

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-5-391-403

УДК 624.012

EDN: ZRBRFL

Научная статья / Research article

Расчетная модель сопротивления железобетона в околоарматурной области

Вл.И. Колчунов^{1,2}, Н.В. Федорова¹, Т.А. Ильющенко³ ✉¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия² Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН, Москва, Россия³ Курский государственный университет, Курск, Россия

✉ tatkhulina93@yandex.ru

Поступила в редакцию: 12 июня 2024 г.

Принята к публикации: 1 октября 2024 г.

Аннотация. Решена актуальная задача сопротивления околоарматурной зоны бетона как задача объемного напряженно-деформированного состояния с «замыканием» выходных интегральных параметров этой зоны на стержневую схему всего железобетонного элемента, синтезирующую в себе гипотезы и зависимости механики железобетона и механики разрушения. В расчетной модели железобетонного элемента учтен эффект железобетона проф. Вл.И. Колчунова, описывающий механизм образования и развития поперечных и продольных трещин. При этом приняты обобщенные гипотезы линейных и угловых деформаций для деформаций и градиентов относительных взаимных смещений арматуры и бетона. Построены новые функционалы железобетона, которые согласуются с физическими представлениями о сопротивлении поперечных сечений стержневых элементов в околоарматурных зонах. Записаны физические уравнения для бетонной матрицы, моделирующей зоны между поперечными трещинами. Найдены составляющие перемещений для околоарматурной области применительно к ширине раскрытия трещин на границе контакта «бетон–арматура» в поперечных, продольных и радиальных трещинах соответственно. Использование принятых предпосылок и многоуровневой расчетной схемы для околоарматурной области заметно приближает расчетную модель к реальной оценке физических явлений.

Ключевые слова: объемное напряженное состояние, околоарматурная зона, перемещение, цилиндрические координаты, эффект железобетона, линейные и угловые деформации, обобщенная гипотеза

Колчунов Владимир Иванович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры инженерной графики и компьютерного моделирования, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия; главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт строительной физики, Российская академия архитектуры и строительных наук, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3990-0345, ORCID: 0000-0001-5075-1134; e-mail: vlik52@mail.ru

Федорова Наталья Витальевна, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой промышленного и гражданского строительства, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3365-8320, ORCID: 0000-0002-5392-9150; e-mail: fedorovanv@mfmgsu.ru

Ильющенко Татьяна Александровна, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры промышленного и гражданского строительства, Курский государственный университет (КГУ), Курск, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 6913-5863, ORCID: 0000-0001-6885-588X; e-mail: tatkhulina93@yandex.ru

© Колчунов Вл.И., Федорова Н.В., Ильющенко Т.А., 2024

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. *Колчунов В.И.* — научное руководство; концепция исследования; развитие методологии; написание исходного текста; итоговые выводы. *Федорова Н.В.* — участие в разработке материала; доработка текста; итоговые выводы. *Ильющенко Т.А.* — участие в разработке материала, обработка и редактирование материала.

Для цитирования: *Колчунов В.И., Федорова Н.В., Ильющенко Т.А.* Расчетная модель сопротивления железобетона в околоарматурной области // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 5. С. 391–403. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-5-391-403>

Strength Model for Concrete in Near-Reinforcement Region

Vladimir I. Kolchunov^{1,2}, Natalia V. Fedorova¹, Tatiana A. Iliushchenko³✉

¹ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia

² Research Institute of Construction Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, Russia

³ Kursk State University, Kursk, Russia

✉ tatkhalina93@yandex.ru

Received: June 12, 2024

Accepted: October 1, 2024

Abstract. The relevant problem of concrete strength in the near-reinforcement zone is solved as a problem of volumetric stress-strain state with the “closure” of output integral parameters of this zone on the framework of the whole reinforced concrete element, synthesizing hypotheses and dependencies of various disciplines of solid mechanics, including fracture mechanics. The model of reinforced concrete element takes into account V.I. Kolchunov’s effect of reinforced concrete, which describes the mechanism of formation and development of transverse and longitudinal cracks. In this respect, generalized hypotheses of linear and shear strains for warping and gradients of relative mutual displacements of reinforcement and concrete are adopted. New functionals of reinforced concrete are constructed, which are consistent with the physical interpretations of the strength of cross-sections of bar elements in near-reinforcement zones. Constitutive equations for the concrete matrix, which models zones between transverse cracks, are written. The displacement components for the near-reinforcement zone in relation to the crack opening width at the “concrete-reinforcement” contact interface in transverse, longitudinal and radial cracks, respectively, are found. The use of the adopted assumptions and a multi-level calculation approach for the near-reinforcement region brings the model significantly closer to a real evaluation of the physical phenomena.

Keywords: volumetric stress state, near-reinforcement zone, displacement, cylindrical coordinates, cylindrical coordinates, effect of reinforced concrete, linear and shear strains, generalized hypothesis

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors’ contribution. *Kolchunov V.I.* — scientific supervision; conceptualization, methodology, data gathering and processing, writing of the source text, scientific editing of the text. *Fedorova N.V.* — participation in the development of the material; revision of the text; scientific editing of the text. *Iliushchenko T.A.* — participation in the development of the material, processing and editing the text.

For citation: Kolchunov V.I., Fedorova N.V., Iliushchenko T.A. Strength model for concrete in near-reinforcement region. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(5):391–403. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-5-391-403>

Vladimir I. Kolchunov, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Engineering Graphics and Computer Modeling, Moscow State University of Civil Engineering (NIU MGSU), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3990-0345, ORCID: 0000-0001-5075-1134; e-mail: vlik52@mail.ru

Natalia V. Fedorova, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Industrial and Civil Engineering, Moscow State University of Civil Engineering (NIU MGSU), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3365-8320, ORCID: 0000-0002-5392-9150; e-mail: fedorovanv@mfmgsu.ru

Tatiana A. Iliushchenko, Candidate of Technical Science, Senior Lecturer of the Department of Industrial and Civil Engineering Construction, Kursk State University (KSU), Kursk, Russia, eLIBRARY SPIN-code: 6913-5863, ORCID: 0000-0001-6885-588X; e-mail: tatkhalina93@yandex.ru

1. Введение

Механика железобетона является основой при обеспечении механической безопасности конструкций зданий и сооружений в условиях новых вызовов техногенного природного и террористического характера. Одной из ключевых и крайне противоречивых проблем современной теории железобетона является проблема раскрытия трещин. В последние два-три десятилетия для ее решения во всем мире накоплена значительная информация о механике деформирования и трещинообразования в железобетоне [1–9], включая введенные в практику проектирования нормативные документы ACI Committee 318-14, EN 1992-1-2: 2004, СП 5.03.01-2020, СП 63.13330.2018¹ и др. За это время разработано множество моделей, связанных с большим числом теоретических и экспериментальных исследований, в числе которых можно отметить работы российских [10–14] и зарубежных [15–21] ученых. В последние два десятилетия в рамках такой концепции и на общей методологической основе проводятся исследования по этой проблеме и под руководством автора [22–27]. В связи с этим в данном исследовании представлено построение расчетной модели сцепления арматуры с бетоном с учетом физической нелинейности и наличия поперечных трещин, а также с использованием двухуровневой расчетной схемы: на первом уровне весь железобетонный элемент рассчитывается как стержень, на втором уровне рассматривается объемное напряженно-деформированное состояние околоарматурной зоны с использованием ряда параметров, полученных из расчетной схемы первого уровня.

2. Методика исследований

Совместность работы бетона и арматуры в железобетонном элементе обеспечивается околоарматурной зоной. Это местная зона бетона, непосредственно прилегающая к боковой поверхности арматурного стержня и заканчивающаяся (согласно принципу Сен-Венана) на некотором радиальном расстоянии t_b (рис. 1). Поэтому решение задачи будем вести в цилиндрических координатах. Положительные направления этих координат приведены на рис. 1.

Теоретическому решению рассматриваемой задачи предшествовал целый ряд экспериментальных и численных исследований [10–27]. В результате экспериментальных исследований (с использованием для измерения деформаций непрерывных цепочек тензорезисторов) получена качественная картина деформаций бетона вдоль оси Z (рис. 1).

В результате таких исследований удалось не только выяснить качественный характер распределения деформаций бетона, арматуры и их взаимных смещений в околоарматурной зоне вдоль оси Z , но и получить теоретическое решение для определения ряда параметров напряженно-деформированного состояния стержневого железобетонного элемента с учетом физической нелинейности и наличия поперечных трещин.

Таким образом, первой особенностью приведенного ниже решения объемного напряженно-деформированного состояния околоарматурной зоны является то, что здесь используется многоуровневая расчетная схема: на первом уровне весь железобетонный элемент рассчитывается как стержень, на втором уровне рассматривается объемное напряженно-деформированное состояние околоарматурной зоны с использованием ряда параметров, полученных из расчетной схемы первого уровня. В свою очередь, выходные интегральные параметры расчетной схемы второго уровня на следующем этапе итерации оказывают влияние на параметры расчетной схемы первого уровня. Такой подход возможен, например, при использовании традиционного для железобетона параметра ψ_s , который позволяет для расчетной схемы первого уровня уточнять среднее значение ее параметров без изменения этой схемы.

¹ См.: ACI Committee 318-14. Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. Farmington Hills, Mich: American Concrete Institute. 2014. 519 p.; EN 1992-1-2: 2004. Eurocode 2: Design of concrete structures — Part 1-1: General rules and rules for buildings, 2004. 225 p.; СП 5.03.01-2020. Бетонные и железобетонные конструкции. Минск, 2020. 236 с.; СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. М.: Минстрой России, 2018.152 с.

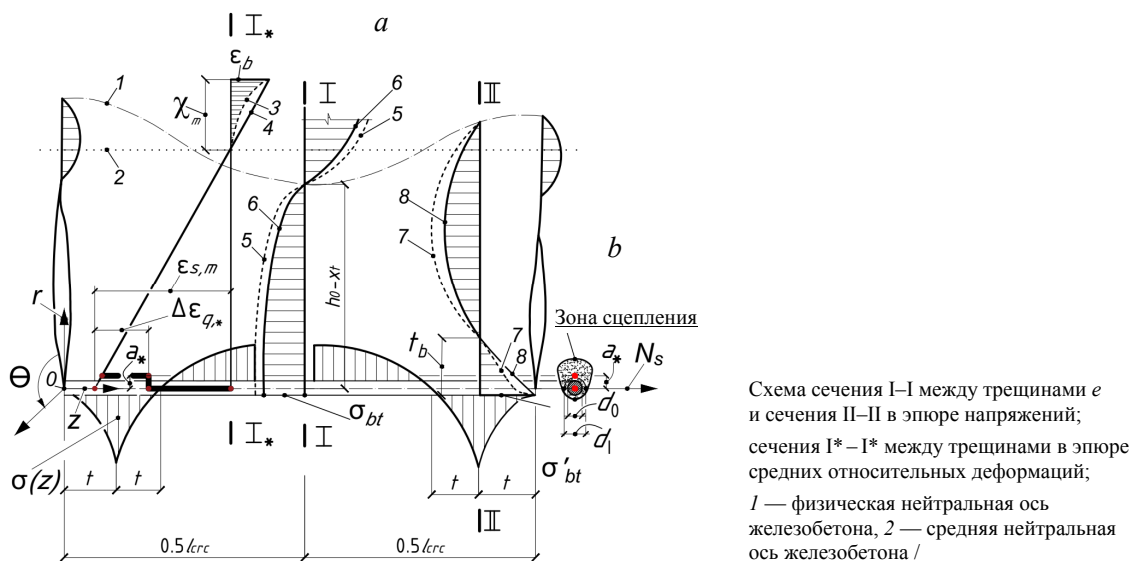


Рис. 1. К анализу экспериментальных и численных исследований при решении задачи определения напряженно-деформированного состояния околоарматурной зоны:

a — в окрестностях характерных сечений; b — в зоне сцепления бетона с арматурой

И с т о ч н и к: выполнено Вл.И. Колчуновым

Второй важной особенностью предлагаемого решения является то, что после образования трещин (как поперечных, так и продольных) к расчету привлекаются гипотезы механики разрушения.

3. Результаты и обсуждение

Решение будем вести с учетом физической нелинейности и специфики бетона, заключающейся в его разном сопротивлении растяжению и сжатию. Для расчета принимаем диаграммы связи $\sigma_{bi} - \varepsilon_{bi}$, $\mu(\lambda) - \varepsilon_{bi}$, $\sigma_{bt} - \omega$.

Проецирование диаграммы $\sigma_{bi} - \varepsilon_{bi}$ на оси $\tau_{rz} - \gamma_r$ позволяет установить связь между касательными напряжениями и относительными сдвигами или, при введении местного сдвига, — между относительными взаимными смещениями арматуры и бетона ε_q . Здесь важно подчеркнуть, что, так как напряжения в бетоне околоарматурной зоны, прилегающей к трещине, в поперечном сечении железобетонного элемента являются сжимающими (см. рис. 1), то касательные напряжения будут обусловлены верхней ветвью диаграммы деформаций. Это весьма существенно отразится на максимальной величине касательных напряжений. Так, зоны максимальных касательных напряжений сцепления сосредоточиваются в непосредственной близости от поперечных трещин. Поэтому, с одной стороны, чем большее количество поперечных трещин пересекает арматурный стержень, тем лучше обеспечивается его сцепление с бетоном в околоарматурных зонах (до наступления текучести в арматуре или образования радиальных трещин). С другой стороны, с увеличением нагрузки сцепление бетона и арматуры на участке между трещинами (при $z_1 = 0,5l_{cr}$) сначала увеличивается, а затем, в силу особенностей деформирования бетонной матрицы (рис. 1, 2), начинает уменьшаться.

Во-первых, это связано с тем, что на этих участках напряжения в бетоне околоарматурной зоны в поперечном сечении железобетонного элемента являются растягивающими. Это отражается как на текущей величине касательного напряжения, так и на его возможном максимуме.

Во-вторых, по мере появления поперечных трещин участок и величина растягивающих напряжений между трещинами уменьшаются. С учетом отмеченного особое внимание при решении рассматриваемой задачи требуется для выделенных сечений (см. рис. 1, 2), находящихся на расстояниях

$z = t$ и $z = z_1$. Примем дополнительную предпосылку, касающуюся околоарматурных зон, прилегающих к сечениям I–I и II–II, в которых необходимо определить напряженно-деформированное состояние бетона. Эпюра деформаций растянутого бетона в поперечном сечении I–I и сжатого бетона околоарматурной зоны в сечении II–II принимаются линейными. Данная предпосылка согласуется с представлениями о сопротивлении поперечных сечений стержневых элементов и подтверждается многочисленными экспериментами. Напряжения σ_{bt} и σ'_{bt} (см. рис. 1) в стержневом железобетонном элементе определяются из условий равновесия моментов в сечении I–I и II–II относительно точки приложения равнодействующей сжатого бетона. Значения деформаций $\varepsilon_b(z)$ в сечениях I–I и II–II определяются с учетом несовместности деформаций бетона и арматуры. Обозначим их соответственно через $\varepsilon_{z,I}$ и $\varepsilon_{z,II}$. С использованием диаграммы $\sigma_{bi} - \varepsilon_{bi}$ для сечения I–I находится напряжение $\sigma_{z,I}(r)$. Учитывая, что рассматриваются деформации и напряжения вдоль оси z , диаграммы проецируются на эту ось. Поскольку известно, что криволинейные участки диаграммы описываются квадратной параболой и имеются координаты концевых точек этих парабол ($\varepsilon_{z,I}$ и σ_{bt} , $\varepsilon_{z,II}$ и σ_b), то угол между рассматриваемыми осями необходим лишь для уточнения начального модуля диаграммы $\sigma_{b,z} - \varepsilon_{b,z}$.

$$E_{b,z} = \phi E_b, \quad (1)$$

где ϕ — коэффициент, учитывающий сложное напряженное состояние и наличие касательных напряжений вдоль оси z^2 .

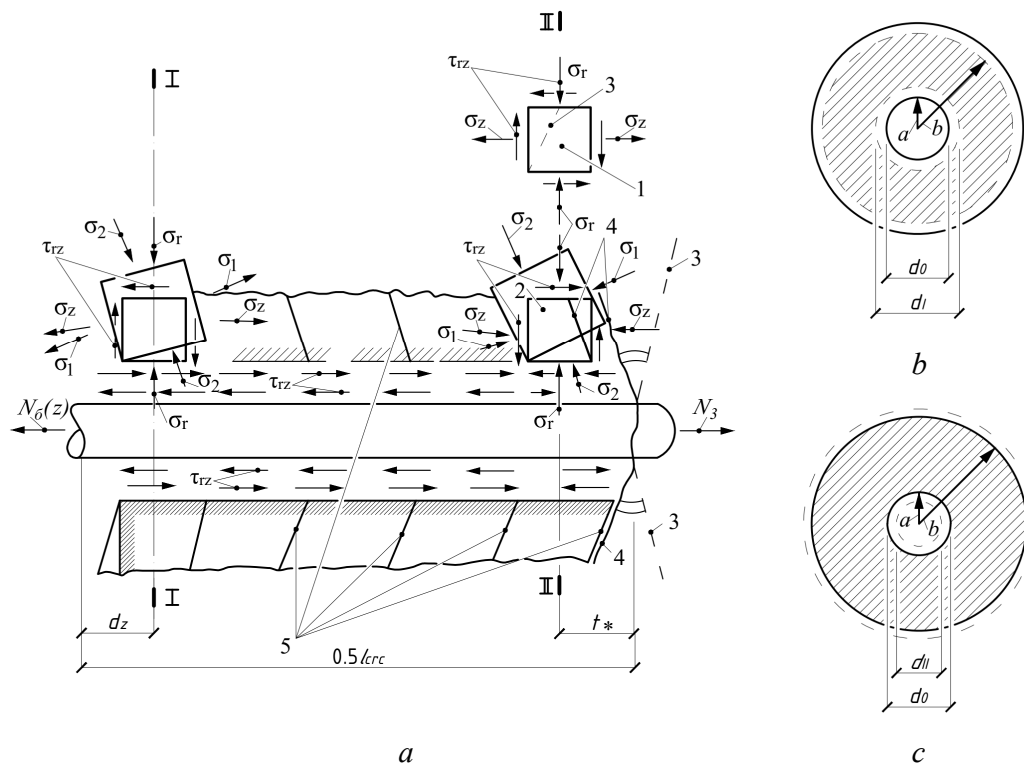


Рис. 2. Схема напряженного состояния:

a — в околоарматурной зоне; $b, в$ — деформирование бетонной матрицы в сечениях I–I и II–II соответственно;

1, 2 — НДС до и после образования трещин соответственно;

3, 4 — направление микротрещин и макротрещин соответственно; 5 — деформирование бетона

И с т о ч н и к: выполнено Вл.И. Колчуновым

² Верюжский Ю.В., Колчунов Вл.И. Методы механики железобетона: учебное пособие. Киев: Книжное издательство НАУ, 2005. 653 с.

При этом величина касательных напряжений сцепления и нормальных напряжений $\sigma_{b,z}$ определяется при нагрузке, составляющей 0,2 от момента трещинообразования $M_{\text{ср.}}$. После подстановки выражения для определения деформаций в сечении I–I в выражение для определения напряжений в этом же сечении будем иметь следующее уравнение:

$$\sigma_{z,I}(r) = k_1 \varepsilon_{z,I}^2 D^2 \left(1 - \frac{r}{t_1}\right)^2 + \varphi E_b \varepsilon_{z,I} D \left(1 - \frac{r}{t_1}\right), \quad (2)$$

здесь $k_1 = \frac{\sigma_{bt} - \varphi E_b \varepsilon_{z,z}}{\varepsilon_{z,I}^2}$; $D = -\varepsilon_{z,I} + \Delta \varepsilon_q$; $t_1 = h_0 - x_t - a_*$.

Рассмотрим теперь основные уравнения для околоарматурной зоны применительно к случаю, когда имеются лишь поперечные трещины, а продольных и радиальных трещин еще нет.

Учитывая, что рассматриваемая задача осесимметрична, значения $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}$ и $\tau_{\theta z}$ равны нулю и уравнения равновесия в цилиндрических координатах примут вид

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (4)$$

Упростятся и геометрические соотношения Коши, так как составляющие перемещения v и деформаций $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$ в силу симметрии также равны нулю. Остальные компоненты деформаций имеют вид

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (5)$$

Физические уравнения для бетонной матрицы, моделируемой между поперечными трещинами упругопластичным изотропным телом, запишем в виде

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_r - \mu(\lambda)(\sigma_z + \sigma_\theta)]; \quad (6)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{\zeta(\lambda)}, \quad (7)$$

где $E(\lambda)$, $\zeta(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ — соответственно упругопластические модули деформаций и коэффициент поперечных деформаций для бетона.

Следует подчеркнуть, что для выражения (2), включенного во вторые круглые скобки, сначала выполняется дифференцирование по z , а уже потом оно вычисляется при $z = z_1$.

Тогда применительно к околоарматурной зоне между поперечными трещинами уравнение (3) с учетом выражения (2) примет вид

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + A_{1,I} D^2 \left(1 - \frac{r}{t_1}\right)^2 + A_{2,I} D \left(1 - \frac{r}{t_1}\right) + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (8)$$

Здесь можно ввести следующее обозначение:

$$\left(\frac{\partial k_1}{\partial z} \varepsilon_z^2 + 2k_1 \varepsilon_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_1} = A_{1,1}; \quad \varphi E_b \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = A_{2,1}; \quad t_1 = h_0 - x_t - a_*.$$

Решение дифференциального уравнения (8) будем искать в виде произведения двух функций от r :

$$\tau_{rz} = u(r)v(r). \quad (9)$$

После дифференцирования обеих частей равенства (9) и подстановки их в уравнение (8) получим

$$u \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + v \frac{\partial u}{\partial r} = -A_{1,1} D^2 \left(1 - \frac{r}{t_1} \right)^2 - A_{2,1} D \left(1 - \frac{r}{t_1} \right). \quad (10)$$

Выберем функцию v такой, чтобы выражение в круглых скобках левой части уравнения (10) равнялось нулю. Тогда после разделения переменных в этом выражении получим

$$\frac{\partial v}{v} = -\frac{dr}{r}, \quad (11)$$

а после интегрирования — $v = r^{-1}$.

Подставляя найденное значение $v(r)$ в уравнение (10) и выполняя алгебраические преобразования и операцию интегрирования, получим

$$u(r) = A_{1,1} \left(-\frac{D^2 r^2}{2} + \frac{2D^2 r^3}{3t_1} - \frac{D^2 r^4}{4t_1^2} \right) + A_{2,1} \left(-\frac{Dr^2}{2} + \frac{Dr^3}{3t_1} \right) + C_1. \quad (12)$$

После подстановки $v(r)$ и $u(r)$ в уравнение (9) получим

$$\tau_{rz} = r^3 A_{3,1} + r^2 A_{4,1} + r A_{5,1} + \frac{C_1}{r}. \quad (13)$$

Здесь

$$A_{3,1} = -\frac{A_{1,1}}{4t_1^2}; \quad A_{4,1} = -\frac{2D^2}{3t_1} + \frac{A_{2,1}D}{3t_1}; \quad A_{5,1} = A_{1,1} \left(-\frac{D^2}{2} \right) + A_{2,1} \left(-\frac{D}{2} \right). \quad (14)$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из условия, в соответствии с которым при $r = a_*$, $\tau_{rz} = \tau_{r,l}$. Здесь $\tau_{r,l}$ — касательные напряжения в сечении I—I, известные из решения стержневого железобетонного элемента при несовместных деформациях бетона и арматуры³.

Тогда

$$C_1 = A_{1,1} \frac{a_*^2}{(a_* - 1)} \left(D^2 a_* - \frac{D^2 a_*^2}{t_1} + \frac{D^2 a_*^3}{3t_1^2} \right) + A_{2,1} \frac{a_*^2}{(r - 1)} \left(Da_* - \frac{Da_*^2}{t_1} \right) - a_*^4 A_{3,1} - a_*^3 A_{4,1} - a_*^2 A_{5,1}. \quad (15)$$

Применительно к околоарматурной зоне, прилегающей к поперечной трещине (сечения II—II), уравнение (13) будет иметь аналогичный вид. При этом

³ Верюжский Ю.В., Колчунов Вл.И. Методы механики железобетона: учебное пособие. Киев: Книжное издательство НАУ, 2005. 653 с.

$$\left(\frac{\partial k_2}{\partial z} \varepsilon_z^2 + k_2 2\varepsilon_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_{II}} = A_{1,II}; \quad \varphi E_b \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} \Big|_{z=z_{II}} = A_{2,II}. \quad (16)$$

Отличие параметров $A_{3,II} - A_{5,II}$ и C_2 будет заключаться в том, что в зависимостях (14) и (15) вместо t_1 следует вставить t_b .

Далее, располагая компонентами напряженного состояния τ_{rz} , можно переходить к рассмотрению второго дифференциального уравнения равновесия (4). Задачу проще решать в напряжениях. Из уравнения для определения деформаций в сечении I–I следует, что

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\mu(\lambda)} (\sigma_z - \varepsilon_z E(\lambda)) - \sigma_r. \quad (17)$$

Подставив выражения (17) и (13) в уравнение (4), получим дифференциальное уравнение, которое после алгебраических преобразований примет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + r^3 B_1 + r^2 B_2 + r B_{10} + \frac{1}{r} B_{11} + \frac{2\sigma_r}{r} = B_{12}. \quad (18)$$

Здесь значения параметров $B_1 - B_7$ определяются согласно работе Ю.В. Верюжского, Вл.И. Колчунова³.

Решение дифференциального уравнения (18) также будем отыскивать в виде произведения двух функций, которое после ряда аналогичных преобразований сводится к следующему выражению:

$$\sigma_r = -\frac{r^4 B_1}{4} - \frac{r^3 B_2}{5} - \frac{r^2 B_{10}}{4} - \frac{B_{11}}{2} + \frac{r B_{12}}{3} + \frac{C_2}{r^2}. \quad (19)$$

Постоянную интегрирования C_2 определяем из условия, в соответствии с которым при $r = b_*$, $\sigma_r = 0$:

$$C_2 = \frac{b_*^6 B_1}{6} + \frac{b_*^5 B_2}{5} + \frac{b_*^4 B_{10}}{4} - \frac{b_*^3 B_{12}}{3} + \frac{b_*^2 B_{11}}{2}. \quad (20)$$

Здесь параметр b_* находится из условия, в соответствии с которым при $r = b_*$ местные напряжения τ_{rz} в зоне, прилегающей к арматуре, практически затухают, т.е. их значения приближаются к нулю. Тогда из уравнения (13) следует

$$b_*^3 A_{3,I} + b_*^2 A_{4,I} + b_* A_{5,I} + \frac{C_1}{b_*} = 0. \quad (21)$$

Зависимость (21) можно использовать для определения параметра b_* . Учитывая, что градиент изменения этой функции весьма существен, даже небольшие изменения b_* приводят к значительным изменениям напряжений τ_{rz} . Численные исследования показывают, что при $b_* = 3 \dots 4a$ значения τ_{rz} можно считать приближающимися к нулю. Более того, при $b_* > 4a$ наружный радиус околоарматурной зоны можно считать бесконечно большим (с погрешностью менее 6 %). При этом решение уже не связывается с формой внешнего контура. Таким образом, формулы (13), (17), (19) характеризуют распределение напряжений для околоарматурной зоны с любой формой внешнего контура поперечного сечения железобетонного элемента.

Зная составляющие напряжений σ_z , σ_r , σ_θ , τ_{rz} , определим составляющие деформаций по формулам (6), (7). Затем находим составляющие перемещений из зависимости Коши (5):

$$u = \int \varepsilon_r dr + f_1(z); \quad (22)$$

$$w = \int \varepsilon_z dz + f_2(r); \quad (23)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G(\lambda)} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (24)$$

Здесь ε_r , ε_z определяются в соответствии с уравнением (6), а τ_{rz} — по уравнению (13). Подставляя в уравнение (6) значения σ_z , σ_θ и σ_r из зависимостей (2), (17) и (19) и выполняя алгебраические преобразования с учетом (22) и (23), получим значения перемещений u , w . После подстановки последних и напряжений из уравнения (19) в уравнение (24) с учетом интегрирования уравнений получим

$$u = D_1 + C_3 z + C_5; \quad (25)$$

$$w = D \left(1 - \frac{r}{t_1} \right) \left(\int \varepsilon_{z,1} dz \right) | z - z, I + \eta_1 \frac{r^6}{6} + \eta_2 \frac{r^5}{5} + \eta_3 \frac{r^4}{4} + \\ + \eta_4 \frac{(r-a)^4}{4} + \eta_5 \frac{r^3}{3} + \eta_6 \frac{r^2}{2} - 2C_1 \frac{1+\mu(\lambda)}{E(\lambda)} \ln r - C_4 r + C_6. \quad (26)$$

Здесь значения $\eta_1 - \eta_8$, $C_1 - C_6$, D_1 , E_1 , H_1 определяются согласно работе Ю.В. Верюжского, Вл.И. Колчунова⁴.

Применительно к околоарматурной зоне, прилегающей к поперечной трещине (сечение II–II), уравнения (13)–(26) будут иметь аналогичный вид. При этом используется уравнение (16), и в этих уравнениях вместо $\varepsilon_{z,1}$, $A_{1,1}$, t_1 , $\tau_{z,1}$, $\varepsilon_{q,1}$ соответственно подставляются значения $\varepsilon_{z,II}$, $A_{1,II}$, t_b , $\tau_{z,II}$, $\varepsilon_{q,II}$.

Во всех приведенных выше формулах модуль деформаций $E(\lambda)$ и коэффициент $\mu(\lambda)$ определяются на основании диаграмм $\sigma_{bi} - \varepsilon_{bi}$ и μ . Деформации определяются по формуле

$$\varepsilon_{bi} = \frac{\sqrt{2}}{2[1+\mu(\lambda)]} \sqrt{(\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 - (\varepsilon_r - \varepsilon_e)^2 + (\varepsilon_e - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2} \gamma_{rz}^2}. \quad (27)$$

Напряжения σ_{bi} определяются по величине деформаций бетона ε_{bi} . Тогда

$$E(\lambda) = \frac{\sigma_{bi}}{\varepsilon_{bi}}. \quad (28)$$

Для коэффициента $\mu(\lambda)$ используется более сложная зависимость:

- при $\varepsilon_{bi} < \varepsilon_{cr,c}$ значение $\mu(\lambda)$ равно 0,2;
- при $\varepsilon_{cr,c} < \varepsilon_{bi} < \varepsilon_{cr,v}$ значение $\mu(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$\mu(\lambda) = 0,2 + 0,3 \frac{\varepsilon_{bi} - \varepsilon_{cr,c}}{\varepsilon_{cr,v} - \varepsilon_{cr,c}}, \quad (29)$$

- при $\varepsilon_{cr,v} < \varepsilon_{bi} < \varepsilon_v$ значение $\mu(\lambda)$ равно 0,5;
- при $\varepsilon_v < \varepsilon_{bi} < \varepsilon_{bu}$ значение $\mu(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$\mu(\lambda) = 0,5 - (0,5 - \mu_b) \frac{\varepsilon_{bi} - \varepsilon_v}{\varepsilon_{bu} - \varepsilon_v}. \quad (30)$$

⁴ Верюжский Ю.В., Колчунов Вл.И. Методы механики железобетона: учебное пособие. Киев: Книжное издательство НАУ, 2005. 653 с.

Здесь параметры бетона ε_{bi} , ε_{bu} принимаются по таблицам, параметры ε_v , μ_b определяются в соответствии с диаграммами $\sigma_{bi} - \varepsilon_{bi}$.

Учитывая, что получено аналитическое решение для околоарматурной зоны, проецирование диаграммы $\sigma_{bi} - \varepsilon_{bi}$ на любые оси, например на оси $\sigma_z - \varepsilon_z$, не вызывает затруднений.

Продольные трещины (рис. 3, а) исключают сопротивление сцеплению при $\Delta u \leq \omega_u$, где ω_u определяется из зависимостей механики разрушения. Ширина раскрытия продольных трещин вычисляется по формуле

$$a_{cr,c} = \Delta u = u_b - u_s, \quad (31)$$

где u_b и u_s — соответственно радиальные перемещения бетона и арматуры при $r = a$.

При этом через граничные условия имеется возможность учитывать особенности, связанные с нарушением сплошности на границе контакта «бетон — арматура».

Продольные трещины, проходящие вдоль поверхности сцепления бетона и арматуры, наиболее важны в смысле обеспечения сцепления этих материалов. Перемещение u_b определяется по формуле (25) при $r = a$. Перемещения u_s определяются по формуле

$$u_s = \int_0^a \varepsilon_{rs} dr. \quad (32)$$

Здесь

$$\varepsilon_{rs} \approx \mu_s \frac{\sigma_{si}(z)}{E_s}. \quad (33)$$

Более точные значения ε_{rs} и u_s можно получить, используя особенности предложенного здесь решения для околоарматурной зоны применительно к арматурному стержню. Однако, как показывает численный анализ, влияние составляющих напряжений σ_{rs} и $\sigma_{\theta s}$ на величину ε_{rs} менее 3 %. Поэтому при решении рассматриваемой задачи этим влиянием для упрощения расчетных формул логично пренебречь.

Тогда из (5) после интегрирования получим

$$u_s = \frac{\mu_s \sigma_{si}(z)}{E_s}. \quad (34)$$

Постоянную интегрирования определяем из условия, в соответствии с которым при $r = 0$, $u_s = 0$. Тогда $C = 0$.

Значение u_s по формуле (34) вычисляется при $r = a$.

Продольные трещины появляются, как правило, в околоарматурных зонах, расположенных между поперечными трещинами, за счет разности радиальных перемещений бетона и арматуры в месте их контакта (см. рис. 3, а). Профиль продольной трещины близок к треугольнику с ее максимальным раскрытием между поперечными трещинами (сечение I–I) и нулевым — на расстоянии $2t^*$ от поперечных трещин. При этом будем полагать, что на участке магистральной продольной трещины при $\Delta u \geq \omega_u$ сцепление между бетоном и арматурой отсутствует. Однако если за счет сцепления бетона и арматуры на других участках, прилегающих к поперечным трещинам (где $\Delta u < \omega_u$), обеспечивается сопротивление конструкции по жесткости и прочности, то, учитывая, что наличие продольных трещин у поверхности арматуры не нарушает защитный слой бетона, эксплуатация конструкции может быть продолжена.

Использование предлагаемого расчетного аппарата позволяет обнаруживать не только поперечные трещины, но и продольные, и радиальные. Учитывая, что схема нагружения от σ_θ не вызывает

торможения трещин в их вершине, появление радиальных трещин приводит практически к исключению сопротивления сцепления в этой зоне, т. е. к ее разрушению при $a_{\text{ср},r} \geq \omega_u$. Защитный слой разрушается, арматура оголена, поэтому дальнейшая эксплуатация конструкции должна быть запрещена, даже если ее сопротивление за счет других участков не исчерпано и она соответствует известным критериям, предъявляемым нормами по прочности и жесткости. Разрушение от радиальных трещин (рис. 3, б) характерно для околоарматурных зон, прилегающих к поперечной трещине. Здесь также возможно (в зависимости от конструктивных особенностей) разрушение от раздавливания бетона околоарматурной зоны. При этом значение ε_i вычисляется по формуле (27), где составляющие деформаций вычисляются при $z = z_{II}$ и $r = a$.

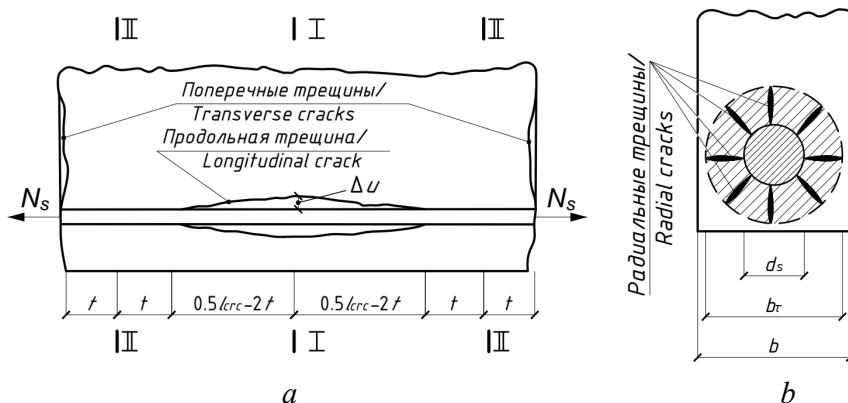


Рис. 3. Анализ продольных трещин:

a — в окрестности сечения I—I; b — характер разрушения от радиальных трещин в окрестности сечений II—II
И с т о ч н и к: выполнено Вл.И. Колчуновым

Заметим, что предлагаемое решение в напряжениях имеет преимущество по сравнению с аналогичным решением в перемещениях. Последнее даже в рамках принятых предпосылок приводит к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка с большим количеством частных решений, что явно усложняет расчет. Попытка же отказаться от использования многоуровневой расчетной схемы настолько усложняет решение задачи объемного напряженно-деформированного состояния в рассматриваемой зоне, аналитически оно становится неразрешимым. В итоге решение возможно лишь вариационными методами. Сравнивая рассмотренный подход с вариационными методами решения, позволяющими получать приближенное решение дифференциальных уравнений с точностью, достаточной для инженерных расчетов, отметим, что предлагаемое решение прежде всего проще. Тем не менее применительно к рассматриваемой задаче для стержневых железобетонных элементов это решение не уступает в точности вариационным методам при задании в последних достаточно большого количества независимых функций и членов соответствующих рядов. Вместе с тем даже при таком уточненном подходе известные методы не позволяют учесть особенностей нарушения сплошности бетонной матрицы при появлении в ней трещин. Гипотезы и методы механики разрушения до настоящего времени еще не нашли здесь должного применения. Это же можно отметить и по отношению к учету несовместности деформаций бетона и арматуры.

Таким образом, дифференцированный подход к анализу НДС околоарматурной зоны позволяет ввести более обоснованные критерии эксплуатации железобетонных конструкций с учетом не только поперечных, но также продольных и радиальных трещин. При этом учет специфики и отмеченных особенностей сопротивления бетона околоарматурной зоны (в том числе несовместности деформаций бетона и арматуры) заметно приближает расчет к реальной оценке происходящих здесь физических явлений. В то же время предложенная методика сохраняет относительную простоту расчета и его физическую суть, а следовательно, и инженерную обозримость.

4. Заключение

1. Решена актуальная задача сопротивления околоарматурной зоны бетона как задача объемного напряженно-деформированного состояния с «замыканием» выходных интегральных параметров этой зоны на стрежневую схему всего железобетонного элемента. Несмотря на сложность такой задачи, с учетом совместности деформаций бетона и арматуры и нарушения сплошности бетона, решение записанных при этом дифференциальных уравнений получено в замкнутом аналитическом виде.

2. Важной особенностью предлагаемого решения задачи являются гипотезы механики разрушения и установленного автором деформационного эффекта железобетона, а также учет как поперечных, так и продольных трещин. При этом разработаны обобщенные продольные и угловые деформации гипотез для депланаций, скачки от относительных взаимных смещений арматуры и бетона ε_q .

3. Записаны физические уравнения для бетонной матрицы, моделируемой поперечными трещинами упругопластическим изотропным телом. Решение получено с учетом физической специфики бетона, заключающейся в его разном сопротивлении растяжению и сжатию его параметров.

4. Разработанный дифференцированный подход к анализу НДС околоарматурной области позволяет применительно к арматурному стержню и матрице бетона ввести более обоснованные критерии эксплуатации железобетонных конструкций с учетом не только поперечных, но и продольных и радиальных трещин. Здесь напряжения σ_θ не вызывают торможение трещин в их вершине, а появление радиальных трещин приводит практически к исключению сопротивления сцепления в этой зоне и к ее разрушению при $a_{\text{ср},r} \geq \omega_u$. При этом защитный слой разрушается, арматура оголена, поэтому дальнейшая эксплуатация конструкции должна быть запрещена, даже если ее сопротивление за счет других участков не исчерпано и она соответствует известным критериям, предъявляемым нормами по прочности, жесткости и трещиностойкости для характерного разрушения от радиальных трещин.

5. Сравнивая предложенный подход с вариационными методами решения, позволяющими получать лишь приближенное решение дифференциальных уравнений, где присутствует достаточно большое количество независимых функций и членов соответствующих рядов, предлагаемое решение с использованием многоуровневой расчетной схемы не усложняет объемного напряженно-деформированного состояния в рассматриваемой зоне. При таком дифференцированном подходе гипотезы и методы механики разрушения позволяют ввести более обоснованные критерии эксплуатации железобетонных конструкций с учетом не только поперечных, но также продольных и радиальных трещин. При этом учет специфики отмеченных особенностей сопротивления бетона околоарматурной зоны заметно приближает расчет к реальной оценке происходящих здесь физических явлений. В то же время предложенная методика сохраняет относительную простоту расчета и инженерную обозримость.

Список литературы

1. Бондаренко В.М., Колчунов Вл.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: Изд-во АСВ, 2004. 472 с. EDN: QNKPAР
2. Гольшев А.Б., Колчунов Вл.И. Сопротивление железобетона. К.: Основа, 2009. 432 с. EDN: WLZJYN
3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 410 с. ISBN 5-274-01682-0
4. Tureyen A.K., Frosch R.J. Concrete shear strength: Another perspective // *ACI Structural Journal*. 2003. Vol. 100. No. 5. P. 609–615.
5. Wight J.K., MacGregor J.G. Reinforced concrete mechanics and design. Pearson Ed., 2020. 1157 p.
6. Bentz E.C. Empirical Modeling of Cracking in Reinforced Concrete // *ACI Structural Journal*. 2019. Vol. 116. No. 3. P. 233.
7. Frosch R.J. Another look at cracking and crack control in reinforced concrete // *ACI Structural Journal*. 1999. No. 96(3). P. 437–442. <http://doi.org/10.14359/679>
8. Мурашев В.И. Трещиностойчивость, жесткость и прочность железобетона. М.: Машстройиздат, 1950. С. 269.
9. Thomas F. G. Cracking in reinforced concrete // *The Structural Engineer*. 1936. No. 14. P. 298–320.
10. Iakovenko I., Kolchunov V.I. The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states // *Journal of Applied Engineering Science*. 2017. Vol. 15 (455). P. 366–375. <http://doi.org/10.5937/jaes15-14662>

11. *Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Bulkin S.A., Moskovtseva V.S.* Results of experimental studies of high-strength fiber reinforced concrete beams with round cross-sections under combined bending and torsion // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020. Vol. 16 (4). P. 290–297. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-4-290-297>
12. *Клюева Н.В., Яковенко И.А., Усенко Н.В.* К расчету ширины раскрытия наклонных трещин третьего типа в составных железобетонных конструкциях // *Промышленное и гражданское строительство*. 2014. № 2. С. 8–11. EDN: RWGCIT
13. *Демьянов А.И., Яковенко И.А., Колчунов В.И.* Разработка универсального короткого двухконсольного элемента к сопротивлению железобетонных конструкций при кручении с изгибом // *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*. 2017. № 370 (4). P. 246–251. EDN: YLHYQC
14. *Травуш В.И., Кашеварова Г.Г., Мартыросян А.С., Кузьминых В.С.* Изучение процесса разрушения связей сцепления при вдавливании стержня жесткой арматуры в бетон. Часть 1: Экспериментальные исследования // *Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*. 2016. Т. 12. № 1. С. 140–146. EDN: VZTWHZ
15. *Mathern A., Yang J.* A practical finite element modeling strategy to capture cracking and crushing behavior of reinforced concrete structures // *Materials*. 2021. Vol. 14. No. 3. P. 506. <http://doi.org/10.3390/ma14030506>
16. *Golding V.P., Gharineiat Z., Munawar H.S., Ullah F.* Crack detection in concrete structures using deep learning // *Sustainability*. 2022. Vol. 14. No. 13. P. 8117. <https://doi.org/10.3390/su14138117>
17. *Somma G., Vit M., Frappa G., Pauletta M., Pitacco I., Russo G.* A new cracking model for concrete ties reinforced with bars having different diameters and bond laws // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 235. P. 112026. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112026>
18. *Dey A., Valiukas D., Jakubovskis R., Sokolov A., Kaklauskas G.* Experimental and Numerical Investigation of Bond-Slip Behavior of High-Strength Reinforced Concrete at Service Load // *Materials*. 2021. Vol. 15. Issue 1. P. 293. <https://doi.org/10.3390/ma15010293>
19. *Bado M.F., Casas J.R., Kaklauskas G.* Distributed Sensing (DOFS) in Reinforced Concrete members for reinforcement strain monitoring, crack detection and bond-slip calculation // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 226. Article 111385. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111385>
20. *Kaklauskas G., Sokolov A., Sakalauskas K.* Strain compliance crack model for RC beams: primary versus secondary cracks // *Engineering Structures*. 2023. Vol. 281. Article 115770. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115770>
21. *Rimkus A., Cervenka V., Gribniak V., Cervenka J.* Uncertainty of the smeared crack model applied to RC beams // *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 233. Article 107088. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107088>
22. *Колчунов Вл.И.* Обобщенные гипотезы деформации линейных и угловых деформаций в железобетонных конструкциях при изгибе с кручением // *Научный журнал строительства и архитектуры*. 2023. № 1 (59). С. 9–26. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.69.1.001>
23. *Колчунов В.И.* Некоторые проблемные задачи современной теории железобетона и их решения // *Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2021 году*. 2022. С. 130–141. EDN: DMBCMT
24. *Колчунов Вл.И.* Метод расчетных моделей сопротивления для железобетона // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 3. С. 261–275. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-3-261-275>
25. *Колчунов Вл.И., Карпенко С.Н.* Жесткость железобетонных конструкций при сложном сопротивлении // *Научный журнал строительства и архитектуры*. 2022. № 1 (65). С. 11–24. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.65.1.001>
26. *Kolchunov V.* The Effect of Reinforced Concrete for Crack Resistance and Rigidity Based on Mechanics of Fracture Under Bending with Torsion // *Modern Problems in Construction: Selected Papers from MPC 2021*. 2022. P. 79–95. https://doi.org/10.1007/978-3-031-12703-8_9
27. *Колчунов Вл.И., Никулин А.И., Обернихин Д.В.* Ширина раскрытия трещин железобетонных конструкций трапециевидного поперечного сечения с учетом новых эффектов сопротивления // *Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова*. 2018. № 10. С. 64–73. https://doi.org/10.12737/article_5bd95a75010906.70019486