

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-276-288

УДК 624.04:004

EDN: KGHCLL

Научная статья / Research article

Динамические задачи строительной механики с отрицательным временем

А.В. Штейн^{id}, В.Б. Зылев^{id}✉

Российский университет транспорта, Москва, Россия

✉ zylevzb@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 7 апреля 2024 г.

Доработана: 21 мая 2024 г.

Принята к публикации: 27 мая 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Сформулирована динамическая задача с отрицательным течением времени. Обычные уравнения движения с добавлением начальных условий достаточны не только для того, чтобы рассматривать движение деформируемой системы при обычном, прямом течении времени, но позволяют восстанавливать состояние системы для предыдущих моментов времени. Практическое приложение решения задач с отрицательным временем авторы видят, прежде всего, в контроле численных методов интегрирования уравнений движения, поскольку прямой и обратный ход не являются идентичными. Предлагаемый способ тестирования численных методов решения динамических задач в принципе может быть применен к любой вычислительной схеме интегрирования уравнений движения. Дано два примера с численным решением на основании явной вычислительной схемы с экстраполяцией по Адамсу. Решаемые задачи относятся к плоско-деформированному состоянию пластин в условиях больших перемещений. Области пластин разбиваются на треугольные конечные элементы с равномерным шагом для пространственной сетки. Криволинейные границы в этом случае получаются ступенчатыми. Результаты приведенных тестовых примеров продемонстрировали хорошую точность тестируемого метода. Были рассмотрены задачи, требующие большого количества шагов интегрирования (до 1 миллиона), при этом система возвращалась в исходное состояние с большой точностью. Второе из приведенных численных решений имело расчетную схему из 160 000 конечных элементов, динамическое решение задачи носит явно выраженный волновой характер решения. В примерах приведены данные о восстановлении значений упругих перемещений, скоростей и напряжений. Основной вывод, который можно сделать из работы, заключается в том, что предлагаемый вариант контроля численных методов может быть эффективно использован, особенно для задач, решение которых носит волновой характер.

Штейн Алексей Владимирович, доцент кафедры строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3150-4438, ORCID: 0009-0003-2232-5121; E-mail: avsh7714@yandex.ru

Зылев Владимир Борисович, доктор технических наук, заведующий кафедрой строительной механики, Российский университет транспорта, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3150-4438, ORCID: 0000-0001-5160-0389; E-mail: zylevzb@ya.ru

© Штейн А.В., Зылев В.Б., 2024

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Ключевые слова: динамические задачи, деформируемая система, предыдущее состояние системы, численное интегрирование, уравнения движения, отрицательное время, явная вычислительная схема, треугольные конечные элементы, большие перемещения, равномерная пространственная сетка, шаг численного интегрирования, волновое решение, локальные экстремумы

Для цитирования

Штейн А.В., Зылев В.Б. Динамические задачи строительной механики с отрицательным временем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 276–288. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-276-288>

Problems of Structural Dynamics with Negative Time

Alexey V. Shtein^{id}, Vladimir B. Zylev^{id}✉

Russian University of Transport, Moscow, Russia

✉ zylevzb@yandex.ru

Article history

Received: April 7, 2024

Revised: May 21, 2024

Accepted: May 27, 2024

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. A dynamic problem with negative flow of time is formulated. The conventional equations of motion with the addition of initial conditions are sufficient not only for the analysis of motion of a deformable system under the regular, forward flow of time, but they allow to restore the state of the system for past moments of time. The practical use of solving problems with negative time can be found primarily in testing numerical methods for integrating the equations of motion, since forward and backward algorithms are not identical. The proposed technique of testing numerical methods for solving dynamic problems can be applied virtually to any computational scheme of integrating the equations of motion. Two examples of numerical solution based on explicit computational scheme with Adams extrapolation are presented. The addressed problems deal with the plane deformation state of plates under large displacements. Plate regions are partitioned into triangular finite elements with uniform spacing for spatial meshing. The obtained curvilinear boundaries in this case are stepped. The results of the presented test cases demonstrated good accuracy of the tested method. Problems requiring a large number of integration steps (up to 1 million) were considered, and the system returned to the initial state with high accuracy. The second of the given numerical solutions had a computational scheme of 160 000 finite elements, and the dynamic solution of the problem has a pronounced wave-like behavior. In the examples, data on the recovery of elastic displacement, velocity and stress values are given. The main conclusion of the study is that the proposed technique of control of numerical methods can be effectively applied, especially for problems with wave-like solution properties.

Keywords: dynamic problems, deformable system, recovery of previous states of the system, numerical integration of equations of motion, explicit computational scheme, triangular finite elements, large displacements, uniform spatial mesh, numerical integration step, wave-like solution, local extrema

For citation

Shtein A.V., Zylev V.B. Problems of structural dynamics with negative time. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):276–288. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-276-288>

Alexey V. Shtein, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3150-4438; ORCID: 0009-0003-2232-5121; E-mail: avsh7714@yandex.ru

Vladimir B. Zylev, Doctor of Technical Science, Head of the Department of Structural Mechanics, Russian University of Transport, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3150-4438; ORCID: 0000-0001-5160-0389; E-mail: zylevzb@ya.ru

1. Введение

Динамические задачи строительной механики предполагают моделирование поведения системы при нарастающем времени. В данном исследовании мы рассматриваем обратную в определенном смысле задачу, когда уравнения движения используются для восстановления предыдущих по времени состояний системы. Отметим, что подобные задачи известны в механике, например, в небесной механике развиты методы предсказаний не только будущих солнечных затмений, но и определение времени ранее наблюдавшихся затмений, что позволяет уточнять хронологию исторических событий.

Как пример задачи с отрицательным временем для упругой системы приведем аналитическое решение задачи о затухающих колебаниях системы с одной степенью свободы (рис. 1). Известное частное решение которой имеет вид

$$y = Be^{-nt} \sin \omega t. \quad (1)$$

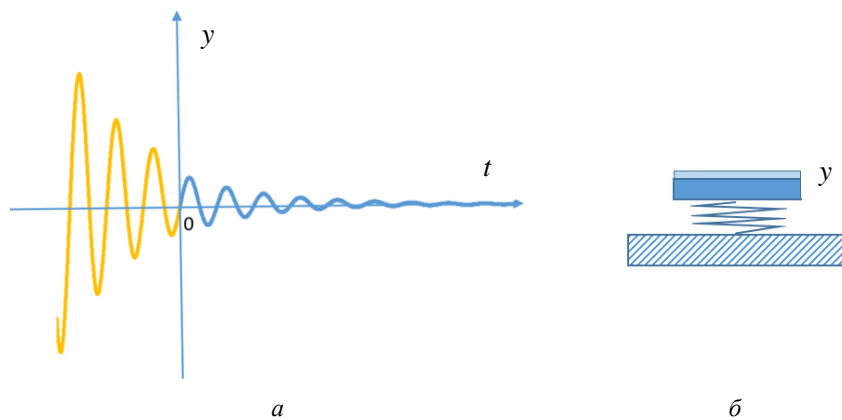


Рис. 1. Затухающие колебания системы с одной степенью свободы:
a — график аналитического решения; *b* — система с одной степенью свободы
 Источники: выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 1. Damped vibration of a single degree-of-freedom system:
a — analytical solution; *b* — single degree-of-freedom system
 Source: compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

В данном случае для восстановления предыдущих состояний системы (светлая часть графика на рис. 1, *a*) достаточно подставить в решение (1) отрицательное значение времени.

В настоящее время широко используются численные методы интегрирования уравнений движения. Наибольшее количество публикаций относится к неявным вычислительным схемам (метод Ньюмарка, θ — метод Вилсона и др.) [1–4]. Кроме неявных вычислительных схем используются и явные вычислительные схемы (метод центральных разностей, метод Рунге — Кутты, метод Адамса [5]).

Применение любого численного метода неизбежно связано с погрешностями, определение и оценка которых относятся к основным вопросам применимости того или иного вычислительного алгоритма. Методы контроля весьма разнообразны: счет с уменьшенным шагом; сравнение с известными аналитическими решениями, сравнение с экспериментальными данными и т.д. Мы хотим обратить внимание на ту дополнительную возможность, которую здесь предоставляет решение обратной динамической задачи, или, лучше сказать, решение задачи с отрицательным временем. Следует заметить, что термин «обратные задачи» в задачах акустики имеет совершенно другое значение [6–10]. Обратные задачи акустики заключаются в определении упругих и массовых характеристик массива грунта по параметрам распространяющихся в нем волнам деформаций.

При численном решении динамической задачи погрешность при прямом и обратном течении времени получается различной. Это открывает возможность контроля точности решения. По сравнению с обычным временем отрицательное время в задачах контроля точности имеет то преимущество, что заранее известно состояние системы, к которому она должна прийти (точнее говоря, вернуться). Например, это может быть начальное ненапряженное состояние системы.

Практическое приложение решений задач с отрицательным временем мы видим в контроле точности численных методов. Рассмотрим далее особенности выполнения такого контроля.

2. Рассматриваемый численный метод интегрирования

Возможность построения решения при обратном течении времени в принципе не связана с рассмотрением какого-либо конкретного численного метода интегрирования уравнений движения, соответственно, любой вычислительный алгоритм может рассматриваться как тестируемый подобным способом. Приводимые ниже примеры решаются нами с использованием явной экстраполяционной схемы шагового интегрирования, которая достаточно подробно изложена в [11–13]. Все рассмотренные в данной статье примеры относятся к плоской задаче теории упругости с возможностью рассмотрения больших перемещений. Используются треугольные конечные элементы с линейной аппроксимацией перемещений внутри элемента. Сетка разбиения берется с постоянным шагом. Массы предполагаются сосредоточенными в узлах. Условно устойчивая вычислительная схема использует весьма малый шаг по времени, что дает возможность получать волновые решения.

Приведем крайне сокращенное описание численного метода, что необходимо для понимания особенностей решения при прямом и обратном течении времени. На рис. 2 показаны графики изменения ускорения (составляющей ускорения по одной из координатных осей) некоторого узла системы. Рассмотрим сначала обычное течение времени. На рис. 2 Δ — это шаг интегрирования по времени. W_1, W_2, W_3 — это значения ускорений на уже пройденных участках интегрирования. W_0 — ускорение, которое только что вычислено по текущим координатам узлов и значениям скоростей.

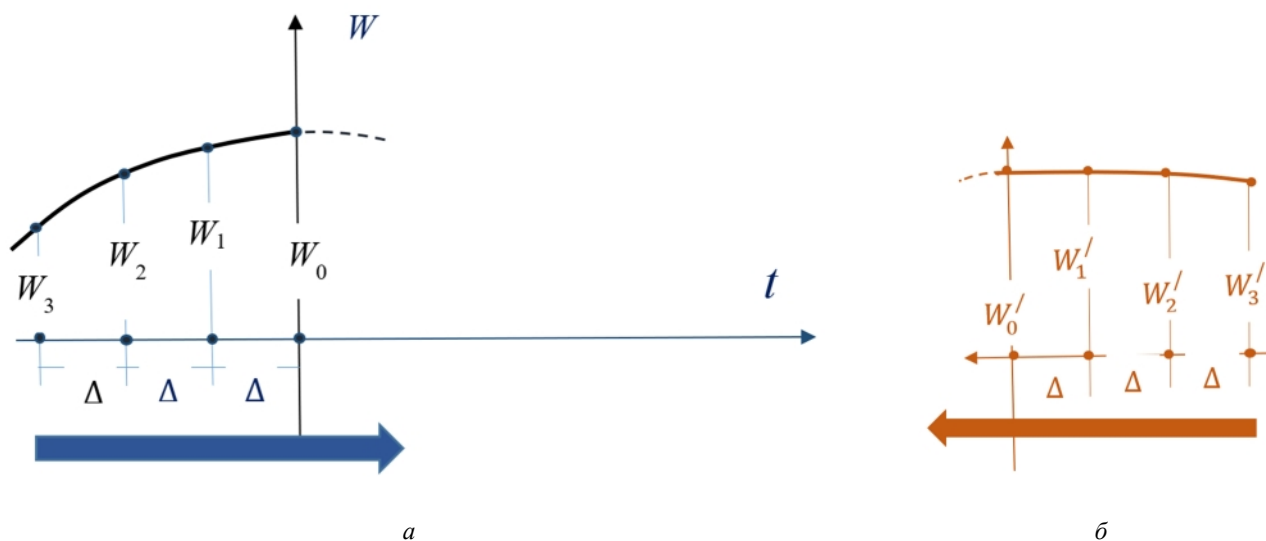


Рис. 2. График изменения составляющей ускорения:
 а — прямое течение времени; б — обратное течение времени
 Источник: выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 2. Change of acceleration component with time:
 а — forward flow of time; б — backward flow of time
 Source: compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Через четыре известных значения ускорений проводится кубическая парабола, что обеспечивает получение приближенного выражения для ускорения на предстоящем шаге интегрирования. Используемые при расчете формулы для приращения скорости и смещения за шаг по времени имеют вид

$$\Delta V = \frac{\Delta}{24}(55W_0 - 59W_1 + 37W_2 - 9W_3);$$

$$\Delta S = V_0\Delta + \frac{\Delta^2}{360}(323W_0 - 264W_1 + 159W_2 - 38W_3). \quad (2)$$

Один шаг по времени при обратном течении времени делается аналогично прямому. Значения ускорений в опорном отрезке будут W_0' , W_1' , W_2' , W_3' . Конечно, эти значения получены при обратном течении времени (см. рис. 2, б). Таким образом, шаг вперед и шаг назад по времени будут иметь каждый свою погрешность, что определяет возможность использовать отрицательное время для контроля точности.

3. Пример численного решения задачи о пластине (балке) при внезапном приложении нагрузки

На рис. 3 показана расчетная схема консольной балки (пластины). Размеры балки — высота 2 м, длина 20 м. Балка загружается 11 сосредоточенными силами 200 кН, направленными вниз. Точки приложения сил по верхней границе балки отмечены на рис. 3, а. Глухая заделка закрепляет пластину в правом сечении балки. Конечные элементы — равносторонние прямоугольные треугольники в 20 слоев по вертикали и 200 слоев по горизонтали. Таким образом, имеем 8000 конечных элементов. Материал имеет модуль упругости 200 000 МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,25$. Удельная плотность 7850 кг/м³. Толщина расчетного слоя 0,01 м. Представлена плоская деформация. Рассматриваются большие перемещения, но соотношения между деформациями и напряжениями подчиняются закону Гука, таким образом, задача условно решается с учетом лишь геометрической нелинейности, независимо от уровня напряжений.

Точки приложения сил /
Points of application of forces

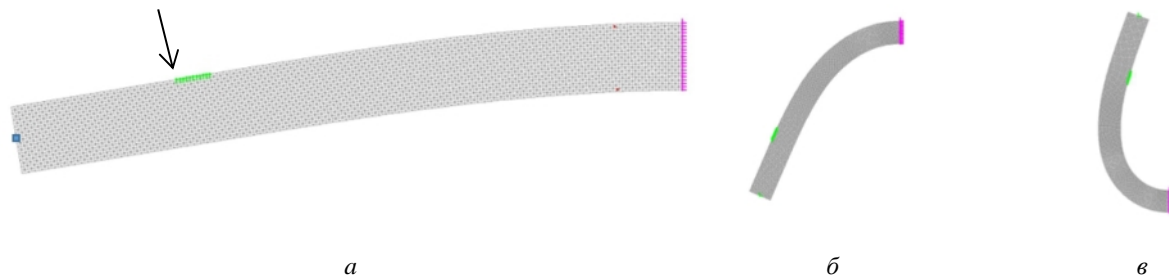


Рис. 3. Внезапное приложение нагрузки к консольной балке:
а — расчетная схема с разбивкой на конечные элементы, статический прогиб;
б — полученные в расчете максимальные отклонения вниз;
в — полученные в расчете максимальные отклонения вверх
И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 3. Instantaneous load applied to a cantilever beam:
а — finite element model; б — maximum upwards deflection; в — maximum downwards deflection
S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

В расчетной модели учитываются силы внешнего сопротивления. В каждый узел прикладывается противоположно его скорости сила сопротивления — $kt\dot{y}$, где m — масса узла. Значение k принято равным 10 с^{-1} .

На рис. 4 показан график изменения во времени перемещения отмеченной на рис. 3, а точки торцевого поперечного сечения стержня по вертикали. Красными стрелками (направленными направо) на рис. 4 отмечено обычное течение времени, голубой стрелкой (направленной налево) отмечено обратное течение времени.

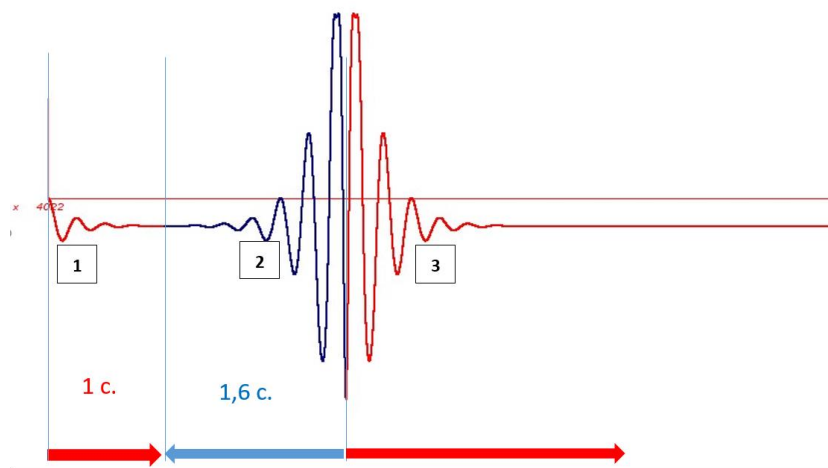


Рис. 4. График изменения перемещения торцевой точки стержня по вертикали

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 4. Vertical displacement of the end of the bar with time

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Итак, как следует из графика на рис. 4, в течение одной секунды с момента приложения нагрузки почти достигается положение равновесия балки, которое показано на рис. 3, а, где перемещения показаны в натуральном масштабе. После момента времени 1 с обычный расчет заканчивается и начинается расчет при обратном течении времени (второй участок графика на рис. 4). В нашей компьютерной программе график при обратном течении времени строится с нарастанием времени направо. При таком способе построения графиков не происходит наложения графиков, что обеспечивает их удобное сравнение и взаимный контроль. В идеале график при обратном течении времени будет зеркальным отображением графика при прямом течении времени, что и наблюдается на рис. 4.

На втором участке (рис. 4) можно наблюдать возвращение системы в исходное недеформированное состояние (график коснулся оси времени). Если в этот момент снять нагрузку, исходное равновесие восстановится. В данном примере продемонстрирован переход за начальный момент времени при сохранении нагрузки.

Поскольку при прямом течении времени амплитуды убывали (затухающие колебания), при обратном течении времени они будут неограниченно возрастать, что можно видеть на рис. 4. В данном случае на возрастание амплитуды отведено 0,6 с, при этом амплитуды стали нереально большими, система перешла в состояние весьма больших прогибов (см. рис. 3, б), которые тем не менее отображаются расчетной моделью с точки зрения геометрических соотношений. Далее (см. рис. 4) опять включается расчет с обычным течением времени, при этом система вновь проходит исходное равновесное состояние и далее повторяет движение, соответствующее обычному динамическому расчету. Насколько можно видеть из графиков на рис. 4, описанная картина движения правильно отображается расчетом.

Для более точной оценки погрешности численного решения рассмотрим данные, приведенные в табл. 1, где даны локальные минимумы перемещений для точек 1, 2, 3 (см. рис. 4). Все эти точки соответствуют тождественным состояниям системы.

Таблица 1

Локальные минимумы на графике изменения перемещения торцевой точки балки для идентичных состояний 1, 2, 3 (рис. 4)

Номер локального минимума на рис. 4	1	2	3
Значения перемещения по вертикали, метры	-3,833306	-3,833305	-3,833432

И с т о ч н и к : выполнено выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Table 1

Local minima on the bar end displacement curve for identical states 1, 2, 3 (Figure 4)

Local minima ID in Figure 4	1	2	3
Vertical displacement, m	-3.833306	-3.833305	-3.833432

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

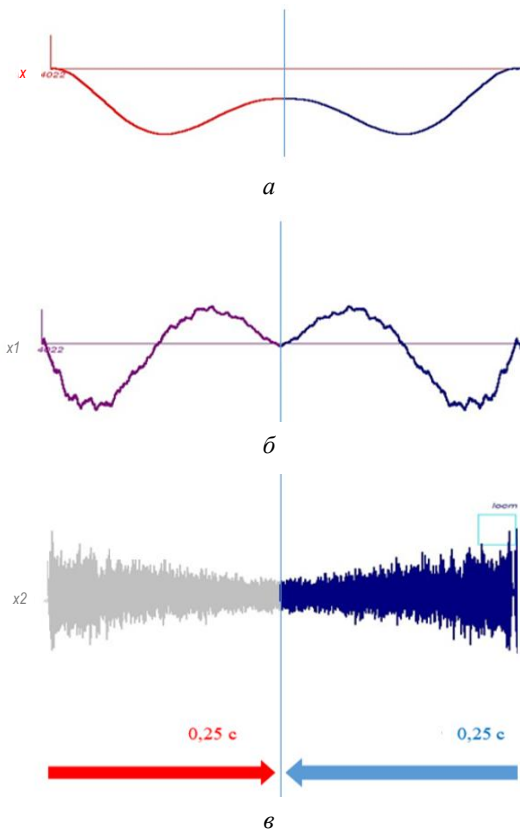


Рис. 5. Отрезок времени 0,25 с:

а — вертикальное перемещение узла (фрагмент рис. 4);

б — составляющая скорости узла по вертикали;

в — составляющая ускорения по вертикали

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 5. Time interval of 0.25 s:

а — vertical nodal displacement (Figure 4 fragment);

б — vertical component of nodal velocity;

в — vertical component of acceleration

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Как видно из табл. 1, отличия в прогибах имеются лишь в пятом знаке, что явилось неожиданностью даже для авторов статьи. Решение велось с шагом по времени $\Delta = 0,00000256\text{ с}$, таким образом, до третьего максимума компьютер выполнил около 1 миллиона шагов. Отметим, что шаг в нашей компьютерной программе назначается автоматически на основании формулы $\Delta = \frac{T^{\text{парц}}}{20}$, где $T^{\text{парц}}$ — наименьший парциальный период системы [12]. Наша явная вычислительная схема является условно устойчивой. Попытка увеличения этого шага в 2,5 раза приводит к неустойчивому вычислительному процессу. Таким образом, данные, приведенные в табл. 1, соответствуют стандартному значению шага по времени.

Сравнение напряжений при прямом и обратном счете приводит к большим погрешностям, которые содержатся уже в четвертой значащей цифре. Можно констатировать, что выполненный тест дал вполне удовлетворительный результат для напряжений и перемещений.

Теперь рассмотрим скорость по вертикали того же узла и соответствующую составляющую ускорения. На рис. 5 показан временной интервал 0,25 с от момента внезапного приложения нагрузки и обратный счет тоже 0,25 с. Графики на рис. 5, а это перемещение, скорость и ускорение торцевого узла по вертикали. Таким образом, здесь имеется график функции, ее первой и вто-

рой производной, что на первый взгляд может вызвать сомнения. Однако рассмотрение графика перемещения в сильно увеличенном масштабе эти сомнения аннулирует, так как показывает, что эта кривая отнюдь не является гладкой. Мелкие неровности на кривой перемещений отображают высокочастотные колебания узла, без моделирования которых решить задачу не получится. Подробнее этот вопрос рассмотрен в [14].

В табл. 2 даны полученные на компьютере значения экстремумов на графиках скорости и ускорения.

Таблица 2

Минимальное значение скорости и максимальное значение ускорения на отрезке времени 0,25 с

Шаг численного интегрирования Δt , с	Минимальное значение скорости на исследуемом отрезке времени м/с		Максимальное значение ускорения на исследуемом отрезке времени, м/с ²	
	Прямой ход	Обратный ход	Прямой ход	Обратный ход
$\Delta t = 0,00000256$	-53,26545	-53,21240	43244,92	29328,13
$\frac{\Delta t}{2} = 0,00000128$	-53,28352	-53,26672	43609,32	42302,79
$\frac{\Delta t}{16} = 0,00000016$	-53,29225	-53,29226	43625,28	43625,32

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Table 2

Minimum value of velocity and maximum value of acceleration over the time interval of 0.25 s.

Numerical integration step Δt , s	Minimum velocity over the considered time interval, m/s		Maximum acceleration over the considered time interval, m/s ²	
	Forward stepping	Backward stepping	Forward stepping	Backward stepping
$\Delta t = 0,00000256$	-53.26545	-53.21240	43244.92	29328.13
$\frac{\Delta t}{2} = 0,00000128$	-53.28352	-53.26672	43609.32	42302.79
$\frac{\Delta t}{16} = 0,00000016$	-53.29225	-53.29226	43625.28	43625.32

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Исходный шаг интегрирования дает для скоростей совпадение трех знаков. Уменьшение исходного шага в 16 раз приводит к совпадению семи значащих цифр.

Совпадения для ускорений получаются уже значительно хуже. Совпадение пяти знаков достигается только при уменьшении шага в 16 раз. Правда, следует отметить, что здесь мы сравниваем значения, которые могут получаться для слегка различных моментов времени, определяемых шагом при конкретной числовой реализации.

Отметим интересную особенность, которая заключается в том, что, получая существенные несовпадения экстремумов ускорений, мы тем не менее имеем очень хорошие результаты для смещений (см. табл. 1), ведь численный алгоритм полностью (см. формулы (2)) построен на ускорениях.

4. Пример численного решения волновой задачи

На рис. 6 показана расчетная область, разбитая на треугольные конечные элементы с равномерной толщиной слоев 0,005 м. Она содержит $200 \times 400 \times 2 = 160\,000$ конечных элементов (с учетом удаленных из отверстий элементов). Пустоты и вырезы получаются выбрасыванием соответствующих конечных элементов, так что границы отверстий являются ступенчатыми. Характеристики материала и допущения те же, что и в предыдущем примере, вновь рассматривается плоская деформация. Толщина расчетного слоя 0,01 м.

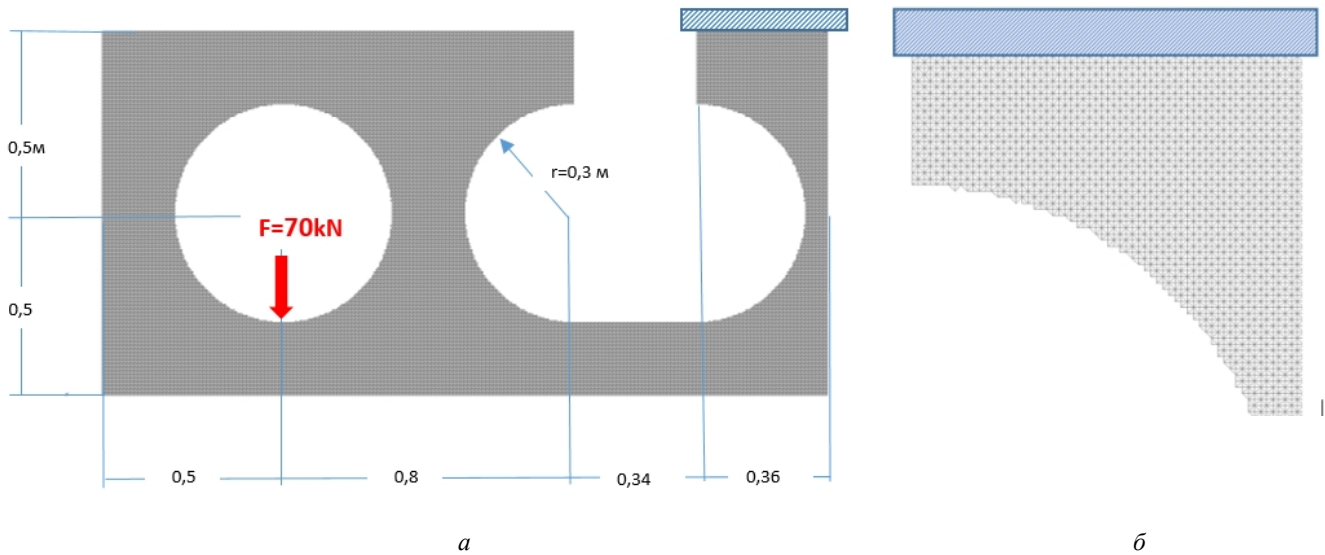


Рис. 6. Расчетная область при действии внезапно приложенной силы:
a — размеры, нагрузка и закрепление; *б* — правый верхний фрагмент расчетной схемы
 И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 6. Analyzed area subjected to instantaneous load:
a — dimensions, load and restraints; *б* — upper right segment of the model
 S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Сила F считается внезапно приложенной. Пластина закреплена по горизонтальному участку границы справа сверху жесткой заделкой. В табл. 3 приведены деформации пластины для нескольких указанных моментов времени. Эпюры даны для первого главного напряжения. Как видно, решение носит явно выраженный волновой характер. Скорость распространения фронта волн деформаций соответствует скорости распространения волны сжатия в неограниченном упругом теле.




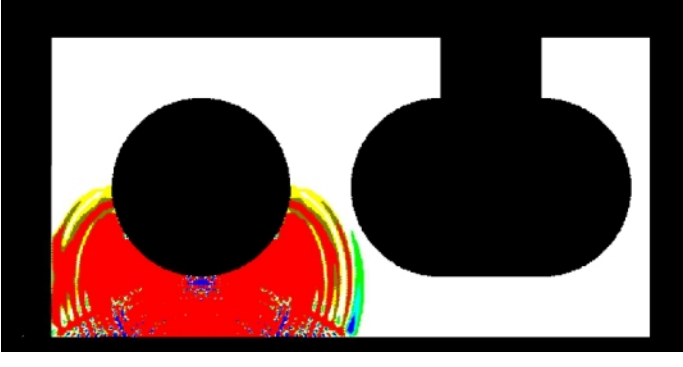
$$c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1-\mu-2\mu^2)}} = 5476,52 \text{ м/с, в чем можно убедиться, рассматривая рисунки в табл. 3.}$$

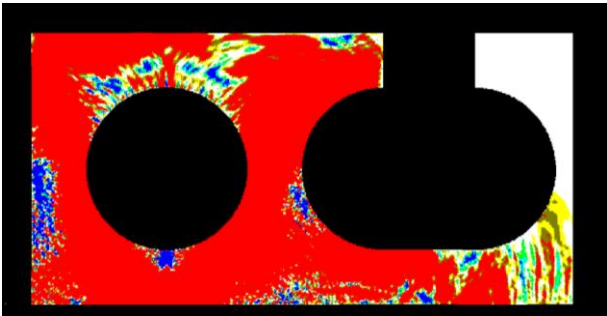
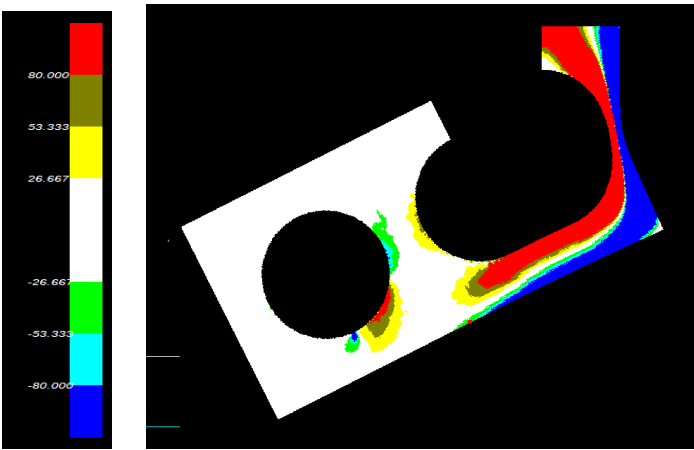
Таблица 3 / Table 3

**Задача о распространении волн деформаций в пластине сложного очертания /
 The problem of propagation of deformation waves in a plate of complex shape**

Комментарии / Comments	Состояние системы / System state
<p>Время $t = 0,00002 \text{ с}$ Эпюра первого главного напряжения /</p> <p>Time $t = 0.00002 \text{ sec.}$ Distribution of the first principal stress</p>	

Продолжение табл. 3 / Continuation of the Table 3

Комментарии / Comments	Состояние системы / System state
<p>Время $t = 0,00004$ с / Time $t = 0.00004$ sec</p>	
<p>Время $t = 0,00006$ с / Time $t = 0.00006$ sec</p>	
<p>Время $t = 0,00008$ с / Time $t = 0.00008$ sec</p>	
<p>Время $t = 0,00010$ с / Time $t = 0.00010$ sec</p>	

Комментарии / Comments	Состояние системы / System state
<p>Время $t = 0,00034$ с / Time $t = 0.00034$ sec</p>	
<p>Время $t = 0,04$ с Эпюра нормальных напряжений на горизонтальных площадках / Time $t = 0.04$ sec. Distribution of normal stress on horizontal planes. Large displacements</p>	

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном / S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

Отметим, что последний рисунок табл. 3 соответствует моменту времени 0,04 с. Для нас это достаточно большой промежуток времени, так как он соответствует выполнению более 600 000 шагов интегрирования по времени на прямой и обратный ход (шаг интегрирования в этом примере оказался равным 0,000000128 с). Кроме того, на последнем рисунке приведена эпюра для нормального напряжения на горизонтальных площадках σ_y , которое направлено вертикально, и увеличен масштаб шкалы напряжений до 80 МПа. Подчеркнем, что эти напряжения действуют именно в горизонтальной площадке, так как в нашей программе напряжения определяются в исходной глобальной системе координат.

Приведенные в табл. 3 рисунки соответствуют обычному, прямому течению времени. При выполнении расчетов с отрицательным течением времени для идентичных моментов мы получали рисунки, визуально не отличимые от имеющихся в табл. 3, поэтому в статье они не приводятся.

Для характеристики контроля точности решения с привлечением моделирования обратного течения времени рассмотрим графики на рис. 7.

Максимальное перемещение узла по вертикали составляет 0,827 м, что соответствует большим перемещениям (см. последний рисунок в табл. 3). Для графика выбрано первое главное напряжение в середине нижнего волокна пластины, так как оно достигает максимума в начале исследуемого отрезка времени 0,04 с. Как видно, нарушения симметрии на графиках незначительны. Максимумы напряжений в идентичных состояниях при прямом и обратном ходе времени отличаются на 1,2 %, и это несмотря на то, что выполнено более 0,5 млн шагов интегрирования. Решение этого примера выполнялось при стандартном шаге интегрирования 128×10^{-9} с. При использовании обычного компьютера с тактовой частотой процессора 3,2 GHz задача требует 7,2 ч процессорного времени.

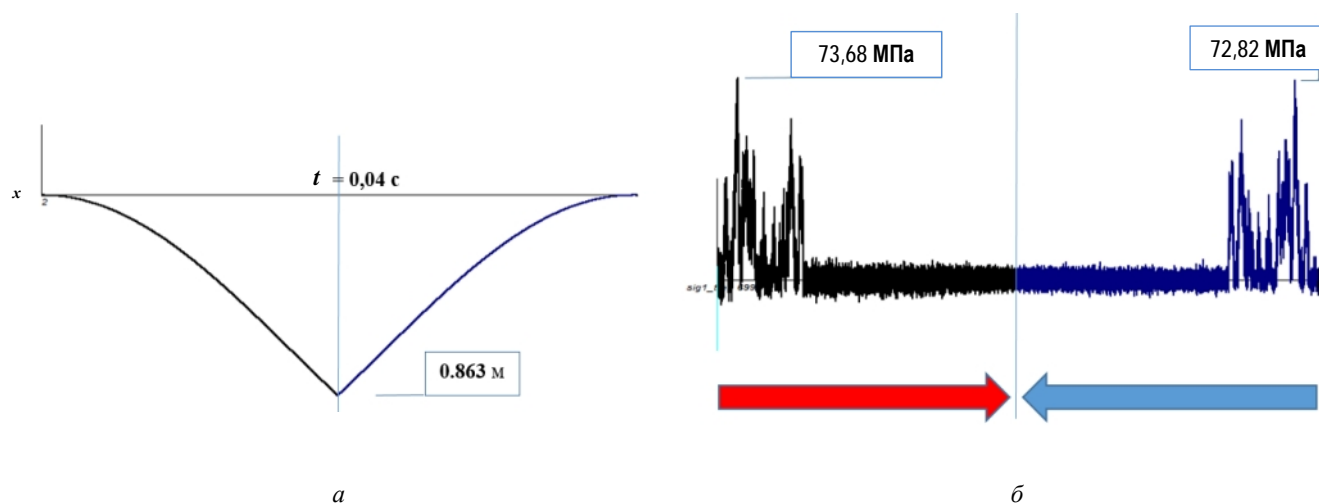


Рис. 7. Перемещения и напряжения в пластине сложного очертания при прямом и обратном течении времени: *a* — перемещение левого нижнего угла пластины по вертикали; *б* — первое главное напряжение в середине нижней границы пластины

И с т о ч н и к : выполнено В.Б. Зылевым, А.В. Штейном

Figure 7. Displacements and stresses in a plate of complex shape under forward and backward flow of time: *a* — vertical displacement of the lower corner of the plate; *б* — first principal stress in the middle of the lower edge of the plate

S o u r c e : compiled by V.B. Zylev, A.V. Shtein

5. Заключение

1. Сформулированы цели и задачи моделирования поведения деформируемой системы при обратном течении времени. Показано, как решения задач с отрицательным течением времени могут быть использованы для контроля точности численных методов интегрирования уравнений движения.

2. Явная схема интегрирования уравнений движения с экстраполяцией по Адамсу демонстрирует успешное прохождение теста на отрицательное время. Тестирование на отрицательное время показано на решении плоской динамической задачи теории упругости для двух конечно-элементных расчетных схем большой размерности. Задачи рассматриваются при больших перемещениях в геометрически нелинейной постановке.

3. Хотя контроль на отрицательное время, безусловно, не является единственным и, тем более, главным способом контроля решений динамических задач, то как дополнительное средство контроля он представляет интерес, особенно для задач, решение которых носит явно выраженный волновой характер.

Список литературы

1. Karimi Y., Rashahmadi S., Hasanzadeh R. The effects of Newmark method parameters on errors in dynamic extended finite element method // International Journal of Engineering, Transactions A: Basics. 2018. Vol. 31. No 1. P. 50–57. <https://doi.org/10.5829/ije.2018.31.01a.08>
2. Pasetto M., Waisman H., Chen J.S. A waveform relaxation Newmark method for structural dynamics problems // Computational Mechanics. 2019. Vol. 63. No. 6. P. 1223–1242. <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1646-x>
3. Ma K., Du J., Liu Ya. Nonlinear dynamic behavior analysis of closed-loop self-excited crankshaft model using improved Newmark — β method // Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 111. No. 6. P. 1223–1242. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08100-3>
4. Ye Sh., Xue T., Zhang W. Multi-stage displacement analysis based on real-time dynamic slider method // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2023. Vol. 174. No. 6. 108209. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2023.1082>
5. Soltanieh G., Kabir M.Z., Shariyat M. Improvement of the dynamic instability of shallow hybrid composite cylindrical shells under impulse loads using shape memory alloy wires // Composites Part B: Engineering. 2019. Vol. 167. P. 167–179. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.040>

6. Беженцева М.В., Вуцин Л.И., Кибец А.И., Крушка Л. Конечно-элементная методика численного моделирования упругопластического деформирования древесины при ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 428–441. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-428-441>
7. Bakushinsky A.B., Leonov A.S. Multifrequency inverse problem of scalar acoustics: remarks on nonuniqueness and solution algorithm // *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 274. No. 4. P. 460–474. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06613-9>
8. Kasenov S., Askerbekova Ja., Tleulesova A. Algorithm construction based on the gradient method of one inverse problem for the acoustics equation // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022. Vol. 2. No. 5 (116). P. 43–52. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.253568>
9. Белай О.В., Подivilов Е.В., Фрумин Л.Л., Шапиро Д.А. Обратная задача рассеяния для волнового уравнения в одномерно неоднородной среде // *Автоматрия*. 2009. Т. 45. № 6. С. 69–77. EDN: KYKGLN
10. Symes W.W., Chen H., Minkoff S.E. Solution of an acoustic transmission inverse problem by extended inversion // *Inverse Problems*. 2022. Vol. 38. No. 11. URL: <https://arxiv.org/pdf/2201.08891> (дата обращения: 10.12.2023)
11. Зылев В.Б., Штейн А.В. Численное решение задачи о нелинейных колебаниях системы нитей // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1986. № 6. С. 58–61.
12. Зылев В.Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М.: НИЦ «Инженер», 1999. 144 с. ISBN 5-8208-0012-5
13. Александров А.В., Потанов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика: в 2 кн. Книга 2. Динамика и устойчивость упругих систем. М.: Высшая школа, 2008. 384 с. ISBN: 9785060053579
14. Зылев В.Б., Григорьев Н.А., Алферов И.В. Об ускорениях точек упругих тел при соударениях // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 2 (283). 59–61. EDN: DJHVAE

References

1. Karimi Y., Rashahmadi S., Hasanzadeh R. The effects of Newmark method parameters on errors in dynamic extended finite element method. *International Journal of Engineering, Transactions A: Basics*. 2018;31(1):50–57. <https://doi.org/10.5829/ije.2018.31.01a.08>
2. Pasetto M., Waisman H., Chen J.S. A waveform relaxation Newmark method for structural dynamics problems. *Computational Mechanics*. 2019;63(6):1223–1242. <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1646-x>
3. Ma K., Du J., Liu Ya. Nonlinear dynamic behavior analysis of closed-loop self-excited crankshaft model using improved Newmark — β method. *Nonlinear Dynamics*. 2023;111(6):1223–1242. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08100-3>
4. Ye Sh., Xue T., Zhang W. Multi-stage displacement analysis based on real-time dynamic slider method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2023;174(6):108209. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2023.1082>
5. Soltanieh G., Kabir M.Z., Shariyat M. Improvement of the dynamic instability of shallow hybrid composite cylindrical shells under impulse loads using shape memory alloy wires. *Composites Part B: Engineering*. 2019;167:167–179. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.040>
6. Bezhentseva M.V., Vutsin L.I., Kibets A.I., Krushka L. Finite element method for numerical modeling of elastic-plastic deformation of wood under shock loading. *Problems of strength and plasticity*. 2020;82(4):428–441. (In Russ.) <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-428-441>
7. Bakushinsky A.B., Leonov A.S. Multifrequency inverse problem of scalar acoustics: remarks on nonuniqueness and solution algorithm. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023;274(4):460–474. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06613-9>
8. Kasenov S., Askerbekova Ja., Tleulesova A. Algorithm construction based on the gradient method of one inverse problem for the acoustics equation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022;2(5):43–52. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.253568>
9. Belai O.V., Podivilov E.V., Frumin L.L., Shapiro D.A. Inverse scattering problem for the wave equation in a one-dimensional inhomogeneous medium. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2009;45(6):546–553. <https://doi.org/10.3103/S8756699009060090>
10. Symes W.W., Chen H., Minkoff S.E. Solution of an acoustic transmission inverse problem by extended inversion. *Inverse Problems*. 2022;38(11):115003. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2201.08891> (accessed: 10.12.2023).
11. Zylev V.B., Shtein A.V. Numerical solution of the problem of nonlinear oscillations of a system of threads. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1986;6:58–61. (In Russ.)
12. Zylev V.B. *Computational methods in nonlinear mechanics of structures*. Moscow: NIC “Inzhener” Publ.; 1999. (In Russ.) ISBN 5-8208-0012-5
13. Alexandrov A.V., Potapov V.D., Zylev V.B. *Construction mechanics*. In 2 books. Book 2. *Dynamics and stability of elastic systems*. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 2008. (In Russ.) ISBN: 9785060053579
14. Zylev V.B., Grigoriev N.A., Alferov I.V. About the acceleration of points of elastic bodies in collisions. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2019;2(283):59–61. (In Russ.) EDN: DJHVAE