Строительная механика инженерных конструкций и сооружений
Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings
2024. 20(3). 289–299
ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299
УДК 539.3
EDN: QZUUZM
Научная статья / Research article

Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки из разномодульного материала, лежащей на вязкоупругом основании

Н.С. Рзаев

Бакинский инженерный университет, *Баку, Республика Азербайджан*
✉ nrzayev@beu.edu.az

История статьи
Поступила в редакцию: 14 января 2024 г.
Доработана: 11 апреля 2024 г.
Принята к публикации: 25 апреля 2024 г.

Заявление о конфликте интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Аннотация. Исследована задача устойчивости цилиндрической оболочки с различными модулями на вязкоупругом основании. Предполагается, что оболочка круглого сечения подвергается силовому воздействию и теряет устойчивость в осесимметричной форме. Считается, что один конец оболочки остается неподвижным, а другой меняет свое местоположение (движется) с определенной скоростью. При этом предполагается, что поперечное перемещение больше продольного. При решении задачи принималось во внимание сопротивление внешней среды, а также учитывалось, что цилиндрическая оболочка изготовлена из разномодульного материала. Получены уравнения связи между критической силой с характерными параметрами для цилиндрической оболочки, расположенной на основании, характеризуемом, в свою очередь, как вязкоупругое основание, и моделью Пастернака. Из полученных уравнений и изложенных результатов видно, что допускаются серьезные погрешности, если при решении вопросов устойчивости не учитываются сопротивление внешней среды и разная модульность. Результаты расчета показывают, что значение критической силы в рассматриваемом случае существенно отличается от значений, соответствующих классическим задачам, и зависит от параметров, характеризующих сопротивление основания. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах разномодульных цилиндрических оболочек на прочность, устойчивость и частотно-амплитудных характеристик с учетом сопротивления внешней среды.

Ключевые слова: растяжение, сжатие, цилиндрическая оболочка, устойчивость

Для цитирования
Рзаев Н.С. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки из разномодульного материала, лежащей на вязкоупругом основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 289–299. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299

Рзаев Натиг Самандар, доктор философии в области механики, доцент кафедры инженерной механики, Бакинский инженерный университет, Баку, Азербайджанская Республика; eLIBRARY SPIN-код: 5334-6047, ORCID: 0000-0002-1159-9296, E-mail: nrzayev@beu.edu.az.

Dynamic Stability of a Cylindrical Shell Made of a Material of Different Modulus Plased on a Viscous-elastic Foundation

Natig S. Rzayev

Baku Engineering University, *Baku, Republic of Azerbaijan*
✉ nrzayev@beu.edu.az

Article history
Received: January 14, 2024
Revised: April 11, 2024
Accepted: April 25, 2024

Conflicts of interest
The author declares that there is no conflict of interest.

Abstract. The problem of stability of a cylindrical shell with various modules on a viscoelastic base is investigated. It is assumed that the shell of a circular cross section is subjected to force and loses stability in an axisymmetric form. It is believed that one end of the shell remains motionless, while the other changes its location (moves) at a certain speed. It is assumed that the transverse displacement is greater than the longitudinal one. When solving the problem, the resistance of the external environment was taken into account, and it was also read that the cylindrical shell was made of a material of different modularity. Relationship equations are obtained between the critical force and the characteristic parameters for a cylindrical shell located on a base, characterized, in turn, as a viscoelastic base and the Pasternak model. From the equations obtained and the results presented, it can be seen that serious errors are allowed if, when solving stability issues, the resistance of the external environment and different modularity are not taken into account. The calculation results show that the value of the critical force in the case under consideration differs significantly from the values corresponding to classical problems, and depends on the parameters characterizing the base resistance. The results obtained can be used in calculations of multi-modulus cylindrical shells for strength, stability, and frequency-amplitude characteristics, taking into account the resistance of the external environment.

Keywords: tension, compression, cylindrical shell, stability

For citation

Rzayev N.S. Dynamic stability of a cylindrical shell made of a material of different modulus plased on a viscous-elastic foundation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2024;20(3):289–299. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299

1. Введение

Цилиндрические оболочки круглого сечения широко применяются в строительстве и во многих областях техники и энергетики. В последнее время в указанных областях применяют оболочки со сложными свойствами, не удовлетворяющими (не соответствующими) требованиям классической теории упругости. Среди них преобладают материалы, механические свойства которых зависят от вида применяемой нагрузки и которые имеют различное сопротивление растяжению-сжатию.

Во многих случаях, при эксплуатации конструкции, расчет устойчивости выходит на первый план. Учет сопротивления вязкоупругой внешней среды является актуальным (важным) моментом при решении вопросов динамической устойчивости цилиндрической оболочки. Вопрос, рассматриваемый в рамках классической теории упругости, решен [1; 3].

Разработан расчетный метод прогнозирования начала возникновения скручивания (искривления) эксцентрично нагруженных цилиндрических оболочек (покрытий). Этот метод представляет собой модификацию волнового метода Блоха, основанную на методе матрицы жесткости. Для

Natig S. Rzayev, Ph.D in Mechanics, Associate Professor of the Department of Engineering mechanics, Baku Engineering University, Baku, Azerbaijan Republic; eLIBRARY SPIN-code: 9043-5123, ORCID: 0000-0002-1159-9296; E-mail: nrzayev@beu.edu.az

реализации предложенного метода в коммерческом пакете конечных элементов Abaqus разработаны численный метод и эффективный алгоритм [1].

Аналитически решена задача о свободной вибрации цилиндрического покрытия, расположенного на основе Винклера — Пастернака. Приведено аналитическое решение свободной вибрации функционально-ступенчатой цилиндрической оболочки с ребрами жесткости, опирающейся на фундамент Винклера — Пастернака, с несколькими граничными условиями. Предполагается, что свойства материала цилиндрической оболочки плавно и непрерывно изменяются по толщине по степенному закону распределения объемной доли составляющих. На основе принципа Гамильтона, теории сдвиговых деформаций первого порядка и метода размазанных ребер жесткости получены определяющие уравнения подкрепленной функционально-градиентной цилиндрической оболочки, опирающейся на упругое основание [2].

В рамках теории оболочек Доннелла исследована большая амплитуда колебаний ортотропных цилиндрических оболочек функционально-градиентного материала (ФГМ), взаимодействующих с нелинейным упругим основанием Винклера. Для вывода основных уравнений ортотропных цилиндрических оболочек ФГМ, взаимодействующих с нелинейным упругим основанием, используется геометрическая нелинейность типа фон Кармана. Полуобратным методом получены частотно-амплитудные характеристики функционально-градиентной (ФГ) ортотропной цилиндрической оболочки, взаимодействующей с нелинейным упругим основанием [3].

Исследуется ортотропная пологая цилиндрическая оболочка, лежащая на упругом основании типа Пастернака. Кривые нагрузки/прогиба строятся для свободно опертых подвижных и неподвижных краев. Обсуждается влияние геометрии оболочки, параметров фундамента и краевых условий на эти характеристики. Замечено, что на кривые нагрузки/прогиба оболочек с подвижными краями меньше всего влияют изменения указанных выше параметров [4].

Представлена формулировка в замкнутой форме трехмерной (3D) уточненной теории сдвиговой деформации высшего порядка (RHOST) для анализа свободных колебаний однородных изотропных круглых цилиндрических оболочек с простой опорой-просто опорой и зажимом-зажимом [5].

Изучено влияние эксцентрических крепежных элементов и температуры на нелинейную статическую и динамическую реакцию цилиндрических S-FGM панелей. При этом цилиндрические оболочки (покрытия) усилены изогнутыми крепежными элементами (ребрами жесткости), в верхнем слое, а в нижнем слое — поддерживаются (подперты) упругими опорами. Нагружение динамического критического скручивания (искривления) было получено по критерию Будианского — Рота. Приведены численные результаты для оценки влияния повышения температуры, сжимающего давления, углов изгиба крепежных элементов (ребер жесткости) и упругих опор на нелинейную статическую и динамическую реакцию цилиндрических S-FGM панелей в термической среде [6; 7].

Разработана полуаналитическая модель для прогнозирования акустического отклика тонкостенных цилиндров с ортогональной жесткостью. Модель свободных колебаний решена приближенным методом предполагаемых мод. Возбуждение нормальных мод рассматривается с точки зрения совместной функции принятия (JAF) для падающих акустических гармонических плоских волн [8].

Были исследованы проблемы скручивания (искривления) цилиндрических резервуаров, используемых для хранения нефти и топлива при статических или квазистатических нагрузках, включая давление, ветер, обрушение фундамента и пожар. Во всех случаях скручивание (искривление) рассматривалось как статический процесс. Были внесены предложения по улучшению конструкции [9].

С использованием метода конечных элементов исследован динамический анализ предварительно напряженной круглой цилиндрической оболочки (покрытия) с распределенным снаружи давлением [10; 11].

Кинематические соотношения, рассматриваемые для панелей оболочки, соответствуют теории сдвиговой деформации первого порядка наряду с геометрическими нелинейностями фон Кармана, а вклад ребер жесткости рассматривается на основе метода размытых ребер жесткости. Нелинейные основные уравнения движения для панелей оболочки FGM с эксцентричной жесткостью выведены с использованием принципа Гамильтона. Предполагается, что функции Навье удовлетворяют заданным граничным условиям, тогда как методы Галеркина и Рунге — Кутты четвертого порядка используются для достижения нелинейных динамических характеристик [12].

В задаче о свободной вибрации продольно подкрепленных цилиндрических оболочек, учитывая сложность граничных условий стрингерной подкрепленной цилиндрической оболочки и произвольность сечения стрингера, были введены упругие ограничения, которые могут непрерывно изменяться на обоих концах оболочки. Выведена зависимость смещения между совместимостью смещений между центром жесткого элемента произвольного поперечного сечения и средней поверхностью цилиндрической оболочки, функция формы осевой моды оболочки построена ортогональным методом Грама — Шмидта [13].

В упомянутых работах не учитывалось сопротивление внешней среды и то, что материал цилиндрической оболочки (покрытия) имеет разные модули (разномодульный). В представленном исследовании он расположен на вязкоупругой основе. Решена задача динамической устойчивости цилиндрической оболочки (покрытия) с различными модулями.

2. Метод расчета

В рассматриваемой задаче исследуется динамическая устойчивость оболочки цилиндрического круглого сечения, закрепленной на вязкоупругом основании. Зависимость реакции среды q от прогиба рассматривается следующим образом [11]:

$$q = K_1 W + K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Здесь W — прогиб, t — время, K_1 и K_2 — характеристики основания, которые определяются из экспериментов.

Предположим, что цилиндрическая оболочка различного модуля радиусом R, толщиной h и круглым поперечным сечением под действием силы T, действующей на его поверхность, теряет устойчивость в осесимметричном виде. Уравнение движения с учетом (1) записывается следующим образом (предполагается, что один конец оболочки неподвижен, а другой конец изменяется с заданной скоростью) [7; 16]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_1}{\partial x} = h\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T_2}{R} - T_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 W + K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = h\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},\end{gathered} \tag{2}$$

где u — продольное и W — поперечное перемещение; T_1 и T_2 — внутренние силы в осевом и поперечном направлениях соответственно; M — осевой изгибающий момент; ρ — плотность.

Используя [3; 7], можно получить следующие соотношения:

$$\begin{gathered}T_1 = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + A_3\wp_1 + A_4\wp_2;\\ T_2 = C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + C_3\wp_1 + C_4\wp_2;\\ M = B_1\varepsilon_1 + B_2\varepsilon_2 + B_3\wp_1 + B_4\wp_2.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{W}{R}; \quad \wp_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \wp_2 = -\frac{W}{R^2}; \tag{4}$$

$$A_1 = \frac{E^+h}{2\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left[n\left(2\bar{h}_0+1\right)+\left(1-2\bar{h}_0\right)\right];$$

$$A_2 = \frac{E^+h}{2\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left[n\nu^+\left(1+2\bar{h}_0\right)+\nu^-\left(1-2h_0\right)\right];$$

$$A_3 = \frac{E^+h^2}{8\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left(1-n\right)\left(1-4\bar{h}_0^2\right);$$

$$A_4 = \frac{E^+h^3}{8\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left(1-4\bar{h}_0^2\right)h^2;$$

$$B_1 = A_3;\;\; B_2 = A_4;$$

$$B_3 = \frac{E^+h^3}{24\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left[n\left(1+8\bar{h}_0^2\right)+\left(1-8\bar{h}_0^2\right)\right];$$

$$B_4 = \frac{E^+h^3}{24\left(1-\nu^-\nu^+\right)}\left[\nu^+\left(8\bar{h}_0^2+1\right)-\nu^-n\left(1-8\bar{h}_0^3\right)\right];$$

$$C_1 = \frac{E^+h}{2\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left[\nu^-n\left(1+2\bar{h}_0\right)+\nu^+\left(1-2\bar{h}_0\right)\right];$$

$$C_2 = \frac{E^+h}{2\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left[n\left(1+2\bar{h}_0\right)+\left(1-2\bar{h}_0\right)\right];$$

$$C_3 = \frac{E^+h^2\left(\nu^-+\nu^+n\right)}{8\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left(1-4\bar{h}_0^2\right);$$

$$C_4 = \frac{\left(1-n\right)E^+\rho^2}{8\left(1-\nu^+\nu^-\right)}\left(1-4\bar{h}_0^2\right). \tag{5}$$

При этом были приняты следующие обозначения:

$$\bar{h}_0 = -\frac{\varepsilon_1+\nu_o\varepsilon_2}{h\left(1-\nu_o\wp\right)}; \qquad \nu_o = \frac{\nu^++\nu^--\left(\nu^-\nu^+\right)\sin\sigma}{q}; \qquad n = \frac{E^-}{E^+}. \tag{6}$$

$\bar{h}_0 = h_0 \cdot h^{-1}$ — разница нейтральной силы.

Если учесть выражения (5) в уравнении движения (2), то получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_1\frac{\partial u}{\partial x}+A_2\frac{W}{R}-A_3\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-A_4\frac{W}{R^2}\right)=h\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_2\frac{W}{R}-B_3\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-B_4\frac{W}{R^2}\right)+\frac{1}{R}\left(C_1\frac{\partial u}{\partial x}+C_2\frac{W}{R^2}-C_4\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-C_4\frac{W}{R^2}\right)+$$

$$+K_1W+K_2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-T_1\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=h\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Предположим, что $u << W$ и принято условие $h\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to 0$, тогда из первого уравнения системы можно получить следующее выражение:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-A_1^{-1}\left(A_2\frac{W}{R}+A_3\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+A_4\frac{W}{R^2}\right). \quad (8)$$

Если во второе уравнение (7) подставить выражение (4), то получим следующее уравнение относительно поперечного перемещения:

$$b_1\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\frac{\partial b_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2}-\frac{b_1}{R}+\frac{b_3}{R^2}-\frac{b_4}{R}+T_1\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{2}{R}\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{1}{R}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2}+\frac{b_5}{R}+K_1R\right)W+\left(K_2-h\rho\right)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0. \quad (9)$$

Здесь были приняты следующие обозначения:

$$b_1=B_3-B_1\cdot A_3\cdot A_1^{-1};\qquad b_2=B_2-B_1\cdot A_2\cdot A_1^{-2};\qquad b_3=B_4-B_1\cdot A_4\cdot A_1^{-1};$$

$$b_4=C_1A_2\cdot A_1^{-1}-C_3;\qquad b_5=R^{-1}\left[C_2-C_1A_3\cdot A_1^{-1}\left(C_4-C_1A_4\cdot A_1^{-1}\right)\right];$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial x}=\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}\left(q_1-q_2\cdot A_3A_1^{1}\right)\left(\bar{h}_0-B_3A_1^{-1}\right);$$

$$\frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2}=\left(q_1-q_2\cdot A_3\cdot A_1^{-1}\right)\left(\bar{h}_0-A_1^{-1}B_3\right)\frac{\partial^2\bar{h}_0}{\partial x^2}-q_2A_1^{-2}\left(q_1A_1-q_2A_2\right)\left(\bar{h}_0-B_3A_1^{-1}\right)\left(\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}\right)+$$

$$+\left(q_1-q_2\cdot A_1^{-1}\cdot A_3\right)\left[\left(1-A_1^{-2}\left(q_1\bar{h}_0\cdot A_1-B_3A_2\right)\right)\right]\frac{\partial^2\bar{h}_0}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial x}=\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}\left(\bar{h}_0-A_1^{-1}\cdot A_2\right)\left(\bar{h}_0-A_1^{-1}B_1\right)\cdot q_2;$$

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 h^2{}_0}{\partial x^2}\left(\bar{h}_0-A_1^{-1}\cdot A_2\right)\left(\bar{h}_0-B_2^{-1}\cdot q_1\right)q_2+$$

$$+\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}\left[\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}-A_1^{-2}q_2\left(\bar{h}_0A_1-A_2\right)\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}\left(\bar{h}_0-A_1^{-1}B_1\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}\left(\bar{h}_0-A_1^{-1}A_2\right)\cdot\left[\frac{\partial\bar{h}}{\partial x}-A_1^{-2}q_2\left(\bar{h}_0A_1-B_1\right)\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}\right]q_2;$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial x}=\left(q_1\bar{h}_0-A_1^{-1}A_4q_2\right)\left(\bar{h}_0-A_1^{-1}B_1\right)\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2}=\left(q_1\bar{h}_0-A_1^{-1}A_4q_2\right)\left(\bar{h}_0-A_1^{-1}B_1\right)\frac{\partial^2 \bar{h}_0}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left[q_1-A_1^{-2}\left(A_1A_2\cdot q_2-A_4\cdot q_2\right)\right]\left(\bar{h}_0-B_1A_1^{-1}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x}\right)^2\left(q_1\bar{h}_0-A_1^{-1}\cdot q_2\right)\left[1-A_1^2\left(A_1\bar{h}_0-B_1\right)q_2\right]. \tag{10}$$

Здесь

$$q_1=\frac{E^+\left(n\nu^+-\nu^-\right)}{1-\nu^+\nu^-};\qquad q_2=\frac{E^+\left(n-1\right)}{1-\nu^-\nu^+}.$$

В общем случае $b_1 ... b_5$ является функцией W — прогиб $\bar{h}_0$ определяется следующим образом:

$$\bar{h}_0=\frac{A_3\cdot A_1^{-1}\wp_1+A_2\cdot A_1^{-1}\varepsilon_2+A_4\cdot A_1^{-1}\wp_2-\nu_0\varepsilon_2}{\left(\wp_1+\wp_2\nu_0\right)h}. \tag{11}$$

Решение уравнения (9) определяем в виде следующей функции, удовлетворяющей граничным условиям:

$$W=q\left(t\right)\sin\frac{m\pi}{L}x, \tag{12}$$

где q — амплитуда кривой, m — есть число полуволн вдоль длины волны. В этом случае из (11) видно, что граница нейтрального слоя вне зависимости от $\bar{h}_0$ определяется следующей формулой:

$$P_1\bar{h}_0+P_2\bar{h}_0+P_3=0, \tag{13}$$

где

$$P_1=q_2\left(1-R^2\alpha^2\right)-0,5\left(q_1-R^2q_2\alpha^2\right);$$

$$P_2=q_3\left(1-R^2\alpha^2\right)-R\left(\nu^-q_2-q_1\right);$$

$$P_3=\left(q_6-R^2\alpha^2q_4\right)-R\left(\nu^-q_3-q_5\right);$$

$$\alpha=\frac{m\pi}{l};\qquad q_3=\frac{E^+\left(n+1\right)}{1-\nu^+\nu^-}\frac{h}{2};\qquad q_4=-\frac{h^2}{8}K_2;$$

$$q_5=\frac{h}{2}\frac{E^+\left(\nu^++n\nu^-\right)}{1-\nu^+\nu^-};\ q_6=-\frac{h^2}{8}K_5. \tag{14}$$

Поскольку $\bar{h}_0$ — имеет постоянное значение, то все производные от $\bar{h}_0$ равняются нулю.

$$\frac{\partial b_1}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2}=0;\quad \frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2}=0;\quad \frac{\partial b_2}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial b_3}{\partial x}=0;\ \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2}=0. \tag{15}$$

Уравнение движения выглядит следующим образом:

$$q''(t)-\eta q(t)=0. \tag{16}$$

Здесь

$$\eta=-\frac{1}{h\rho}\left[\left(b_2\alpha^2-R^{-2}b_3+R^{-1}a_4-T+K_1\right)+R^{-1}b_5\right]. \tag{17}$$

3. Результаты и обсуждение

Как видно из (17), при $\eta<0$ движение — периодическое, а при $\eta>0$ амплитуда искривления со временем увеличивается и оболочка теряет устойчивость. Она определяется из условия $\eta=0$ критической силы (T_k):

$$T_k=b_2\alpha^2-\left(R^{-1}b_3-b_4-b_5\right)R^{-1}+K_1. \tag{18}$$

При $n=1$, с учетом сопротивления внешней среды, $\nu^+=\nu^-$ можно получить решение задачи для одномодульной цилиндрической оболочки. Если $K_1=0,$ то классическая задача решена.

Следующие частные случаи получаются, когда $n=1$:

1) сопротивление внешней среды отсутствует ($K_1=0$, $K_2=0$);

2) линия покрытия находится на основе Винклера.

Действие критической силы на оболочку, закрепленную на вязкоупругом основании, отсутствует.

Теперь рассмотрим решение задачи по модели Пастернака [11; 15]:

$$q=K_1W-K_2\frac{d^2W}{dx^2}. \tag{19}$$

В этом случае уравнение движения записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_1\frac{\partial u}{\partial x}+A_2\frac{W}{R}-A_3\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-A_4\frac{W}{R^2}\right)=h\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2};\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_2\frac{W}{R}-B_3\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-B_4\frac{W}{R}\right)+\frac{1}{R}\left(C_1\frac{\partial u}{\partial x}+C_2\frac{W}{R^2}-C_4\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-C_4\frac{W}{R^2}\right)+\\ +K_1W-\left(T+K_2\right)\frac{\partial^2W}{\partial x^2}=h\rho\frac{\partial^2W}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{20}$$

Принимая $u<<W$, как и в предыдущем случае, можно получить из условия приближения $h\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\to 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{A_2}{A_1}\frac{W}{R}+\frac{A_3}{A_1}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\frac{A_4}{A_1}\frac{W}{R^2}. \tag{21}$$

Если подставить выражение (21) во второе уравнение (20), то получим следующее уравнение с учетом прогиба *W*:

$$b_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial b_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2} - \frac{b_1}{R} + \frac{b_3}{R^2} - \frac{b_4}{R} + \left(T + K_2\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \frac{2}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial b_3}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} + \frac{b_5}{R} \right) W + K_1 W = h\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (22)$$

Записав выражение (21) в уравнение (22) и учитывая, что b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 постоянны, получим следующее уравнение:

$$q''(t) - \gamma_1 q(t) = 0. \quad (23)$$

Здесь

$$\gamma_1 = -\frac{1}{h\rho}\left[\left(b_2\alpha^2 - R^{-2}b_3 + R^{-1}b_4 - \left(T + K_2\right) \right)\alpha^2 \right] + R^{-1}b_5 + K_1. \quad (24)$$

При этом, если $\gamma_1 < 0$, решение становится периодическим, если $\gamma_1 > 0$, то амплитуда со временем увеличивается, а оболочка теряет устойчивость. Значение критической силы определяется из условия $\gamma_1 = 0$:

$$T_k = \frac{\alpha^2 \left(b_2 - K_2\right) - R^{-1}\left(R^{-1}b_3 - b_4 + b_5 \right) + K_1}{\alpha^2}. \quad (25)$$

Здесь, когда $K_1 = 0$, внешнее сопротивление не учитывается, а когда $K_2 = 0$, решение соответствующей задачи выполняется на основании Винклера.

Из выражения (25) видно, что в отличие от вязкоупругого основания здесь величина критической силы зависит от коэффициента Пастернака.

4. Заключение

1. Решена задача динамической устойчивости цилиндрической оболочки с различными модулями, расположенной на вязкоупругом основании и основании, характеризуемом моделью Пастернака.

2. Получены уравнения связи между критической силой и характеристическими параметрами. Из полученных уравнений видно, что сопротивление внешней среды и различные модули оказывают существенное влияние на критическую силу. Если эти факторы не учитывать, можно допустить серьезные ошибки (отклонения).

3. Полученные результаты могут быть использованы в расчетах на прочность, устойчивость и в определении частотно-амплитудных характеристик цилиндрических покрытий с различными модулями с учетом сопротивления внешней среды.

Список литературы

1. *Ning X., Pellegrino S.* Bloch wave buckling analysis of axially loaded periodic cylindrical shells // Computers and Structures. 2016. Vol. 177. P. 114–125. http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.09.006

2. *Nguyen V.-L., Hoang T.-P.* Analytical solution for free vibration of stiffened functionally graded cylindrical shell structure resting on elastic foundation // SN Applied Sciences. 2019. Vol. 1. http://doi.org/10.1007/s42452-019-1168-y

3. *Sofiyev A.H.* Large amplitude vibration of FGM orthotropic cylindrical shells interacting üith the nonlinear Winkler elastic foundation // Composites Part B: Engineering. 2016. Vol. 98. P. 141–150.

4. *Paliwal D.N., Kanagasabapathy H., Gupta K.M.* The large deflection of an orthotropic cylindrical shell on a Pasternak foundation // Composite Structures. 1995. Vol. 31. Iss. 1. P. 31–37. https://doi.org/10.1016/0263-8223(94)00068-9

5. *Khalili S.M.R., Davar A., Malekzadeh Fard K.* Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory // International Journal of Mechanical Sciences. March 2012. Vol. 56. Iss. 1. P. 1–25. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.002

6. *Duc N.D., Kim S.-E., Manh D.T., Nguyen P.D.* Effect of eccentrically oblique stiffeners and temperature on the nonlinear static and dynamic response of S-FGM cylindrical panels // Thin-Walled Structures. 2020. Vol. 146. http://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106438

7. *Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M., Pellicano F.* On the buckling load estimation of grid-stiffened composite conical shells using vibration correlation technique // European Journal of Mechanics — A/Solids. 2022. Vol. 96. http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104667

8. *Zhao D., Ferguson N.S., Squicciarini G.* Acoustic response of thin-walled, orthogonally stiffened cylinders // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 657. Iss. 1. http://doi.org/10.1088/1757-899X/657/1/012007

9. *Godoy L.A.* Buckling of vertical oil storage steel tanks: Review of static buckling studies // Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 103. P. 1–21. http://doi.org/10.1016/j.tws.2016.01.026

10. *Harbaoui I., Khadimallah M.A.* A Prestressed Ring-Stiffened Cylindrical Shell: A New Spectral Element // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2022. P. 362–368. http://doi.org/10.1007/978-3-030-86446-0_48.

11. *Harbaoui I., Khadimallah M.A., Benslimane A., Jin G., Civalek O.* Formulation of continuous element of prestressed stiffened circular cylindrical shell // Steel and Composite Structures. 2021. Vol. 41. P. 521–531. http://doi.org/10.12989/scs.2021.41.4.521

12. *Kumar A., Kumar D., Sharma K.* An Analytical Investigation on Linear and Nonlinear Vibrational Behavior of Stiffened Functionally Graded Shell Panels Under Thermal Environment // Journal of Vibration Engineering and Technologies. 2021. Vol. 9. Iss. 8. P. 2047–2071. http://doi.org/10.1007/s42417-021-00348-0

13. *Niu N., Sun L.-L., Xing Z.-Z., Zhao G.-D., Wang X.-H., Wu Y.-Y.* Calculation and analysis of inherent properties of stiffened cylindrical shells with longitudinal stiffeners of arbitrary cross section under typical boundary conditions. Zhendong Gongcheng Xuebao // Journal of Vibration Engineering. 2023. Vol. 36. P. 96–106. http://doi.org/10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.011

14. *Zhang R., Meng X., Gardner L.* Shape optimisation of stainless steel corrugated cylindrical shells for additive manufacturing // Engineering Structures. 2022. Vol. 270. http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114857

15. *Пастернак П.Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Стройиздат, 1954. 89 с.

16. *Гаджиев В.Д.* Собственное колебание ортотропной круговой пластинки лежащей на неоднородно вязко-упругом основании // Вестник современной науки. 2016. № 5. С. 20–24.

References

1. Ning X., Pellegrino S. Bloch wave buckling analysis of axially loaded periodic cylindrical shells. *Computers and Structures.* 2016;177:114–125. http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.09.006

2. Nguyen V.-L., Hoang T.-P. Analytical solution for free vibration of stiffened functionally graded cylindrical shell structure resting on elastic foundation. *SN Applied Sciences.* 2019;1:1150. http://doi.org/10.1007/s42452-019-1168-y

3. Sofiyev A.H. Large amplitude vibration of FGM orthotropic cylindrical shells interacting üith the nonlinear Winkler elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*. 2016;98;141–150. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.05.018

4. Paliwal D.N., Kanagasabapathy H., Gupta K.M. The large deflection of an orthotropic cylindrical shell on a Pasternak foundation. *Composite Structures.* 1995;31(1):31–37. https://doi.org/10.1016/0263-8223(94)00068-9

5. Khalili S.M.R., Davar A., Malekzadeh Fard K. Free vibration analysis of homogeneous isotropic circular cylindrical shells based on a new three-dimensional refined higher-order theory. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2012;56(1):1–25. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.002

6. Duc N.D., Kim S.-E., Manh D.T., Nguyen P.D. Effect of eccentrically oblique stiffeners and temperature on the nonlinear static and dynamic response of S-FGM cylindrical panels. *Thin-Walled Structures.* 2020;146:106438. http://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106438

7. Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M., Pellicano F. On the buckling load estimation of grid-stiffened composite conical shells using vibration correlation technique. *European Journal of Mechanics — A/Solids.* 2022;96:104667. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104667

8. Zhao D., Ferguson N.S., Squicciarini G. Acoustic response of thin-walled, orthogonally stiffened cylinders. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2019;657(1):012007. https://doi.org/10.1088/1757-899X/657/1/012007

9. Godoy L.A. Buckling of vertical oil storage steel tanks: Review of static buckling studies. *Thin-Walled Structures.* 2016;103:1–21. https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.01.026

10. Harbaoui I., Khadimallah M.A. A Prestressed Ring-Stiffened Cylindrical Shell: A New Spectral Element. *Lecture Notes in Mechanical Engineering.* 2022:362–368. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86446-0_48

11. Harbaoui I., Khadimallah M.A., Benslimane A., Jin G., Civalek O. Formulation of continuous element of prestressed stiffened circular cylindrical shell. *Steel and Composite Structures*. 2021;41:521–531. https://doi.org/10.12989/scs.2021.41.4.521

12. Kumar A., Kumar D., Sharma K. An Analytical Investigation on Linear and Nonlinear Vibrational Behavior of Stiffened Functionally Graded Shell Panels Under Thermal Environment. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2021;9(8):2047–2071. https://doi.org/10.1007/s42417-021-00348-0

13. Niu N., Sun L.-L., Xing Z.-Z., Zhao G.-D., Wang X.-H., Wu Y.-Y. Calculation and analysis of inherent properties of stiffened cylindrical shells with longitudinal stiffeners of arbitrary cross section under typical boundary conditions. Zhendong Gongcheng Xuebao. *Journal of Vibration Engineering.* 2023;36:96–106. https://doi.org/10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2023.01.011

14. Zhang R., Meng X., Gardner L. Shape optimisation of stainless steel corrugated cylindrical shells for additive manufacturing. *Engineering Structures.* 2022;270:114857. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114857

15. Pasternak P.L. *Fundamentals of a new method for calculating the foundations on elastic base by means of two coefficients of poete*. Moscow: Sroyizdat Publ.; 1954. (In Russ.)

16. Gadjiev V.D. A natural oscillation of the orthotropic circular plate lying on a heterogeneous viscous-elastic base. *Bulletin of modern science*. 2016;5:20–24. (In Russ.)