

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2026-22-2-138-151

EDN: KCJJXB

Научная статья / Research article

Сравнительный анализ расчета пластины на криволинейно-трапециевидном плане численными методами

В.Н. Иванов^{ORCID}, Е.М. Тупикова^{ORCID}, М.И. Рынковская^{ORCID}✉

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ rynkovskaya-mi@rudn.ru

Поступила в редакцию: 30 ноября 2025 г.

Доработана: 12 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 25 февраля 2026 г.

Аннотация. Покрытия в виде пластин и оболочек на сложных криволинейных планах являются распространенными конструктивными решениями в архитектуре. Такие конструкции имеют ряд преимуществ. Срединные поверхности оболочек и пластин на криволинейно-трапециевидных планах строятся при помощи параметрических и векторных уравнений и имеют ряд особенностей при расчете их напряженно-деформированного состояния. Для конструкций такой формы не получено аналитического точного решения, но возможно получить численное решение, например, методом конечных элементов и вариационно-разностным методом. В такой ситуации для верификации расчетов сравнение результатов, полученных при помощи разных численных процедур, полезно и актуально. Проведен сравнительный анализ результатов расчета напряженно-деформированного состояния пластины на криволинейном плане, полученных перечисленными методами. В литературе недостаточно разработана тема расчета пластин и оболочек на криволинейно-трапециевидном плане. Цель исследования — получить данные расчета напряженно-деформированного состояния пластины на криволинейно-трапециевидном плане, а также оценить применимость и особенности двух методов при расчете подобных конструкций. Для выполнения поставленных задач применено программное обеспечение: программный пакет ANSYS APDL для расчета методом конечных элементов, авторская программа SHELLVRM для расчета вариационно-разностным. Получены и проанализированы параметры напряженно-деформированного состояния пластины на криволинейно-трапециевидном плане, произведена верификация полученных результатов, даны рекомендации по внедрению обоих способов расчета в практику анализа конструкций, выявлены вычислительные трудности и особенности обоих методов.

Ключевые слова: тонкая упругая пластина, сетка узлов, ВРМ, МКЭ, внутренние силовые факторы, перемещения

Вклад авторов: *Иванов В.Н.* — научное руководство, концепция, валидация; *Тупикова Е.М.* — программное обеспечение, графическое оформление, подготовка текста статьи; *Рынковская М.И.* — проведение исследования, обработка данных, написание текста, рецензирование и редактирование. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, ORCID: 0000-0003-4023-156X; e-mail: i.v.ivn@mail.ru

Тупикова Евгения Михайловна, кандидат технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 5501-6984, ORCID: 0000-0001-8742-3521; e-mail: emelian-off@yandex.ru

Рынковская Марина Игоревна, кандидат технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 9184-7432; ORCID: 0000-0003-2206-2563; e-mail: rynkovskaya-mi@rudn.ru

© Иванов В.Н., Тупикова Е.М., Рынковская М.И., 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Для цитирования: Иванов В.Н., Тупикова Е.М., Рынкoвская М.И. Сравнительный анализ расчета пластины на криволинейно-трапециевидном плане численными методами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 138–151. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-138-151> EDN: KCJJXB

Comparative Analysis of Calculation of a Plate of Curvilinear Trapezoidal Plan using Numerical Methods

Vyacheslav N. Ivanov[✉], Evgenia M. Tupikova[✉], Marina I. Rynkovskaya[✉]

RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ rynkovskaya-mi@rudn.ru

Received: November 30, 2025

Revised: February 12, 2026

Accepted: February 25, 2026

Abstract. Roofs in the form of plates and shells of complex curvilinear plan are common structural solutions in architecture. Such structures have a number of advantages. The mid-surface of shells and plates of curvilinear trapezoidal plan is constructed using parametric and vector equations and has a number of special aspects to consider when calculating their stress-strain state. For structures of this shape, no exact analytical solution has been obtained, but it is possible to obtain a numerical solution, for example, by the finite element method and the variational-difference method. In such a situation, for verification of calculations, comparing the results obtained using different numerical procedures is useful and relevant. A comparative analysis of the results of calculating the stress-strain state of a plate curvilinear in plan, obtained by the methods mentioned above, was conducted. In the literature, the topic of calculating plates and shells of curvilinear trapezoidal plan is insufficiently developed. The aim of the study is to obtain data on the calculation of the stress-strain state of a plate of curvilinear trapezoidal plan, as well as to assess the applicability and specifics of the two methods in calculating such structures. To accomplish the tasks, the following software was used: ANSYS APDL software for calculation by the finite element method, and the author-developed SHELLVRM program for calculation by the variational-difference method. The parameters of the stress-strain state of a plate of curvilinear trapezoidal plan have been obtained and analyzed, verification of the obtained results has been carried out, recommendations for implementing both calculation methods in the practice of structural analysis have been given, and computational difficulties and special aspects of both methods have been identified.

Keywords: thin elastic plate, node mesh, VDM, FEM, stress parameters, displacements

Authors' contribution: *Ivanov V.N.* — supervision, conceptualization, validation; *Tupikova E.M.* — software, visualization, text draft; *Rynkovskaya M.I.* — study management, data processing, text writing, review and editing. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

For citation: Ivanov VN, Tupikova EM, Rynkovskaya MI. Comparative analysis of calculation of a plate of curvilinear trapezoidal plan using numerical methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):138–151. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-138-151> EDN: KCJJXB

1. Введение

В архитектуре распространено перекрытие больших пролетов и сложных планов с применением оболочечных конструкций в форме различных аналитических поверхностей [1]. Многообразие форм аналитических поверхностей показано, например, в энциклопедии [2]. В книге представлены основные уравнения задания поверхностей, а также кратко приведены их отличительные особенности. С.Н. Кривошапко создал ряд основополагающих трудов по систематизации аналитических поверхностей [1–3]. Данная тематика также привлекает внимание исследователей тонкостенных конструкций [4; 5]. Из всех аналитических поверхностей исследователи выделяют некоторые классы, особенно важные для практики, как, например, линейчатые и торсовые поверхности [6–8], зонтичные [9] и еще ряд типов поверхностей для применения в строительстве [10–14]. Вопросам выбора рациональных с точки зрения прочностных качеств форм поверхностей для строительных конструкций посвящены работы [15; 16]. Моделирование поверхностей на основе двумерных кривых рассматривается в [17; 18]. Геометрическому моделированию посвящены работы [19–21], а непосредственно тема геометрии и моделирования эллипсоидально-кольцевых поверхностей разработана автором В.Н. Ивановым в работах [22; 23]. В большинстве случаев расчеты на прочность таких конструкций проводятся методом конечных элементов [5; 24–27], однако встречаются работы, основанные также и на других методах расчета конструкций, например, аналитиче-

ского или полуаналитического [28–31], вариационно-разностного [32–33], или комбинации методов [34–38]. Интерес к расчету пластин на эллипсоидально-кольцевом плане не ослабевает и в работах зарубежных авторов. А. Merneedi с соавт. рассмотрели свободные колебания эллиптической пластинки [39], S. Çeribaşı провел статический и динамический расчет тонких пластин из функционально-градиентных материалов, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой [40]. Однако большая часть исследований проводится с применением программных комплексов, основанных на методе конечных элементов, например Comsol [41].

Следует заметить, что классического аналитического решения для эллипсоидально-кольцевой пластинки не получено. Известно аналитическое решение задачи изгиба эллипсоидальной пластинки В.И. Погореловым¹, для круглой кольцевой пластинки известно решение С.П. Тимошенко [42]. Эллипсоидально-кольцевые пластинки и оболочки могут быть построены в криволинейной системе координат для наилучшей передачи внутренней геометрии.

Для получения ортогональной криволинейной системы координат берется произвольная плоская базовая кривая в виде $r_n(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j}$ и система ортогональных к ней прямых [22] (рис. 1), тогда уравнение координатной системы можно записать в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_n(u) + v\mathbf{e}(u), \quad (1)$$

где $\mathbf{e}(u) = -\mathbf{v}$; \mathbf{v} — нормаль базовой кривой; v — координата образующих прямых по нормали к базовой кривой.

```
/*AFUN,DEG
*SET,a,3
*SET,b,2
*SET,dt,1
*DO,t,0,90,dt
k,(t*100+1),a*sin(t),b*cos(t),0
k,(t*200+2),(a+2)*sin(t),(b+2)*cos(t),0
l,(t*100+1),(t*200+2)
*Enddo
/
```

Листинг 1. Макрос для создания опорных точек и линий

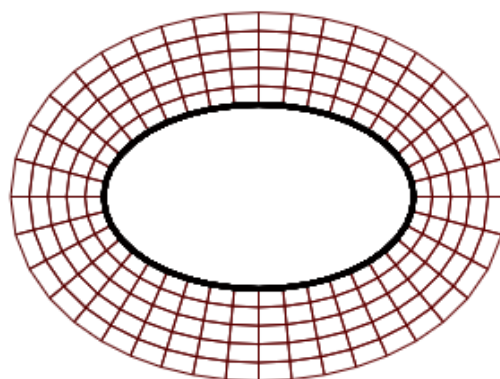


Рис. 1. Эллипсоидально-кольцевая пластинка

Источник: выполнено Е.М. Тупиковой.

Рассматриваемая ортогональная криволинейная система координат будет состоять из системы равноудаленных кривых, то есть кривых, которые параллельны базовой кривой, и системы ортогональных им прямых, и может быть названа псевдополярной. Если в качестве базовой кривой выбрана незамкнутая кривая, то получается криволинейно-трапецевидная область. Если базовая кривая замкнутая, например эллипс, то получается замкнутая овальная область.

С точки зрения геометрии координатной системы можно выделить следующие характеристики [22]:

$$\mathbf{r}_u = s'(1 - k_n v)\boldsymbol{\tau} = A\boldsymbol{\tau};$$

$$A = s'(1 - k_n v);$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{v};$$

$$B = 1,$$

(2)

где s' — коэффициент длины базовой кривой; k_n — кривизна базовой кривой.

¹ Погорелов В.И. Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций Москва : ГИФМЛ, 1963, 635 с.

Если задаться функцией вертикальной координаты $z(u, v)$, то можно получить уравнение поверхности на трапециевидно-криволинейном плане в следующем виде [22]:

$$\rho(u, v) = r_n(u) + v e(u) + Z(u, v) k. \quad (3)$$

Если функция вертикальной координаты $Z(u, v)$ выбрана произвольно, то координатная система поверхностей на трапециевидно-криволинейных планах не будет совпадать с линиями кривизны поверхности, за исключением случая, когда $Z = z(v)$, то есть случая, когда в нормальной плоскости базовой кривой перемещается неизменная кривая и поверхность будет относиться к классу поверхностей Монжа [20; 33].

Коэффициенты первой квадратичной формы рассматриваемой системы координат можно принимать равными коэффициентам первой квадратичной формы ортогональной системы координат (2) [22; 23]. Далее из формул дифференциальной геометрии можно получить значения кривизн поверхностной системы:

$$k_u = \frac{1}{A^3} \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} - \frac{s' k_n}{A} \frac{\partial Z}{\partial v}; \quad k_v = \frac{1}{A} \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}. \quad (4)$$

2. Материалы и методы

В исследованиях по строительной механике превалирует применение метода конечных элементов, который зачастую является альтернативной основой всех расчетов сложных конструкций, проводимых в сертифицированных программных комплексах. Программные комплексы на основе метода конечных элементов, такие как SCAD, ЛИРА, ANSYS, SolidWorks, а также их свободно распространяемые аналоги, являются универсальными средствами расчета конструкций практически любой формы, созданной архитектором. Такие программы требуют значительных ресурсов компьютера, лицензионного обслуживания, имеют ряд особенностей при использовании и преодолении вычислительных трудностей, реализации допущений расчетной модели. В первую очередь при использовании таких программных средств важна применяемая конечно-элементная разбивка, построение сетки элементов, от которого критически зависят получаемые результаты. Очевидно, что более точные результаты могут быть получены при использовании более малых размеров конечных элементов (КЭ), однако при использовании сложных форм важны также конфигурация конечных элементов (треугольный или четырехугольный), базовые точки и линии, на основе которых программа строит узлы сетки, соответствие внутренней геометрии рассчитываемого сооружения или его элемента автоматически сгенерированной сети узлов КЭ.

Анализ результатов в программах, основанных на методе конечных элементов, для сложных видов геометрических поверхностей может быть в некоторой степени затруднен или ограничен имеющимся в применяемой программе стандартным функционалом средств для вывода перемещений, деформаций и напряжений, например наличием или отсутствием других координатных систем, кроме декартовой, сферической и цилиндрической, возможностью использования локальных систем и расчета напряжений или усилий по направлениям, характерным для некоторых неклассических поверхностей.

В данной работе проведен сравнительный анализ полученных двумя методами результатов расчета пластины на криволинейно-трапециевидном плане — эллипсоидально-кольцевой пластины. Расчет на основе метода конечных элементов проводился в программном комплексе ANSYS APDL. В качестве КЭ выбраны изопериметрические элементы shell63.

Рассматривается эллипсоидально-кольцевая пластина с направляющим внутренним эллипсом $a = 3$ м, $b = 2$ м, ширина пластины 2 м (рис. 1). Пластина жестко закреплена по внешнему контуру. Расчет проведен на действие равномерно распределенной нагрузки типа собственного веса: $q = 1$ кН/м². Толщина пластинки $h = 0,1$ м, модуль упругости материала $E = 3,5 \cdot 10^7$ кПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,15$.

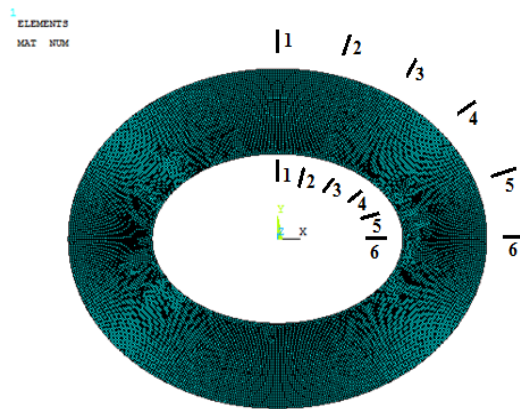


Рис. 2. Расчетная модель пластины в ANSYS с характерными сечениями
Источник: выполнено Е.М. Туликовой.

Для построения геометрии объекта используется макрос, который включает в себя создание опорных точек, линии и далее создание поверхности на основе каркаса из линий (см. Листинг 1).

Далее модель разбивалась на конечные элементы (рис. 2). Функционал ANSYS допускает разбику как свободную автоматическую (free), так и привязанную к опорным точкам (mapped) с использованием четырехугольных элементов, предпочтение было отдано второму типу, и заданием размера КЭ в ручную.

При автоматической разбивке четырех- и треугольными элементами при размере элемента 0.05 м в результатах получены зоны сомнительных резких перепадов напряжений, а при разбивке элементами большего размера, до 0,2 м, но с привязкой к ключевым точкам и построенным опорным линиям поверхности, результаты представляются более достоверными.

Для сравнения с конечно-элементным решением в данной работе взято решение, приведенное в статье [43], полученное при помощи авторской программы SHELLVRM, основанной на вариационно-разностном методе. Программа обладает малым объемом и не требует больших ресурсов компьютера, а результаты обладают точностью, сравнимой с точностью многофункциональных коммерческих программных комплексов, что уже было показано, к примеру, в работах [34–36].

3. Результаты и обсуждение

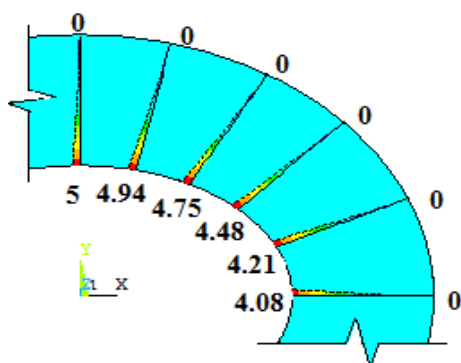


Рис. 3. Совмещенные эпюры прогибов в характерных сечениях, мм
Источник: выполнено Е.М. Тупиковой.

В этой части статьи приводятся результаты конечно-элементного расчета пластинки, а также их сравнение с результатами вариационно-разностного расчета, часть данных и рисунков цитируется по [22]. Конечно-элементный расчет проводился в соответствии с линейной теорией Кирхгофа — Лява, тип конечного элемента shell63 четырехузловой, четырехугольной формы, размер элемента 0,2 м. Свойства материала заданы как линейно-упругие, модуль упругости $E = 3,5 \cdot 10^7$ кПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,15$. Граничные условия — жесткая заделка по внешнему контуру, нагружение — собственный вес $q = 1$ кН/м². Изополю получены при помощи стандартного постпроцессора POST1, эпюры построены с применением функции PATH вдоль обозначенных сечений, получены значения прогибов, изгибающих моментов, эквивалентных напряжений. На рис. 3 представлены совмещенные эпюры прогибов в характерных сечениях пластины.

Результаты также приведены подробно в виде графиков прогибов в характерных сечениях 1–1 (рис. 4) и 6–6 (рис. 5) и изополей перемещений (рис. 6) по оси z , а также графиков эквивалентных напряжений в характерных сечениях 1–1 (рис. 7) и 6–6 (рис. 8) и изополей эквивалентных напряжений (рис. 9). На рис. 10 представлены прогибы эллипсоидально-кольцевой пластинки, полученные с помощью вариационно-разностного метода расчета в [43].

График прогибов в сечении вдоль длинной оси эллипса (рис. 4) демонстрирует форму, близкую к параболе, максимальный прогиб составил 5 мм, что хорошо согласуется с данными расчетов по ВРМ в [43].

График прогибов в сечении вдоль короткой оси эллипса (рис. 5) демонстрирует максимальный прогиб 4,2 мм, что также свидетельствует о близкой сходимости с результатами расчета из [43].

На рис. 6, иллюстрирующем изополю прогибов, можно заметить, что при данной схеме закрепления (консольные закрепления по внешнему краю) наибольшие прогибы возникают в сечениях, проходящих через малую ось эллипса.

На графиках эквивалентных напряжений в характерных сечениях 1–1 (рис. 7) и 6–6 (рис. 8) вдоль длинной и короткой осей эллипса, соответственно, видно, что максимальные значения напряжений возникают на внешнем крае, а минимальные — на внутреннем крае длинной стороны пластины, и максимальный перепад значений эквивалентных напряжений возникает в сечении по длинной стороне пластины. При этом зона минимальных эквивалентных напряжений в сечении по короткой стороне пластины смещена от внутреннего края по сравнению с зоной минимальных напряжений в сечении по длинной стороне пластины.

Эквивалентные напряжения по Мизесу (рис. 9) рассчитываются стандартными средствами программного комплекса и характеризуют работу материала в конструкции. Для предварительной оценки и

подбора армирования такие данные могут быть полезны. Можно явно увидеть зоны наименьших напряжений (синий цвет), средний фоновый уровень напряжений (голубой и зеленый цвет), наиболее нагруженные жестко заделанные внешние края (красный и желтый цвет). Модель рассчитана для условного железобетона с линейно-упругими характеристиками, при более детальном расчете армирования можно примерно ориентироваться на эти зоны.

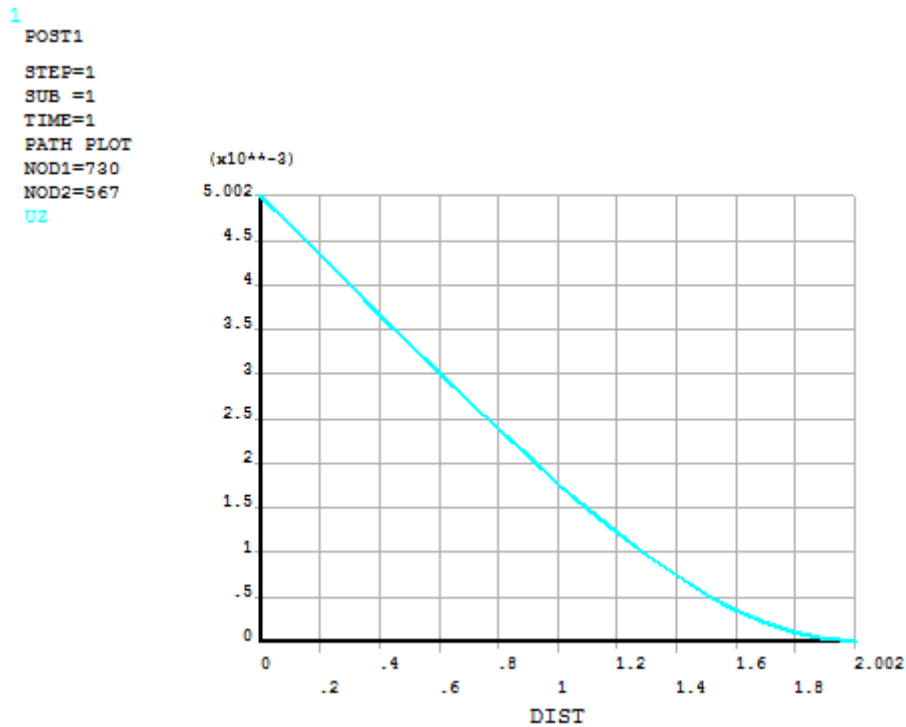


Рис. 4. Графики прогибов u_z в характерном сечении 1-1, м
И с т о ч н и к: выполнено Е.М Тупиковой.

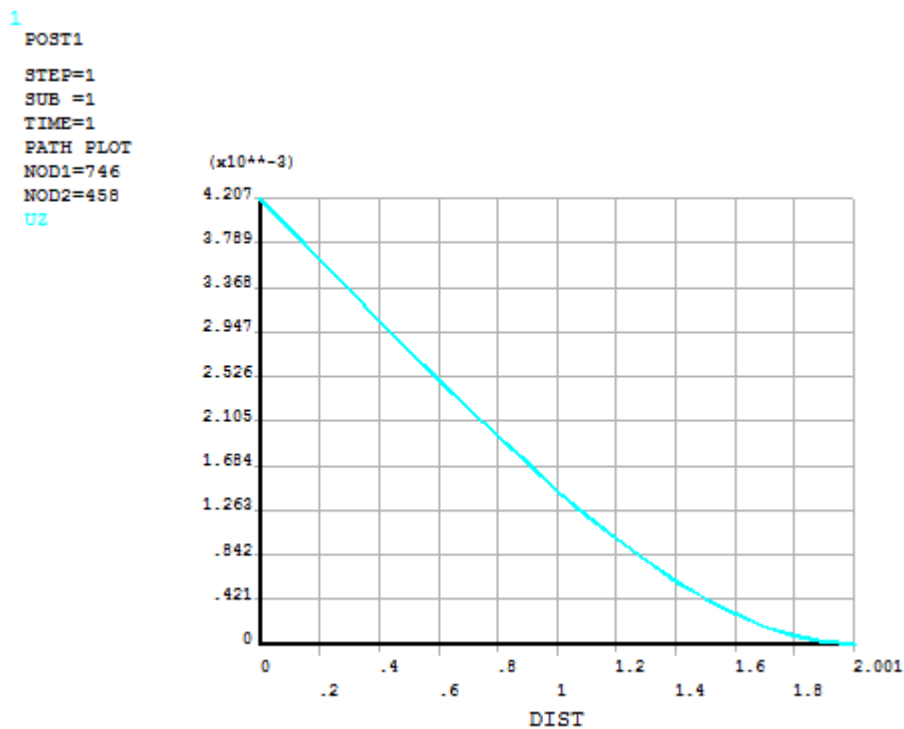


Рис. 5. График прогибов u_z в характерном сечении 6-6, м
И с т о ч н и к: выполнено Е.М Тупиковой.

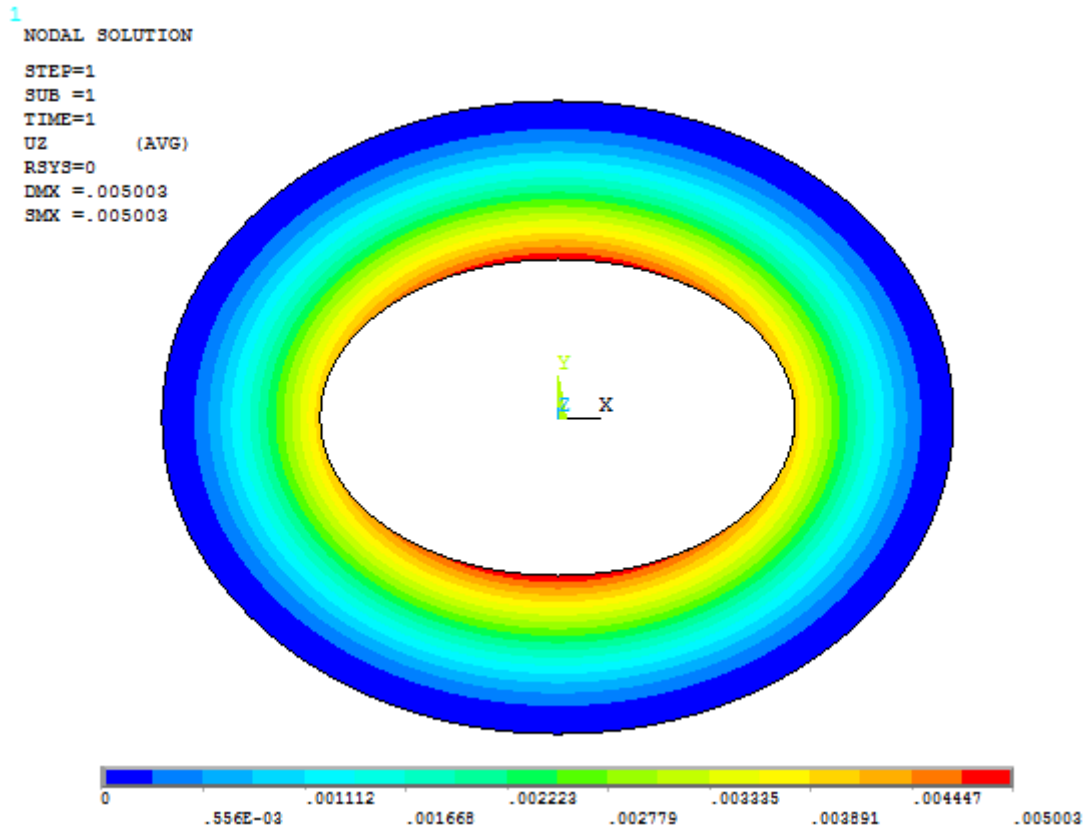


Рис. 6. Изополя прогибов u_z , м
 И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Тупиковой.

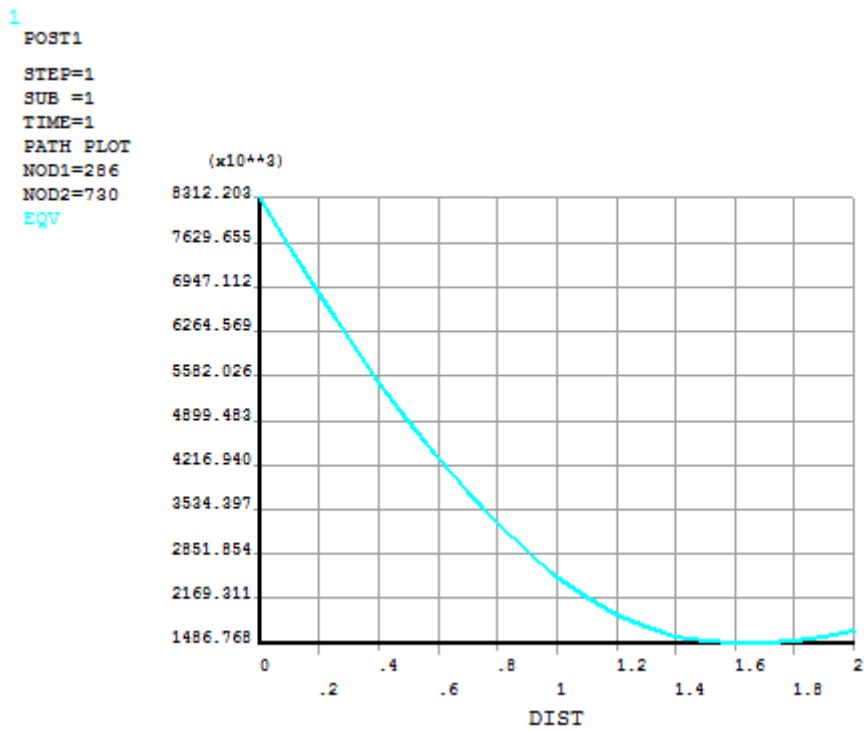


Рис. 7. График эквивалентных напряжений в сечении 1–1, Н/м²
 И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Тупиковой.

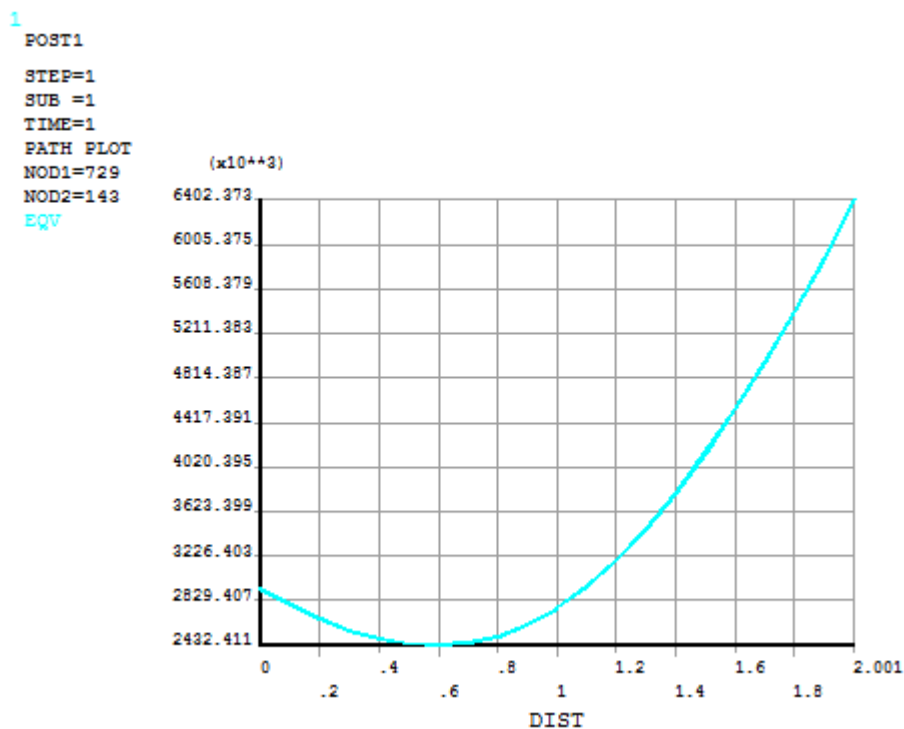


Рис. 8. График эквивалентных напряжений в сечении 6–6, Н/м²

Источник: выполнено Е.М Туликовой.

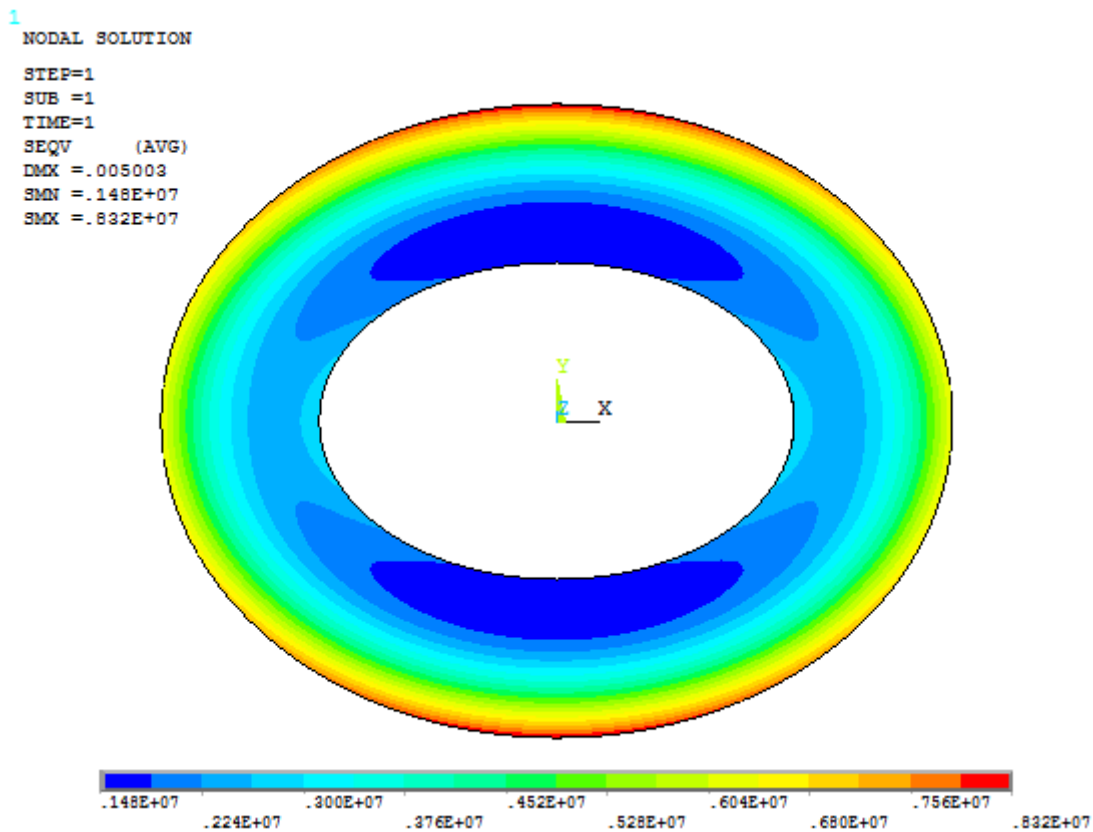


Рис. 9. Изополя эквивалентных напряжений, Н/м²

Источник: выполнено Е.М Туликовой.

Значения прогибов в характерных сечениях, полученные методом конечных элементов и вариационно-разностным методом, представлены в табл. 1.

Значения изгибающих моментов в сечениях 1–1 и 6–6, как наиболее удобных для декартовой системы координат, которая применяется в МКЭ-программах, полученные двумя методами, приведены в табл. 2.

Таблица 1. Прогибы в характерных сечениях по МКЭ и ВРМ

Номер сечения и метод расчета	1–1	2–2	3–3	4–4	5–5	6–6
Прогиб по МКЭ (мм)	5,00	4,94	4,75	4,48	4,21	4,08
Прогиб по ВРМ (мм)	5,1	5,0	4,7	4,5	4,3	4,2

Источник: выполнено Е.М. Тупиковой, М.И. Рынковской.

Таблица 2. Изгибающие моменты в характерных сечениях по МКЭ и ВРМ

Номер сечения и сравниваемые параметры	1–1 сечение		6–6 сечение	
	M_x , Н·м/м	M_y , Н·м/м	M_x , Н·м/м	M_y , Н·м/м
МКЭ	14 660	2170	11 255	1168
ВРМ	15 100	1800	11 700	2300

Источник: выполнено Е.М. Тупиковой, М.И. Рынковской.

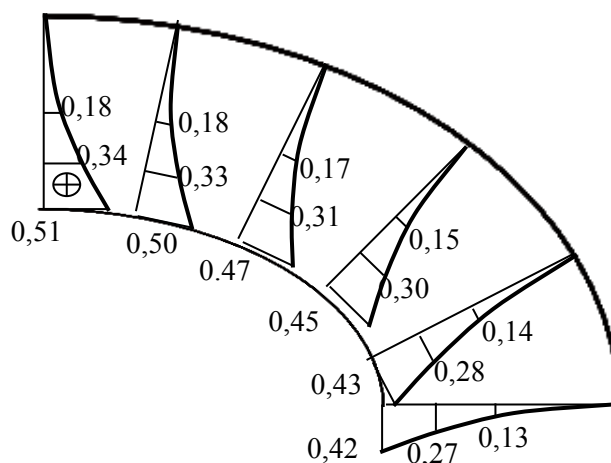


Рис. 10. Прогибы w_z (см) эллипсоидально-кольцевой пластинки по ВРМ

Источник: выполнено В.Н. Ивановым [43].

Эпюры изгибающих моментов в характерных сечениях, полученные методом конечных элементов, представлены на рис. 11–14. Для сравнения полученных результатов на рис. 15 представлены соответствующие результаты расчета значений изгибающих моментов вариационно-разностным методом.

На эпюрах (рис. 11–14) видно, что изгибающие моменты M_x являются основными силовыми факторами, определяющими напряженно-деформированное состояние пластинки, изгибающие моменты M_y принимают на порядок меньшие значения.

Максимальные моменты, равные 1,47 КН×м/м, возникают в сечении вдоль короткой оси эллипса в заделке.

Сравнение результатов, полученных двумя методами, показывает достаточно близкую сходимость.

1
PATH= 1
VALUE= M2

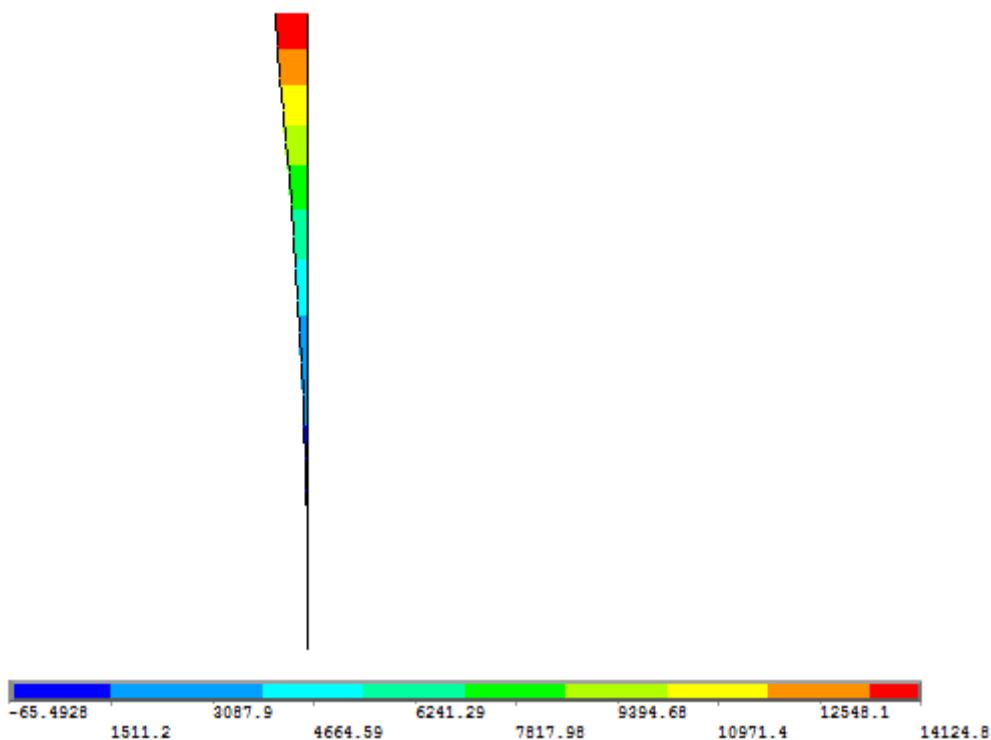


Рис. 11. Эпюра изгибающего момента M_x в характерном сечении 1–1, Н·м/м
Источник: выполнено Е.М Тупиковой.

1
PATH= 1
VALUE= M1

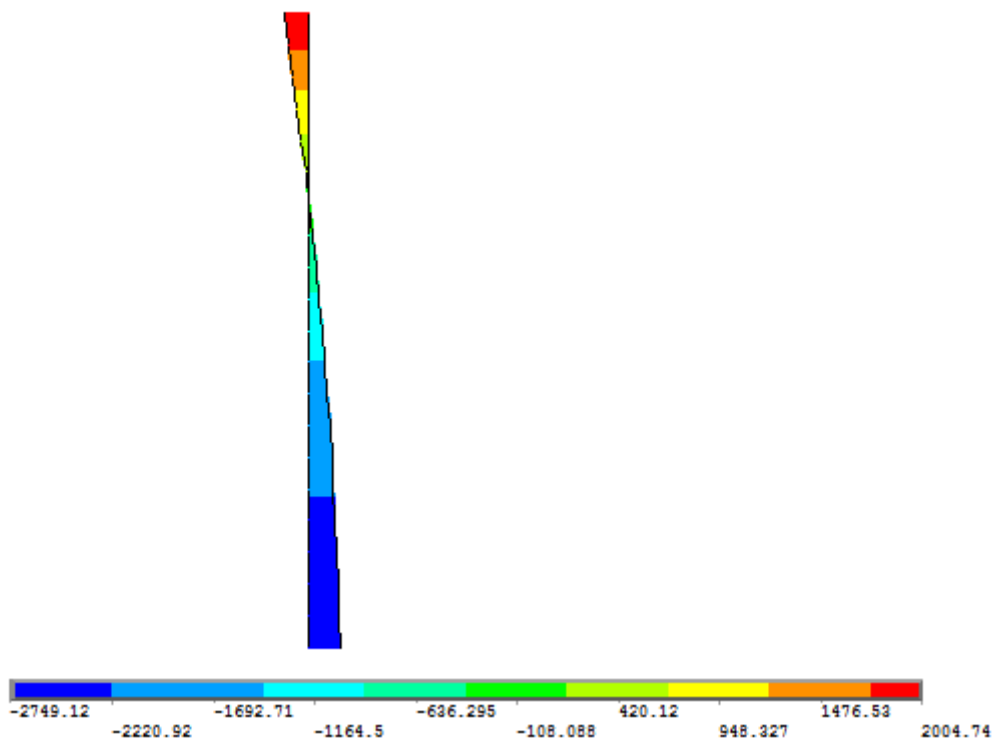


Рис. 12. Эпюра изгибающего момента M_y в характерном сечении 1-1, Н·м/м
Источник: выполнено Е.М Тупиковой.

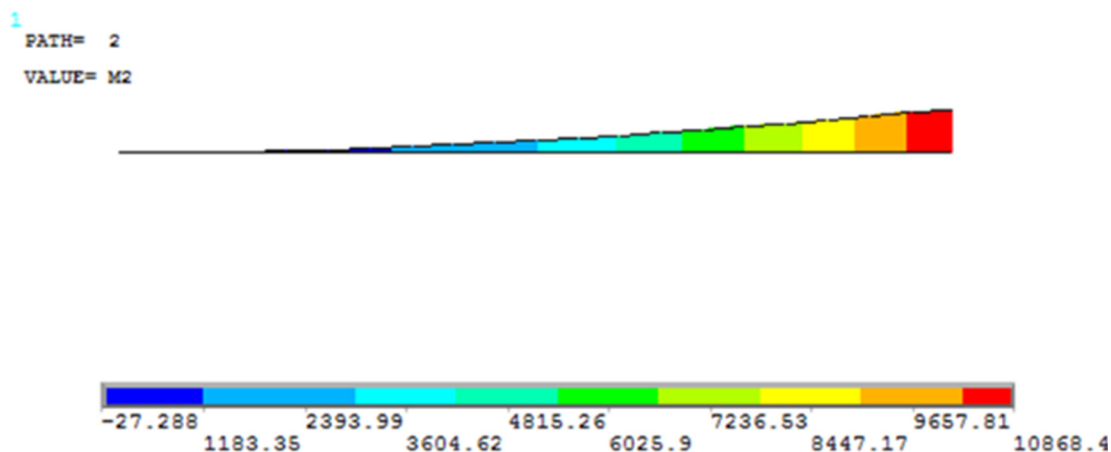


Рис. 13. Эпюра изгибающего момента M_x в характерном сечении 6-6, Н·м/м
Источник: выполнено Е.М.Тупиковой.

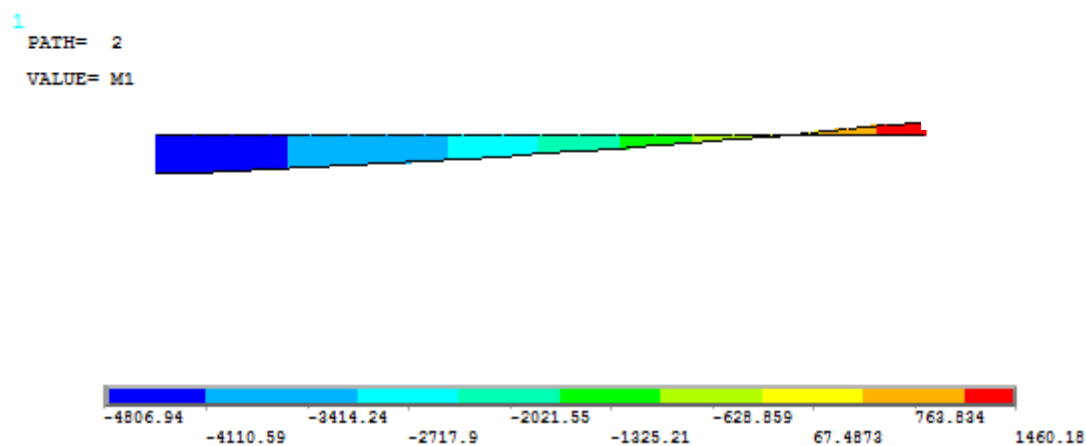


Рис. 14. Эпюра изгибающего момента M_y в характерном сечении 6-6, Н·м/м
Источник: выполнено Е.М.Тупиковой.

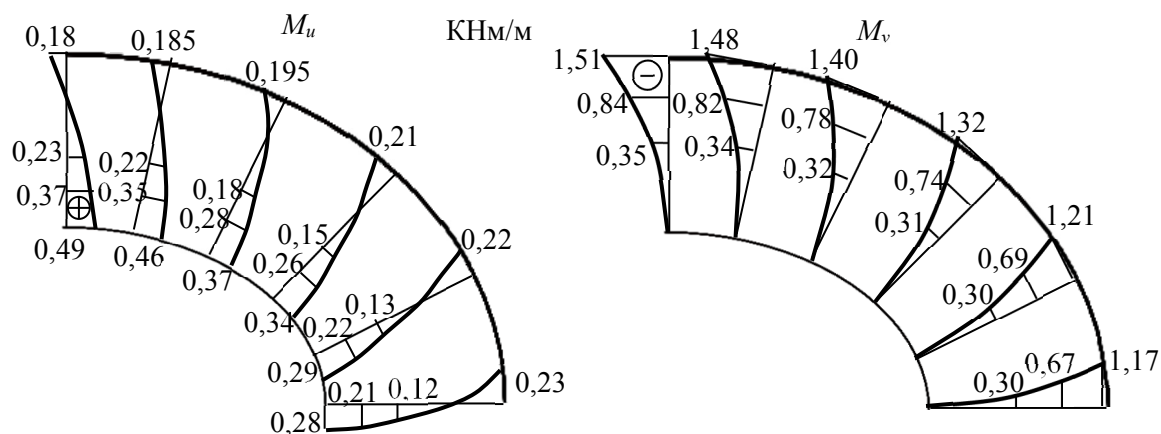


Рис. 15. Эпюры изгибающих моментов M_x и M_y
(M_u и M_v соответственно в криволинейной системе координат ВРМ) кН м/м
Источник: выполнено В.Н.Ивановым [43].

4. Заключение

В данном исследовании рассмотрено напряженно-деформированное состояние эллипсоидально-кольцевой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки и произведено сравнение результатов, полученных методом конечных элементов и вариационно-разностным методом. Для каждого метода выполнены необходимые расчетные процедуры. Для корректности сравнения параметры расчета, такие как размер сетки, приняты одинаковыми. Получены и проанализированы значения внутренних силовых факторов моментов и перемещений в узлах в одинаковых сечениях. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы.

1. Расчет кольцевой пластины на эллипсоидальном плане вариационно-разностным методом, реализованным в авторской программе, и методом конечных элементов в программном комплексе Ansys показал сопоставимые результаты по прогибам и изгибающим моментам в характерных сечениях.

2. Поскольку при расчете такого относительно простого объекта, как пластина, результаты значительно зависят от внутренней геометрии, существенным моментом является построение конечно-элементной сетки, ключевые узлы которой согласованы с направляющими линиями. Зачастую алгоритмы построения сетки в программных комплексах не вполне обеспечивают эту согласованность, что негативно сказывается на результатах. При использовании авторского программного обеспечения можно устранить эту проблему для объектов со сложной геометрией использованием собственного алгоритма построения узлов в случае конечно-элементного расчета.

3. В случае применения вариационно-разностного подхода решается уравнение вариационным методом с дискретизацией области определения решения, что позволяет приближенно решить задачу, используя сеточные функции, и аппроксимировать интегралы суммами, а производные — разностями. При использовании вариационно-разностного метода возможно получить результаты в значимых точках и интерполировать их.

4. Реализация вариационно-разностного метода требует по сравнению с методом конечных элементов меньших вычислительных ресурсов и дает результаты достаточной точности. Программное обеспечение на основе вариационно-разностного метода имеет потенциал для проведения поверочных расчетов для сложных объектов.

В статье представлены результаты первого этапа исследования — пластины на эллипсоидально-кольцевом плане. В перспективе планируется провести сравнительный расчет оболочки на эллипсоидально-кольцевом плане. Предполагается, что отличия в методах расчета МКЭ и ВРМ могут оказать значительное влияние на результаты расчета таких оболочек.

Список литературы

1. *Кривошапко С.Н., Мамиева И.А.* Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий. Москва : URSS, 2025. 328 с. EDN: QJZEGJ
2. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей : Более 500 поверхностей 38 классов. Москва : URSS, 2023. 560 с.
3. *Кривошапко С.Н.* Аналитические линейчатые поверхности и их полная классификация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 2. С. 131–138. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-2-131-138> EDN: ILRHGX
4. *Vekariya M.S., Makwana E.A.H.* A Review on Thin-shell Structures: Advances and Trends // International Journal of Research Publication and Reviews. 2021. Vol. 2. No. 12. P. 1593–1608
5. *Ganendra B., Prabowo A., Muttaqie T., Adiputra R., Ridwan R., Fajri A., Thang Do Q., Carvalho H., Baek S.* Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response // Curved and Layered Structures. 2023. Vol. 10. No. 1. <https://doi.org/10.1515/cls-2022-0202> EDN: XYJUCO
6. *Кривошапко С.Н.* Перспективы и преимущества торсовых поверхностей при моделировании машиностроительных и строительных конструкций // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 1 (72). С. 20–30. <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2019-16-1-20-30> EDN: KQGSFJ
7. *Chen M., Tang K.* A fully geometric approach for developable cloth deformation simulation // Visual Computer. 2010. Vol. 26. No. 6–8. P. 853–863. <https://doi.org/10.1007/s00371-010-0467-5>
8. *Алёшина О.О.* Исследования по геометрии и расчету торсовых оболочек одинакового ската // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 3 (284). С. 63–70. EDN: MGZGMR
9. *Krivoshapko S.N.* The opportunities of umbrella-type shells // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2020. Vol. 16. No. 4. P. 271–278. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-271-278> EDN: VCQAWD

10. Алборова Л.А., Мамиева И.А. Криволинейные формы в архитектуре зданий и сооружений до XXI века. *Academia. Архитектура и строительство*. 2023. № 3. С. 154–164. <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2023-3-154-164> EDN: JEEOEY
11. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях // *Academia. Архитектура и строительство*. 2020. № 1. С. 150–165. EDN: KNYKTY
12. Gil-Oulbe M., Daou T., Mariko O. Analytical surfaces for architecture and engineering // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022. Vol. 18. No. 5. P. 458–466. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-5-458-466>
13. Страшинов С.В., Рынковская М.И. К вопросу о классификации аналитических поверхностей // *Геометрия и графика*. 2022. № 1. С. 36–43. <https://doi.org/10.12737/2308-4898-2022-10-1-36-43> EDN: YPILOJ
14. Gil-oulbe M. Reserve of analytical surfaces for architecture and construction // *Building and Reconstruction*. 2021. Vol. 6. P. 63–72. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-98-6-63-72> EDN: BCWXIS
15. Krivoshapko S.N. Kinematic surfaces with congruent generatrix curves // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования*. 2023. Т. 24. № 2. P. 166–176. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2023-24-2-166-176> EDN: BNFZFA
16. Иванов В.Н., Алёшина О.О., Ларионов Е.А. Определение оптимальных цилиндрических оболочек в форме поверхностей второго порядка // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2025. Т. 21. № 1. С. 37–47. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-1-37-47> EDN: IQCXLS
17. Иванов В.Н. Геометрия нормальных линейчатых поверхностей // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 6. С. 562–575. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-562-575> EDN: DBVHZU
18. Конопацкий Е.В., Воронова О.С., Ротков С.И., Лагунова М.В., Бездитный А.А. Моделирование кривых 2-го порядка и поверхностей оболочек инженерных сооружений на их основе // *Строительство и техногенная безопасность*. 2021. № 22 (74). С. 101–110. <https://doi.org/10.37279/2413-1873-2021-22-101-110> EDN: SPNBPW
19. Ivanov V.N. Constructing shells and their visualization in system “MathCad” on basis of vector equations of surfaces // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 456. Article no. 012018. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012018> EDN: VVVFHR
20. Gil-oulbé M., Ndomilep A.J.I. Geometry and classification of carved Monge surfaces // *Journal of Physics Conference Series*. 2021. Vol. 1687. Article no. 012002. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1687/1/012002>
21. Mamieva I.A., Gbaguidi-Aisse G.L. Influence of the geometrical researches of rare type surfaces on design of new and unique structures // *Building and reconstruction*. 2019. No. 5. P. 23–34. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-85-5-23-34> EDN: UAKPPP
22. Иванов В.Н., Имомназаров Т.С., Фархан И.Т. Ортогональная криволинейная система координат и построение поверхностей на трапециевидно-криволинейных планах // *Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования*. 2017. Т. 18. № 4. С. 518–527. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2017-18-4-518-527> EDN: YPSROF
23. Иванов В.Н. Геометрические характеристики поверхностей на криволинейно-трапециевидных планах // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 2. С. 134–145. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-2-134-145> EDN: GPVKGU
24. Sabat L., Kundu C.K. History of finite element method: a review // *Lecture Notes in Civil Engineering: Recent Developments in Sustainable Infrastructure*. 2021. Vol. 7. P. 395–404. https://doi.org/10.1007/978-981-15-4577-1_32
25. Wang P., Niu Q., Liu M., Li Z., Cao X., Zhang H. Numerical analysis on natural vibration of cylindrical shell with different cross-section // *MATEC Web of Conferences*. 2023. Vol. 380. Article no. 01015. <https://doi.org/10.1051/mateconf/202338001015> EDN: DAQCON
26. Al-Yacouby A.M., Hao L.J., Liew M.S., Ratnayake R.M.C., Samarakoon S.M.K. Thin-walled cylindrical shell storage tank under blast impacts: Finite element analysis // *Materials*. 2021. Vol. 14. Article no. 7100. <https://doi.org/10.3390/ma14227100> EDN: DBXXOD
27. Trushin S., Goryachkin D. Numerical evaluation of stress-strain state of bending plates based on various models // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 153. P. 781–784. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.242> EDN: YUWKVR
28. Рынковская М.И. Расчет и применение геликоидальных оболочек // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования*. 2009. № 3. С. 113–116. EDN: KVUYQX
29. Рынковская М.И. К вопросу о расчете на прочность тонких линейчатых винтовых оболочек // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2015. № 6. С. 13–15. EDN: UMQHQN
30. Rynkovskaya M. Plastic deformations occurring in shells with developable middle surfaces during bending // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 371. Article no. 012054. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/371/1/012054> EDN: VBQVQK
31. Tupikova E.M., Rynkovskaya M.I. Analytical approach to stress-strain analysis of right and oblique helicoid structures // *Magazine of Civil Engineering*. 2021. No. 6 (106). Article no. 10609. <https://doi.org/10.34910/MCE.106.9> EDN: MHSSFD
32. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells // *International Applied Mechanics*. 2012. Vol. 48. No. 6. P. 613–687. <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8> EDN: XMGQZR

33. *Ivanov V., Ryzkovskaya M.* Analysis of thin walled wavy shell of monge type surface with parabola and sinusoid curves by variational-difference method // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. Article no. 12007. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20179512007> EDN: YVFNSX
34. *Иванов В.Н., Алёшина О.О.* Сравнительный анализ результатов определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 5. С. 374–383. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383> EDN: LZSVVI
35. *Иванов В.Н., Алёшина О.О.* Сравнительный анализ параметров напряженно-деформированного состояния торса с направляющим эллипсом с помощью трех методов расчета // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 3 (290). С. 37–46. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.3.37.46> EDN: STKBFX
36. *Алешина О.О., Иванов В.Н., Гринько Е.А.* Исследование напряженного состояния торсовой оболочки одинакового ската аналитическим и численными методами // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 6. С. 2–13. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.6.2.13> EDN: YXWWNT
37. *Govind P.L.* Complicated features and their solution in analysis of thin shell and plate structures // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2018. Vol. 14. No. 6. P. 509–515. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-6-509-515> EDN: YUZVSP
38. *Алёшина О.О., Иванов В.Н., Кахамарка-Сунига Д.* Анализ напряженного состояния оболочки одинакового ската при действии равномерно распределенной касательной нагрузки различными методами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 51–62. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62> EDN: TSDXQW
39. *Merneedi A., Nalluri M.R., Vissakodeti V.S.R.* Free vibration analysis of an elliptical plate with cut-out // Journal of Vibroengineering. 2017. Vol. 19. No. 4. P. 2341–2353. <https://doi.org/10.21595/jve.2016.17575>
40. *Çeribaşı S.* Static and dynamic analyses of thin uniformly loaded super elliptical FGM plates // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2012. Vol. 19. No. 5. P. 323–335. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.528160>
41. *Sharma P., Khinchi A., Singh R.* Modal study on FGM elliptical plate under thermal environment. In: Maiti D.K. et al. Recent Advances in Computational and Experimental Mechanics. Vol II. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Singapore, 2022. https://doi.org/10.1007/978-981-16-6490-8_8
42. *Timoshenko S., Voinovsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. Second Edition, McGraw-Hill Book Company INC, New York Toronto London, 1959. 580 p. ISBN 0070858209, 9780070858206
43. *Иванов В.Н.* Конструирование и расчет пластин и пологих оболочек на криволинейно-трапециевидных планах // Строительная механика и расчет сооружений. 2025. № 5. С. 72–82. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2025.5.72.78> EDN: EIVYNT