,077631	0	0
13	0,0001013	0,0192605	0,00298238	0,078891	0	0

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным / Source: made by D.A. Surnin.

Результаты расчета показали (см. табл. 2), что при вычислении прогиба достаточно взять 5 членов ряда; при вычислении M_x — 6 членов ряда; при вычислении M_y и Q_x — 7 членов ряда.

Был выполнен расчет ортотропной прямоугольной пластинки с исходными параметрами по формуле, приведенной в работе [20] (с применением двойного тригонометрического ряда). Максимальный прогиб $w_{\max} = 0,0001119 q_0 \frac{a^4}{D_2}$. При вычислении было взято 10 членов ряда. Расхождение составило 9,5 %. Максимальное значение $M_{\max} = 0,0186623 q_0 a^2$. При вычислении было взято 32 члена ряда. Расхождение составило 3,1 %.

Положив во всех приведенных выражениях $E_1 = E_2 = E$ ($D_1 = D_2 = D_3 = D$) и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, получили решения для изотропной пластинки ($r = s = \lambda$).

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D} \frac{4b^4}{\pi^5} \sum_{1,3,5} \frac{1}{n^5} \left\{ \left[1 - ch \lambda (x-c) + \frac{1}{2} \lambda (x-c) sh \lambda (x-c) \right] \eta (x-c) - \right. \\ \left. - \left[1 - ch \lambda (x-c-\tau) + \frac{1}{2} \lambda (x-c-\tau) sh \lambda (x-c-\tau) \right] \eta (x-c-\tau) + \right. \\ \left. + \overline{k_3} sh \lambda x + \overline{k_4} \lambda x ch \lambda x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y;$$

$$M_x = -q_0 \frac{4b^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5..} \frac{1}{n^3} \left\{ \left[-\mu (1 - ch \lambda (x-c)) + \frac{1}{2} \overline{\Omega_5} \lambda (x-c) sh \lambda (x-c) \right] \eta (x-c) - \right. \\ \left. - \left[-\mu (1 - ch \lambda (x-c-\tau)) + \frac{1}{2} \overline{\Omega_5} \lambda (x-c-\tau) sh \lambda (x-c-\tau) \right] \eta (x-c-\tau) + \right. \\ \left. + \overline{\Omega_5} \overline{k_3} sh \lambda x + \overline{k_4} (2 sh \lambda x + \overline{\Omega_5} \lambda x ch \lambda x) \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y;$$

$$M_y = q_0 \frac{4b^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5..} \frac{1}{n^3} \left\{ \left[1 - ch \lambda (x-c) + \frac{1}{2} \overline{\Omega_5} \lambda (x-c) sh \lambda (x-c) \right] \eta (x-c) - \right. \\ \left. - \left[1 - ch \lambda (x-c-\tau) + \frac{1}{2} \overline{\Omega_5} \lambda (x-c-\tau) sh \lambda (x-c-\tau) \right] \eta (x-c-\tau) + \right. \\ \left. + \overline{\Omega_5} \overline{k_3} sh \lambda x - \overline{k_4} (2 \mu sh \lambda x - \overline{\Omega_5} \lambda x ch \lambda x) \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y;$$

$$Q_x = -q_0 \frac{4b}{\pi^2} \sum_{1,3,5..} \frac{1}{n^2} \left\{ \left[sh \lambda (x-c) \right] \eta (x-c) - \left[sh \lambda (x-c-\tau) \right] \eta (x-c-\tau) + \right. \\ \left. + 2 \overline{k_4} ch \lambda x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \sin \lambda y;$$

$$Q_y = q_0 \frac{4b}{\pi^2} \sum_{1,3,5..} \frac{1}{n^2} \left\{ \left[1 - ch \lambda (x-c) \right] \eta (x-c) - \left[1 - ch \lambda (x-c-\tau) \right] \eta (x-c-\tau) - \right. \\ \left. - 2 \overline{k_4} sh \lambda x \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda y;$$

$$\begin{aligned}
H_{xy} = & -q_0 \frac{4b^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} \overline{\Omega}_5 \left\{ \frac{1}{2} [-sh \lambda(x-c) + \lambda(x-c) ch \lambda(x-c)] \eta(x-c) - \right. \\
& - \frac{1}{2} [-sh \lambda(x-c-\tau) + \lambda(x-c-\tau) ch \lambda(x-c-\tau)] \eta(x-c-\tau) + \\
& \left. + \overline{k}_3 ch \lambda x + \overline{k}_4 (ch \lambda x + \lambda x sh \lambda x) \right\} \sin \lambda \frac{\xi}{2} \sin \lambda \xi_1 \cos \lambda y,
\end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{k}_3 = & \frac{1}{2 sh^2 \lambda a} \left\{ (2 sh \lambda a + \lambda a ch \lambda a) [ch \lambda(a-c) - ch \lambda(a-c-\tau)] - \right. \\
& \left. - \lambda sh \lambda a [(a-c) sh \lambda(a-c) - (a-c-\tau) sh \lambda(a-c-\tau)] \right\}; \\
\overline{k}_4 = & -\frac{1}{2 sh \lambda a} [ch \lambda(a-c) - ch \lambda(a-c-\tau)]; \quad \overline{\Omega}_5 = 1 - \mu.
\end{aligned}$$

По полученным в данной работе выражениям был выполнен расчет изотропной прямоугольной пластинки с исходными геометрическими параметрами и $\mu = 0,3$.

Результаты расчета представлены в табл. 3.

Таблица 3. Максимальные значения перемещения, моментов и перерезывающей силы в изотропной пластинке при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0 равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами τ и ξ

Table 3. Maximum values of displacement, moments and shearing force in an isotropic plate under the action of a continuous load with an intensity q_0 uniformly distributed over a rectangle with sides τ and ξ

Число членов ряда / Number of row members	$w_{\max}$	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(Q_x)_{\max}$	$Q_y \left(x, \frac{b}{2} \right)$	$H_{xy} \left(x, \frac{b}{2} \right)$
1	0,0005163	0,0070022	0,0041930	0,0228609	0	0
3	0,0005614	0,0086516	0,0063553	0,0371292	0	0
5	0,0005791	0,0093023	0,0074014	0,0463640	0	0
7	0,0005815	0,0095962	0,0079490	0,0522046	0	0
9	0,0005822	0,0097304	0,0082323	0,0556913	0	0
11	0,0005825	0,0097873	0,0083651	0,0575396	0	0
13	0,0005825	0,0098057	0,0084120	0,0582680	0	0

Источники: выполнено Д.А. Сурниным / Source: made by D.A. Surnin.

Значения, приведенные в табл. 3, необходимо умножить: для w на $q_0 \frac{a^4}{D_2}$; для M_x на $q_0 a^2$;

для M_y на $q_0 a^2$; для Q_x на $q_0 a$.

Результаты расчета табл. 3 полностью совпадают с данными, приведенными в работе [25, с. 163–164].

Анализ результатов выполненных расчетов показал, что при расчетах ортотропной прямоугольной пластинки по полученным формулам при действии сплошной нагрузки интенсивностью q_0 , равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами τ и ξ , получается более быстрая сходимость решений и значительно уменьшается вычислительная работа по сравнению с ранее применяемыми методами.

4. Выводы

1. Получены аналитические решения изгиба ортотропных прямоугольных тонких пластин, шарнирно опертых по всему контуру и находящихся под действием полосовой нагрузки и нагрузки, действующей по прямоугольной области.
2. Исследовано напряженно-деформированное состояние пластины при действии нагрузки, равномерно распределенной по прямоугольной области.
3. Представленные результаты показывают, что при расчетах ортотропной прямоугольной пластинки по полученным формулам при действии нормально приложенной нагрузки по прямоугольной области получается более быстрая сходимость решений и значительно уменьшается вычислительная работа по сравнению с ранее применяемыми методами.
4. Полученные результаты, как ожидается, послужат точным решением для проверки численных (приближенных) решений.

Список литературы

1. Петраков И.Е., Садовский В.М., Садовский О.В. Анализ изгиба композитных пластин с учетом различия сопротивлений растяжению и сжатию // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 5 (369). С. 172–183. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210517> EDN: XIVALM
2. Eshmatov B.Kh., Abdikarimov R.A. Bending of fiber-reinforced composite wing-like plates // AIP Conference Proceedings. Ensuring Seismic Safety and Seismic Stability of Buildings and Structures, Applied Problems of Mechanics. 2025. Vol. 3265. Issue 1. <https://doi.org/10.1063/5.0265306>
3. Уварова Н.Б., Филатов В.В., Чубарова А.А. Расчет ортотропных пластин с применением обобщенных уравнений метода конечных разностей // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 2. С. 48–52. EDN: VZQJKN
4. Великанов П.Г. Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений и систем в частных производных для изо- и ортотропных материалов. Часть II // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22. № 2. С. 15–30. <https://doi.org/10.31429/vestnik-22-2-15-30> EDN: SBD BCP
5. Markous N.A. Boundary mesh free method with distributed sources for Kirchhoff plate bending problems Author links open overlay panel // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 94. P. 139–151. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.015> EDN: ROHSCY
6. Thai Y.-T., Kim S.-E. Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates // International Journal of Mechanical Sciences. 2012. Vol. 54. No. 1. P. 269–276. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.007>
7. Bhaskar K., Sivaram A. Untruncated infinite series superposition method for accurate flexural analysis of isotropic/orthotropic rectangular plates with arbitrary edge conditions // Composite Structures. 2008. Vol. 83. No. 1. P. 83–92. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.04.001> EDN: KULAKN
8. Shi W., Li X., Wang C. Bending of a rectangular plate with rotationally restrained edges under a concentrated force // Applied Mathematics and Computation. 2016. Vol. 286. P. 265–278. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.04.029> EDN: XZEWBT
9. Yao W.A., Hu X., Xiao F. Symplectic system based analytical solution for bending of rectangular orthotropic plates on winkler elastic foundation // Acta Mechanica Sinica. 2011. Vol. 27. No. 6. P. 929–37. <https://doi.org/10.1007/s10409-011-0532-y> EDN: ISEUUZ
10. Li R., Wang B., Li P. Hamiltonian system-based benchmark bending solutions of rectangular thin plates with a corner point-supported // International Journal of Mechanical Sciences. 2014. Vol. 85. P. 212–218. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.004>
11. Голоскоков Д.П., Матросов А.В. Изгиб заземленной тонкой ортотропной пластины методом Канторовича // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21. Вып. 3. С. 345–360. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.303> EDN: PLHUYS
12. Hassan A.H.A., Kurgan N., Can N. The correct derivation of the buckling equations of the sheardeformable FGM plates for the extended Kantorovich method // Meccanica. 2022. Vol. 57. P. 441–456. <https://doi.org/10.1007/s11012-021-01441-0> EDN: EIRFCW
13. Li R., Tian B., Zhong Y. Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading // Meccanica. 2013. Vol. 48. No. 10. P. 2497–2510. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9764-1> EDN: DFLXOX

14. He Y., Duan M., Su J. Bending of rectangular orthotropic plates with rotationally restrained and free edges: Generalized integral transform solutions // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 247. Article no. 113129. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113129> EDN: LHNYSM
15. Xu Q., Yang Z., Ullah S., Zhang J., Gao Y. Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method // *Advances in Civil Engineering*. 2020. Vol. 2020. Article no. 8848879. <https://doi.org/10.1155/2020/8848879> EDN: JUIHRI
16. He Y., An C., Su J. Bending of orthotropic rectangular thin plates with two opposite edges clamped // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2020. Vol. 234. No. 6. P. 1220–1230. <https://doi.org/10.1177/0954406219889082> EDN: LAHOZS
17. Zhang J., Zhou C., Ullah S., Zhong Y., Li R. Two-dimensional generalized finite integral transform method for new analytic bending solutions of orthotropic rectangular thin foundation plates // *Applied Mathematics Letters*. 2019. Vol. 92. P. 8–14. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.12.019>
18. Fu G., Tuo Y., Su B., Shi C., Su J. Bending of variable thickness rectangular thin plates resting on a double-parameter foundation: integral transform solution // *Engineering Computations*. 2022. Vol. 39. No. 7. P. 2689–2704. <https://doi.org/10.1108/EC-11-2021-0692> EDN: OVLSIK
19. Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К. Напряженно-деформированное состояние ортотропной прямоугольной пластинки, свободно опертой по всем сторонам // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2025. Т. 21. № 4. С. 307–320. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-307-320> EDN: CFFLUI
20. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М., Л. : Гостехиздат, 1947. 355 с.
21. Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Копнов В.А., Поспелов А.Д., Синюков А.М. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / под ред. И.И. Гольденבלата. Москва : Высшая школа, 1970. 407 с.
22. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Москва : Наука, 1968. 416 с.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1 : Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Москва : Наука, 1969. 343 с.
24. Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2012. № 8. С. 70–77. EDN: PBJFXB
25. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва : Наука, 1966. 635 с.

References

1. Petrakov IE, Sadovskii VM, Sadovskaya OV. Analysis of bending of composite plates with account for the difference in resistance to tension and compression. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021;62(5):851–860. <https://doi.org/10.1134/S0021894421050175> EDN: MDADLW
2. Eshmatov BKh, Abdikarimov RA. Bending of fiber-reinforced composite wing-like plates. *AIP Conference Proceedings. Ensuring Seismic Safety and Seismic Stability of Buildings and Structures, Applied Problems of Mechanics*. 2025;3265(1). <https://doi.org/10.1063/5.0265306>
3. Uvarova NB, Filatov VV, Chubarova AA. The use of generalized equations of finite difference method for calculation of orthotropic plates. *Industrial and Civil Engineering*. 2018;(2):48–52. (In Russ.) EDN: VZQJKH
4. Velikanov PG. Alternative methods for obtaining fundamental solutions of differential equations and partial differential systems for isotropic and orthotropic materials. Part II. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2025;22(2):15–30. (In Russ.) <https://doi.org/10.31429/vestnik-22-2-15-30> EDN: SDBBCP
5. Markous NA. Boundary mesh free method with distributed sources for Kirchhoff plate bending problems Author links open overlay panel. *Applied Mathematical Modelling*. 2021;94:139–151. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.01.015> EDN: ROHSCY
6. Thai Y-T, Kim S-E. Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012;54(1):269–276. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.007>
7. Bhaskar K, Sivaram A. Untruncated infinite series superposition method for accurate flexural analysis of isotropic/orthotropic rectangular plates with arbitrary edge conditions. *Composite Structures*. 2008;83(1):83–92. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.04.001> EDN: KULAKN
8. Shi W, Li X, Wang C. Bending of a rectangular plate with rotationally restrained edges under a concentrated force. *Applied Mathematics and Computation*. 2016;286:265–278. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.04.029> EDN: XZEWBT
9. Yao WA, Hu X, Xiao F. Symplectic system based analytical solution for bending of rectangular orthotropic plates on winkler elastic foundation. *Acta Mechanica Sinica*. 2011;27(6):929–37. <https://doi.org/10.1007/s10409-011-0532-y> EDN: ISEUZZ

10. Li R, Wang B, Li P. Hamiltonian system-based benchmark bending solutions of rectangular thin plates with a corner point-supported. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014;85:212–218. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.004>
11. Goloskokov DP, Matrosov AV. Bending of a clamped thin orthotropic plate by the Kantorovich method. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2025;21(3):345–360. (In Russ.) <https://doi.org/10.21638/spbu10.2025.303> EDN: PLHUYS
12. Hassan AHA, Kurgan N, Can N. The correct derivation of the buckling equations of the sheardeformable FGM plates for the extended Kantorovich method. *Meccanica*. 2022;57:441–456. <https://doi.org/10.1007/s11012-021-01441-0> EDN: EIRFCW
13. Li R, Tian B, Zhong Y. Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading. *Meccanica*. 2013;48(10):2497–2510. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9764-1> EDN: DFLXOX
14. He Y, Duan M, Su J. Bending of rectangular orthotropic plates with rotationally restrained and free edges: Generalized integral transform solutions. *Engineering Structures*. 2021;247:113129. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113129> EDN: LHNYSM
15. Xu Q, Yang Z, Ullah S, Zhang J, Gao Y. Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method. *Advances in Civil Engineering. Adv. Civ. Eng.* 2020;2020:8848879. <https://doi.org/10.1155/2020/8848879> EDN: JUIHRI
16. He Y, An C, Su J. Bending of orthotropic rectangular thin plates with two opposite edges clamped. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2020;234(6):1220–30. <https://doi.org/10.1177/09544406219889082> EDN: LAHOZS
17. Zhang J, Zhou C, Ullah S, Zhong Y, Li R. Two-dimensional generalized finite integral transform method for new analytic bending solutions of orthotropic rectangular thin foundation plates. *Applied Mathematics Letters*. 2019;92:8–14. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.12.019>
18. Fu G, Tuo Y, Su B, Shi C, Su J. Bending of variable thickness rectangular thin plates rest-ing on a double-parameter foundation: integral transform solution. *Engineering Computations*. 2022;39(7):2689–2704. <https://doi.org/10.1108/EC-11-2021-0692> EDN: OVLSIK
19. Shagivaleev KF, Surnin DA, Surnina EK. Stress-strain state of an orthotropic rectangular plate simply supported on all sides. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(4):307–320. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-307-320> EDN: CFFLUI
20. Lekhnitsky SG. *Anisotropic plates*. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat Publ.; 1947. (In Russ.)
21. Bazhanov VL, Goldenblat II, Kopnov VA, Pospelov AD, Sinyukov AM. *Fiberglass Plates and Shells*. Edited by I.I. Goldenblat. Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1970. (In Russ.)
22. Aramanovich IG, Lunts GL, Elsgolts LE. *Functions of a complex variable. Operational calculus. Stability theory*. Moscow: Nauka Publ.; 1968. (In Russ.)
23. Bateman G, Erdelyi A. *Tables of integral transforms*. Vol. 1. Fourier, Laplace, Mellin transforms. Moscow: Nauka Publ.; 1969. (In Russ.)
24. Smerdov AA, Buyanov IA, Chudnov IV. Analysis of optimal combinations of requirements to developed CFRP for large space-rocket designs. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2012;8:70–77. (In Russ.) EDN: PBJFXB
25. Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York; 1959. ISBN 0070858209, 9780070858206