

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК NUMERICAL METHODS OF SHELL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310

УДК 69.04

EDN: TVXXYV

Научная статья / Research article

### Численный анализ НДС ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени

С.Б. Косицын<sup>id</sup>, В.Ю. Акулич<sup>id</sup>✉

Российский университет транспорта, Москва, Россия

✉ 79859670635@yandex.ru

Поступила в редакцию: 12 апреля 2024 г.

Принята к публикации: 30 июня 2024 г.

**Аннотация.** Объектом исследования являются ортогонально пересекающиеся цилиндрические оболочки и окружающий их грунт. Основная цель расчета состоит в определении напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек и влияния учета стадий строительства на результаты расчета. Численный анализ выполнен в универсальном программном комплексе ANSYS Mechanical. Узел ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек расположен на глубине 30 м от верхней поверхности основания. Размеры грунтового массива выбраны из условия затухания напряженно-деформированного состояния грунта и приняты по 5 диаметров большой оболочки слева и справа от нее. При решении задачи учтены физическая и контактная нелинейности. Контактная нелинейность обусловлена совместной работой узла ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек с окружающим грунтовым массивом в процессе деформирования системы и при активации элементов оболочек на стадиях расчета. Контакт между телами выполнен с помощью контактных пар. Составлены расчетные случаи с 8, 4, 2 и 1 стадиями возведения тройникового соединения (в каждом случае дополнительно одна стадия (нулевая) отводилась на определение бытового состояния основания) и без учета стадий. По результатам видно, что стадийный расчет дает значительное изменение величин напряжений по Мизесу в тройниковом соединении по сравнению с расчетным случаем без учета стадий. Перспективы дальнейших исследований связаны с применением нелинейных материалов оболочки и различными вариантами контактного взаимодействия оболочки и основания.

**Ключевые слова:** строительная механика, метод конечных элементов, тройниковое соединение, пространственный расчет, стадийный расчет, подземные сооружения, тоннелестроение

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.


**Вклад авторов.** Косицын С.Б. — научное руководство; концепция исследования; развитие методологии; итоговые выводы. Акулич В.Ю. — концепция исследования; развитие методологии; реализация численных моделей, написание статьи. Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации

**Для цитирования:** Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Численный анализ НДС ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 4. С. 303–310. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310>

Косицын Сергей Борисович, советник Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики, Российский университет транспорта, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 9390-7610, ORCID: 0000-0002-3241-0683; e-mail: kositsyn-s@yandex.ru

Акулич Владимир Юрьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Российский университет транспорта, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 8428-4636, ORCID: 0000-0002-9467-5791; e-mail: 79859670635@yandex.ru

© Косицын С.Б., Акулич В.Ю., 2024

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Numerical Stress Analysis of Orthogonally Intersecting Cylindrical Shells Interacting with Soil Considering Stages of Construction

Sergey B. Kosytsyn<sup>ID</sup>, Vladimir Yu. Akulich<sup>ID</sup>✉

Russian University of Transport, Moscow, Russia

✉ 79859670635@yandex.ru

Received: April 12, 2024

Accepted: June 30, 2024

**Abstract.** The objects of research are orthogonally intersecting cylindrical shells and the surrounding soil. A numerical stress analysis of the shells has been conducted the effect of taking into account the stages of construction has been evaluated. The analysis was performed in ANSYS Mechanical software. The joint of orthogonally intersecting cylindrical shells is located at a depth of 30 m from the ground surface. The dimensions of the soil body are selected from the condition of stress release and are adopted as 5 diameters of the larger shell to the left and to the right of it. The problem takes into account the physical and contact nonlinearities. Contact nonlinearity is associated with the interaction of the joint of the orthogonally intersecting cylindrical shells and the soil body in the process of deformation and as a result of shell element activation at calculation stages. The contact between the bodies is modelled using contact pairs. The cases of 8, 4, 2 and 1 stages of the construction of the T-connection were designed (in each case an additional stage (zeroth) was allocated for determining the initial state of the soil). The case without taking into account the construction stages was also considered. The results showed that the stage analysis leads to significant changes in the values of the von Mises stresses in the T-connection compared to the case without taking into account construction stages. The potential for further research is associated with the use of nonlinear materials for the shell and various alternatives for the contact interaction of the shell and the soil.

**Keywords:** structural mechanics, finite element method, T-connection, three-dimensional analysis, construction stages, underground structures, tunnel construction

**Conflicts of interest.** The authors declare that there is no conflict of interest.

**Authors' contribution.** *Kosytsyn S.B.* — scientific guidance, research concept, development of methodology, final conclusions. *Akulich V.Yu.* — research concept, development of methodology, implementation of numerical models, writing an article. *All authors have made an equivalent contribution to the publication*

**For citation:** Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu. Numerical stress analysis of orthogonally intersecting cylindrical shells interacting with soil considering stages of construction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(4):303–310. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310>

## 1. Введение

Важным направлением развития строительной механики является численное моделирование напряженно-деформированного состояния пространственных систем сложной геометрии, в том числе ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с окружающим основанием [1–3]. Численное моделирование таких систем имеет ряд особенностей, которые необходимо учитывать, а именно контактное взаимодействие между цилиндрической оболочкой и окружающим основанием, а также учет стадийного возведения оболочки. Современные программные комплексы позволяют реализовать учет этих особенностей.

Объектом исследования являются ортогонально пересекающиеся цилиндрические оболочки и окружающий их грунт. Основная цель расчета состоит в определении напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек и влияния учета стадий строительства на результаты расчета. Разработанная модель ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с окружающим основанием, с учетом перечисленных выше особенностей обеспечива-

*Sergey B. Kosytsyn*, Advisor of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Dr. in Tech. Sc., Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 9390-7610, ORCID: 0000-0002-3241-0683; e-mail: kosytsyn-s@yandex.ru

*Vladimir Yu. Akulich*, Candidate of Technical Sciences, Associate professor of Department of Theoretical Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 8428-4636, ORCID: 0000-0002-9467-5791; e-mail: 79859670635@yandex.ru

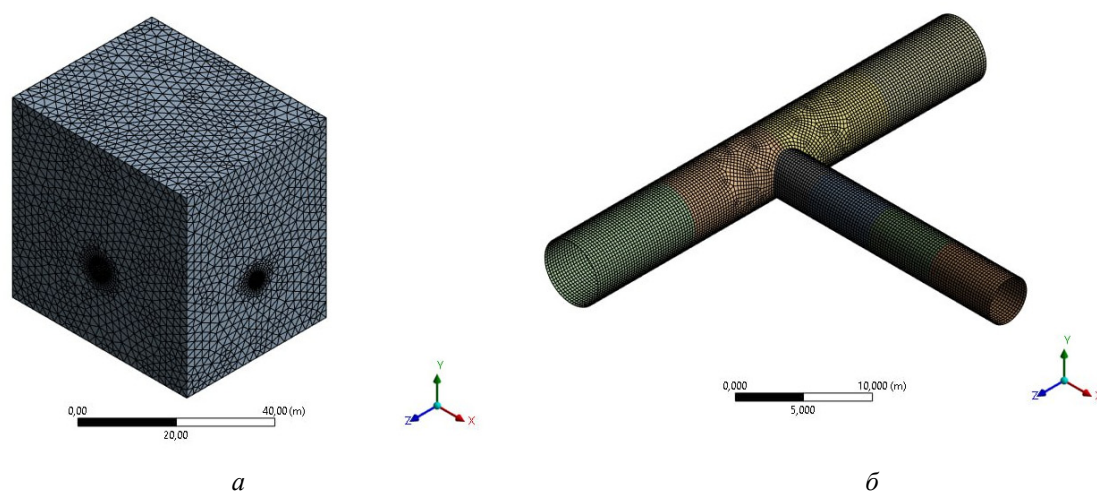
ет новый, востребованный современной практикой уровень расчетного обоснования подобных систем. Например, при строительстве метрополитена, помимо перегонных тоннелей и станций всегда есть необходимость в притоннельных сооружениях (тоннельных сбойках), которые являются вспомогательными сооружениями, необходимыми для функционирования основных.

Численный анализ выполнен в универсальном программном комплексе ANSYS Mechanical [4–8], который позволяет выполнять расчет статического напряженно-деформированного состояния произвольных пространственных комбинированных конструкций, зданий и сооружений с учетом эффектов физической, геометрической, контактной и генетической (стадийность возведения и нагружения) нелинейностей на основе метода конечных элементов. Библиотека конечных элементов программного комплекса ANSYS содержит более шестидесяти типов элементов для задач статического и динамического анализа. С использованием команд на языке APDL возможности программного комплекса могут быть расширены (например, для решения связанных задач) [9–10].

## 2. Метод расчета

Пространственная расчетная модель состоит из узла ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек (тройникового соединения) и окружающего основания: основная цилиндрическая оболочка диаметром  $D_1 = 5,50$  м и толщиной  $t_1 = 0,25$  м; примыкающая оболочка диаметром  $D_2 = 3,85$  м и толщиной  $t_2 = 0,20$  м. Материал оболочек [11–13] задан идеально упругой моделью со следующими параметрами: модуль упругости  $E_{sh} = 30\,000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu_{sh} = 0,2$ , плотность  $\rho_{sh} = 2300$  кг/м<sup>3</sup>. Материал основания задан упругопластической моделью Мора — Кулона (O. Mohr, C.A. Coulomb) [14–15] со следующими параметрами: модуль деформации  $E_{soil} = 30$  МПа, коэффициент поперечной деформации  $\mu_{soil} = 0,3$ , плотность  $\rho_{soil} = 2000$  кг/м<sup>3</sup>, сцепление  $C_{soil} = 10$  кПа, угол внутреннего трения  $\varphi_{soil} = 25^\circ$ .

Узел ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек расположен на глубине 30 м от верхней поверхности основания. Размеры грунтового массива выбраны из условия затухания напряженно-деформированного состояния грунта и приняты по 5 диаметров большой оболочки слева и справа от нее. На рис. 1 показан общий вид расчетной модели (рис. 1, а) и вид тройникового соединения (рис. 1, б), которое состоит из четырех частей основной цилиндрической оболочки и четырех частей примыкающей оболочки.



**Рис. 1.** Расчетная модель: а — общий вид; б — вид тройникового соединения  
И с т о ч н и к: выполнено В.Ю. Акуличем в программном комплексе ANSYS Mechanical

**Figure 1.** Finite element model: а — general view; б — T-connection  
S o u r c e: made by V.Yu. Akulich in ANSYS Mechanical software

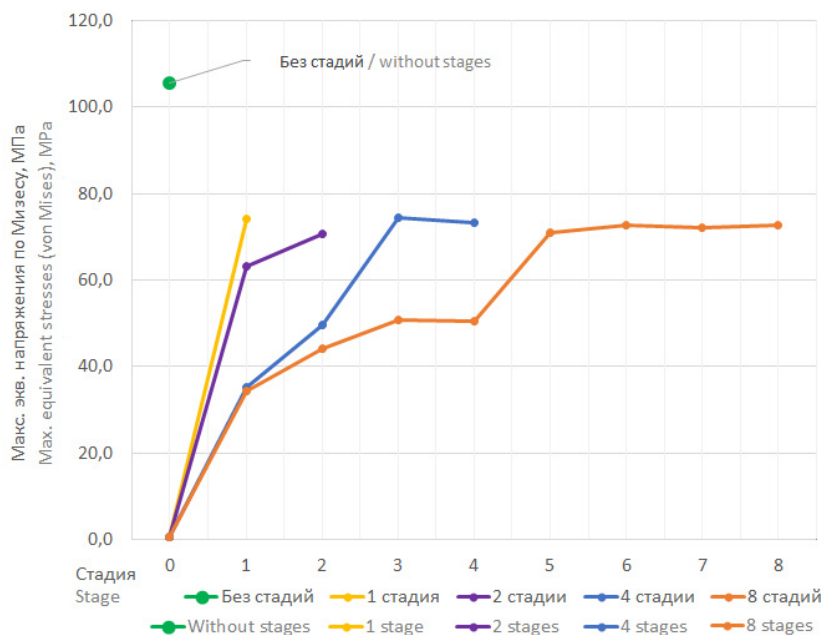
Нижней и боковым поверхностям грунтового массива и краям тройникового соединения заданы граничные условия, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость и корректную работу рассматриваемой системы. К телам приложена нагрузка только от собственного веса.

При решении задачи учтена контактная нелинейность, которая обусловлена совместной работой узла ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек с окружающим грунтовым массивом в процессе деформирования системы и при активации элементов оболочек на стадиях расчета [16–18]. Контакт между телами выполнен с помощью контактных пар, расположенных на внешней стороне тройникового соединения и на массиве основания. Зона контакта до решения задачи неизвестна. В зависимости от нагрузок, свойств материала, граничных условий и других факторов поверхности могут входить в контакт друг с другом и выходить из него. Расчет контактного взаимодействия выполнен с использованием метода штрафов, который реализован в программном комплексе ANSYS Mechanical [19–20]. В данных расчетных моделях возможность отлипания тройникового соединения от окружающего основания учтена, но контактное трение между объектами не рассмотрено.

Составлены расчетные случаи с 8, 4, 2 и 1 стадиями возведения тройникового соединения (в каждом случае дополнительно одна стадия (нулевая) отводилась на определение бытового состояния основания) и без учета стадий. Первой активировалась вся основная цилиндрическая оболочка диаметром  $D_1$  (за 4, 2 и 1 стадии в зависимости от расчетного случая), затем примыкающая оболочка диаметром  $D_2$  (за 4, 2 и 1 стадии в зависимости от расчетного случая).

### 3. Результаты и обсуждение

По результатам расчета проведен сравнительный анализ максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу [21–23] в ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочках. Кривые изменения напряжений в оболочке в зависимости от количества стадий в расчетном случае показаны на рис. 2. Дополнительно маркером на графике указано максимальное эквивалентное напряжение в тройниковом соединении без учета стадийности возведения.



**Рис. 2.** Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочках

И с т о ч н и к: выполнено В.Ю. Акуличем в программном комплексе ANSYS Mechanical  
**Figure 2.** Maximum equivalent stresses (von Mises) in orthogonally intersecting cylindrical shells  
 S o u r c e: made by V.Yu. Akulich in ANSYS Mechanical software

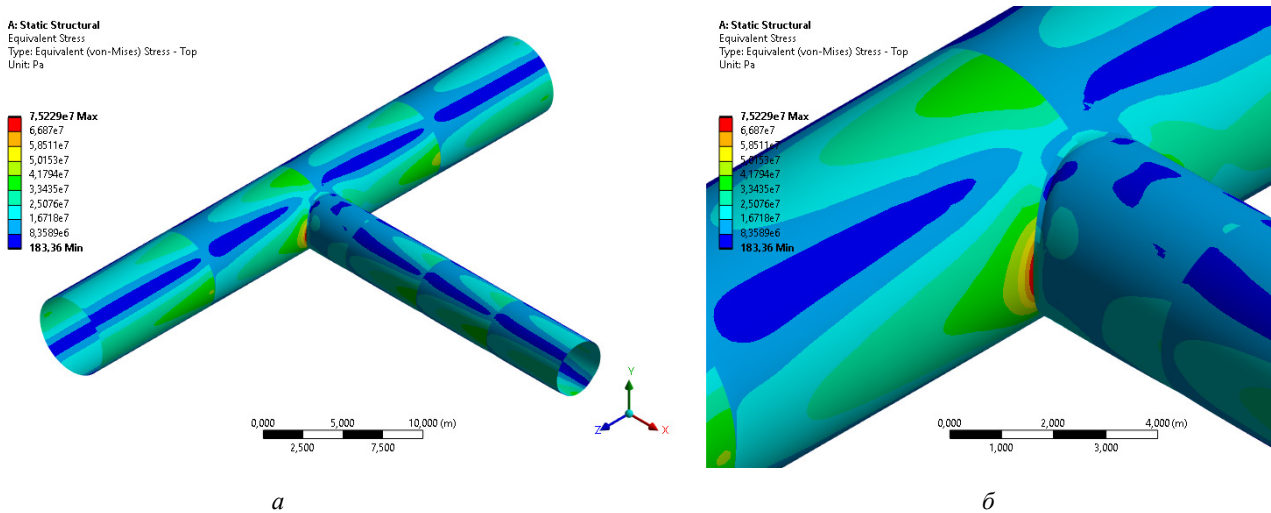
По результатам видно, что стадийный расчет дает значительное изменение величин напряжений по Мизесу в тройниковом соединении по сравнению с расчетным случаем без учета стадий [24–25]. В случае с 8 стадиями возведения максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в оболочке составляют 75,2 МПа, в то время как без учета стадийности максимальные эквивалентные напряжения в оболочке составляют 105,6 МПа.

Напряжения по Мизесу  $\sigma_e$  определяются по формуле

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения.

Распределение максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в теле цилиндрических оболочек в случае с 8 стадиями возведения показано на рис. 3. Максимальные значения напряжений возникают в месте сопряжения оболочек.



**Рис. 3.** Распределение максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в теле цилиндрических оболочек (справа показан увеличенный вид места сопряжения оболочек)  
И с т о ч н и к: выполнено В.Ю. Акуличем в программном комплексе ANSYS Mechanical

**Figure 3.** Distributions of maximum equivalent stresses (von Mises) in the body of cylindrical shells (the connection of the shells is shown on the right)  
S o u r c e: made by V.Yu. Akulich in ANSYS Mechanical software

В таблице представлены максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в теле тройникового соединения для каждого из 8 расчетных случаев.

**Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в теле тройникового соединения**

№	Количество стадий возведения	Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу, МПа
1	Без учета стадий	105,6
2	1	78,2
3	2	72,5
4	4	77,4
5	8	75,2

И с т о ч н и к: выполнено В.Ю. Акуличем в программном комплексе ANSYS Mechanical



**Maximum equivalent stresses (von Mises) in a T-connection**

№	Number of stages	Maximum equivalent stresses (von Mises), MPa
1	Disregarding stages	105.6
2	1	78.2
3	2	72.5
4	4	77.4
5	8	75.2

Source: made by V.Yu. Akulich in ANSYS Mechanical software

**4. Заключение**

1. Рассмотрено влияние учета последовательности возведения тройникового соединения на его напряженно-деформированное состояние. В случае с 8 стадиями возведения максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу в оболочке составляют 75,2 МПа, в то время как без учета стадийности максимальные эквивалентные напряжения в оболочке составляют 105,6 МПа.

2. Полученные результаты показали, что учет последовательности возведения существенно влияет на напряженно-деформированное состояние ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек и окружающего основания.

3. Перспективы дальнейших исследований связаны с применением нелинейных материалов оболочки и различными вариантами контактного взаимодействия оболочки и основания.

**Список литературы**

1. Белостоцкий А.М., Потапенко А.Л. Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах // *Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*. 2011. Т. 7. № 1. С. 76–84. EDN: PZEWIF
2. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселева Т.А. Сравнение напряжений, вычисленных на основе скалярной и векторной интерполяций МКЭ в сочлененных оболочках из разнородных материалов // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2013. № 5 (250). С. 70–76. EDN: REACMJ
3. Косицын С.Б., Чан Суан Линь. Численный анализ напряженно-деформированного состояния ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек без учета и с учетом их одностороннего взаимодействия с окружающим массивом грунта // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. Т. 10. № 1. С. 72–78. EDN: SXXAQJ
4. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 446 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/4071> (дата обращения: 02.03.2024).
5. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с. URL: <https://djvu.online/file/DtUw9VqXrtZCc> (дата обращения: 02.03.2024).
6. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. М.: Издательство АСВ, 2009. 336 с.
7. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 429 с.
8. Трушин С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи. М.: Издательство АСВ, 2008. 256 с.
9. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
10. Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications / ed. by P. Kohnke; ANSYS, Inc. 2009. 1226 p.
11. Зверьяев Е.М. Выделение согласованных уравнений классической теории оболочек из трехмерных уравнений теории упругости // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 2. С. 135–148. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148>
12. Зверьяев Е.М., Макаров Г.И. Итерационный метод построения НДС тонкой оболочки // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2012. № 3 (242). С. 55–60. EDN: OYZEXJ
13. PISAČIĆ K., HORVAT M., BOTAK Z. Finite difference solution of plate bending using Wolfram Mathematica // *Tehnički glasnik*. 2019. Vol. 13. Issue 3. P. 241–247. <https://doi.org/10.31803/tg-20190328111708>
14. Косицын С.Б., Чан Суан Линь. Сравнительный анализ различных моделей грунтового основания, окружающего цилиндрическую оболочку, с учетом возможности его отлипания от оболочки // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013. Vol. 9. Issue 1. P. 65–71. EDN: PZEXRZ

15. Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu. Influence of Stage-By-Stage Construction of a Cylindrical Shell on Stress-Strain States of an Existing Nearby Shell in a Soil Body // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2022. Vol. 18. Issue 2. P. 112–120. <http://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-2-112-120>.
16. Rodrigues L., Silva F.M.A., Gonçalves P.B. Effect of geometric imperfections and circumferential symmetry on the internal resonances of cylindrical shells // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Vol. 139. <http://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103875>
17. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. М.: Склад Софт, 2017. 736 с.
18. Голованов А.И. Моделирование больших упругопластических деформаций оболочек. Теоретические основы конечно-элементных моделей // *Проблемы прочности и пластичности*. 2010. № 72. С. 5–17. EDN: NCVHZV
19. Zhao W., Zhang J., Zhang W., Yuan X. Internal resonance characteristics of hyperelastic thin-walled cylindrical shells composed of Mooney-Rivlin materials // *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 163. <http://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107754>
20. Semenov A.A. Strength and Stability of Geometrically Nonlinear Orthotropic Shell Structures // *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol. 106. P. 428–436. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
21. Бочкарев С.А. Исследование собственных колебаний композитных цилиндрических оболочек с жидкостью, лежащих на упругом основании // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2023. Т. 29. № 2. С. 149–166. <http://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2023.29.02.01>
22. Баженов В.Г., Казаков Д.А., Кибец А.И., Нагорных Е.В., Самсонова Д.А. Постановка и численное решение задачи потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим наполнителем при комбинированных осесимметричных нагрузениях с кручением // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2022. № 3. С. 95–106. <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.10>
23. Lalin V.V., Dmitriev A.N., Diakov S.F. Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches // *Magazine Of Civil Engineering*. 2019. Issue. 5 (89). P. 39–51. <https://doi.org/10.18720/MCE.89.4>
24. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Фомин С.Д., Соболевская Т.А., Андреев А.С. Расчет прочности оболочечных конструкций АПК бункерного типа // *Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование*. 2019. № 2 (54). С. 285–297. <http://doi.org/10.32786/2071-9485-2019-02-34>.
25. Кривошапко С.Н. Упрощенный критерий оптимальности для оболочек вращения // *Приволжский научный журнал*. 2019. № 4 (52). С. 108–116. EDN: CSTZXH

## References

1. Belostockij A.M., Potapenko A.L. Implementation and verification of methods of submodeling and dynamic synthesis of substructures in universal and specialized software complexes. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2011;7(1):76–84. (In Russ.) EDN: PZEWIF
2. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A. Comparison of stresses calculated on the basis of scalar and vector interpolation of FEM in articulated shells of dissimilar materials. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2013;5(250):70–76. (In Russ.) EDN: REACMJ
3. Kosytsyn S.B., Chan Suan Lin. Numerical analysis of the stress-strain state of orthogonally intersecting cylindrical shells taking into account and not taking into account their unilateral interaction with the surrounding soil array. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014;10(1):72–78. (In Russ.) EDN: SXXAQJ
4. Bate K., Wilson E. *Numerical methods of analysis and the finite element method*. Moscow: Strojizdat Publ.; 1982. (In Russ.) Available from: <https://dwg.ru/dnl/4071> (accessed: 02.03.2024).
5. Zenkevich O.K. *The finite element method in engineering*. Moscow: Mir Publ.; 1975. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/DtUw9BqXrtZCc> (accessed: 02.03.2024).
6. Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L. *Numerical and analytical methods for calculating building structures*. Moscow: ACB Publ.; 2009. (In Russ.)
7. Gallager R. *The finite element method. Fundamentals*. Moscow: Mir Publ.; 1984. (In Russ.)
8. Trushin S.I. *Finite element method. Theory and problems*. Moscow: ACB Publ.; 2008. (In Russ.)
9. Basov K.A. *ANSYS: user reference*. Moscow: DMK Press; 2005. (In Russ.)
10. Kohnke P. (ed.). *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications*. ANSYS, Inc. 2009.
11. Zverjaev E.M. Separation of the consistent equations of the classical theory of shells from the three-dimensional equations of the theory of elasticity. *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2019;15(2):135–148. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-2-135-148>
12. Zverjaev E.M., Makarov G.I. Iterative method of constructing the stress-strain state of a thin shell. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2012;3(3):55–60. (In Russ.) EDN: OYZEXJ
13. Pisačić K., Horvat M., Botak Z. Finite difference solution of plate bending using Wolfram Mathematica. *Tehnički glasnik*. 2019;13(3):241–247. <https://doi.org/10.31803/tg-20190328111708>

14. Kosytsyn S.B., Chan Suan Lin. Comparative analysis of various models of the soil surrounding the cylindrical shell, taking into account the possibility of its detachment from the shell. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2013;9(1):65–71. EDN: PZEXRZ (In Russ.)
15. Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu. Influence of Stage-By-Stage Construction of a Cylindrical Shell on Stress-Strain States of an Existing Nearby Shell in a Soil Body. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2022;18(2):112–120. <http://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-2-112-120>
16. Rodrigues L., Silva F.M.A., Gonçalves P.B. Effect of geometric imperfections and circumferential symmetry on the internal resonances of cylindrical shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022;(139):103875. <http://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103875>
17. Perel'muter A.V., Slivker V.I. Design models of structures and the possibilities of their analysis. Moscow: Skad Soft Publ.; 2017. (In Russ.)
18. Golovanov A.I. Modeling of large elastic-plastic deformations of shells. Theoretical foundations of finite element models. *Problems of strength and plasticity*. 2010;(72):5–17. (In Russ.) EDN: NCVHZV
19. Zhao W., Zhang J., Zhang W., Yuan X. Internal resonance characteristics of hyperelastic thin-walled cylindrical shells composed of Mooney-Rivlin materials. *Thin-Walled Structures*. 2021;163:107754. <http://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107754>
20. Semenov A.A. Strength and Stability of Geometrically Nonlinear Orthotropic Shell Structures. *Thin-Walled Structures*. 2016;(106):428–436. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
21. Bochkarev S.A. Investigation of eigenmodes of composite cylindrical shells with liquid lying on an elastic soil. *Mechanics of composite materials and structures*. 2023;29(2):149–166. (In Russ.) <http://doi.org/10.33113/mkmmk.ras.2023.29.02.01>
22. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Kibec A.I., Nagornyh E.V., Samsonova D.A. Formulation and numerical solution of the problem of stability of elastic-plastic rotary shells with an elastic filler under combined axisymmetric torsion loads. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2022;(3):95–106. (In Russ.) <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.10>
23. Lalin V.V., Dmitriev A.N., Diakov S.F. Nonlinear deformation and stability of geometrically exact elastic arches. *Magazine of Civil Engineering*. 2019;(5):39–51. <https://doi.org/10.18720/MCE.89.4>
24. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Fomin S.D., Sobolevskaya T.A., Andreev A.S. Strength calculation of shell structures of the bunker type agro-industrial complex. *Izvestia of the Lower Volga Agro-University Complex*. 2019;(2):285–297. (In Russ.) <http://doi.org/10.32786/2071-9485-2019-02-34>
25. Krivoshapko S.N. A simplified criterion of optimality for shells of revolution. *Privolzhsky Scientific Journal*. 2019;(4):108–116. (In Russ.) EDN: CSTZXH