





Расчет на вынужденные колебания с учетом нелинейности деформирования: теория и реализация

В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{1,2}, М. Жаззан¹, К. Пхеаром¹

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ markovich-as@rudn.ru

Поступила в редакцию: 19 декабря 2025 г.

Доработана: 10 февраля 2026 г.

Принята к публикации: 15 февраля 2026 г.

Аннотация. Описана процедура конечно-элементного расчета конструкций на вынужденные колебания в линейной и нелинейной постановке с использованием метода прямого интегрирования дифференциальных уравнений движения. Данная программа реализована в вычислительном комплексе ПРИНС, разрабатываемом авторами для использования в инженерно-технических и научных целях. Процедура предусматривает возможность учета силовых воздействий на надземную часть конструкций как непосредственно, так и вследствие землетрясений. Определенный класс конструкций работает в режиме меняющихся во времени нагрузок, для которых возникающие при этом нелинейные эффекты могут существенным образом сказаться на их напряженно-деформированном состоянии. Динамический расчет таких конструкций должен выполняться методами прямого интегрирования с учетом нелинейности деформирования. Следовательно, разработка методов расчета конструкций на вынужденные колебания с учетом физической и геометрической нелинейности является приоритетной задачей вычислительной механики в таких областях, как космонавтика, авиа- и автомобилестроение, машиностроение и строительство. Цель исследования — разработка алгоритма и программы нелинейного динамического расчета конструкций методом конечных элементов. Для решения дифференциальных уравнений использован метод Ньюмарка. При этом учет нелинейности деформирования выполняется на основании ранее предложенных авторами методик. Разработанная методика расчета конструкций на вынужденные колебания в нелинейной постановке адаптирована к программе ПРИНС. Приведен пример тестового расчета консольного стержня на действие импульса силы как с учетом, так и без учета нелинейности деформирования. Проанализированы полученные результаты. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения инженерных задач, связанных с расчетом конструкций на вынужденные колебания.

Ключевые слова: метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, строительные конструкции, массивные железобетонные сооружения, физическая нелинейность, пластичность, теория течения, механика деформируемых тел

Вклад авторов: Агапов В.П. — концепция исследования, научное руководство, написание текста, визуализация, валидация; Маркович А.С. — концепция исследования, написание текста, визуализация, верификация, валидация; Жаззан М., Пхеаром К. — подбор и форматирование списка литературы. Авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, доктор технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434; ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Жаззан Муханнад, аспирант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0009-0008-1185-5166; e-mail: jazzan.m@mail.ru

Пхеаром Квенг, аспирант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; ORCID: 0009-0002-1287-9430; e-mail: 1042215172@rudn.ru

© Агапов В.П., Маркович А.С., Жаззан М., Пхеаром К., 2026



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.


Для цитирования: Агапов В.П., Маркович А.С., Жаззан М., Пхеаром К. Расчет на вынужденные колебания с учетом нелинейности деформирования: теория и реализация // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2026. Т. 22. № 1. С. 16–27. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-16-27> EDN: IDQWOZ

Analysis of Forced Vibrations Taking into Account Nonlinear Deformation: Theory and Implementation

Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich^{1,2}, Muhannad Jazzan¹, Kweng Phearom¹

¹RUDN University, Moscow, Russian Federation

²Moscow State University Of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

 markovich-as@rudn.ru

Received: December 19, 2025

Revised: February 10, 2026

Accepted: February 15, 2026

Abstract. The research describes the procedure for finite element analysis of structures under forced vibration in a linear and nonlinear setting using the method of direct integration of differential equations of motion. This program is implemented in the PRINS FEM software, developed by the authors for engineering, technical and scientific purposes. The procedure allows to take into account the action of forces on the above-ground part of structures due to earthquakes. A certain class of structures operates under time-varying loads, for which the resulting nonlinear effects can affect their stress-strain state. Dynamic analysis of such structures should be performed using direct integration methods, taking into account the nonlinearity of deformation. Consequently, the development of methods for forced vibration analysis of structures taking into account physical and geometric nonlinearity is a priority task in such areas as astronautics, aircraft and automobile manufacturing, mechanical engineering and construction. The purpose of this study is to develop an algorithm and a program for nonlinear dynamic analysis of structures using FEM. The direct dynamic calculation is based on the Newmark's method. Nonlinear deformation is accounted for using the authors' proposed methods. The developed method of forced vibration analysis of structures in a nonlinear setting has been adapted to the PRINS FEM program. An example of a test calculation of a cantilever bar subjected to a force impulse is provided. The obtained results are analyzed. *Conclusions.* The PRINS FEM program can be effectively used by engineers in design and scientific organizations to solve engineering problems related to the analysis of structures under forced vibrations.

Keywords: finite element method, PRINS computational software, building structures, mass concrete structures, physical nonlinearity, plasticity, flow theory, structural mechanics

Authors' contribution: Agapov V.P. — general research concept, scientific guidance, writing, visualization, verification, validation; Markovich A.S. — general research concept, scientific guidance, writing, visualization, verification, validation; Jazzan M., Phearom K. — selection and formatting of the list of references. The authors read and approved the final version of the article.

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

For citation: Agapov V.P., Markovich A.S., Jazzan M., Phearom K. Analysis of forced vibrations taking into account nonlinear deformation: theory and implementation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2026;22(1):16–27. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2026-22-1-16-27> EDN: IDQWOZ

1. Введение

Предпосылки для динамического расчета конструкций в нелинейной постановке обусловлены развитием компьютерных технологий, с одной стороны, и развитием численных методов строительной механики, в первую очередь метода конечных элементов [1; 2] — с другой. Для решения уравне-

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Metal and Timber Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Muhannad Jazzan, PhD student of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0009-0008-1185-5166; e-mail: jazzan.m@mail.ru

Kweng Phearom, PhD student of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; ORCID: 0009-0002-1287-9430; e-mail: 1042215172@rudn.ru

ний движения используются явные и неявные методы прямого интегрирования. Эти методы изложены во многих работах, например [3–6]. Кроме того, широко известны алгоритмы и принципы статического расчета конструкций методом конечных элементов с учетом физической (трещинообразование, пластичность, ползучесть) и геометрической (большие перемещения и повороты) нелинейности [7; 8]. Эти принципы реализованы в ряде иностранных программ (ANSYS, ABAQUS, DYNA и др.).

Однако ряд конструкций работает в режиме меняющихся во времени нагрузок. Возникающие при этом нелинейные эффекты могут существенным образом оказать влияние на конечное напряженно-деформированное состояние. Динамический расчет таких конструкций следует вести методами прямого интегрирования с учетом нелинейности деформирования, что предполагает выполнение некоторых итерационных процедур на каждом шаге интегрирования. Так как при расчете сложных систем количество временных шагов может измеряться десятками тысяч, такой расчет требует значительных вычислительных ресурсов и временных затрат и с наибольшей эффективностью может быть реализован на компьютерах с высокой производительностью.

Несмотря на это, на сегодняшний день разработка методов динамического расчета конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности является приоритетной задачей вычислительной механики в таких областях, как космонавтика, авиа- и автомобилестроение, машиностроение и строительство.

Методика такого расчета разработана авторами настоящей статьи и реализована в программе ПРИНС. В основу динамического расчета положен метод Ньюмарка [3]. При этом основные положения учета нелинейности деформирования сформулированы авторами в работах [9–12].

2. Метод

Уравнение для расчета конструкций на вынужденные колебания методом конечных элементов в форме метода перемещений в приращениях получено в [13] в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{nl_1} + \mathbf{K}_{nl_2}] \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t), \quad (1)$$

где \mathbf{M} — матрица масс; \mathbf{D} — матрица демпфирования; \mathbf{K}_0 , \mathbf{K}_{nl_1} и \mathbf{K}_{nl_2} — матрицы жесткости нулевого, первого и второго порядков; \mathbf{K}_σ — матрица начальных напряжений (геометрическая матрица жесткости); \mathbf{u} — вектор перемещений; $\Delta \mathbf{P}$ и $\Delta \mathbf{u}$ — векторы приращений нагрузки и перемещений при переходе конструкции из состояния в момент времени t в состояние в момент времени $t + \Delta t$.

Способы формирования матриц \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K}_0 и \mathbf{K}_σ широко известны и описаны многими авторами (например, [1; 2]). Методика построения нелинейных матриц жесткости \mathbf{K}_{nl_1} и \mathbf{K}_{nl_2} приведена в [13].

Выражение

$$\Delta \mathbf{P} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{P}_{ext}, \quad (2)$$

стоящее в правой части уравнения (1), представляет собой внешнюю нагрузку для шага нагружения. Согласно условиям равновесия, равнодействующая внутренних сил \mathbf{P}_{int} в момент времени $t + \Delta t$, приведенная к узлам конструкции, должна быть равна внешним силам, т.е. должно соблюдаться равенство

$$\mathbf{P}_{ext} = \mathbf{P}_{int}. \quad (3)$$

Равнодействующая внутренних сил \mathbf{P}_{int} определяется силами упруго-пластического сопротивления, демпфирующими и инерционными силами. Таким образом,

$$\mathbf{P}_{int} = \mathbf{P}_\sigma + \mathbf{P}_{damp} + \mathbf{P}_{iner}, \quad (4)$$

где слагаемые, стоящие в правой части уравнения (4), соответствуют перечисленным выше внутренним силам и определяются следующим образом:

$$\mathbf{P}_\sigma = \sum \mathbf{p}_{\sigma,el}, \mathbf{P}_{damp} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t), \quad \mathbf{P}_{iner} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t). \quad (5)$$

При этом

$$\mathbf{p}_{\sigma,el} = - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (6)$$

где \mathbf{B} — матрица, связывающая компоненты деформаций элемента с компонентами узловых перемещений (геометрическая матрица).

При учете нелинейности деформирования напряжения на каждом шаге должны корректироваться с учетом принятых моделей деформирования материалов, что может привести к нарушению условий равновесия. Возникающая при этом невязка может быть минимизирована с помощью итерационного процесса, который представляется в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{K}\Delta\mathbf{u}_i = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t), \quad (7)$$

где i — номер итерации.

Вектор невязки $\mathbf{P}_{err,i-1}$ в момент времени $t + \Delta t$ находится как разность между текущим значением нагрузки \mathbf{P} и статическим эквивалентом внутренних сил, т.е.

$$\mathbf{P}_{err,i-1} = \mathbf{P}(t + \Delta t) - [\mathbf{P}_\sigma(t + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]. \quad (8)$$

Этот процесс следует продолжать до достижения заданной точности, которую можно оценить сравнением полных значений шаговых перемещений для двух соседних итераций. Погрешность решения можно оценить, в частности, по формуле

$$rtol = \frac{\|\Delta\mathbf{u}_{i+1}\| - \|\Delta\mathbf{u}_i\|}{\|\Delta\mathbf{u}_{i+1}\|}, \quad (9)$$

где $\|\Delta\mathbf{u}\|$ — норма шаговых значений перемещений.

Полные значения перемещений и напряжений будут равны

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}(t + \Delta t) \quad (10)$$

и

$$\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\sigma}(t) + \Delta\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) \quad (11)$$

соответственно.

Для решения уравнения (7) используется метод Ньюмарка, основанный на представлении скоростей и перемещений при переходе конструкции из состояния t в состояние $t + \Delta t$ в виде

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + [(1 - \beta)\ddot{\mathbf{u}}(t) + \beta\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)]\Delta t \quad (12)$$

и

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t)\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}(t) + \alpha\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2. \quad (13)$$

Решая уравнение(13) относительно $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$ и подставляя полученное значение в (12), получаем следующие соотношения:

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = \frac{\Delta u}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\dot{u}(t)}{\alpha \Delta t} + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \ddot{u}(t) \quad (14)$$

и

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + [(1 - \beta)\ddot{u}(t) + \beta\ddot{u}(t + \Delta t)]\Delta t = \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \Delta u + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \dot{u}(t) + \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \ddot{u}(t). \quad (15)$$

Введем обозначения:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\beta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = 1 - \frac{1}{2\alpha}, \quad a_4 = 1 - \frac{\beta}{\alpha},$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{\beta}{\alpha}\right), \quad a_6 = \Delta t(1 - \beta), \quad a_7 = \beta \Delta t. \quad (16)$$

С учетом выражений (16) функции (14) и (15) принимают вид

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t),$$

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + a_6 \ddot{u}(t) + a_7 \ddot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + a_6 \ddot{u}(t) + a_7 [a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)]. \quad (17)$$

Обозначая $[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{nl_1} + \mathbf{K}_{nl_2}] = \mathbf{K}$, подставим полученные выражения для $\dot{u}(t + \Delta t)$ и $\ddot{u}(t + \Delta t)$ в уравнение (7). При этом имеем

$$\mathbf{M} [a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)]_i + \mathbf{D} [\dot{u}(t) + a_6 \ddot{u}(t) + a_7 \ddot{u}(t + \Delta t)]_i + \mathbf{K} \Delta u_i =$$

$$= \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M} \ddot{u}(t) + \mathbf{D} \dot{u}(t), \quad (18)$$

или

$$\mathbf{M} [a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)]_i + \mathbf{D} [a_0 a_7 \Delta u + \dot{u}(t)(1 - a_2 a_7) + \ddot{u}(t)(a_6 + a_3 a_7)]_i +$$

$$+ \mathbf{K} \Delta u_i = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M} \ddot{u}(t) + \mathbf{D} \dot{u}(t). \quad (19)$$

Учитывая, что

$$a_1 = a_7 a_0 = \frac{\beta}{\alpha \Delta t}, \quad a_4 = 1 - a_7 a_2 = 1 - \frac{\beta}{\alpha}, \quad a_5 = a_6 + a_7 a_3 = \left(1 - \frac{\beta}{2\alpha}\right) \Delta t \quad (20)$$

формула (19) представляется в виде

$$\mathbf{M} [a_0 \Delta u - a_2 \dot{u}(t) + a_3 \ddot{u}(t)]_i + \mathbf{D} [a_1 \Delta u + a_4 \dot{u}(t) + a_5 \ddot{u}(t)]_i +$$

$$+ \mathbf{K} \Delta u_i = \Delta \mathbf{P} + \mathbf{P}_{err,i-1} + \mathbf{M} \ddot{u}(t) + \mathbf{D} \dot{u}(t). \quad (21)$$

В уравнении (21) перенесем все известные величины из левой части в правую. При этом получим

$$\mathbf{M} (a_0 \Delta u)_i + \mathbf{D} (a_1 \Delta u)_i + \mathbf{K} \Delta u_i =$$

$$= \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{f} + \mathbf{M} \ddot{u}(t) - \mathbf{M} [a_3 \ddot{u}(t) - a_2 \dot{u}(t)]_i + \mathbf{D} \dot{u}(t) - \mathbf{D} [a_4 \dot{u}(t) + a_5 \ddot{u}(t)]_i =$$

$$= \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{f} + \mathbf{M} [a_2 \dot{u}(t) + (1 - a_3) \ddot{u}(t)]_i + \mathbf{D} [(1 - a_4) \dot{u}(t) - a_5 \ddot{u}(t)]_i. \quad (22)$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{K}_{eq}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{P}_{eq}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eq} &= \mathbf{M}a_0 + \mathbf{D}a_1 + \mathbf{K}, \\ \mathbf{P}_{eq} &= \Delta\mathbf{P} + \mathbf{P}_{err} + \mathbf{M}[a_2\dot{\mathbf{u}}(t) + (1-a_3)\ddot{\mathbf{u}}(t)]_i + \mathbf{D}[(1-a_4)\dot{\mathbf{u}}(t) - a_5\ddot{\mathbf{u}}(t)]_i. \end{aligned} \quad (24)$$

В формуле для \mathbf{P}_{eq} можно выделить часть, которая на шаге нагружения остается постоянной, а именно:

$$\mathbf{P}_{eq}^{const} = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{M}[a_2\dot{\mathbf{u}}(t) + (1-a_3)\ddot{\mathbf{u}}(t)]_i + \mathbf{D}[(1-a_4)\dot{\mathbf{u}}(t) - a_5\ddot{\mathbf{u}}(t)]_i. \quad (25)$$

Тогда полное значение эквивалентной нагрузки примет вид

$$\mathbf{P}_{eq} = \mathbf{P}_{eq}^{const} + \mathbf{P}_{err}. \quad (26)$$

Метод Ньюмарка является, безусловно, устойчивым при $\alpha = 0,25$ и $\beta = 0,5$, а при $\alpha = 0$ и $\beta = 0,5$ образует центрально разностную схему.

Решив систему алгебраических уравнений (23) относительно приращений перемещений $\Delta\mathbf{u}$ на временном шаге, скорости и ускорения в конце шага интегрирования можно найти по формулам (17).

Описанный алгоритм расчета конструкций на вынужденные колебания реализован в вычислительном комплексе ПРИНС [14], разрабатываемом авторами данной статьи. При этом принята концепция сосредоточенных масс, а матрица демпфирования вычисляется либо в зависимости от модальных коэффициентов демпфирования по методике, описанной в работе [5], либо по известной формуле Релея [15]. Возможен также учет сосредоточенных демпферов. В расчетах по предложенной методике могут быть использованы все типы конечных элементов и материалов, входящие в соответствующие библиотеки программы ПРИНС (см., например, [9] и [14]).

3. Результаты и обсуждение

Разработанная программа протестирована на отладочном примере, описанном ниже. Пример выбран исходя из наличия в литературе известных результатов теоретического расчета для рассматриваемого класса задач. Так, за основу был взят пример 6.1, приведенный в книге Клафа и Пензиена [5].

Рассчитывалась стойка, несущая сосредоточенную массу и нагруженная треугольным импульсом силы, как показано на рис. 1.

Конструкция рассчитывалась при следующих исходных данных: $m = 43817$ кг; $d = 9,611$ см; $\Delta t = 0,005$ с; число шагов интегрирования $n = 100$.

Стойка моделировалась балочными конечными элементами. При этом по высоте стойка была разбита на 10 элементов (рис. 1, в). Собственный вес стойки не учитывался. Найденная по программе ПРИНС частота собственных колебаний составила $\omega = 30$ рад/с, соответствующий ей период равен $T = 0,209$ с.

В процессе отладки выполнялись как линейный динамический расчет, так и динамический расчет с учетом геометрической нелинейности конструкции.

Результаты линейного и нелинейного расчетов по программе ПРИНС без учета демпфирования приведены на рис. 2 и рис. 3 в виде зависимости горизонтального перемещения и ускорения точки приложения силы от времени. Результаты линейного расчета, полученные по программе ПРИНС, практически совпали с результатами аналитического решения, приведенного в работе [5].

Аналогичные результаты с учетом демпфирования, также полученные по программе ПРИНС, представлены на рис. 4–7. Демпфирование принималось равным 5 и 10 % от критического соответственно.

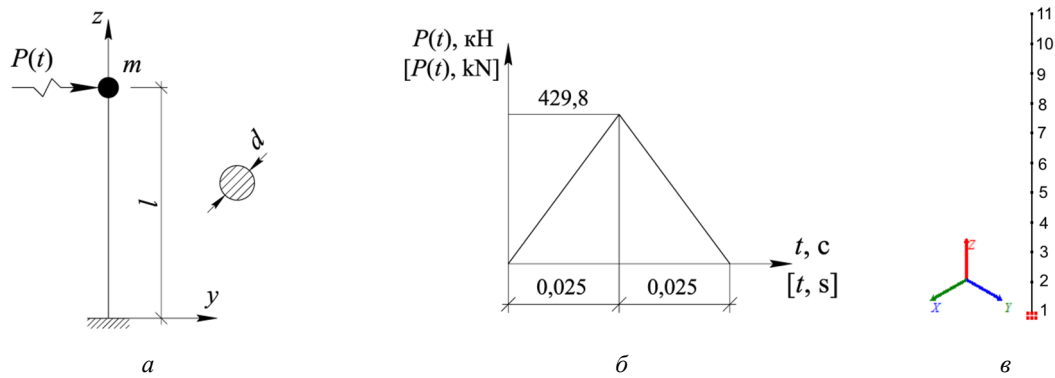


Рис. 1. Рассчитываемая конструкция:
a — расчетная схема; *б* — импульсное воздействие
 Источник: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 1. Analysed structure:
a — model; *б* — impulse excitation
 Source: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

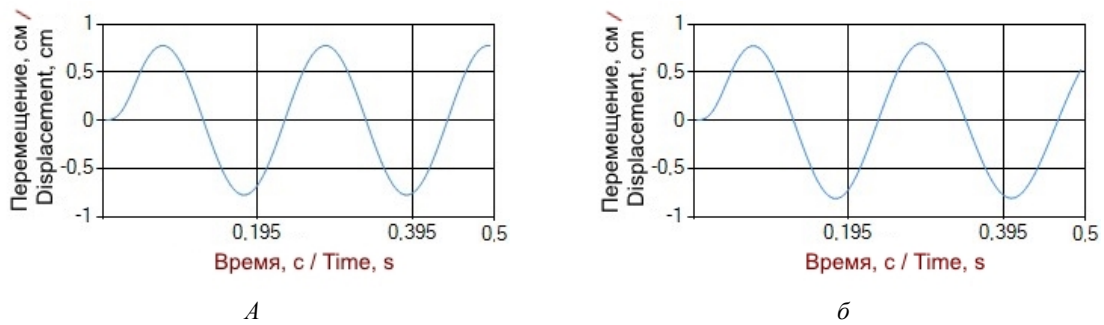


Рис. 2. Горизонтальное перемещение узла № 11 без учета демпфирования:
a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете
 Источник: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 2. Horizontal displacement of node No. 11 of the structure without damping:
a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis
 Source: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

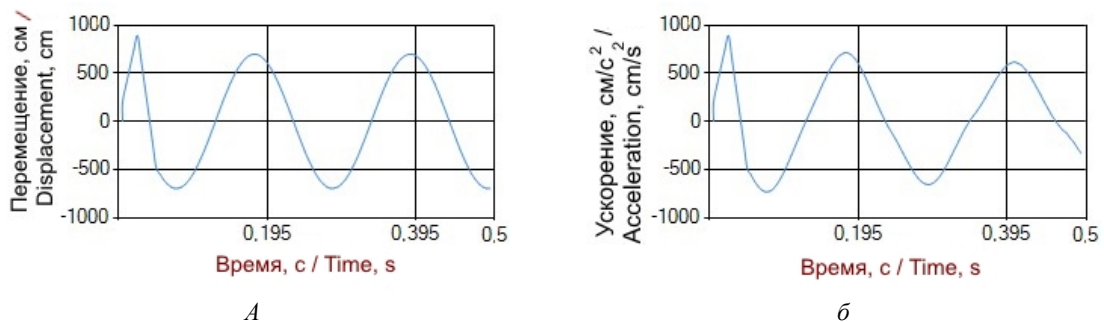


Рис. 3. Горизонтальное ускорение узла № 11 без учета демпфирования:
a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете
 Источник: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 3. Horizontal acceleration of node No. 11 of the structure without damping:
a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis
 Source: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

Соответствующие указанным зависимостям (рис. 2–7) деформированные схемы стойки на характерных шагах интегрирования приведены на рис. 8–10.

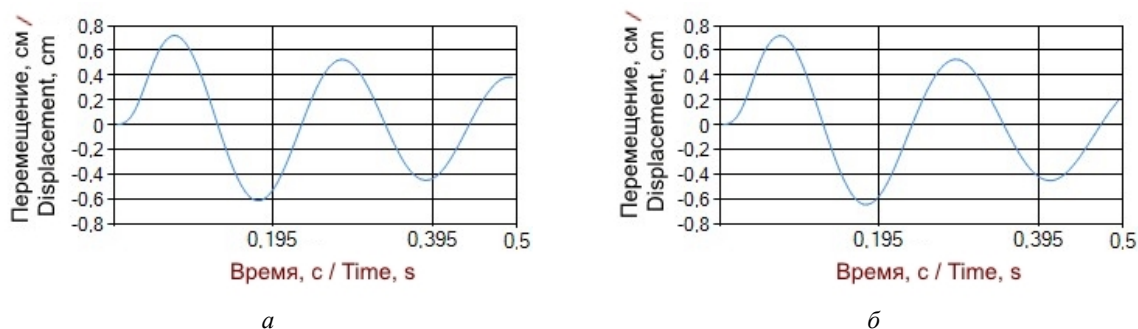


Рис. 4. Горизонтальное перемещение узла № 11 при демпфировании 5 % от критического:

a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 4. Horizontal displacement of node No. 11 of the structure with damping at 5% of the critical:

a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

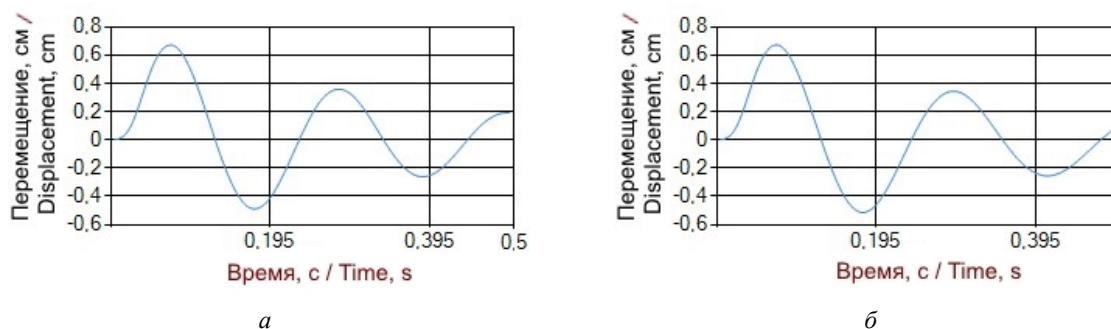


Рис. 5. Горизонтальное перемещение узла № 11 при демпфировании 10 % от критического:

a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 5. Horizontal displacement of node No. 11 of the structure with damping at 10% of the critical:

a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

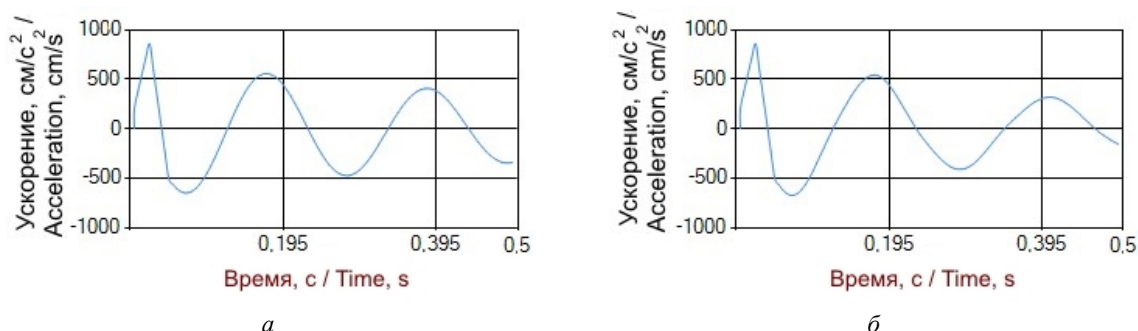


Рис. 6. Горизонтальное ускорение узла № 11 при демпфировании 5 % от критического:

a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 6. Horizontal acceleration of node No. 11 of the structure with damping at 5% of the critical:

a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

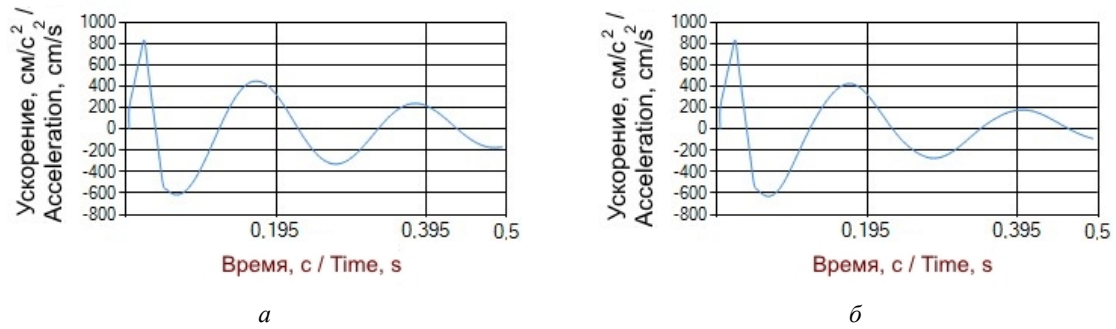


Рис. 7. Горизонтальное ускорение узла № 11 при демпфировании 10 % от критического:

a — в линейном расчете; *б* — в нелинейном расчете

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 7. Horizontal acceleration of node No. 11 of the structure with damping at 10% of the critical:

a — in linear analysis; *б* — in nonlinear analysis

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

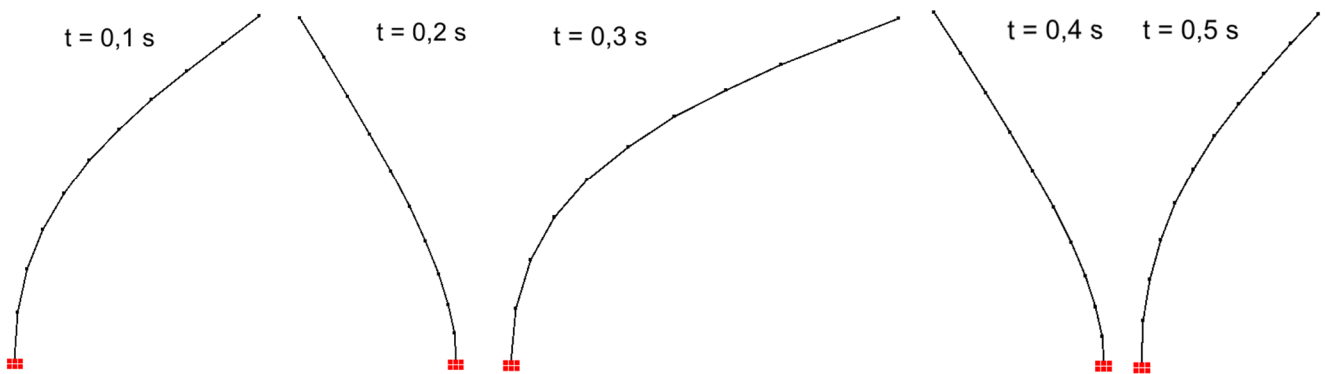


Рис. 8. Вынужденные колебания конструкции без учета демпфирования

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 8. Forced vibrations of the structure without damping

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

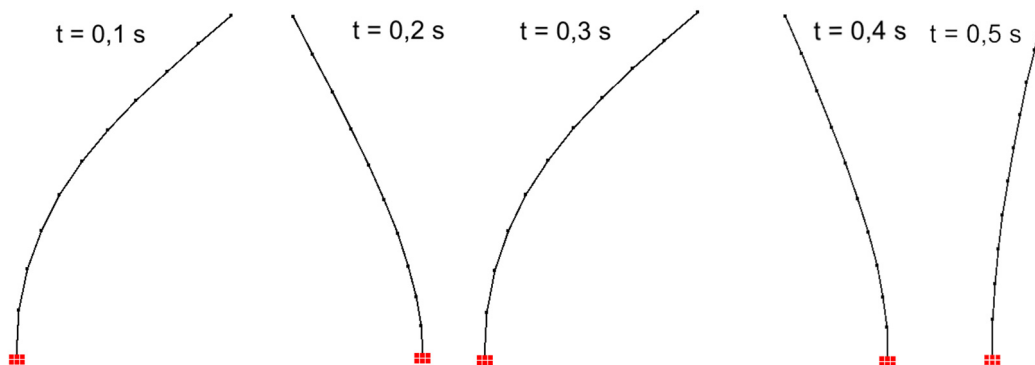


Рис. 9. Вынужденные колебания конструкции при демпфировании 5 % от критического

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 9. Forced vibrations of the structure with damping at 5% of the critical

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

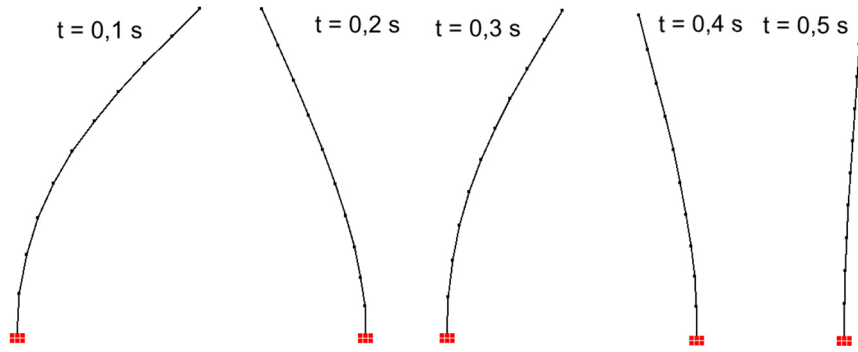


Рис. 10. Вынужденные колебания конструкции при демпфировании 10 % от критического
И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 10. Forced vibrations of the structure with damping at 10% of the critical
S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

В нелинейных расчетах учитывалась только геометрическая нелинейность (в уравнении (7) принималось, что $\mathbf{K}_{nl_1} = \mathbf{K}_{nl_2} = 0$), так как в конечных элементах балок, построенных на основе классической теории сопротивления материалов, достоверно учесть физическую нелинейность практически невозможно. Нагрузки и перемещения в данном примере таковы, что ожидать существенного влияния геометрической нелинейности на результаты априори не приходилось, и расчеты это подтвердили. Результаты линейного и нелинейного расчетов оказались близки между собой, и это свидетельствует о правильности разработанной программы. Имеющиеся при этом различия объясняются логикой работы рассматриваемой конструкции.

4. Заключение

Анализ графиков, приведенных на рис. 3–7, показывает, что в линейном расчете в установившемся режиме графики перемещений и ускорений симметричны относительно оси времени, а в нелинейном расчете они несимметричны. При этом перемещения в нелинейном расчете оказываются меньшими по абсолютному значению в области отрицательных ускорений и большими — в области их положительных величин.

В этом и проявляется влияние геометрической нелинейности, что поясняется на рис. 11. Так, при отрицательных ускорениях инерционная сила направлена, как показано на рис. 11, *a*.

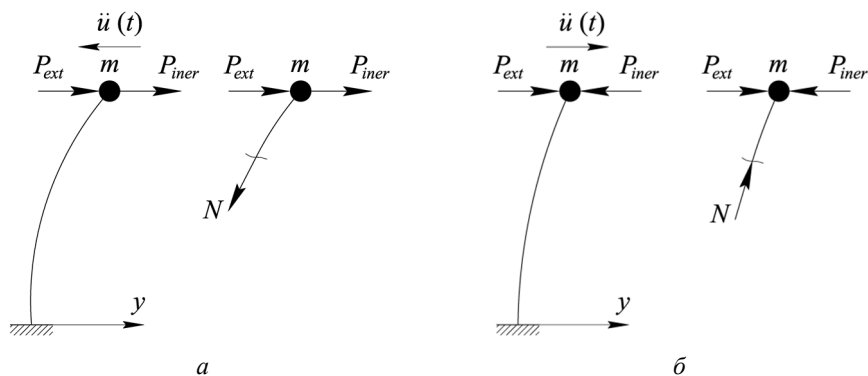


Рис. 11. Внешние и внутренние силы:
a — при отрицательных ускорениях; *b* — при положительных ускорениях
И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем.

Figure 11. External and internal forces:
a — at negative accelerations; *b* — at positive accelerations
S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich.

При этом в стержне возникает растягивающее усилие, что приводит к увеличению изгибной жесткости и, вследствие этого, к уменьшению перемещений. При положительных ускорениях инерционная сила направлена, как показано на рис. 11, б. Продольная сила в стержне при этом уменьшается по сравнению со случаем действия только внешней силы и может стать отрицательной. Вследствие этого изгибная жесткость стержня уменьшается, что и приводит к увеличению перемещений. Вышесказанное подтверждает корректность полученных с помощью программы ПРИНС результатов.

Таким образом, разработанная программа нелинейных динамических расчетов расширяет круг задач, решаемых с помощью вычислительного комплекса ПРИНС, и может быть рекомендована для практического применения в проектных организациях и конструкторских бюро.

Список литературы

1. Bathe K.J. *Finite element procedures*. N.J.: Prentice Hall, 1996. 1037 p. URL: <https://djvu.online/file/yY0gpLpAdzH4q> (дата обращения: 13.09.2025).
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element for solid and structural mechanics*. 7th edition. Elsevier, 2014. 657 p. ISBN 10 1856176347
3. Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics // *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1959. Vol. 85. Issue 367. P. 67–94. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>
4. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1976. 528 p. ISBN 100136271901
5. Clough R.W., Penzien J. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill, 1993. 738 p. ISBN 0-07-113241-4
6. Галишичкова В.В., Рынковская М.И., Тушикова Е.М. Основы динамики сооружений с элементами численного анализа в среде языка Python. Москва : РУДН, 2021. 270 с. ISBN 978-5-209-10747-7 EDN: RIOWOP
7. Oden J.T. *Finite Elements of nonlinear continua*. Courier Corporation, 2013. 517 p. ISBN ISBN 0-486-31790-0
8. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 2: Advanced Topics*. UK: John Wiley & Sons Ltd, 2000. 509 p. ISBN 047195649X, 9780471956495
9. Агапов В.П., Маркович А.С. Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС. Москва : РУДН, 2023. 263 с. ISBN 978-5-209-11784-1
10. Агапов В.П., Маркович А.С. Расчет массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // *Промышленное и гражданское строительство*. 2023. № 7. С. 43–49. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2023.07.43-49> EDN: LRCNLR
11. Агапов В.П., Маркович А.С. Использование объемных суперэлементов при нелинейных расчетах плитно-балочных конструкций в вычислительном комплексе ПРИНС // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2025. Т. 21. № 4. С. 283–293. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-283-293> EDN: SEBUAP
12. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable // *South Florida Journal of Development*. 2021. Vol. 2 No. 4. P. 5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007> EDN: VUBETV
13. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. Москва : АСВ, 2005. 245 с. ISBN 5-93093-303-0
14. Агапов В.П. Расчет несущих конструкций на прочность с использованием вычислительного комплекса ПРИНС. Москва : МГСУ, 2015. 181 с. ISBN 5-7264-0431-9
15. Wilson E.L. *Static and dynamic analysis of structures: A physical approach with emphasis on earthquake engineering* // *Computers and Structures*. 4th ed. 2010. 394 p. ISBN 0923907041, 9780923907044

References

1. Bathe K.J. *Finite element procedures*. N.J.: Prentice Hall, 1996. Available from: <https://djvu.online/file/yY0gpLpAdzH4q> (accessed: 13.09.2025).
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element for solid and structural mechanics*. 7th edition. Elsevier; 2014. ISBN 101856176347
3. Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1959;85(367):67–94. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>
4. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. N.J.: Prentice-Hall, Inc.; 1976. ISBN 100136271901
5. Clough R.W., Penzien J. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill; 1993. ISBN 0071132414, 9780071132411

6. Galishnikova V.V., Rynkovskaya M.I., Tupikova E.M. *Fundamentals of structural dynamics with elements of numerical analysis in Python*. Moscow: RUDN; 2021. (In Russ.) ISBN 978-5-209-10747-7
7. Oden J.T. *Finite elements of nonlinear continua*. Courier Corporation; 2013. ISBN 0-486-31790-0
8. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 2. Advanced Topics. UK: John Wiley & Sons Ltd; 2000. ISBN 047195649X, 9780471956495
9. Agapov V.P., Markovich A.S. *Nonlinear models of concrete and reinforced concrete structures. Theory and implementation in PRINS software*: monograph. Moscow: RUDN University; 2023. (In Russ.) ISBN 978-5-209-11784-1
10. Agapov V.P., Markovich A.S. Calculation of massive reinforced concrete structures including cracks. *Industrial and Civil Engineering*. 2023;7:43–49. (In Russ.) <http://doi.org/10.33622/0869-7019.2023.07.43-49> EDN: LRCNLR
11. Agapov V.P., Markovich A.S. Using solid superelements for nonlinear analysis of slab-and-beam structures in the PRINS software. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(4):283–293. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-283-293> EDN: CEBUAP
12. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007> EDN: VUBETV
13. Agapov V.P. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.) ISBN 5-93093-303-0
14. Agapov V.P. *Strength calculation of load-bearing structures using the PRINS FEM complex*. Moscow: MSUCE; 2015. (In Russ.) ISBN 5-7264-0431-9
15. Wilson E.L. *Static and dynamic analysis of structures: A physical approach with emphasis on earthquake engineering. computers and structures*. 4th ed., 2010. ISBN 0923907041, 9780923907044