

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-526-538

УДК 539.3

EDN: CIMBAP

Научная статья / Research article

## Использование различных формулировок МКЭ в расчетах тонкостенных конструкций

М.Ю. Клочков 

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

✉ m.klo4koff@yandex.ru

Поступила в редакцию: 27 сентября 2024 г.

Принята к публикации: 12 декабря 2024 г.

**Аннотация.** Представлен сравнительный анализ точности конечно-элементных решений тонкостенной конструкции в форме оболочки эллипсоидального типа при использовании МКЭ в форме метода перемещений и смешанной формулировке. Элементом дискретизации тонкостенной конструкции выбран четырехузловой фрагмент срединной поверхности с узловыми неизвестными в виде компонент вектора перемещения и их частных производных первого порядка по криволинейным координатам. При реализации смешанной формулировки МКЭ в качестве силовых узловых неизвестных выбраны деформации и искривления срединной поверхности тонкостенной конструкции. Матрица жесткости элемента дискретизации размерностью  $36 \times 36$  в форме метода перемещений была получена минимизацией функционала Лагранжа. Матрица жесткости конечного элемента в смешанной формулировке была скомпонована минимизацией смешанного функционала по кинематическим и по силовым узловым неизвестным. Применение метода подстановки при решении системы матричных уравнений смешанного варианта МКЭ позволило сохранить оптимальную размерность матрицы жесткости элемента дискретизации  $36 \times 36$ , такую же, как и при использовании МКЭ в форме метода перемещений. На тестовых примерах расчетов цилиндрической оболочки с круговым и эллиптическим поперечным сечениями показано, что предложенный вариант смешанного МКЭ обладает существенными преимуществами в плане точности конечно-элементных решений по сравнению с МКЭ в форме метода перемещений. Причем указанные преимущества возрастают по мере увеличения кривизны поверхности рассматриваемой оболочечной конструкции.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, метод перемещений, смешанная формулировка МКЭ

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Клочков М.Ю. Использование различных формулировок МКЭ в расчетах тонкостенных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 526–538. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-526-538>

---

**Клочков Михаил Юрьевич**, аспирант кафедры строительных конструкций, фундаментов и надежности сооружений факультета строительства и жилищно-коммунального хозяйства, Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955, ORCID: 0000-0001-6751-4629; e-mail: m.klo4koff@yandex.ru

© Клочков М.Ю., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Using Different FEM Formulations in Calculations of Thin-Walled Structures

Mikhail Yu. Klochkov 

Volgograd State Technical University, *Volgograd, Russia*

✉ m.klo4koff@yandex.ru

Received: September 27, 2024

Accepted: December 12, 2024

**Abstract.** A comparative analysis of the accuracy of finite element solutions of a thin-walled structure in the form of an ellipsoidal shell using displacement-based and mixed FEM is presented. The discretization element of the thin-walled structure is a four-node fragment of the middle surface with displacement components and their first-order partial derivatives with respect to curvilinear coordinates as the nodal unknowns. When implementing the mixed FEM formulation, strains and curvatures of the middle surface of the thin-walled structure are chosen as the force-type nodal unknowns. The stiffness matrix of the discretization element of dimension  $36 \times 36$  according to the displacement method was obtained by minimizing the Lagrange functional. The finite element stiffness matrix in the mixed formulation was compiled by minimizing the mixed functional with respect to the kinematic and force nodal unknowns. The use of the substitution method when solving the system of matrix equations of the mixed FEM made it possible to maintain the optimal dimension of the stiffness matrix of the discretization element  $36 \times 36$ , the same as in the case of the displacement-based FEM. Test examples of calculations of a cylindrical shell with circular and elliptical cross sections show that the proposed version of the mixed FEM has significant advantages in terms of the accuracy of finite element solutions compared to the displacement-based FEM. Moreover, these advantages improve as the curvature of the surface of the analyzed shell structure increases.

**Keywords:** finite element method, displacement method, mixed FEM formulation

**Conflicts of interest.** The author declares that there is no conflict of interest.

**For citation:** Klochkov MYu. Using different FEM formulations in calculations of thin-walled structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(6):526–538. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-526-538>

## 1. Введение

К настоящему времени тонкостенные конструкции, состоящие из тонких оболочек или их фрагментов, получают все более широкое распространение. К таковым относятся арочные конструкции, трубопроводы различного назначения, ангары, газгольдеры, резервуары, бункеры и многие другие. Прочностные расчеты подобного рода оболочечных конструкций в настоящее время базируются на основе использования численных методов, преобладающим из которых является метод конечных элементов (МКЭ) [1–5]. Во многих современных вычислительных комплексах МКЭ реализуется в форме метода перемещений [6–15]. Однако применение данного вида формулировки МКЭ к расчету оболочечных конструкций требует при использовании теории тонких оболочек [16] определения производных компонент вектора перемещения вплоть до второго порядка включительно, что сопряжено с дополнительными вычислительными трудностями. К ним относится необходимость использования интерполяционных полиномов высокого порядка с дополнительным включением в число искомых неизвестных производных нормального перемещения второго порядка [17]. Для вычисления искомых силовых неизвестных в виде продольных сил и изгибающих моментов необходимо предварительно получить деформации и искривления срединной поверхности как функций от перемещений и их производных.

Альтернативой данному подходу может служить использование МКЭ в смешанной формулировке [18–26], при которой открывается возможность одновременно получать как кинематические

---

*Mikhail Yu. Klochkov*, post-graduate student of the Department of Building Structures, Foundations and Reliability of Structures, Faculty of Construction and Housing and Communal Services, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955, ORCID: 0000-0001-6751-4629; e-mail: m.klo4koff@yandex.ru

(перемещения и их производные), так и силовые (продольные силы, моменты, деформации) искомые прочностные параметры.

Естественным образом возникает вопрос о том, какая же формулировка МКЭ является наиболее предпочтительной. В данной работе на примере расчета фрагмента эллиптического цилиндра представлен сравнительный анализ эффективности использования МКЭ в форме метода перемещений и смешанного варианта МКЭ, базирующегося на применении четырехузлового элемента дискретизации с варьируемыми параметрами в виде компонент вектора перемещения и их производных первого порядка.

## 2. Методы

### 2.1. Геометрические соотношения

Срединная поверхность тонкостенной конструкции эллипсоидального типа может быть задана радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + y(x,t)\vec{j} + z(x,t)\vec{k}, \quad (1)$$

где  $t$  — параметр эллипса поперечного сечения оболочки плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ .

Ковариантные векторы базиса точки  $M^0$  срединной поверхности оболочки в недеформированном состоянии определяются формулами

$$\vec{a}_\rho^0 = \vec{R}_{,\rho}^0 \quad (\rho=1,2), \quad (2)$$

а орт нормали в точке  $M^0$  — векторным произведением

$$\vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / \sqrt{a_0}, \quad (3)$$

где  $a_0 = (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0)(\vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0) - (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0)^2$ .

При приложении к оболочечной конструкции внешней поверхностной нагрузки точка  $M^0$  займет новое положение  $M$ , определяемое радиус-вектором

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \vec{v} = \vec{R}^0 + (v^\rho \vec{a}_\rho^0 + v \vec{a}^0), \quad (4)$$

а точка  $M^{0\zeta}$ , находящаяся в произвольном слое оболочки, переместится в точку  $M^\zeta$ , определяемую радиус-вектором

$$\vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V} = (\vec{R}^0 + \zeta \vec{a}^0) + \vec{V}. \quad (5)$$

Входящий в (5) вектор перемещения точки  $M^{0\zeta}$  может быть определен с привлечением гипотезы о прямой нормали [16]

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0), \quad (6)$$

где  $\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / \sqrt{a}$  — орт нормали в точке  $M$  деформированной срединной поверхности;

$\vec{a}_\rho = \vec{R}_{,\rho} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,\rho}$ ;  $\vec{a} = (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)^2$ .

Дифференцированием  $\vec{R}^{0\zeta}$  и  $\vec{R}^\zeta$  по  $x$  и  $t$  определяются векторы базиса исходного и деформированного состояний

$$\vec{g}_\rho^0 = \vec{R}_{,\rho}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_\rho = \vec{R}_{,\rho}^\zeta, \quad (7)$$

скалярные произведения которых, в свою очередь, определяют компоненты метрического тензора в данных состояниях:

$$g_{\rho\gamma}^0 = \vec{g}_\rho^0 \cdot \vec{g}_\gamma^0; \quad g_{\rho\gamma} = \vec{g}_\rho \cdot \vec{g}_\gamma. \quad (8)$$

Деформации произвольного слоя оболочки, отстоящего на расстоянии  $\zeta$  от ее срединной поверхности, могут быть получены посредством использования соотношений механики сплошных сред [27].

$$\varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta = 0.5(g_{\rho\gamma} - g_{\rho\gamma}^0). \quad (9)$$

## 2.2. Четырехузловой элемент дискретизации

Тонкостенная конструкция моделируется четырехугольными фрагментами срединной поверхности с узлами  $i, j, k, l$ , расположенными в их вершинах. Узловыми искомыми неизвестными выбираются компоненты вектора перемещения и их производные первого порядка при реализации МКЭ в форме метода перемещений. При использовании смешанной формулировки МКЭ в качестве искомым узловых неизвестных наряду с перемещениями и их производными дополнительно привлекаются силовые параметры в виде деформаций и искривлений срединной поверхности тонкостенной конструкции.

Таким образом, для используемого элемента дискретизации вводятся два столбца узловых неизвестных

$$\left\{ U^L \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \left\{ v^{1L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v^{2L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v^L \right\}_{1 \times 12}^T \right\}; \quad (10)$$

$$\left\{ \varepsilon \mathbf{N} \right\}_y^T = \left\{ \left\{ \varepsilon_{\rho\gamma} \right\}_y^T \left\{ \mathbf{N}_{\rho\gamma} \right\}_y^T \right\}_{1 \times 24}; \quad (11)$$

где  $\left\{ q^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i \dots q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i \dots q_{,\eta}^l \right\}$ ; под  $q$  понимается компонента вектора перемещения  $v^\rho$

или  $v$ ;  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$  — локальные координаты;  $\left\{ \varepsilon_{\rho\gamma} \right\}_y^T = \left\{ \left\{ \varepsilon_{11} \right\}_y^T \left\{ \varepsilon_{22} \right\}_y^T \left\{ 2\varepsilon_{12} \right\}_y^T \right\}_{1 \times 12}$ ;

$$\left\{ \mathbf{N}_{\rho\gamma} \right\}_y^T = \left\{ \left\{ \mathbf{N}_{11} \right\}_y^T \left\{ \mathbf{N}_{22} \right\}_y^T \left\{ 2\mathbf{N}_{12} \right\}_y^T \right\}_{1 \times 12}.$$

Для интерполяции компонент вектора перемещения привлекаются произведения полиномов Эрмита третьего порядка

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \{\Phi\}^T \\ \{q^L\} \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} 1 \times 12 \\ 12 \times 1 \end{matrix} \quad (12)$$

а для деформаций и искривлений — билинейные функции локальных координат  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ , например:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11} = \begin{Bmatrix} \{\Psi\}^T \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}_{11}\}_y \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\kappa}_{11} = \begin{Bmatrix} \{\Psi\}^T \\ \{\boldsymbol{\kappa}_{11}\}_y \end{Bmatrix}. \quad \begin{matrix} 1 \times 4 \\ 4 \times 1 \end{matrix} \quad (13)$$

С учетом (12), (13) можно скомпоновать следующие матричные интерполяционные соотношения:

$$\{U\} = [A] \{U^L\} = [A] [P_R] \{U^G\}; \quad \begin{matrix} 3 \times 1 \\ 3 \times 36 & 36 \times 1 \\ 3 \times 36 & 36 \times 36 & 36 \times 1 \end{matrix} \quad (14)$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{py}\} = [H] \{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\kappa}\}_y, \quad \begin{matrix} 6 \times 1 \\ 6 \times 24 & 24 \times 1 \end{matrix} \quad (15)$$

где  $\{U\}^T = \{v^1 \ v^2 \ v\}$  — компоненты вектора перемещения точки  $M^0$  срединной поверхности;

$\{U^G\}$  — столбец узловых значений компонент вектора перемещения и их производных в глобальной системе координат  $x, t$ ;  $[P_R]$  — матрица, определяющая связь между столбцами  $\{U^L\}$

и  $\{U^G\}$ .

Функционал Лагранжа, необходимый для компоновки матрицы жесткости используемого элемента дискретизации, может быть записан в виде [17]

$$\Phi_L = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\sigma}^{py}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}_{py}^z\} dV - \frac{1}{2} \int_F \{U\}^T \{P\} dF \quad (16)$$

или с учетом (9), (14)

$$\begin{aligned} \Phi_L = & \frac{1}{2} \{U^G\}^T [P_R]^T \int [B]^T [S]^T [C]^T [S] [B] dV [P_R] \{U^G\} - \\ & - \frac{1}{2} \{U^G\}^T [P_R] \int [A]^T \{P\} dF, \end{aligned} \quad \begin{matrix} 1 \times 36 & 36 \times 36 & V & 36 \times 6 & 6 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 6 & 6 \times 36 & 36 \times 36 & 36 \times 1 \\ 1 \times 36 & 36 \times 36 & F & 36 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix} \quad (17)$$

где  $[C]$  — матрица упругости;  $[S]$  — матрица перехода от деформаций произвольного слоя к де-

формациям и искривлениям срединной поверхности;  $[B]$  — матрица, компокуемая на основе соотношений Коши и (14).

Минимизацией (16) по  $\{U^G\}^T$  можно получить матрицу жесткости  $[K_L]$  и столбец узловых усилий  $\{f^G\}$  элемента дискретизации в формулировке метода перемещений

$$\partial\Phi_L/\partial\{U^G\}^T \equiv \underset{36 \times 36}{[K_L]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} - \underset{36 \times 1}{\{f^G\}} = 0, \quad (18)$$

где  $\underset{36 \times 36}{[K_L]} = \underset{36 \times 36}{[P_R]}^T \int \underset{V}{\underset{36 \times 6}{[B]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 36}{[B]} dV \underset{36 \times 36}{[P_R]}$ ;  $\underset{36 \times 1}{\{f^G\}} = \underset{36 \times 36}{[P_R]} \int \underset{F}{\underset{36 \times 3}{[A]}^T \underset{3 \times 1}{\{P\}}} dF$ .

Смешанный функционал для получения матрицы жесткости используемого элемента дискретизации может быть записан в виде

$$\Phi_S = \int \underset{V}{\underset{1 \times 3}{\{\varepsilon_{py}^{\zeta}\}}^T \underset{3 \times 1}{\{\sigma^{py}\}}} dV - \frac{1}{2} \int \underset{V}{\underset{1 \times 3}{\{\varepsilon_{py}^{\zeta}\}}^T \underset{3 \times 1}{\{\sigma^{py}\}}} dV - \frac{1}{2} \int \underset{F}{\underset{1 \times 3}{\{U\}}^T \underset{3 \times 1}{\{P\}}} dF. \quad (19)$$

Учитывая вышеизложенное, функционал (19) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_S = & \underset{1 \times 24}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y^T \int \underset{V}{\underset{24 \times 6}{[H]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 36}{[B]} dV \underset{36 \times 36}{[P_R]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} - \\ & - \frac{1}{2} \underset{1 \times 24}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y^T \int \underset{V}{\underset{24 \times 6}{[H]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 24}{[H]} dV \underset{1 \times 24}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y - \frac{1}{2} \underset{1 \times 36}{\{U^G\}}^T \underset{36 \times 36}{[P_R]}^T \int \underset{F}{\underset{36 \times 3}{[A]}^T \underset{3 \times 1}{\{P\}}} dF. \end{aligned} \quad (20)$$

Последовательно применяя к (20) процедуру минимизации по  $\underset{y}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}^T$  и по  $\{U^G\}^T$ , можно записать следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} \partial\Phi_S/\partial\{\varepsilon \mathbf{N}\}_y^T \equiv \underset{24 \times 36}{[G]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} - \underset{24 \times 24}{[D]} \underset{24 \times 1}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y = 0; \\ \partial\Phi_S/\partial\{U^G\}^T \equiv \underset{36 \times 24}{[G]}^T \underset{24 \times 1}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y - \underset{36 \times 1}{\{f^G\}} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\underset{24 \times 36}{[G]} = \int \underset{V}{\underset{24 \times 6}{[H]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 36}{[B]} dV \underset{36 \times 36}{[P_R]}$ ;  $\underset{24 \times 24}{[D]} = \int \underset{V}{\underset{24 \times 6}{[H]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 24}{[H]} dV$ .

Реализуя подстановку  $\underset{y}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}} = \underset{24 \times 24}{[D]}^{-1} \underset{24 \times 36}{[G]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}}$ , систему (21) можно привести к виду

$$\underset{36 \times 24}{[G]}^T \underset{24 \times 24}{[D]}^{-1} \underset{24 \times 36}{[G]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} = \underset{36 \times 1}{\{f^G\}} \quad (22)$$

или

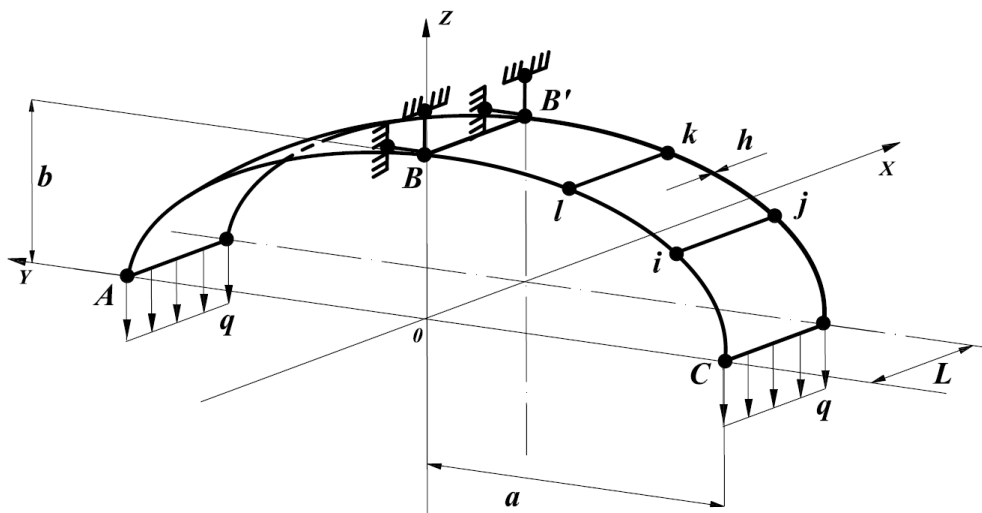
$$\underset{36 \times 36}{[K_S]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} = \underset{36 \times 1}{\{f^G\}}, \quad (23)$$

где  $\underset{36 \times 36}{[K_S]} = \underset{36 \times 24}{[G]}^T \underset{24 \times 24}{[D]}^{-1} \underset{24 \times 36}{[G]}$  — матрица жесткости элемента дискретизации в смешанной формулировке МКЭ.

Процедура компоновки глобальной матрицы жесткости оболочечной конструкции осуществляется стандартным для МКЭ способом [1] из  $[K_L]$  или  $[K_S]$  посредством матрицы индексов.

### 3. Результаты и обсуждения

Пример расчета 1. Был рассчитан фрагмент цилиндрической оболочки в виде полукольца, нагруженного вдоль образующих равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 1 \text{ Н/см}$ , шарнирно закрепленного в точках  $B$ ,  $B'$  (рис.). Были использованы следующие исходные данные:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $L = 1 \text{ см}$ ; толщина стенки  $h = 0,2 \text{ м}$ .



Расчетная схема оболочки  
Источник: выполнено М.Ю. Клочковым  
Shell model  
Source: made by M.Yu. Klochkov

Первоначально был рассчитан фрагмент кругового цилиндра, параметры эллипса поперечного сечения при этом принимались равными  $a = b = 50 \text{ см}$ . Расчеты были выполнены в двух вариантах: в первом варианте использовался МКЭ в форме метода перемещений (16) и (17); во втором варианте был реализован МКЭ в смешанной формулировке (19)...(23). Результаты расчетов сведены в табл. 1, в которой приведены «физические» значения кольцевых напряжений на внутренней  $\sigma_{\theta\theta}^{\text{in}}$ , наружной  $\sigma_{\theta\theta}^{\text{out}}$  и срединной  $\sigma_{\theta\theta}^{\text{midl}}$  поверхностях оболочки, а также продольной силы  $N_{22}$  в точках  $A$  и  $C$  оболочки в зависимости от сетки узлов дискретизации. В правой крайней колонке приведены значения аналитического решения.

Анализ данных, представленных в табл. 1, показывает, что и в первом и во втором варианте наблюдается устойчивая сходимость вычислений к точному аналитическому решению. В то же время следует отметить, что точность конечно-элементных решений во втором варианте оказалась выше, чем в первом варианте.

Пример расчета 2. Во втором примере расчета круговой цилиндр был заменен на эллиптический с соотношением параметров эллипса поперечного сечения  $a/b = 50 \text{ см}/40 \text{ см}$ , равного 1,25. Прочие исходные данные имели те же значения. Результаты повариантных расчетов приведены в табл. 2, структура которой совпадает с табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

**Значения нормальных напряжений и продольной силы в точках приложения нагрузки в круговом цилиндре**  
**Values of normal stress and axial force at the points of load application in the circular cylinder**

Координаты точек $x, \text{ см}; t, \text{ рад} /$ Point coordinates $x, \text{ cm}; t, \text{ rad}$	$\sigma, \text{ Н/см}^2; N_{22}, \text{ Н} /$ $\sigma, \text{ N/cm}^2; N_{22}, \text{ N}$	Варианты формулировок МКЭ / FEM formulation option						Аналитическое решение / Analytical solution
		Метод перемещений / Displacement method			Смешанная формулировка / Mixed formulation			
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid						
		101×2	151×2	201×2	101×2	151×2	201×2	
Точка / Point $A$ : $x = 0,00$ $t = -\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{\text{in}}$	6,190	5,470	5,250	5,600	5,250	5,130	–
	$\sigma_{tt}^{\text{out}}$	4,490	4,720	4,830	4,400	4,750	4,870	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	5,340	5,100	5,040	5,000	5,000	5,000	5,000
	$N_{22}$	1,0672	1,0191	1,0079	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000
Точка / Point $C$ : $x = 0,00$ $t = \frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{\text{in}}$	6,290	5,500	5,250	5,600	5,250	5,130	–
	$\sigma_{tt}^{\text{out}}$	4,400	4,690	4,830	4,400	4,750	4,870	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	5,340	5,100	5,040	5,000	5,000	5,000	5,000
	$N_{22}$	1,0681	1,0192	1,0079	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000

И с т о ч н и к: выполнено М.Ю. Клочковым / S o u r c e: made by M.Yu. Klochkov

Таблица 2 / Table 2

**Значения нормальных напряжений и продольной силы**  
**в точках приложения нагрузки в эллиптическом цилиндре при  $a/b=1,25$**

**Values of normal stresses and axial force at the points of load application in the elliptical cylinder at  $a/b=1.25$**

Координаты точек $x, \text{ см}; t, \text{ рад} /$ Point coordinates $x, \text{ cm}; t, \text{ rad}$	$\sigma, \text{ Н/см}^2; N_{22}, \text{ Н} /$ $\sigma, \text{ N/cm}^2; N_{22}, \text{ N}$	Метод перемещений / Displacement method					Аналитическое решение / Analytical solution
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid					
		101×2	201×2	301×2	351×2	401×2	
Точка / Point $A$ : $x = 0,00$ $t = -\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{\text{in}}$	6,013	5,578	5,333	5,246	5,133	–
	$\sigma_{tt}^{\text{out}}$	–2,489	3,837	3,854	4,345	4,869	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	1,735	4,702	4,453	4,793	5,000	5,000
	$N_{22}$	0,347	0,940	0,8905	0,9586	1,000	1,000
Точка / Point $C$ : $x = 0,00$ $t = \frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{\text{in}}$	6,015	5,492	5,233	5,181	5,196	–
	$\sigma_{tt}^{\text{out}}$	–2,484	3,152	5,246	4,841	4,540	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	1,739	4,315	5,239	5,010	4,866	5,000
	$N_{22}$	0,349	0,863	1,049	1,002	0,9733	1,000



Окончание табл. 2 / Ending of the Table 2

Координаты точек $x$ , см; $t$ , рад / Point coordinates $x$ , cm; $t$ , rad	$\sigma$ , Н/см <sup>2</sup> ; $N_{22}$ , Н / $\sigma$ , N/cm <sup>2</sup> ; $N_{22}$ , N	Смешанная формулировка / Mixed formulation				Аналитическое решение / Analytical solution
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid				
		101×2	201×2	251×2	251×2	
Точка / Point $A$ : $x = 0,00$ $t = -\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{in}$	5,588	5,123	5,123	5,037	–
	$\sigma_{tt}^{out}$	4,416	4,877	4,877	4,963	–
	$\sigma_{tt}^{midl}$	4,999	5,000	5,000	5,000	5,000
	$N_{22}$	0,9997	1,000	1,000	1,000	1,000
Точка / Point $C$ : $x = 0,00$ $t = \frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{in}$	5,588	5,123	5,123	5,037	–
	$\sigma_{tt}^{out}$	4,416	4,877	4,877	4,963	–
	$\sigma_{tt}^{midl}$	4,999	5,000	5,000	5,000	5,000
	$N_{22}$	0,9997	1,000	1,000	1,000	1,000

Источник: выполнено М.Ю. Клочковым / Source: made by M.Yu. Klochkov

Анализ табличных данных показывает, что в первом варианте наблюдается медленная сходимость вычислительного процесса. Относительно приемлемые результаты достигаются при сетке дискретизации  $351 \dots 401 \times 2$ . Кроме того, следует отметить некоторое различие в значениях  $\sigma_{tt}$  и  $N_{22}$  в точках  $A$  и  $C$  оболочки, хотя они должны быть абсолютно одинаковыми, исходя из симметрии расчетной схемы. Во втором варианте расчета можно констатировать быструю сходимость вычислительного процесса и абсолютное совпадение  $\sigma_{tt}$  и  $N_{22}$  в точках  $A$  и  $C$ , что и должно выполняться.

Таблица 3 / Table 3

Значения нормальных напряжений и продольной силы  
в точках приложения нагрузки в эллиптическом цилиндре при  $a/b=2,5$

Values of normal stresses and axial force at the points of load application in the elliptical cylinder at  $a/b=2.5$

Координаты точек $x$ , см; $t$ , рад / Point coordinates $x$ , cm; $t$ , rad	$\sigma$ , Н/см <sup>2</sup> ; $N_{22}$ , Н / $\sigma$ , N/cm <sup>2</sup> ; $N_{22}$ , N	Метод перемещений / Displacement method					Аналитическое решение / Analytical solution
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid					
		101×2	201×2	301×2	401×2	501×2	
Точка / Point $A$ : $x = 0,00$ $t = -\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{in}$	-342,0	-22,29	4,098	7,924	9,031	–
	$\sigma_{tt}^{out}$	-880,85	-142,1	-46,52	-17,385	-39,42	–
	$\sigma_{tt}^{midl}$	-618,3	-83,72	-21,85	-5,048	-15,80	5,000
	$N_{22}$	-123,7	-16,74	-4,369	-1,010	-3,160	1,0000
Точка / Point $C$ : $x = 0,00$ $t = \frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{in}$	-342,0	-22,23	3,830	7,507	7,062	–
	$\sigma_{tt}^{out}$	-880,84	-141,9	-47,91	-23,50	19,99	–
	$\sigma_{tt}^{midl}$	-618,3	-83,60	-22,69	-8,386	13,67	5,000
	$N_{22}$	-123,7	-16,72	-4,538	-1,677	2,733	1,0000

Окончание табл. 3 / Ending of the Table 3

Координаты точек $x$ , см; $t$ , рад / Point coordinates $x$ , cm; $t$ , rad	$\sigma$ , Н/см <sup>2</sup> ; $N_{22}$ , Н $\sigma$ , N/cm <sup>2</sup> ; $N_{22}$ , N	Смешанная формулировка / Mixed formulation				Аналитическое решение / Analytical solution
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid				
		101×2	151×2	201×2	251×2	
Точка / Point $A$ : $x=0,00$ $t=-\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{in}$	5,500	5,150	5,030	4,973	–
	$\sigma_{tt}^{out}$	4,512	4,850	4,970	5,025	–
	$\sigma_{tt}^{midl}$	4,994	5,000	5,000	5,000	5,000
	$N_{22}$	0,99875	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000
Точка / Point $C$ : $x=0,00$ $t=\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{tt}^{in}$	5,501	5,150	5,030	4,973	–
	$\sigma_{tt}^{out}$	4,512	4,850	4,970	5,025	–
	$\sigma_{tt}^{midl}$	4,994	5,000	5,000	5,000	5,000
	$N_{22}$	0,99875	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000

И с т о ч н и к: выполнено М.Ю. Клочковым / S o u r c e: made by M.Yu. Klochkov

Пример расчета 3. В третьем примере была рассчитана оболочка с большей кривизной срединной поверхности, чем во втором примере. Соотношение параметров эллипса поперечного сечения было принято равным  $a/b = 50 \text{ см}/20 \text{ см} = 2,5$ . Результаты конечно-элементных решений при  $a/b = 2,5$  приведены в табл. 3. Как следует из табл. 3, результаты расчетов принципиально различаются по вариантам. В первом варианте численные значения напряжений и продольной силы нельзя признать удовлетворительными, несмотря на значительное сгущение сетки дискретизации. Во втором варианте можно наблюдать устойчивую сходимости численных значений к точному аналитическому решению при сравнительно редкой сетке дискретизации.

#### 4. Заключение

Таким образом можно отметить, что при выполнении прочностных расчетов тонкостенных конструкций из оболочек эллипсоидального профиля наиболее эффективным инструментом исследования НДС последних представляется МКЭ в смешанной формулировке. Предложенный вариант функционала (16) позволил получить в результате его минимизации по перемещениям и их производным, а также по деформациям и искривлениям срединной поверхности матрицу жесткости четырехузлового конечного элемента размерностью  $36 \times 36$ , необходимого для дискретизации рассчитываемой оболочечной конструкции. Выполненные исследования позволили сделать следующие выводы:

1. Применение метода подстановки для решения системы матричных уравнений (21) дало возможность избежать увеличения размерности матрицы жесткости конечного элемента при реализации предложенного смешанного варианта МКЭ.

2. При определении НДС тонкостенных конструкций из оболочек эллипсоидального профиля точность вычисления контролируемых параметров прочности предложенным смешанным вариантом МКЭ оказалась существенно выше по сравнению с вариантом расчета, в котором был реализован МКЭ в форме метода перемещений.

3. При расчете оболочки эллипсоидального профиля со значительной кривизной срединной поверхности корректные значения параметров НДС удалось получить только при использовании предложенного варианта смешанного МКЭ. Традиционный вариант МКЭ в форме метода перемещений в этом случае не позволил получить удовлетворительного по точности решения.

## Список литературы

1. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград : Судостроение, 1974. 342 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=661671&pg=8> (дата обращения: 20.09.2024).
2. *Бате К.Ю.* Метод конечных элементов. Москва : Физматлит, 2010. 1022 с.
3. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 391 с. URL: <https://djvu.online/file/WtV8YnGU6bpRv> (дата обращения: 20.09.2024).
4. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. 6th Edition. Butterworth-Heinemann; 2005. 631 p. ISBN: 9781493302895
5. *Аганов В.П., Маркович А.С.* Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС: монография. Москва : РУДН, 2023. 264 с. ISBN: 978-5-209-11784-1
6. *Тыукалов Ю.Я.* Quadrilateral Finite Element for Thin and Thick Plates // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. Issue. 5 (98). Article no. 9802. <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.2>
7. *Dmitriev A.N., Lalin V.V., Novozhilov Iu.V., Mikhaliuk D.S.* Simulation of Concrete Plate Perforation by Coupled Finite Element and Smooth Particle Hydrodynamics Methods // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Issue. 7 (92). Article no. 9207. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.7>
8. *Ko Y., Lee P.-S., Bathe K.-J.* A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element // Computers & Structures. 2017. Vol. 192. P. 34–49. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.003>
9. *Schöllhammer D., Fries T.P.* A higher-order trace finite element method for shells // Numerical Methods in Engineering. 2021. Vol. 122. No. 5. P. 1217–1238. <https://doi.org/10.1002/nme.6558>
10. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu.* The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. No. 3. P. 373–381. <https://doi.org/10.1134/S1995080220030117>
11. *Maslennikov A.M., Kobelev E.A., Maslennikov N.A.* Solution of stability problems by the finite element method // Bulletin of Civil Engineers. 2020. Vol. 2 (79). P. 68–74.
12. *Аганов В.П., Айдемиров К.Р.* Проектирование лопастей воздушных винтов самолетов методом конечных элементов с учетом прочности конструкций // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 1. С. 65–71. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-1-65-71>
13. *Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M.* Modeling a Synthesized Element of Complex Geometry Based Upon Three-Dimensional and Two-Dimensional Finite Elements // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 9. P. 2263–2271. <http://doi.org/10.1134/S1995080221090316>
14. *Jurayev D., Vatin N., Sultanov T., Mirsaidov M.* Spatial stress-strain state of Earth dams // Magazine of Civil Engineering. 2023. Vol. 2. No. 118. Article no. 11810. <https://doi.org/10.34910/MCE.118.10>
15. *Косицын С.Б., Акулич В.Ю.* Численный анализ НДС ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 4. С. 303–310. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310>
16. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с. ISBN: 978-5-288-05021-3
17. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A.* Using Lagrange multipliers in the triangular element of a nonshallow shell under variable interpolation of displacements // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2017. Vol. 11. No. 4. P. 535–544. <https://doi.org/10.1134/S1990478917040111>
18. *Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S., Azarov A.A.* Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory // Magazine of Civil Engineering. 2019. Vol. 5. No. 89. P. 79–93. <https://doi.org/10.18720/MCE.89.7>
19. *Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M.* An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018. Issue 113 (4). P. 634–655. <https://doi.org/10.1002/nme.5629>
20. *Klochkov Yu., Pshenichkina V., Nikolaev A., Vakhnina O., Klochkov M.* Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element // Magazine of Civil Engineering. 2023. Issue 4 (120). P. 12003. <https://doi.org/10.34910/MCE.120.3>
21. *Клочков Ю.В., Пиеничкина В.А., Николаев А.П., Вахнина О.В., Клочков М.Ю.* Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 64–72. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72>
22. *Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner-Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // Int. J. Mech. 2015. Vol. 54. P. 105–119. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.06.010>
23. *Nodargi N.A., Bisegna P.* State update algorithm for isotropic elastoplasticity by incremental energy minimization // Int. J. Numer. Methods Eng. 2015. Vol. 105. No. 3. 163–196. <https://doi.org/10.1002/nme.4966>

24. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures // *Materials Research Proceedings*. 2023. Vol. 26. P. 227–232. <https://doi.org/10.21741/9781644902431-37>
25. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element // *International Journal for Numerical Methods*. 2022. Vol. 123. No. 24. P. 6243–6266. <https://doi.org/10.1002/nme.7112>
26. Игнатъев А.В., Завьялов И.С., Бочков М.И. Алгоритм редуцирования систем уравнений МКЭ высоких порядков с использованием полиномиальной интерполяции основных смешанных неизвестных // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2024. № 7 (787). С. 5–18. <https://doi.org/10.32683/0536-1052-2024-787-7-5-18>
27. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 томах. Москва : Наука, 1976. Том 2. 536 с. ISBN: 5-02-007052-1

## References

1. Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Finite element method in calculations of ship structures*. Leningrad: Sudostroenie Publ.; 1974. (In Russ.) 2018;4(2):177–186. Available from: <https://reallib.org/reader?file=661671&pg=8> (accessed: 20.09.2024).
2. Bate K.Yu. *Finite Element Method*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2010. (In Russ.)
3. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Finite element method in the statics and dynamics of thin-walled structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/WtV8YnGU6bpRv> (accessed: 20.09.2024).
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6th edition. Butterworth-Heinemann; 2005. ISBN: 9781493302895
5. Agapov V.P., Markovich A.S. *Nonlinear models of concrete and reinforced concrete structures. Theory and implementation in VK PRINCE: monograph*. Moscow: RUDN Publ.; 2023. (In Russ.) ISBN: 978-5-209-11784-1
6. Tyukalov Yu.Ya. Quadrilateral Finite Element for Thin and Thick Plates. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021;5(98):9802. <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.2>
7. Dmitriev A.N., Lalin V.V., Novozhilov Iu.V., Mikhaliuk D.S. Simulation of Concrete Plate Perforation by Coupled Finite Element and Smooth Particle Hydrodynamics Methods. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020;7(92): 9207. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.7>
8. Ko Y., Lee P.-S., Bathe K.-J. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element. *Computers & Structures*. 2017;192:34–49. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.003>
9. Schöllhammer D., Fries T.P. A higher-order trace finite element method for shells. *Numerical Methods in Engineering*. 2021;122(5):1217–1238. <https://doi.org/10.1002/nme.6558>
10. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41(3):373–381. <https://doi.org/10.1134/S1995080220030117>
11. Maslennikov A.M., Kobelev E.A., Maslennikov N.A. Solution of stability problems by the finite element method. *Bulletin of Civil Engineers*. 2020;2(79):68–74.
12. Agapov V.P., Aidemirov K.R. Designing of the blades of aircraft propellers by the finite element method, taking into account the strength of structure. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2021;22(1):65–71. 2021;22(1):65–71. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-1-65-71>
13. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a Synthesized Element of Complex Geometry Based Upon Three-Dimensional and Two-Dimensional Finite Elements. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(9):2263–2271. <http://doi.org/10.1134/S1995080221090316>
14. Jurayev D., Vatin N., Sultanov T., Mirsaidov M. Spatial stress-strain state of Earth dams. *Magazine of Civil Engineering*. 2023;2(118):11810. <https://doi.org/10.34910/MCE.118.10>
15. Kositsyn S.B., Akulich V.Yu. Numerical analysis of stress-strain state of orthogonally intersecting cylindrical shells interacting with the base, taking into account changes in the calculation model over time. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(4):303–310. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310>
16. Novozhilov V.V. *Theory of thin shells*. St. Petersburg: St. Petersburg University Press; 2010. (In Russ.) ISBN: 978-5-288-05021-3
17. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Using Lagrange multipliers in the triangular element of a nonshallow shell under variable interpolation of displacements. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2017; 11(4):535–544. <https://doi.org/10.1134/S1990478917040111>
18. Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S., Azarov A.A. Mixed finite-element method in V.I. Slivker’s semi-shear thin-walled bar theory. *Magazine of Civil Engineering*. 2019;5(89):79–93. <https://doi.org/10.18720/MCE.89.7>
19. Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2018;113(4): 634–655. <https://doi.org/10.1002/nme.5629>

20. Klochkov Yu., Pshenichkina V., Nikolaev A., Vakhnina O., Klochkov M. Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element. *Magazine of Civil Engineering*. 2023;4(120):12003. <https://doi.org/10.34910/MCE.120.3>
21. Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Y. Quadrangular finite element in a mixed FEM formulation for the calculation of thin shells of rotation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):64–72. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72>
22. Lei Zh., Gillet F., Jezeguel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner-Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *Int. J. Mech.* 2015;54:105–119. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.06.010>
23. Nodargi N.A., Bisegna P. State update algorithm for isotropic elastoplasticity by incremental energy minimization. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2015;105(3):163–196. <https://doi.org/10.1002/nme.4966>
24. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures. *Materials Research Proceedings*. 2023;26:227–232. <https://doi.org/10.21741/9781644902431-37>
25. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element. *International Journal for Numerical Methods*. 2022;123(24):6243–6266. <https://doi.org/10.1002/nme.7112>
26. Ignatiev A.V., Zavyalov I.S., Bochkov M.I. Algorithm for reducing systems of high-order FEM equations using polynomial interpolation of the main mixed unknowns. *News of higher educational institutions. Construction*. 2024;7(787): 5–18. (In Russ.) <https://doi.org/10.32683/0536-1052-2024-787-7-5-18>
27. Sedov L.I. *Continuum mechanics*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.) ISBN: 5-02-007052-1