

Влияние изгибной жесткости соединения на работоспособность стального каркаса

Г. Сунь^{ID✉}, Л.И. Миронова^{ID}

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация
✉ guofeng.sun@mail.ru

Поступила в редакцию: 12 сентября 2025 г.

Доработана: 16 ноября 2025 г.

Принята к публикации: 28 ноября 2025 г.

Аннотация. Объектом исследования является стальной каркас с болтовыми фланцевыми соединениями, которые рассматриваются как полужесткое соединение, основанное на понятии стальных соединений, соответствующем Еврокоду-3. Цель данной работы — разработка метода расчета стального каркаса с фланцевыми соединениями и выявление влияния перемещения узла на работу всего каркаса. Проведен анализ поведения стального каркаса с болтовыми фланцевыми соединениями, в котором соединение может частично поворачиваться. В этом случае матрица жесткости может быть использована для упругопластического анализа каркаса с полужесткими соединениями. Проведена оптимизация матрицы жесткости с учетом жесткости соединения балки с колонной. Разработан метод расчета угла поворота узла балки с колонной, учитывающая линейную жесткость балки и поперечную жесткость колонны. Обобщены методы расчета изгибающей жесткости болтовых фланцевых соединений вращения, основанные на компонентном методе из Еврокода-3. Проведена верификация точности и эффективности разработанной методики, результаты которой свидетельствуют о достаточной высокой точности выполненных экспериментов. В качестве результатов выполненного исследования можно выделить собственно метод проектирования каркаса с учетом поворота узла и выявление влияния изгибной жесткости на работоспособность целого каркаса. На основании полученных результатов сделан вывод о том, что использование разработанной методики позволяет точно прогнозировать работу стальных каркасов с фланцевыми соединениями и оптимальным вариантом для проверенного стального каркаса является применение фланцевых соединений с толщиной фланца 16,4 мм.

Ключевые слова: стальная конструкция, матрица жесткости, отношение жесткости, угол поворота, механизм разрушения

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: Сунь Г. — разработка концепции статьи, методология, разработка модели, программное обеспечение, верификация результатов, подготовка рукописи статьи; Миронова Л.И. — руководство, редактирование, корректура, валидация. Оба автора ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Для цитирования: Сунь Г., Миронова Л.И. Влияние изгибной жесткости соединения на работоспособность стального каркаса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 6. С. 537–550. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-6-537-550> EDN: FOHZXB

Сунь Гофэн, аспирант кафедры строительных конструкций и механики грунтов, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Российская Федерация, 620062, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19; eLIBRARY SPIN-код: 4032-1759, ORCID: 0000-0002-7535-1599; e-mail: guofeng.sun@mail.ru

Миронова Людмила Ивановна, доктор педагогических наук, кандидат технических наук, профессор кафедры строительных конструкций и механики грунтов, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Российская Федерация, 620062, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19; eLIBRARY SPIN-код: 1201-1155, ORCID: 0000-0002-3675-6008; e-mail: mironovali@urfu.ru

© Сунь Г., Миронова Л.И., 2025



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Influence of Rotational Stiffness of Beam-to-Column Connection on Steel Frame Performance

Guofeng Sun[✉], Lyudmila I. Mironova^{ID}

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, city Yekaterinburg, Russia

✉ guofeng.sun@mail.ru

Received: September 12, 2025

Revised: November 16, 2025

Accepted: November 28, 2025

Abstract. The object of this study is a bolted end-plate connection, which is considered as a semi-rigid connection based on the concept of steel connections corresponding to Eurocode 3. The aim of this work is to develop a method for calculating a steel frame with bolted end-plate connection and to identify the effect of joint displacement on the behavior of the entire frame. Method. The behavior of a steel frame with bolted flange connections is analyzed, in which the connection can partially rotate. In this case, the stiffness matrix can be used for the elastic-plastic analysis of a frame with semi-rigid connections. Optimization of the stiffness matrix is carried out taking into account the stiffness of the beam-column connection. A method for calculating the rotation angle of the beam-column joint is developed, taking into account the linear stiffness of the beam and the transverse stiffness of the column. Methods for calculating the bending stiffness of bolted flange connections of rotation, based on the component method from Eurocode 3, are summarized. The accuracy and effectiveness of the developed methodology were verified, and the results demonstrate a sufficiently high level of accuracy in the experiments. The results of the study include a frame design method that takes into account joint rotation and the influence of bending stiffness on the overall frame performance. Based on the results, it can be concluded that the developed methodology enables accurate prediction of the performance of steel frames with flanged connections, and that the optimal option for the tested steel frame is the use of flanged connections with a flange thickness of 16.4 mm.

Keywords: steel structure, stiffness matrix, stiffness ratio, rotation, failure mechanism

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: Sun G. — conceptualization, methodology, modelling, software, verification of results, text writing; Mironova L.I. — guidance, editing, proofreading, validation. Both of the authors read and approved the final version of the article.

For citation: Sun G., Mironova L.I. Influence of rotational stiffness of beam-to-column connection on steel frame performance. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(6):537–550. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-6-537-550> EDN: FOHZXB

1. Введение

Стальные конструкции стремительно развиваются. В Китае, по оценкам исследователей, к 2035 г. на стальные конструкции будет приходиться около 40 % нового строительства [1]. В России есть запрос на скорость, экологичность и качество строительства, которые не всегда может гарантировать монолит. Вместе с тем, согласно национальному проекту «Жилье и городская среда», к 2030 г. в сегменте массового жилищного строительства должно возводиться 80 млн м² ежегодно (сейчас возводится менее 50 млн м² в год) [2]. Применение стальных конструкций отвечает требованиям к скорости и качеству возведения. При этом для соединения балки с колонной часто используют болтовые фланцевые соединения (ФС) [3; 4].

Болтовые фланцевые соединения (ФС) обладают пятью основными преимуществами, к которым относятся замена высококвалифицированной сборочной сварки простым монтажом болтов, монтаж в различных климатических условиях (включая низкие температуры), высокая надежность при действии динамических нагрузок, удобство контролирования качества монтажа и производства, возможность демонтажа без повреждения конструкции. Согласно норме EN1993-1-8¹, кривую зависимость между моментом и углом поворота ($M-\theta$) рекомендовано использовать в качестве основы про-

¹ EN 1993-1-8:2005: Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-8: Design of joints.

Guofeng Sun, Postgraduate student of the Department of Building Structures and Soil Mechanics, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, 19 Mira St, Ekaterinburg, 620062, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4032-1759, ORCID: 0000-0002-7535-1599; e-mail: guofeng.sun@mail.ru

Lyudmila I. Mironova, Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Technical Sciences, Professor of the Department of Building Structures and Soil Mechanics, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, 19 Mira St, Ekaterinburg, 620062, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1201-1155, ORCID: 0000-0002-3675-6008; e-mail: mironovali@urfu.ru

ектирования. Изгибная жесткость и несущая способность ФС являются ключевыми параметрами, определяющими зависимость $M-\theta$. В [5] авторы использовали компонентный метод для прогнозирования начальной изгибной жесткости и несущей способности ФС с разными ребрами жесткости, что позволило получить зависимость $M-\theta$. В [6] проведено упрощение процедуры проектирования для ФС высокой несущей способности за счет объединения метода The yield line theory с Т-образным элементом для проектирования ФС с более чем четырьмя болтами в зоне растяжения. Результаты работы [6] показали, что механические свойства высокопрочных ФС сложнее, чем у обычных. В [7] разработан метод расчета начальной жесткости ФС, основанный на трех механизмах разрушения Т-образных элементов. В [8] проведено экспериментальное исследование механических свойств Т-образных элементов в условиях циклических нагрузок. В [9] усовершенствована модель метода The yield line theory для расчета элементов на изгиб и разработана методика расчета несущей способности для Т-образных элементов, включающая пластическую деформацию. В [10; 11] предложен подход к проектированию пространственных стальных рам, основанный на изучении ФС, расположенных как вдоль сильной, так и вдоль слабой осей.

Однако в вышеописанных исследованиях не говорится об анализе работы целого стального каркаса. В ранее проведенных исследованиях [12–17] для стального каркаса также рассматривались характеристики узлов для оптимизации матрицы жесткости. В [12] представлен эффективный метод оптимизации для полужестких пространственных стальных конструкций, использующий передовой практический анализ в сочетании. В [13] сделана оптимизация проектирования полужестких пространственных стальных каркасов с использованием открытого интерфейса прикладного программирования MATLAB-SAP2000. Результаты работы [13] показали, что жесткость соединения играет важную роль в оптимизации стальных пространственных каркасов и влияет на вес конструкции. В [14–16] исследовано неупругое поведение пространственного стального каркаса второго порядка и проведен численный расчет для верификации. В [17] проведено компьютерное проектирование и анализ трехмерных стальных рам с полужесткими соединениями и выполнен нелинейный анализ, учитывающий влияние податливости соединений. Но в [12–17] отсутствует исследование влияния классификации соединения по жесткости на работоспособность стального каркаса.

Изучение зависимости между деформацией и распределением силы элементов соединения и торца балки позволяет разработать методику расчета поворота торца балки с учетом различных условий жесткости соединения, что позволит оптимизировать матрицу жесткости.

Объектом исследования является стальной каркас с болтовыми фланцевыми соединениями. Предмет исследования — механическая модель полужесткого стального каркаса. *Цель исследования* — разработка метода расчета стального каркаса с фланцевыми соединениями и выявление влияния перемещения узла на работу всего каркаса.

В данной работе применен компонентный метод, соответствующий норме EN1993-1-8 для исследования изгибной жесткости соединения ФС и прогнозирования линейной жесткости балок. На основе этого оценивается влияние механизма разрушения и жесткости соединения на механические характеристики целого каркаса. Проведено численное исследование для верификации точности и эффективности разработанной методики.

2. Методы

На рис. 1 показан процесс разделения ФС на несколько Т-образных элементов. В [18–23] Т-образный элемент используется для исследования общей работоспособности ФС.

В [7] разработана методика расчета начальной изгибной жесткости. В [7; 8; 24] подчеркивается, что к механизмам разрушения ФС относятся следующие три типа разрушений, показанные на рис. 2, со следующими характеристиками:

- во фланце полностью разрушен пластический шарнир (Type-1);
- разрушены болты при частичном разрушении пластического шарнира во фланце (Type-2);
- разрушены болты (Type-3).

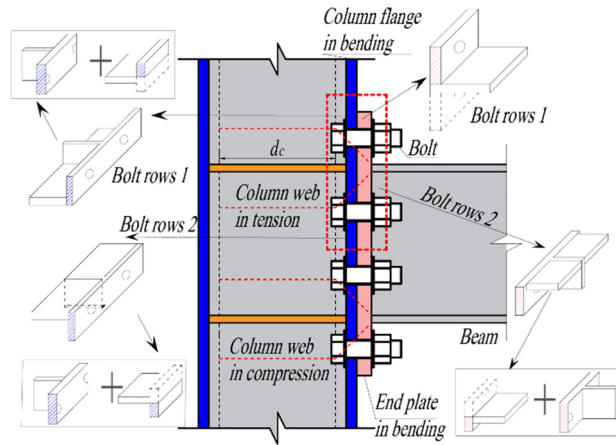


Рис. 1. Разделение ФС на несколько Т-образных элементов
И с т о ч н и к: выполнено Г. Сун.

Figure 1. Decomposition of bolted end-plate connections into T-stubs
S o u r c e: made by G. Sun.

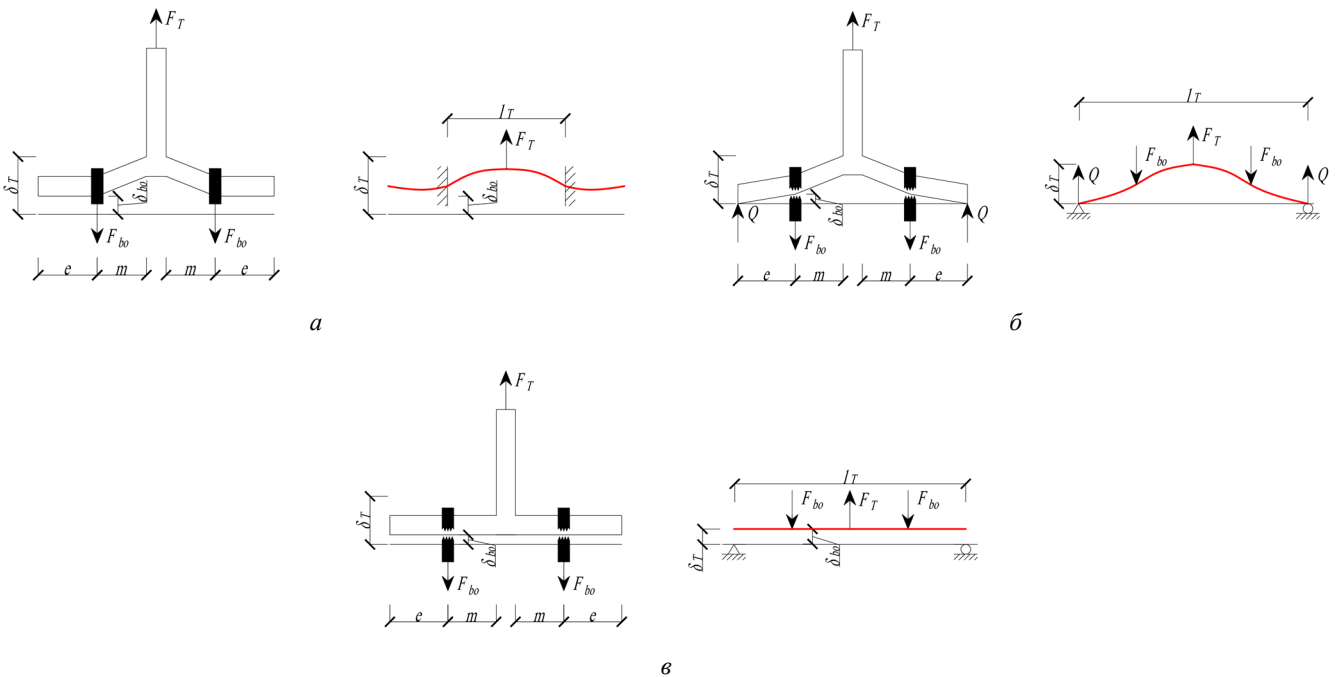


Рис. 2. Механическая модель Т-образного элемента [7]:
а — Type-1; б — Type-2; в — Type-3
И с т о ч н и к: выполнено Г. Сунь.

Figure 2. Failure modes of bolted T-stubs:
а — Type-1; б — Type-2; в — Type-3
S o u r c e: made by G. Sun.

В нормe EN1993-1-8 начальная изгибная жесткость S_{ini} определена по формулам:

$$S_{ini} = E_y h_b^2 k_{eq} / \mu_s, \quad (1)$$

$$\mu_s = \begin{cases} 1 & , M \leq M_y, \\ (M / M_y)^{2.7} & , M_y < M, \end{cases} \quad (2)$$

$$k_{eq} = \sum_i k_{eq,i} h_i / h_{eq}, \quad (3)$$

$$k_{eq,i} = 1 / \sum_j 1 / k_j, \quad (4)$$

$$h_{eq} = \sum_i k_{eq,i} h_i^2 / \sum_i k_{eq,i} h_i, \quad (5)$$

где M — момент, действующий на соединении; $M_y a$ — Type-1; b — Type-2; v — Type-3 — момент при текучести; $k_{eq} a$ — Type-1; b — Type-2; v — Type-3 — эквивалентный коэффициент жесткости целого соединения; $k_{eq,i}$ — эквивалентный коэффициент жесткости i -пары болтов; $k_j a$ — Type-1; b — Type-2; v — Type-3 — эквивалентный коэффициент жесткости j -элемента; $h_{eq} a$ — Type-1; b — Type-2; v — Type-3 — расчетное плечо; $h_i a$ — Type-1; b — Type-2; v — Type-3 — расстояние от i -пары болтов до нейтральной оси; $h_b a$ — Type-1; b — Type-2; v — Type-3 — высота балки; $\mu_s a$ — Type-1; b — Type-2; v — Type-3 — отношение пластической жесткости к начальной жесткости; $E_y a$ — Type-1; b — Type-2; v — Type-3 — модуль упругости.

В таблице приведены формулы для расчета начальной жесткости ФС [7].

Расчет начальной жесткости ФС / Initial stiffness calculation of each component

Элемент / Component	Формулы / Formula
Начальная жесткость зоны на растяжение / Initial rotational stiffness of area in tension	$S_{mi,t} = E_y h_t^2 / \left(\frac{1}{k_{bo}} + \frac{1}{k_{cw,t}} + \frac{1}{k_f} + \frac{1}{k_{cf}} \right) \quad (6)$
Начальная жесткость зоны на сжатие / Initial rotational stiffness of area in compression	$S_{mi,c} = E_y h_c^2 / \left(\frac{1}{k_{cw,c}} + \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k_{cf}} \right) \quad (7)$
Болт на растяжение / Bolt in tension	$k_{bo} = 8A_{bo} / l_{bo} \quad (8)$
Стенка колонны на растяжение / Column web in tension	$k_{cw,t} = 4A_{cw,t} / d_c \quad (9)$
Внешняя зона фланца на изгиб (Type-1) / External area of the end-plate in bending	$k_{p,1} = 1 / \left(\frac{m^3}{12I_p} + \frac{l_{bo}}{22A_{bo}} \right) \quad (10)$
Внешняя зона фланца на изгиб (Type-2) / External area of the end-plate in bending	$k_{p,2} = \frac{24I_p(a+q)}{l_T^3 a} \quad (11)$
Внешняя зона фланца на изгиб (Type-3) / External area of the end-plate in bending	$k_{p,3} = k_{bo} \quad (12)$
Внутренняя зона фланца на изгиб / Internal area of the end-plate in bending	$k_{p,i} = 12(I_{p,1}/m_1^3 + I_{p,2}/m_2^3) \quad (13)$

Примечание. $S_{mi,t}$ — начальная жесткость зоны на растяжение; $S_{mi,c}$ — начальная жесткость зоны на сжатие, соответственно; k_{bo} — коэффициент жесткости болта на растяжение; $k_{cw,t}$, $k_{cw,c}$ — коэффициент жесткости стенки колонны на растяжение и на сжатие, соответственно; k_p — коэффициент жесткости фланца на изгиб; k_{cf} — коэффициент жесткости полки колонны на изгиб; h_t — расстояние от полки колонны на растяжение до нейтральной оси; l_{bo} — удлинение болта; $A_{cw,t}$ — площадь поверхности растяжения стенки колонны при растяжении; I_p — момент инерции сечения фланца; m — расстояние от оси болта до поверхности полки балки; d_c — расчетная ширина стенки колонны, l_T — пролет Т-образного элемента; $I_{p,1}$, $I_{p,2}$ — момент инерции поперечного сечения двух Т-образных элементов в соответствии с m_1 и m_2 внутренней зоны фланца, показано на рис.3; m_1 , m_2 — расстояние от оси болтов до стенки Т-образного элемента; $k_{p,1}$, $k_{p,2}$, $k_{p,3}$ — коэффициент жесткости внешней зоны фланца в соответствии с тремя механизмами разрушения (Type-1, Type-2, Type-3); a , q — расчетные коэффициенты, определенные по формулам (14) и (15).

Note. $S_{mi,t}$ is the initial tensile stiffness of the zone; $S_{mi,c}$ — the initial compressive stiffness of the zone, k_{bo} is the tensile stiffness coefficient of the bolt; $k_{cw,t}$, $k_{cw,c}$ — the tensile and compressive stiffness coefficients of the column web, respectively; k_p is the bending stiffness coefficient of the end plate; k_{cf} — the bending stiffness coefficient of the column flange; h_t — the distance from the tensile column flange to the neutral axis; l_{bo} — the bolt elongation; $A_{cw,t}$ — the tensile surface area of the column web under tension; I_p — the moment of inertia of the flange section; m is the distance from the bolt axis to the beam flange surface; d_c is the design width of the column web; l_T — the span of the T-stubs; $I_{p,1}$, $I_{p,2}$ — moment of inertia of the cross-section of two T-stubs in accordance with m_1 and m_2 of the inner zone of the end plate, shown in Figure 3; m_1 , m_2 — distance from the axis of the bolts to the wall of the T-stubs; $k_{p,1}$, $k_{p,2}$, $k_{p,3}$ — stiffness coefficient of the outer zone of the flange in accordance with three destruction mechanisms (Type-1, Type-2, Type-3); a , q — design coefficients determined by formulas (14) and (15).

Источники: выполнено Г. Сунь / Source: made by G. Sun.

Формулы (14) и (15) используются для расчета коэффициентов a , q , приведенных в табл.:

$$q = l_T^3 (3\alpha_T - 4\alpha_T^3) / 24, \quad (14)$$

$$a = \frac{l_{bo}}{(1/I_p + 1/I_{cf}) A_{bo}}, \quad (15)$$

где $\alpha_T = e / l_T$ — коэффициент расчета Т-образного элемента; e — расстояние от оси болта до кромки фланца.

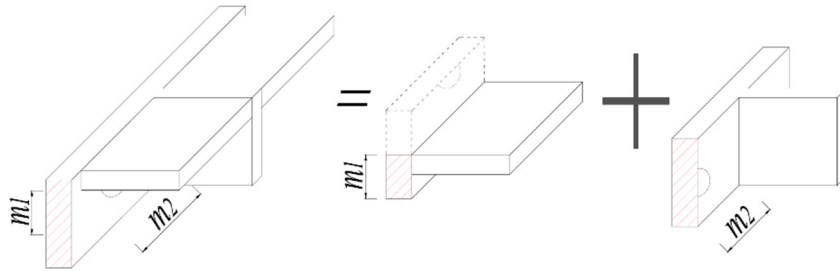


Рис. 3. Механическая модель внутренней зоны фланца

И источник: выполнено Г. Сунь.

Figure 3. Mechanical model of the inner end-plate zone

Source: made by G. Sun.

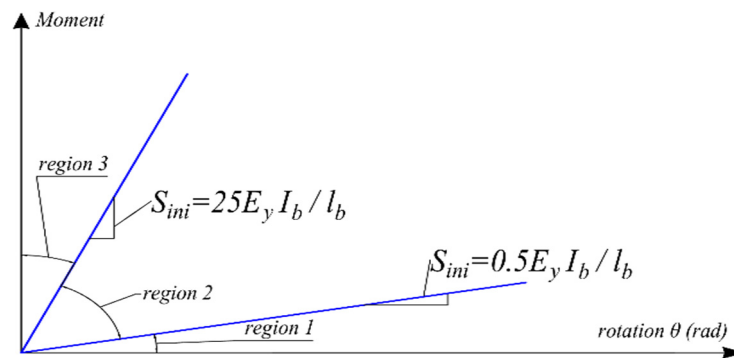


Рис. 4. Классификация соединения балки с колонной на основании нормы EN1993-1-8

И источник: выполнено Г. Сунь.

Figure 4. Node stiffness division of EN1993-1-8

Source: made by G. Sun.

Классификация соединения балки с колонной по жесткости, представленная в норме EN1993-1-8, показана на рис. 4, где выделены три отдельные области:

- область 1, жесткая;
- область 2, полужесткая, и все соединения в области 2 следует классифицировать как полужесткие;
- область 3, номинально шарнирное соединение.

На рис. 5 показаны перемещения торцов балки. Зависимость внутренней силы от смещения концов балки выражается формулой

$$[P] = [S_b][\Delta_b], \quad (16)$$

где $[P]$ — матрица сил; $[S_b]$ — матрица жесткости балки без учета поворота узла колонны с балкой; $[\Delta_b]$ — матрица перемещений двух торцов балки без учета поворота узла колонны с балкой.

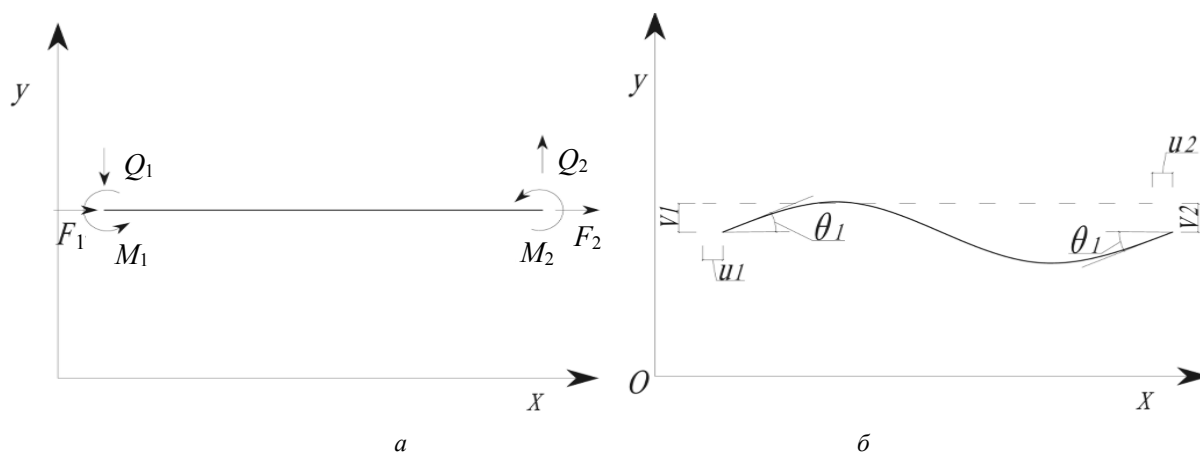


Рис. 5. Перемещения балки:
 а — нагрузка на торцах балки; б — перемещения на торцах балки
 Источник: выполнено Г. Сунь.

Figure 5. Beam displacements:
 а — load at beam ends; б — displacements at beam ends
 Source: made by G. Sun.

Матрица угла поворота стального каркаса определена по формуле

$$[\theta] = [\theta_b] + [\theta_c], \quad (17)$$

где $[\theta]$ — матрица общего угла поворота торца балочной модели; $[\theta_b]$ — матрица общего угла поворота торца балки; $[\theta_c]$ — матрица общего угла поворота узла колонны с балкой.

Матрица вертикальных перемещений торца балки определена по формуле

$$[v] = [v_b] + [v_c], \quad (18)$$

где $[v]$ — матрица перемещений от сдвига торца балочной модели; $[v_b]$ — матрица перемещений от сдвига торца балки без учета поворота узла колонны с балкой; $[v_c]$ — матрица общего угла поворота узла колонны с балкой с учетом поворота узла колонны с балкой.

Зависимость между моментом и перемещением определена по формуле

$$[M] = \frac{3}{l_b} S_b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} [v_b] + S_b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} [\theta_b], \quad (19)$$

где $[M]$ — матрица изгибающих моментов; S_b — удвоенная линейная жесткость балки, которая определена по формуле

$$S_b = 2E_y I_b / l_b, \quad (20)$$

где I_b — момент инерции балки; l_b — расчетный пролет балки.

Зависимость между моментом и поворотом узла балки с колонной определена по формуле

$$[M] = [S_c][\Delta_c] = \begin{pmatrix} S_{1c} & 0 \\ 0 & S_{2c} \end{pmatrix} [\theta_c], \quad (21)$$

где $[S_c]$ — матрица начальной жесткости соединений при изгибе; $[\Delta_c]$ — матрица поворота соединения; S_{1c} — начальная жесткость соединения при изгибе на левом торце балки; S_{2c} — начальная жесткость соединения при изгибе на правом торце балки.

Объединяя уравнения (19) и (21), получаем формулы:

$$\begin{pmatrix} S_{1c} & 0 \\ 0 & S_{2c} \end{pmatrix} [\theta_c] = \frac{3}{l_b} S_b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} [v_b] + S_b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} [\theta_b], \quad (22)$$

$$[S_\alpha] [\theta_c] = \frac{3}{l_b} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} [v] + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} [\theta], \quad (23)$$

где $[S_\alpha]$ — матрица, состоящая из коэффициентов α_i ; α_i — коэффициент относительной жесткости, $\alpha_i = S_{ic}/(S_b)$.

В этом случае $[S_\alpha]$ и $[S_\alpha]^{-1}$ выражаются по формулам, подобным (24)–(25):

$$[S_\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2 & 1 \\ 1 & \alpha_2 + 2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$[S_\alpha]^{-1} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \alpha_2 + 2 & -1 \\ -1 & \alpha_1 + 2 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где k — коэффициент связан с α_i , $k = (\alpha_1 + 2)(\alpha_2 + 2) - 1$.

Угол поворота соединения балки с колонной определена по формуле

$$[\theta_c] = [S_\alpha]^{-1} \frac{3}{l_b} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} [v] + [S_\alpha]^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} [\theta]. \quad (26)$$

Объединим формулы (21) и (26) и получим формулу (27) для определения зависимости между $[M]$ и $[\theta]$:

$$[M] = [S_c] [\Delta_c] = \frac{3S_b}{l_b k} \begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_2 + 1) & -\alpha_1(\alpha_2 + 1) \\ \alpha_2(\alpha_1 + 1) & -\alpha_2(\alpha_1 + 1) \end{pmatrix} [v] + \frac{S_b}{k} \begin{pmatrix} 2\alpha_1(\alpha_2 + 1,5) & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_2(\alpha_1 + 1,5) \end{pmatrix} [\theta]. \quad (27)$$

Кроме того, необходимо учитывать влияние θ на перемещение при сдвиге. Зависимость между вертикальной силой $[Q]$ и перемещением балки определена по формуле (28)

$$[Q] = \frac{6S_b}{l_b^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} [v_b] + \frac{3S_b}{l_b} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} [\theta_b]. \quad (28)$$

Объединим формулы (17) и (28) и получим формулы (29) и (30) для определения зависимости между $[Q]$ и $[\theta]$:

$$[Q] = \frac{6S_b}{l_b^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} [v_b] + \frac{3S_b}{l_b} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} ([\theta] - [\theta_c]), \quad (29)$$

$$[Q] = \frac{6S_b}{l_b^2} \left(1 - \frac{1,5(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)}{k} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} [v] + \frac{3S_b}{kl_b} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\alpha_2 + \alpha_1 + 3}{k} & 1 - \frac{2\alpha_1 + \alpha_2 + 3}{k} \\ -\left(1 - \frac{2\alpha_2 + \alpha_1 + 3}{k} \right) & -\left(1 - \frac{2\alpha_1 + \alpha_2 + 3}{k} \right) \end{pmatrix} [\theta]. \quad (30)$$

На основании вышеприведенного анализа получена матрица жесткости элементов балки (31), учитывающая деформации полужестких соединений, представляемая следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \overline{Q}_1 \\ \overline{M}_1 \\ \overline{Q}_2 \\ \overline{M}_2 \end{pmatrix} = S_b \begin{pmatrix} \frac{6}{l_b^2} a_{v,1} & \frac{3}{l_b} a_{\theta,1} & -\frac{6}{l_b^2} a_{v,2} & \frac{3}{l_b} a_{\theta,2} \\ \frac{3}{l_b} f_{v,1} & 2f_{\theta,1} & -\frac{3}{l_b} f_{v,2} & f_{\theta,2} \\ -\frac{6}{l_b^2} a_{v,1} & -\frac{3}{l_b} a_{\theta,1} & \frac{6}{l_b^2} a_{v,2} & -\frac{3}{l_b} a_{\theta,2} \\ \frac{3}{l_b} g_{v,1} & g_{\theta,1} & -\frac{3}{l_b} g_{v,2} & 2g_{\theta,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где $a_{v,1}, a_{v,2}, a_{\theta,1}, a_{\theta,2}, f_{v,1}, f_{v,2}, f_{\theta,1}, f_{\theta,2}, g_{v,1}, g_{v,2}, g_{\theta,1}, g_{\theta,2}$ — коэффициенты расчета, которые определены по формулам:

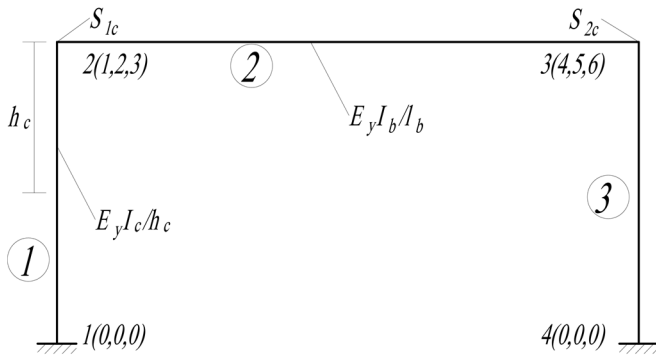


Рис. 6. Однопролетный стальной каркас
Источник: выполнено Г. Сунь.

Figure 6. Single-span steel frame
Source: made by G. Sun.

$$a_{v,1} = a_{v,2} = 1 - 1,5(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)/k; \quad (32)$$

$$a_{\theta,1} = 1 - (2\alpha_2 + \alpha_1 + 3)/k; \quad (33)$$

$$a_{\theta,2} = 1 - (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3)/k; \quad (34)$$

$$f_{v,1} = f_{v,2} = \alpha_1(\alpha_2 + 1)/k; \quad (35)$$

$$f_{\theta,1} = \alpha_1(\alpha_2 + 1,5)/k; \quad (36)$$

$$f_{\theta,2} = g_{\theta,1} = \alpha_1\alpha_2/k; \quad (37)$$

$$g_{v,1} = g_{v,2} = \alpha_2(\alpha_1 + 1)/k; \quad (38)$$

$$g_{\theta,2} = \alpha_2(\alpha_1 + 1,5)/k. \quad (39)$$

Для однопролетного стального каркаса, показанного на рис. 6, можно получить матрицу жесткости с учетом жесткости колонны

$$[S] = \begin{pmatrix} \frac{E_y A_b}{l_b} & \frac{E_y A_c}{h_c} & 0 & -\frac{E_y A_b}{l_b} & -\frac{E_y A_c}{h_c} & 0 \\ -\frac{6}{h_c^2} S_{co} & \frac{6}{l_b^2} a_{v,1} S_b & \frac{3}{l_b} a_{\theta,1} S_b + \frac{3}{h_c} S_{co} & \frac{6}{h_c^2} S_{co} & -\frac{6}{l_b^2} a_{v,2} S_b & \frac{3}{l_b} a_{\theta,2} S_b + \frac{3}{h_c} S_{co} \\ -\frac{3}{h_c} S_{co} & \frac{3}{l_b} f_{v,1} S_b & 2S_b f_{\theta,1} + 2S_{co} & \frac{3}{h_c} S_{co} & -\frac{3}{l_b} f_{v,2} S_b & f_{\theta,2} S_b + S_{co} \\ \frac{E_y A_b}{l_b} & -\frac{E_y A_c}{h_c} & 0 & \frac{E_y A_b}{l_b} & \frac{E_y A_c}{h_c} & 0 \\ \frac{6}{h_c^2} S_{co} & -\frac{6}{l_b^2} a_{v,1} S_b & -\frac{3}{l_b} S_b a_{\theta,1} + \frac{3}{h_c} S_{co} & -\frac{6}{h_c^2} S_{co} & \frac{6}{l_b^2} a_{v,2} S_b & -\frac{3}{l_b} a_{\theta,2} S_b - \frac{3}{h_c} S_{co} \\ -\frac{3}{h_c} S_{co} & \frac{3}{l_b} g_{v,1} S_b & S_b g_{\theta,1} + S_{co} & \frac{3}{h_c} S_{co} & -\frac{3}{l_b} g_{v,2} S_b & 2g_{\theta,2} S_b + 2S_{co} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где A_b — расчетная площадь поперечного сечения балки; A_c — расчетная площадь поперечного сечения колонны; h_c — расчетная высота колонны, S_{co} определена по формуле

$$S_{co} = 2E_y I_{co} / h_{co}, \quad (41)$$

где I_{co} — момент инерции поперечного сечения колонны.

В случае $S_{1c} = S_{2c}$ начальная изгибная жесткость однопролетного каркаса с учетом жесткости соединения $S_{g,b}$ определена по формуле

$$S_{g,b} = S_b (f_{\theta,1} - f_{\theta,2}) + S_{co}. \quad (42)$$

3. Результаты и обсуждение

В [25] проведено экспериментальное исследование однопролетного пространственного стального каркаса с ФС. На рис. 7 показана схема образца SF-1 и расположение нагрузок. В данном образце конструирование является симметричным, поэтому формула (41) может использоваться для расчета изгибной жесткости данного каркаса. Пролет каркаса — 1,5 м, высота колонны — 0,8 м. Профиль балки — 150×75×5×7 мм и профиль колонны 150×150×7×10 мм. Размер фланца — 250×100×14 мм. Диаметр болтов — M16 и класс болтов 10,9. Изгибная жесткость узла образца SF-1 составляет 8851 kN·m/rad. Несущая способность стального каркаса при текучести составляет 21,96 kN·m.

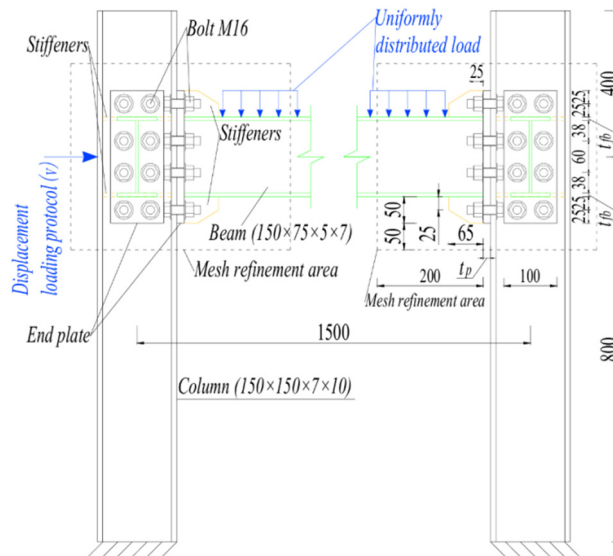


Рис. 7. Образец SF-1 из работы [15] и расположение нагрузок

Источник: выполнено Г. Сунь.

Figure 7. Specimen SF-1 from [15] and the location of the loads

Source: made by G. Sun.

Выполнен расчет вышеописанного стального каркаса. Расчетная начальная изгибная жесткость соединения S_c составляет 8749 kN·m/rad, и расчетная начальная изгибная жесткость торца балки стального каркаса с учетом жесткости соединения $S_{g,b}$ составляет 8991 kN·m/rad. Значение отношения изгибной жесткости, полученной в ходе эксперимента, к $S_{g,b}$ составляет 1,01, что позволяет утверждать, что использование разработанной методики обеспечивает точное прогнозирование изгибной жесткости стального каркаса с ФС.

На рис. 8, а, показана зависимость коэффициента жесткости фланца на изгиб k_p и толщиной фланца t_p , которая помогает определить механизм разрушения ФС. На рис. 8, б, показана зависимость α и t_p , которая указывает тип соединения. Из рис. 8, б, видно, что ФС является полужестким соединением в соответствии с критериями классификации, показанными на рис. 4.

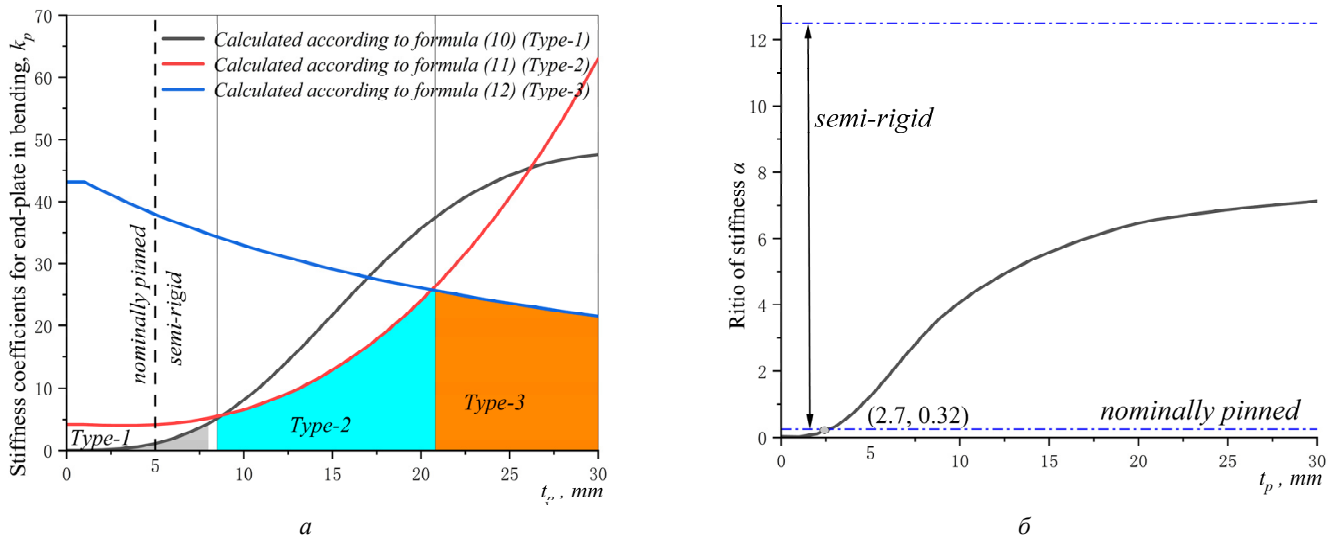


Рис. 8. Результаты расчета:
 а — зависимость k_p-t_p ; б — зависимость $\alpha-t_p$
 Источники: выполнено Г. Сунь.

Figure 8. Calculated results:
 а — curve k_p-t_p ; б — curve $\alpha-t_p$
 Source: made by G. Sun.

Линейная жесткость образца балки составляет $818 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$, жесткость колонны S_{co} — $7647 \text{ kN}\cdot\text{m/rad}$. На рис. 9 показана зависимость изгибной жесткости и t_p . В формуле (рис. 9) видно, что увеличение изгибной жесткости соединения S_c влияет на возрастание изгибной жесткости целого каркаса $S_{g,b}$ в случае, когда толщина фланца t_p расположена в диапазоне (0, 8,8), который соответствует ФС с первым механизмом разрушения (Type-1). Для образца SF-1 изгибная жесткость $S_{g,b}$ почти постоянна в случае, когда толщина фланца t_p расположена в диапазоне (8,8, 30), который соответствует ФС со вторым и третьим механизмами разрушения (Type-2 и Type-3). Это значит, что без учета фактора несущей способности ФС с толщиной фланца $t_p = 8,8 \text{ мм}$ и $\alpha = 3,66$ является самым эффективным решением с точки зрения изгибной жесткости. По результатам эксперимента несущая способность балки до развития пластической деформации составляет $21,96 \text{ kN}\cdot\text{м}$. С учетом безопасности соединения самым эффективным вариантом с точки зрения изгибной жесткости является ФС с толщиной фланца $t_p = 16,4 \text{ мм}$ и $\alpha = 5,85$, т.е. несущая способность соединения превышает несущую способность балки до развития пластической деформации при данном варианте. Из графиков (рис. 9) видно, что координаты в соответствии с ФС с $t_p = 8,8 \text{ мм}$ и $t_p = 16,4 \text{ мм}$ расположены в диапазоне второго механизма разрушения, поэтому рекомендуем применять соединения механизма разрушения Type-2 для стального каркаса.

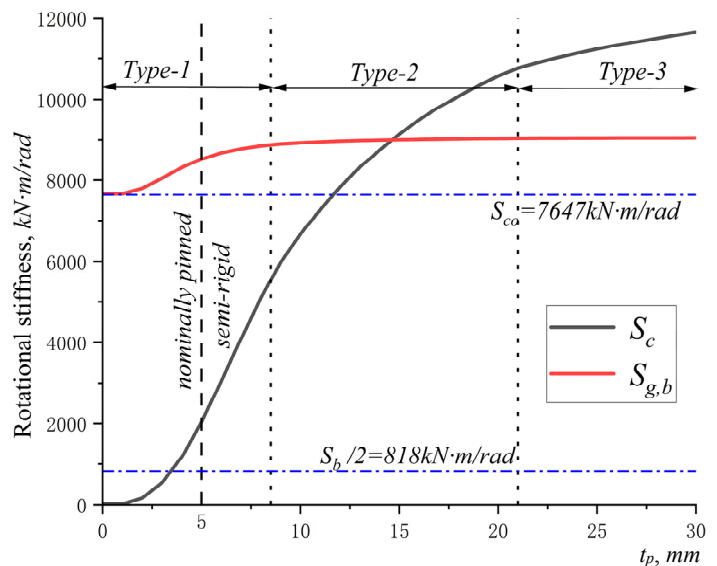


Рис. 9. Зависимость между толщиной фланца t_p и изгибной жесткости
 Источники: выполнено Г. Сунь.

Figure 9. Rotational stiffness and end-plate thickness curve
 Source: made by G. Sun.

4. Заключение

В исследовании представлено описание методики расчета жесткости стального каркаса с болтовыми фланцевыми соединениями с учетом поворота узла. Проанализировано влияние жесткости соединения на работоспособность целого каркаса. По результатам проведенного исследования можно сделать ряд выводов.

1. Использование разработанной методики позволяет точно прогнозировать изгибную жесткость стальных каркасов.

2. Разработанная методика может использоваться для определения механизма разрушения болтовых фланцевых соединений и типа соединения по жесткости.

3. Для стальных каркасов с болтовыми фланцевыми соединениями рекомендуется применять соединения механизма разрушения Type-2.

4. Для обеспечения работы целого каркаса и эффективного проектирования следует применять соединения с толщиной фланца $t_p = 16,4$ мм и $\alpha = 5,85$.

Список литературы

1. Li Q., Yue Q., Feng P., Xie N., Liu Y. Development status and prospect of steel structure industry based on carbon peak and carbon neutrality target // *Progress in Steel Building Structures*. 2022. Vol. 24. No. 4. P. 1–7. <https://doi.org/10.13969/j.cnki.cn31-1893.2022.04.001>
2. Данилов А.Н. Развитие отрасли стального строительства // *Промышленное и гражданское строительство*. 2021. № 10. С. 4–8. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2021.10.04-08> EDN: YEGQZK
3. Sun G.F., Mironova L.I. Reinforcement of end-plate connections under low cyclic loading // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2025. No. 116. Article no. 11603. <https://doi.org/10.4123/CUBS.116.3> EDN: XVUVHY
4. Hüseyin K., Gokhan S. Semi-Rigid connections in steel structures State-of-the-Art report on modelling, analysis and design // *Steel and Composite Structures*. 2022. Vol. 45. No. 1. P. 1–21. <https://doi.org/10.12989/scs.2022.45.1.001>.
5. Zhang Y., Wang M., Shi G. Parametric analysis and design method of bolted extended end-plate beam-column connections in portal frames retrofitted with prefabricated cover plate components // *Journal of Building Engineering*. 2025. Vol. 111. Article no. 113399. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2025.113399>
6. Liu X., Sha X., Guo C., Wang Y., Zhang Z. Simplified design methods of large-capacity moment end-plate connections // *Structures*. 2025. Vol. 78. Article no. 109095. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.109095>
7. Сунь Г., Миронова Л.И., Лю Ч. Изгибная жесткость болтовых фланцевых соединений балки с колонной // *Строительство и реконструкция*. 2025. Т. 117. № 1. С. 26–39. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2025-117-1-26-39> EDN: LNUUSN
8. Piluso V., Rizzano G. Experimental analysis and modelling of bolted T-stubs under cyclic loads // *Journal of Constructional Steel Research*. 2008. Vol. 64. No. 6. P. 655–669. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2007.12.009>
9. Özkılıç Y.O., Topkaya C. The plastic and the ultimate resistance of four-bolt extended end-plate connections // *Journal of Constructional Steel Research*. 2021. Vol. 181. Article no. 106614. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2021.106614> EDN: MSKFMB
10. Lu S., Chen H., Wang Z., Wang M. Exploration of the seismic behavior of full-scale steel frame with endplate connection based on component model // *Structures*. 2025. Vol. 81. Article no. 110245. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.110245>
11. Chen X., Liang Y., Li A., Dai Y., Yuan H. Structural performance of stainless steel frames with non-compact I-sections under monotonic loading // *Thin-Walled Structures*. 2025. Vol. 217. Article no. 113780. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2025.113780>
12. Truong V.H., Nguyen P.C., Kim S.E. An efficient method for optimizing space steel frames with semi-rigid joints using practical advanced analysis and the micro-genetic algorithm // *Journal of Constructional Steel Research*. 2017. Vol. 128. P. 416–427. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2016.09.013>
13. Artar M., Daloğlu A.T. Optimum weight design of steel space frames with semi-rigid connections using harmony search and genetic algorithms // *Neural Computing and Applications*. 2018. Vol. 29. P. 1089–1100. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2634-8> EDN: SOMRPE
14. Ngo-Huu C., Kim S.E., Oh J.R. Nonlinear analysis of space steel frames using fiber plastic hinge concept // *Engineering Structures*. 2007. Vol. 29. P. 649–657. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.06.008>
15. Ngo-Huu C., Nguyen P.C., Kim S.E. Second-order plastic-hinge analysis of space semi-rigid steel frames // *Thin-Walled Structures*. 2012. Vol. 60. P. 98–104. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.06.019>

16. Kim S.E., Lee D. H. Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames // *Engineering Structures*. 2002. Vol. 24. No. 6. P. 735–744. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00136-5](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00136-5)
17. Sagiroglu M., Abdulkadir C.A. Design and analysis of non-linear space frames with Semi-rigid connections // *Steel and Composite Structures*. 2015. Vol. 18. No. 6. P. 1405–1421. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.18.6.1405>
18. Шафрай С.Д. Влияние конструктивно-технологической формы фланцевого соединения на его работоспособность // *Известия вузов. Строительство*. 2012. № 9. С. 92–100. EDN: PYYPXN
19. Шафрай К.А., Шафрай С.Д. Особенности работы фланцевых соединений архитектурно-строительных конструкций. Внецентренное растяжение болтов // *Известия вузов. Строительство*. 2013. № 7. С. 84–92. EDN: PUMYSJ
20. Шафрай К.А., Шафрай С.Д. Особенности работы фланцевых соединений архитектурно-строительных конструкций. Контактные напряжения и рычажные силы // *Известия вузов. Строительство*. 2013. № 11–12. С. 89–96. EDN: SAWVCV
21. Шафрай К.А., Шафрай С.Д. Особенности архитектурного конструирования фланцевых соединений // *Региональные архитектурно-художественные школы*. 2014. № 1. С. 148–154. EDN: PUMYSJ
22. Шафрай К.А., Шафрай С.Д. Прочность сварных швов фланцевых соединений стальных конструкций // *Известия вузов. Строительство*. 2018. № 8. С. 36–47. EDN: YSFVHN
23. Shafray K., Shafray S. Work flange connections of structural elements of an open profile on high-strength bolts // *Journal of Physics Conference Series*. 2019. No. 1. Article no. 012072. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012072> EDN: VYACXC
24. Перельмутер А.В., Крискунов Э.З., Юрченко В.В. Проектирование болтовых фланцевых соединений согласно Eurocode и украинским нормам: согласованность и противоречия // *Металлические конструкции*. 2010. Т. 16. № 2. С. 93–104. EDN: MUVVGT
25. Lu S., Wang Z., Pan J., Wang P. The seismic performance analysis of semi-rigid spatial steel frames based on moment-rotation curves of end-plate connection // *Structures*. 2022. Vol. 36. P. 1032–1049. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.12.064> EDN: HYCLEP

References

1. Li Q., Yue Q., Feng P., Xie N., Liu Y. Development status and prospect of steel structure industry based on carbon peak and carbon neutrality target. *Progress in Steel Building Structures*. 2022;24(4):1–7. <https://doi.org/10.13969/j.cnki.cn31-1893.2022.04.001>
2. Danilov A.N. Steel construction development. *Industrial and Civil Engineering*. 2021;10:4–8. (In Russ.) <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2021.10.04-08>
3. Sun G.F., Mironova L.I. Reinforcement of end-plate connections under low cyclic loading. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2025;116:11603. <https://doi.org/10.4123/CUBS.116.3> EDN: XVUVHY
4. Hüseyin K., Gokhan S. Semi-Rigid connections in steel structures State-of-the-Art report on modelling, analysis and design. *Steel and Composite Structures*. 2022;45(1):1–21. <https://doi.org/10.12989/scs.2022.45.1.001>
5. Zhang Y., Wang M., Shi G. Parametric analysis and design method of bolted extended end-plate beam-column connections in portal frames retrofitted with prefabricated cover plate components. *Journal of Building Engineering*. 2025;111:113399. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2025.113399>
6. Liu X., Sha X., Guo C., Wang Y., Zhang Z. Simplified design methods of large-capacity moment end-plate connections. *Structures*. 2025;78:109095. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.109095>
7. Sun G., Mironova L.I., Liu C. Bending rigidity of bolt end-plate connections of joint beam to column. *Building and Reconstruction*. 2025;1:26–39. (In Russ.) <https://doi.org/10.4123/CUBS.116.3> EDN: LNUUSN
8. Piluso V., Rizzano G. Experimental analysis and modelling of bolted T-stubs under cyclic loads. *Journal of Constructional Steel Research*. 2008;64(6): 655–669. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2007.12.009>
9. Özkılıç Y.O., Topkaya C. The plastic and the ultimate resistance of four-bolt extended end-plate connections. *Journal of Constructional Steel Research*. 2021;181:106614. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2021.106614> EDN: MSKFMB
10. Lu S., Chen H., Wang Z., Wang M. Exploration of the seismic behavior of full-scale steel frame with endplate connection based on component model. *Structures*. 2025;81:110245. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.110245>
11. Chen X., Liang Y., Li A., Dai Y., Yuan H. Structural performance of stainless steel frames with non-compact I-sections under monotonic loading. *Thin-Walled Structures*. 2025;217:113780. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2025.113780>
12. Truong V.H., Nguyen P.C., Kim S.E. An efficient method for optimizing space steel frames with semi-rigid joints using practical advanced analysis and the micro-genetic algorithm. *Journal of Constructional Steel Research*. 2017;128: 416–427. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2016.09.013>
13. Artar M., Daloğlu A.T. Optimum weight design of steel space frames with semi-rigid connections using harmony search and genetic algorithms. *Neural Computing and Applications*. 2018;29:1089–1100. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2634-8> EDN: SOMRPE

14. Ngo-Huu C., Kim S.E., Oh J.R. Nonlinear analysis of space steel frames using fiber plastic hinge concept. *Engineering Structures*. 2007;29:649–657. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.06.008>
15. Ngo-Huu C., Nguyen P.C., Kim S.E., Kim S.E. Second-order plastic-hinge analysis of space semi-rigid steel frames. *Thin-Walled Structures*. 2012;60:98–104. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.06.019>
16. Kim S.E., Lee D.H. Second-order distributed plasticity analysis of space steel frames. *Engineering Structures*. 2002;24(6):735–744. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00136-5](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00136-5)
17. Sagiroglu M., Abdulkadir C.A. Design and analysis of non-linear space frames with Semi-rigid connections. *Steel and Composite Structures*. 2015;18(6):1405–1421. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.18.6.1405>
18. Shafray S. The influence constructive-technological form of the flanged connection on his capacity to work. *News of higher educational institutions. Construction*. 2012;9:92–100. (In Russ.) EDN: PYYPXN
19. Shafray K., Shafray S. Features the work of flanged connections architectural and building structures. vnecentrennoe tensile bolts. *News of higher educational institutions*. 2013;7:84–92. (In Russ.) EDN: PUMYSJ
20. Shafray K., Shafray S. Features the work of flanged connections for building structures. Contact pressure and prying forces. *News of higher educational institutions*. 2013;11-12:89–96. (In Russ.) EDN: SAWVCV
21. Shafray K., Shafray S. Features of architectural design of flanged joints. *Regional architectural and art schools*. 2014;1:148–154. (In Russ.) EDN: PUMYSJ
22. Shafray K., Shafray S. Strength of welds flanges steel structures. *News of higher educational institutions*. 2018; 8:36–47. EDN: YSFVHN
23. Shafray K., Shafray S. Work flange connections of structural elements of an open profile on high-strength bolts. *Journal of Physics Conference Series*. 2019;1:012072. (In Russ.) <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012072> EDN: VYACXC
24. Perelmuter A.V., Kriskunov E.Z., Yurchenko V.V. Design of flange bolt connections according to the Eurocode and Ukrainian codes: Coordination and contradictions. *Metal constructions*. 2010;16(2):93–104. (In Russ.) EDN: MUVVGT
25. Lu S., Wang Z., Pan J., Wang P. The seismic performance analysis of semi-rigid spatial steel frames based on moment-rotation curves of end-plate connection. *Structures*. 2022;36:1032–1049. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.12.064>