



DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-5-389-398

EDN: DQUGGN

Научная статья / Research article

Математическая модель деформирования ортотропной оболочки при действии взрывной нагрузки

А.А. Семенов 

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация
 sw.semenov@gmail.com

Поступила в редакцию: 6 августа 2025 г.

Доработана: 22 сентября 2025 г.

Принята к публикации: 5 октября 2025 г.

Аннотация. Предложена математическая модель деформирования тонкостенной оболочечной конструкции при динамическом воздействии, в частности — взрывной нагрузки. Для учета затухания возникающих колебаний была модифицирована предложенная автором ранее модель путем добавления в уравнения Эйлера — Лагранжа функции диссипации Рэлея. Также математическая модель учитывает геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги и ортотропию материала. Программная реализация выполнена в ПО Maple. Для демонстрации применимости разработанной модели приведены примеры расчетов пологих оболочек двойкой кривизны при действии взрывной нагрузки разной интенсивности и при выборе разного коэффициента демпфирования в функции диссипации Рэлея.

Ключевые слова: оболочки, взрывная нагрузка, геометрическая нелинейность, демпфирование, функция диссипации Рэлея

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Статья публикуется по результатам исполнения гранта СПбГАСУ (Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия) 2025 года.

Для цитирования: Семенов А.А. Математическая модель деформирования ортотропной оболочки при действии взрывной нагрузки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 5. С. 389–398. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-389-398> EDN: DQUGGN

Mathematical Model of Deformation of an Orthotropic Shell Under Blast Loading

Alexey A. Semenov 

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation
 sw.semenov@gmail.com

Received: August 6, 2025

Revised: September 22, 2025

Accepted: October 4, 2025

Abstract. This paper proposes a mathematical model of the deformation of a thin-walled shell structure under dynamic loading, specifically, blast loading. To account for the damping of the resulting vibrations, the author's previously proposed model was modified by adding a Rayleigh dissipation function to the Euler — Lagrange equations. The mathematical model also accounts for geometric nonlinearity, transverse shear, and material orthotropy. The software implementation performed in Maple. To demonstrate the applicability of the developed model, examples of calculations of shallow doubly curved shells under blast loading of varying intensities and with different damping coefficients in the Rayleigh dissipation function are provided.

Keywords: shells, blast loading, geometric nonlinearity, damping, Rayleigh dissipation function

Семенов Алексей Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Российская Федерация, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4; eLIBRARY SPIN-код: 9057-9882, ORCID: 0000-0001-9490-7364; e-mail: sw.semenov@gmail.com

© Семенов А.А., 2025

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

Funding. The article is published based on the results of the implementation of the SPbGASU grant in 2025.

For citation: Semenov A.A. Mathematical model of deformation of an orthotropic shell under blast loading. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(5):389–398. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-389-398> EDN: DQUGGN

1. Введение

Тонкостенные оболочки деформируются существенно нелинейно, и для их расчета приходится разрабатывать специальные методы и алгоритмы [1–5]. Одной из важных задач исследования тонкостенных конструкций является анализ их деформирования под действием динамических нагрузок.

При динамических воздействиях на оболочки возникают колебания, и одним из важных факторов при выполнении расчетов становится учет демпфирования [6; 7]. Особено важно учитывать демпфирование, когда нагрузка прикладывается кратковременно, как при взрывном воздействии, и дальнейшее поведение конструкции можно достоверно описать только учитывая затухание колебаний. Применительно к расчету оболочечных конструкций взрывная нагрузка рассматривалась в [8–13]. Так, например, Godoy и Амејеїрас [12] исследуют деформирование стальных вертикальных резервуаров для хранения нефти с плоской крышей при взрыве, близком к конструкции. Анализируются значения энергии при увеличении пикового давления и формы потери устойчивости. В [9] выполнены расчеты сферических оболочек из FGM, представлен расчетный алгоритм и результаты в виде динамических откликов, фазовых портретов и значений собственных частот.

В механике используются вариационные принципы Лагранжа и Гамильтона, которые решают задачи, зависящие от времени, но основанные на законе сохранения энергии и, следовательно, не применимые к диссипативным системам [14]. В литературе можно найти ряд попыток преодолеть эту проблему. Одна из первых работ, посвященных учету диссипации в лагранжевой формулировке, была опубликована Личем [15] в 1958 г. Функция Лагранжа была расширена функцией диссипации Рэлея (1877). Такая формулировка была названа модифицированным принципом Гамильтона [15] (или расширенным [16]). Фактически такой подход позволяет расширять «классические» уравнения Лагранжа на неконсервативные (то есть диссипативные) системы [14; 17; 18].

Подход, основанный на добавлении в уравнения Эйлера – Лагранжа функции диссипации Рэлея [14; 19–23], применялся также в работах [25–27].

Так, в [24] исследуются вынужденные нелинейные колебания оболочек двоякой кривизны в соответствии с теорией Койтера. Анализируются различные типы бифуркаций.

M. Amabili [25] исследуются высокоамплитудные (геометрически нелинейные) колебания круговых цилиндрических оболочек. Уравнения движения получены с помощью энергетического подхода, учитывающего демпфирование посредством диссипативной функции Рэлея. Сравниваются результаты для четырех различных нелинейных теорий тонких оболочек.

Следует отметить также работу Е.П. Детина [6], в которой модифицирована диссипативная функция Рэлея, названная диссипативной функцией Кельвина — Фойгта. Предложенная функция пропорциональна квадрату скоростей деформаций материала, в отличие от диссипативной функции Рэлея, которая пропорциональна квадрату скоростей перемещений.

Существует также подход, который учитывает диссипацию энергии за счет добавления в функционал отношения энергии демпфирования, рассеиваемой за цикл колебаний, к максимальной энергии деформации [27–31]. Однако реализация такого подхода вычислительно сложнее.

Цель исследования — расширение разработанных автором ранее математической модели и алгоритма [32; 33] на задачи расчета оболочечных конструкций с учетом демпфирования при действии взрывной нагрузки.

2. Теория и методы

Для получения основных соотношений математической модели используется функционал полной энергии (диссипация на данном этапе пока не учитывается):

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_s) dt, \quad (1)$$

где E_k — кинетическая энергия; t — время; $E_s = E_p - A$ — разность потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left(N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - 2 (P_x U + P_y V + q W) \right) A B dx dy. \quad (2)$$

Геометрические соотношения с учетом нелинейности будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2; \\ \theta_1 &= - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right), \quad k_x = \frac{1}{R_1}, \quad k_y = \frac{1}{R_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

А функции изменения кривизн χ_1 , χ_2 и кручения χ_{12} для принятой модели принимают вид

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x; \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Геометрия оболочечной конструкции задается через параметры Ляме и значения радиусов главных кривизн.

Также для использования в функционале (2) потребуются выражения для усилий и моментов, приведенных к срединной поверхности оболочки и приходящихся на единицу длины сечения:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y); \\ N_y &= \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x); \\ N_{xy} &= N_{yx} = G_{12} h \gamma_{xy}; \\ M_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left(\frac{h^3}{12} \right) (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2); \end{aligned} \quad (5)$$

$$M_y = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left(\frac{h^3}{12} \right) (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1);$$

$$M_{xy} = M_{yx} = 2G_{12} \left(\frac{h^3}{12} \right) \chi_{12};$$

$$Q_x = G_{13}kh(\Psi_x - \theta_1);$$

$$Q_y = G_{23}kh(\Psi_y - \theta_2),$$

где N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} — нормальные усилия в направлении осей x, y и сдвиговые усилия в плоскости xOy ; M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} — изгибающие и крутящие моменты; Q_x, Q_y — поперечные силы в плоскостях xOz и yOz ; E_1, E_2 — модули упругости; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига; μ_{12}, μ_{21} — коэффициенты Пуассона.

Предлагаемая математическая модель строится на основе гипотез модели Тимошенко (Миндлина – Рейсснера, FSDT) и позволяет учитывать инерцию вращения и поперечные сдвиги. Тогда кинетическая энергия [32; 33]

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{\partial U^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^z}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy dz, \quad (6)$$

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W.$$

Вычислив в (6) интеграл по переменной z , получим

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[h \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{h^3}{12} \left(\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right) \right] AB dx dy. \quad (7)$$

Подставим аппроксимирующие функции (в соответствии с методом Л.В. Канторовича) в функционал (1). После вычисления интегралов по переменным x и y от известных функций функционал I представляет собой одномерный функционал от функций $U_{ij}(t) - \Psi_{yij}(t)$. Далее используем известное уравнение Эйлера — Лагранжа [32; 33]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{X}_j(t)} + \frac{\partial E_s}{\partial X_j(t)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N, \quad (8)$$

где $X(t) = (U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), \Psi_{xij}(t), \Psi_{yij}(t))^T$, $i, j = 1, \dots, \sqrt{N}$, а точкой обозначена производная по времени.

Далее для осуществления расчетов будут использованы метод Л.В. Канторовича и метод Розенброка (для численного решения жестких систем ОДУ). Метод Л.В. Канторовича используется для приведения многомерного функционала к одномерному. Для этого неизвестные функции перемещений и углов поворота нормали представляются в следующем виде [33]:

$$U(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl}(t) X_1^k Y_1^l, \quad V(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl}(t) X_2^k Y_2^l,$$

$$W(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl}(t) X_3^k Y_3^l, \quad (9)$$

$$\Psi_x(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xkl}(t) X_4^k Y_4^l, \quad \Psi_y(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{ykl}(t) X_5^k Y_5^l,$$

где $U_{kl} - \Psi_{ykl}$ — неизвестные функции переменной t ; $X_1^k, \dots, X_5^k, Y_1^l, \dots, Y_5^l$ — известные аппроксимирующие функции.

Дополним уравнения Эйлера — Лагранжа (8) слагаемым, учитывающим демпфирование на основе функции диссипации Рэлея. В известных работах функция диссипации Рэлея записана для модели деформирования конструкции без учета поперечных сдвигов (модель Кирхгофа — Лява, Койтера, CSDT), а также не учитывается толщина обшивки

$$F = \frac{c}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy. \quad (10)$$

В то же время от учета толщины обшивки зависит то, как именно определять коэффициент c , какую он будет иметь размерность и порядок.

В данной работе, по аналогии с выражением для кинетической энергии, запишем для модели Тимошенко — Рейсснера функцию диссипации Рэлея:

$$F = \frac{c}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{\partial U^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^z}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy dz. \quad (11)$$

После интегрирования (11) по переменной z , получим

$$F = \frac{c}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b h \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{h^3}{12} \left(\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy. \quad (12)$$

Итак, добавим слагаемое, содержащее функцию диссипации Рэлея (с учетом предложенных уточнений) в уравнение Эйлера — Лагранжа, как это делается, например, в работах [19; 24; 26]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{X}_j(t)} + \frac{\partial E_s}{\partial X_j(t)} - \frac{\partial F}{\partial \dot{X}_j(t)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N. \quad (13)$$

Дополним систему уравнений (13) начальными условиями при $t = 0$:

$$U_{ij} = V_{ij} = W_{ij} = \Psi_{xij} = \Psi_{yij} = 0, \quad \dot{U}_{ij} = \dot{V}_{ij} = \dot{W}_{ij} = \dot{\Psi}_{xij} = \dot{\Psi}_{yij} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}, \quad (14)$$

или

$$X_j = 0, \quad \dot{X}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N.$$

Система дифференциальных уравнений (13), (14) далее решается одним из численных методов, в данной работе для этой задачи применяется метод Розенброка.

3. Расчеты

В качестве демонстрации применимости изложенного выше подхода выполним исследование тонкостенной пологой оболочки двоякой кривизны с толщиной $h = 0,09$ м, линейными размерами $a = b = 10,8$ м и радиусами главных кривизн $R_1 = R_2 = 40,05$ м. Параметры материала соответствуют стеклопластику Т10/УПЭ22-27 (модули упругости $E_1 = 0,294 \times 10^5$ МПа, $E_2 = 0,178 \times 10^5$ МПа, модули сдвига $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,0301 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,123$, плотность $\rho = 1800$ кг/м³), края конструкции закреплены шарнирно-неподвижно. Нагрузка прикладывается взрывная, направлена по нормали к поверхности и зависит от времени следующим образом: $q = q_0 \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) + q_{sv}$, $q_0 = 1$ МПа, $t_0 = 0,01$ с.

Также учитывается собственный вес. Расчеты выполняются при $N = 4$ в методе Л.В. Канторовича. Используя программу, разработанную автором в ПО Maple, покажем динамический отклик системы при выборе разных коэффициентов: $c = 100$ Н·с/м³ = 0,0001 МПа·с/м, $c = 0,001$ МПа·с/м, $c = 0,002$ МПа·с/м. Для сравнения приведем еще результаты без учета диссипации, когда $c = 0$ Н·с/м³ (рис. 1). Здесь и далее на рисунках показано, что кривая с большей амплитудой соответствует центральной части конструкции ($x = a / 2, y = b / 2$), а с меньшей амплитудой — четверти ($x = a / 4, y = b / 4$). На рис. 2 показаны аналогичные данные при значении $q_0 = 10$ МПа.

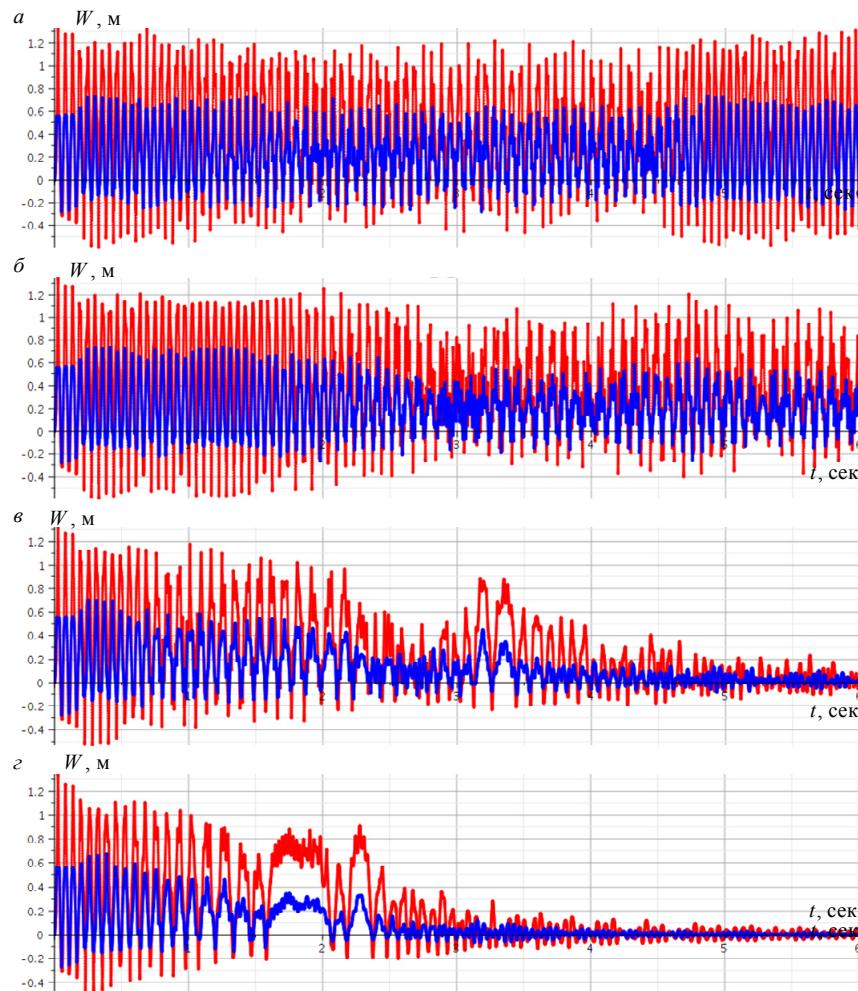


Рис. 1. Динамический отклик при воздействии взрывной нагрузки ($q_0 = 1$ МПа):

a — $c = 0$ МПа·с / м; *б* — $c = 0,0001$ МПа·с / м; *в* — $c = 0,001$ МПа·с / м; *г* — $c = 0,002$ МПа·с / м

Источник: выполнено А.А. Семеновым.

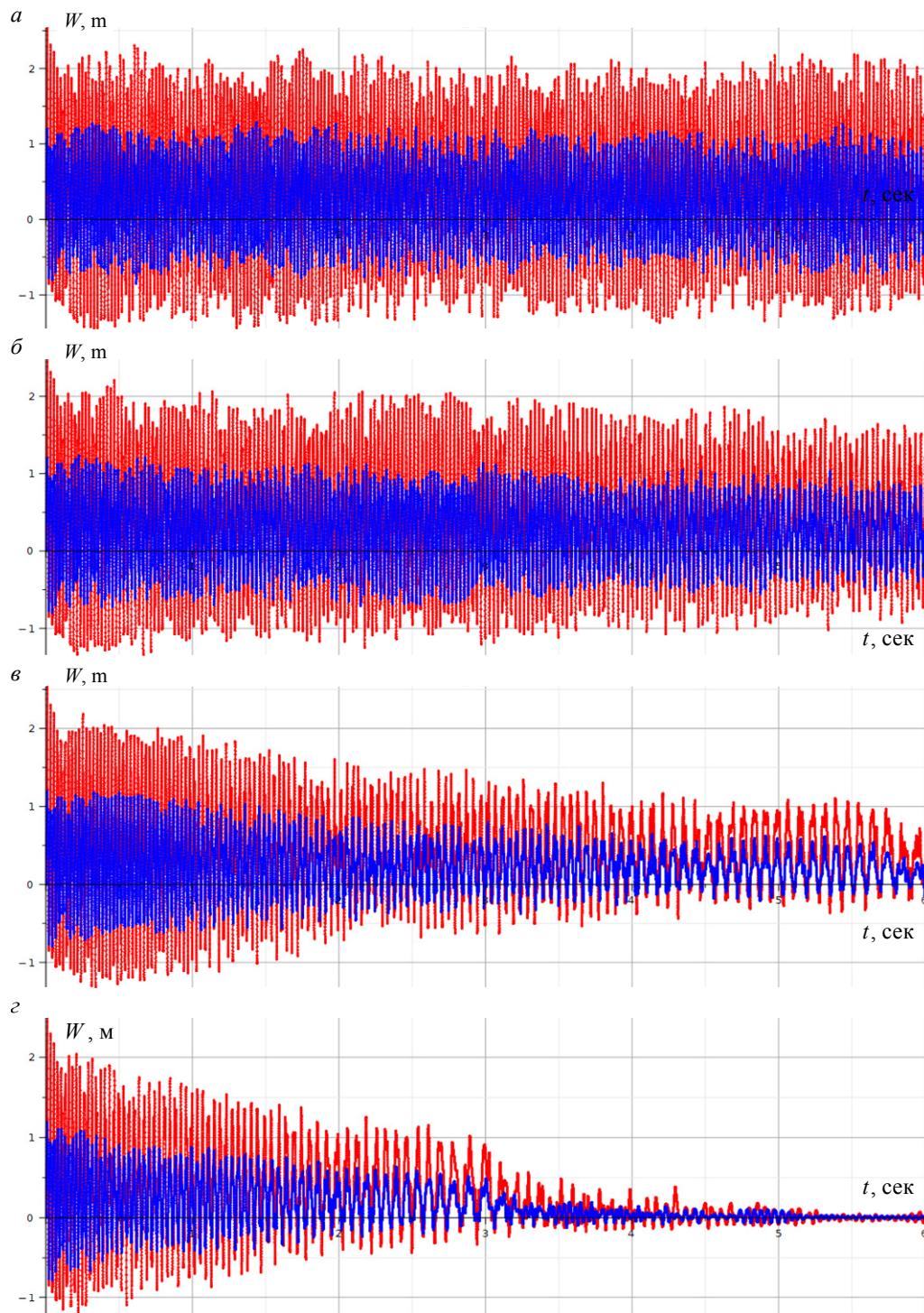


Рис. 2. Динамический отклик при воздействии взрывной нагрузки ($q_0 = 10 \text{ МПа}$):
 а — $c = 0 \text{ МПа}\cdot\text{s} / \text{м}$; б — $c = 0,0001 \text{ МПа}\cdot\text{s} / \text{м}$; в — $c = 0,001 \text{ МПа}\cdot\text{s} / \text{м}$; г — $c = 0,002 \text{ МПа}\cdot\text{s} / \text{м}$

Источник: выполнено А.А. Семеновым.

Очевидно, что при большем значении коэффициента c затухание колебаний происходит быстрее. Поиск и анализ его возможных значений, близких к реальным данным рассматриваемых материалов, будут являться предметом дальнейших исследований.

Чтобы оценить, насколько разрушительным является воздействие взрывной нагрузки, построим также графики нормальных напряжений при $q_0 = 1 \text{ МПа}$ и $c = 0,001 \text{ МПа}\cdot\text{s}/\text{м}$ (рис. 3), и далее — при

$q_0 = 10 \text{ МПа}$ и $c = 0,001 \text{ МПа}\cdot\text{с}/\text{м}$ (рис. 4). Из графиков видно, что при $q_0 = 10 \text{ МПа}$ значения напряжений в несколько раз превышают предельно допустимые для данного материала, а при $q_0 = 1 \text{ МПа}$ близки к предельным и в отдельные моменты времени их превышают.

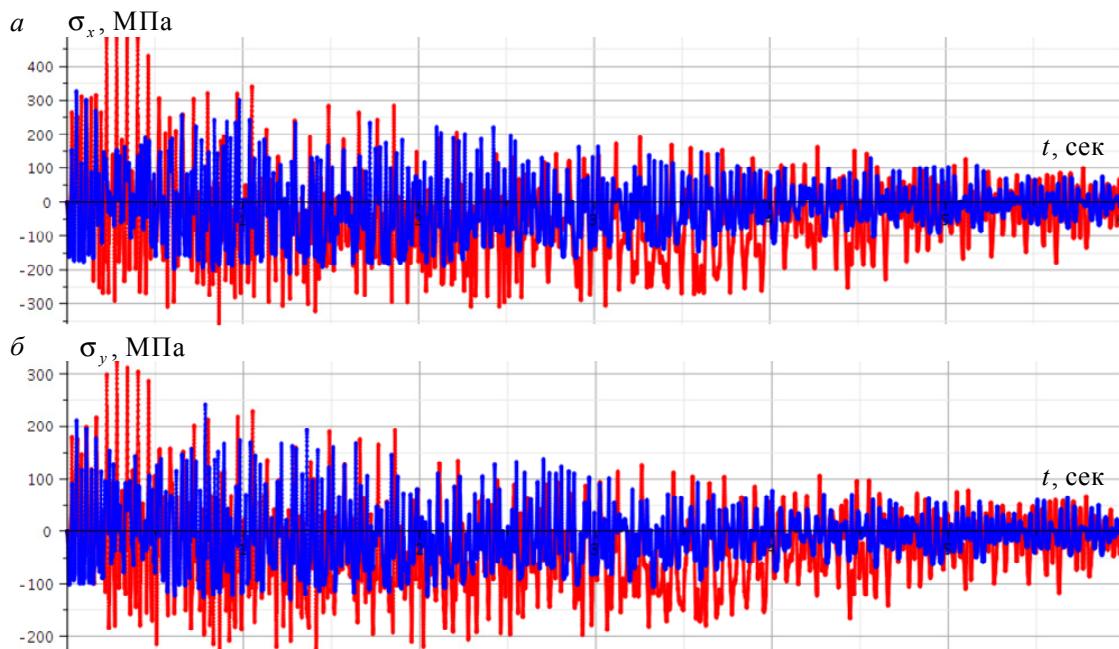


Рис. 3. Значения нормальных напряжений при воздействии взрывной нагрузки ($q_0 = 1 \text{ МПа}$),
 $c = 0,001 \text{ МПа}\cdot\text{с} / \text{м}$

Источник: выполнено А.А. Семеновым.

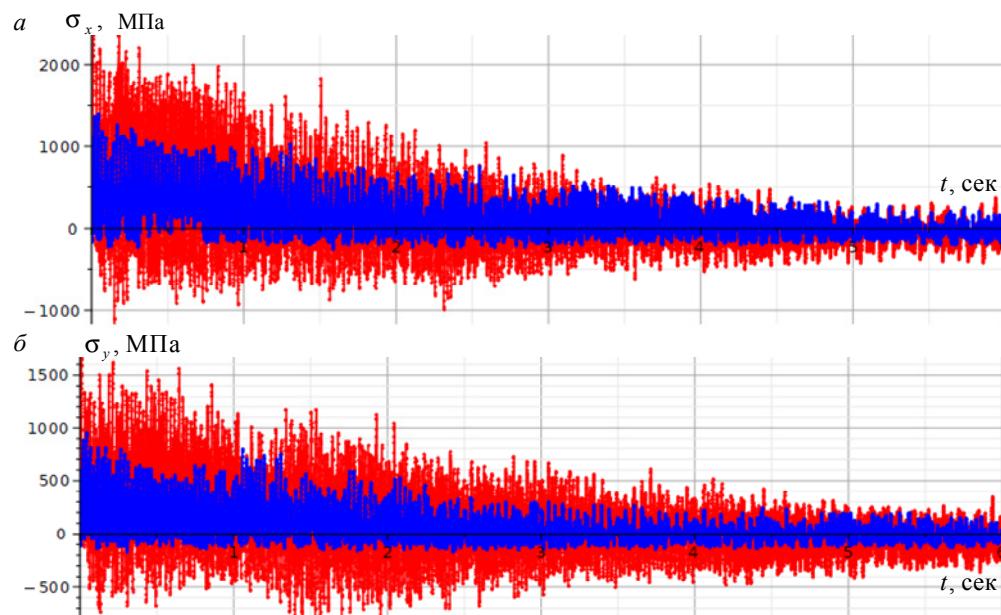


Рис. 4. Значения нормальных напряжений при воздействии взрывной нагрузки ($q_0 = 10 \text{ МПа}$),
 $c = 0,001 \text{ МПа}\cdot\text{с} / \text{м}$

Источник: выполнено А.А. Семеновым.

4. Заключение

Технологии компьютерного моделирования позволяют исследовать тонкостенные конструкции с учетом нелинейных эффектов. Предложенная математическая модель с использованием функции диссипации Рэлея дает возможность расширить применимость разработанных ранее автором моделей и алгоритмов расчета на более широкий класс задач, в том числе моделировать динамический отклик конструкции на действие взрывной нагрузки, когда время приложения нагрузки малое, а колебательный процесс предполагает затухание. Также интерес представляют полученные данные о значениях напряжений во время колебаний, поскольку они могут превышать допустимые.

Таким образом, получена новая математическая модель деформирования ортотропной оболочки при действии взрывной нагрузки.

Список литературы

1. *Karpov V.V., Kobelev E.A., Maslenikov A.M., Panin A.N.* Ritz method in the discrete approximation of displacements for slab calculation // Architecture and Engineering. 2023. Vol. 8. No. 4. P. 57–67. <http://doi.org/10.23968/2500-0055-2023-8-4-57-67> EDN: FTPEME
2. *Коровайцева Е.А.* Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25. № 3. С. 556–570. <http://doi.org/10.14498/vsgtu1855> EDN: UKLUQJ
3. *Raghib R., Naciri I., Khalifi H., Elmaimouni L., Yu J., Bybi A., Sahal M.* Free vibration modeling in a functionally graded hollow cylinder using the legendre polynomial approach // Architecture and Engineering. 2023. Vol. 8. No. 4. P. 82–98. <http://doi.org/10.23968/2500-0055-2023-8-4-82-98> EDN: AJNBMP
4. *Разов И.О.* Параметрические колебания и динамическая устойчивость однородных и неоднородных торoidalных оболочек в упругой среде // Вестник гражданских инженеров. 2025. № 3 (110). С. 74–83. <http://doi.org/10.23968/1999-5571-2025-22-3-74-83> EDN: EZXRPQ
5. *Eshmatov B., Abdikarimov R., Amabili M., Vatin N.* Nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic anisotropic fiber reinforced plates // Magazine of Civil Engineering. 2023. Vol. 118. No. 1. Article no. 11811. <http://doi.org/10.34910/MCE.118.11> EDN: POZQZX
6. *Детина Е.П.* Численная модель демпфирования колебаний балочных элементов конструкций из структурно сложных материалов на основе положений нелокальной механики : дис. ... канд. техн. наук, 1.2.2 Матем. модели, числ. методы и компл. программ. Москва : МГСУ, 2024. 193 с.
7. *Sidorov V., Shitikova M., Badina E., Detina E.* Review of nonlocal-in-time damping models in the dynamics of structures // Axioms. 2023. Vol. 12. No. 7. P. 676. <http://doi.org/10.3390/axioms12070676> EDN: DNTVCF
8. *Nguyen T.P., Tran M.T.* Response of vertical wall structures under blast loading by dynamic analysis // Procedia Engineering. 2011. Vol. 14. P. 3308–3316. <http://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.418>
9. *Do N.-T., Le P.B., Tran T.T., Pham Q.H.* Nonlinear transient analysis of functionally graded sandwich spherical shells subjected to blast loading in the thermal environment // Case Studies in Thermal Engineering. 2023. Vol. 52. 103765. <http://doi.org/10.1016/j.csite.2023.103765> EDN: RNSRMC
10. *Tu P.H., Van Ke T., Trai V.K., Hoai L.* An isogeometric analysis approach for dynamic response of doubly-curved magneto electro elastic composite shallow shell subjected to blast loading // Defence Technology. 2024. Vol. 41. P. 159–180. <http://doi.org/10.1016/j.dt.2024.06.005> EDN: EFGQML
11. *Zhao Z., Hou H., Li D., Wu X., Li Y., Chen Z., Wu L.* Investigation on dynamic response of liquid-filled cylindrical shell structures under the action of combined blast and fragments loading // Defence Technology. 2025. Vol. 49. P. 334–354. <http://doi.org/10.1016/j.dt.2025.03.007>
12. *Godoy L.A., Ameijeiras M.P.* Plastic buckling of oil storage tanks under blast loads // Structures. 2023. Vol. 53. P. 361–372. <http://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.04.057> EDN: YXCDOO
13. *Володин Г.Т., Новиков А.С.* Геометрическая нелинейность в задачах разрушения оболочечных конструкций взрывом // Известия ТулГУ. Технические науки. 2014. № 3. С. 94–103. EDN: SIKKUX
14. *Hackl K., Svoboda J., Fischer F.D.* On the coupling of Hamilton's principle and thermodynamic extremal principles // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2024. Vol. 187. Article no. 105633. <http://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105633> EDN: QRZDUS
15. *Leech J.W.* Classical Mechanics. 2nd. Dordrecht: Springer Netherlands, 1965. 172 p. <http://doi.org/10.1007/978-94-010-9169-5>
16. *Kim J., Dargush G.F., Ju Y.-K.* Extended framework of Hamilton's principle for continuum dynamics // International Journal of Solids and Structures. 2013. Vol. 50. No. 20–21. P. 3418–3429. <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.06.015>

17. Yang Q., Stainier L., Ortiz M. A variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary-value problem for general dissipative solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. No. 2. P. 401–424. <http://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.08.010> EDN: JFRWPW
18. Vujanović B.D., Jones S.E. Variational methods in nonconservative phenomena: Mathematics in science and engineering. Elsevier Publ.; 1989. 371 p. [http://doi.org/10.1016/S0076-5392\(08\)X6103-X](http://doi.org/10.1016/S0076-5392(08)X6103-X)
19. Bui T.T., Vu M.D., Pham N.N., Cao V.D., Vu H.N. Nonlinear thermo-mechanical dynamic buckling and vibration of FG-GPLRC circular plates and shallow spherical shells resting on the nonlinear viscoelastic foundation // Archive of Applied Mechanics. 2024. Vol. 94. P. 3715–3729. <http://doi.org/10.1007/s00419-024-02691-6> EDN: QSZFWZ
20. Roy S., Bhadra S. Study of nonlinear dissipative pulse propagation under the combined effect of two-photon absorption and gain dispersion: A variational approach involving Rayleigh's dissipation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2007. Vol. 232. No. 2. P. 103–107. <http://doi.org/10.1016/j.physd.2007.06.002>
21. Scaife B.K.P. On the Rayleigh dissipation function for dielectric media // Journal of Molecular Liquids. 1989. Vol. 43. P. 101–107. [http://doi.org/10.1016/0167-7322\(89\)80010-8](http://doi.org/10.1016/0167-7322(89)80010-8)
22. Lemois N.A. Remark on Rayleigh's dissipation function // American Journal of Physics. 1991. Vol. 59. No. 7. P. 660–661. <http://doi.org/10.1119/1.16791>
23. Podio-Guidugli P., Virga E.G. Analytical Thermodynamics // Journal of Elasticity. 2023. Vol. 153. No. 4–5. P. 787–812. <http://doi.org/10.1007/s10659-023-09997-6> EDN: UYQNIT
24. Pinho F.A.X.C., Amabili M., Del Prado Z.J.G.N., Da Silva F.M.A. Nonlinear forced vibration analysis of doubly curved shells via the parameterization method for invariant manifold // Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 112. No. 23. P. 20677–20701. <http://doi.org/10.1007/s11071-024-10135-7> EDN: TQEWRH
25. Touzé C., Amabili M., Thomas O. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2008. Vol. 197. No. 21–24. P. 2030–2045. <http://doi.org/10.1016/j.cma.2008.01.002> EDN: WOFWQZ
26. Amabili M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 264. No. 5. P. 1091–1125. [http://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01385-8](http://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01385-8) EDN: XQDOKX
27. Li H., Zeyu Zou, Wu H., Zhao J., Sun H., Sun W., Wang Q., Wang X. Theoretical and experimental investigations of vibration and damping behaviors of carbon fiber-reinforced composite thin shells with partial bolt looseness constraints // European Journal of Mechanics — A/Solids. 2023. Vol. 97. Article no. 104839. <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104839> EDN: AQGPXM
28. Li H., Wu H., Zhang T., Wen B., Guan Z. A nonlinear dynamic model of fiber-reinforced composite thin plate with temperature dependence in thermal environment // Composites Part B: Engineering. 2019. Vol. 162. P. 206–218. <http://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.10.070>
28. Maher M.R., Adams R.D. Modal vibration damping of anisotropic FRP laminates using the rayleigh–ritz energy minimization scheme // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 259. No. 1. P. 17–29. <http://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5151> EDN: BCVKJB
29. Zinoviev P.A., Ermakov J.N. Energy dissipation in composite materials. Lancaster: Technomic Publ.; 1994.
30. Zinov'ev P.A., Smerdov A.A., Kulish G.G. Experimental investigation of elastodissipative characteristics of carbon-fiber-reinforced plastics // Mechanics of Composite Materials. 2003. Vol. 39. No. 5. P. 393–398. <http://doi.org/10.1023/B:MOCM.0000003289.12297.84> EDN: LIEDXP
31. Семенов А.А. Динамический отклик пологих оболочек двойкой кривизны на периодическое внешнее воздействие // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 5. С. 433–440. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-5-433-440> EDN: CQAEAZ
32. Семенов А.А. Моделирование деформирования тонкостенных оболочечных конструкций при динамических воздействиях различного вида // Вестник гражданских инженеров. 2024. № 5 (106). С. 41–48. <http://doi.org/10.23968/1999-5571-2024-21-5-41-48> EDN: STVEJW