

Деформирование балки, лежащей на упругом основании, при различных вариантах коэффициента податливости основания

М.Р. Горкина^{ID}

ООО «АйДи Инжиниринг», Санкт-Петербург, Российская Федерация

✉ maria-gorkina@mail.ru

Поступила в редакцию: 7 декабря 2025 г.

Доработана: 27 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 5 марта 2026 г.

Аннотация. Исследованы особенности деформирования балки, опирающейся на упругое основание, при различных вариантах коэффициента податливости основания. Проанализированы классические модели, такие как модель Винклера и модель Пастернака, а также нелинейные зависимости коэффициента постели от прогиба. Для решения задачи применены численные методы, включая метод Ритца и метод продолжения решения по параметру, что позволило исследовать влияние нагрузки и условий закрепления на величину прогиба балки. Полученные результаты демонстрируют влияние выбранной модели основания на величину прогиба и необходимость учета нелинейных эффектов для точного прогнозирования деформаций конструкций, взаимодействующих с грунтовым массивом. Дополнительно показано, что использование линейных моделей упругого основания дает удовлетворительные результаты лишь при малых деформациях и однородной структуре грунта. В условиях повышенной податливости или неоднородности грунтового массива необходимо применять модели, учитывающие изменение коэффициента постели в зависимости от величины прогиба. Это позволяет корректно описывать перераспределение напряжений и формирование зон оседания. Представленные зависимости и расчетные схемы могут быть использованы при проектировании фундаментов, плит и протяженных инженерных сооружений, где требуется обеспечить надежность и устойчивость системы конструкция — основание.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Ключевые слова: балка на упругом основании, коэффициенты постели, прогиб балки, модель Пастернака, метод Ритца, нелинейная деформация, метод продолжения решения по параметру

Для цитирования: Горкина М.Р. Деформирование балки, лежащей на упругом основании, при различных вариантах коэффициента податливости основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 129–137. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-129-137> EDN: KBDQNJ

Deformation of a Beam Lying on an Elastic Foundation with Different Variants of the Foundation Flexibility Coefficient

Maria R. Gorkina^{ID}

Engineering LLC, Saint Petersburg, Russian Federation

✉ maria-gorkina@mail.ru

Received: December 7, 2025

Revised: February 27, 2026

Accepted: March 5, 2026

Abstract. This article examines the deformation characteristics of a beam supported on an elastic foundation for various foundation compliance factors. Classic models, such as the Winkler and Pasternak models, are analyzed, as are nonlinear dependences of the bedding factor on deflection. Numerical methods, including the Ritz method and the parameter continuation method, were used to solve the problem, allowing us to study the influence of load and anchorage conditions on the beam deflection. The obtained

Горкина Мария Руслановна, ведущий инженер-конструктор, архитектурно-строительный отдел, ООО «АйДи Инжиниринг», Российская Федерация, 197136 г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д.37Ш, оф. 305, пом. 1-Н; eLIBRARY SPIN-код: 9433-1388, ORCID: 0000-0002-1036-6554; e-mail: maria-gorkina@mail.ru

© Горкина М.Р., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

results demonstrate the influence of the selected foundation model on the deflection magnitude and the need to consider nonlinear effects to accurately predict the deformations of structures interacting with the soil mass. It is also shown that the use of linear elastic foundation models yields satisfactory results only for small deformations and a homogeneous soil structure. In conditions of increased soil compliance or heterogeneity, it is necessary to use models that take into account the change in the bedding factor depending on the deflection magnitude. This allows for the correct description of stress redistribution and the formation of subsidence zones. The presented relationships and calculation models can be used in the design of foundations, slabs, and extended engineering structures where the reliability and stability of the structure-foundation system must be ensured.

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

Keywords: beam on an elastic foundation, bedding coefficients, beam deflection, Pasternak model, Ritz method, nonlinear deformation, method of continuation of the solution by parameter

For citation: Gorkina MR. Deformation of a beam lying on an elastic foundation with different variants of the foundation flexibility coefficient. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):129–137. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-129-137> EDN: KBDQNJ

1. Введение

Тема расчета балок на упругом основании, которой начали заниматься еще в XIX в., остается актуальной для строительной механики и геотехники и по сей день. Главными исследователями теории упругого основания считаются выдающиеся ученые и инженеры, которые внесли значительный вклад в развитие и применение теории расчетов. К числу наиболее значимых специалистов в этой области относятся Э. Винклер, М. Хетеньи, П.Л. Пастернак, А.А. Ильюшин, Э.Л. Олговер, К. Георг, А.Н. Крылов, А. Сельвадурай, Г. Гладуэлл, А.Б. Фадеев, А.Г. Шашкин, В.Н. Парамонов. Классические подходы к расчету балок на упругом основании связаны с моделью Винклера [1], в которой основание представляется как набор независимых упругих пружин, где реакция основания пропорциональна прогибу балки. Данная модель получила развитие в зарубежных работах, где были предложены методы решения дифференциальных уравнений равновесия для балок с различными граничными условиями. Однако ограниченность линейного подхода Винклера для описания реальных грунтов стимулировала исследования нелинейных моделей. Для устранения указанных ограничений П.Л. Пастернак предложил усовершенствованную модель, учитывая сдвиговую жесткость основания [2]. Для решения вышеперечисленных задач традиционно применялись итерационные методы, включая метод упругих решений А.А. Ильюшина [3], а также метод малого параметра, требующие значительных вычислительных ресурсов. А.Б. Фадеев в своих работах акцентирует внимание на применении современных численных методов для решения сложных задач о балках на упругом основании. Его вклад включает использование метода итераций для анализа балок на нелинейных и неоднородных основаниях [4–5]. А.Г. Шашкин в своих работах уделяет внимание как аналитическим, так и численным методам решения задач о балках на упругом основании [6]. В работе В.Н. Парамонова приводятся модели грунта и методы расчета конечных деформаций основания. Рассмотрены физические нелинейные задачи механики грунтов, также построены модели грунтов для условий больших деформаций [7]. Существующие работы фокусируются на линейных постановках или сложных итерационных методах, что затрудняет анализ нелинейных систем [9; 10]. Современные исследования показывают, что для более точного описания системы «балка — основание» активно развиваются обобщенные постановки с переменными свойствами основания, нелинейной контактной работой, неоднородностью и динамическими воздействиями [13–18].

Таким образом, учет реальных свойств основания и корректное определение коэффициента постели являются ключевыми факторами точного расчета балок, фундаментов и протяженных конструкций, взаимодействующих с грунтовым основанием.

2. Различные виды коэффициентов постели

Коэффициент податливости основания (или коэффициент постели) характеризует способность грунтового основания деформироваться под действием приложенной нагрузки. Он связывает давление, передаваемое конструкции на грунт, с возникающей деформацией (осадкой) основания. В ин-

женерной практике этот параметр широко используется в расчетах оснований и фундаментов для оценки их устойчивости и прогнозирования осадок [11; 12].

В классическом виде зависимость между прогибом балки и реакцией основания представлена в модели Винклера, где реакция основания пропорциональна местному прогибу. Однако такая модель описывает грунт как набор независимых упругих элементов, что не отражает реального распределения деформаций, поскольку нагрузка, приложенная в одной точке, вызывает осадку в зоне, распространяющейся на значительное расстояние.

Для повышения точности описания был предложен ряд усовершенствованных моделей, в том числе модель Пастернака. Зависимость между давлением, передаваемым на грунт, и возникающей деформацией (осадкой) П.Л. Пастернак [2] предложил учитывать двумя коэффициентами постели c_1 и c_2 , где c_1 — коэффициент сжатия, а c_2 — коэффициент сдвига.

Для описания этих коэффициентов, можно принять формулы

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{E_{\text{гр}}}{H_c (1 - 2m_{\text{гр}}^2)}; \\ c_2 &= \frac{c_1 H_c^2 (1 - 2m_{\text{гр}}^2)}{6(1 + m_{\text{гр}})}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $E_{\text{гр}}$ — модуль деформации грунта; H_c — толщина массива слоев; $m_{\text{гр}}$ — усредненный коэффициент Пуассона.

В [8] отмечается, что c_2 должен быть больше c_1 .

Например, для пылевато-глинистого грунта $H_c = 18,1$ м; $E_{\text{гр}} = 9806,65$ кН/м², $m_{\text{гр}} = 0,35$ и тогда $c_1 = 0,717$ МПа/м, $c_2 = 29$ МПа·м.

Для грунтов с нелинейным поведением (например, слабых или водонасыщенных) рекомендуется использовать нелинейные модели или численные методы (например, метод конечных элементов), чтобы учесть изменение коэффициента податливости в зависимости от прогиба. Аналогичные задачи для нелинейных и неоднородных оснований в современных работах решаются с использованием конечно-элементных, вариационных и редуцированных подходов [16–18].

Теперь рассмотрим случай, когда $k(x)$ зависит нелинейно от w :

$$k(x) = \left(R - \frac{R^2 w}{P + R w} \right) = R - \frac{R^2 w + P R - P R}{P + R w} = R - R + \frac{P R}{P + R w} = \frac{P R}{P + R w}, \quad (2)$$

где R — начальное значение коэффициента податливости грунта; P — асимптотическое давление под подошвой фундамента.

3. Деформирование балки, лежащей на упругом основании при различных вариантах коэффициента постели

3.1. Вариант коэффициента постели Винклера

Рассмотрим решение практических задач геомеханики. Рассмотрим балку, лежащую на упругом основании и находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки q . Функционал полной потенциальной энергии деформации балки имеет вид

$$E_s = \frac{1}{2} \int [EI(w'')^2 + k(x)w^2 - 2qw] dx. \quad (3)$$

Важным частным случаем является равенство $k(x) = \text{const}$, но в ряде задач требуется рассматривать общий случай, когда $k(x)$ нелинейно зависит от $w(x)$.

Примем коэффициент податливости основания $k(x) = 1$.

Реальные размеры толщины и длины балки могут принимать разнообразные значения. Идеальной толщиной балки будет считаться та толщина, которая будет больше или равной $1/20$ части ее размеров в длину. Нагрузка q может также принимать различные значения.

Рассмотрим железобетонную балку толщиной $h = 0,1$ м, длиной $l = 10$ м, жестко закрепленная на концах, находящаяся под действием равномерно распределенной нагрузки $q = 0,1$ МПа.

К функционалу

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(w'')^2 + 1w^2 - 2qw] dx, \quad (4)$$

применим метод Ритца при аппроксимации

$$w(x) = w_1 f(x),$$

где при жестком защемлении аппроксимирующая функция при $x = 0$ и $x = 10$

$$f(x) = (10 - x)^2 x^2.$$

В соответствии с методом Ритца для нахождения w_1 имеем уравнение

$$\frac{dE_s}{dw_1} = \int_0^L [EIw_1(f'')^2 + w_1 f^2 - qf] dx = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$a_1 = \int_0^L [EI(f'')^2 + f^2] dx, a_2 = \int_0^L f dx, \quad (6)$$

заготовим коэффициенты

$$\int_0^{10} (f'')^2 dx = 10^5 \cdot 0,8, \quad \int_0^{10} f dx = \frac{10^5}{30}, \quad \int_0^{10} f^2 dx = 10^5 \cdot 15,8.$$

В данном случае, когда $k(x) = 1$, уравнение примет вид

$$a_1 w_1 - a_2 q = 0, \quad (7)$$

где $q = 0,1$ МПа

$$a_1 = 10^5 \cdot 17,8, \quad a_2 q = 10^5 \cdot 3,3333 \cdot 10^{-3}.$$

Следовательно, $w_1 = 0,183 \cdot 10^{-3}$, и $w(5) = 0,117$ м.

Подстановка выбранной аппроксимации в функционал приводят к алгебраическому уравнению, позволяющему определить величину максимального прогиба балки.

3.2. Вариант двух коэффициентов постели

Рассмотрим случай, когда податливость грунта нагрузкам характеризуется двумя коэффициентами постели c_1 и c_2 . В этом случае функционал полной потенциальной энергии деформации системы будет иметь вид

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(w'')^2 + c_2(w')^2 + c_1w^2 - 2qw] dx, \quad (8)$$

где $c_1 = 0,717$ МПа/м, $c_2 = 29$ МПа·м.

В качестве примера рассмотрим железобетонную балку ($E = 3 \cdot 10^4$ МПа) длиной $L = 10$ м, толщиной $h = 0,1$ м, жестко закрепленную на концах и находящуюся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = 0,1$ МПа.

К функционалу (8) применим метод Ритца при аппроксимации $w(x)$ в виде

$$w(x) = w_1 f(x),$$

где при жестком защемлении при $x = 0$ и $x = 10$

$$f(x) = (10 - x)^2 x^2.$$

В соответствии с методом Ритца для нахождения w_1 получим одно алгебраическое уравнение

$$\frac{dE_s}{dw_1} = \frac{1}{2} \int_0^L [2EIw_1(f'')^2 + 2c_2w_1(f')^2 + 2c_1w_1f^2 - 2qf] dx = 0. \quad (9)$$

Введем обозначения

$$a_1 = \int_0^{10} w_1(f'')^2 dx; \quad a_2 = \int_0^{10} f^2 dx;$$

$$a_3 = \int_0^{10} (f')^2 dx; \quad a_4 = \int_0^{10} f dx.$$

Теперь уравнение примет вид

$$w_1(EIa_1 + c_1a_2 + c_2a_3) = qa_4, \quad (10)$$

в данном случае

$$a_1 = 0,8 \cdot 10^5, \quad a_2 = 15,8 \cdot 10^5,$$

$$a_3 = 1,9 \cdot 10^5, \quad a_4 = \frac{10^5}{30}.$$

Следовательно,

$$w_1 = 0,0487 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad w(5) = 0,03 \text{ м}.$$

Сравнение результатов расчета по моделям Винклера и Пастернака показывает, что учет сдвиговых деформаций приводит к меньшим значениям прогиба и более плавному распределению реакций по длине балки.

Теперь рассмотрим случай, когда балка при $x = 0$ закреплена жестко, а при $x = 10$ м свободно. В этом случае аппроксимирующая функция будет иметь вид

$$f_1(x) = \frac{x^4}{1200} - \frac{x^3}{30} + \frac{x^2}{2}.$$

Посчитаем необходимые коэффициенты для дальнейшего удобства:

$$a_1 = \int_0^{10} (f_1'')^2 dx = 2; \quad a_2 = \int_0^{10} f_1'^2 dx = 1604,938;$$

$$a_3 = \int_0^{10} (f_1')^2 dx = 71,429; \quad a_4 = \int_0^{10} f_1 dx = 100.$$

Уравнение (10) примет вид

$$w_1 3227,1815 = 10,$$

откуда $w_1 = 0,0030986$, $w(5) = 0,0274$ м, $w(10) = 0,0775$ м.

Прогиб $w(10)$ больше допустимого значения, соответственно необходимо увеличить толщину балки, применяя метод продолжения решения по параметру H .

3.3. Вариант коэффициента постели, нелинейно зависящий от прогиба

Рассмотрим вариант коэффициента постели, нелинейно зависящий от прогиба $w(x)$, который будет учитывать нелинейно-упругие деформации грунта. В этом случае функционал полной потенциальной энергии деформации балки примет вид

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI(w'')^2 + \frac{PR}{P+Rw} w^2 - 2qw \right] dx. \quad (11)$$

Приведем, используя метод продолжения решения по параметру q , функционал к квадратичному, т.е. проведем линеаризацию задачи на уровне функционала:

$$\overline{E_s} = \frac{\partial E_s}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial E_s}{\partial q} \Delta q = \frac{1}{2} \int_0^L \left[2EIw'' \Delta w'' + \frac{2PRw(P+Rw-PR^2w^2)}{(P+Rw)^2} \Delta w - 2q \Delta w - 2\Delta q w \right] dx.$$

Введем обозначения:

$$2\phi_1(w) \Delta w = 2 \left(\frac{PRw}{P+Rw} - \frac{0,5PR^2w}{(P+Rw)^2} \right) \Delta w. \quad (12)$$

Квадратичный функционал запишем в виде

$$\overline{E_s} = \int_0^L [EIw'' \Delta w'' + \phi_1(w) \Delta w - q \Delta w - \Delta q w] dx. \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим железобетонную балку ($E = 3 \cdot 10^4$ МПа), длиной $L = 10$ м, толщиной $h = 0,1$ м, жестко закрепленную на концах, и находящуюся под действием равномерно-распределенной нагрузки интенсивностью $q = 0,1$ МПа.

Применим для минимизации функционала (12) метод Ритца:

$$w(x) = w_1 f(x), \quad \Delta w = \Delta w_1 f(x),$$

где при жестком защемлении при $x = 0$ и $x = 10$:

$$f(x) = (10-x)^2 x^2.$$

В соответствии с методом Ритца для нахождения w_1 получим уравнение

$$\frac{dE_s}{dw_1} = \int_0^L \left[EI \Delta w_1 (f(x))''^2 + \frac{d\phi_1(w_1)}{dw_1} \Delta w_1 f(x) - \Delta q f(x) \right] dx = 0. \quad (14)$$

$$\frac{d\phi_1(w_1)}{dw_1} = \frac{PRf(x)}{P + R w_1 f(x)} - \frac{2PR^2 w_1 f^2(x)}{(P + R w_1 f(x))^2} + \frac{PR^3 w_1^2 f^3(x)}{(P + R w_1 f(x))^3}.$$

Введем обозначения:

$$a_1 = \int_0^{10} (f(x))''^2 dx; \quad a_{21} = \int_0^{10} \frac{PRf(x)^2}{P + R w_1 f(x)} dx;$$

$$a_{22} = \int_0^{10} \frac{2PR^2 w_1 f(x)^3}{(P + R w_1 f(x))^2} dx; \quad a_{23} = \int_0^{10} \frac{PR^3 w_1^2 f(x)^4}{(P + R w_1 f(x))^3} dx;$$

$$a_2 = a_{21} - a_{22} + a_{23}; \quad a_3 = \int_0^{10} f(x) dx.$$

Уравнение (13) теперь можно записать в виде $EI a_1 \Delta w_1 + \Delta w_1 a_2 - \Delta q a_3 = 0$ при $q = 0,1$ МПа, $\Delta q = 0,01$ МПа, $w_{1,0} = 0$ и $a_{22} = a_{23} = 0$, $a_{22} = \int_0^{10} \frac{PRf^2(x)}{P} dx$.

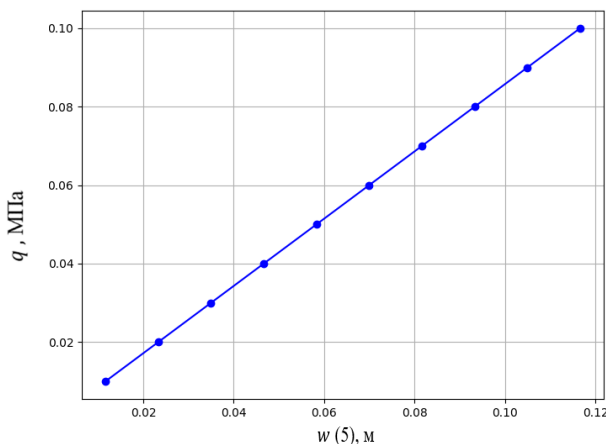
Далее $w_{1i} = w_{1i-1} + \Delta w_{1i}$, $q_i = q_{i-1} + \Delta q$, $\Delta w_1 = \frac{\Delta q a_3}{EI a_1 + a_2}$, $R = 0,3$ МПа, $P = 0,2$ МПа·м.

Результаты расчетов показывают, что с ростом нагрузки прогибы увеличиваются нелинейно, что особенно заметно при приближении к пределу несущей способности основания.

Ниже представлены графики прогиба $w(5)$ в зависимости от нагрузки q (рис.).

Экспериментально рассчитанные прогибы (табл.) подтверждают этот вывод: при увеличении нагрузки более чем в 5–6 раз рост прогибов становится значительно ускоренным, что необходимо учитывать при проектировании.

Таким образом, при $q = 0,1$ МПа наибольший прогиб составит $w(5) = 0,442$ м, что превышает допустимый предел для железобетонной балки.



Зависимость коэффициента w_{max} от значения нагружения q
Источник: выполнено М.Р. Горкиной.

Dependence of the coefficient w_{max} on the loading value q
Source: made by M.R. Gorkina.

Значения прогибов для балки, лежащей на упругом основании, при нелинейно-упругом деформировании

Deflection values for a beam lying on an elastic foundation under nonlinear elastic deformation

q , МПа / МПа	$\Delta w_1 \cdot 10^{-3}$	$w_1 \cdot 10^{-3}$	$w(5)$, м
0,01	0,049	0,049	0,049
0,02	0,053	0,103	0,065
0,03	0,058	0,160	0,099
0,04	0,062	0,223	0,139
0,05	0,067	0,289	0,181
0,06	0,072	0,362	0,226
0,07	0,078	0,440	0,275
0,08	0,083	0,524	0,327
0,09	0,089	0,613	0,383
0,1	0,095	0,708	0,442

Источник: выполнено М.Р. Горкиной / Source: made by M. R. Gorkina.

4. Заключение

1. Установлено влияние расчетной модели упругого основания на деформированное состояние балки. Показано, что линейная модель Винклера обладает ограниченной точностью и может применяться преимущественно при малых деформациях и однородном основании. Модель Пастернака обеспечивает более адекватное описание работы грунтового массива, поскольку учитывает не только вертикальную податливость, но и сдвиговую жесткость основания, что позволяет получить более корректную оценку прогибов балки.

2. Показана необходимость учета нелинейной работы основания при расчете балок на слабых и повышенно податливых грунтах. Установлено, что при увеличении нагрузки прогибы балки возрастают нелинейно и в отдельных случаях могут превышать допустимые значения. Это подтверждает необходимость применения моделей с переменным коэффициентом постели, зависящим от прогиба, а также использования численных методов решения для более точного описания взаимодействия системы «балка — основание».

3. Обоснована практическая значимость предложенного подхода для расчета конструкций, взаимодействующих с грунтовым основанием. Полученные результаты показывают, что корректный выбор модели основания и учет условий закрепления балки позволяют более достоверно оценивать ее прогибы и своевременно принимать конструктивные решения, например увеличивать толщину балки или изменять параметры расчетной схемы. Дальнейшее развитие исследования может быть связано с учетом неоднородности основания, динамических воздействий и оптимизацией геометрических параметров конструкции.

Работа вносит вклад в развитие методов расчета балок на упругом основании и может быть полезна для инженерных приложений в области строительства и механики грунтов.

Список литературы

1. Винклер Э. Теория упругости и сопротивления материалов / пер. Н.А. Сыкалова. СПб. : Тип. ИАН, 1885. 348 с.
2. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании. Москва : Госстройиздат, 1954. 56 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. 1 : Упруго-пластические деформации. Москва : ОГИЗ, 1948. 376 с.
4. Карташов Ю.М., Матвеев Б.В., Михеев Г.В., Фадеев А.Б. Прочность и деформируемость горных пород / под общ. ред. А.Б. Фадеева. Москва : Недра, 1979. 269 с.
5. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. Москва : Недра, 1987. 221 с. URL: <https://djvu.online/file/lesqTrp1ajTS3> (accessed: 13.09.2025)
6. Шашкин А.Г. Вязко-упругопластическая модель поведения глинистого грунта // Развитие городов и геотехническое строительство. 2011. № 2. С. 1–32. URL: <http://urban-development.ru/2011/7.pdf> (дата обращения: 13.09.2025)
7. Парамонов В.Н. Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники. СПб. : Геореконструкция, 2012. 262 с. ISBN 978-5-9902005-4-8 EDN: AGFUXX
8. Улицкий В.М., Шашкин А.Г., Шашкин К.Г. Гид по геотехнике (путеводитель по основаниям, фундаментам и подземным сооружениям). СПб : Геореконструкция, 2012. 284 с. ISBN 978-5-9902005-3-1 EDN: TDIORF
9. Lamprea-Pineda A.C., Connolly D.P., Hussein M.F.M. Beams on elastic foundations — A review of railway applications and solutions // *Transportation Geotechnics*. 2022. Vol. 33. Article no. 100696. <https://doi.org/10.1016/j.trgeo.2021.100696> EDN: TDIORF
10. Мангушев Р.А. Применение современных конструктивных и технологических методов для устройства подземного пространства в г. Санкт-Петербурге // *Геотехника*. 2010. № 2. С. 58–67. EDN: OWFRMJ
11. Terzaghi K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction // *Géotechnique*. 1955. Vol. 5. No. 4. P. 297–326. <https://doi.org/10.1680/geot.1955.5.4.297>
12. Daloglu A.T., Vallabhan C.V.G. Values of k for slab on Winkler foundation // *Journal of Geotechnical and Environmental Engineering*. 2000. Vol. 126. No. 5. P. 463–471. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2000\)126:5\(463\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2000)126:5(463))
13. Wstawska I., Magnucki K., Kędzia P. Stability of three-layered beam on elastic foundation // *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 175. Article no. 109208. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109208> EDN: XGKUBX
14. Karagiozova D., Yu T.X. Long beam on Winkler-type elastic foundation under a localized rectangular pressure pulse // *International Journal of Impact Engineering*. 2024. Vol. 187. Article no. 104921. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2024.104921> EDN: QHXTNW

15. Chen Z., Cheng Q., Jin X., Borodich F.M. Dynamic stiffness for a Levinson beam embedded within a Pasternak medium subjected to axial load at both ends // *Buildings*. 2024. Vol. 14. No. 12. Article no. 4008. <https://doi.org/10.3390/buildings14124008> EDN: EMCBQF
16. Previati G., Ballo F., Stabile P. Beams on elastic foundation: A variable reduction approach for nonlinear contact problems // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2025. Vol. 111. Article no. 105514. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105514> EDN: LOAQTP
17. Previati G., Stabile P., Ballo F. A variable reduction approach for microbeams on elastic foundation // *Sensors*. 2025. Vol. 25. No. 10. Article no. 3034. <https://doi.org/10.3390/s25103034> EDN: MEAYSN
18. Marinca V., Herisanu N., Marinca B. Approximate solution to nonlinear dynamics of a piezoelectric energy harvesting device subject to mechanical impact and Winkler-Pasternak foundation // *Materials*. 2025. Vol. 18. No. 7. Article no. 1502. <https://doi.org/10.3390/ma18071502> EDN: FWOOVA

References

1. Winkler E. *Theory of elasticity and strength of materials*. Prague; 1867.
2. Pasternak PL. *Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic base*. Moscow: Gosstroyizdat Publ.; 1954. (In Russ.)
3. Ilyushin AA. *Plasticity. Part 1: Elastic-plastic deformations*. Moscow: OGIZ Publ.; 1948. (In Russ.)
4. Kartashov YuM, Matveev BV, Mikheev GV, Fadeev AB. *Strength and deformability of rock masses*. Fadeev AB, editor. Moscow: Nedra Publ.; 1979. (In Russ.)
5. Fadeev AB. *Finite element method in geomechanics*. Moscow: Nedra; 1987. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/lesqTpflajTS3> (accessed: 13.09.2025).
6. Shashkin AG. Visco-elastoplastic model of clay soil behavior. *Urban Development and Geotechnical Construction*. 2011;(2):32. (In Russ.) Available from: <http://urban-development.ru/2011/7.pdf> (accessed: 13.09.2025)
7. Paramonov VN. *Finite element method for solving nonlinear problems in geotechnics*. Saint Petersburg: Georeconstruction Publ.; 2012. (In Russ.) ISBN 978-5-9902005-4-8 EDN: AGFUXX
8. Ulitsky VM, Shashkin AG, Shashkin KG. *Geotechnical guide (guide to soils, foundations and underground structures)*. Saint Petersburg: Georeconstruction Publ.; 2010. (In Russ.) ISBN 978-5-9902005-3-1 EDN: TDIORF
9. Lamprea-Pineda AC, Connolly DP, Hussein MFM. Beams on elastic foundations — A review of railway applications and solutions. *Transportation Geotechnics*. 2022;33:100696. <https://doi.org/10.1016/j.trgeo.2021.100696> EDN: TDIORF
10. Mangushev RA. Use of modern constructional and technological methods for development of the underground space in St. Petersburg. *Geotechnics*. 2010;(2):58–67. (In Russ.) EDN: OWFRMJ
11. Terzaghi K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Géotechnique*. 1955;5(4):297–326. <https://doi.org/10.1680/geot.1955.5.4.297>
12. Daloglu AT, Vallabhan CVG. Values of k for slab on Winkler foundation. *Journal of Geotechnical and Environmental Engineering*. 2000;126(5):463–471. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2000\)126:5\(463\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2000)126:5(463))
13. Wstawska I, Magnucki K, Kędzia P. Stability of three-layered beam on elastic foundation. *Thin-Walled Structures*. 2022;175:109208. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109208> EDN: XGKUBX
14. Karagiozova D, Yu TX. Long beam on Winkler-type elastic foundation under a localized rectangular pressure pulse. *International Journal of Impact Engineering*. 2024;187:104921. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2024.104921> EDN: QHXTNW
15. Chen Z, Cheng Q, Jin X, Borodich FM. Dynamic stiffness for a Levinson beam embedded within a Pasternak medium subjected to axial load at both ends. *Buildings*. 2024;14(12):4008. <https://doi.org/10.3390/buildings14124008> EDN: EMCBQF
16. Previati G, Ballo F, Stabile P. Beams on elastic foundation: A variable reduction approach for nonlinear contact problems. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2025;111:105514. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105514> EDN: LOAQTP
17. Previati G, Stabile P, Ballo F. A variable reduction approach for microbeams on elastic foundation. *Sensors*. 2025;25(10):3034. <https://doi.org/10.3390/s25103034> EDN: MEAYSN
18. Marinca V, Herisanu N, Marinca B. Approximate solution to nonlinear dynamics of a piezoelectric energy harvesting device subject to mechanical impact and Winkler-Pasternak foundation. *Materials*. 2025;18(7):1502. <https://doi.org/10.3390/ma18071502> EDN: FWOOVA