

## РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-5-377-388

EDN: DQGYSO

Научная статья / Research article

### Построение торсовых поверхностей на двух направляющих кривых

С.Н. Кривошапко 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ sn\_krivoshapko@mail.ru

Поступила в редакцию: 25 марта 2025 г.

Доработана: 15 июня 2025 г.

Принята к публикации: 7 августа 2025 г.

**Аннотация.** Проведен анализ ряда опубликованных материалов по четырем типам торсовых поверхностей с двумя направляющими (опорными) алгебраическими кривыми второго порядка, лежащими в параллельных или пересекающихся плоскостях. Три типа торсов описаны кратко со ссылками на источники и приведены графические иллюстрации для каждого типа торсов, а для торсовых поверхностей с двумя опорными кривыми с пересекающимися осями в пересекающихся плоскостях представлен порядок построения этой поверхности и методика получения параметрических уравнений. Методика проиллюстрирована на трех примерах. Установлено, что до настоящего времени нет ни одного исследования напряженно-деформированного состояния предложенных тонких торсовых оболочек, заданных в криволинейных неортогональных сопряженных координатах, которые совпадают с внешним контуром торсовых оболочек. Показано, что есть предложения по применению предложенных поверхностей в архитектуре, судостроении и сельскохозяйственном машиностроении.

**Ключевые слова:** параллельность векторов, компланарность векторов, алгебраические кривые второго порядка, торс с двумя направляющими кривыми, моделирование поверхностей, компьютерная графика

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Кривошапко С.Н. Построение торсовых поверхностей на двух направляющих кривых // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 5. С. 377–388. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-377-388> EDN: DQGYSO

## Construction of Developable Surfaces with Two Director Curves

Sergey N. Krivoshapko 

RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ sn\_krivoshapko@mail.ru

Received: March 25, 2025

Revised: June 15, 2025

Accepted: August 7, 2025

**Abstract.** An analysis of a number of published materials regarding four types of developable surfaces with two director (supporting) algebraic curves of the second order lying in parallel or in intersecting planes has been conducted. Three types of developable surfaces are shortly described with references to sources, and visualizations of each type of developable surface are

Кривошапко Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор-консультант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966; ORCID: 0000-0002-9385-3699; e-mail: sn\_krivoshapko@mail.ru

© Кривошапко С.Н., 2025

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

presented. For the developable surfaces with two supporting curves with intersecting axes in intersecting planes, the construction technique and the method of obtaining parametric equations are given. This method is illustrated with three examples. It is established that to date, there are no studies on the strength of thin shells in the form of the presented developable surfaces defined in curvilinear conjugate non-orthogonal coordinates that coincide with the external contour of the shells. It is shown that there are suggestions of application of the studied surfaces in architecture, shipbuilding, and agricultural machine engineering.

**Keywords:** parallel vectors, vector coplanarity, second-order algebraic curves, developable surface with two director curves, surface modelling, computer graphics

**Conflicts of interest.** The author declares that there is no conflict of interest.

**For citation:** Krivoshapko S.N. Construction of developable surfaces with two director curves. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(5):377–388. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-5-377-388> EDN: DQGYSO

## 1. Введение

За последние пять лет автором были опубликованы статьи по построению торсовых поверхностей, содержащих две заранее заданные плоские алгебраические кривые на противоположных сторонах прямоугольного [1], трапециевидного [2] и произвольного четырехугольного [3] планов. При этом прямые образующие получаемых торсов совпадают с противоположными боковыми сторонами прямоугольного и трапециевидного планов. В случае произвольного четырехугольного плана прямые образующие не совпадают с боковыми сторонами, но только проектируются на них.

При построении рассматриваемых торсов использованы работы Г. Монжа, Г.Е. Павленко [4], Ж.Н. Горбатович [5], Б. Бхаттачарии [6], В.Г. Рекача и Н.Н. Рыжова [7], В.Н. Иванова [8], М.Е. Ершова, Е.М. Тупиковой [9], Fr. Perez-Arribas и L. Fernandez-Jambrina [10].

Несмотря на то, что разработкой методик построения торсовых поверхностей с двумя заданными заранее плоскими кривыми занималось много геометров и инженеров графических иллюстраций, конкретных торсов встречается очень мало, буквально единицы.

*Цель исследования* — привлечь внимание специалистов к возможности получения параметрических уравнений торсовых поверхностей, построенных на двух заранее заданных опорных плоских кривых, лежащих в параллельных или в пересекающихся плоскостях. До настоящего времени для построения эти поверхности использовались в основном графические методы [11; 12]. И лишь для 5–6 торсовых поверхностей получены их неявные или параметрические уравнения [13]. Инженеры и проектировщики машиностроительной и текстильной отраслей заинтересованы в расширении списка торсовых поверхностей, заданных аналитическими формулами, что также является целью предложенного исследования [14; 15].

## 2. Алгебраические кривые в качестве направляющих кривых проектируемых торсов

Во всех публикациях [1; 2; 3] использовались в качестве направляющих кривых алгебраические кривые второго и четвертого порядков. Эти кривые можно задать в виде следующих элементов:

### ▪ парабола

$$x = x(u) = au, y = y(u) = h(1 - u^2), \quad (1)$$

### ▪ фрагмент эллипса

$$x = x(u) = au, y = y(u) = h_1 \left( \sqrt{1 - u^2 a^2 / a_1^2} - \sqrt{1 - a^2 / a_1^2} \right), \quad (2)$$

где  $a_1$  и  $h_1$  размеры полуосей полного эллипса,  $a_1 \geq a$ . Если задаться значением  $a_1$ , можно определить величину другой полуоси полного эллипса  $h_1$ :

▪ **фрагмент окружности**

$$x_1 = x(u) = au, \quad y_1 = y(u) = \sqrt{R^2 - a^2 u^2} - \sqrt{R^2 - a^2}, \quad (3)$$

▪ **гипербола**

$$x = x(u) = au, \quad y = c + h - \sqrt{c^2 + hu^2(2c + h)}, \quad (4)$$

постоянный параметр  $c$  выбирается произвольно, но  $c \neq 0$ .

▪ **биквадратная парабола:**

$$x = x(u) = au, \quad y = y(u) = h(1 - u^4), \quad (5)$$

▪ **суперэллипс:**

$$x = x(u) = au, \quad y = y(u) = h\sqrt{1 - |u|^f}. \quad (6)$$

Тангенс угла наклона  $\varphi$  касательной к кривым определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}, \quad -1 \leq u \leq 1. \quad (7)$$

Остальные геометрические параметры показаны на рис. 1. Более подробные сведения о кривых (1)–(6) можно взять в любом справочнике по аналитической геометрии или в работах [1–3].

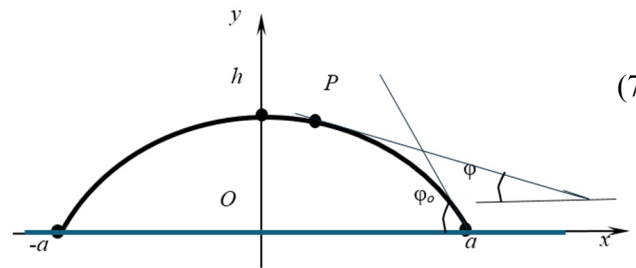


Рис. 1. Постоянные геометрические параметры кривых  
Источник: выполнено С.Н. Кривошапко.

## 2.1. Примеры торсов на прямоугольных, трапециевидных и произвольных четырехугольных планах с двумя направляющими кривыми на противоположных торцах

### 2.1.1. Цилиндрические поверхности на прямоугольном плане (рис. 2)

Все алгебраические цилиндрические поверхности 2-го порядка рассмотрены в статье [16]. Цилиндрическая поверхность является вырожденным торсом, в котором ребро возврата удалено на бесконечность. Задать цилиндрическую поверхность, перекрывающую прямоугольный план, в параметрической форме очень легко. Например, если одинаковые направляющие параболы задать в виде  $y = ax^2$ , где  $a = h/c^2$ , то параметрические уравнения цилиндрической поверхности будут:  $x = x, y = ax^2, z = z$ .

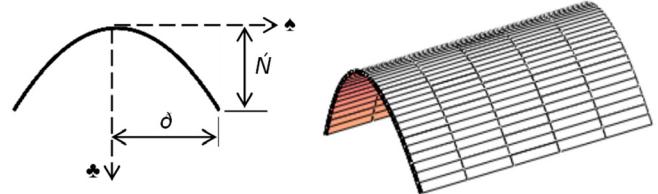


Рис. 2. Цилиндрическая поверхность с параболой на торцах  
Источник: выполнено В.Н. Ивановым и др. [16].

### 2.1.2. Торсовые поверхности с двумя заданными плоскими кривыми в параллельных плоскостях

Для построения торсовой поверхности, которая содержит плоские кривые в параллельных плоскостях  $xOy$ , то есть при  $z = 0$ , и в плоскости  $z = l$ , и у которой противоположные прямые образующие лежат в горизонтальной плоскости  $xOz$  параллельно координатной плоскости  $yOz$ , необходимо принять, что углы  $\varphi_0$  у обеих направляющих кривых равны (рис. 1).

Если дана пара любых направляющих кривых, заданных уравнениями (1)–(6), то их векторные уравнения можно представить в виде

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u) \text{ и } \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(v) \quad (8)$$

относительно полюса  $O$ , где  $u, v$  — соответствующие параметры, тогда уравнение торса можно представить в виде [6]

$$\mathbf{r}(u, \lambda) = \mathbf{r}_1(u) + \lambda[\mathbf{r}_2(v) - \mathbf{r}_1(u)], \quad (9)$$

где  $\lambda$  — безразмерный параметр,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

При задании торса в виде (9) координатные линии  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$  совпадают с направляющими кривыми. Между параметрами  $u$  и  $v$  должно существовать соотношение [4]

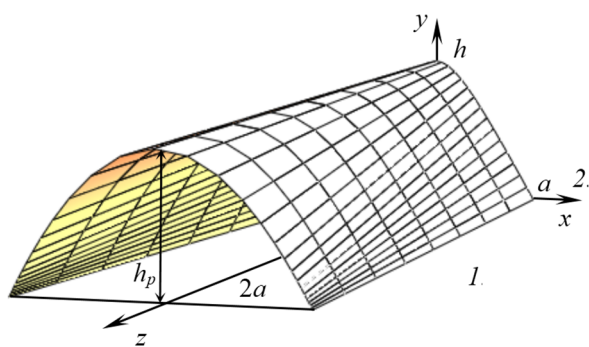
$$\frac{y'_1(u)}{x'_1(u)} = \frac{y'_2(v)}{x'_2(v)}. \quad (10)$$

Геометрический смысл уравнения (10) состоит в том, что прямолинейная образующая торса проходит через две соответствующие точки плоских кривых, для которых угловые коэффициенты касательных  $\varphi_0$  равны, т. е. касательные, проведенные через соответствующие точки двух кривых, должны быть параллельны.

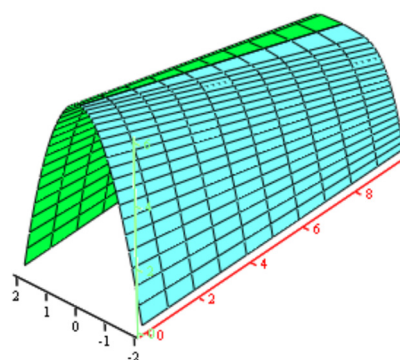
Векторное уравнение (9) можно представить в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= x(u, \lambda) = x_1(u)(1 - \lambda) + \lambda x_2[v(u)], \\ y &= y(u, \lambda) = y_1(u)(1 - \lambda) + \lambda y_2[v(u)], \\ z &= z(\lambda) = \lambda l. \end{aligned} \quad (11)$$

Описанная выше методика определения параметрических уравнений (11) торсовых поверхностей в работе [1] апробирована на примерах пяти вариантов двоек плоских кривых в качестве направляющих кривых: эллипс (2) + парабола (1), фрагмент окружности (3) + парабола (1), гипербола (4) + парабола (1) (рис. 3), парабола (1) + биквадратная парабола (5) (рис. 4), суперэллипс (6) с  $r = t = 2 +$  суперэллипс (6) с  $r = t = 3$ .



**Рис. 3.** Торс с параболой и гиперболой на торцах  
И с т о ч н и к: выполнено С.Н. Кривошапко.



**Рис. 4.** Торс с параболой второго и четвертого порядков на торцах  
И с т о ч н и к: выполнено С.Н. Кривошапко.

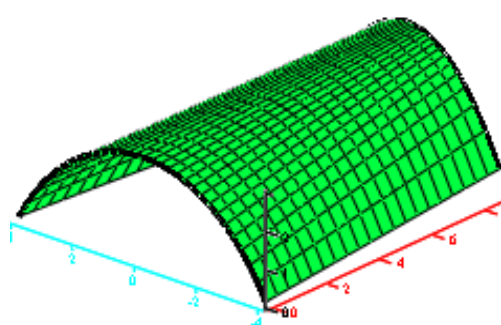
Торсовая поверхность с окружностью и параболой в параллельных плоскостях привлекла также внимание Ж.Н. Горбатовича [5]. Поверхность с эллипсом и параболой в параллельных плоскостях изучалась в статье [17]. Торс с параболой использовался для иллюстрации способа построения его развертки на плоскость [9]. Есть пример аппроксимации торсовой поверхности с параболой 2-го и 4-го порядков в параллельных плоскостях складчатой структурой [18]. Указанные разработки можно использовать применительно к рассматриваемым торсам на прямоугольных планах, но в указанных статьях [5; 9; 18] контурные прямые образующие не лежат в горизонтальной плоскости.

В [2] рассмотрены торсовые поверхности с двумя заданными плоскими кривыми (1)–(6) в параллельных плоскостях, но перекрывающие трапециевидный план. В этом случае для первой кривой (см. рис. 1)  $-1 \leq u \leq 1$ , то есть  $-a \leq x \leq a$ , а для второй кривой  $-1 \leq v \leq 1$ , то есть  $-b \leq y \leq b$ . Если плоские направляющие кривые (8) лежат в параллельных плоскостях, то между параметрами  $u$  и  $v$  должно существовать соотношение (10).

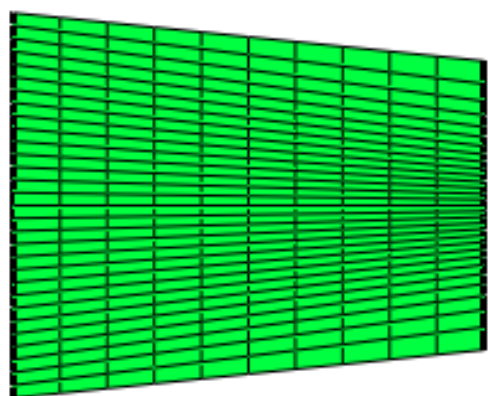
При построении торсовой поверхности, которая будет иметь плоские направляющие кривые с одинаковыми стрелами подъема  $h$  на оси  $Oz$  и с двумя прямолинейными образующими, совпадающими с боковыми сторонами трапециевидного плана на плоскости  $xOz$ , необходимо выполнить дополнительное условие (см. рис. 1):

$\operatorname{tg} \varphi_0$  одной кривой при  $x = \pm a$  должен быть равен  $\operatorname{tg} \varphi_0$  другой кривой при  $x = \pm b$ .

После выполнения условий (10) можно записать параметрические уравнения (11) искомой торсовой поверхности. В [2] методика построения апробирована на примерах шести вариантов двоек плоских кривых в качестве направляющих кривых: эллипс (2) + парабола (1) (рис. 5), фрагмент окружности (3) + парабола (1) (рис. 6), гипербола (4) + парабола (1), парабола (1) + биквадратная парабола (5), суперэллипс (6) с  $r = t = 2$  + суперэллипс (6) с  $r = t = 3$ , гипербола (4) + биквадратная парабола (5).

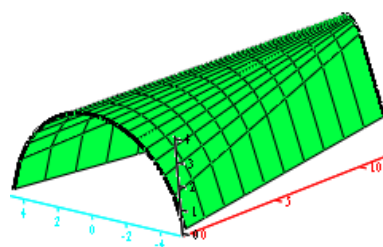


Общий вид

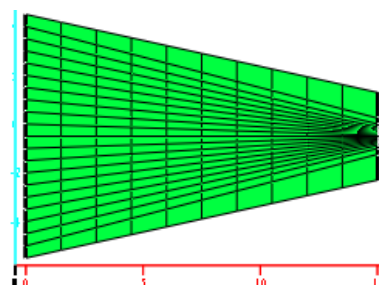


План в осях  $yOz$

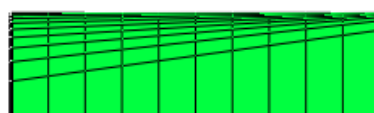
**Рис. 5.** Торсовая поверхность с фрагментом эллипса и параболой на параллельных торцах  
И с т о ч н и к: выполнено С.Н. Кривошапко.



General view



План в осях  $xOz$



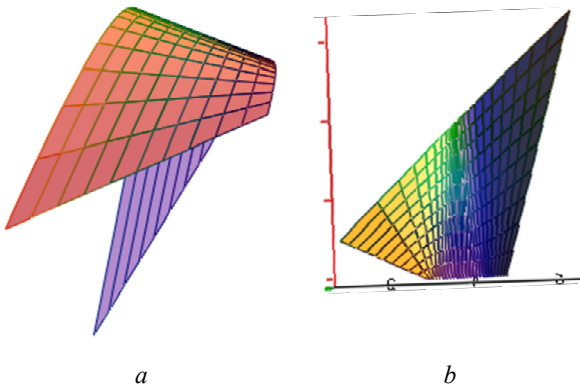
План в осях  $yOz$

**Рис. 6.** Торсовая поверхность с фрагментом окружности и параболой на параллельных торцах  
И с т о ч н и к: выполнено С.Н. Кривошапко.

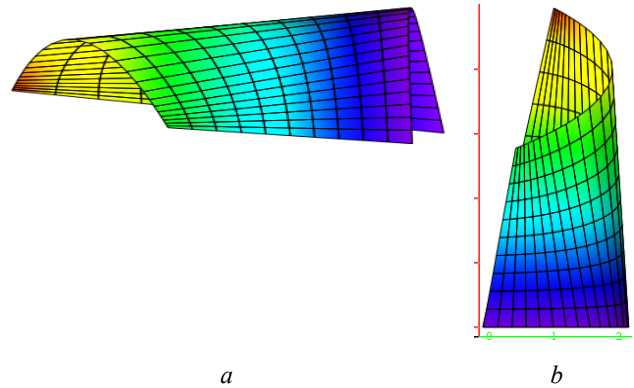
Торсовые поверхности на трапециевидном плане с двумя плоскими заданными кривыми на двух параллельных краях и с опирающимися на боковые стороны прямыми образующими рассматривались только в [7] с архитектурной точки зрения.

### 2.1.3. Торсовые поверхности с двумя заданными плоскими кривыми в пересекающихся плоскостях

При этих условиях возможны два случая, приемлемых для практического применения: когда оси направляющих кривых параллельны (случай 1) и когда оси направляющих кривых пересекаются (случай 2). Первый случай подробно рассмотрен в статье [3]. В качестве направляющих кривых взяты кривые (1)–(6) попарно и построены шесть торсовых поверхностей. Две из них представлены на рис. 7 и 8.



**Рис. 7.** Торс с биквадратной и квадратной параболой в пересекающихся плоскостях:  
 а — общий вид; б — вид на торс в плоскости  $xOz$   
 Источник: выполнено С.Н. Кривошапко.

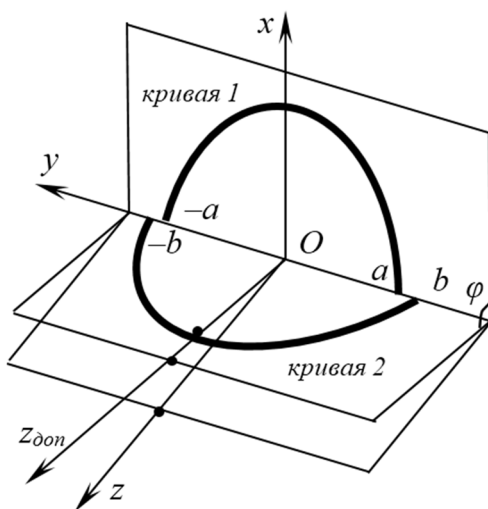


**Рис. 8.** Торс с гиперболой и параболой в пересекающихся плоскостях:  
 а — общий вид; б — вид на торс в плоскости  $yOz$   
 Источник: выполнено С.Н. Кривошапко.

Второй случай рассмотрим более подробно. Пусть две кривые лежат в пересекающихся плоскостях, а их оси пересекаются (рис. 9), тогда их параметрические уравнения можно представить в виде

$$\text{кривая 1: } x_1 = x_1(u), y_1 = u, z_1 = 0;$$

$$\text{кривая 2: } x_2 = x_2(v), y_2 = v, z_2 = x_2 \operatorname{tg} \varphi. \quad (12)$$



**Figure 9.** Two director curves with intersecting axes in intersecting planes

Source: compiled by S.N. Krivoshapko.

Условие компланарности трех векторов записывается в виде

$$(r_2 - r_1, r_1', r_2') = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & v - u & x_2 \operatorname{tg} \varphi \\ x_1' & 1 & 0 \\ x_2' & 1 & x_2 \operatorname{tg} \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде:

$$x_2' x_1' (v - u) + x_1 x_2' - x_2 x_1' = 0, \quad (13)$$

если принять

$$y_1'(u) = 1, y_2'(v) = 1, z_2' = x_2' \operatorname{tg} \varphi, x_2 = z_{\text{доп}}(v) \cos \varphi,$$

$\varphi$  — угол между пересекающимися плоскостями.

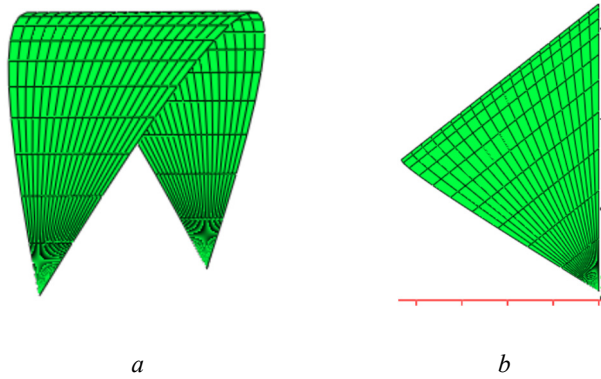


Векторное уравнение (9) для рассматриваемого случая задания направляющих кривых (12) можно перевести в параметрическую форму задания искомой торсовой поверхности:

$$\begin{aligned}x &= x(u, \lambda) = x_1(u)(1-\lambda) + \lambda x_2[v(u)]; \\y &= y(u, \lambda) = y_1(u)(1-\lambda) + \lambda y_2[v(u)] = u(1-\lambda) + \lambda v; \\z &= z(u, \lambda) = \lambda x_2[v(u)] \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}\quad (14)$$

**Пример 1.** Пусть заданы две квадратные параболы, лежащие в пересекающихся под углом  $\varphi$  плоскостях (рис. 9):

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(u) = h \left[ 1 - u^2 / a^2 \right], y_1 = y_1(u) = u, z_1 = 0; \\x_2 &= x_2(v) = H \left[ 1 - v^2 / b^2 \right] \cos \varphi, y_2 = y_2(v) = v, z_2 = z_2(v) = H \left[ 1 - v^2 / b^2 \right] \sin \varphi.\end{aligned}\quad (15)$$



**Рис. 10.** Торсовая поверхность, задаваемая уравнениями (17):

$a$  — общий вид;  $b$  — вид на торс в плоскости  $xOz$

И с т о ч н и к: выполнено С.Н. Кривошапко.

Соотношение между параметрами  $u$  и  $v$  находят по формуле (13):

$$v_{1,2} = \frac{1}{2} \left( u + \frac{a^2}{u} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( u + \frac{a^2}{u} \right)^2 - 4b^2}.\quad (16)$$

Если принять  $a = b$ , то получим  $v_1 = u$  и  $v_2 = a^2/u$ .

Принимая в дальнейшем  $v = v_1 = u$  и  $a = b$ , параметрические уравнения (14) искомой торсовой поверхности запишутся как

$$\begin{aligned}x &= x(u, \lambda) = \left( 1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \left[ h(1-\lambda) + \lambda H \cos \varphi \right]; \\y &= y(u) = u; \\z &= z(u, \lambda) = \lambda H \left( 1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \sin \varphi.\end{aligned}\quad (17)$$

На рис. 10 представлена поверхность, задаваемая параметрическими уравнениями (17), где

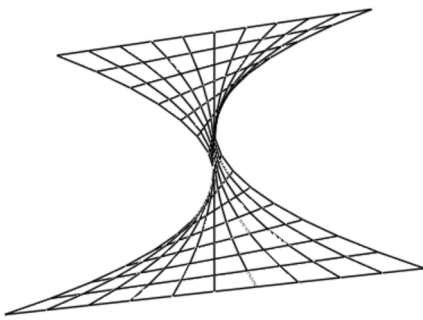
$$h = 6 \text{ м}, H = 5 \text{ м}, a = 2 \text{ м}, \varphi = 60^\circ, -a \leq u \leq a, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

**Пример 2.** Если принять, что параболы (15) лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях, то  $\varphi = 90^\circ$ , а параметрические уравнения (17) примут вид

$$\begin{aligned} x &= x(u, \lambda) = \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) [h(1 - \lambda)], \\ y &= y(u) = u, \\ z &= z(u, \lambda) = \lambda H \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Параметрические уравнения (18) можно преобразовать в неявную форму задания:

$$\frac{z}{H} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x}{h} - 1 = 0.$$



**Рис. 11.** Параболический торс  
Источники: выполнено С.Н. Кривошапко.

Очевидно, что это неявное уравнение описывает параболический цилиндр.

В энциклопедии [13] описаны две торсовые поверхности: одна с параболками, оси которых пересекаются, но параметрические уравнения парабол имеют вид, отличный от уравнений (15), другая торсовая поверхность содержит два эллипса во взаимно перпендикулярных плоскостях.

В.С. Обухова и Р.И. Воробкевич [19] предложили взять за направляющие кривые две параболы во взаимно перпендикулярных координатных плоскостях, касающихся своими вершинами одной из координатных осей, а оси парабол перпендикулярны к этой оси (рис. 11).

**Пример 3.** За направляющие кривые приняты полуэллипс (кривая 1) и парабола (кривая 2):

$$x_1 = x_1(u) = h \sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}}, \quad y_1 = u, \quad z_1 = 0;$$

$$x_2 = x_2(v) = H \left(1 - \frac{v^2}{b^2}\right) \cos \varphi, \quad y_2 = v, \quad z_2(v) = H \left(1 - \frac{v^2}{b^2}\right) \sin \varphi.$$

Соотношение между параметрами  $u$  и  $v$  находят по формуле (13):

$$u = \frac{2va^2}{b^2 + v^2}. \quad (19)$$

Параметрические уравнения (14) искомой торсовой поверхности запишутся как

$$\begin{aligned} x &= x(v, \lambda) = h(1 - \lambda) \sqrt{1 - \frac{4v^2 a^2}{(b^2 + v^2)^2}} + \lambda H \left(1 - \frac{v^2}{b^2}\right) \cos \varphi; \\ y &= y(v, \lambda) = (1 - \lambda) \frac{2va^2}{(b^2 + v^2)} + \lambda v; \\ z &= z(v, \lambda) = \lambda H \left(1 - \frac{v^2}{b^2}\right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (20)$$



На рис. 12 представлена поверхность, задаваемая параметрическими уравнениями (20), где

$$h = 4 \text{ м}, H = 5 \text{ м}, a = 1,2 \text{ м}, b = 1,8 \text{ м};$$

$$\varphi = 60^\circ, -b \leq v \leq b, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

В дальнейших предложениях торсовых поверхностей, заданных параметрическими уравнениями (14), для практического применения можно повернуть полученный торс вокруг оси  $u$  так, чтобы крайние прямые образующие торса стали опираться на заданное основание. В этом случае пересекающиеся плоскости с направляющими кривыми будут наклонены к основанию под соответствующими углами (см. рис. 10, *a*).

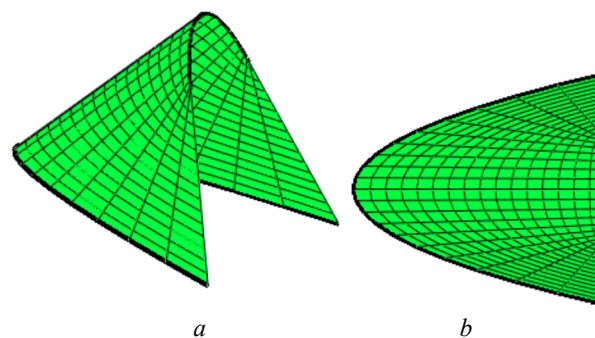


Рис. 12. Торсовая поверхность, задаваемая уравнениями (20):  
*a* — общий вид; *b* — вид на торс в плоскости  $yOz$   
Источник: выполнено С.Н. Кривошапко.

### 3. Обзор исследований по определению напряженно-деформированного состояния четырех типов торсовых оболочек с предложенными срединными поверхностями

Начало геометрическим исследованиям невырожденных торсовых поверхностей положил Г. Монж в 1805 г. С тех пор появились сотни научных работ, посвященных геометрии и применению этих поверхностей. Изучению напряженно-деформированного состояния тонких невырожденных торсовых оболочек, за исключением торсов-геликоидов [20] и оболочек одинакового ската [21], посвящено меньше двух десятков работ. Все известные торсовые оболочки имеют срединные поверхности, заданные в неортогональной сопряженной системе криволинейных координат, что значительно затрудняет аналитический расчет этих оболочек.

Система 20 расчетных уравнений для определения 19 двумерных параметров, представленная А.Л. Гольденвейзером, при условии задания срединной поверхности в произвольной системе криволинейных координат содержит внутренние «псевдоусилия» и «псевдомоменты» в отличие от внутренних усилий и моментов, принятых в системе 20 расчетных уравнений, содержащих 19 неизвестных величин, полученных автором [22]. Эти две системы расчетных уравнений использовались в упрощенном варианте только для безмоментного расчета торсовых оболочек двух видов. Г.Ч. Баджория [23] применил уравнения равновесия А.Л. Гольденвейзера для безмоментного расчета торсовой оболочки, заданной в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p}(v) + u\mathbf{l}(v), \quad (21)$$

где  $\mathbf{p}(v)$  — текущий радиус-вектор ребра возврата;  $\mathbf{l}(v)$  — единичный касательный вектор к ребру возврата. Б. Бхаттачария [24] также применил уравнения равновесия А.Л. Гольденвейзера, но при условии задания срединной поверхности торсовой оболочки в виде (9).

По безмоментной теории рассчитана торсовая оболочка, перекрывающая произвольный четырехугольный план с двумя плоскими параболами, лежащими в пересекающихся плоскостях с параллельными осями [25]. Результаты расчета торсовой оболочки с окружностью и эллипсом в параллельных плоскостях, нагруженной линейной нагрузкой на круговом торце, представлены в работе [26]. Та же оболочка, но нагруженная собственным весом, рассмотрена в [27].

### 4. Результаты

1. При построении торсовой поверхности с двумя направляющими алгебраическими кривыми  $n$ -го порядка в параллельных плоскостях (рис. 3, 4), проходящих через противоположные стороны прямоугольного плана  $2a \times l$ , можно взять за направляющие кривые любые алгебраические кривые,

причем стрела подъема  $h$  (рис. 1) одной из двух кривых принимается произвольной, а стрела подъема второй кривой вычисляется в зависимости от геометрических параметров двух принятых кривых из условия равенства углов  $\varphi_0$ . Расстояние  $l$  между плоскостями с кривыми на величину стрел подъема кривых не влияет.

2. Величины стрел подъема двух суперэллипсов (6) на параллельных плоскостях можно принимать любыми.

3. Для построения торсов с двумя направляющими алгебраическими кривыми  $n$ -го порядка в параллельных плоскостях (рис. 3, 4), проходящих через противоположные стороны прямоугольного плана  $2a \times l$  и торсов с двумя заданными плоскими кривыми (1)–(6) в параллельных плоскостях, но перекрывающих трапециевидный план с противоположными основаниями, равными  $2a$  и  $2b$ , можно использовать одни и те же параметрические уравнения (11).

4. Величины стрел подъема  $h$  и  $H$  двух направляющих кривых, лежащих в пересекающихся плоскостях, и величина угла  $\varphi$  между этими плоскостями не влияют на соотношение между параметрами  $u$  и  $v$  (см., например, формулы (16) и (19)).

5. Показано, что до настоящего времени исследованы 6 торсов с направляющими кривыми в параллельных плоскостях и с заданными граничными условиями на контурах прямоугольных планов [1], 8 торсов с направляющими кривыми в параллельных плоскостях и с заданными граничными условиями на контурах трапециевидных планов [2], 5 торсов с направляющими кривыми с параллельными осями в пересекающихся плоскостях [3], и только 3 торса с направляющими кривыми с пересекающимися осями в пересекающихся плоскостях. В представленной статье предложено к рассмотрению еще 3 торса с направляющими кривыми с пересекающимися осями в пересекающихся плоскостях.

6. Обзор опубликованных работ показал, что в настоящее время нет исследований напряженно-деформированного состояния тонких оболочек с рассмотренными срединными торсовыми поверхностями, заданными в криволинейных неортогональных сопряженных координатах  $u, \lambda$  в виде (11) или (14) с применением моментной теории оболочек. Исследователи из инженерной академии Российского университета дружбы народов (ИА РУДН), Москва, опубликовали большое число работ по геометрии, применению, аппроксимации торсов складками, построению разверток торсов на плоскость и параболическому изгибанию торсовых поверхностей, по определению параметров напряженно-деформированного состояния некоторых частных случаев торсовых оболочек. Помимо их работ, часть из которых указана в разделе «Использованная литература», большинство опубликованных научных статей за последние 25 лет посвящены реализации методов построения разверток торсов с двумя заданными направляющими кривыми на плоскость с максимальным привлечением ЭВМ [14; 28; 29] и применению торсов на практике [30] в авангардной архитектуре, в сельскохозяйственном машиностроении, в судостроении [10], в индустрии моды [15], а также решению математических задач, связанных с торсовыми поверхностями [31].

7. Установлено, что единственной работой по нахождению оптимальной цилиндрической оболочки с двумя искомыми опорными кривыми на торцах является статья В.Н. Иванова, О.О. Алёшиной, Е.А. Ларионова [16]. Цилиндрические поверхности являются вырожденными торсовыми поверхностями, у которых ребро возврата удаляется на бесконечность.

## 5. Заключение

В научно-технической литературе предложено 10 методов конструирования торсовых поверхностей. Наиболее известные из них это — конструирование торсов по двум заданным направляющим кривым, конструирование по заданному ребру возврата и кинематический метод наматывания плоскости с прямой линией на цилиндр и конус. Первый метод из перечисленных выше рекомендуется в основном для проектирования покрытий больших площадей в строительстве, второй — широко используется для создания винтовых и винтообразных изделий в машиностроении, а третий метод применяется при исследовании траектории движения прямой линии в пространстве и при изучении резной линейчатой поверхности Монжа.

Несмотря на то, что имеются эскизы архитектурных объектов в форме торсов с заданными опорными плоскими кривыми, наибольшее применение они нашли при проектировании корпусов речных и морских судов. Практически во всех публикациях по изготовлению корпусов судов используется графическое воплощение идей конструирования этих торсовых поверхностей.

В статье предложены аналитические решения поставленных задач. Для удобства изучения торсовых поверхностей с двумя заданными кривыми они разделены на четыре типа, для каждого из которых показан порядок получения явных или параметрических уравнений, по которым с помощью компьютерной графики построены соответствующие торсовые поверхности с заданными геометрическими параметрами.

Представленные материалы могут привлечь архитекторов и инженеров-практиков к расширенному использованию предложенных развертывающихся поверхностей в формах реальных изделий, конструкций и сооружений.

### Список литературы

1. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности на прямоугольном плане с двумя плоскими кривыми на противоположных торцах // Строительство и реконструкция. 2025. № 1 (117). С. 3–15. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2025-117-1-3-15> EDN: ACOCGO
2. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности на трапециевидном плане с заданными кривыми на торцах и прямыми образующими на боковых сторонах // Строительная механика и расчет сооружений. 2025. № 4 (321). С. 62–72. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2025.4.62.72>
3. Krivoschapko S.N. Torses with two curves in intersecting planes and with parallel axes // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2025. Vol. 21. No. 2. P. 155–166. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-155-166> EDN: NRNOQA
4. Павленко Г.Е. Об упрощенных формах судов. Москва : МРФ СССР, 1948. 28 с.
5. Горбатович Ж.Н. Конструирование торсовых поверхностей по двум плоским сечениям // Труды Белорусского государственного технологического университета. Серия 5. Физико-математические науки. 1995. № 2. С. 33–36. URL: <https://elib.belstu.by/handle/123456789/65082> (дата обращения: 12.03.2025).
6. Bhattacharya B. Theory of a new class of shells // Symposium on Industrialized Spatial and Shell Structures. Poland, 1973. P. 115–124.
7. Рекач В.Г., Рыжов Н.Н. Некоторые возможности расширения круга задач по конструированию и расчету оболочек // Строительная механика: Тр. УДН. Т. 48, вып. 6. Москва : УДН, 1970. С. 3–8.
8. Иванов В.Н. Линейчатые поверхности на заданных опорных кривых // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 9–17. EDN: TNEVUR
9. Ершов М.Е., Тупикова Е.М. Построение развертки торсовой поверхности с параболой на торцах // Инженерные исследования — 2020 : труды научно-практической конференции с международным участием / под ред. М.Ю. Мальковой. 2020. Российский университет дружбы народов (РУДН) (Москва). С. 34–41. EDN: JDIESQ
10. Perez-Arribas F., Fernandez-Jambrina L. Computer-aided design of developable surfaces: designing with developable surfaces // Journal of Computers. October 2018. Vol. 13. No. 10. P. 1171–1176. <http://doi.org/10.17706/jcp.13.10.1171-1176>
11. Chih-Hsing Chu, Charlie C.L. Wang, Chi-Rung Tsai. Computer aided geometric design of strip using developable Bezier patches // Computers in Industry. 2008. Vol. 59. P. 601–611. <http://doi.org/10.1016/j.compind.2008.03.001>
12. Васьков А.А., Дорохов А.С., Трушина Л.Н. Графическое построение рабочих поверхностей корпусов плугов // Вестник Федерального Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный агроинженерный университет имени В.П. Горячкина». 2012. № 2 (53). С. 51–53. EDN: RBFFND
13. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. Москва : Либроком, 2010, 560 с. ISBN 978-5-397-00985-0
14. Yang J.X., Liu J.Q., Wang C.Y., Liu J. Design and development of a developable surface based on engineering requirement // 3rd International Congress on Image and Signal Processing, Yantai, China, 2010. P. 1231–1234. <http://doi.org/10.1109/CISP.2010.5647252>
15. Miori I., Haruki I. A method of predicting sewn shapes and a possibility of sewing by the theory of developable surfaces // Journal of the Japan Research Association for Textile End-Uses. 2007. Vol. 48. No. 1. P. 42–51.
16. Иванов В.Н., Алёшина О.О., Ларионов Е.А. Определение оптимальных цилиндрических оболочек в форме поверхностей второго порядка // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 1. С. 37–47. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-1-37-47> EDN: IQCXLS

17. Belyaeva Z.V., Berestova S.A., Mityushov E.A. Tangent developable surfaces elements in thin-walled structures // VIII International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures Structural Membranes 2017. 2018. P. 415–426. EDN: XYCRPV
18. Olodo E.T., Adjovi E.C., Krivoshapko S.N. Geometrical modeling of a composite folded membrane by a developable membrane with parabolic guidelines of any order // International Journal of Scientific & Engineering Research. 2013. Vol. 4. Iss. 4. P. 338–343. ISSN 2229-5518
19. Обухова В.С., Воробкевич П.И. Аналитическое описание параболических торсов 4-го порядка // Прикладная геометрия и инженерная графика. Киев, 1982. Вып. 33. С. 16–19.
20. Rynkovskaya M. Support draft calculation for a ramp in the form of developable helicoid // 2018 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2018. Vol. 371. Article no. 012041. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/371/1/012041> EDN: VBTPRE
21. Иванов В.Н., Алёшина О.О. Сравнительный анализ результатов определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 5. С. 374–383. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383> EDN: LZSVVI
22. Krivoshapko S.N., Razin A.D. Comparison of two systems of governing equations for the thin shell analysis // Proceedings of the International Conference on Engineering Research 2021 (ICER 2021), Moscow, 2022. Vol. 2559 (1). Article no. 020009. <http://doi.org/10.1063/5.0099905>
23. Баджория Г.Ч. Применение системы уравнений А.Л. Гольденвейзера для расчета торсовых оболочек по безмоментной теории // Исследования по расчету элементов пространственных систем. Москва : УДН, 1987. С. 65–72.
24. Bhattacharya B. Membrane theory of new class of developable shells // Journal of Structural Engineering. 1983. Vol. 10. No. 3. P. 81–88.
25. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет невырожденных торсовых оболочек в криволинейных неортогональных координатах // Строительная механика и расчет сооружений. 1982. № 6. С. 23–29.
26. Кривошапко С.Н. Применение торсовых поверхностей в судостроении // Судостроение. 1983. № 7. С. 5–7.
27. Кривошапко С.Н. Построение, расчет и возможность применения торсовых оболочек в тонкостенных конструкциях // Расчет оболочек строительных конструкций : сб. трудов. Москва : УДН, 1982. С. 54–66.
28. Bhanage A. An overview of flat pattern development (FPD) methodologies used in blank development of sheet metal components of aircraft // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. April 2014. Vol. 3. No. 2. P. 33–43. URL: <https://www.ijmerr.com/currentissue.php> (accessed: 12.03.2025).
29. Nelson T.G., Zimmerman T.K., Magleby S.P., Lang R.J., Howell L.L. Developable mechanisms on developable surfaces // Science Robotics. 20 Feb 2019. Vol. 4. Issue 27. <http://doi.org/10.1126/scirobotics.aau5171>
30. Lawrence S. Developable surfaces: Their history and application // Nexus Network Journal. October 2011. Vol. 13 (3). P. 701–714. <http://10.1007/s00004-011-0087-z> EDN: HJZITK
31. Ishikawa G. Singularities of parallels to tangent developable surfaces // arXiv: Differential Geometry. 16 May 2021. URL: <https://scispace.com/papers/singularities-of-parallels-to-tangent-developable-surfaces-2cdy3p4ifc> (дата обращения: 12.03.2025).