

## Моделирование напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж

А.Г. Хакимов 

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Российская Федерация

✉ hakimov@anrb.ru

Поступила в редакцию: 2 февраля 2026 г.

Доработана: 2 апреля 2026 г.

Принята к публикации: 12 апреля 2026 г.

**Аннотация.** Проведено моделирование напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж в водоем. Удлинение трубопровода под действием растягивающей силы не учитывается. Учитывается действие нормальной распределенной силы, которая возникает вследствие изменения кривизны средней линии трубопровода и зависит от давления внутри и вне трубопровода. Условия равновесия трубопровода описаны уравнениями в проекциях на касательную и нормаль и зависимостью перерезывающей силы от изгибающего момента. Его статическое равновесие определяется действием собственного веса трубопровода, подъемной силы Архимеда и нормальной распределенной силы. С учетом большого отношения длины трубопровода к его диаметру используется нелинейное уравнение изгиба. Исследуется геометрически нелинейная задача равновесия трубопровода. Задача Коши для системы из семи дифференциальных уравнений сформулирована в размерном и безразмерном виде и записана в конечно-разностной форме. Проведены численные расчеты без учета и с учетом нормальной распределенной силы. Определяются форма, усилие натяжения, перерезывающая сила и изгибающий момент в трубопроводе, а также напряженно-деформированное состояние обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж. Результаты моделирования, полученные интегрированием задачи Коши методом Рунге — Кутты, полностью совпадают с расчетами по конечно-разностным формулам.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Ключевые слова:** трубопровод, усилие натяжения, перерезывающая сила, изгибающий момент, форма, задача Коши

**Благодарности.** Работа выполнена в соответствии с государственным заданием (FMRS-2023-0015).

**Для цитирования:** Хакимов А.Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 2. С. 105–114. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-105-114> EDN: JZZMQT

## Modeling the Stress-Strain State of Concrete Coated Pipeline During Laying from Pipe-Laying Barges

Akim G. Khakimov 

Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS, Ufa, Russian Federation

✉ hakimov@anrb.ru

Received: February 2, 2026

Revised: April 2, 2026

Accepted: April 12, 2026

**Abstract.** The stress-strain state of a concrete coated pipeline during laying from pipelaying barges into a reservoir is modeled. Pipeline elongation under tensile force is ignored. The action of the normal distributed force, which arises due to the change in the curvature of the pipeline centerline and depends on the pressure inside and outside the pipeline, is taken into account. The pipeline

**Хакимов Аким Гайфуллинович**, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории механики твердого тела, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Российская Федерация, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71; eLIBRARY SPIN-код: 4759-4504, ORCID: 0000-0003-4093-5380; e-mail: hakimov@anrb.ru

© Хакимов А.Г., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

equilibrium conditions are described by equations in projections onto the tangent and normal lines and by the dependence of the shear force on the bending moment. Its static equilibrium is determined by the action of the pipeline self-weight, the Archimedes buoyant force, and the action of the normal distributed force. Given the large ratio of the pipeline length to its diameter, a nonlinear bending equation is used. A geometrically nonlinear pipeline equilibrium problem is investigated. The Cauchy problem for a system of seven differential equations is formulated in dimensional and dimensionless form and is written in finite difference form. Numerical calculations are performed with and without the normal distributed force. The shape, tensile force, shear force, and bending moment in the pipeline are determined. The stress-strain state of a concrete coated pipeline during installation from pipelaying barges is determined. The modeling results obtained by integrating the Cauchy problem using the Runge-Kutta method are completely consistent with calculations using finite-difference formulas.

**Keywords:** pipeline, tensile force, shear force, bending moment, shape, Cauchy problem

**Conflicts of interest.** The author declares that there is no conflict of interest.

The work was performed in accordance with the state assignment (FMRS-2023-0015).

**For citation:** Khakimov AG. Modeling the stress-strain state of concrete coated pipeline during laying from pipe-laying barges. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(2):105–114. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-2-105-114> EDN: JZZMQT

## 1. Введение

Общая теория статического и динамического поведения труб, шлангов, кабелей содержится в монографии [1]. Обзор исследований по напряженно-деформированному состоянию труб дается в [2]. Изгиб, всплытие, моделирование подъема глубоководного трубопровода большой длины рассматривается в [3–21], где дается обзор исследований по данной теме. В [3] приведен алгоритм нахождения формы равновесия кабеля и трубопровода, находящегося между дном водоема и баржей-трубоукладчиком. Учитываются изменения изгибной жесткости, веса и плавучести, а также силы, вызванные океанским течением. Нелинейная краевая задача преобразуется в безразмерную форму таким образом, что неизвестная длина подвешенного трубопровода или кабеля выступает в качестве масштабного параметра. Численное решение затем основывается на последовательном интегрировании. Применение метода иллюстрируется анализом кривых равновесия и напряжений в трубопроводах, проложенных с использованием барж или без них, а также во время операций по спуску и подъему. В [6] исследуется линейный изгиб трубопровода, для подъема которого приложена сосредоточенная сила, а в [7] представлен линейный и нелинейный изгиб подводного трубопровода. Задачи решены с учетом веса трубопровода вместе со средой в трубопроводе, выталкивающей силы Архимеда, нормальных боковых распределенных сил, зависящих от давлений на внутреннюю и внешнюю поверхности. В [8] дан анализ подъемно-спусковых операций трубопровода в зависимости от эффективного веса и изгибной жесткости трубы, давлений на ее стенки, глубины водоема, сосредоточенной подъемной силы. В [9] рассматривается изгиб обетонированного трубопровода большой длины при подъеме его участка до свободной поверхности водоема. Проведен анализ подъема двухслойного длинного трубопровода со свободным концом в [10]. Концевое сечение закрыто заглушкой, что предотвращает проникновение воды во внутреннюю полость трубы. Изгиб двухслойного трубопровода в процессе его укладки с борта судна рассмотрен в статье [11]. Учитывается влияние упругой нелинейности. Граничные условия записаны для закрепленной границы и свободного края. Создание боковых изгибов в подводных трубопроводах для обеспечения распределения теплового расширения по нескольким изгибам рассматривается в [12]. Для контроля бокового изгиба используются методы инициирования изгиба, такие как распределенные плавучие секции, которые вызывают боковой изгиб в запланированных местах [13]. В [14] рассмотрены подводные трубопроводы, работающие в условиях высокого давления и высоких температур, что может привести к накоплению осевой силы вдоль трубопровода по сравнению с условиями укладки. Статическая устойчивость и определение параметров трубопровода при образовании арки выброса рассмотрены в [15; 16]. Работа [17] посвящена экспериментальному исследованию. Инициирование контролируемого бокового выпучивания

*Akim G. Khakimov*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, Laboratory of Solid Mechanics, Mavlyutov Institute of Mechanics, URFS RAS, 71 Oktyabrskaya Avenue, Ufa, 450054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4759-4504, ORCID: 0000-0003-4093-5380; e-mail: [hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru)

распределенным плавучим участком в заранее заданных местах для снятия осевой силы, вызванной высокой температурой и высоким давлением в подводных трубопроводах рассмотрено в [18]. Обнаружение и онлайн-мониторинг напряжений в трубопроводах на нефтяных и газовых станциях рассматривается в [19]. Моделирование напряженно-деформированного состояния подводного морского газопровода с учетом разжижения грунта и параметров эксплуатации рассматривается в [20; 21]. Подъем трубопроводов является важным этапом в проектировании морских трубопроводов [22]. Разработан эффективный аналитический метод исследования механических свойств трубопровода на основе механических, физических и геометрических соотношений. С помощью методов стрельбы и секущих, преобразующих краевую задачу в задачу с начальными условиями и решающих ее методом Рунге — Кутты, рассчитываются деформация и механические свойства трубопровода. Взаимодействие неустойчивостей трубопровода под действием внутреннего и внешнего давления, силы сжатия и жидкости, протекающей вдоль трубопровода, рассматривается в [23]. Нелинейный изгиб длинного трубопровода под действием сосредоточенной силы рассмотрен в [24]. В [25] излагается нелинейная теория больших перемещений при плоском изгибе тонких упругих стержней. Вводится в рассмотрение три класса задач:

- 1) основной класс;
- 2) класс задач, сводимых к основному;
- 3) класс задач, не сводимых к основному.

К последнему классу относятся задачи с распределенными нагрузками. В вышеприведенных работах используются допущения: поперечное сечение остается круговым, плоскость сечения при деформации плоская и перпендикулярна к осевой линии, трубопровод нерастяжим. Наиболее близкими являются работы [11; 22], где рассматриваются нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки и подъема. В этих работах не учитывается влияние нормальной распределенной силы.

*Цель исследования* — моделирование напряженно-деформированного состояния трубопровода при укладке с трубоукладочных барж в водоем; исследование геометрически нелинейной задачи равновесия трубопровода; постановка и решение задачи Коши для системы из семи дифференциальных уравнений в размерном, безразмерном виде, а также в конечно-разностной форме; определение формы, усилия натяжения, перерезывающей силы и изгибающего момента в трубопроводе; исследование влияния нормальной распределенной силы, учитывающей действие внешнего давления. Сравнение результатов моделирования, полученных интегрированием задачи Коши методом Рунге — Кутта с расчетами по конечно-разностным формулам. Работа может представлять интерес для конструкторов, инженеров, технологов трубопроводного транспорта.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается геометрически нелинейная задача равновесия участка трубопровода при монтаже с трубоукладочных барж (рис. 1, а, б). Задача состоит в определении формы, сил и моментов в трубопроводе. Принято, что при изгибе поперечное сечение трубопровода остается круговым, плоскость сечения при деформации плоская и перпендикулярна к осевой линии. Удлинение трубопровода под действием растягивающей силы не учитывается. Изгиб трубопровода описывается уравнениями равновесия [26]:

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} + q_z \cos \theta = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} + q_z \sin \theta - q_n = 0; \quad (2)$$

$$Q = \frac{dM}{ds}, \quad (3)$$

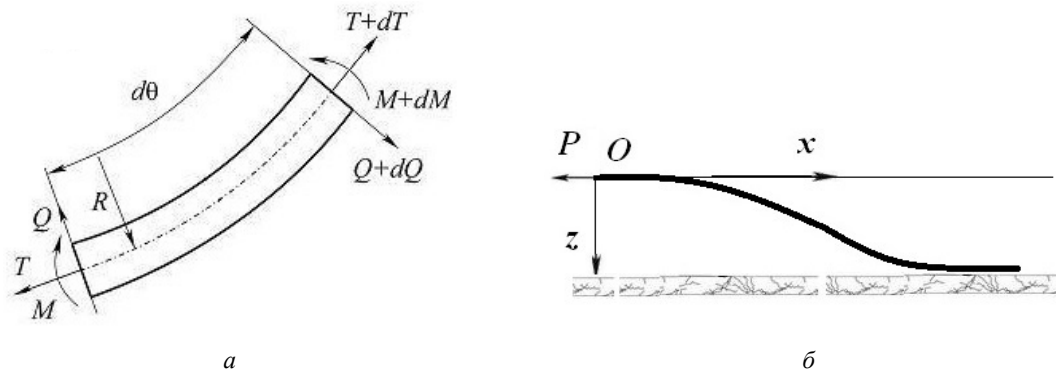
где  $T$ ,  $Q$ ,  $M$  — сила натяжения, сила сдвига и изгибающий момент;  $R$ ,  $s$  — радиус кривизны и длина дуги средней линии изогнутого трубопровода;  $q_z$  — распределенная сила, учитывающая силу тяжести и выталкивающую силу Архимеда;  $q_n$  — нормальная распределенная сила, учитывающая действие внешнего давления, которые определяются по формулам

$$q_z = (\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 + \rho_3 F_3 + \rho_i F_i - \rho_e F_e) g, \quad q_n = (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g z \frac{1}{R}, \quad (4)$$

где  $q_z$  — вес единицы длины трубопровода, состоящего из трех концентрических слоев с площадями поперечных сечений  $F_k$  и плотностями материалов  $\rho_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , с плотностями сред внутри и вне трубопровода  $\rho_i$ ,  $\rho_e$  и площадями поперечных сечений  $F_i$ ,  $F_e$ :

$$F_i = \pi R_i^2, \quad F_e = \pi R_e^2.$$

Здесь  $R_i$ ,  $R_e$  — радиусы внутренней и внешней окружностей поперечного сечения трубопровода,  $x$ ,  $z$  — прямоугольные координаты;  $g$  — ускорение свободного падения.



**Рис. 1.** Участок трубопровода при монтаже с трубоукладочных барж:

*a* — силы, действующие по средней линии; *б* — расчетная схема

И с т о ч н и к: выполнено А.Г. Хакимовым.

**Figure 1.** Pipeline section during installation from pipe-laying barges:

*a* — forces acting along the centerline; *б* — calculation model

S o u r c e: made by A.G. Khakimov.

Изгибная жесткость трубопровода равна [9]:

$$D = E_1 J_1 + E_2 J_2 + E_3 J_3, \quad 4J_1 = F_1 \left( (R_i + h_1)^2 + R_i^2 \right),$$

$$4J_2 = F_2 \left( (R_i + h_1 + h_2)^2 + (R_i + h_1)^2 \right), \quad 4J_3 = F_3 \left( R_e^2 + (R_e - h_3)^2 \right). \quad (5)$$

Причем нормальная распределенная сила возникает вследствие изменения кривизны средней линии трубопровода. Площади поперечных сечений слоев трубопровода равны

$$F_1 = \pi \left( (R_i + h_1)^2 - R_i^2 \right), \quad F_2 = \pi \left( (R_i + h_1 + h_2)^2 - (R_i + h_1)^2 \right),$$

$$F_3 = \pi \left( R_e^2 + (R_e - h_3)^2 \right), \quad (6)$$

где  $h_k$  — толщины слоев,  $k = 1, 2, 3$ .

Изгибающий момент определяется как

$$M = D \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_n} \right), \quad (7)$$

где  $R_n$  — радиус кривизны средней линии трубопровода в недеформированном исходном состоянии. Для трубопровода  $R_n \rightarrow \infty$ . Из (7) с учетом (3) следует

$$M = \frac{D}{R}. \quad (8)$$

Выражения для кривизны средней линии трубопровода и изгибающего момента записываются как

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \frac{d}{ds} \frac{1}{R} = \frac{Q}{D}, \quad (9)$$

где  $\theta$  — угол между касательной к средней линии изогнутого трубопровода и осью  $z$ .

Форма изогнутого трубопровода определяется из уравнений

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta. \quad (10)$$

Горизонтальная  $P_1$  и вертикальная  $P_2$  составляющие усилия натяжения троса  $P$ , с помощью которого производится подъем участка трубопровода в начале координат в точке  $O$ , определяются интегрированием

$$P_1 = \int_0^L q_n \cos \theta ds = (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z \frac{1}{R} \cos \theta ds, \\ P_2 = q_z L - \int_0^L q_n \sin \theta ds = q_z L - (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z \frac{1}{R} \sin \theta ds, \quad (11)$$

где  $L$  — длина поднимаемой части трубопровода.

Усилия натяжения  $T_O$ , перерезывающая сила  $Q_O$ , сумма моментов всех сил относительно начала координат  $M_O$  относительно начала координат точки  $O$  определяются

$$T_O = \int_0^L q_n \cos \theta ds = (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z \frac{1}{R} \cos \theta ds, \\ Q_O = q_z L - \int_0^L q_n \sin \theta ds = q_z L - (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z \frac{1}{R} \sin \theta ds, \\ M_O = (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L z^2 \frac{1}{R} \cos \theta ds - (\rho_e F_e - \rho_i F_i) g \int_0^L x z \frac{1}{R} \sin \theta ds - \int_0^L q_z x ds. \quad (12)$$

Условия в точке  $O$  в начале координат следующие:  $s = 0, x = 0, z = 0, \theta = \pi/2, T = T_O, Q = Q_O, M = M_O, 1/R = 1/R_O$ .

Используя соотношения

$$u = \frac{L}{R}, \xi = \frac{s}{L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{z} = \frac{z}{L}, t = \frac{T}{q_z L}, q = \frac{Q}{q_z L}, m = \frac{M}{q_z L^2}, \\ p_1 = \frac{P_1}{q_z L}, p_2 = \frac{P_2}{q_z L}, p = \frac{P}{q_z L}, \beta = \frac{(\rho_e F_e - \rho_i F_i) g}{q_z}, \gamma = \frac{q_z L^3}{D},$$

уравнения (1), (2), (3), (9), (10) и соотношения (11), (12) примут вид (черточки над обозначениями координат опущены):

$$\frac{dt}{d\xi} + uq + \cos \theta = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dq}{d\xi} - tu + \sin \theta - \beta zu = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dm}{d\xi} = q, \quad \frac{du}{d\xi} = \gamma q, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = u, \quad (15)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{d\xi} = \cos \theta, \quad (16)$$

$$p_1 = \beta \int_0^1 zu \cos \theta d\xi, \quad p_2 = 1 - \beta \int_0^1 zu \sin \theta d\xi, \quad (17)$$

$$t_O = \beta \int_0^1 zu \cos \theta ds, \quad q_O = 1 - \beta \int_0^1 zu \sin \theta ds,$$

$$m_O = \beta \int_0^1 z^2 u \cos \theta d\xi - \int_0^1 x d\xi + \beta \int_0^1 x zu \sin \theta d\xi = 0. \quad (18)$$

Условия в точке  $O$  в начале координат в безразмерном виде следующие:  $\xi = 0, x = 0, z = 0, \theta = \pi/2, t = t_O, q = q_O, m = m_O, u = u_O$ .

Уравнения (13) – (16) запишем в конечно-разностном виде:

$$t_{i+1} = t_i - (q_i u_i + \cos \theta_i) \Delta \xi, \quad q_{i+1} = q_i + (t_i u_i - \sin \theta_i + \beta z u) \Delta \xi,$$

$$m_{i+1} = m_i + q_i \Delta \xi, \quad u_{i+1} = u_i + \gamma q_i \Delta \xi, \quad \theta_{i+1} = \theta_i + u_i \Delta \xi,$$

$$x_{i+1} = x_i + \sin(\theta_i) \Delta \xi, \quad z_{i+1} = z_i + \cos(\theta_i) \Delta \xi,$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta \xi, \quad i = 1..N, \quad \Delta \xi = \frac{1}{N-1}. \quad (19)$$

Для численного интегрирования необходимо использование конечно-разностных соотношений, которые следуют из (17), (18):

$$p_{1,i+1} = p_{1,i} + \beta z_i u_i \cos \theta_i \Delta \xi, \quad i = 1..N, \quad \Delta \xi = \frac{1}{N-1},$$

$$p_{2,i+1} = p_{2,i} + (1 - \beta u z_i \sin \theta_i) \Delta \xi,$$

$$t_{O,i+1} = t_{O,i} + \beta z_i u_i \cos \theta_i \Delta \xi, \quad q_{O,i+1} = q_{O,i} + (1 - \beta z_i u_i \sin \theta_i) \Delta \xi,$$

$$m_{O,i+1} = m_{O,i} + (\beta z_i^2 u_i \cos \theta_i - x_i + \beta x_i z_i u_i \sin \theta_i) \Delta \xi. \quad (20)$$

Условия в точке  $O$  в начале координат в конечно-разностном виде следующие:  $\xi_1 = 0, t_1 = t_O, q_1 = q_O, m_1 = m_O, u_1 = u_O, \theta_1 = \pi/2, x_1 = 0, z_1 = 0$ .

### 3. Результаты и обсуждение

Рассматриваемый участок трубопровода выполнен из стальных труб размером  $620 \times 10$  мм, с модулем упругости  $E_1 = 2,07 \cdot 10^5$  МПа, плотностью  $7850 \text{ kg/m}^3$ , внутренним радиусом  $R_i = 300$  мм, внешним радиусом  $R_i + h_1 = 310$  мм, толщиной стенки  $h_1 = 10$  мм, среднего бетонного слоя толщиной  $h_2 = 40$  мм, модулем упругости  $E_2 = 0,3 \times 10^5$  МПа, плотностью  $3044 \text{ kg/m}^3$ , внешнего защитного слоя модулем упругости  $E_3 = 0,1 \cdot 10^4$  МПа, плотностью  $800 \text{ kg/m}^3$ , толщиной  $h_3 = 10$  мм, плотностью окружающей морской воды  $\rho_e = 1025 \text{ kg/m}^3$ , плотностью воздуха в трубопроводе  $\rho_i = 1,25 \text{ kg/m}^3$ , длина участка трубопровода  $L = 150$  м,  $\gamma = 10,31$ .

#### 3.1. Нормальная боковая распределенная сила равна нулю

В этом случае  $\beta = 0$  и второе конечно-разностное соотношение из (19) и соотношения (20) примут вид:

$$q_{i+1} = q_i + (t_i u_i - \sin \theta_i) \Delta \xi;$$

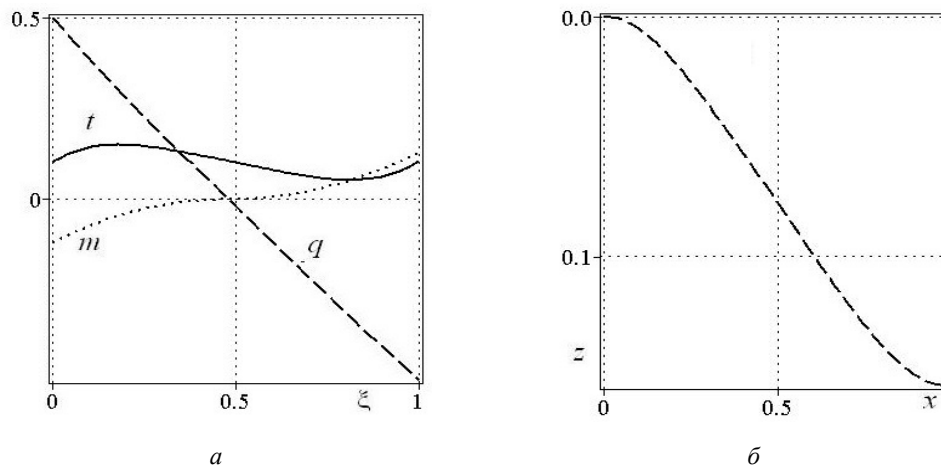
$$p_{1,i+1} = p_{1,i}, \quad p_{2,i+1} = p_{2,i} + \Delta \xi;$$

$$t_{O,i+1} = t_{O,i}, \quad q_{O,i+1} = q_{O,i} + \Delta \xi;$$

$$m_{O,i+1} = m_{O,i} - x_i \Delta \xi, \quad i = 1..N, \quad \Delta \xi = 1/(N-1).$$

Условия в начале координат в точке  $O$ :  $x_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $t_0 = 0,1$ ,  $q_0 = 0,5$ ,  $m_0 = -0,12$ ,  $u_0 = -1,245$ . Сила натяжения троса, с помощью которого производится удерживание трубопровода  $P = 14,75$  кН. Результаты вычислений, полученные численным интегрированием задачи Коши (13)–(16) по конечно-разностным формулам (19), полностью совпадают с расчетами методом Рунге — Кутты.

На рис. 2, а приводятся зависимости усилия натяжения  $t$ , перерезывающей силы  $q$ , изгибающего момента  $m$  от координаты  $\xi$ . На рис. 2, б приводится форма изогнутого трубопровода. Видно, что упругая линия трубопровода имеет точку перегиба.



**Рис. 2.** Зависимости усилия натяжения  $t$ , перерезывающей силы  $q$ , изгибающего момента  $m$  от координаты  $\xi$  (сплошная, штриховая, пунктирная линии соответственно) (а); форма трубопровода (б)

Источники: выполнено А.Г. Хакимовым.

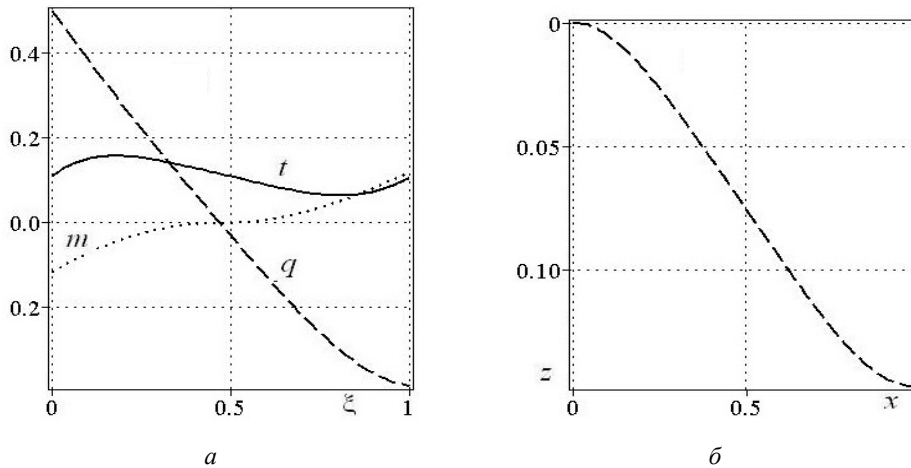
**Figure 2.** Tensile force  $t$ , shear force  $q$ , and bending moment  $m$  as functions of coordinate  $\xi$  (solid, dashed, and dotted lines, respectively) (а); pipeline shape (б)

Source: made by A.G. Khakimov.

### 3.2. Учет нормальной боковой распределенной силы

В этом случае  $\beta = 4,15$ . Условия в начале координат в точке  $O$ :  $x_0 = 0, z_0 = 0, \theta_0 = \pi/2, t_0 = 0,109, q_0 = 0,5, m_0 = -0,1178, u_0 = -1,23$ . Сила натяжения троса, с помощью которого производится удерживание трубопровода,  $P = 16,08$  кН. Результаты вычислений, полученные численным интегрированием задачи Коши (13)–(16) по конечно-разностным формулам (19), полностью совпадают с расчетами методом Рунге — Кутты.

На рис. 3, а, приводятся зависимости усилия натяжения  $t$ , перерезывающей силы  $q$ , изгибающего момента  $m$  от координаты  $\xi$ . На рис. 3, б, приводится форма изогнутого трубопровода.

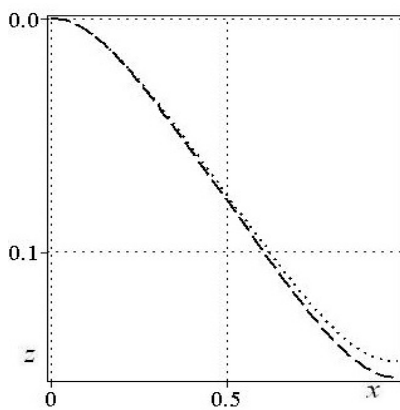


**Рис. 3.** Зависимости усилия натяжения  $t$ , перерезывающей силы  $q$ , изгибающего момента  $m$  от координаты  $\xi$  (сплошная, штриховая, пунктирная линии соответственно) (а); форма трубопровода (б)

Источник: выполнено А.Г. Хакимовым.

**Figure 3.** Tensile force  $t$ , shear force  $q$ , and bending moment  $m$  as functions of coordinate  $\xi$  (solid, dashed, and dotted lines, respectively) (а); pipeline shape (б)

Source: made by A.G. Khakimov.



**Рис. 4.** Формы трубопровода

Источник: выполнено А.Г. Хакимовым.

**Figure 4.** Pipeline shapes

Source: made by A.G. Khakimov.

На рис. 4 приводятся формы трубопровода без учета и с учетом действия нормальной распределенной силы (штриховая, пунктирная линии соответственно). Учет действия нормальной распределенной силы приводит к незначительному изменению формы трубопровода.

### 4. Заключение

1. Получен численный метод решения задачи с учетом распределенной силы тяжести, выталкивающей силы Архимеда и нормальной распределенной силы внешнего давления при моделировании напряженно-деформированного состояния обетонированного трубопровода при укладке с трубоукладочных барж.

2. Приведены формулы для определения формы, усилия натяжения, перерезывающей силы и изгибающего момента в трубопроводе. Учет действия нормальной распределенной силы приводит к незначительному изменению формы трубопровода.

3. Результаты вычислений, полученные численным интегрированием задачи Коши по конечно-разностным формулам, полностью совпадают с расчетами методом Рунге — Кутты. Работа может представлять интерес для конструкторов, инженеров, технологов трубопроводного транспорта.

### Список литературы

1. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. Москва : Машиностроение, 1982. 280 с.
2. Li S., Karney B.W., Liu G. FSI research in pipeline systems — a review of the literature // J. Fluids and Structures. 2015. Vol. 57. P. 277–297. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020> EDN: VFWJWP
3. Pedersen R.T. Equilibrium of offshore cables and pipelines during laying // Int. Shipbuild Prog. 1975. Vol. 22. P. 399–408. <https://doi.org/10.3233/ISP-1975-2225601>
4. Guarracino F., Mallardo V. A refined analytical analysis of submerged pipelines in seabed laying // Applied Ocean Research. 1999. Vol. 21. Issue 6. P. 281–293. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(99\)00020-6](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(99)00020-6) EDN: LNKCZN
5. Gu H.L., Guo H.Y., Li X.M., Li F.H. Static behaviours and collision onset criterion of two adjacent vertical risers // Ships Offshore Struct. 2023. Vol. 18. P. 263–271. <https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2035569> EDN: TFUYEC
6. Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600487> EDN: SDVLSY
7. Ильгамов М.А. Всплытие подводного газового трубопровода // Известия РАН. Механика твердого тела. 2023. № 2. С. 147–159. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600487> EDN: DGBKTM
8. Ильгамов М.А. Подъем подводного трубопровода сосредоточенной силой // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2024. Т. 517. № 1. С. 65–70. <https://doi.org/10.31857/S2686740024040108> EDN: JONDQX
9. Ильгамов М.А. Изгиб подводного трубопровода при подъеме // Известия РАН. Механика твердого тела. 2025. № 3. С. 23–37. <https://doi.org/10.31857/S1026351925030023> EDN: EZHMCB
10. Wang Z., Chen Y., Gao Q., Li F. An analytical method for mechanical analysis of offshore pipelines during lifting operation // Materials. 2023. Vol. 16. No. 20. Article no. 6685. <https://doi.org/10.3390/ma16206685> EDN: GWUAXF
11. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. № 1. С. 70–78. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.1.9> EDN: OWGKCF
12. Peek R., Yun H. Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed // Journal of Engineering Mechanics. 2007. Vol. 4. P. 442–451. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:4\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442))
13. Wang Z., Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines // Ocean Engineering. 2020. Vol. 216. P. 105–110. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019> EDN: KQPFAA
14. Chee J., Walker A., White D. Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation // Ocean Engineering. 2018. Vol. 151. P. 170–190. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.024>
15. Хакимов А.Г. К статической устойчивости трубопровода // Журнал технической физики. 2020. Т. 90. № 4. С. 612–617. <https://doi.org/10.3103/s0025654423700188> EDN: AEKWWDK
16. Khakimov A.G. Determining pipeline parameters during the formation of arched ejection // 15th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 40. P. 214–222. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.029> EDN: WHHIYU
17. Liang Y., Zhao Y., Yue Q.J. Experimental study on dynamic interaction between pipe and rollers in deep S-lay // Ocean Engineering. 2019. Vol. 175. P. 188–196. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.01.030> EDN: TQGVJA
18. Wang Z., Tang Y., Guedes S.C. Imperfection study on lateral thermal buckling of subsea pipeline triggered by a distributed buoyancy sections // Marine Structures. 2021. Vol. 76. P. 10–29. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2020.10291>
19. Zhao J.H., Liao K.X., Li X.X., He G.X., Xia F., Zeng Q. Collaborative detection and online monitoring of pipeline stress in oil and gas stations // Meas. Sci. Technol. 2022. Vol. 33. Article no. 105001. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac73dc> EDN: AERAMF
20. Зарипов Р.М., Масалимов Р.Б. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния подводного морского газопровода с учетом разжижения грунта и параметров эксплуатации // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 4. С. 152–166. <https://doi.org/10.31857/S0572329922600700> EDN: QWSFJU
21. Zaripov R.M., Bakhtizin R.N., Masalimov R. B. Computer modeling of the stress-strain state of a concrete gas pipeline in a swamp // SOCAR Proceedings. 2025. No. 3. P. 105–112. <http://dx.doi.org/10.5510/OGP20250301103>
22. Wang Z., Chen Y., Gao Q., Li F. An analytical method for mechanical analysis of offshore pipelines during lifting operation // Materials. 2023. Vol. 16. Article no. 6685. <https://doi.org/10.3390/ma16206685> EDN: GWUAXF
23. Khakimov A. G. Interaction of Pipeline Instabilities // Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2018). AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2053. Iss. 1. Article no. 030025. <https://doi.org/10.1063/1.5084386> EDN: EVGOWQ
24. Ильгамов М.А., Якунов Р.Г. Сильный изгиб трубопровода // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 109–117. EDN: ONXFOF
25. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 296 с. EDN: WIWUQV
26. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. Москва, 1969. 695 с.

## References

1. Svetlitskii VA. *Mechanics of pipelines and hoses*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1982. (In Russ.)
2. Li S, Karney BW, Liu G. FSI research in pipeline systems – a review of the literature. *J. Fluids and Structures*. 2015;57:277–297. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020> EDN: VFWJWP
3. Pedersen RT. Equilibrium of offshore cables and pipelines during laying. *Int. Shipbuild Prog.* 1975;22:399–408. <https://doi.org/10.3233/ISP-1975-2225601>
4. Guarracino F, Mallardo V. A refined analytical analysis of submerged pipelines in seabed laying. *Applied Ocean Research*. 1999;21(6):281–293. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(99\)00020-6](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(99)00020-6) EDN: LNKCZN
5. Gu HL, Guo HY, Li XM, Li FH. Static behaviours and collision onset criterion of two adjacent vertical risers. *Ships Offshore Struct.* 2023;18:263–271. <https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2035569> EDN: TFUYEC
6. Ilgamov MA. Model of underwater pipeline flotation. *Doklady Physics*. 2022;67:123–127. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S1028335822050020> EDN: SDVLSY
7. Ilgamov MA. Subsea gas pipeline flotation. *Mechanics of Solids*. 2023;58(2):501–510. (In Russ.) <https://doi.org/10.3103/s0025654422600842> EDN: DGBKTM
8. Ilgamov MA. Lifting an underwater pipeline by concentrated force. *Reports of the Russian Academy of Sciences. Physics, Technical Sciences*. 2024;517(1):65–70. (In Russ.) <https://doi.org/10.31857/S2686740024040108> EDN: JONDQX
9. Ilgamov MA. Bending of underwater pipeline during lifting. *Mechanics of Solids*. 2025;(3):23–37. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0025654424605950> EDN: AYZOUD
10. Wang Z, Chen Y, Gao Q, Li F. An analytical method for mechanical analysis of offshore pipelines during lifting operation. *Materials*. 2023;16(20):6685. <https://doi.org/10.3390/ma16206685> EDN: GWUAXF
11. Yeliseyev VV, Zinovieva TV. Nonlinear-elastic strain of underwater pipeline in laying process. *Computational Continuum Mechanics*. 2012;5(1):70–78. (In Russ.) <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.1.9> EDN: OWGKCF
12. Peek R, Yun H. Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed. *Journal of Engineering Mechanics*. 2007;4:442–451. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:4\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442))
13. Wang Z, Tang Y. Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines. *Ocean Engineering*. 2020;216:105–110. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019> EDN: KQPFAA
14. Chee J, Walker A, White D. Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation. *Ocean Engineering*. 2018;151:170–190. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.024>
15. Khakimov AG. Static stability of a pipeline. *Technical Physics*. 2020;65(4):587–592. <https://doi.org/10.1134/S106378422004012X> EDN: SIKFFG
16. Khakimov AG. Determining pipeline parameters during the formation of arched ejection. *15th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, Procedia Structural Integrity*. 2022;40:214–222. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.029> EDN: WHHIYU
17. Liang Y, Zhao Y, Yue QJ. Experimental study on dynamic interaction between pipe and rollers in deep S-lay. *Ocean Engineering*. 2019;175:188–196. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.01.030> EDN: TQGVJA
18. Wang Z, Tang Y, Guedes SC. Imperfection study on lateral thermal buckling of subsea pipeline triggered by a distributed buoyancy sections. *Marine Structures*. 2021;76:10–29. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2020.10291>
19. Zhao JH, Liao KX, Li XX, He GX, Xia F, Zeng Q. Collaborative detection and online monitoring of pipeline stress in oil and gas stations. *Meas. Sci. Technol.* 2022;33:105001. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac73dc> EDN: AERAMF
20. Zaripov RM, Masalimov RB. Numerical modeling of the stress-strain state of an underwater gas pipeline taking into account soil liquefaction and operating parameters. *Mechanics of Solids*. 2023;58(4):1171–1183. <https://doi.org/10.3103/s0025654423700188> EDN: QWSFJU
21. Zaripov RM, Bakhtizin RN, Masalimov RB. Computer modeling of the stress-strain state of a concrete gas pipeline in a swamp. *SOCAR Proceedings*. 2025;(3):105–112. <http://doi.org/10.5510/OGP20250301103>
22. Wang Z, Chen Y, Gao Q, Li F. An analytical method for mechanical analysis of offshore pipelines during lifting operation. *Materials*. 2023;16:6685. <https://doi.org/10.3390/ma16206685> EDN: GWUAXF
23. Khakimov AG. Interaction of Pipeline Instabilities. *Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS-2018). AIP Conf. Proc.* 2018;2053(1):030025. <https://doi.org/10.1063/1.5084386> EDN: EVGOWQ
24. Ilgamov MA, Yakubov RG. Strong bending of a pipeline. *Bulletin of the Academy of Sciences. Solid Body Mechanics*. 2003;(6):109–117. (In Russ.) EDN: ONXFOF
25. Popov EP. *Theory and calculation of flexible elastic rods*. Moscow: Nauka Publ.; 1986. (In Russ.) EDN: WIWUQV
26. Ogibalov PM, Koltunov MA. *Shells and plates*. Moscow: Moscow University Publ.; 1969. (In Russ.)