СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ
STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2026. 22(3). 183–198

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS



АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ
ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-3-183-198
EDN: LCSKFX

Научная статья / Research article

Ортотропная гиперупругая модель деформирования бетона при сложном многоосном нагружении

А.В. Бенин[1], **А.С. Семенов**[2]✉

[1] Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, *Санкт-Петербург, Российская Федерация*
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, *Санкт-Петербург, Российская Федерация*

✉ semenov.artem@googlemail.com

Поступила в редакцию: 22 апреля 2026 г.
Доработана: 20 мая 2026 г.
Принята к публикации: 1 июня 2026 г.

Аннотация. Предложена математическая модель для описания нелинейного деформирования бетона при одноосном и многоосном нагружении с учетом разносопротивляемости материала при растяжении/сжатии. Учет ортотропии отражает направленный характер микрорастрескивания бетона. Модель учитывает нелинейность, многоосность и анизотропию деформирования бетона на основе использования модели локально-ортотропного гиперупругого материала с осями ортотропии, совпадающими с направлениями главных напряжений. В ортотропной модели материала учитываются все семь возможных совместных инвариантов тензора деформации и тензоров анизотропии. Для удобства идентификации детально исследован случай кусочно-квадратичной аппроксимации упругого потенциала. Рассматриваемая модель в силу существования потенциала обладает улучшенной сходимостью при численном решении нелинейных краевых задач. Сравнение результатов предложенной локально-ортотропной гиперупругой модели деформирования с данными экспериментов и результатами расчета по ортотропной модели Н.И. Карпенко продемонстрировали хорошую точность прогнозов при одноосном (отличие от экспериментов менее 1 %) и многоосном нагружении (отличие от экспериментов менее 15 %).

Ключевые слова: бетон, моделирование, ортотропный гиперупругий материал, разносопротивляемость при растяжении/сжатии, нелинейное поведение бетона

Вклад авторов. *Бенин А.В.* — концепция исследования, анализ литературы, разработка математической модели, анализ результатов, редактирование текста; *Семенов А.С.* — разработка математической модели, выполнение расчетов и анализ результатов, подготовка и редактирование текста. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Заявление об использовании технологий искусственного интеллекта. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Заявление о доступности данных. Все данные, полученные в ходе этого исследования, включены в публикуемую статью.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 25-19-00921 «Многоуровневые микроструктурные модели неупругого деформирования и разрушения моно- и поликристаллических жаропрочных сплавов при сложном термомеханическом нагружении».

Бенин Андрей Владимирович, кандидат технических наук, заведующий испытательной лабораторией «Механическая лаборатория им. проф. Н.А. Белелюбского», доцент кафедры механики и прочности материалов и конструкций, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Российская Федерация, 190031, г. Санкт-Петербург, Московский пр., д. 9; eLIBRARY SPIN-код: 8251-4345, ORCID: 0000-0001-5646-0354; e-mail: nich@pgups.ru

Семенов Артем Семенович, доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы «Механика и процессы управления», Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Российская Федерация, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29; eLIBRARY SPIN-код: 8879-2244, ORCID: 0000-0002-8225-3487; e-mail: semenov.artem@googlemail.com

© Бенин А.В., Семенов А.С., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Для цитирования: *Бенин А.В., Семенов А.С.* Ортотропная гиперупругая модель деформирования бетона при сложном многоосном нагружении // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 3. С. 183–198. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-183-198 EDN: LCSKFX

Orthotropic Hyperelastic Model of Concrete Deformation Under Combined Multiaxial Loading

Andrey V. Benin[1], Artem S. Semenov[2]✉

[1] Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, *Saint Petersburg, Russian Federation*
[2] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, *Saint Petersburg, Russian Federation*

✉ semenov.artem@googlemail.com

Received: April 22, 2026
Revised: May 20, 2026
Accepted: June 1, 2026

Abstract. A mathematical model is proposed to describe nonlinear deformation of concrete under uniaxial and multiaxial loading. The material model takes into account the difference in the material's resistance to tension and compression. Accounting for orthotropy reflects the directional nature of concrete microcracking. The model accounts for the nonlinearity, multiaxiality, and anisotropy of concrete deformation using a locally orthotropic hyperelastic material model with orthotropic axes coinciding with the principal stress directions. The orthotropic material model takes into account all seven possible joint invariants of the strain tensor and anisotropy tensors. The case of a piecewise quadratic approximation of the elastic potential is studied in detail. Due to the existence of the potential, this model has improved convergence in the numerical solution of nonlinear boundary value problems. A comparison of the results of the proposed locally orthotropic hyperelastic deformation model with experimental data and calculation results using N.I. Karpenko's orthotropic model demonstrated good prediction accuracy under uniaxial (difference from experiments less than 1%) and multiaxial (difference from experiments less than 15%) loading.

Keywords: concrete, modeling, orthotropic hyperelastic material, tension-compression anisotropy, non-linear concrete behavio

Authors' contribution: *Benin A.V.* — conceptualization, literature review, mathematical model development, analysis of results, text editing; *Semenov A.S.* — mathematical model creation, calculations and analysis of results, text draft, review and editing. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Statement on the use of artificial intelligence technologies. No generative artificial intelligence technologies were used in the creation of this article.

Data availability. All data obtained during this study are included in the article being published.

Funding. The research is funded by the Russian Scientific Foundation № 25-19-00921 "Multilevel microstructural models of inelastic deformation and fracture for monocrystalline and polycrystalline superalloys under complex thermo-mechanical loading."

For citation: Benin AV, Semenov AS. Orthotropic hyperelastic model of concrete deformation under combined multiaxial loading. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2026;22(3):183–198. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-3-183-198 EDN: LCSKFX

1. Введение

Основными причинами нелинейного поведения бетона являются процессы микрорастрескивания при растяжении и потери несущей способности (микрорастрескивание и раскрашивание) при сжатии, а также ползучесть бетона. Необходимость учета нелинейных свойств бетона [1] возникает при решении различных задач оценки прочности железобетонных конструкций. Поэтому в 2003 г. вместо введенных в СССР Строительных норм и правил — СНиП 2.03.01-84[1] были утверждены и введены в действие новые Нормы проектирования бетонных и железобетонных конструкций — СНиП 52-01-2003[2], в которых основным методом расчета впервые в Российской Федерации декларируется расчет по нелинейной деформационной модели с использованием диаграмм деформирования бетона и арматуры. Данный подход, основанный на учете нелинейного деформирования, сохранился в актуализированной версии СП 63.13330.2018[3], принятой в 2019 г.

[1] СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции. Госстрой СССР. Москва : ЦИТП Госстроя СССР, 1985. 79 с.
[2] СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Москва : ГУП НИИЖБ Госстроя России, 2004. 49 с.
[3] СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Москва : Минстрой России, 2018. 143 с. URL: https://www.minstroyrf.gov.ru/upload/iblock/d40/SP-63.pdf (дата обращения: 25.12.2025).

Учет нелинейности при описании поведения бетона при трехосном напряженном состоянии может быть выполнен как в рамках нелинейной теории упругости [1; 2–9], так и теории пластичности [1; 9–25], а также с использованием моделей материала с учетом поврежденности [9; 26–50]. Детальные обзоры моделей упругого и неупругого деформирования бетона представлены в [1; 51].

Ряд ответственных элементов железобетонных конструкций (приопорные участки коробчатых элементов пролетных строений, зоны анкеровки напрягаемой арматуры в балках пролетных строений, узлы соединения колонн с плитами и балками, диафрагмы пролетных строений, пилоны вантовых мостов и т. д.) работают в условиях многоосного напряженного состояния. Создание трехмерной нелинейной анизотропной модели деформирования бетона является не до конца решенной задачей. Существующие модели нелинейного деформирования бетона [10–13; 19; 31; 40; 52 и др.], как правило, ограничены рассмотрением *изотропного* материала. Учет *ортотропии*, отражающей характер микрорастрескивания бетона, выполнен, например, в модели предложенной Н.И. Карпенко [3]. Недостатком данной модели является отсутствие упругого потенциала. В данном исследовании учитываются нелинейность, многоосность и анизотропия деформирования бетона на основе использования модели локально-ортотропного гиперупругого материала с осями ортотропии, совпадающими с направлениями осей главных напряжений. Рассматриваемая модель в силу существования потенциала обладает рядом преимуществ при численном решении краевых задач, таких как симметрия матриц жесткости, улучшенная сходимость итерационных процедур поиска нелинейного решения. Следует отметить, что гиперупругая модель обладает также свойством термодинамической состоятельности.

При одноосном растяжении возникновение и развитие трещин при микрорастрескивании происходит в плоскости ортогональной направлению воздействия. При сложном многоосном напряженном состоянии образование и развитие трещин при микрорастрескивании происходит преимущественно в плоскости ортогональной действию главного максимального растягивающего напряжения. При наличии двух (или трех) положительных главных значений напряжений трещины образуются в двух (или трех) взаимоортогональных плоскостях, ориентация которых определяется главными площадками тензора напряжений [1]. Появление системы одинаково ориентированных микротрещин приводит к изменению механических свойств бетона. Его жесткость в определенных направлениях уменьшается. Он не может рассматриваться уже как *изотропное* тело, и подходящей аппроксимацией его анизотропии является в общем случае *ортотропный* материал.

Локальная ортотропия приобретается в процессе роста нагрузки в силу неоднородного напряженно-деформированного состояния вследствие направленного, в зависимости от ориентации площадок главных напряжений, развития внутренних микротрещин. В соответствии с принципом симметрии, сформулированным П. Кюри, «элементы симметрии причин должны проявляться в вызванных ими следствиях» [53], определяющие уравнения материала должны учитывать элементы симметрии микроструктуры бетона. Учет ортотропии в рамках упругой модели материала выполнен в работах [2; 4; 6–8 и др.], при использовании моделей пластичности и поврежденности в [41; 47–49 и др.], но, следует отметить, что ни в одной из цитируемых работ не вводился упругий потенциал.

Вторым фактором повышения точности нелинейного решения, наряду с учетом анизотропии, является выбор аппроксимирующей одноосные экспериментальные кривые при сжатии и растяжении функции. Различные эмпирически мотивированные аналитические аппроксимации диаграмм деформирования бетона предложены в работах [54–63 и др.]. Детальный обзор работ данного направления представлен в [51; 60; 62]. Примерами подобных зависимостей для описания диаграмм одноосного кратковременного сжатия $\sigma_{xx}(\varepsilon_{xx})$ являются следующие:

- *Рекомендация европейских норм (EN 1992-1-1*[4]*)*:

$$\frac{\sigma_{xx}}{\hat{\sigma}_c} = \frac{k\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c} - \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c}\right)^2}{1+(k-2)\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c}}, \tag{1}$$

[4] EN 1992-1-1:2004 (English): Eurocode 2: Design of concrete structures — Part 1–1: General rules and rules for buildings. 2004. 225 p.

где $\hat{\sigma}_c = R_b = f_{cm}$ — пиковое напряжение (прочность) при сжатии бетона; $\hat{\varepsilon}_c$ — деформации, соответствующие пиковым напряжениям $\hat{\sigma}_c$; $k = 1{,}05$, $E_{cm}\hat{\varepsilon}_c / f_{cm}$; E_{cm} — начальный (секущий) модуль упругости бетона, определяемый при уровне напряжений $0{,}4 f_{cm}$.

- *Аппроксимация Н.И. Карпенко* [1]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_c^0\left(\hat{\nu}_c \pm (\nu_0 - \hat{\nu}_c)\sqrt{1 - \omega_1 \frac{\sigma_{xx}}{\hat{\sigma}_c} - (1-\omega_1)\left(\frac{\sigma_{xx}}{\hat{\sigma}_c}\right)^2}\right)}, \tag{2}$$

где E_c^0 – начальный модуль упругости бетона при сжатии; $\hat{\nu}_c = \hat{E}_c / E_c^0 = \hat{\sigma}_c / (\hat{\varepsilon}_c E_c^0)$ — значение коэффициента изменения секущего модуля $\nu_c = E_c / E_c^o = \sigma_{xx} / (\varepsilon_{xx} E_c^o)$ в вершине диаграммы; для восходящей ветви $\nu_0 = 1$, $\omega_1 = 2 - 2{,}5\hat{\nu}_c$, а для нисходящий ветви — $\nu_0 = 2{,}05\hat{\nu}_c$, $\omega_1 = 1{,}95\hat{\nu}_c - 0{,}138$.

В выражении (2) знак плюс соответствует восходящей ветви диаграммы деформирования бетона, знак минус — нисходящей ветви.

Экспоненциально-степенная аппроксимация Г.В. Мурашкина [60]:

$$\sigma_{xx} = A\varepsilon_{xx}^b e^{-c\varepsilon_{xx}}, \tag{3}$$

где коэффициенты *A, b, c* определяются из условий $\left.\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{xx}}\right|_{\varepsilon_{xx}=0} = E_c^0$, $\left.\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{xx}}\right|_{\varepsilon_{xx}=\hat{\varepsilon}_c} = 0$, $\sigma_{xx}\big|_{\varepsilon_{xx}=\hat{\varepsilon}_c} = \hat{\sigma}_c$.

- *Аппроксимация А.В. Бенина* [59]:

$$\frac{\sigma_{xx}}{\hat{\sigma}_c} = \begin{cases} k\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c} - (2k-3)\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c}\right)^2 + (k-2)\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\hat{\varepsilon}_c}\right)^3, & |\varepsilon_{xx}| \le \varepsilon_{\text{crc}} \\ \frac{\sigma_{\text{res}}}{\hat{\sigma}_c} + \frac{\sigma_{\text{crc}} - \sigma_{\text{res}}}{\hat{\sigma}_c + d(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{\text{crc}})\hat{E}_c}, & |\varepsilon_{xx}| \ge \varepsilon_{\text{crc}} \end{cases}, \tag{4}$$

где $k = E_c^0 / \hat{E}_c = E_c^0\hat{\varepsilon}_c / \hat{\sigma}_c = 1/\hat{\nu}_c$, σ_{res} — остаточная прочность, $\sigma_{\text{crc}} = 0{,}7\hat{\sigma}_c$ и ε_{crc} — напряжения и деформации начала трещинообразования.

Наряду с едиными аналитическими зависимостями для всей диаграммы или ее части (1)–(4) и др. в практике численных расчетов распространение получили кусочно-линейные аппроксимации. Простейшими вариантами являются билинейная и трилинейная аппроксимации. При большом числе точек мультилинейные аппроксимации позволяют с высокой точностью описать аналитическую зависимость или данные эксперимента (получаемые, как правило в табличном виде). Кусочно-линейная аппроксимация диаграммы деформирования допускает математическое представление

$$\sigma_{xx} = \sum_{i=1}^{N} A_i \varepsilon_{xx}\left[H(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{i+1}) - H(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_i)\right], \tag{5}$$

где $H(x) = \frac{1}{2}\left[\text{sign}(x) + 1\right] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$ — функция Хэвисайда, A_i — константы, определяемые на основе наклонов диаграмм деформирования при сжатии и/или растяжении.

Цель исследования — разработка общей ортотропной гиперупругой модели нелинейного деформирования бетона при одноосном и многоосном нагружении с возможностью упрощенной идентификации параметров материала на основе кусочно-линейных аппроксимаций диаграммы деформирования.

2. Методы

2.1. Определяющие уравнения ортотропной гиперупругой модели

Разработка общей трехмерной нелинейной анизотропной модели деформирования бетона при сложном многоосном нагружении не получила окончательного решения. Существующие модели неупругого деформирования бетона ограничены рассмотрением случая изотропного материала. Учет *ортотропии*, отражающей характер направленного микрорастрескивания бетона, выполнен в модели Н.И. Карпенко [1–3]. Одним из недостатков данной модели является отсутствие упругого потенциала. В данном исследовании сделана попытка учесть нелинейность, многоосность и анизотропию деформирования бетона на основе использования модели локально-ортотропного гиперупругого материала с осями ортотропии, совпадающими с направлениями главных напряжений.

В общем случае при анализе сложного многоосного напряженного состояния элементов железобетонных конструкций необходимо использовать общую трехмерную форму определяющих уравнений, представляющую собой связь шести компонент тензора напряжений с шестью компонентами тензора деформаций, являющуюся при значительных уровнях напряжений нелинейной. Одной из рациональных моделей материала для описания физически нелинейного деформирования бетона является ортотропный *гиперупругий* материал. Гиперупругость подразумевает возможность введения скалярного потенциала (свободной энергии, термодинамического потенциала Гельмгольца) для тензора деформаций, позволяющего определить тензор напряжений как его производную

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

или в используемой далее форме записи прямого тензорного исчисления

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{6}$$

Введение выпуклого потенциала обеспечивает существование, единственность решения и возможность использования эффективных методов конечно-элементного решения (эллиптических) краевых задач.

Для изотропного материала потенциал может рассматриваться как функция инвариантов тензора деформации. Для линейно-упругого материала потенциал — квадратичная функция первого и второго инвариантов.

Группа симметрии ортотропного материала включает отражения относительно трех ортогональных плоскостей, характеризуемых нормалями к плоскостям роста микротрещин $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$. Для трещиноватого бетона эти направления соответствуют направлениям главных напряжений и могут изменяться в зависимости от программы сложного непропорционального нагружения. Предполагается, что упругий потенциал ψ для ортотропного материала является функцией инвариантов тензора деформации и тензоров второго ранга, характеризующих анизотропные свойства материала [64]:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1; \tag{7a}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2; \tag{7b}$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3, \tag{7c}$$

где символ $\otimes$ обозначает диадное (тензорное) умножение векторов.

При решении конкретных задач можно ограничиться рассмотрением только двух тензоров анизотропии $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, поскольку справедливо соотношение $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единичный тензор. С учетом этого аргументами упругого потенциала могут быть в общем случае 7 инвариантов:

$$J_1 = tr\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad J_2 = tr\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad I_3 = \det \boldsymbol{\varepsilon}; \tag{8}$$

$$J_4 = tr\left(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{M}_1 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad J_5 = tr\left(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2\right) = \mathbf{M}_1 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2; \tag{9}$$

$$J_6 = tr\left(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{M}_3 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad J_7 = tr\left(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2\right) = \mathbf{M}_3 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2. \tag{10}$$

В модели ортотропного гиперупругого материала задание упругого потенциала

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3) = \psi(J_1, J_2, I_3, J_4, J_5, J_6, J_7) \tag{11}$$

полностью определяет вид определяющих уравнений и тензоров упругих модулей.

В случае малых деформаций простейшим представлением упругого потенциала ψ является квадратичная форма компонент тензора деформаций:

$$\psi = \frac{1}{2}\lambda J_1^2 + \mu J_2 + \frac{1}{2}\alpha_1 J_4^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 J_6^2 + 2\alpha_3 J_5 + 2\alpha_4 J_7 + \alpha_5 J_1 J_4 + \alpha_6 J_1 J_6 + \alpha_7 J_4 J_6, \tag{12}$$

где λ и μ — параметры Ламе, $\alpha_1,...,\alpha_7$ — константы материала. Изотропному материалу соответствует случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0$.

Упругий потенциал (12) является обобщением варианта, предложенного в работе [65], путем учета инвариантов J_5 и J_7.

Для учета физической нелинейности поведения бетона предлагается обобщить (12) путем введения нелинейных функций от инвариантов:

$$\psi = \frac{1}{2}\lambda J_1^2 + \mu J_2 + a_1(J_4) + a_2(J_6) + a_3(J_5) + a_4(J_7) + a_5(J_1 J_4) + a_6(J_1 J_6) + a_7(J_4 J_6), \tag{13}$$

где $a_1,...,a_7$ — дважды дифференцируемые кусочно-непрерывные функции.

Определяющее уравнение, представляющее собой связь напряжений и деформаций, получается подстановкой (13) в (6):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = {} & \lambda J_1 \mathbf{1} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon} + \\ & + a_1' \mathbf{M}_1 + a_2' \mathbf{M}_3 + \\ & + a_3'(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_1) + a_4'(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_3) + \\ & + a_5'(J_1 \mathbf{M}_1 + J_4 \mathbf{1}) + a_6'(J_1 \mathbf{M}_3 + J_6 \mathbf{1}) + a_7'(J_4 \mathbf{M}_3 + J_6 \mathbf{M}_1).\end{aligned} \tag{14}$$

Дифференцирование этого выражения приводит к квазилинейной связи между скоростями напряжений и скоростями деформаций:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3) \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{15}$$

где тензор касательных упругих модулей 4-го ранга

$${}^4\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \tag{16}$$

представим в виде

$$\begin{aligned}{}^4\mathbf{C} = {} & \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \boxtimes \mathbf{1} + \\ & + a_1'' \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 + a_2'' \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 + \\ & + a_3'(\mathbf{M}_1 \boxtimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \boxtimes \mathbf{M}_1) + a_4'(\mathbf{M}_3 \boxtimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \boxtimes \mathbf{M}_3) + \\ & + a_3''(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_1) \otimes (\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_1) + a_4''(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_3) \otimes (\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}_3) + \\ & + a_5'(\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{M}_1) + a_6'(\mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{M}_3) + a_7'(\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_1) + \\ & + a_5''(J_1 \mathbf{M}_1 + J_4 \mathbf{1}) \otimes (J_1 \mathbf{M}_1 + J_4 \mathbf{1}) + \\ & + a_6''(J_1 \mathbf{M}_3 + J_6 \mathbf{1}) \otimes (J_1 \mathbf{M}_3 + J_6 \mathbf{1}) + \\ & + a_7''(J_4 \mathbf{M}_3 + J_6 \mathbf{M}_1) \otimes (J_4 \mathbf{M}_3 + J_6 \mathbf{M}_1).\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь используются символы прямого и перекрестного диадного (тензорного) умножения:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}, \quad (\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})_{ijkl} = \tfrac{1}{2}(A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk}). \tag{18}$$

В случае кусочно-линейной аппроксимации диаграмм деформирования (5) имеем $a_i'' = \text{const}$ для $i = 1, 2$; $a_j' = \text{const}$ для $j = 3,4,\ldots,7$ и, как следствие этого, $a_3'' = a_4'' = a_5'' = a_6'' = a_7'' = 0$, что приводит к значительному упрощению выражения (17):

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{C} &= \lambda\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{1}\boxtimes\mathbf{1} + \\
&+ a_1''\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_1 + a_2''\mathbf{M}_3\otimes\mathbf{M}_3 + \\
&+ a_3'\left(\mathbf{M}_1\boxtimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\boxtimes\mathbf{M}_1\right) + a_4'\left(\mathbf{M}_3\boxtimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\boxtimes\mathbf{M}_3\right) + \\
&+ a_5'\left(\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{M}_1\right) + a_6'\left(\mathbf{M}_3\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{M}_3\right) + a_7'\left(\mathbf{M}_1\otimes\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3\otimes\mathbf{M}_1\right).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

В этом случае тензор касательных модулей будет кусочно-постоянным. Как следует из (19), девять независимых компонент касательного тензора упругих модулей связаны (в осях собственной анизотропии $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ с введенными в (12) константами упругого потенциала соотношениями

$$
\begin{aligned}
&C_{1111} = \lambda + 2\mu + a_1'' + 2a_3' + 2a_5'; \quad C_{2222} = \lambda + 2\mu; && C_{1212} = \mu + a_3'/2; \\
&C_{1122} = \lambda + a_5'; && C_{2233} = \lambda + a_6'; && C_{2323} = \mu + a_4'/2; \\
&C_{1133} = \lambda + a_5' + a_6' + a_7'; && C_{3333} = \lambda + 2\mu + a_2'' + 2a_4' + 2a_6'; && C_{3131} = \mu + (a_3' + a')_4/2.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Константы упругого потенциала могут быть выражены через компоненты касательного тензора упругих модулей как результат решения линейной системы алгебраических уравнений (20):

$$
\begin{aligned}
&\mu = C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}; \\
&\lambda = C_{2222} - 2\left(C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}\right); \\
&a_1'' = C_{1111} + C_{2222} - 2C_{1122} - 4C_{1212}; \\
&a_2'' = C_{3333} + C_{2222} - 2C_{2233} - 4C_{2323}; \\
&a_3' = 2\left(C_{3131} - C_{2323}\right); \\
&a_4' = 2\left(C_{3131} - C_{1212}\right); \\
&a_5' = C_{1122} - C_{2222} + 2\left(C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}\right); \\
&a_6' = C_{2233} - C_{2222} + 2\left(C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}\right); \\
&a_7' = C_{1133} - C_{1122} - C_{2233} + C_{2222} - 2\left(C_{1212} + C_{2323} - C_{3131}\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Выражение (15) с учетом (20) может быть записано в матричном виде:

$$
\begin{Bmatrix} \dot\sigma_{11} \\ \dot\sigma_{22} \\ \dot\sigma_{33} \\ \dot\sigma_{12} \\ \dot\sigma_{23} \\ \dot\sigma_{31} \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\lambda + 2\mu + a_1'' + 2a_3' + 2a_5' & \lambda + a_5' & \lambda + a_5' + a_6' + a_7' & 0 & 0 & 0 \\
\lambda + a_5' & \lambda + 2\mu & \lambda + a_6' & 0 & 0 & 0 \\
\lambda + a_5' + a_6' + a_7' & \lambda + a_6' & \lambda + 2\mu + a_2'' + 2a_4' + 2a_6' & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu + \dfrac{a_3'}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \dfrac{a_4'}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \dfrac{a_3' + a_4'}{2}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \dot\varepsilon_{11} \\ \dot\varepsilon_{22} \\ \dot\varepsilon_{33} \\ 2\dot\varepsilon_{12} \\ 2\dot\varepsilon_{23} \\ 2\dot\varepsilon_{31} \end{Bmatrix}.
\tag{22}
$$

Структура матрицы в (22) позволяет уточнить физический смысл введенных констант материала. Константы a_1'' и a_2'' характеризуют влияние процессов микрорастрескивания на связь нормальных напряжений (действующих вдоль $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_3$) и соосных продольных деформаций. Константы a_3' и a_4' характеризуют влияние процессов микрорастрескивания на связь сдвиговых напряжений (действующих в плоскостях с нормалями $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_3$) и соответствующих сдвиговых деформаций. Константы a_5', a_6' и a_7'

характеризуют влияние процессов микрорастрескивания на связь нормальных напряжений и поперечных деформаций.

Обращенная форма определяющих уравнений (22), позволяющая выразить скорости деформаций через скорости напряжений, имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ 2\dot{\varepsilon}_{12} \\ 2\dot{\varepsilon}_{23} \\ 2\dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{31}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\sigma}_{31} \end{Bmatrix}, \tag{23}$$

где введенные коэффициенты в матрице касательной податливости (23) (представляющие собой касательные модули Юнга E_1, E_2, E_3 в трех направлениях вдоль осей ортотропии $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, три коэффициента Пуассона $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ и три модуля сдвига $\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31}$ выражаются через коэффициенты упругого потенциала при помощи соотношений, полученных путем инверсии верхнего левого блока 3×3 матрицы упругих модулей из (22):

$$E_1 = D / \left[\left(a_2'' + 2a_4' \right) \left(\lambda + 2\mu \right) + a_6' \left(4\mu - a_6' \right) + 4\mu \left(\lambda + \mu \right) \right];$$

$$E_3 = D / \left[\left(a_1'' + 2a_3' \right) \left(\lambda + 2\mu \right) + a_5' \left(4\mu - a_5' \right) + 4\mu \left(\lambda + \mu \right) \right];$$

$$E_2 = D / \left[a_1'' \left(a_2'' + 2a_4' + 2a_6' + \lambda + 2\mu \right) + a_2'' \left(2a_3' + 2a_5' + \lambda + 2\mu \right) + 2a_3' \left(2a_4' + 2a_6' + \lambda + 2\mu \right) + \right.$$
$$\left. + 2a_4' \left(2a_5' + \lambda + 2\mu \right) + a_5' \left(4\mu - a_5' + 2a_6' - 2a_7' \right) + a_6' \left(4\mu - a_6' - 2a_7' \right) - a_7' \left(2\lambda + a_7' \right) + 4\mu\lambda \left(\lambda + \mu \right) \right];$$

$$\nu_{21} = \frac{\left(a_2'' + 2a_4' \right) \left(\lambda + a_5' \right) + a_5' \left(2\mu + a_6' \right) - a_6'^2 - a_7' \left(\lambda + a_6' \right) + 2\lambda\mu}{\left(a_2'' + 2a_4' \right) \left(\lambda + 2\mu \right) + a_6' \left(4\mu - a_6' \right) + 4\mu \left(\lambda + \mu \right)};$$

$$\nu_{13} = \frac{-a_5' a_6' + 2\mu \left(a_5' + a_6' \right) + a_7' \left(\lambda + \mu \right) + 2\mu\lambda}{\left(a_1'' + 2a_3' \right) \left(\lambda + 2\mu \right) + a_5' \left(4\mu - a_5' \right) + 4\mu \left(\lambda + \mu \right)};$$

$$\nu_{32} = \frac{\left(a_1'' + 2a_3' \right) \left(\lambda + a_6' \right) + a_6' \left(2\mu + a_5' \right) - a_5'^2 - a_7' \left(\lambda + a_5' \right) + 2\lambda\mu}{\left(a_2'' + 2a_4' \right) \left(\lambda + 2\mu \right) + a_6' \left(4\mu - a_6' \right) + 4\mu\lambda \left(\lambda + \mu \right)};$$

$$\mu_{12} = \mu + a_3' / 2;$$

$$\mu_{23} = \mu + a_4' / 2;$$

$$\mu_{31} = \mu + a_3' / 2 + a_4' / 2;$$

$$D = a_1'' a_2'' \left(\lambda + 2\mu \right) + 2a_1'' a_4' \left(\lambda + 2\mu \right) + a_1'' a_6' \left(4\mu - a_6' \right) + 4a_1'' \mu \left(\lambda + \mu \right) + 2a_2'' a_3' \left(\lambda + 2\mu \right) + a_2'' a_5' \left(4\mu - a_5' \right) +$$
$$+ 4a_2'' \mu \left(\lambda + 2\mu \right) + 4a_3' a_4' \left(\lambda + 2\mu \right) + 2a_3' a_6' \left(4\mu - a_6' \right) + 8a_3' \mu \left(\lambda + \mu \right) + 2a_4' a_5' \left(4\mu - a_5' \right) + 8a_4' \mu \left(\lambda + \mu \right) +$$
$$+ 4a_5' \mu \left(2\mu - a_5' + a_6' - a_7' \right) + 2a_5' a_6' a_7' + 4a_6' \mu \left(2\mu - a_6' \right) - 4a_7' \mu \left(\lambda + a_6' \right) - a_7'^2 \left(\lambda + 2\mu \right) + 4\mu^2 \left(3\lambda + 2\mu \right). \tag{24}$$

При этом предполагаются выполненными условия симметрии матрицы податливости (23):

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3}. \tag{25}$$

2.2. Идентификация параметров и функций материала

В общем случае для определения 9 параметров материала $\lambda, \mu, a_1, ..., a_7$, входящих в выражение упругого потенциала (13), необходимо провести 6 опытов на жесткое или мягкое нагружение: три на одноосное растяжение/сжатие вдоль трех различных осей ортотропии и три на сдвиг в различных ортогональных плоскостях. Подобные методики определения параметров материала в натурных или вычислительных экспериментах характерны для композитов и материалов с технологически индуцированной ортотропией и вряд ли применимы для бетонов и подобных им хрупких материалов. Вместе с тем необходимо учесть специфику разносопротивляемости при растяжении/сжатии (чувствительности к виду напряженного состояния).

Рассмотрим простейший случай идентификации параметров, когда доступны кривые растяжения и сжатия только при одноосном нагружении, а также данные о поперечной деформации.

При *одноосном растяжении* вдоль оси *x*, значения главных напряжений определяются следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_{xx} > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$. Нормаль $\mathbf{n}_1$ к площадке с максимальными главными напряжениями направлена вдоль оси *x*. Очевидно, что при одноосном растяжении поперечные деформации будут отрицательны и равны друг другу $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -v_t(\varepsilon_{xx})\varepsilon_{xx}$. Функция $v_t(\varepsilon_{xx})$ предполагается известной на основе данных экспериментов. Выражения для инвариантов при растяжении определяются равенствами:

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{zz}, \quad J_2 = \varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{zz}^2, \quad I_3 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}^2, \quad J_4 = \varepsilon_{xx}, \quad J_5 = \varepsilon_{xx}^2 \quad J_6 = \varepsilon_{zz}, \quad J_7 = \varepsilon_{zz}^2. \tag{26}$$

С учетом введенных предположений система нетривиальных равенств (22) в случае ориентации нормали площадки максимальных главных напряжений $\mathbf{n}_1$ вдоль оси *x*, а $\mathbf{n}_3$ вдоль оси *z*, преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{xx} = \left[\lambda + 2\mu + a_1'' + 2a_3' + 2a_5' - v_t'\left(2\lambda + 2a_5' + a_6' + a_7'\right)\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = h_t(\varepsilon_{xx})\dot{\varepsilon}_{xx}, \\ \dot{\sigma}_{yy} = \left[\lambda + a_5' - v_t'\left(2\lambda + 2\mu + a_6'\right)\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = 0, \\ \dot{\sigma}_{zz} = \left[\lambda + a_5' + a_6' + a_7' - v_t'\left(2\lambda + 2\mu + a_2'' + 2a_4' + 3a_6'\right)\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где $h_t(\varepsilon_{xx})$ — кусочно-постоянная функция касательных модулей, определяемая по диаграмме деформирования при одноосном растяжении.

В силу симметрии (неразличимости осей *y* и *z* при одноосном растяжении из натурального состояния вдоль оси *x*, соответствующей $\mathbf{n}_1$) в дополнении к (27) следует добавить условия $C_{2222} = C_{3333}$, $C_{1122} = C_{1133}$, $C_{1212} = C_{2323}$, приводящие к равенствам

$$\begin{aligned} &a_2'' + 2a_4' + 2a_6' = 0; \\ &a_6' + a_7' = 0; \\ &a_4' = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Параметры $\lambda = \dfrac{E_0 v_0}{(1+v_0)(1-2v_0)}$ и $\mu = \dfrac{E_0}{2(1+v_0)}$ определяются по начальным значениям модуля Юнга и коэффициента Пуассона начально изотропного тела при нулевых деформациях. В силу ограниченности экспериментальных данных недостаток уравнений компенсируется принятием предположений о приближении к изотропному случаю в виде $a_3' = a_6' = 0$, тогда следствием (27) и (28) находятся все базовые константы материала при растяжении:

$$\begin{aligned} &a_1'' = h_t - 2\mu(1 + 2v_t' - 2v_t'^2) + \lambda(1 - 2v_t')^2; \\ &a_5' = 2\mu v_t' - \lambda(1 - 2v_t'); \\ &a_2'' = a_3' = a_4' = a_6' = a_7' = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

При *одноосном сжатии* вдоль оси *x*, значения главных напряжений определяются соотношениями: $\sigma_3 = \sigma_{xx} < 0, \sigma_2 = \sigma_1 = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$. Нормаль $\mathbf{n}_3$ к площадке с минимальными главными напряжениями направлена вдоль оси *x*. При одноосном сжатии поперечные деформации будут положительны и равны друг другу: $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu_c(\varepsilon_{xx})\varepsilon_{xx}$. Функция $\nu_c(\varepsilon_{xx})$ предполагается известной на основе данных экспериментов. Выражения для инвариантов при сжатии определяются равенствами:

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{zz}, \quad J_2 = \varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{zz}^2, \quad I_3 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}^2, \quad J_4 = \varepsilon_{zz}, \quad J_5 = \varepsilon_{zz}^2 \quad J_6 = \varepsilon_{xx}, \quad J_7 = \varepsilon_{xx}^2. \tag{30}$$

С учетом введенных предположений система нетривиальных равенств (22) в случае ориентации нормали площадки минимальных главных напряжений $\mathbf{n}_3$ вдоль оси *x*, а $\mathbf{n}_1$ — вдоль оси *z*, преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{zz} = \left[-\nu_c'\left(2\lambda + 2\mu + a_1'' + 2a_3' + 3a_5'\right) + \lambda + a_5' + a_6' + a_7'\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = 0, \\ \dot{\sigma}_{yy} = \left[-\nu_c'\left(2\lambda + 2\mu + a_5'\right) + \lambda + a_6'\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = 0, \\ \dot{\sigma}_{xx} = \left[-\nu_c'\left(2\lambda + a_5' + 2a_6' + a_7'\right) + \lambda + 2\mu + a_2'' + 2a_4' + 2a_6'\right]\dot{\varepsilon}_{xx} = h_c(\varepsilon_{xx})\dot{\varepsilon}_{xx}, \end{cases} \tag{31}$$

где $h_c(\varepsilon_{xx})$ — кусочно-постоянная функция касательных модулей, определяемая по диаграмме деформирования при одноосном сжатии.

В силу симметрии (неразличимости осей *y* и *z* при одноосном сжатии вдоль *x*, соответствующей $\mathbf{n}_3$) в дополнении к (31) следует добавить условия $C_{1111} = C_{2222}$, $C_{1133} = C_{2233}$, $C_{2323} = C_{3131}$, приводящие к равенствам

$$\begin{aligned} &a_1'' + 2a_3' + 2a_5' = 0, \\ &a_5' + a_7' = 0, \\ &a_3' = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

В силу ограниченности экспериментальных данных дефицит уравнений компенсируем принятием предположений о приближении к изотропному случаю в виде $a_4' = a_5' = 0$, тогда следствием (31) и (32) находятся константы материала при сжатии:

$$\begin{aligned} &a_2'' = h_c - 2\mu(1 + 2\nu_c' - 2\nu_c'^2) + \lambda(1 - 2\nu_c')^2; \\ &a_6' = 2\mu\nu_c' - \lambda(1 - 2\nu_c'); \\ &a_1'' = a_3' = a_4' = a_5' = a_7' = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Полученные в (29) и (33) ненулевые коэффициенты a_1'', a_2'', a_5', a_6' представляют собой кусочно-постоянные зависимости. В качестве параметров, определяющих интервал, в пределах которого коэффициенты остаются постоянными, выступают инварианты J_1, J_4, J_6:

$$\begin{aligned} a_1''(J_4) &= \sum_{k=1}^{N}\left\{h_t^{(k)} - 2\mu\left[1 + 2\nu_t'^{(k)} - 2\left(\nu_t'^{(k)}\right)^2\right] + \lambda\left[1 - 2\nu_t'^{(k)}\right]^2\right\}\left[H(J_4 - J_4^{(k+1)}) - H(J_4 - J_4^{(k)})\right]\langle J_4\rangle; \\ a_5'(J_1J_4) &= \sum_{k=1}^{N}\left\{2\mu\nu_t'^{(k)} - \lambda\left[1 - 2\nu_t'^{(k)}\right]\right\}\left[H(J_1J_4 - J_1^{(k+1)}J_4^{(k+1)}) - H(J_1J_4 - J_1^{(k)}J_4^{(k)})\right]\langle J_4\rangle; \\ a_2''(J_6) &= \sum_{k=1}^{N}\left\{h_c^{(k)} - 2\mu\left[1 + 2\nu_c'^{(k)} - 2\left(\nu_c'^{(k)}\right)^2\right] + \lambda\left[1 - 2\nu_c'^{(k)}\right]^2\right\}\left[H(J_6 - J_6^{(k+1)}) - H(J_6 - J_6^{(k)})\right]\langle -J_6\rangle; \\ a_6'(J_1J_6) &= \sum_{k=1}^{N}\left\{2\mu\nu_c'^{(k)} - \lambda\left[1 - 2\nu_c'^{(k)}\right]\right\}\left[H(J_1J_6 - J_1^{(k+1)}J_6^{(k+1)}) - H(J_1J_6 - J_1^{(k)}J_6^{(k)})\right]\langle -J_6\rangle, \end{aligned} \tag{34}$$

где $H(x)$ — функция Хэвисайда, $\langle x\rangle = \max(0, x)$ — скобки Маккойли.

Предложенная модель ортотропного гиперупругого материала была программно реализована в CES version 5,26 (Constitutive Equation Studio) [66], при помощи которого получены представленные ниже результаты.

3. Результаты и обсуждение

Интегрирование определяющих уравнений в случае жесткого нагружения осуществляется непосредственно на основе (22). При мягком нагружении, когда заданы компоненты тензора напряжений и требуется найти компоненты тензора деформации, необходимо обращение матрицы касательных модулей. Структура матрицы касательных модулей (22), содержащая большое количество нулевых компонент, соответствует представлению в координатах осей собственной анизотропии $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$. Они определяются процессами микрорастрескивания и непосредственно связаны с направлениями осей главных напряжений. Поэтому в общем случае при произвольном многоосном нагружении при решении задач требуется предварительный поиск главных осей тензора напряжения.

В осях собственной анизотропии касательные компоненты тензора напряжений отсутствуют и для упрощенного набора констант (см. раздел 2.2, (29), (33) и (34)) в случае $\sigma_{11} > 0$ и $\sigma_{33} < 0$ получается представление

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + a_1'' + 2a_5' & \lambda + a_5' & \lambda + a_5' + a_6' \\ \lambda + a_5' & \lambda + 2\mu & \lambda + a_6' \\ \lambda + a_5' + a_6' & \lambda + a_6' & \lambda + 2\mu + a_2'' + 2a_6' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \end{Bmatrix}. \tag{35}$$

В рассматриваемом случае кусочно-постоянных коэффициентов a_1'', a_2'', a_5', a_6' (34) уравнения (35) могут быть легко проинтегрированы. В результате получаются кусочно-линейные аппроксимации диаграммы деформирования (5).

3.1. Одноосное нагружение

На рис. 1 показано сравнение результатов расчетов с использованием модели ортотропного гиперупругого материала (6)–(35) с экспериментальными данными [59] при одноосном сжатии и растяжении для бетонов B25 и B40. Результаты получены для случая жесткого нагружения, для которого удается получить как восходящие, так и ниспадающие (запиковые) ветви диаграммы деформирования

В качестве исходных данных для задания полной диаграммы деформирования, включающей как кривую сжатия, так и кривую растяжения с учетом восходящих и ниспадающих ветвей, были заданы суммарно 32 точки на диаграмме. В данном случае удается получить расчетную кривую с хорошей степенью точности. Характерные значения параметров бетонов B25 и B40 [59], используемые в расчетах представлены в таблице.

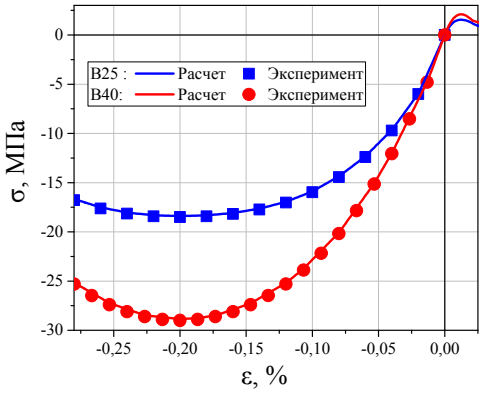


Рис. 1. Сравнение результатов расчетов с использованием модели ортотропного гиперупругого материала с экспериментальными данными при одноосном сжатии и растяжении для бетонов B25 и B40

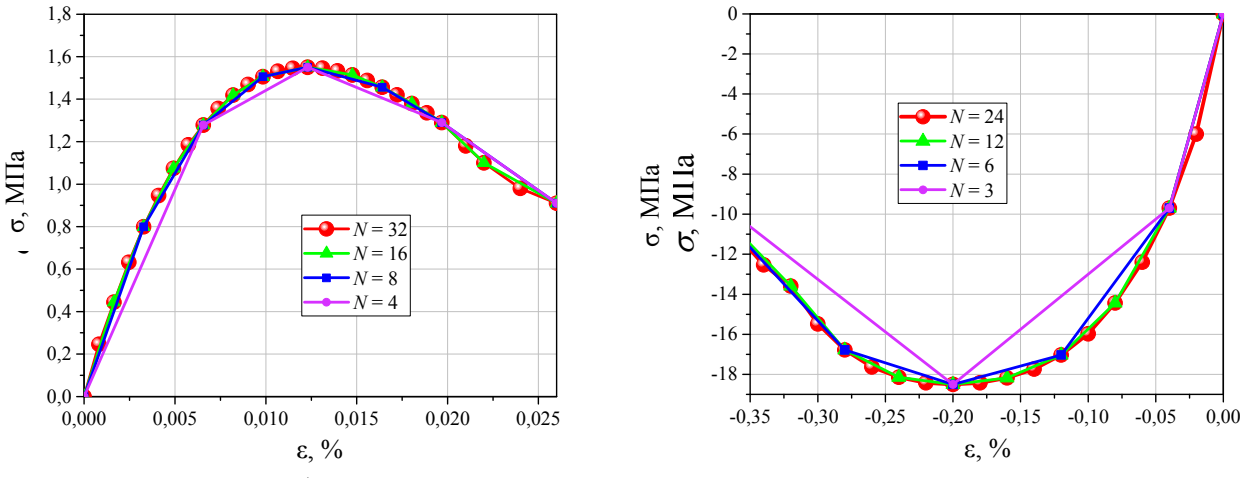
И с т о ч н и к: выполнено А.С. Семеновым. Экспериментальные данные получены А.В. Бениным [59].

Значения параметров бетонов B25 и B40, используемые в расчетах

Характеристики бетона	B25	B40
$\hat{\sigma}_c = R_b$, МПа	18,5	29,1
$\hat{\sigma}_t = R_b^t$, МПа	1,55	2,1
$\hat{\varepsilon}_c$, %	0,199	0,201
$\hat{\varepsilon}_t$, %	0,0123	0,0124
E_c^0, МПа	30000	36000
$\hat{E}_c$, МПа	9343	1455
$\hat{E}_t$, МПа	12602	16934

И с т о ч н и к: выполнено А.В. Бениным, А.С. Семеновым.

В зависимости от числа звеньев N на диаграмме деформирования получаются аппроксимации с различной степенью точности. На рис. 2 показаны многозвенные аппроксимации диаграммы деформирования бетона B25 при растяжении и сжатии для различных значений кратно увеличивающегося числа звеньев.



а *б*

Рис. 2. Расчетные диаграммы деформирования для бетона B25 при:
а — растяжении и *б* — сжатии, полученные на основе модели ортотропного гиперупругого материала с различным числом звеньев N кусочно-линейной аппроксимации
И с т о ч н и к: выполнено А.С. Семеновым.

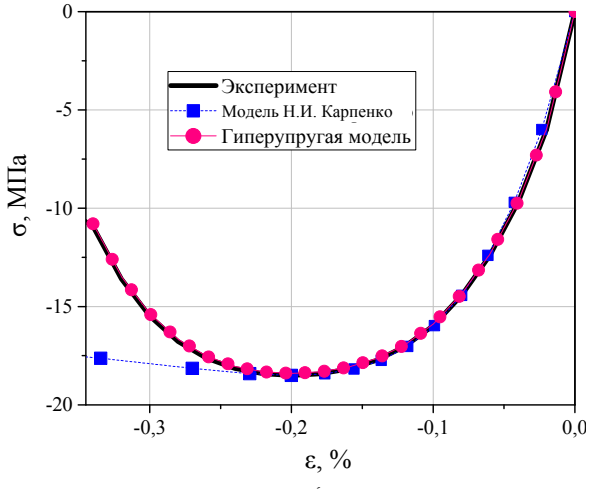


Рис. 3. Сравнение результатов расчетов с использованием гиперупругой ортотропной модели с ортотропной моделью Н.И. Карпенко и экспериментальными данными для одноосного сжатия
И с т о ч н и к: выполнено А.С. Семеновым.
Экспериментальные данные получены А.В. Бениным [59].

На восходящей ветви диаграммы обе модели демонстрируют высокую точность описания кривой, однако на нисходящей ветви для модели Н.И. Карпенко наблюдается систематическое отклонение. Обеспечить высокую точность аппроксимации гиперупругой ортотропной модели позволяет использование многозвенной кусочно-линейной аппроксимации кривой деформирования. При построении кривой сжатия использовалась аппроксимация по 16 точкам.

3.2. Многоосное нагружение

Рассматривается монотонное трехосное сжатие бетона с различной степенью поперечного стеснения. Соотношения тех осевых компонент тензора напряжений принимали значения:

- 10 %-стеснение
  с $\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 = -1 : -1/10 : -1/10$;
- 6,9 %-стеснение
  с $\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 = -1 : -1/14{,}5 : -1/14{,}5$.

Экспериментальные данные, соответствующие указанным режимам нагружения, представлены в работе Ю.Н. Малашкина [67].

Диаграммы напряжение — деформация для рассматриваемого бетона взяты из [1]. Сравнение результатов расчетов с использованием гиперупругой ортотропной модели (6)–(35) с ортотропной моделью Н.И. Карпенко (2) и экспериментальными данными [67] для различной степени стеснения показано на рис. 4 и 5. Обе ортотропные модели демонстрируют удовлетворительную точность прогнозирования (отличие от эксперимента менее 15 %) по сравнению с экспериментом.

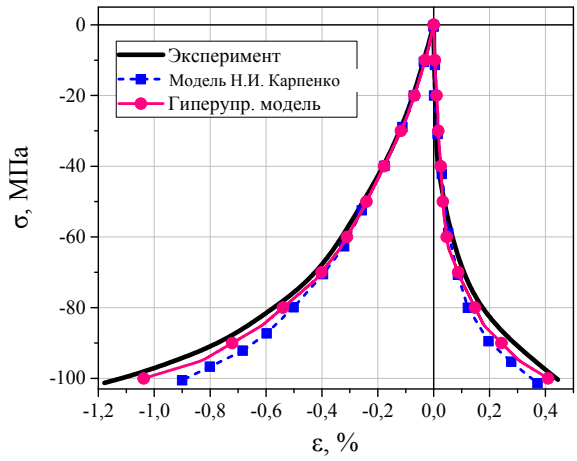


Рис. 4. Сравнение результатов расчетов с использованием гиперупругой ортотропной модели с ортотропной моделью Н.И. Карпенко и экспериментальными данными для многоосного нагружения $\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 = -1 : -1/10 : -1/10$

И с т о ч н и к: выполнено А.С. Семеновым, А.В. Бениным. Экспериментальные данные получены Ю.Н. Малашкиным [67].

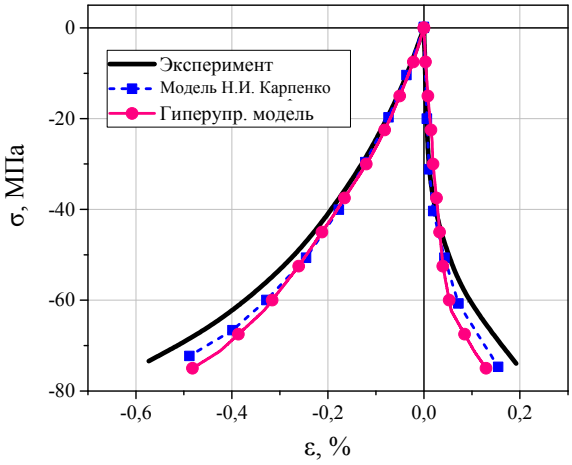


Рис. 5. Сравнение результатов расчетов с использованием гиперупругой ортотропной модели с ортотропной моделью Н.И. Карпенко и экспериментальными данными для многоосного нагружения $\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 = -1 : -1/14{,}5 : -1/14{,}5$

И с т о ч н и к: выполнено А.С. Семеновым, А.В. Бениным. Экспериментальные данные получены Ю.Н. Малашкиным [67].

4. Заключение

В качестве альтернативы доминирующему в настоящее время эмпирическому подходу формулировки определяющих уравнений бетона предложена термодинамически согласованная локально-ортотропная гиперупругая модель для описания нелинейного деформирования бетона при монотонной многоосной нагрузке с учетом анизотропии растяжения-сжатия. Локальная ортотропия формируется в процессе роста нагрузки вследствие развития внутренних микротрещин, направление роста которых определяется ориентацией площадок главных напряжений. Задание гиперупругого потенциала осуществлялось на основе кусочно-квадратичной аппроксимации с использованием семи совместных инвариантов деформации и тензоров анизотропии.

Модель содержит в общем случае 9 параметров материала. Предложен метод упрощенной идентификации параметров материала на основе экспериментальных диаграмм деформирования при сжатии и растяжении с измерением продольных и поперечных деформаций.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы.

1. Сравнение результатов предложенной ортотропной гиперупругой модели деформирования с данными экспериментов для бетонов В25 и В40 продемонстрировало хорошую точность прогнозов при одноосном (отличие от экспериментов менее 1 %) и многоосном нагружении (отличие от экспериментов менее 15 %).

2. Предложенная модель позволяет описать как восходящую, так и нисходящую ветви диаграммы деформирования бетона.

3. При описании поведения бетона на ниспадающей ветви диаграммы деформирования предложенная модель продемонстрировала более высокую точность в сравнении с моделью ортотропного упругого материала Н.И. Карпенко.

Дальнейшее развитие модели связано с явным учетом накопления повреждений в процессе нагружения и разработкой методов идентификации параметров материала на основе экспериментальных данных при многоосном нагружении.

Список литературы

1. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона. Москва : Стройиздат, 1996. 416 с. ISBN 5-274-01682-0

2. *Карпенко Н.И.* Теория деформирования железобетона с трещинами. Москва : Стройиздат, 1976. 208 с. URL: https://djvu.online/file/Vb91H5loSebPQ?ysclid=mqusg0t7x6992914859 (дата обращения: 22.12.2025).

3. *Карпенко Н.И.* К построению общей ортотропной модели бетона // Строительная механика и расчет сооружений. 1987. № 2. С. 31–36.

4. *Балан Т.А.* Модель деформирования бетона при кратковременном нагружении // Строительная механика и расчет сооружений. 1986. № 4. С. 32–36.

5. *Ву Н.Т., Полякова Е.Н.* Деформирование бетона при объемном напряженном состоянии // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20. Вып. 5. С. 683–693. https://doi.org/10.22227/1997-0935.2025.5.683-693 EDN: SZKPOG

6. *Robins P.I., Kong F.K.* Modified finite element method applied to RG deep beams // Civil engineering and public works review. 1973. No 11. P. 1061–1072.

7. *Cedolin T., Mulas M.G.* Una legge contitutiva secante ed esplicita per il caicestruzzo in statipiani di tensione // Studi e ricerche Politecnico di Milano. 1981. Vol. 3. P. 75–105.

8. *Ahmad S.H., Shah S.P. Khaloo A.R.* Orthotropic Model of Concrete for Triaxial Stresses // Journal of Structural Engineering. 1986. Vol. 112. P. 165–181. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1986)112:1(165)

9. *Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е.* Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 2. Модели без учета несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 1 (45). Р. 23–40. https://doi.org/10.5862/MCE.45.4 EDN: RWXKLV

10. *Гениев Г.А.* Вариант деформационной теории пластичности бетона // Бетон и железобетон. 1969. № 2. С. 18–20.

11. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.* Теория пластичности бетона и железобетона. Москва : Стройиздат, 1974. 316 с.

12. *Лейтес Е.С.* Вариант теории пластического течения бетона // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. № 3. С. 34–37.

13. *Круглое В.М., Донец А.Н., Тихомиров С.А.* Построение физических соотношений бетона на основе теории пластического течения // Вопросы проектирования строительства и эксплуатации искусственных сооружений на железных дорогах. Новосибирск, 1986. С. 47–53.

14. *Круглов В.М., Ерофеев В.Т., Ватин Н.И., Салман А.Д.* Вариант деформационной теории пластичности бетона в плоском напряженном состоянии // Транспортные сооружения. 2019. № 4. https://doi.org/10.15862/11SATS419

15. *Острик А.В., Ким В.В.* Расчетные модели нестационарного деформирования и разрушения бетонов // Конструкции из композиционных материалов. 2020. № 4. С. 11–24. EDN: TYYSUF

16. *Bazant Z.P., Bhat P.D.* Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete // J. Engrg. Mech., ASCE. 1976. Vol. 106. P. 701–721. https://doi.org/10.1061/jmcea3.0002152

17. *Kotsovos M.D.* A mathematical model of the deformational behavior of concrete under generalzed stresses based on fundamental material properties // Material of construction. 1980. Vol. 13. P. 289–329. https://doi.org/10.1007/BF02480434

18. *Gerstle K.H.* Simple formulation of triaxial concrete behavior // Journal of ACI. 1981. Vol. 75. No. 5. P. 382–387.

19. *Dvorkin E.N., Cuitiño A.M., Gioia G.* A concrete material model based on non-associated plasticity and fracture // Engineering Computations. 1989. Vol. 6. No. 4. P. 281–294. https://doi.org/10.1108/eb023783

20. *Pramono E., Willam K.* Fracture energy-based plasticity formulation of plain concrete // Journal of Engineering Mechanics 1989. Vol. 115. P. 1183–1204. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:6(1183)

21. *Voyiadjis G.Z., Abu-Lebdeh J.M.* Plasticity model for concrete using the bounding surface concept // Int. J. plasticity. 1994. Vol. 10. P. 1–21. https://doi.org/10.1016/0749-6419(94)90051-5

22. *Feenstra P.H., De Borst R*. A composite plasticity model for concrete // International Journal of Solids and Structures. 1996. Vol. 33. P. 707–730. URL: https://www.sci-hub.ru/10.1016/0020-7683(95)00060-n (дата обращения: 11.12.2025).

23. *Chen W.-F.* Plasticity in reinforced concrete. J. Ross Publ.; 2007. ISBN 978-1-932159-74-5

24. *Hu L., Li S., Zhu J., Yang X.* Mathematical model of constitutive relation and failure criteria of plastic concrete under true triaxial compressive stress // Materials. 2021. Vol. 14. No. 1. Article no. 14. https://doi.org/10.3390/ma14010102 EDN: HEEITC

25. *Агапов В.П., Маркович А.С., Айдемиров К.Р.* Модели нелинейного деформирования бетона при трехосном напряженном состоянии и их реализация в вычислительном комплексе ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 162–177. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-162-177 EDN: LUJBRU

26. *Lemaitre J., Desmorat R.* Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures. Berlin: Springer Publ., 2005. 380 p. https://doi.org/10.1007/b138882

27. *Krajcinovic D., Foneska G.U.* The continuous damage theory of brittle materials Part I: General theory // J. App. Mech. 1981. Vol. 48. P. 809–815. https://doi.org/10.1115/1.3157739

28. *Ortiz M.* A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete // Mechanics of Materials. 1985. Vol. 4. Issue 1. P. 67‑93. https://doi.org/10.1016/0167-6636(85)90007-9

29. *Oñate E., Oller S., Oliver J., Lubliner J.* A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity // Engineering Computations. 1988. Vol. 5. No. 4. P. 309–319. https://doi.org/10.1108/eb023750

30. *Mazars J., Pijaudier-Cabot G.* Continuum damage theory - Application to concrete // J. Engrg. Mech., ASCE. 1989. Vol. 115. P. 345–365. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345)

31. *Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E.* A plastic-damage model for concrete // Int. J. Solids Struct. 1989. Vol. 25. P. 299–326. https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4

32. *Ju J.W.* On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects // International Journal of Solids and Structures. 1989. Vol. 25. Issue 7. P. 803–833. https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90015-2

33. *Yazdani S., Schreyer H.L.* Combined Plasticity and Damage Mechanics Model for Plain Concrete // Journal of Engineering Mechanics. 1990. Vol. 116. Issue 7. P. 1435–1450. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:7(1435)

34. *Papa E., Taliercio A.* Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete // Engineering Fracture Mechanics. 1996. Vol. 55. No. 2. P. 163–179. https://doi.org/10.1016/0013-7944(96)00004-5 EDN: AKSAQF

35. *Lee J., Fenves G.L.* Plastic-Damage model for cyclic loading of concrete structures // Journal of Engineering Mechanics. 1998. Vol. 124. P. 892–900. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892)

36. *Peerlings R.H.J., de Borst R., Brekelmans W.A.M., Geers M.G.D.* Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture // Mechanics of Cohesive-Frictional Materials. 1998. Vol. 3. P. 323–342. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(1998100)3:4<323::AID-CFM51>3.0.CO;2-Z

37. *Cauvin A., Testa R.B.* Damage mechanics: basic variables in continuum theories // International Journal of Solids and Structures. 1999. Vol. 36. No. 5. P. 747–761. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00044-4 EDN: ABXONN

38. *Jefferson A.D.* Craft — a plastic-damage-contact model for concrete. I. Model theory and thermodynamic considerations // International Journal of Solids and Structures. 2003. Vol. 40. No. 22. P. 5973–5999. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00390-1 EDN: KETFMT

39. *Krätzig W.B., Pölling R.* An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters // Computers & Structures. 2004. Vol. 82. No. 15–16. P. 1201–1215. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.002

40. *Tao X., Phillips D.V.* A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states // Cement and Concrete Composites. 2005. Vol. 27. No. 6. P. 716–726. https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2004.09.017

41. *Badel P., Godard V., Leblond J.-B.* Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44, No. 18–19. P. 5848–5874. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.02.001 EDN: KETJOX

42. *Červenka J., Papanikolaou V.K.* Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete // International Journal of Plasticity. 2008. Vol. 24. Issue 12. P. 2192–2220. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.01.004

43. *Wu J.-Y., Xu S.-L.* An augmented multicrack elastoplastic damage model for tensile cracking // International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 48. P. 2511–2528. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.05.001

44. *Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е.* Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 86–99. https://doi.org/10.5862/MCE.40.10 EDN: QZTMSJ

45. *Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G.* Fracture analysis of reinforced concrete bridge structures with account of concrete cracking under steel corrosion // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 831. P. 364–369. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.831.364 EDN: UEGPWH

46. *Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G., Beliaev M.O., Modestov V.S.* Methods of identification of concrete elastic-plastic-damage models // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 8. P. 279–297. https://doi.org/10.18720/MCE.76.24 EDN: YSTEJC

47. *Voyiadjis G.Z., Zhou Y., Kattan P.I.* A new anisotropic elastoplastic-damage model for quasi-brittle materials using strain energy equivalence // Mechanics of Materials. 2022. Vol. 165. P. 104163. EDN: SPCISK

48. *Mader T., Schreter-Fleischhacker M., Shkundalova O., Neuner M., Hofstetter G.* Constitutive modeling of orthotropic nonlinear mechanical behavior of hardened 3D printed concrete // Acta Mechanica. 2023. Vol. 234. P. 5893–5918. https://doi.org/10.1007/s00707-023-03706-z EDN: PZXSBQ

49. *Xue L., Ren X.* A tensorial energy-release-rate based anisotropic damage-plasticity model for concrete // Mechanics of Materials. 2024. Vol. 195. Article no. 105025. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2024.105025 EDN: HQFIEY

50. *Rakic D., Bodić A., Milivojevic N., Dunić V., Živković M.* Concrete damage plasticity material model parameters identification // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2021. Vol. 15. P. 111–122. https://doi.org/10.24874/jsscm.2021.15.02.11 EDN: GWWDNU

51. *Raveendra Babu R., Benipal G.S., Singh A.K.* Constitutive modelling of concrete: an overview // Asian Journal of Civil Engineering. 2005. Vol. 6. No. 4. P. 211–246. Available from: https://sid.ir/paper/298643/en

52. *Domenico D.D., Bernardo L.F.A.* Mechanical behavior of concrete materials and structures: Experimental evidence and analytical models. MDPI : Basel, 2022. 296 p. https://doi.org/10.3390/books978-3-0365-4911-8

53. *Кюри П.* Избранные труды. Москва : Наука, 1966. 404 с.

54. *Smith G., Young L.* Ultimate Theory in Flexure by Exponential Function // Journal ACI. 1955. Vol. 52. No. 11. P. 349–359.

55. *Liebenderg A.C.* Stress-strain function for concrete subjected to short-term loading // Mag. of Concrete Research. 1962. Vol. 14. No. 41. P. 85–90. https://doi.org/10.1680/macr.1962.14.41.85

56. *Saennz L.P.* Discussion of Equation to the Stress-Strain Curve of Concrete / By P. Desai and S. Krishnan // ACI Journal Proc., 1964. Vol. 61. No. 9. P. 1229–1235.

57. *Shah S., Winter G.* Inelastic Behavior and Fracture of Concrete // Journal ACI. 1968. Vol. 20. P. 5–28.

58. *Бачинский В.Я., Бамбура А.Н., Ватагин С.С.* Связь между напряжениями и деформациями бетона при кратковременном неоднородном сжатии // Бетон и железобетон. 1984. № 10. С. 18–19. URL: https://science.totalarch.com/magazine/concrete/concrete_1984_10.pdf (дата обращения: 22.12.2025).

59. *Бенин А.В.* Деформирование и разрушение железобетона: аналитические, численные и экспериментальные исследования. СПб.: ПГУПС, 2006. 127 с. EDN: QNMQKR

60. *Мурашкин Г.В., Мурашкин В.Г., Панфилов Д.А.* Описание диаграмм деформирования бетона в отечественных и зарубежных нормах // Вестник Волжского регионального отделения Российской академии архитектуры и строительных наук. 2011. № 14. С. 144–150. EDN: VXJXRL

61. *Радайкин О.В.* К построению диаграмм деформирования бетона при одноосном кратковременном растяжении/сжатии с применением деформационного критерия повреждаемости // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 6. С. 71–78. https://doi.org/10.23968/1999-5571-2017-14-6-71-78 EDN: YPNFNL

62. *Римшин В.И., Кришан А.Л., Мухаметзянов А.И.* Построение диаграммы деформирования одноосно сжатого бетона // Вестник МГСУ. 2015. № 6. С. 23–31. EDN: TYCWVB

63. *Travush V.I., Murashkin V.G.* Concrete deformation model for reconstructed reinforced concrete // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. Vol. 18. No. 4. P. 132–137. https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-132-137 EDN: TDTBVO

64. *Spencer A.J.M.* Theory of invariants. In: Eringen, A.C. (Ed.), Continuum Physics. Vol. 1. New York : Academic Press, 1971. P. 239–353. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X

65. *Lavrov K., Semenov A., Benin A.* Modeling of nonlinear multiaxial deformation of concrete on the base of hyperelastic orthotropic model // MATEC Web of Conferences. International Scientific Conference Week of Science in Spbpu — Civil Engineering (SPBWOSCE-2015), December, 3–4, 2015. Saint-Petersburg, Russia, 2016. Vol. 53. Article no. 01043. https://doi.org/10.1051/matecconf/20165301043 EDN: VYDRJZ

66. *Семенов А.С.* Вычислительные методы в теории пластичности. Санкт-Петербург : СПбГПУ, 2008. 211 с. ISBN 978-5-7422-2031-8 EDN: QJUTBT

67. *Малашкин Ю.Н.* Деформирование и разрушение бетона в условиях сложных напряженных состояний : автореф. … дис. д-ра техн. наук, 1984. 38 с.