

Параметры модели Concrete Damage Plasticity для расчета железобетонных конструкций

Е.А. Исаков 

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

✉ isakoww3@yandex.ru

Поступила в редакцию: 21 декабря 2025 г.

Доработана: 15 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 15 февраля 2026 г.

Аннотация. Выполнено обоснование параметров модели Concrete Damage Plasticity, применяемой при численном расчете железобетонных конструкций. Показано, что результаты моделирования существенно зависят от выбора параметров пластичности и заданных диаграмм деформирования бетона. Цель исследования — анализ чувствительности ключевых параметров модели и верификация ее применимости при статическом нагружении. Численные расчеты выполнены методом конечных элементов в программном комплексе Abaqus. Исследовано влияние угла дилатансии, параметров поверхности текучести и энергетически согласованных диаграмм деформирования на расчетную жесткость и несущую способность элементов. Проведена верификация модели на уровне материала и конструкции. Установлено, что использование обоснованных параметров обеспечивает корректное воспроизведение нелинейного поведения железобетонных элементов вплоть до стадии разрушения.

Ключевые слова: бетон, численный расчет, метод конечных элементов, пластичность, повреждение, дилатация, деформационная модель, Abaqus

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Исаков Е.А. Параметры модели Concrete Damage Plasticity для расчета железобетонных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 1. С. 28–38. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-28-38> EDN: INASME

Concrete Damage Plasticity Parameters for the Analysis of Reinforced Concrete Structures

Egor A. Isakov 

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation

✉ sakoww3@yandex.ru

Received: December 21, 2025

Revised: February 15, 2026

Accepted: February 15, 2026

Abstract. The paper presents a justification of the parameters of the Concrete Damage Plasticity (CDP) model used for numerical analysis of reinforced concrete structures. It is shown that the results of nonlinear simulations are highly sensitive to the choice of plasticity parameters and the adopted concrete stress–strain relationships. The aim of the study is to analyse the sensitivity of the

Исаков Егор Андреевич, аспирант инженерно-строительного института высшей школы гидротехнического и энергетического строительства, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Российская Федерация, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29 лит. Б; eLIBRARY SPIN-код: 1616-6935, ORCID: 0009-0006-9228-4574; e-mail: isakoww3@yandex.ru.

Egor A. Isakov, postgraduate student of the Institute of Civil Engineering of the Higher School of Hydraulic and Power Engineering, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russian Federation, 195251, Saint Petersburg, Polytechnicheskaya, 29; eLIBRARY SPIN-code: 1616-6935, ORCID: 0009-0006-9228-4574; e-mail: isakoww3@yandex.ru.

© Исаков Е.А., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

key CDP parameters and to verify the applicability of the model under static loading conditions. Numerical simulations were performed using the finite element method in Abaqus. The influence of the dilation angle, yield surface parameters and energy-consistent stress–strain diagrams on stiffness and load-bearing capacity was investigated. The model was verified at both the material and structural levels. It is demonstrated that the use of physically justified parameters ensures an accurate reproduction of the nonlinear behaviour of reinforced concrete elements up to failure.

Keywords: concrete, numerical analysis, finite element method, plasticity, damage, dilation, deformation model, Abaqus

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Isakov E.A. Concrete Damage Plasticity parameters for the analysis concrete structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):28–38. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-28-38>
EDN: INASME

1. Введение

Железобетонные конструкции работают в условиях сложного нелинейного деформирования. При достижении предельных состояний в бетонных элементах развивается упругопластическое поведение с образованием трещин. Точное прогнозирование такого поведения необходимо для надежной оценки прочности и выработки оптимальных проектных решений. Современные численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ), позволяют моделировать нелинейную работу железобетона и анализировать напряженно-деформированное состояние элементов на различных стадиях нагружения.

Специально для бетона разработан ряд современных моделей материала, основанных на комбинации теории пластического течения и механизма повреждений [1–3]. Одной из наиболее популярных является модель Concrete Damage Plasticity (CDP), реализованная в Abaqus. Модель CDP была разработана Лублинером с соавт. [4] и доработана Ли и Фенвесом [5] для учета циклического нагружения. Пластическая часть модели основана на критерии текучести, описанном в работах Друкера [6] и Прагера [7] и модифицированном для учета асимметрии прочности бетона в сжатии и растяжении.

Модель сочетает концепции теории пластичности и механики повреждений для описания трещинообразования, накопления необратимых пластических деформаций и деградации (снижения) жесткости бетона под нагрузкой. За счет учета раскрытия трещин при растяжении, дробления материала при сжатии, пластического течения и снижения модуля упругости по мере накопления повреждений модель CDP позволяет воспроизводить поведение бетона вплоть до предельного состояния.

Несмотря на широкое распространение, модель CDP чувствительна к выбору параметров пластичности и заданных диаграмм деформирования, что существенно влияет на результаты расчета [8–10]. К параметрам пластичности, задаваемым пользователем, относятся угол дилатансии ψ , эксцентриситет пластического потенциала ϵ , отношение прочности бетона при двусосном и одноосном сжатии σ_{b0}/σ_{c0} , коэффициент формы поверхности текучести K_c , а также параметр вязкости μ . Корректное назначение этих параметров важно для получения воспроизводимых и физически обоснованных результатов.

В последние годы ведется активная работа по повышению точности модели CDP и ее калибровке. Так, Fedoroff с соавт. [11] провели параметрическое исследование влияния угла дилатансии и формы поверхности текучести на работу модели CDP, проанализировав характер деформаций бетона в простых напряженных состояниях. Показано, что неверный выбор ψ или соотношения прочностей по меридианам может приводить к существенным погрешностям в расчете деформаций и напряжений. Qasem с соавт. [12] разработали обобщенный подход к калибровке и оптимизации CDP, включив влияние армирования на работу бетона при растяжении (tension stiffening) и при сжатии (compression softening). Отдельные аспекты модели CDP также улучшаются: например, Alfarah и др. [13] предложили аналитические выражения для эволюции скалярных переменных повреждения в CDP, позволяющие получить реалистичную нисходящую ветвь диаграммы без обширных экспериментов. Rakić с соавт. [14] разработали метод идентификации параметров CDP на основе решения обратной задачи, что помогает подобрать параметры, наилучшим образом согласующиеся с заданными экспериментальными кривыми деформирования.

В отечественной научной литературе вопросы нелинейного моделирования бетона с использованием упругопластических моделей с повреждением получили определенное развитие [15; 16], в том числе с применением модели CDP [17–19]. Вместе с тем анализ опубликованных работ показывает, что существующие исследования, как правило, ориентированы на решение частных задач и не формируют единого и методически прозрачного подхода к выбору ключевых параметров модели CDP. Недостаточная систематизация рекомендаций по назначению параметров пластичности и повреждаемости затрудняет практическое применение модели при расчете железобетонных конструкций.

В связи с этим актуальной является задача обобщения накопленного опыта и разработки обоснованных рекомендаций по выбору параметров модели Concrete Damage Plasticity, обеспечивающих корректное воспроизведение нелинейного поведения бетона. Цель исследования — обоснование параметров модели CDP и верификация ее применимости для расчета железобетонных элементов при статическом нагружении.

2. Методы

Для достижения поставленной цели выполнен анализ отечественных и зарубежных работ, посвященных численному моделированию бетона и железобетонных конструкций с использованием модели Concrete Damage Plasticity. На основе обобщения литературных данных проведено численное исследование поведения бетона в программном комплексе Abaqus/Standard для типовых элементов из бетона и железобетона. Анализировалось влияние каждого параметра CDP на расчетную жесткость, прочность и характер разрушения материала. На основе обоснованных значений параметров выполнена верификация модели путем сопоставления результатов численного моделирования с данными физических экспериментов.

Для обеспечения корректного численного моделирования необходимо учитывать физический смысл используемой модели и заложенные в нее предположения. В связи с этим ниже кратко представлены положения модели CDP, необходимые для интерпретации входных параметров и результатов расчета.

В рамках модели пластическое течение бетона описывается поверхностью текучести в пространстве инвариантов напряжений. Форма поверхности текучести характеризуется параметрами, определяемыми через отношение прочности бетона при двусосном и одноосном сжатии σ_{b0}/σ_{c0} и коэффициент формы поверхности текучести K_c .

Принято, что для тяжелого бетона отношение $\sigma_{b0}/\sigma_{c0} = 1,16$. Стандартное значение $K_c = 2/3$ соответствует критерию Виллама — Варнке и отражает соотношение расчетной прочности бетона при чистом сдвиге и всестороннем сжатии. Несмотря на широкое применение стандартных значений параметров, они получены для идеализированных условий нагружения и не учитывают особенности реального напряженного состояния в железобетонных элементах. В связи с этим идентификация параметров σ_{b0}/σ_{c0} и K_c позволяет повысить достоверность численного моделирования и обеспечить корректное воспроизведение несущей способности и механизма разрушения бетона.

В качестве пластического потенциала в Abaqus используется сглаженный гиперболический потенциал Друкера — Прагера¹. Его форма задается двумя параметрами: углом дилатансии ψ и эксцентриситетом ϵ . Угол дилатансии определяет способность материала к объемному расширению (поперечному разбуханию) при пластическом сдвиге и регулирует долю пластической объемной деформации относительно продольной. В литературе отмечается широкий диапазон значений угла дилатансии ψ (приблизительно от 5° до 55°), что указывает на отсутствие универсального значения данного параметра и подчеркивает необходимость его обоснования по экспериментальным данным для конкретного класса бетона и типа напряженного состояния. Аналогично и для эксцентриситета пластического потенциала, наиболее часто используемые значения которого варьируются в диапазоне 0,05–0,2. Это свидетельствует о вариативности настроек численной модели к форме поверхности течения и подтверждает целесообразность идентификации данного параметра с учетом условий нагружения и особенностей рассматриваемой расчетной постановки.

¹ Dassault Systèmes. Abaqus Analysis User's Manual. Version 6.14. Providence, RI, USA. Dassault Systèmes Simulia Corp.; 2014.

Для регуляризации решения в условиях разрушения в модель вводится параметр вязкости μ , придающий материалу искусственную вязкопластичность и улучшающий сходимость итерационного процесса. В литературе указывается на значительный разброс рекомендуемых значений параметра вязкости μ . Отмечается, что без вязкопластической регуляризации расчеты нелинейного бетона часто не доходят до стадии полного разрушения из-за потери сходимости на нисходящей ветви диаграммы [12]. Несмотря на нефизическую природу данного параметра, его выбор для конкретной расчетной постановки оказывает заметное влияние на устойчивость расчета и характер нелинейного отклика.

Для моделирования поведения бетона под нагрузкой в модель CDP вводятся диаграммы «напряжение — неупругая деформация» при сжатии и растяжении, служащие основой для вычисления пластических деформаций и повреждений. Аналитический обзор существующих подходов показывает, что для надежного моделирования необходимо задавать реалистичные диаграммы с плавной нисходящей ветвью. Использование упрощенных диаграмм с мгновенным обрывом может приводить к некорректному учету энергии разрушения, что ведет к зависимости результата от размера конечных элементов [13].

В качестве универсальной модели для сжатия принят обобщенный закон Поповича [20] с модификацией нисходящей ветви по Теренфельдту — Коллинзу (1)–(3) [21; 22]. С ростом класса бетона повышаются начальный модуль упругости и крутизна восходящей ветви, а нисходящая ветвь становится более крутой, отражая возрастание хрупкости материала (рис. 1, а):

$$\sigma_c = f_c \left[\frac{n(\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})}{n-1 + (\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})^{nk}} \right], \quad (1)$$

$$k = \begin{cases} 1, \varepsilon_c < \varepsilon_{c1} \\ 0,67 + \frac{f_c}{62}, \varepsilon_c > \varepsilon_{c1} \end{cases}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{c1} = \frac{f_c}{E_c} \frac{n}{n-1}. \quad (3)$$

В формулах выше: σ_c — текущее напряжение при сжатии, МПа; f_c — цилиндрическая прочность бетона при сжатии, МПа; E_c — модуль упругости, МПа; ε_c — текущая относительная деформация; ε_{c1} — относительная деформация, соответствующая пику диаграммы; n — коэффициент кривизны восходящей части; k — коэффициент постпикового участка диаграммы.

Коэффициент поврежденности бетона при сжатии d_c вычислялся на основе разложения полной неупругой деформации на неупругую и пластическую составляющие (4) (рис. 1, б).

$$d_c = \frac{\varepsilon_c^{in} - \varepsilon_c^{pl}}{\sigma_c / E_c + (\varepsilon_c^{in} - \varepsilon_c^{pl})}, \quad (4)$$

где ε_c^{in} — неупругая деформация бетона при сжатии; ε_c^{pl} — пластическая деформация бетона при сжатии, вычисляемая феноменологически как часть полной неупругой деформации после предела прочности, при этом фиксированная доля прироста неупругой деформации, равная 0,2, относилась к поврежденной составляющей.

Диаграмма растяжения бетона принята двусоставной: линейно-упругой до предела прочности и с убывающей ветвью после образования первой трещины. В качестве ниспадающей части диаграммы растяжения использован экспоненциальный закон уменьшения напряжения от ширины раскрытия трещины w , предложенный Хордейком (5) (рис. 2, а) [23]:

$$\frac{\sigma_t}{f_{cr}} = \left[1 + \left(c_1 \frac{w}{w_{cr}} \right)^3 \right] e^{-c_2 \frac{w}{w_{cr}}} - \frac{w}{w_{cr}} (1 + c_1^3) e^{-c_2}, \quad (5)$$

где σ_t — текущее напряжение при растяжении, МПа; f_{cr} — прочность бетона при осевом растяжении, МПа; w — текущая ширина раскрытия трещины, мм; w_{cr} — критическое раскрытие трещины, мм; c_1 и c_2 — эмпирические коэффициенты, равные 3 и 6,93 соответственно. Критическое раскрытие w_{cr} вычислялось из условия равенства площади под кривой σ - w энергии трещинообразования $G_f(\delta)$:

$$w_{cr} = 5,14 G_f / f_{cr}. \quad (6)$$

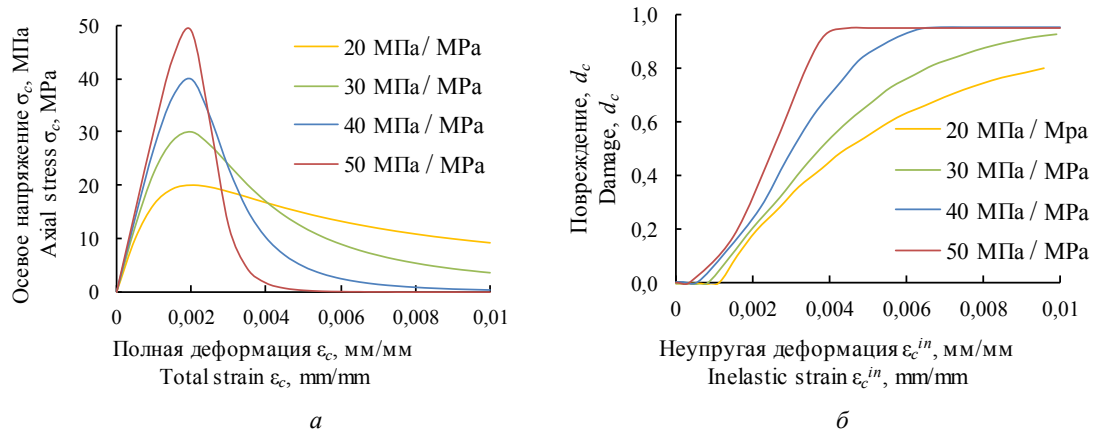


Рис. 1. Диаграммы деформирования бетона при сжатии по модели Поповича — Теренфольда — Коллинза для различных классов бетона и соответствующая эволюция коэффициента поврежденности:

- a* — зависимости «напряжение-деформация» бетона при одноосном сжатии;
- б* — изменение коэффициента поврежденности в зависимости от деформации при сжатии

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым.

Figure 1. Concrete compressive stress-strain relationship according to the Popovics — Thorenfeldt — Collins model for different concrete strength classes and corresponding damage variable evolution:

- a* — stress-strain relationships of concrete in compression;
- б* — evolution of the compressive damage variable as a function of strain

S o u r c e: made by E.A. Isakov.

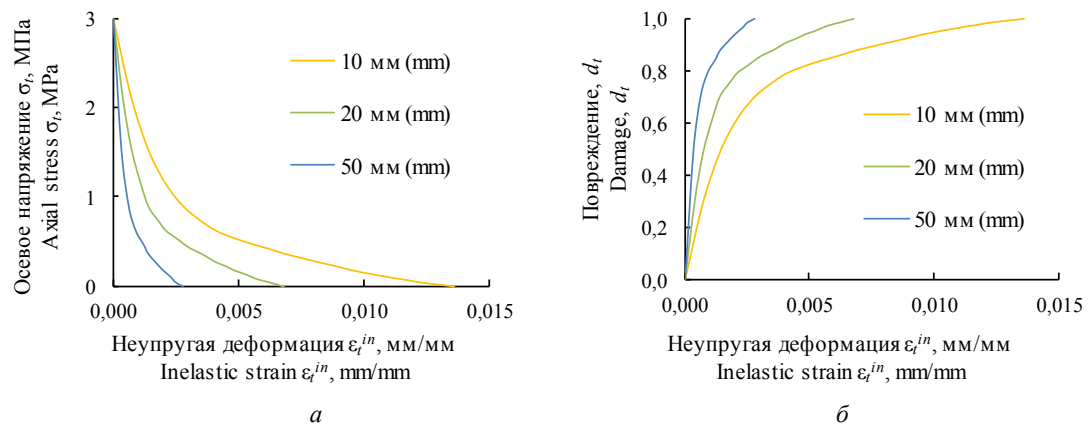


Рис. 2. Диаграммы деформирования бетона при растяжении по модели Хордейка, откалиброванные для различных размеров конечного элемента и соответствующая эволюция коэффициента поврежденности:

- a* — зависимости «напряжение-деформация» бетона при растяжении с учетом энергии трещинообразования;
- б* — изменение коэффициента поврежденности в зависимости от деформации при растяжении

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым.

Figure 2. Concrete tensile stress-strain relationship based on the Hordijk model calibrated for different finite element characteristic lengths and corresponding damage variable evolution:

- a* — stress-strain curves of concrete in tension according to fracture energy;
- б* — evolution of the tensile damage variable as a function of strain

S o u r c e: made by E.A. Isakov.

Прочность бетона на осевое растяжение f_{cr} определялась через прочность при сжатии по эмпирической зависимости (7). Энергия разрушения G_f (Н/м) оценивалась по fib Model Code² в зависимости от максимального размера заполнителя d_a (мм) и прочности бетона (8):

$$f_{cr} = 0,3f_c^{2/3}; \quad (7)$$

$$G_f = (0,0469 d_a^2 - 0,5 d_a + 26) \left(\frac{f_c + 8}{10} \right)^{0,7}. \quad (8)$$

Для учета масштабного эффекта и уменьшения зависимости результатов от размера конечных элементов применялась теория полосы трещин (crack band theory) [24]. В соответствии с этим подходом вводится характеристическая ширина локализации l_{ch} (мм), связанная с размером конечного элемента в направлении распространения трещины. Далее ширина раскрытия w переводится в эквивалентную локальную деформацию ε_t по формуле $\varepsilon_t = \varepsilon_{cr} + w/l_{ch}$, где ε_{cr} — деформация, соответствующая началу трещинообразования. Этот прием обеспечивает распределение раскрытия трещины по элементу и делает результаты менее зависимыми от шага сетки. В результате достигается правильное затухание напряжений на нисходящей ветви независимо от размера КЭ, а полная энергия G_f , расходуемая при разрушении, остается постоянной.

Коэффициент поврежденности бетона при растяжении d_t вычислялся через степень снижения действующих напряжений по отношению к пределу прочности бетона (9) (рис. 2, б):

$$d_t = 1 - \frac{\sigma_t}{E_c \varepsilon_t}. \quad (9)$$

3. Результаты и обсуждение

На основании выполненного анализа литературы и численного анализа систематизированы эффекты каждого параметра CDP на поведение бетона и сформулированы рекомендации по их выбору. Ниже приведены ключевые результаты об их влиянии на жесткость, прочность и характер разрушения материала.

■ Выполненный анализ литературных источников и результаты численного исследования подтвердили, что угол дилатансии ψ является одним из наиболее чувствительных параметров модели Concrete Damage Plasticity и существенно влияет на расчетную жесткость, несущую способность и прогнозируемый характер разрушения бетонных и железобетонных элементов [8–14]. Увеличение значения ψ в рамках модели, как правило, приводит к росту несущей способности при сдвиговых и сложных напряженных состояниях, что обусловлено развитием поперечного расширения (дилатации), создающего эффект дополнительного бокового обжатия материала. При малых значениях ψ пластическое течение сопровождается меньшим объемным расширением, что снижает расчетное сопротивление сдвигу и может приводить к более хрупкому характеру разрушения.

Для тяжелых бетонов нормальной прочности в качестве базового значения угла дилатансии целесообразно рассматривать $\psi \approx 30\text{--}35^\circ$ [10; 12; 14]. Вариация ψ в диапазоне $20\text{--}40^\circ$ в ряде постановок приводит к изменению расчетной несущей способности порядка 5–10 %, что позволяет использовать данный интервал как ориентировочный для инженерных расчетов при отсутствии калибровки по эксперименту.

Для элементов, работающих преимущественно в условиях одноосного сжатия и изгиба, наилучшее согласование с экспериментальными данными, как правило, достигается при умеренных значениях угла дилатансии [18]. В диапазоне $\psi \approx 25\text{--}35^\circ$ возможно корректное воспроизведение жесткости, несущей способности и постпикового поведения без искусственного упрочнения. Для типичных

² fib Model Code for Concrete Structures 2010. Lausanne. fib; 2013. <https://doi.org/10.1002/9783433604090>

железобетонных колонн прямоугольного сечения из тяжелого бетона в ряде работ оптимальным указывается значение ψ порядка 35° [10].

Для элементов с выраженным трехосным сжатием или близких к плоской деформации (короткие колонны, массивные элементы, опорные зоны) дилатативная способность бетона подавляется всесторонним давлением [11; 26]. В этих условиях рекомендуется использовать пониженные значения угла дилатансии порядка $\psi \approx 10\text{--}20^\circ$, что позволяет учитывать снижение дилатации при высоком уровне обжатия [11; 12].

Для элементов, разрушение которых определяется развитием наклонных трещин и сдвиговых деформаций (например, короткие консоли), может быть оправданно применение повышенных значений ψ . Отдельные расчеты показывают, что $\psi \approx 45\text{--}50^\circ$ позволяет описывать диагональный характер трещинообразования и согласуется с экспериментальными наблюдениями [9]. Для ультравысокопрочных композитов типа УНРС в отдельных исследованиях приводятся повышенные значения угла дилатансии вплоть до $\psi \approx 55^\circ$ [25].

Влияние класса бетона на оптимальное значение угла дилатансии носит вторичный характер по сравнению с типом напряженно-деформированного состояния и принятыми параметрами CDP [12; 19]. Для бетонов нормальной прочности (B25–B40) допустимо использование средних значений ψ в указанных диапазонах. Для высокопрочных бетонов целесообразно рассматривать значения ψ ближе к нижней границе соответствующих диапазонов, тогда как для бетонов пониженной прочности возможны несколько более высокие значения при аналогичном НДС [10; 12].

■ Экцентриситет пластического потенциала в диапазоне $0\text{--}0,2$ при фиксированных прочих параметрах, как правило, оказывает ограниченное влияние на расчетную жесткость и предельную несущую способность при типовых постановках [11; 12; 19]. Вместе с тем слишком малое ϵ может затруднить сходимость решения, а слишком большое ϵ может завышать эффект дилатансии при низком гидростатическом давлении и тем самым искажать поведение модели. В инженерных расчетах целесообразно принимать $\epsilon = 0,1$ (значение по умолчанию в Abaqus) как компромисс между устойчивостью вычислений и физической правдоподобностью, а отклонение от этого значения — выполнять только при наличии экспериментальной калибровки.

■ Параметр σ_{b0}/σ_{c0} (отношение прочности при двухосном сжатии к прочности при одноосном сжатии) определяет форму поверхности текучести CDP в области высоких всесторонних давлений и поэтому существенен для элементов, работающих при заметном обжатии и сложном напряженном состоянии [11; 12; 19]. При занижении параметра модель может недооценивать несущую способность при сложном напряженном состоянии, тогда как при завышении возможна переоценка прочности и завышенная жесткость [10; 14]. Для тяжелого бетона нормальной прочности при отсутствии специальных данных целесообразно использовать диапазон $1,1\text{--}1,2$ как ориентировочный, принимая базовое значение $\sigma_{b0}/\sigma_{c0} = 1,16$ (настройка по умолчанию в Abaqus).

■ Коэффициент формы поверхности текучести K_c в большинстве практических реализаций CDP принимается равным $2/3$ [11; 12; 14; 19]. Расчеты показывают, что изменение K_c в диапазоне $0,5\text{--}0,8$ обычно слабо влияет на расчетную жесткость и пиковую прочность, однако заметно влияет на локализацию деформаций, ориентацию и развитие зон повреждения. Для обычного тяжелого бетона при отсутствии данных калибровки рекомендуется использовать $K_c = 2/3$, рассматривая отклонения от этого значения как часть процедуры параметрической идентификации под конкретные условия.

■ В статических расчетах вязкопластический параметр μ целесообразно принимать $\mu = 0$, чтобы модель отражала квазистатическое поведение без введения искусственной вязкостной регуляризации. При проблемах со сходимостью допустимо задавать малое ненулевое значение μ , достаточное для стабилизации решения при минимальном влиянии на результаты расчета. В качестве исходного ориентировочного уровня можно использовать $\mu \approx 10^{-4}$ при обязательной проверке чувствительности результатов к его изменению и фиксации того, что введенная регуляризация не искажает ключевые расчетные характеристики.

3.1. Верификация и сравнение с экспериментом

Модель CDP была проверена по экспериментальным данным. На уровне материала расчетные диаграммы сжатия сравнивались с результатами испытаний Купфера [26]. В его работе образцы $200 \times 200 \times 50$ мм из бетона прочностью $R_b = 32,2$ МПа испытывались при различных соотношениях главных напряжений. По результатам численного расчета достигнуто удовлетворительное совпадение вплоть до разрушения (рис. 3).

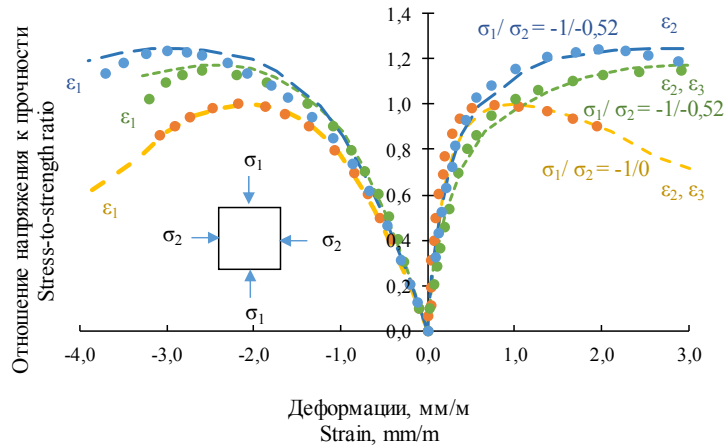


Рис. 3. Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым по [26].

Figure 3. Comparison of the numerical model response and laboratory test results

S o u r c e: made by E.A. Isakov on [26].

Нисходящая ветвь диаграммы растяжения и энергия трещинообразования G_f дополнительно проверялись на задаче изгиба балки с надрезом и сопоставлялись с экспериментальными данными (рис. 4) [27]. Энергия трещинообразования была принята $G_f = 77$ Н/м для заполнителя размером $d_a = 12$ мм и пределом прочности на растяжение $R_{bt} = 3,33$ МПа. Стабильность работы модели на стадии разупрочнения была проверена при различных размерах конечно-элементной сетки.

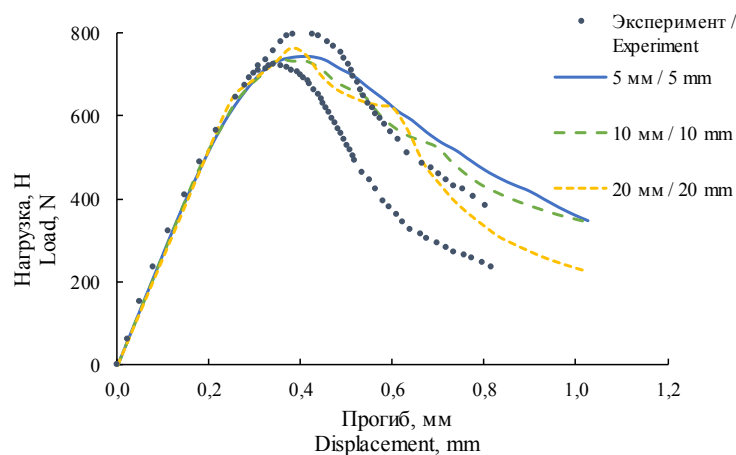


Рис. 4. Сравнение результатов численных испытаний образцов с разным размером конечного элемента с лабораторными испытаниями

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым по [27].

Figure 4. Comparison of the numerical model response with different finite element sizes with laboratory test results

S o u r c e: made by E.A. Isakov on [27].

На уровне конструкции проведена верификация на примере железобетонной балки по данным Обернихина и Никулина (рис. 5) [28]. Характеристики бетона в расчете приняты: $E_b = 30,0$ ГПа, $R_b = 22,5$ МПа. Арматура была смоделирована двулинейным упругопластическим материалом.

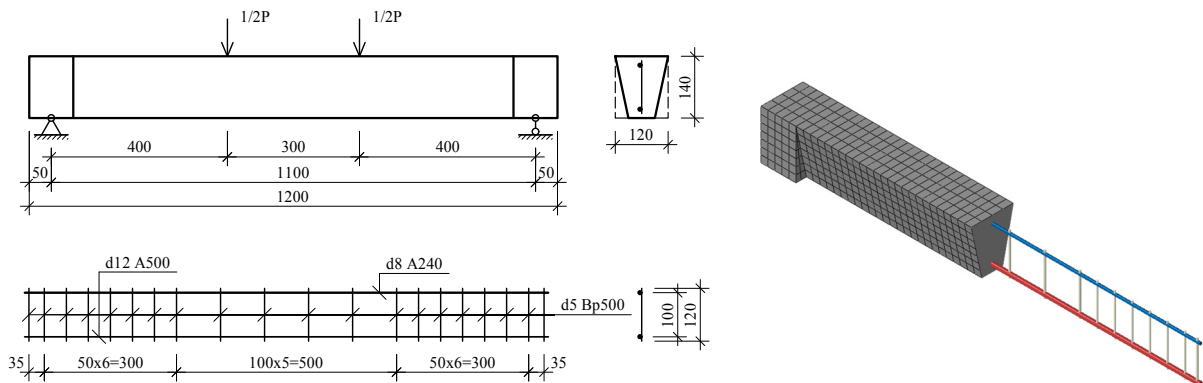


Рис. 5. Конструкция и расчетная модель испытываемой балки

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым.

Figure 5. Structural configuration and numerical model of the tested beam

S o u r c e: made by E.A. Isakov.

Результаты расчета балки нормального армирования показали удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными вплоть до разрушающей нагрузки (табл.). Так, для балки трапециевидного сечения серии БТВ отклонение расчетной предельной нагрузки от средней экспериментальной не превысило 5 %. Жесткость на этапе трещинообразования и развития пластических деформаций была спрогнозирована моделью с погрешностью менее 10 % по прогибу. Характер трещинообразования в балке, оцененный по распределению коэффициента поврежденности бетона d_t , показан на рис. 6.

Сравнение результатов численного расчета с лабораторными данными
Comparison of the numerical model response and laboratory test results

Исследуемая величина / Quantity	Средние значения прогибов балок в мм при нагрузке, кН / Average mid-span deflection of beams at mm at load, kN			Средняя предельная нагрузка, кН / Average ultimate load, kN
	16	24	32	
Результаты экспериментов / Experimental results	2,19	3,66	5,17	39,27
Результаты расчета в Abaqus / Numerical results (Abaqus)	1,71	3,30	5,14	37,60
Погрешность, % / Error, %	-22	-10	-1	-4

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым / S o u r c e: made by E.A. Isakov.

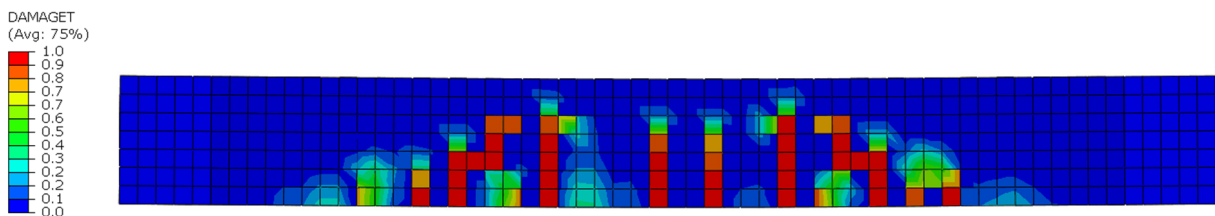


Рис. 6. Численное распределение трещин, представленное через коэффициент поврежденности d_t

И с т о ч н и к: выполнено Е.А. Исаковым.

Figure 6. Numerical crack pattern represented by the concrete damage parameter d_t

S o u r c e: made by E.A. Isakov.

4. Заключение

В работе выполнено обоснование параметров модели Concrete Damage Plasticity (CDP) для применения в расчетах железобетонных конструкций.

1. Проведен анализ влияния ключевых параметров (ψ , ϵ , σ_{b0}/σ_{c0} , K_c , μ) на результаты численного моделирования, а также обоснован выбор диаграмм деформирования бетона.

2. Установлено, что угол дилатансии ψ оказывает наиболее заметное влияние на несущую способность и деформативность модели. Для тяжелого бетона при статическом нагружении рекомендуется принимать $\psi \approx 30\text{--}35^\circ$ с возможной корректировкой в пределах $20\text{--}40^\circ$ в зависимости от типа напряженно-деформированного состояния, а также класса бетона. Эксцентриситет пластического потенциала целесообразно принимать равным $\epsilon = 0,1$ как базовое значение, обеспечивающее устойчивость вычислений при удовлетворительной физической правдоподобности. Отношение прочностей σ_{b0}/σ_{c0} для тяжелого бетона при отсутствии специальных данных рекомендуется принимать равным 1,16, коэффициент формы поверхности текучести $K_c = 2/3$. В статических задачах параметр вязкости μ рекомендуется задавать равным нулю. При проблемах со сходимостью возможно использование малого ненулевого значения μ порядка 10^{-4} при обязательном контроле влияния на диаграммы деформирования.

Для корректного воспроизведения нелинейного поведения бетона и постпикового отклика необходимо использовать диаграммы деформирования, согласованные с энергетическим критерием разрушения. Для сжатия рекомендуется применять обобщенную кривую Поповича, для растяжения — экспоненциальную зависимость на основе энергии разрушения G_f с регуляризацией по размеру конечного элемента. Данные диаграммы верифицированы на основе экспериментальных данных испытаний материала. Соблюдение указанных рекомендаций позволяет получить устойчивые и физически обоснованные результаты численного моделирования работы бетона вплоть до разрушения в рамках выбранных параметров CDP.

References / Список литературы

1. Etse G., Willam K. Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. 1994;120(9):1983–2011. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1994\)120:9\(1983\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120:9(1983))
2. Grassl P., Xenos D., Nystrom U., Rempling R., Gylltoft K. CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 2013;50(24):3805–3816. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.008>
3. Zreid I., Kaliske M. A gradient enhanced plasticity-damage microplane model for concrete. *Computational Mechanics*. 2018;62(5):1239–1257. <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1561-1>
4. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 1989;25(3):299–326. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4)
5. Lee J., Fenves G.L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*. 1998;124(8):892–900. Available from: [https://www.sci-hub.ru/10.1061/\(asce\)0733-9399\(1998\)124:8\(892\)](https://www.sci-hub.ru/10.1061/(asce)0733-9399(1998)124:8(892)) (accessed: 13.09.2025).
6. Drucker D.C. Some implications of work hardening and ideal plasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1950; 7(4):411–418. Available from: <https://www.jstor.org/stable/43633751> (accessed: 13.09.2025)
7. Prager W. Recent developments in the mathematical theory of plasticity. *Journal of Applied Physics*. 1949;20(3): 235–241. <https://doi.org/10.1063/1.1698348>
8. Jabbar A.M. Impact of failure-surface parameters of concrete damage plasticity model on the behavior of reinforced ultra-high performance concrete beams. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. 2023;67(2):495–504. <https://doi.org/10.3311/PPci.21345>
9. Neuberger Y.M., Andrade M.V., de Sousa A.M.D., Bandeira M., da Silva Junior E.P., dos Santos H.F., Catoia B., Bolandim E.A., de Moura Aquino V.B., Christoforo A.L. Numerical analysis of reinforced concrete corbels using concrete damage plasticity: sensitivity to material parameters and comparison with analytical models. *Buildings*. 2023;13(11):2781. <https://doi.org/10.3390/buildings13112781> EDN: HKANPC
10. Bilal K.A., Mahamid M., Hariri-Ardebili M.A., Tort C., Ford T. Parameter selection for concrete constitutive models in finite element analysis of composite columns. *Buildings*. 2023;13(7):1759. <https://doi.org/10.3390/buildings13071759>

11. Fedoroff A., Calonius K., Kuutti J. Behavior of the Abaqus CDP model in simple stress states. *Rakenteiden Mekaniikka*. 2019;52(2):87–113. <https://doi.org/10.23998/rm.75937>
12. Qasem M., Hasan M., Muhamad R., Chin C.L., Alanazi N. Generalised calibration and optimization of concrete damage plasticity model for finite element simulation of cracked reinforced concrete structures. *Results in Engineering*. 2025;25:103905. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2024.103905> EDN: RFAJSJ
13. Alfarah B., Lopez-Almansa F., Oller S. New methodology for calculating damage variables evolution in concrete model. *Engineering Structures*. 2017;132:70–85. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.11.022>
14. Rakic D.M., Bodic A.S., Milivojevic N.J., Dunic V.Lj., Zivkovic M.M. Concrete damage plasticity material model parameters identification. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2021;15(2):111–122. <https://doi.org/10.24874/jsscm.2021.15.02.11> EDN: GWWDNU
15. Budarin A.M., Rempel G.I., Kamzolkin A.A., Alekhin V.N. Concrete damage-plasticity model with double independent hardening. *Vestnik MGSU*. 2024;19(4):527–543. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.4.527-543> EDN: ПJBПQ
Бударин А.М., Ремпель Г.И., Камзолкин А.А., Алехин В.Н. Деформационно-прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением и повреждением // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. № 4. С. 527–543. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.4.527-543> EDN: ПJBПQ
16. Agapov V.P., Markovich A.S. Finite element for analysis of massive reinforced concrete structures with cracking. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(6):593–607. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607> EDN: HIQWQW
Агапов В.П., Маркович А.С. Конечный элемент для расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 6. С. 593–607. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-6-593-607> EDN: HIQWQW
17. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G., Belyaev M.O., Modestov V.S. Methods for identification of elasto-plastic concrete models with damage accumulation. *Mag Civ Eng*. 2017;(8):279–297. (In Russ.) <https://doi.org/10.18720/MCE.76.24> EDN: YSTEJC
Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Беляев М.О., Модестов В.С. Методы идентификации упругопластических моделей бетона с учетом накопления повреждений // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8 (76). С. 279–297. <https://doi.org/10.18720/MCE.76.24> EDN: YSTEJC
18. Rimshin V.I., Amelin P.A. Numerical calculation of bent reinforced concrete elements of rectangular section in the Abaqus software. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(6):552–563. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563> EDN: WCRNSY
Римшин В.И., Амелин П.А. Численный расчет изгибаемых железобетонных элементов в программной среде Abaqus // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 6. С. 552–563. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-552-563> EDN: WCRNSY
19. Murtazin I.R., Fedorenko R.V., Lukin A.V., Modestov V.S., Malinkin A.S., Fedotov M.A., Panarin S.N. Parameter identification of the concrete damaged plasticity model. *Mag Civ Eng*. 2025;18(6):13808.
20. Popovics S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*. 1973;3:583–589. Available from: [https://www.sci-hub.ru/10.1016/0008-8846\(73\)90096-3](https://www.sci-hub.ru/10.1016/0008-8846(73)90096-3) (accessed: 13.10.2025)
21. Thorenfeldt E, Tomaszewicz A, Jensen JJ. Mechanical properties of high-strength concrete and applications in design. *Symposium utilization of high-strength concrete*. Stavanger: Norwegian Institute of Technology, 1987. p. 149–159.
22. Collins M.P., Porasz A. Shear design for high strength concrete. *CEB Bull Inf*. 1989. p. 77–83. Available from: [http://refhub.elsevier.com/S2590-1230\(24\)02148-0/sbref0076](http://refhub.elsevier.com/S2590-1230(24)02148-0/sbref0076) (accessed: 17.11.2025).
23. Hordijk D.A. *Local approach to fatigue of concrete*. Delft: Delft University of Technology; 1991. EDN: FTYUDD
24. Bazant Z.P., Oh B.H. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*. 1983;16(93):155–177. Available from: <http://www.civil.northwestern.edu/people/bazant/PDFs/Papers/157.pdf> (accessed: 13.09.2025)
25. Fakeh M., Jawdhari A., Fam A. Recommended concrete damage plasticity parameters and constitutive models for UHPC in Abaqus. *Engineering Structures*. 2025;333:120154. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120154> EDN: EEEAGA
26. Kupfer H, Hilsdorf HK, Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI J*. 1969; 66(8):656–666. Available from: <https://www.scirp.org/reference/ReferencesPapers?ReferenceID=32233> (accessed: 13.09.2025)
27. Petersson PE. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. *Report No. TVBM-1006*. Lund: University of Lund, 1981. URL: <https://lucris.lub.lu.se/ws/portalfiles/portal/4631196/1607139.pdf> (дата обращения: 13.09.2025)
28. Nikulin A.I., Obernikhin D.V. The experimental researches of the deformability of the bending reinforced concrete elements with the various cross sections. *Bulletin of BSTU Named After V.G. Shukhov*. 2017;(4):56–59. (In Russ.) https://doi.org/10.12737/article_58e61337b86486.82545138 EDN: YINIVZ
Никюлин А.И., Обернихин Д.В. Экспериментальные исследования деформативности изгибаемых железобетонных элементов различных поперечных сечений // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. № 4. С. 56–59. https://doi.org/10.12737/article_58e61337b86486.82545138 EDN: YINIVZ