



DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-5-462-473

EDN: DFDCNF

Научная статья / Research article

## Численное моделирование формоизменения гибких стержней

**П.П. Гайджуров<sup>✉</sup>, Н.Б. Даник<sup>✉</sup>, А.В. Климух<sup>✉</sup>**

Донской государственный технический университет (ДГТУ), Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ gpp-161@yandex.ru

Поступила в редакцию: 20 июня 2025 г.

Доработана: 15 сентября 2025 г.

Принята к публикации: 1 октября 2025 г.

**Аннотация.** Объект исследования — гибкие стержни, испытывающие в процессе нагружения большие перемещения и малые деформации. Цель исследования — численный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) гибких стержней с учетом геометрической нелинейности в трехмерной постановке. В качестве математического аппарата использован метод конечных элементов в форме метода перемещений. Процесс формоизменения стержня моделировался путем инкрементального нагружения в сочетании с перестроением геометрии модели с учетом полученных перемещений. Стержень моделировался набором прямолинейных балочных конечных элементов, соединенных в смежных узлах линейными и поворотными комбинированными элементами с переменной жесткостью. Для проведения вычислительных экспериментов написаны и верифицированы макросы на языке APDL, встроенного в программный комплекс ANSYS Mechanical. Выполнены вычислительные эксперименты с применением конечно-элементных моделей с упругими шарнирными вставками и без шарнирных вставок. На основании полученных результатов установлено, что предлагаемый прямой инкрементальный алгоритм решения геометрически нелинейных задач строительной механики является абсолютно сходящимся. Разработанная методика назначения жесткостей поворотных пружин может быть использована при моделировании пространственных кинематически изменяемых стержневых систем.

**Ключевые слова:** гибкие стержни, метод конечных элементов, геометрическая нелинейность, прямой инкрементальный метод

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов:** Гайджуров П.П. — научное руководство; формализация математической модели; написание исходного текста статьи; формулировка выводов; Даник Н.Б. — выполнение вычислительных экспериментов; обзор литературы по теме исследования; практические рекомендации по расчетам; Климух А.В. — обзор литературы; подготовка исходных данных; обработка результатов моделирования, оформление рисунков. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность редакции за рекомендации, позволившие повысить качество статьи.

**Для цитирования:** Гайджуров П.П., Даник Н.Б., Климух А.В. Численное моделирование формоизменения гибких стержней // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 5. С. 462–473. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-462-473> EDN: DFDCNF

---

**Гайджуров Пётр Павлович**, советник РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики и теории сооружений, Донской государственный технический университет, Российская Федерация, 344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; eLIBRARY SPIN-код: 6812-9718, ORCID: 0000-0003-3913-9694; e-mail: gpp-161@yandex.ru

**Даник Никита Борисович**, аспирант кафедры строительной механики и теории сооружений, Донской государственный технический университет, Российская Федерация, 344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; ORCID: 0009-0007-3766-6913; e-mail: danik3777@mail.ru

**Климух Александр Витальевич**, аспирант кафедры строительной механики и теории сооружений, Донской государственный технический университет, Российская Федерация, 344010, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; ORCID: 0009-0001-8844-2123; e-mail: sancho.klimukh.96@mail.ru

© Гайджуров П.П., Даник Н.Б., Климух А.В., 2025

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

## Numerical Modeling of Change of Shape of Flexible Bars

Peter P. Gaidzhurov<sup>✉</sup>, Nikita B. Danik<sup>✉</sup>, Alexander V. Klimukh<sup>✉</sup>

Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don, Moscow, Russian Federation

✉ gpp-161@yandex.ru

Received: June 20, 2025

Revised: September 15, 2025

Accepted: October 1, 2025

**Abstract.** Flexible bars experiencing large displacements and small strains during loading are investigated. The purpose of the study: numerical analysis of the stress-strain state of flexible bars, taking into account geometric nonlinearity in a three-dimensional formulation. The displacement-based finite element method is used as the mathematical framework. The process of shape changing of the bar was modeled by incremental loading in combination with the restructuring of the geometry of the model, taking into account the resulting displacements. The bar was modeled using rectilinear beam finite elements connected at adjacent nodes by linear and rotational combined elements with variable stiffness. To conduct computational experiments, macros in the APDL language, embedded in the ANSYS Mechanical software, were written and verified. Numerical experiments were performed using finite element models with elastic hinges and without hinges. Based on the results obtained, it is established that the proposed direct incremental algorithm for solving geometrically nonlinear problems of structural mechanics is absolutely convergent. The developed method of defining the stiffness of rotational springs can be used in modeling spatial unstable frames.

**Keywords:** flexible bars, finite element method, geometric nonlinearity, direct incremental method

**Conflicts of interest.** The authors declare no conflict of interest.

**Authors' contribution:** Gaidzhurov P.P. — scientific guidance; formalization of the mathematical model; writing the source text of the article; formulation of conclusions; Danik N.B. — performing computational experiments; literature review on the research topic; practical recommendations on calculations; Klimukh A.V. — literature review; preparation of initial data; processing of modeling results, design of drawings. All authors read and approved the final version of the article.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность редакции за рекомендации, позволившие повысить качество статьи.

**For citation:** Gaidzhurov P.P., Danik N.B., Klimukh A.V. Numerical modeling of change of shape of flexible bars. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(5):462–473. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-462-473>  
EDN: DFDCNF

### 1. Введение

Упругие гибкие стержни, обладающие изгибной жесткостью, находят широкое применение в расчетных схемах газопроводов, несущих канатов большепролетных висячих мостов, трансмиссионных валов различного назначения, приводов измерительных приборов, пространственных строительных конструкций [1–3]. Конечно-элементное моделирование пространственных стержневых систем базируется на использовании матрицы жесткости балочного конечного элемента (КЭ) с шестью степенями свободы в узле<sup>1</sup> [4]. Как правило, при линейном анализе перемещения углы поворота балочного КЭ считаются малыми. Вместе с тем при расчете гибких стержней имеют место большие линейные и угловые перемещения при малых деформациях [5; 6]. В этом случае численное решение геометрически нелинейной задачи строится на базе итерационной процедуры Ньютона — Рафсона и метода «корректирующих дуг», суть последнего состоит в аддитивной корректировке величины шага нагрузления при приближении и после прохождения точки «бифуркации» [7–10]. Следует отметить, что при расчете стержневой системы методом конечных элементов с учетом больших переме-

<sup>1</sup> Мяченков В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов : справочник. Москва : Машиностроение, 1989. 520 с.

**Peter P. Gaidzhurov**, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 6812-9718, ORCID: 0000-0003-3913-9694; e-mail: gpp-161@yandex.ru

**Nikita B. Danik**, Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation; ORCID: 0009-0007-3766-6913; e-mail: danik3777@mail.ru

**Alexander V. Klimukh**, Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics and Theory of Structures, Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation; ORCID: 0009-0001-8844-2123; e-mail: sancho.klimukh.96@mail.ru

щений используется касательная матрица жесткости. Общепринятый подход к построению данной матрицы в лагранжевых координатах базируется на минимизации потенциала энергии деформации дискретной модели [11]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_m} = f_m(u_1, u_2, \dots, u_N) = 0, \quad (1 \leq m \leq N),$$

где  $\Pi$  — потенциальная энергия деформации;  $u_1, u_2, \dots, u_N$  — обобщенные перемещения. В результате линеаризованная (касательная) матрица жесткости конструкции получает вид

$$[K'] = \left[ \sum_{n=1}^N \frac{\partial f_m(u_1, u_2, \dots, u_N)}{\partial u_n} \Bigg|_{\{u\}=\{u^0\}} \right].$$

При этом рекуррентная формула Ньютона — Рафсона принимает форму

$$[K']\{\Delta u\} + \{f\} = 0, \quad \{u^{(n+1)}\} = \{u^{(n)}\} + \{\Delta u^{(n)}\} = \{u^{(n)}\} - [K'_{(n)}]^{-1} \{f^{(n)}\},$$

где  $\{f\}$  — вектор обобщенных сил.

В [7] для минимизации потенциала энергии деформации применено следующее уравнение (использованы ранее принятые обозначения):

$$\left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \{u\}^2} \right] \Delta \{u\} + \frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = \{f\}^{(e)}.$$

Отмечается, что в структуре приведенного уравнения первое слагаемое является аналогом матрицы жесткости КЭ, а второе слагаемое представляет собой корректирующую составляющую для вектора узловых сил. Вычисление касательной матрицы жесткости КЭ сводится к двукратному дифференцированию энергии деформаций по обобщенным перемещениям, а вычисление корректирующей составляющей вектора упругих сил КЭ — к соответствующему однократному дифференцированию.

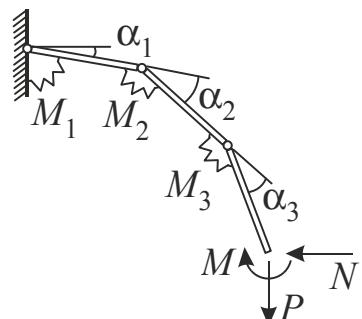
Следует отметить, что при численных расчетах гибких стержней в геометрически нелинейной постановке активизируется одновременно учет больших поворотов и уменьшение жесткости, обусловленное формоизменением [9; 10].

Альтернативным упрощенным методом расчета гибких упругих стержней является представление стержня набором прямолинейных балочных КЭ одинаковой длины, соединенных пружинами. Пример балочно-пружинной схемы консольного стержня показан на рис. 1<sup>2</sup>.

Полагается, что между узловым моментом  $M_i$  и соответствующим углом поворота  $\alpha_i$  существует линейная зависимость

$$M_i = k \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий в данном случае жесткость поворотной пружины. Для расчета гибких стержней в двумерной постановке<sup>3</sup> использован следующий функционал:



**Рис. 1.** Балочно-пружинная схема гибкого стержня

Источник: автор В.И. Усюкин.

**Figure 1.** Beam-spring diagram of a flexible bar

Source: author V.I. Usyukin.

<sup>2</sup> Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники : учебник для студентов вузов. Москва : Машиностроение, 1988. 392 с. ISBN 5-217-00147-X

$$\Theta = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} dx - \sum_i (M_i \alpha_i)_{x=x_i} + \Pi.$$

При этом считается, что жесткость поворотных пружин прямо пропорциональна изгибной жесткости стержня.

В [12] на базе концепции локальности линейных перемещений и ортогональности виртуальных углов поворотов стержневого КЭ представлена методика конечно-элементного моделирования гибких составных балок, подвергающихся значительным статическим и динамическим деформациям. Отмечается, что разработанный конечный элемент позволяет с высокой точностью учесть геометрическую нелинейность в сочетании с начальной погибью составной балочной конструкции. Алгоритм построения матрицы жесткости балочного конечного элемента трубчатого сечения, основанный на гипотезе Эйлера — Бернулли, в сочетании с аппроксимациями перемещений с помощью полиномов Эрмита предложен в [13]. Для учета геометрической нелинейности введен тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа и тензор деформаций Грина — Лагранжа.

Для решения задач механики оболочек с учетом конечных перемещений В.З. Власов<sup>4</sup> разработал метод последовательных нагрузений. Суть метода состоит в последовательном нагружении конструкции внешними силами, подобранными таким образом, чтобы на каждом шаге перемещения и углы поворота оставались малыми. В дальнейшем этот метод В.А. Светлицкий [6] распространил на криволинейные линейно упругие гибкие стержни. В [14] приведен вариант метода последовательных нагрузений для решения плоских задач механики гибких стержней. Здесь же отмечается, что данный подход может быть распространен и на пространственные стержни со сложной геометрией.

Оригинальный метод конечно-элементного моделирования стержневых систем в условиях больших перемещений и углов поворота предложен в [15]. Данный метод, названный метод материальной точки (Material Point Method), базируется на построении уравнения состояния механической системы, обладающей существенной геометрической нелинейностью, в гибридных лагранжево-эйлеровых координатах. При этом геометрия модели задается в лагранжевых (материальных) координатах, а уравнение движения решается с использованием фиксированной эйлеровой (фоновой) координатной сетки.

В [16] разработана 2D-модель ферменной конструкции, состоящей из упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота. Отмечается, что формоизменение ферменной конструкции из начального положения в конечное рабочее осуществляется с помощью кинематического воздействия, имитирующего трос с изменяемой длиной.

Постановка задачи контактного взаимодействия деформируемых строительных конструкций с учетом трения при сдвиге рассмотрена в [17]. Предлагаемый подход базируется на шаговом алгоритме Лемке в виде метода перемещений.

Резюмируя, можно отметить, что рассмотренные способы численного анализа НДС гибких стержней не позволяют выполнить моделирование процесса формоизменения пространственной конструкции с регулярной решетчатой структурой при управляемом кинематическом воздействии. Для конечно-элементного моделирования таких конструкционных решений требуется разработка принципиально нового подхода, базирующегося на концепции универсальной дискретно стержневой схемы с упруго-шарнирными узловыми соединениями.

В качестве *объекта настоящего исследования* в общем случае рассмотрен пространственный гибкий стержень в условиях больших перемещений, сопровождающихся малыми деформациями. Цель исследования — разработка линейно упругой механико-математической модели геометрически нелинейного формоизменения исходной геометрии гибкого стержня на основе модифицированного ме-

<sup>3</sup> Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники : учебник для студентов вузов. Москва : Машиностроение, 1988. 392 с. ISBN 5-217-00147-X

<sup>4</sup> Власов В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек. Т. 1. Москва : Изд-во Академии наук СССР, 1962. 528 с.

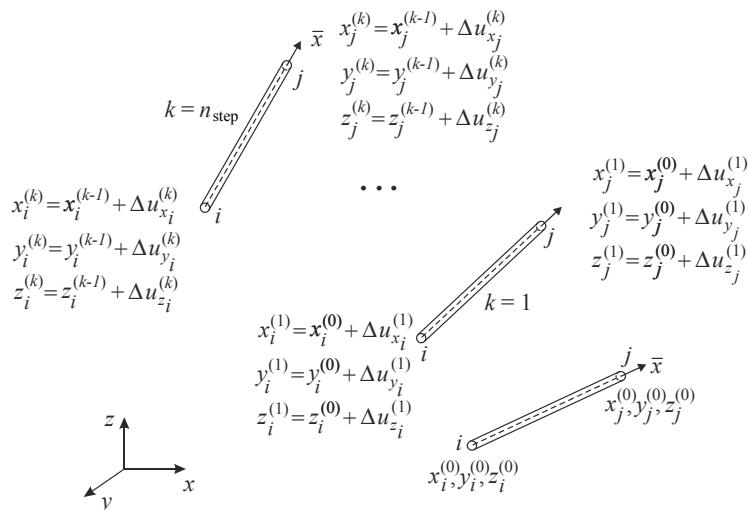
тода Лагранжа, суть которого состояла в пошаговом перестроении конечно-элементной сетки с учетом полученных инкрементальных перемещений. В задаче исследования входило построение балочно-пружинной механической модели путем введения в смежных узлах дискретной стержневой модели трехмерных блоков из комбинированных конечных элементов в виде линейных и поворотных пружин; написание и отладка макроса на языке APDL программного комплекса ANSYS Mechanical<sup>5</sup>, позволяющего удалять и заново строить конечно-элементную сетку с сохранением исходной топологии модели; тарирование жесткостей комбинированных элементов; решение тестовых задач.

## 2. Метод исследования

Конечно-элементное моделирование линейно упругой деформации гибкого стержня с учетом больших перемещений при статическом нагружении выполнялось в среде программного комплекса ANSYS Mechanical. Стержень разбивался на пространственные (3D) двухузловые балочные конечные элементы. В дальнейшем были рассмотрены две конечно-элементные модели узловых соединений: обычная модель, связывающая узловые перемещения и углы поворота смежных КЭ, и модель, в которой балочные элементы соединялись в смежных узлах с помощью комбинированных (пружинных) КЭ. Процесс трансформации формы стержня из исходного состояния в конечное представлялся в виде последовательности шагов. На каждом шаге выполнялась коррекция и перестроение геометрии сетки с учетом полученных перемещений на предыдущем шаге. При перестроении исходная топологическая информация модели полностью сохранялась. В общем случае координаты в узлах  $i$  и  $j$  КЭ на  $k$ -м шаге нагрузления вычислялись по формулам (рис. 2):

$$x_s^{(k)} = x_s^{(k-1)} + \Delta u_{x_s}^{(k)}, \quad y_s^{(k)} = y_s^{(k-1)} + \Delta u_{y_s}^{(k)}, \quad z_s^{(k)} = z_s^{(k-1)} + \Delta u_{z_s}^{(k)}, \quad s=i, j.$$

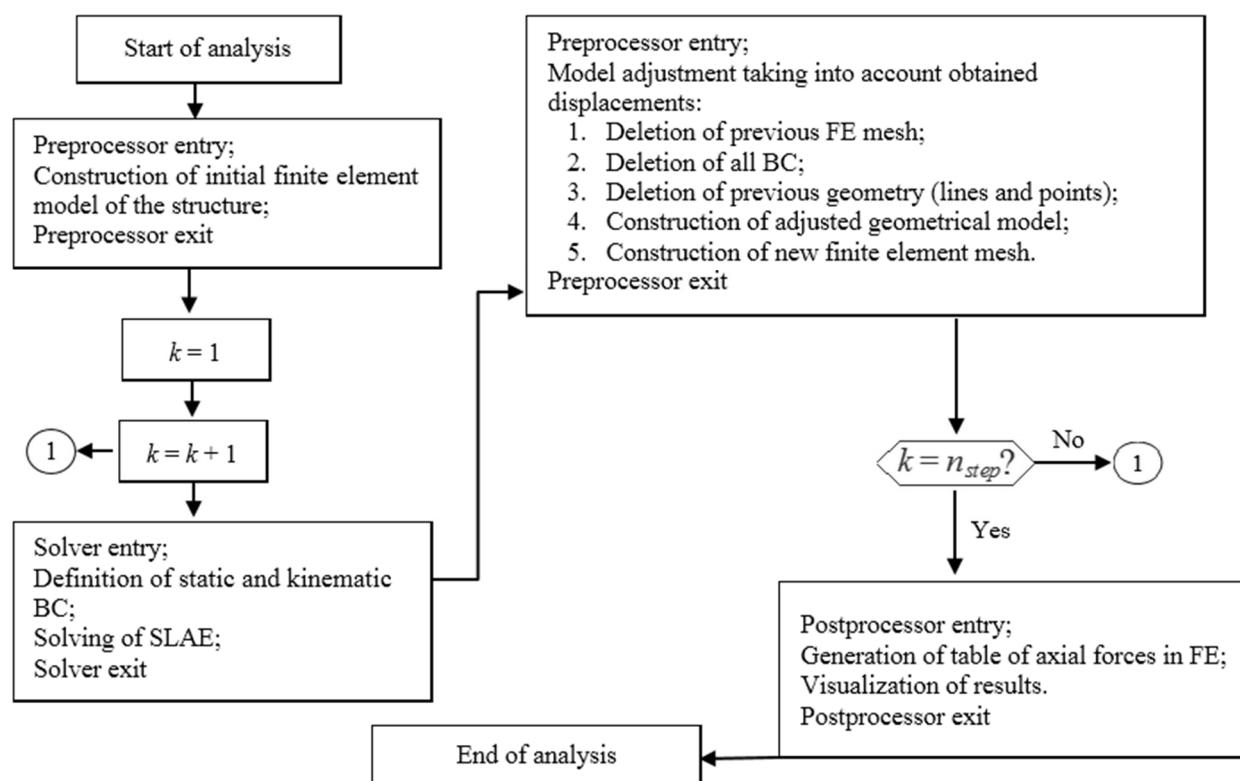
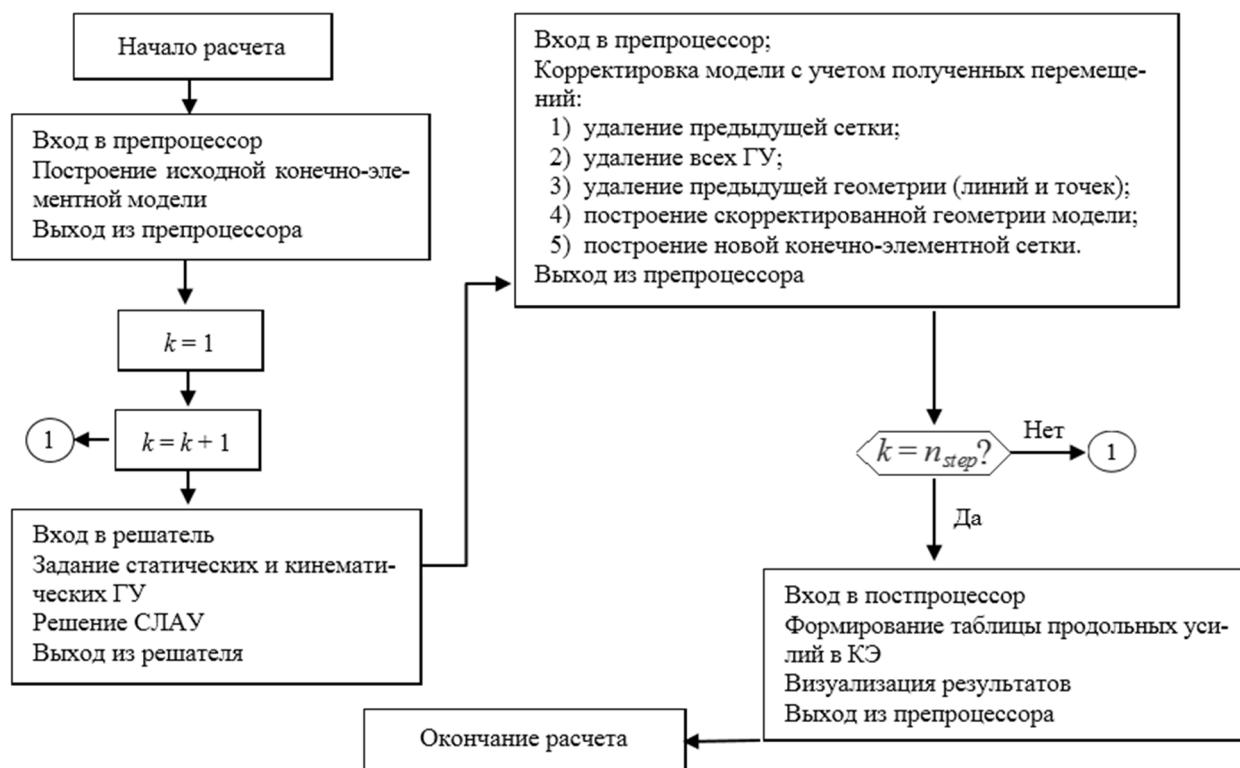
Для написания макросов использовался язык программирования APDL, встроенный в ANSYS. Блок-схема макроса, реализующего инкрементальное нагружение и коррекцию узловых перемещений КЭ, представлена на рис. 3.



**Рис. 2.** Схема трансформации геометрии балочного КЭ ( $n_{\text{step}}$  — число шагов нагружения)  
Источник: выполнено П.П. Гайджуроевым.

**Figure 2.** The diagram of transformation of the geometry of the beam finite element  
( $n_{\text{step}}$  — the number of loading steps)  
Source: made by P.P. Gaidzhurov.

<sup>5</sup> ANSYS Mechanical APDL Tutorials. URL: <http://www.worldcolleges.info/sites/default/files/me1.pdf> (accessed: 21.04.2025).



**Figure 3.** Flow diagram of the macro for calculating bars, taking into account geometry adjustments:  
BC — boundary conditions; SLAE — system of linear algebraic equations

Source: made by P.P. Gaidzhurov.

Главным недостатком предлагаемого подхода к конечно-элементному моделированию формоизменения гибкого стержня является то, что при таком анализе НДС не учитываются осевые повороты (вращение) балочных элементов «как жесткое целое». Вместе с тем разработанный прямой инкрементальный метод расчета гибких стержней в силу своего детерминизма является, безусловно, сходящимся.

### 3. Результаты и обсуждение

С целью валидации разработанной математической модели формоизменения гибкого стержня, а также оценки сходимости предлагаемого вычислительного алгоритма, базирующегося на инкрементальной схеме процесса нагружения и соответствующем перестроении конечно-элементной сетки, решены тестовые примеры.

**Пример 1.** Расчет консольного стержня, загруженного на свободном конце сосредоточенной силой. Исходные данные: длина консоли  $l = 1$  м; квадратное поперечное сечение со стороной  $a = 0,01$  м; величина сосредоточенной силы  $F = 0,04167$  Н. Полагалось, что в процессе деформирования консоли направление силы не изменяется. Для конечно-элементного моделирования использовался про-

странственный балочный КЭ с шестью степенями свободы в узле. Рассматривались две конечно-элементные модели консоли: 1 — разбивка на «стандартные» прямолинейные КЭ одинаковой длины; 2 — разбивка на недеформируемые прямолинейные КЭ одинаковой длины. Для обеих моделей смежные узлы КЭ соединялись с помощью упругих шарниров (рис. 4). Модули упругости материала балочного КЭ для первой и второй моделей:

$E^{(1)} = 10^7$  Н/м<sup>2</sup> и  $E^{(2)} = 10^{15}$  Н/м<sup>2</sup>. Значения жесткостей упругих шарниров (рис. 4):

$$k_{x,z} = 1.0 \text{ Н/м};$$

$$k_y = 10^7 \text{ Н/м};$$

$$\tilde{k}_{x,y} = 1.0 \text{ Н·м/рад};$$

для 4 КЭ  $\tilde{k}_z = 0.03333 \text{ Н·м/рад}$ ;

для 8 КЭ  $\tilde{k}_z = 0.06667 \text{ Н·м/рад}$ .

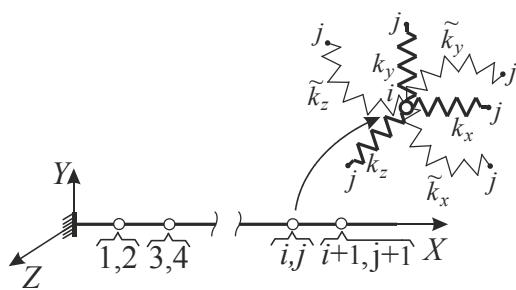
Вычисление эквивалентной жесткости поворотной пружины выполнялось по формуле

$$\tilde{k}_z = (E^{(1)} J) / l_i,$$

где  $l_i$  — длина КЭ.

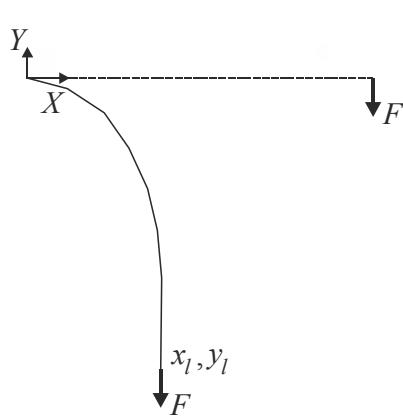
Визуализация консоли до и после деформации представлена на рис. 5. На этом рисунке  $x_l$  и  $y_l$  — результатирующие координаты точки приложения сосредоточенной силы  $F$ .

Из графиков на рис. 6, б и 7, б видно, что уменьшение шага разбивки приводит к заметному уменьшению жесткости конечно-элементной модели консоли.



**Рис. 4.** Схема стержня с блоками упругих шарниров  
Источник: выполнено П.П. Гайджуроевым.

**Figure 4.** Diagram of a bar with blocks of elastic hinges  
Source: made by P.P. Gaidzhurov.



**Рис. 5.** Визуализация деформации гибкого консольного стержня  
Источник: выполнено П.П. Гайджуроевым.

**Figure 5.** Visualization of the deformation of a flexible cantilever bar  
Source: made by P.P. Gaidzhurov.

Этот эффект не наблюдается при использовании первой модели (рис. 6, а и 7, а). Из анализа представленных графиков  $x_l \sim n_{step}$  и  $y_l \sim n_{step}$  также следует, что процесс является монотонно сходящимся. После  $n_{step} = 100$  уточнение величин  $x_l$  и  $y_l$  для обеих моделей происходит только в третьем знаке.

Для сравнения в табл. 1 приведены значения  $x_l$  и  $y_l$ , полученные для аналогичных моделей консоли с использованием нелинейного решателя комплекса ANSYS.

Таблица 1 / Table 1

Значения  $x_l$  и  $y_l$  консоли / Cantilever beam values  $x_l$  and  $y_l$

Тип модели / Model Type	$x_l$ , м / m		$y_l$ , м / m	
	4 КЭ / FE	8 КЭ / FE	4 КЭ / FE	8 КЭ / FE
1	0,6121	0,6123	-0,7199	-0,7153
2	0,7362	0,5515	Процесс не сходится / The process does not converge	

Источник: выполнено Н.Б. Даником и А.В. Климух /  
Source: made by N.B. Danik and A.V. Klimukh.

Сравнивая графики на рис. 7 и 8 с данными табл. 1, устанавливаем, что результаты, полученные с помощью моделей 1 и 2, качественно согласуются с величинами  $x_l$  и  $y_l$  комплекса ANSYS.

Эпюры распределения продольных сил  $N$  в элементах консоли, полученные с помощью нелинейного решателя ANSYS и по предлагаемой методике с использованием первой модели (без упругих шарниров), приведены на рис. 8 и 9. Как видно из рис. 8, максимальное значение силы  $N = 0,03907$  Н, вычисленное при включенной опции “Large Displacement Static” (большие перемещения), по величине сопоставимо с величиной заданного усилия  $F = 0,04167$  Н. Вместе с тем при моделировании консоли с помощью разработанной балочно-шарнирной модели продольные силы в элементах консоли с пятого по восьмой на три порядка превышают величины  $N$ , представленные на рис. 8. Отметим, что в соответствии с предлагаемой методикой продольные усилия в элементах вычислялись по «хрестоматийной» формуле

$$N_i = \frac{E A_i}{l_i} \Delta l_i^{(n_{step})}, \quad i=1,2,\dots,n_e,$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения стержня;  $l_i$  — длина  $i$ -го КЭ;  $\Delta l_i^{(n_{step})}$  — изменение длин элементов на последнем шаге нагружения;  $n_e$  — число КЭ

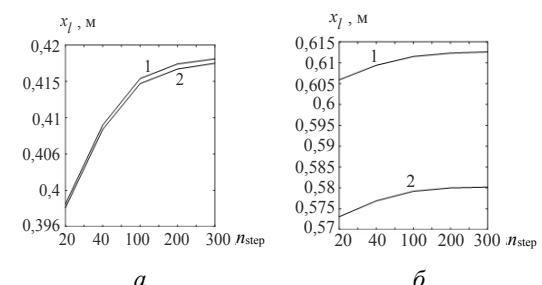


Рис. 6. Графики  $x_l \sim n_{step}$ :  
а — первая модель; б — вторая модель  
Источник: выполнено Н.Б. Даником и А.В. Климух.

Figure 6. Graphs of  $x_l \sim n_{step}$ :  
a — the first model; б — the second model  
Source: made by N.B. Danik, A.V. Klimukh.

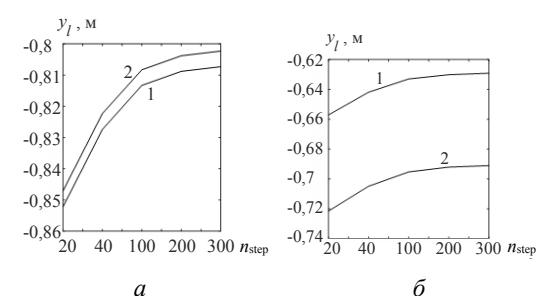


Рис. 7. Графики  $y_l \sim n_{step}$ :  
а — первая модель; б — вторая модель  
Источник: выполнено Н.Б. Даником и А.В. Климух.

Figure 7. Graphs of  $y_l \sim n_{step}$ :  
a — the first model; б — the second model  
Source: made by N.B. Danik, A.V. Klimukh.

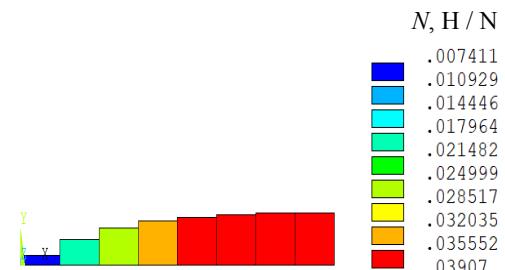


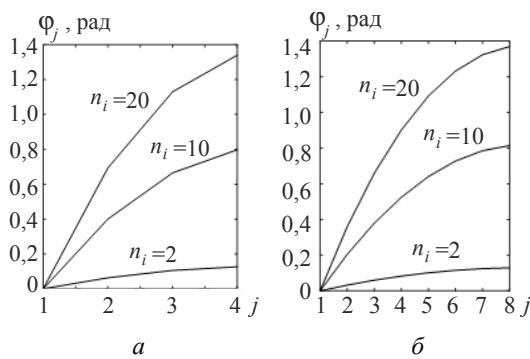
Рис. 8. Эпюра  $N$  (ANSYS нелинейный решатель)  
Источник: выполнено П.П. Гайджуровым.

Figure 8. Diagram of  $N$  (ANSYS nonlinear solver)  
Source: made by P.P. Gaidzhurov.



Рис. 9. Эпюра  $N$  (первая модель)  
Источник: выполнено Н.Б. Даником и А.В. Климух.

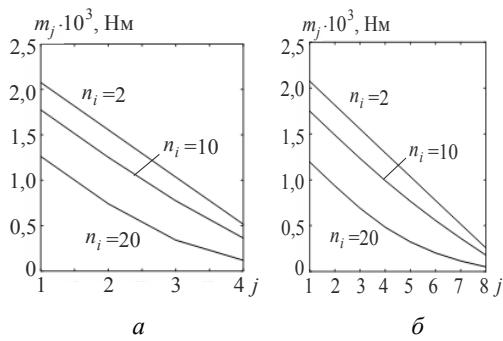
Figure 9. Diagram of  $N$  (the first model)  
Source: made by N.B. Danik and A.V. Klimukh.

**Рис. 10.** График зависимости  $\varphi_i \sim j$ :*a* — 4 КЭ; *б* — 8 КЭ

Источник: выполнено Н.Б. Даником и А.В. Климух.

**Figure 10.** Graph of  $\varphi_i \sim j$ :*a* — 4 FE; *б* — 8 FE

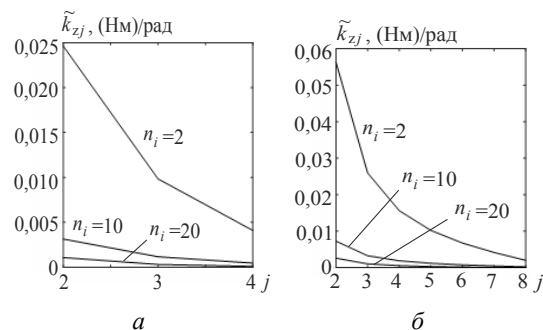
Source: made by N.B. Danik and A.V. Klimukh.

**Рис. 11.** График зависимости  $m_i \sim j$ :*a* — 4 КЭ; *б* — 8 КЭ

Источник: выполнено Н.Б. Даником и А.В. Климух.

**Figure 11.** Graph of  $m_i \sim j$ :*a* — 4 FE; *б* — 8 FE

Source: made by N.B. Danik and A.V. Klimukh.

**Рис. 12.** График зависимости  $\tilde{k}_{zj} \sim j$ :*a* — 4 КЭ; *б* — 8 КЭ

Источник: выполнено Н.Б. Даником и А.В. Климух.

**Figure 12.** Graph of  $\tilde{k}_{zj} \sim j$ :*a* — 4 FE; *б* — 8 FE

Source: made by N.B. Danik and A.V. Klimukh.

Выявленное несоответствие в эпюрах  $N$  объясняется тем, что при использовании нелинейного решателя ANSYS активизируется режим уменьшения жесткости стержня в зависимости от степени его формоизменения. В предлагаемой методике продольная жесткость стержня в процессе деформирования не изменяется, что соответствует физической картине рассматриваемой изгибной деформации.

Графики зависимости углов поворотов ( $\varphi_j$ ), моментов ( $m_j$ ) и жесткостей ( $\tilde{k}_{zj}$ ) от положения упругих вставок (вторая модель) для вариантов разбивки консоли на четыре и восемь КЭ показаны на рис. 10–12.

На этих рисунках значение параметра  $j$  соответствует номеру упругого шарнира (нумерация шарниров от заделки);  $n_i$  — номер ступени нагружения ( $n_i = 2, 3, \dots, 20$ ).

Величины  $\tilde{k}_{zj}$  вычислялись по формуле  $\tilde{k}_{zj} = m_j / \varphi_j$ .

Из приведенных на рис. 10 и 11 графиков видно, что двукратное уменьшение шага сетки практически не влияет на значения  $\varphi_j$  и  $m_j$ . Назначенные априори величины жесткостей поворотных пружин  $\tilde{k}_{zj}$  (0,03333 Н·м/рад для 4 КЭ и 0,06667 Н·м/рад для 8 КЭ) согласуются с аналогичным максимальными значениями  $\tilde{k}_{zj}$  на графиках рис. 12, *a* (0,025 Н·м/рад) и 9, *б* (0,056 Н·м/рад) при  $k = 2$ .

**Пример 2.** Гибкий криволинейный стержень прямоугольного поперечного сечения 1×1 м радиусом 100 м и углом раствора дуги 45°, жестко закрепленный на конце ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ) и нагруженный на свободном конце из плоскости сосредоточенной силой  $F_z = 600$  Н (рис. 13). Координаты  $x, y, z$  свободного конца стержня в исходном положении: 29,29 м; 70,71 м; 0 м. Модуль упругости материала стержня  $E = 10$  МПа. Стержень разбивался на 16 пространственных КЭ балочного типа. По аналогии с предыдущим примером на стыках элементов вводились блоки из упругих шарниров (рис. 14).

Расчеты выполнялись для трех вариантов конечно-элементных моделей криволинейного стержня: 1 — используются только балочными КЭ; 2, 3 — используются балочные КЭ в сочетании с блоками из упругих шарниров. Параметры блоков шарниров:

- для модели 2:

$$k_x = k_y = k_z = \tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = E;$$

- для модели 3:

$k_x = k_y = k_z = E = 10^{10}$  (недеформируемый стержень);  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 0,295 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}$ .

Результаты моделирования в виде координат точки приложения силы в деформированном состоянии  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $z_p$  (рис. 13) и соответствующего радиус-вектора  $\rho = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$  сведены в табл. 2. Здесь построчно приведены данные для трех моделей в зависимости от числа ступеней нагружения  $n_{\text{step}}$ . Для сравнения аналогичный расчет криволинейного стержня без шарнирных блоков был выполнен в ANSYS с использованием нелинейного решателя. В итоге получены следующие значения координат:

$$x_p = 15,5639 \text{ м}; y_p = 46,8962 \text{ м};$$

$$z_p = 53,613 \text{ м}; \rho = 72,91 \text{ м}.$$

Данный результат достаточно хорошо согласуется с расчетом по предлагаемой методике с применением третьей модели при  $n_i = 20$  (в табл. 2 подчеркнуто).

Эталонным решением рассматриваемой задачи являются координаты [7; 8]:

$$x_p = 15,56 \text{ м}; y_p = 46,884 \text{ м}; z_p = 53,66 \text{ м}.$$

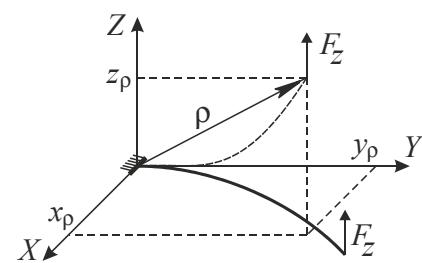


Рис. 13. Расчетная схема

криволинейного стержня

Источник: выполнено П.П. Гайджуроным.

Figure 13. Model of a curved bar

Source: made by P.P. Gaidzhurov.

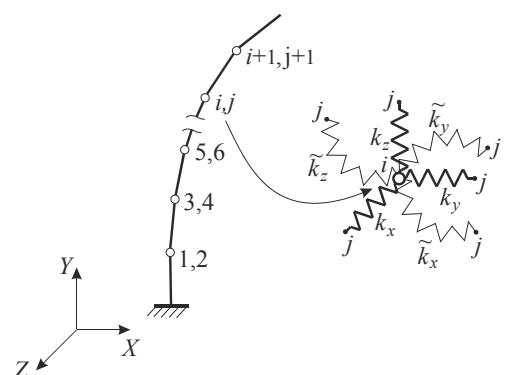


Рис. 14. Схема стержня и блока

упругих шарниров

Источник: выполнено П.П. Гайджуроным.

Figure 14. Diagram of the bar and block of elastic hinges

Source: made by P.P. Gaidzhurov.

Таблица 2 / Table 2

Значения  $x_l$  и  $y_l$  для криволинейного стержня / Values of  $x_l$  and  $y_l$  for the curved bar

$n_{\text{step}}$	Первая модель, вторая модель, третья модель / The first model, the second model, the third model			
	$x_p, \text{м} / \text{м}$	$y_p, \text{м} / \text{м}$	$z_p, \text{м} / \text{м}$	$\rho, \text{м} / \text{м}$
10	14,301	33,996	65,405	75,09
	7,24618	31,714	67,803	75,22
	16,022	46,690	55,900	74,58
20	14,841	35,122	61,973	72,76
	8,2624	33,037	63,914	72,42
	16,100	46,814	53,743	73,07
60	15,171	35,826	59,906	71,43
	8,7549	33,855	61,601	70,83
	16,166	46,922	52,385	72,16
100	15,281	36,064	59,221	71,0
	8,920	34,130	60,84	70,33
	16,192	46,964	51,925	71,86

Источник: выполнено П.П. Гайджуроным / Source: made by P.P. Gaidzhurov.

Безусловно рассмотренный подход к моделированию гибких стержней является достаточно приближенным, так как не учитывает осевых поворотов балочных элементов «как жесткое целое». Однако введение дополнительный упругих шарниров позволяет качественно оценить картину деформирования стержней любой конфигурации как для консервативной, так и для «следящей» нагрузки. Это делает данную концепцию весьма привлекательной при конечно-элементном моделировании сложных трансформируемых стержневых систем.

#### 4. Заключение

1. Преимуществом моделирования упругого гибкого стержня двухузловыми 3D балочными конечными элементами, соединенными в смежных узлах упругими шарнирными вставками, по сравнению с общепринятым подходом, базирующимся на использовании касательной матрицы жесткости, является простая алгоритмизация шаговой процедуры, которая позволяет достаточно точно для инженерной практики определить узловые перемещения и продольные усилия в исследуемом диапазоне нагрузки.

2. Предлагаемый прямой инкрементальный алгоритм решения геометрически нелинейной задачи строительной механики в отличие от нелинейного решателя комплекса ANSYS является абсолютно сходящимся при любой схеме дискретизации гибкого стержня.

3. В перспективе разработанная методика назначения жесткостей поворотных пружин может быть использована при моделировании процесса формоизменения регулярных пространственных стержневых систем при управляемом кинематическом воздействии.

#### Список литературы

1. Дыховичный Ю.А. Большепролетные конструкции сооружений Олимпиады-80 в Москве. Москва : Стройиздат, 1982. 277 с. URL: <https://dwg.ru/lib/1136> (дата обращения: 21.04.2025).
2. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Москва : ДМК Пресс, 2007. 600 с. ISBN 5940743528
3. Канчели Н.В. Строительные пространственные конструкции. Москва : Изд-во АСВ, 2003. 112 с. ISBN 5-93093-206-9 EDN: QNKFNR
4. Секулович М. Метод конечных элементов. Москва : Стройиздат, 1993. 664 с. ISBN 5-274-01755-X
5. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. Москва : Наука, 1986. 296 с. EDN: WIWUQV
6. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. Москва : Машиностроение, 1978. 222 с. URL: <https://djvu.online/file/3q69M4Xs4OLyq> (дата обращения: 21.04.2025).
7. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с раздельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 92. С. 3. EDN: YKVIJZF
8. Низаметдинов Ф.Р., Сорокин Ф.Д. Особенности применения вектора Эйлера для описания больших поворотов при моделировании элементов конструкций летательных аппаратов на примере стержневого конечного элемента // Труды МАИ. 2018. № 102. С. 1. EDN: YQONFZ
9. Battini J.M., Pacoste C. Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. Comput // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2002. Vol. 191. P. 1755–1789. EDN: ATXRQJ
10. Hsiao K.-M., Horng H.-J., Chen Y. R. A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures // Computers & Structures. 1987. Vol. 27. No. 6. P. 769–781.
11. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел / под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. Киев : Вища школа, 1982. 480 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/6757> (дата обращения: 21.04.2025)
12. Wu G., He X., Pai P.F. Geometrically exact 3D beam element for arbitrary large rigid-elastic deformation analysis of aerospace structures // Finite Elements in Analysis and Design. 2011. Vol. 47. Issue 4. P. 402–412. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.11.008> EDN: OEKSAX
13. Albino J.C.R., Almeida C.A., Menezes I.F.M., Paulino G.H. Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded materials (FGMs) // Engineering Structures. 2018. Vol. 173. P. 283–299. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.05.092> EDN: VHBLD
14. Наумов А.М. Применение метода последовательных нагрузений при решении задач механики плоских стержней // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. № 12 (681). С. 33–42. EDN: XECQGD

15. Kang J., Homel M.A., Herbold E.B. Beam elements with frictional contact in the material point method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2022. Vol. 123. Issue 4. P. 1013–1035. <https://doi.org/10.1002/nme.6886>
16. Русских С.В. Разворачивание плоской упругой стержневой системы с тросовыми элементами, присоединенной к космическому аппарату // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2018. № 4 (697). С. 80–90. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-4-80-90> EDN: XOCSKT
17. Popov A.N., Lovtsov A.D. Frictional contact problem in building constructions analysis // Magazine of Civil Engineering. 2020. Issue 100 (8). Article no. 10001. <https://doi.org/10.18720/MCE.100.1> EDN: GHIKRQ

## References

1. Dykhovichny Yu.A. *Large-span structures of the 1980 Olympics in Moscow*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1982. (In Russ.) Available from: <https://dwg.ru/lib/1136> (accessed: 21.04.2025).
2. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Models of structures and the possibility of their analysis*. Moscow: DMK Press; 2007. (In Russ.) ISBN 5940743528
3. Kancheli N.V. *Spatial building structures*. Moscow: DIA Publ.; 2003. (In Russ.) ISBN 5-93093-206-9 EDN: QNKFNР
4. Sekulovich M. *The finite element method*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1993. (In Russ.) ISBN 5-274-01755-X
5. Popov E.P. *Theory and calculation of flexible elastic bars*. Moscow: Nauka Publ.; 1986. (In Russ.) EDN: WIWUQV
6. Svetlitsky V.A. *Mechanics of flexible bars and threads*. Moscow: Mashinostroenie, 1978. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/3q69M4Xs4OLyq> (accessed: 21.04.2025).
7. Popov V.V., Sorokin F.D., Ivannikov V.V. A flexible rod finite element with separate storage of cumulated and extra rotations for large displacements of aircraft structural parts modeling. *Proceedings of MAI*. 2017;(92):3. (In Russ.) EDN: YKVJZF
8. Nizametdinov F.R., Sorokin F.D. Euler vector application specifics for large turns description while flying vehicles structural elements modeling on the example of a rod finite element. *Proceedings of MAI*. 2018;(102):1. (In Russ.) EDN: YQONFZ
9. Battini J.M., Pacoste C. Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. *Comput. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2002;191:1755–1789. EDN: ATXRQJ
10. Hsiao K.-M., Horng H.-J., Chen Y.-R. A corotational procedure that handles large structures of spatial beam structures. *Computers & Structures*. 1987;27(6):769–781.
11. Sakharov A.S., Kisloko V.N., Kirichevsky V.V. et al. *Finite element method in solid mechanics*. A.S. Sakharov and I. Altenbach (eds.). Kiev: Vischa School Publ.; 1982. Available from: <https://dwg.ru/dnl/6757> (accessed: 21.04.2025)
12. Wu G., He X., Pai P.F. Geometrically exact 3D beam element for arbitrary large rigid-elastic deformation analysis of aerospace structures. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2011;47(4):402–412. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.11.008> EDN: OEKSAX
13. Albino J.C.R., Almeida C.A., Menezes I.F.M., Paulino G.H. Co-rotational 3D beam element for nonlinear dynamic analysis of risers manufactured with functionally graded materials (FGMs). *Engineering Structures*. 2018;173:283–299. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.05.092> EDN: VHHBLD
14. Naumov A.M. The application of the method of successive loadings when solving problems of mechanics of flat rods. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2016;12:33–42. (In Russ.) EDN: XECQGD
15. Kang J., Homel M.A., Herbold E.B. Beam elements with frictional contact in the material point method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2021;123(4):1013–1035. <https://doi.org/10.1002/nme.6886>
16. Russkikh S.V. Deploying a planar elastic rod system with cable elements attached to a spacecraft. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2018;4:80–90. (In Russ.) <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-4-80-90> EDN: XOCSKT
17. Popov A.N., Lovtsov A.D. Frictional contact problem in building constructions analysis. *Magazine of Civil Engineering*. 2020;100(8):10001. <https://doi.org/10.18720/MCE.100.1> EDN: GHIKRQ