

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210

УДК 69.04

EDN: KSBHBB

Научная статья / Research article

### Метод расчета монтажных напряжений в стержневых конструкциях, усиливаемых в деформированном состоянии

М.Н. Серазутдинов<sup>ORCID</sup>, М.Н. Убайдуллоев<sup>ORCID</sup>✉

Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия

✉ madgidpwn@rambler.ru

#### История статьи

Поступила в редакцию: 5 февраля 2024 г.

Доработана: 24 апреля 2024 г.

Принята к публикации: 30 апреля 2024 г.

#### Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

**Аннотация.** Представлен метод и результаты расчета напряженно-деформированного состояния нагруженных металлических стержневых конструкций при их усилении за счет присоединения дополнительных элементов к основным. При таком усилении в конструкции возникают дополнительные монтажные напряжения. Изложены математическая модель и вариационный метод определения монтажных перемещений и напряжений, в котором при решении задачи не используются формулы для перемещений стержневой системы от единичных сосредоточенных сил. Предлагаемые математическую модель и метод можно с одинаковым успехом использовать при решении линейных и нелинейных задач. Для определения напряженно-деформированного состояния усиленной в период эксплуатации стержневой конструкции предложены математическая модель и метод расчета, позволяющие последовательно определять перемещения и напряжения в конструкции от воздействия начальных, монтажных и дополнительных эксплуатационных нагрузок. Применяются основные гипотезы модели теории стержней с учетом сдвигов и вариационный принцип Лагранжа. Особенность метода расчета состоит в том, что в процессе решения задачи на перемещения основных и усиливающих элементов конструкции накладываются связи и с учетом этих связей вычисляются монтажные перемещения и напряжения, возникающие при действии начальных нагрузок. Эта особенность существенно упрощает решение задачи

**Серазутдинов Мурад Нуриевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры основ конструирования и прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 9043-5123, ORCID: 0000-0001-7222-1935; E-mail: serazmn@mail.ru

**Убайдуллоев Маджид Насриевич**, доктор технических наук, профессор кафедры основ конструирования прикладной механики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 6935-9797, ORCID: 0000-0003-2265-0103; E-mail: madgidpwn@rambler.ru

© Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

и позволяет расширить круг исследуемых вопросов, так как снимает ограничения, связанные с определением монтажных сил. Решены тестовые задачи. Сравнения полученных в тестовых задачах величин монтажных перемещений и напряжений с данными, определенными другими методами, иллюстрируют достоверность и высокую точность расчетов.

**Ключевые слова:** стержневая система, усиление, напряженно-деформированное состояние, монтажные напряжения, вариационный метод

#### Для цитирования

Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Метод расчета монтажных напряжений в стержневых конструкциях, усиливаемых в деформированном состоянии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 197–210. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210>

## Method for Calculating Assembly Stresses in Frame Structures Strengthened in Deformed State

Murat N. Serazutdinov<sup>id</sup>, Madzhid N. Ubaydullov<sup>id</sup>✉

Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia

✉ madgidpwn@rambler.ru

#### Article history

Received: February 5, 2024

Revised: April 24, 2024

Accepted: April 30, 2024

#### Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

#### Authors' contribution

Undivided co-authorship.

**Abstract.** The methodology and results of calculating the stress-strain state of metal frame structures when they are strengthened by attaching additional elements to the original ones. With such strengthening, additional assembly stresses emerge in the structure. This paper presents a mathematical model and a variational method for determining assembly displacements and stresses, where the equations for displacement of the system due to unit concentrated forces are not used in solving the problem. The proposed mathematical model and method can be used with equal success for solving linear and nonlinear problems. The mathematical model and the calculation method for analyzing the stress-strain state of a frame structure strengthened during operation allow to successively determine displacements and stresses in the structure from the effects of initial, assembly and additional operational loads. The basic hypotheses of the bar theory, taking shearing into account, and the Lagrange variational principle are applied. A distinguished feature of the calculation method is that in the process of solving the problem, constraints are imposed on the displacements of the original and strengthening structural elements and, taking into account these constraints, the assembly displacements and stresses due to the initial loads are calculated. This feature significantly simplifies the solution of the problem and allows to expand the range of questions under study, since it removes the limitations associated with the determination of assembly forces. The test problems have been solved. Comparison of the values of assembly displacements and stresses obtained in the test problems and determined by other methods demonstrate reliability and high accuracy of the calculations.

**Keywords:** frame system, strengthening, stress-strain state, assembly stresses, variational method

**Murat N. Serazutdinov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Fundamentals of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 9043-5123; ORCID: 0000-0001-7222-1935; E-mail: serazmn@mail.ru

**Madzhid N. Ubaydullov**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Fundamentals of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 6935-9797; ORCID: 0000-0003-2265-0103; E-mail: madgidpwn@rambler.ru

## For citation

Serazutdinov M.N., Ubaydullov M.N. Method for calculating assembly stresses in frame structures strengthened in deformed state. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):197–210. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-197-210>

## 1. Введение

При реконструкции и ремонте сооружений в виде стержневых систем в конструкцию вносятся изменения и дополнения, которые позволяют увеличить величины действующих эксплуатационных нагрузок. Напряженно-деформированное состояние таких систем зависит от нагрузок (ремонтные нагрузки), при которых проводят реконструкцию, от способа усиления при которых могут возникать или не возникать монтажные напряжения, и от действующих после ремонта эксплуатационных нагрузок. В статье представлен метод расчета напряженно-деформированного состояния стержневой системы при усилении с возникновением монтажных напряжений.

В настоящее время теоретическому и экспериментальному исследованию усиления конструкций эксплуатируемых сооружений посвящены многие публикации. Например, вопросы проектирования и расчета усиливаемых металлических конструкций рассмотрены в статьях [1–4], а для железобетонных конструкций в [5–14]. Теоретические и экспериментальные исследования усиления сооружений с применением композитных материалов опубликованы в [11; 15–19]. В [1; 10; 20; 21] приведены результаты численных расчетов указанных исследований.

Отметим, что в настоящее время вопросы определения монтажных напряжений и их влияние на напряженно-деформированное состояние усиленных под нагрузкой конструкций в достаточной мере не изучены. В частности, в отмеченных выше публикациях возможности возникновения и влияния монтажных напряжений на напряженно-деформированное состояние усиленных под нагрузкой строительных конструкций не рассмотрены. К одной из первых работ, в которой обращается внимание на особенности учета таких напряжений при усилении конструкций, относится монография И.С. Реброва [22]. Однако в ней представлена общая постановка задачи, но не приведены методика и примеры расчетов монтажных сил и напряжений. Исследованию влияния монтажных напряжений на напряженно-деформированное состояние усиливаемых под нагрузкой стержневых систем посвящены публикации [23–25] авторов этой статьи. В этих работах описан метод определения монтажных напряжений, приведены данные расчетов, показывающие влияние этих напряжений на несущую способность усиленных под нагрузкой конструкций. Показано, что учет особенностей монтажа при усилении нагруженных стержневых конструкций под нагрузкой оказывает значительное влияние на перераспределение напряжений между элементами конструкции.

Особенность использованного в [23–25] способа определения монтажных напряжений состоит в том, что для расчета необходимо предварительно находить перемещения рассматриваемой системы от единичных сосредоточенных сил. Отметим, что алгоритм расчета монтажных напряжений с использованием перемещений от единичных нагрузок не является достаточно простым и применять этот метод, видимо, целесообразно при решении линейных задач.

В связи с этим представляется актуальной разработка сравнительно простого метода определения монтажных напряжений, в котором не используются перемещения от единичных сил, а деформации могут быть и нелинейными.

*Цель исследования* — разработка модели и метода определения монтажных перемещений и напряжений в стержневых системах, в которых при решении задачи не используются формулы для перемещений стержневой системы от единичных сосредоточенных нагрузок.

*Задачи исследования:*

➤ построение математической модели и метода определения монтажных перемещений и напряжений в стержневых конструкциях, усиленных в деформированном состоянии;

➤ иллюстрация достоверности и точности получаемых по этому методу результатов на основе тестовых численных расчетов и их сравнения с данными, опубликованными в научной литературе.

## 2. Метод расчета

Изложим вариационный метод определения монтажных перемещений и напряжений, возникающих при усилении стержневой системы, элементы которых деформированы и имеют ремонтные<sup>1</sup> (начальные) напряжения и деформации.

Полагаем, что возникающие в стержнях перемещения и деформации являются малыми. Для определения их напряженно-деформированного состояния используем теорию стержней с учетом поперечных сдвигов [25].

Введем глобальную  $0\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  и локальную  $0xyz$  декартовы системы координат. Начало локальной системы координат выбирается в поперечном сечении стержня, в котором вычисляются перемещения, деформации и напряжения. Ось  $0x$  направляется по направлению касательной к продольной оси стержня, а  $0y$  и  $0z$  располагаются в поперечном сечении.

Для вычисления напряжений  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  и деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  введем в глобальной системе координат вектор перемещений  $\bar{u}^* = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}^T$  и углов поворота поперечных сечений стержней  $\bar{\varphi}^* = \{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}^T$ . Эти векторы с компонентами, определенными в локальной системе координат, обозначим  $\bar{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$  и  $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T$ . Связь между компонентами указанных векторов описывается формулами

$$\bar{u} = [n]\bar{u}^*, \quad \bar{\varphi} = [n]\bar{\varphi}^*, \quad (1)$$

где  $[n]$  — матрица направляющих косинусов:

$$[n] = \begin{bmatrix} \cos(\hat{x}, \hat{\tilde{x}}) & \cos(\hat{x}, \hat{\tilde{y}}) & \cos(\hat{x}, \hat{\tilde{z}}) \\ \cos(\hat{y}, \hat{\tilde{x}}) & \cos(\hat{y}, \hat{\tilde{y}}) & \cos(\hat{y}, \hat{\tilde{z}}) \\ \cos(\hat{z}, \hat{\tilde{x}}) & \cos(\hat{z}, \hat{\tilde{y}}) & \cos(\hat{z}, \hat{\tilde{z}}) \end{bmatrix}.$$

В локальной системе координат деформации вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_1}{dx} - y \frac{d\varphi_3}{dx} + z \frac{d\varphi_2}{dx}, & \gamma_{xy} &= \psi_1(y, z) \left( \frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) - \psi_2(y, z) \frac{d\varphi_1}{dx}, \\ \gamma_{xz} &= \psi_1^*(y, z) \left( \frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) + \psi_2^*(y, z) \frac{d\varphi_1}{dx}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\psi_1(y, z)$ ,  $\psi_2(y, z)$ ,  $\psi_1^*(y, z)$ ,  $\psi_2^*(y, z)$  — функции, зависящие от вида деформации и формы поперечного сечения стержня [23].

<sup>1</sup>Термин «ремонтные напряжения» относится к области механики усиления и принят в соответствии с РТМ 212.0116 – 82.

Полагаем, что справедлив закон Гука:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad (3)$$

где  $E$  и  $G$  — модули упругости и сдвига материала.

Перемещения и углы поворота элементов стержневой конструкции определяются из условия вариационного принципа Лагранжа

$$\delta U - \delta W = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\delta U$  — вариация потенциальной энергии стержневой конструкции;  $\delta W$  — элементарная работа внешних сил.

В локальной системе координат

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \int \int (E\varepsilon_x \delta\varepsilon_x + G\gamma_{xy} \delta\gamma_{xy} + G\gamma_{xz} \delta\gamma_{xz}) dA dx, \\ \delta W &= \int (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_3 \delta u_3) dl + \sum_n (F_{1n} \delta u_1(x_n) + F_{2n} \delta u_2(x_n) + F_{3n} \delta u_3(x_n)) + \\ &+ \sum_k (M_{1k} \phi_k(x_k) + M_{2k} \phi_2(x_k) + M_{3k} \phi_3(x_k)), \end{aligned}$$

где  $l$ ,  $A$  — длины и площади поперечных сечений стержней конструкции;  $l_q$  — длины участков, на которых действуют распределенные нагрузки  $\bar{q}(q_1, q_2, q_3)$ ;  $\bar{F}(F_{1n}, F_{2n}, F_{3n})$  — сосредоточенные силы;  $\bar{M}(M_{1k}, M_{2k}, M_{3k})$  — сосредоточенные моменты.

Входящие в (4) величины вычисляются в локальной системе координат  $Oxyz$  с использованием формул (1–3).

Для проведения вычислений вводятся векторы перемещений и поворотов, определенные в глобальной системе координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ . На каждом из  $N$  участков стержневой системы компоненты векторов  $\bar{u}^* = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}^T$  и  $\bar{\varphi}^* = \{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}^T$  представляются в виде рядов

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_k^i = \sum_{m=1}^M C_{km}^i f_m(t). \quad (5)$$

Здесь  $k = 1, 2, 3$ ;  $i = \overline{1, N}$ ;  $C_{km}^i, D_{km}^i$  — неизвестные постоянные, которые определяются из условия (4);  $f_m(t)$  — аппроксимирующие функции,  $f_1(t) = 1-t$ ,  $f_2(t) = t$ ,  $f_m(t) = (1-t)t^{m-2}$ ,  $m = \overline{3, M}$ ;  $t = s/l_i$  — безразмерный параметр ( $0 \leq t \leq 1$ );  $s$  — длина продольной оси стержня, отсчитываемая от начала участка ( $0 \leq s \leq l_i$ );  $l_i$  — длина участка стержня с номером  $i$ .

Удовлетворяя граничным условиям и используя формулы (2–5), из условия (4) можно получить систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов рядов  $C_{km}^i, D_{km}^i$ :

$$[K]\{C\} = \{F\}, \quad (6)$$

где  $[K]$  — матрица жесткости стержневой конструкции;  $\{C\}$  — вектор неизвестных постоянных;  $\{F\}$  — вектор нагрузок.

Решение системы уравнений (6) позволяет определять коэффициенты  $C_{km}^i$ ,  $D_{km}^i$  и, используя приведенные здесь соотношения, вычислить перемещения, деформации и напряжения, возникающие в стержнях.

Изложим расчет напряженно-деформированного состояния нагруженной конструкции при усилении, в которой возникают монтажные напряжения. Этот расчет можно разбить на три этапа:

- 1) определение перемещений, деформаций и напряжений в элементах эксплуатируемой стержневой системы при воздействии начальных (ремонтных) нагрузок;
- 2) вычисление монтажных перемещений и напряжений, возникающих при усилении деформированных и напряженных элементов конструкции;
- 3) расчет конструкции после усиления при действии дополнительных эксплуатационных нагрузок.

**На первом этапе** на конструкцию действуют ремонтные нагрузки  $\bar{q}^p$ ,  $\bar{F}^p$ ,  $\bar{M}^p$ . Полагается  $\tilde{u}_k^i = \tilde{u}_k^{ip}$ ,  $\tilde{\varphi}_k^i = \tilde{\varphi}_k^{ip}$ . Определение перемещений, деформаций и напряжений в стержневой системе осуществляется по приведенным здесь соотношениям с использованием обычных процедур вариационного метода, которые подробно изложены в ряде публикаций [23–25]. В результате этого находятся прогибы  $\tilde{u}_k^{ip}$ , углы поворота  $\tilde{\varphi}_k^{ip}$ , деформации  $\varepsilon_x^p$ ,  $\gamma_{xy}^p$ ,  $\gamma_{xz}^p$  и напряжения  $\sigma_x^p$ ,  $\tau_{xy}^p$ ,  $\tau_{xz}^p$ , возникающие от ремонтных (начальных) нагрузок.

**На втором этапе** расчета вычисляются монтажные перемещения, деформации и напряжения. Возникновение этих величин обусловлено тем, что конструкция усиливается за счет присоединения к деформированным (изогнутым) стержням исходной системы недеформированных усиливающих стержней. Следовательно, первоначально между усиливаемым и усиливающим стержневым элементом имеется некоторый зазор. Соединение этих элементов осуществляется с использованием стяжных устройств так, чтобы между усиливаемым и усиливающим стержнями не возникало зазора. При этом стержневая система от воздействия стяжных устройств деформируется, в ней возникают монтажные перемещения и напряжения.

При расчете монтажных напряжений может использоваться метод, основанный на предварительном определении монтажных сил, под действием которых ликвидируется зазор между соединяемыми элементами [23–25]. Эти силы затем вносятся в выражение для элементарной работы внешних сил  $\delta W$ , и в вариационной постановке решается задача определения монтажных перемещений и напряжений.

Изложим метод вычисления монтажных перемещений деформаций и напряжений, в котором не требуется предварительно определять монтажные силы.

Введем в глобальной системе координат вектор-функции, описывающие зазоры между усиливаемым и усиливающим элементами:

$$\bar{f}^m(s) = f_1^m(s)\bar{i}^* + f_2^m(s)\bar{j}^* + f_3^m(s)\bar{k}^*, \quad (7)$$

где  $\bar{i}^*$ ,  $\bar{j}^*$ ,  $\bar{k}^*$  — орты,  $f_1^m(s)$ ,  $f_2^m(s)$ ,  $f_3^m(s)$  — расстояния между деформированными и недеформированными стержнями на участках усиления с номерами  $m = m_1, m_2, \dots, m_n$ . Обозначим через  $\bar{u}_D^m(s) = \{\tilde{u}_{1D}^m, \tilde{u}_{2D}^m, \tilde{u}_{3D}^m\}^T$  и  $\bar{u}_N^m(s) = \{\tilde{u}_{1N}^m, \tilde{u}_{2N}^m, \tilde{u}_{3N}^m\}^T$  перемещения, которые возникают соответственно в деформированных и недеформированных элементах при монтажном усилении. Чтобы между усиливаемым и усиливающим стержнями не возникало зазора, должны выполняться условия:

$$\bar{u}_N^m(s) = \bar{f}^m(s) + \bar{u}_D^m(s), \quad m = m_1, m_2, \dots, m_n. \quad (8)$$

В скалярном виде эта связь записывается следующим образом:

$$\tilde{u}_{1N}^m(s) = f_1^m(s) + \tilde{u}_{1D}^m(s), \quad \tilde{u}_{2N}^m(s) = f_2^m(s) + \tilde{u}_{2D}^m(s), \quad \tilde{u}_{3N}^m(s) = f_3^m(s) + \tilde{u}_{3D}^m(s). \quad (9)$$

Получается, что для решения задачи необходимо выполнение условия принципа Лагранжа (4) при наложенных на перемещения системы связей (9).

Удовлетворяя наложенным на перемещения стержней связям, можно определить монтажные силы  $\bar{q}^M$ , под действием которых ликвидируется зазор между соединяемыми стержнями [23–25] и с учетом  $\bar{q}^M$  вычислить монтажные напряжения [23–25]. В этом случае в вариационном уравнении (4)

$$\delta U = \delta U_o + \delta U_m(\bar{u}_N^m(s), \bar{\phi}_N^m(s)), \quad \delta W = \delta W_o + \delta W_m, \quad (10)$$

где  $\delta U_o$ ,  $\delta U_m$  — вариации потенциальной энергии исходных и усиливающих элементов стержневых элементов конструкции,  $\delta W_o$ ,  $\delta W_m$  — элементарные работы внешних и монтажных сил.

Не вычисляя  $\bar{q}^M$  и используя связи (9), исключим функции  $\tilde{u}_{1N}^m(s)$  из соотношений для  $\delta U$ . Так как  $\delta \bar{f}^m(s) = 0$ , то из равенств (9) получается

$$\delta \tilde{u}_{1N}^m(s) = \delta \tilde{u}_{1D}^m(s), \quad \delta \tilde{u}_{2N}^m(s) = \delta \tilde{u}_{2D}^m(s), \quad \delta \tilde{u}_{3N}^m(s) = \delta \tilde{u}_{3D}^m(s). \quad (11)$$

С учетом введенных обозначений для перемещений  $\bar{u}_D^m(s)$  усиливаемых стержней и уравнений (9, 10), получим

$$\delta U = \delta U_o + \delta U_m(\bar{u}_D^m(s), \bar{\phi}_N^m(s)), \quad \delta W = \delta W_o + \delta W_m^c(\bar{f}^m(s)). \quad (12)$$

Отметим, что в выражении (11) для  $\delta W$  содержатся функции  $\bar{f}^m(s)$ , описывающие зазоры между усиливаемым и усиливающим элементами.

При проведении расчетов полагается

$$\tilde{u}_k^i = \tilde{u}_k^{ip} + \tilde{u}_k^{im}, \quad \tilde{\phi}_k^i = \tilde{\phi}_k^{ip} + \tilde{\phi}_k^{im}. \quad (13)$$

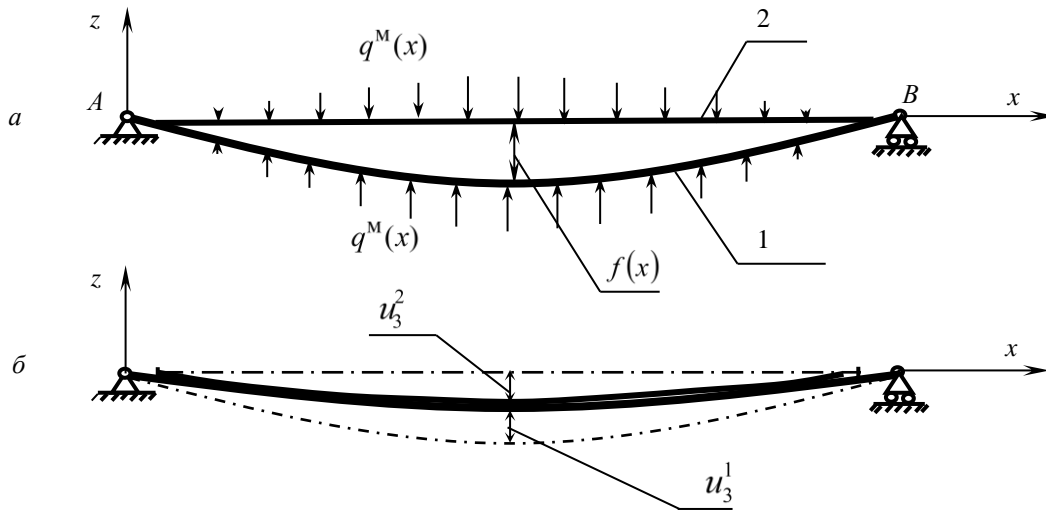
Варьируемыми величинами в (13) являются  $\tilde{u}_k^{im}$ ,  $\tilde{\phi}_k^{im}$ .

Подставляя формулы (12), (13) в условие (4), можно определить  $\tilde{u}_k^{im}$  и  $\tilde{\phi}_k^{im}$ , которые возникают в исходных элементах стержней при монтажном усилении. После этого, используя (9), можно найти перемещения  $\tilde{u}_{1N}^m(s)$  в усиливающих стержнях.

Деформации и напряжения, возникающие в стержневой системе от действия ремонтных (начальных) нагрузок и монтажного усиления, вычисляются с учетом (11).

Для более детального представления основных соотношений и особенностей расчетов на этом этапе изложим описанный метод определения монтажных напряжений в частном случае.

Пусть балка 1 (рис. 1, а) длиной  $l_1$  с площадью поперечного сечения  $A_1$  под действием ремонтных нагрузок деформируется и в ней возникает прогиб  $f(x)$ . При усилении к ней присоединяется прямолинейная балка 2 (рис. 1) длиной  $l_2$  с площадью поперечного сечения  $A_2$ . Под действием монтажных сил  $q^M$  обе балки деформируются, зазор  $f(x)$  между ними ликвидируется, они соединяются друг с другом и в дальнейшем деформируются как единое целое.



**Рис. 1.** Схема усиления деформированного стержня  
 И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым  
**Figure. 1.** Model of strengthening a deformed bar  
 S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

В данном случае в прямолинейных стержнях возникает деформация изгиба в плоскости, следовательно,  $\tilde{u}_1 = 0, \tilde{u}_2 = 0, \tilde{\varphi}_1 = 0, \tilde{\varphi}_3 = 0$  и можно считать, что  $\bar{u}^* = \bar{u}, \bar{\varphi}^* = \bar{\varphi}$ . Полагая  $s = x, u_3^1(x) = \tilde{u}_{1D}^1(x), u_3^2(x) = \tilde{u}_{1D}^2(x)$ , условие соединения балок (9) при помощи монтажных сил можно записать в следующем виде:

$$u_3^2 = f(x) + u_3^1. \tag{14}$$

Из этого уравнения следует

$$\delta u_3^2 = \delta u_3^1. \tag{15}$$

Отметим, что под действием монтажных сил  $q^M$  балки должны сблизиться. Величины  $q^M$  заранее не известны. Чтобы исключить дополнительную процедуру определения  $q^M$ , силы  $q^M$  в условие (4) не вводятся, а вместо этого учитываются связь (14) и равенство (15).

Используя соотношений (2–4), (12), (13), находим

$$\delta U_o = \int_{l_1} \int_{A_1} \left\{ E \left( z \frac{d\phi_2^1}{dx} \right) \left( z \frac{d\delta\phi_2^1}{dx} \right) + G \psi_1^* \left( \frac{du_3^1}{dx} + \phi_2^1 \right) \psi_1^* \left( \frac{d\delta u_3^1}{dx} + \delta\phi_2^1 \right) \right\} dA dx, \tag{16}$$

$$\delta U_M = \int_{l_2} \int_{A_2} \left\{ E \left( z \frac{d\phi_2^2}{dx} \right) \left( z \frac{d\delta\phi_2^2}{dx} \right) + G \psi_1^* \left( \frac{du_3^1}{dx} + \phi_2^2 \right) \psi_1^* \left( \frac{d\delta u_3^1}{dx} + \delta\phi_2^2 \right) \right\} dA dx. \tag{17}$$

$$\delta W = - \int_{l_2} \int_{A_2} G \psi_1^{*2} \left[ \frac{df(x)}{dx} \left( \frac{d\delta u_3^1}{dx} \right) + \frac{df(x)}{dx} \delta\phi_2^2 \right] dA dx. \tag{18}$$



Получилось, что при таком способе учета наложенных связей элементарная работа внешних сил (18) выражается через производную от функции  $f(x)$ , а не через монтажные силы  $q^M$ , под действием которых зазор между балками ликвидируется.

Используя соотношения (16–18), (15), можно определить возникающие при деформировании под действием  $q^M$  (рис. 1) монтажные перемещения, деформации и напряжения.

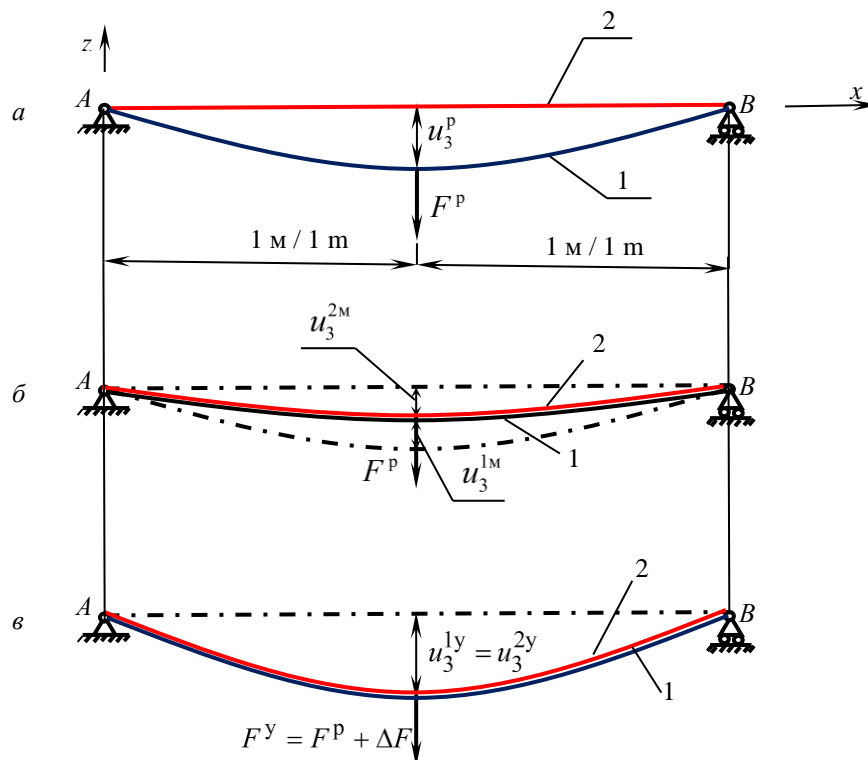
**На третьем этапе** расчета, после выполненного усиления, к конструкции могут быть приложены дополнительные эксплуатационные нагрузки  $\bar{q}^y$ ,  $\bar{F}^y$ ,  $\bar{M}^y$ . Определение напряженно-деформированного состояния на этом этапе осуществляется по уже описанной схеме. Полагается

$$\tilde{u}_k^i = \tilde{u}_k^{ip} + \tilde{u}_k^{im} + \tilde{u}_k^{iy}, \quad \tilde{\phi}_k^i = \tilde{\phi}_k^{ip} + \tilde{\phi}_k^{im} + \tilde{\phi}_k^{iy}. \quad (19)$$

Варьируемыми величинами в (19) являются  $\tilde{u}_k^{iy}$ ,  $\tilde{\phi}_k^{iy}$ . Из решения вариационной задачи находятся прогибы  $\tilde{u}_k^{iy}$  и углы поворота  $\tilde{\phi}_k^{iy}$ . Затем, с использованием (19), вычисляются деформации и напряжения, возникающие в усиленной стержневой системе.

### 3. Результаты и обсуждение

С целью иллюстрации точности расчетов по описанному методу, достоверности получаемых данных и особенностей, возникающих при усилении деформированных стержней, приведем примеры расчета двухопорной балки 1 (рис. 2, а).



**Рис. 2.** Схемы деформации балок: а — до усиления; б — после усиления; в — после приложения дополнительной нагрузки  $\Delta F$

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

**Figure. 2.** Beam deformation models: а — before strengthening;

б — after strengthening; в — after applying additional load  $\Delta F$

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

До усиления балка  $1$  деформируется под действием сосредоточенной силы  $F^P$ , в ней возникает прогиб  $u_3^P(x)$ . При усилении, с использованием стяжных устройств, эта балка и прямолинейный стержневой элемент  $2$  (рис. 2, *а*) сближаются друг с другом, и их скрепляют между собой. Зазор  $u_3^P(x)$  между балками ликвидируется. При этом возникают монтажные перемещения  $u_3^{1M}$  и  $u_3^{2M}$  и моменты  $M_1^M$  и  $M_2^M$  (рис. 2, *б*). Затем прикладывается дополнительная сосредоточенная нагрузка  $\Delta F$  (рис. 2, *в*). Сила, действующая после усиления, становится равной  $F^Y = F^P + \Delta F$ . В стержнях возникают перемещения  $u_3^{1Y}$ ,  $u_3^{2Y}$  и моменты  $M_1^Y$ ,  $M_2^Y$ .

При расчете полагалось  $F^P = 10 \text{ кН}$ ,  $\Delta F = 20 \text{ кН}$ ,  $F^Y = F^P + \Delta F = 30 \text{ кН}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Представлены два варианта расчетов:

1) балка  $1$  усиливается элементом равной жесткости ( $EJ_1 = EJ_2$ ), обе балки — двутавр № 18 ( $J_1 = J_2 = 1290 \text{ см}^4$ );

2) балка  $1$  — двутавр № 33, усиливается двутавром № 18 ( $EJ_1 > EJ_2$ ,  $J_1 = 9840 \text{ см}^4$ ,  $J_2 = 1290 \text{ см}^4$ ).

В табл. 1–4 представлены результаты расчетов, которые иллюстрируют достаточно сложные закономерности изменения перемещений и распределения усилий в стержнях при усилении. В частности, видно, что в случае  $EJ_1 = EJ_2$  ( $EJ_1/EJ_2 = 1$ ) изгибающие моменты  $M_1^Y$  и  $M_2^Y$  в балках равны ( $M_1/M_2 = 1$ ). Возникающий в середине пролета изгибающий момент  $M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$  распределяется между балками  $1$  и  $2$  пропорционально значениям жесткости балок на изгиб ( $EJ_1/EJ_2 = 1$ ,  $M_1^Y/M_2^Y = 1$ ). В случае же  $EJ_1 > EJ_2$  эта закономерность нарушается. Как видно из табл. 4, возникающий в середине пролета изгибающий момент  $M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$  распределяется между балками  $1$  и  $2$  непропорционально значениям жесткости балок при изгибе ( $EJ_1/EJ_2 = 7,63$ ,  $M_1^Y/M_2^Y = 6,2$ ).

Таблица 1

Перемещения в стержневых элементах 1 и 2 при  $EJ_1 = EJ_2$

Метод расчета	№ стержня	$u_{\max}^P$ , м	$u_{\max}^M$ , м	$u_{\max}^Y$ , м
Описанный в этой статье	1	-0,000676	0,000338	-0,00101
	2	0	-0,000338	-0,00101
Описанный в [23]	1	-0,000676	0,000337	-0,00101
	2	0	-0,000337	-0,00101

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Table 1

Displacements in bar elements 1 and 2 when  $EJ_1 = EJ_2$

Calculation method	Bar id	$u_{\max}^P$ , m	$u_{\max}^M$ , m	$u_{\max}^Y$ , m
Described in this paper	1	-0.000676	0.000338	-0.00101
	2	0	-0.000338	-0.00101
Described in paper [23]	1	-0.000676	0.000337	-0.00101
	2	0	-0.000337	-0.00101

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

Таблица 2

**Усилия в стержневых элементах 1 и 2 при  $EJ_1 = EJ_2$**

Метод расчета	№ стержня	$M_{\max}^P$ , кН·м	$M_{\max}^M$ , кН·м	$M_{\max}^y$ , кН·м
Описанный в этой статье	1	-5,0	2,5	-7,5
	2	0	-2,5	-7,5
Описанный в [23]	1	-5,0	2,5	-7,5
	2	0	-2,5	-7,5

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Table 2

**Forces in bar elements 1 and 2 when  $EJ_1 = EJ_2$**

Calculation method	Bar id	$M_{\max}^P$ , kN·m	$M_{\max}^M$ , kN·m	$M_{\max}^y$ , kN·m
Described in this paper	1	-5.0	2.5	-7.5
	2	0	-2.5	-7.5
Described in paper [23]	1	-5.0	2.5	-7.5
	2	0	-2.5	-7.5

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

Таблица 3

**Перемещения в стержневых элементах 1 и 2 при  $EJ_1 > EJ_2$**

Метод расчета	№ стержня	$u_{\max}^P$ , м	$u_{\max}^M$ , м	$u_{\max}^y$ , м
Описанный в этой статье	1	-0,000098	0,0000125	-0,000256
	2	0	-0,0000125	-0,000256

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Table 3

**Displacements in bar elements 1 and 2 when  $EJ_1 > EJ_2$**

Calculation method	Bar id	$u_{\max}^P$ , m	$u_{\max}^M$ , m	$u_{\max}^y$ , m
Described in this paper	1	-0.000098	0.0000125	-0.000256
	2	0	-0.0000125	-0.000256

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

Таблица 4

**Усилия в стержневых элементах 1 и 2 при  $EJ_1 > EJ_2$**

Метод расчета	№ стержня	$M_{\max}^P$ , кН·м	$M_{\max}^M$ , кН·м	$M_{\max}^y$ , кН·м
Описанный в этой статье	1	-5,0	0,694	-12,919
	2	0	-0,694	-2,081

И с т о ч н и к : выполнено М.Н. Убайдуллоевым

Table 4

**Forces in bar elements 1 and 2 when  $EJ_1 > EJ_2$**

Calculation method	Bar id	$M_{\max}^P$ , kN·m	$M_{\max}^M$ , kN·m	$M_{\max}^y$ , kN·m
Described in this paper	1	-5.0	0.694	-12.919
	2	0	-0.694	-2.081

S o u r c e : made by M.N. Ubaydullov

Представленные данные показывают, что даже в рассмотренном достаточно простом случае усиления статически определимой балки возникают особенности, требующие специального исследования. Для статически неопределимых систем закономерности влияния монтажных напряжений на напряженно-деформированное состояние системы являются еще более сложными. Использование же расчетов, в которых учитывается влияние монтажных напряжений на напряженно-деформированное состояние стержней, позволяет существенно увеличить эффективность усиления [24].

Отметим, что результаты, полученные с использованием описанной в данной статье математической модели и метода расчета и представленные в табл. 1 и 2, практически совпадают с данными, полученными по методу, представленному в публикации [23].

#### 4. Заключение

1. Предложены математическая модель и вариационный метод расчета монтажных перемещений и напряжений в стержневых конструкциях, усиленных в деформированном состоянии.

2. Особенность предложенного метода состоит в том, что при его использовании нет необходимости предварительно определять монтажные силы. Эта особенность существенно упрощает решение задачи и позволяет расширить круг исследуемых вопросов, так как снимает некоторые ограничения, заложенные в методиках определения монтажных сил с использованием формул для перемещений от единичных сил.

3. Сравнения полученных в тестовых расчетах величин монтажных перемещений и напряжений с данными, определенными другими методами, иллюстрируют достоверность и высокую точность расчетов. Отмечается, что при монтажном усилении возникают особенности, требующие специального исследования.

#### Список литературы

1. Liu Y., Gannon L.G. Finite element study of steel beams reinforced while under load // *Engineering Structures*. 2009. Vol. 31. Iss. 11. P. 2630–2642. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.06.011>
2. Durga P.B., Gupta L.M., Pachpor P.D., Deshpande N.V. Strengthening of steel beam around rectangular web openings // *International Journal of Engineering Science and Technology Year*. 2011. Vol. 3. Iss. 2. P. 1130–1136.
3. Воробьев А.В., Фаизов И.Н. Проектирование усиления раскосной фермы // *Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура*. 2012. № 1. С. 162–167. EDN: PMSLXZ
4. Vild M., Bajer M. Strengthening Under Load: The Effect of Preload Magnitudes // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 161. P. 343–348. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.570>
5. Бондаренко С.В., Санжаровский Р.С. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. М.: Стройиздат, 1990. 352 с.
6. Ватин Н.И., Дьячкова А.А., Кишинеvская Е.В., Кузнецов В.Д. Усиление железобетонных конструкций с использованием композиционных материалов на основе углеродных волокон и постнатягаемых стрендов // *Стройпрофиль*. 2009. № 4. С. 20–21. EDN: SBDDGX
7. Кишинеvская Е.В., Ватин Н.И., Кузнецов В.Д. Усиление строительных конструкций с использованием постнатяженного железобетона // *Инженерно-строительный журнал*. 2009. № 3. С. 29–32. EDN: NBMYYF
8. Duarte M.V. Faria. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding // *Engineering Structures*. 2011. Vol. 33. Iss. 6. P. 2025–2043. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.039>
9. Campione G. Load carrying capacity of RC compressed columns strengthened with steel angles and strips // *Engineering Structures*. 2012. Vol. 40. P. 457–465. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.006>
10. Si Larbi A., Agbossou A., Hamelin P. Experimental and numerical investigations about textile-reinforced concrete and hybrid solutions for repairing and/or strengthening reinforced concrete beams // *Composite Structures*. 2013. Vol. 99. P. 152–162. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.12.005>
11. Daugevicius M., Valivonis J., Beinaravicius A., Skuturna T., Budvytis M. Experimental Investigation of the Load Carrying Capacity of Eccentrically Loaded Reinforced Concrete Elements Strengthened with CFRP // *Procedia Engineering*. 2013. No. 57. P. 232–237. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.04.032>
12. Altin S., Kopruman Y., Baran M. Strengthening of RC walls using externally bonding of steel strips // *Engineering Structures*. 2013. Vol. 49. Iss. 3. P. 686–695. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.022>

13. Choi S.H., Hwang J.H., Han S.J., Joo H.E., Yun H. Do, Kim K.S. Seismic performance assessments of RC frame structures strengthened by external precast wall panel // *Applied Science*. 2020. Vol. 10. Iss. 5. <https://doi.org/10.3390/app10051749>
14. Neverov A.N., Truntov P.S., Ketsko E.S., Rimshin V.I. Calculating the Strengthening of Construction Structures Before the Reconstruction of the Building // *Proceedings of MPCPE 2021. Lecture Notes in Civil Engineering*. Vol. 182. P. 173–179. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_14)
15. Peng G., Xianglin G., Mosallam A.S. Flexural behavior of preloaded reinforced concrete beams strengthened by prestressed CFRP laminates // *Composite Structures*. 2016. Vol. 157. P. 33–50. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.08.013>
16. Kuzina E., Rimshin V. Strengthening of concrete beams with the use of carbon fiber // *Springer International Publishing*. 2019. Vol. 2. P. 911–919. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-19868-8\\_90](https://doi.org/10.1007/978-3-030-19868-8_90)
17. Фролов К.Е. Экспериментальные исследования железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных композитными материалами // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 3. С. 237–242. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-237-242>
18. Al-Ghazawi O., Al-Rousan R.Z. Response of Reinforced Concrete Slabs Strengthened with CFRP // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2020. Vol. 13. Iss. 6. P. 125–129. <https://doi.org/10.25103/jestr.136.17>
19. Singkh Y., Singkh K. Applications of Fiber Reinforced Polymer Laminates in Strengthening of Structures // *ITCSD 2020: 3rd International Conference on Innovative Technologies for Clean and Sustainable Development. Part of the RILEM Bookseries book series*. 2021. Vol. 29. P. 263–271. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-51485-3\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-030-51485-3_17)
20. Georgiu E., Kyriakides N., Christis Z. Correction to: Numerical simulation of RC frames infilled with RC walls for seismic strengthening of existing structures // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2022. Vol. 20. Iss. 5. P. 2369–2398. <https://doi.org/10.1007/s10518-022-01332-z>
21. Abdelrahman A. Strengthening of Concrete Structures Unified Design Approach, Numerical Examples and Case Studies. Springer Singapore, 2023. 174 p.
22. Ребров И.С. Усиление стержневых металлических конструкций. Л.: Стройиздат, 1988. 288 с. URL: <https://djuvonline.file/BuIOUzU8VpXCf> (дата обращения: 22.01.2024).
23. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н., Абрагим Х.А. Влияние монтажных сил на несущую способность усиливаемых стержневых систем // *Вестник Казанского технологического университета*. 2011. № 10. С. 116–124. EDN: NXAIQJ
24. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Усиление нагруженных стержневых конструкций с учетом влияния ремонтных и монтажных сил // *Инженерно-строительный журнал*. 2012. № 1 (27). С. 98–105. EDN: ORDEER
25. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Вариационный метод расчета прямолинейных и криволинейных тонкостенных стержней: монография. Казань: КНИТУ, 2016. 144 с. URL: <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788219547.html> (дата обращения: 22.01.2024).

## References

1. Liu Y., Gannon L.G. Finite element study of steel beams reinforced while under load. *Engineering Structures*. 2009;31(11):2630–2642. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.06.011>
2. Durga P.B., Gupta L.M., Pachpor P.D., Deshpande N.V. Deshpande. Strengthening of steel beam around rectangular web openings. *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2011;3(2):1130–1136.
3. Vorobyev A.V., Faizov I.N. Girder frame reinforcement design. *Herald of PSTU. Construction and architecture*. 2012;1:162–167. (In Russ.) EDN: PMSLXZ
4. Vild M., Bajer M. Strengthening Under Load: The Effect of Preload Magnitudes. *Procedia Engineering*. 2016;161:343–348. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.570>
5. Bondarenko S.V., Sanzharovskiy R.S. *Strengthening of reinforced concrete structures in the reconstruction of buildings*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1990. (In Russ.)
6. Vatin N.I., Dyachkova A.A., Kishinevskaya YE.V., Kuznetsov V.D. Strengthening of reinforced concrete structures using composite materials based on carbon fibers and post-stressed strands. *Stroyprofil*. 2009;4:20–21. (In Russ.) EDN: SBDDGX
7. Kishinevskaya Ye.V., Vatin N.I., Kuznetsov V.D. Strengthening building structures using post-stressed concrete. *Magazine of civil engineering*. 2009;3:29–32. (In Russ.) EDN: NBMYYF
8. Duarte M.V. Faria. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding. *Engineering Structures*. 2011;33(6):2025–2043. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.02.039>
9. Campione G. Load carrying capacity of RC compressed columns strengthened with steel angles and strips. *Engineering Structures*. 2012;40:457–465. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.006>

10. Si Larbi A., Agbossou A., Hamelin P. Experimental and numerical investigations about textile-reinforced concrete and hybrid solutions for repairing and/or strengthening reinforced concrete beams. *Composite Structures*. 2013;99:152–162. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.12.005>
11. Daugevicius M., Valivonis J., Beinaravicius A., Skuturna T., Budvytis M. Experimental Investigation of the Load Carrying Capacity of Eccentrically Loaded Reinforced Concrete Elements Strengthened with CFRP. *Procedia Engineering*. 2013;57:232–237. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.04.032>
12. Altin S., Koprman Y., Baran M. Strengthening of RC walls using externally bonding of steel strips. *Engineering Structures*. 2013;49(3):686–695. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.12.022>
13. Choi S.H., Hwang J.H., Han S.J., Joo H.E., Yun H. Do, Kim K.S. Seismic performance assessments of RC frame structures strengthened by external precast wall panel. *Applied Science*. 2020;10(5):26. <https://doi.org/10.3390/app10051749>
14. Neverov A.N., Truntov P.S., Ketsko E.S., Rimshin V.I. Calculating the Strengthening of Construction Structures Before the Reconstruction of the Building. *Proceedings of MPCPE 2021. Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021;182:173–179. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-85236-8_14)
15. Peng G., Xianglin G., Mosallam A.S. Flexural behavior of preloaded reinforced concrete beams strengthened by prestressed CFRP laminates. *Composite Structures*. 2016;157:33–50. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.08.013>
16. Kuzina E., Rimshin V. Strengthening of concrete beams with the use of carbon fiber. *Springer International Publishing*. 2019;2:911–919. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-19868-8\\_90](https://doi.org/10.1007/978-3-030-19868-8_90)
17. Frolov K.E. Experimental studies of reinforced concrete structures of hydraulic structures reinforced with composite materials. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(3):237–242. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-237-242>
18. Al-Ghazawi O., Al-Rousan R.Z. Response of Reinforced Concrete Slabs Strengthened with CFRP. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2020;13(6):125–129. <https://doi.org/10.25103/jestr.136.17>
19. Singkh Y, Singkh K. Applications of Fiber Reinforced Polymer Laminates in Strengthening of Structures. *ITCSD 2020: 3rd International Conference on Innovative Technologies for Clean and Sustainable Development. Part of the RILEM Bookseries book series*. 2020;29:263–271. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-51485-3\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-030-51485-3_17)
20. Georgiu E., Kyriakides N., Christis Z. Correction to: Numerical simulation of RC frames infilled with RC walls for seismic strengthening of existing structures. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2022;20(5):2369–2398. <https://doi.org/10.1007/s10518-022-01332-z>
21. Abdelrahman A. *Strengthening of Concrete Structures. Unified Design Approach, Numerical Examples and Case Studies*. Springer Singapore, 2023.
22. Rebrov I.S. *Strengthening of beam metal structures*. Leningrad: Stroyizdat Publ.; 1988. (In Russ.) Available from: <https://djuv.online/file/BuIOUzU8VpXCf> (accessed: 22.01.2024).
23. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N., Abragim KH.A. Influence of mounting forces on the bearing capacity of strengthened rod systems. *Herald of Technological University*. 2011;10:116–124. (In Russ.) EDN: NXAIQJ
24. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. Strengthening of the loaded beam structures taking into account repair and assembly forces. *Magazine of civil engineering*. 2012;1(27):98–105. (In Russ.) EDN: ORDEER
25. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. *Variational method for calculating rectilinear and curvilinear thin-walled rods: monograph*. Kazan: KNITU Publ.; 2016. (In Russ.) Available from: <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788219547.html> (accessed: 22.01.2024).